

## Cálculo inverso. Diagramas de utilización

Salvador Merino Córdoba

Departamento de Matemática Aplicada, ETSI Telecomunicaciones  
Campus de Teatinos, Universidad de Málaga  
29071 Málaga, España  
Tel.: 34-952-13 27 68; Fax: 34-952-13 27 66  
e-mail: smerino@uma.es

### Resumen

Este trabajo establece las estructuras básicas para que un sistema de cálculo mediante elementos finitos, aplicado al campo de las torres eléctricas, pueda desarrollar las ecuaciones de entorno LNS, y cómo usar dicha teoría en el diseño de torres de telecomunicaciones con la posición y número de antenas que el usuario desee. Este sistema ha sido posteriormente desarrollado, probado y aplicado por la compañía Ingeniería de Sistemas Interactivos (ISI).

### **Palabras clave:**

*Torre, MEF, telecomunicaciones, hiperestructura, ecuaciones LNS.*

### INVERSE CALCULUS. UTILITY DIAGRAM

### Summary

This work establishes the basic structures in order to a FEM system develop the LNS environment equations in electric transmission towers field and how to apply this theory in telecommunication towers design with the exact position and number of antennas that the user wants. This system has been later developed, probed and used by the company Engineering of Interactive Systems (ISI).

### **Key words:**

*Tower, FEM, telecommunications, hiperstructure, LNS equations.*

## TORRES DE TRANSMISIÓN ELÉCTRICA

En el campo de las Torres de Transmisión Eléctrica (TTE) ocurre frecuentemente que, transcurrido el tiempo, es necesario actualizar el tipo de conductor usado (puede haberse quedado anticuado el que tenía o no fabricarse ya ese modelo) o modificar levemente el trazado de la línea (por crecimiento de las poblaciones). Evidentemente se puede resolver este problema realizando un nuevo proyecto y calculando y fabricando otras torres. Pero pueden presentarse las siguientes situaciones:

- brevedad de tiempo para realizar el cambio del tendido
- existencia de torres iguales en el almacén
- mayor ahorro económico si utilizamos la torre que se tiene

Por lo tanto, se nos plantea una situación nueva y es ¿cómo sabemos qué tipos de modificaciones de entorno pueden resistir las torres sin cambiar su diseño y cuáles serían sus límites? Estos interrogantes no siguen las pautas del sistema de cálculo clásico, ya que no es simplemente la comprobación de una estructura donde, se aplican cargas, sino entre qué límites pueden estar estos cambios de entorno.

Actualmente estas modificaciones están siendo fundamentales en España y en muchos otros países, al incorporarse a las líneas de alta tensión el uso de la transmisión de información. Es habitual el cambio del cable de tierra clásico por otro en cuyo alma contiene fibra óptica para realizar comunicaciones. El software al que hacemos referencia puede ser obtenido en la dirección <http://www.isi.es>.

### Parámetros de entorno

Partamos en nuestro estudio de una estructura ya calculada llamada “Torre” donde sus parámetros de cargas y fuerzas axiales han sido, respectivamente, almacenadas en los archivos<sup>1</sup>

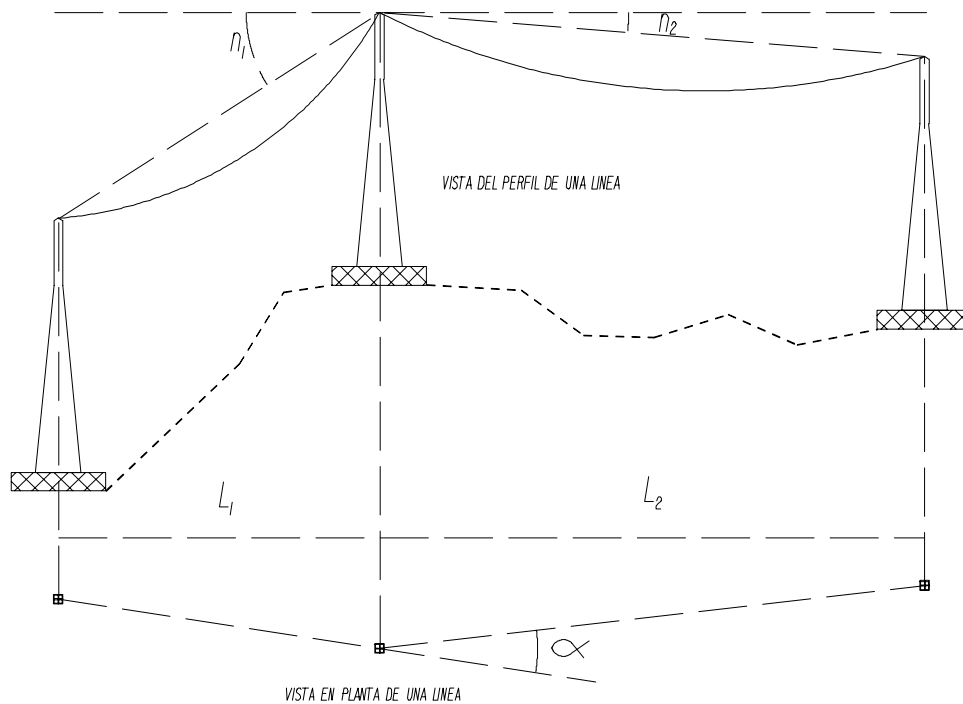
Torre.C1

Torre.AX1

Para comenzar se analizan los parámetros que intervienen en este tipo de modificaciones. Como podemos observar en el siguiente gráfico, las características en el trazado de una línea son diversas. Con estos datos se definen las siguientes variables:

- $L = (L_1 + L_2)/2$ , llamado *vano viento*, es la media aritmética de los vanos a los lados del apoyo.
- $N = \text{tg}(n_1) + \text{tg}(n_2)$  es la suma de las tangentes de la desviación vertical de la línea, debida a las irregularidades de nivel del terreno.
- $S = 2 \text{sen}(\alpha/2)$  define la desviación horizontal de la línea y nace del hecho de no poder situar las torres en línea por la existencia de algún obstáculo en el camino.

A partir de ellos se puede aceptar que todos los esfuerzos externos transmitidos a un apoyo, para un conductor, zona y condiciones de tendido determinadas, son funciones lineales de las magnitudes que se han designado por L, N y S, las que a su vez dependen de la situación de cada apoyo dentro de la línea.



**Figura 1.** Trazado y parámetros de una línea de transmisión eléctrica

### Diseño de ecuaciones LNS

Dada cualquier barra de la estructura, ésta tiene unos límites de carga que puede soportar, tanto a tensión como a compresión. Estos límites los llamamos cargas de saturación y en ellos van a influir tanto las cargas fijas propias de la estructura (su propio peso y el viento sobre la torre), como todas aquellas cargas horizontales, verticales o tensiones de conductores que se aplican sobre la misma.

A partir de estas premisas se puede establecer que la carga de saturación de una barra debe ser una función lineal de la forma

$$F = F_H L + F_V N + F_T S + F_F$$

donde  $F$  es la carga o fuerza de saturación de cada barra en cada condición,  $F_H$  la suma de los factores horizontales,  $F_V$  la suma de los factores verticales,  $F_T$  la fuerza debida a la tensión del conductor y  $F_F$  son las cargas fijas sobre la barra.

Por su expresión se conoce a estas ecuaciones como LNS.

Además de estas ecuaciones para las barras, definimos de forma similar otra para las cadenas de aisladores de la forma

$$A_W L + A_V N + A_T S = A_F$$

donde  $A_W$  es la fuerza del viento sobre el conductor,  $A_V$  la suma de los factores verticales,  $A_T$  la tensión del conductor y  $A_F$  son las cargas fijas sobre la cadena.

### Factores de repercusión y entrada de datos

En primer lugar deben calcularse los factores que nos informan de cómo cada carga con valor de una unidad dispuesta de forma vertical, longitudinal o transversal sobre cada nudo de carga (puntos donde se amarran los conductores o lugares donde se simula el viento sobre la estructura) repercute sobre las diferentes barras de la estructura. Son los llamados *factores de repercusión*.

En el caso de que estos factores de repercusión se establezcan para cada nudo de la estructura en todas las direcciones del espacio, obtendríamos en el sistema de ecuaciones a resolver el siguiente resultado

$$MX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow MX = I \Rightarrow X = M^{-1}$$

Por tanto, realmente nuestro resultado es la inversa de la matriz de rigidez, de ahí el nombre de *cálculo inverso*. Para disminuir el tiempo de computación y dado que los puntos de aplicación de las cargas son algunos en particular, realmente pasamos a resolver un *cálculo inverso selectivo*, ciñéndonos exclusivamente a los nudos que nos interesan.

La justificación de que el cálculo con cargas reales es equivalente a la combinación lineal de las cargas puntuales viene reflejada en el siguiente resultado:

#### Proposición

La combinación lineal finita de desplazamientos producidos por las fuerzas unitarias es equivalente al desplazamiento global de la estructura.

#### Demostración

Sean las variables:

$\mathbf{M}$  - matriz de rigidez de la estructura, que sólo depende de su propia geometría y del material usado;

$C$  - cargas aplicadas a la estructura;

$C_i$  - cargas unitarias aplicadas a la estructura  $i \in \{1, \dots, n\}$ ;

$X$  - desplazamientos de los nudos en las tres direcciones del espacio;

$X_i$  - desplazamientos producidos por las cargas  $C_i$ .

Tenemos que resolver el sistema  $\mathbf{M}X = C$ .

En nuestro caso, como hemos resuelto todos los sistemas  $\mathbf{M}X_i = C_i$  previamente y  $C = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_n C_n$ , siendo los  $\alpha_i$  reales, entonces

$$\mathbf{M}X = C = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_n C_n = \alpha_1 \mathbf{M}X_1 + \alpha_2 \mathbf{M}X_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{M}X_n$$

Sacando factor común la matriz  $\mathbf{M}$ , obtenemos

$$\mathbf{MX} = \mathbf{M}(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n)$$

e igualando, nos queda que  $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n$ , que justifica que *el desplazamiento global de la estructura es igual a la combinación lineal de desplazamientos unitarios* c.q.d.

El mismo argumento es aplicable tanto a las fuerzas axiales como a las reacciones, ya que ambas se obtienen como combinación lineal sobre los desplazamientos. Sean las variables:

$F$  - fuerzas axiales que soportan las barras de la estructura;

$F_i$  - fuerzas axiales al aplicarle las cargas  $C_i$  con  $i \in \{1, \dots, n\}$ ;

$R$  - reacciones que transmite la estructura a sus cuatro puntos de apoyo en el suelo;

$R_i$  - reacciones producidas al aplicarle las cargas  $C_i$  con  $i \in \{1, \dots, n\}$ ;

obteniéndose las relaciones

$$F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \dots + \alpha_n F_n$$

$$R = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \dots + \alpha_n R_n$$

Volviendo a nuestro caso particular, realizamos un cálculo de la estructura con tantas condiciones (que llamaremos *condiciones de aplicación* para distinguirlas de las de cálculo) como sean necesarias. El número de tales condiciones es la suma de:

- La cantidad de nudos que posea la estructura donde se sujeten cables, multiplicada por las tres posibles direcciones del espacio.
- La cantidad de nudos de viento multiplicada por las dos direcciones de aplicación posibles que son transversal y longitudinal (el viento nunca es vertical).
- Una carga unitaria repartida en la torre para ver cómo repercute el peso propio de la estructura en todas las barras.

Por tanto

$$\text{Condiciones} = 3 \times \text{Cables} + 2 \times \text{Vientos} + 1$$

Una vez finalizado el cálculo de los factores de repercusión, se obtiene la influencia de cualquier carga unitaria sobre cada barra de la torre. Para no interferir en los datos originales de diseño, se crean nuevos archivos de cargas y fuerzas axiales unitarias con los nombres

**Torre.C2**

**Torre.AX2**

Conocidos los datos de repercusión, el sistema solicita los datos del nuevo entorno de la torre, es decir, tipos de cables, vano, zona climática (en España existen tres diferentes, A, B y C en función de las condiciones atmosféricas del entorno y de su altura sobre el nivel del mar) y condiciones de carga a aplicar.

Las estructuras creadas para almacenar los datos acerca de los cables utilizados (cable de tierra y conductor de electricidad) y de la cadena de aisladores son las siguientes:

**Type Cables**

Fase as Integer  
Tipo as String  
Nombre as String  
Composicion as String  
Diametro as Single  
Area as Single  
Peso as Single  
ModuloElasticidad as Double  
ExpansionLineal as Double  
CargaRotura as Single  
PresionViento as Single  
CargaHielo as Single  
Tension as Single  
Temperatura as Integer  
Viento as Boolean  
Hielo as Boolean  
MaxWinTension as Single  
MaxWinTemperatura as Integer  
MaxWinViento as Boolean  
MaxWinHielo as Boolean  
MaxTemTemperatura as Integer  
MaxTemViento as Boolean  
MaxTemHielo as Boolean

End Type

**Type Cadenas**

MaximoAngulo as Single  
Longitud as Single  
Peso as Single  
Contrapeso as Single  
PresionViento as Single  
ReduccionPresionViento as Single

End Type

### Procedimiento de cálculo

A partir de la entrada de datos se completa la siguiente estructura de coeficientes para ecuaciones LNS (obsérvese que cada estructura está anidada en la siguiente):

#### Type CargaEspacial

X as Double (Longitudinal)

Y as Double (Transversal)

Z as Double (Vertical)

End Type

#### Type CoeficientesCable

CargaVariable(Condiciones) as CargaEspacial

CoeficienteS as Double

End Type

#### Type CoeficientesLNS

CoeficienteRepercusion(CondicionesAplicacion) as Double

Conductor as CoeficientesCable

Tierra as CoeficientesCable

CargaFija(Condiciones) as Double

CargaPeso as Double

End Type

Sea `CoeficienteLNS` una variable del tipo *CoeficientesLNS*. Se crea un archivo de almacenamiento con tantos registros como barras de cálculo aparezcan en la torre y donde cada uno de ellos poseerá la información de `CoeficienteLNS` para la barra. Este archivo se denomina por

`Torre.COE`

Describamos el procedimiento de cálculo de coeficientes:

- Se introducen los datos de `Torre.AX2` en `Torre.COE` ocupando la posición de cada condición de aplicación en

`CoeficienteLNS.CoeficienteRepercusion(CondicionAplicacion)`

- Para cada condición de aplicación que actúe sobre un nudo donde pueda aplicarse un cable (tierra o conductor) en sentido transversal (*Y*) se acumula su factor sobre la variable

`CoeficienteLNS.Conductor.CoeficienteS`

o

`CoeficienteLNS.Tierra.CoeficienteS` (según el tipo de cable)

- Si, dada una condición original de cálculo de la estructura, ésta tuviera carga en un nudo, se acumulan sobre su posición (la condición y su dirección *X*, *Y* o *Z*) todos los factores que pertenezcan a cargas puntuales en esa dirección y nudo sobre los valores de

`CoeficienteLNS.Conductor.CargaVariable(Condicion).X, Y o Z`

o

`CoeficienteLNS.Tierra.CargaVariable(Condicion).X, Y o Z`

- Paralelamente, si se comprueba que es un nudo de un conductor y además se trata de una torre de suspensión (ya que las de otro tipo no poseen cadenas de aisladores), se introducen las cargas fijas, según su dirección, de la forma siguiente:

Dirección  $X$  (Longitudinal) = Tensión del conductor  $\times$  Factor

Dirección  $Y$  (Transversal) = Presión de viento en la cadena  $\times$  Factor

Dirección  $Z$  (Vertical) = Peso de la cadena  $\times$  Factor

donde el *Factor* es el coeficiente de repercusión de la condición de aplicación actual sobre la barra en que trabajamos. Este dato lo acumulamos en los valores de

`CoeficienteLNS.CargaFija(Condicion)`

- En estas posiciones de cargas fijas también se introducen las debidas al viento sobre la estructura, para lo cual, una vez comprobado en cada condición si posee viento o no, se calcula el valor de

Dirección  $X$  (Longitudinal) = Carga de Viento Longitudinal  $\times$  Factor

Dirección  $Y$  (Transversal) = Carga de Viento Transversal  $\times$  Factor

siendo el *Factor* el mismo que antes, introduciéndolo nuevamente en

`CoeficienteLNS.CargaFija(Condicion)`

- En la última condición de aplicación se encuentra el factor de repercusión del peso propio de la estructura y directamente es aplicado en

`CoeficienteLNS.CargaPeso = Peso de la Estructura  $\times$  Factor`

Con ello quedan establecidos los datos necesarios para construir las ecuaciones LNS. A partir de aquí bastará con recorrer cada barra y dentro de ella cada condición de carga y cada situación (tensión o compresión) para rellenar la estructura:

### Type EcuacionLNS

`CargaSaturacion as Single`

`CoeficienteL as Single`

`CoeficienteN as Single`

`CoeficienteS as Single`

`CargasFijas as Single`

End Type

de la forma siguiente (los datos de resistencia provienen del cálculo previo de la estructura):

$F$  - EcuacionLNS.CargasSaturación = Resistencia de la Barra (Cond.,Situ.)

$F_L$  - EcuacionLNS.CoeficienteL = L1 + L2 + L3 + L4

$F_N$  - EcuacionLNS.CoeficienteN = N1 + N2

$F_S$  - EcuacionLNS.CoeficienteS = S1 + S2

$F_F$  - EcuacionLNS.CargasFijas = CoeficienteLNS.CargaFija(Condicion) +  
+ CoeficienteLNS.CargaPeso



donde

- L1 - CoeficienteLNS.Tierra.CargaVariable(Condicion).Z × Peso del Tierra
- L2 - CoeficienteLNS.Tierra.CargaVariable(Condicion).Y × Presión Viento Tierra
- L3 - CoeficienteLNS.Conductor.CargaVariable(Condicion).Z × Peso del Conductor
- L4 - CoeficienteLNS.Conductor.CargaVariable(Condicion).Y × Presión Viento Conductor
- N1 - CoeficienteLNS.Tierra.CargaVariable(Condicion).Z × Tensión Tierra
- N2 - CoeficienteLNS.Conductor.CargaVariable(Condicion).Z × Tensión Conductor
- S1 - CoeficienteLNS.Tierra.CoeficienteS × Tensión Tierra
- S2 - CoeficienteLNS.Conductor.CoeficienteS × Tensión Conductor

obteniendo la ecuación

$$F = F_L L + F_N N + F_S S + F_F$$

Si estamos en el caso de que la barra es un montante y es una torre de suspensión, entonces se puede calcular la ecuación de las cadenas de la forma:

- $A_L$  - EcuacionLNS.CoeficienteL =  $\text{tg}(\alpha) \times \text{Peso Conductor} - \text{Carga Viento}$
- $A_N$  - EcuacionLNS.CoeficienteN =  $\text{tg}(\alpha) \times \text{Peso Conductor} \times$

$$\frac{\text{TensionConductorConMaximoViento}}{\sqrt{\text{PesoConductor}^2 + (\text{PresionVientoConductor} \times \text{DiamteroConductor})}}$$

- $A_S$  - EcuacionLNS.CoeficienteS =  $-\text{TensionConductorConMaximoViento}$
- $A_F$  - EcuacionLNS.CargasFijas =  $\text{tg}(\alpha) \times (\text{PesoCadena}/2 + \text{Contrapeso}) -$   
 $-\text{PresionVientoCadena}/2$

obteniéndose análogamente la ecuación

$$A_L L + A_N N + A_S S = A_F$$

En caso de querer representar las ecuaciones, como tenemos tres variables, su expresión sería la de una interferencia de planos en el espacio. Al igual que en econometría, y para facilitar su interpretación, se fija el valor de alguna de ellas, normalmente  $S = 0$ . Entonces se calculan las intersecciones de todas las rectas y se desarrolla la poligonal que más se acerque al origen de coordenadas, es decir,  $(L = 0, N = 0)$ .

## Representación de las ecuaciones sobre el diagrama

El diagrama representado contiene por lo tanto sólo aquellas barras que, en su peor condición y situación, van a provocar las limitaciones de la torre dentro de su disposición geográfica en la línea de transmisión eléctrica.

En este diagrama el eje de ordenadas indica los diferentes valores de  $N$  (recordemos que expresa la suma de las tangentes de desviación vertical de la línea), y el de abscisas las medidas de  $L$  (máximos vanos de viento permitidos para separar las torres).

En la parte superior se encuentran (en negrita) las ecuaciones de aquellas barras que están más cerca de la saturación y, por lo tanto, provocan los límites de posibles modificaciones en el entorno de la línea. Como podemos observar, se trata de dos diagonales y un montante (leg).

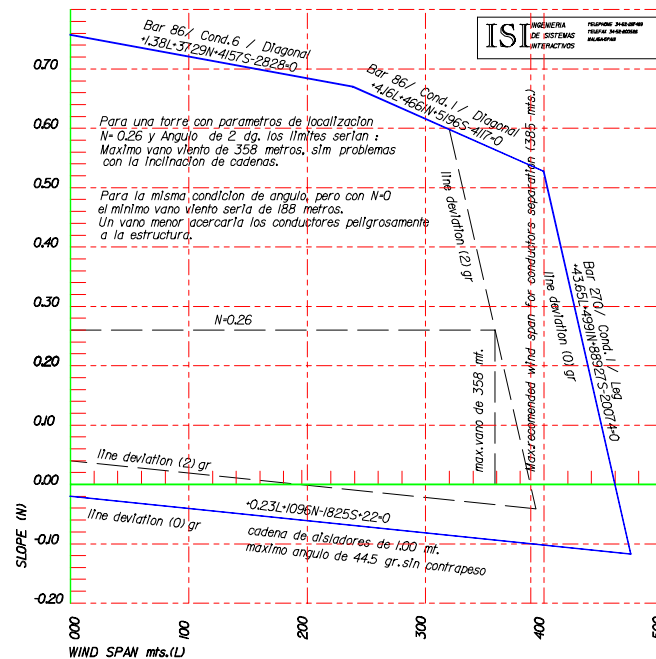


Figura 2. Diagrama de ecuaciones LN

En la parte inferior aparece la ecuación que limita la inclinación de las cadenas y que cierra el diagrama. Dentro del área delimitada será posible variar la estructura sin llegar a la saturación de ninguna de sus barras con un ángulo de desviación horizontal  $S$  nulo.

Si modificamos  $S$ , se observa cómo aparece otro diagrama dentro del anterior que limita aún más el entorno de trabajo.

El último límite que indica el diagrama es la máxima separación entre torres para que, cuando aumente el empuje del viento, los conductores no se acerquen tanto que infrinjan las distancias de seguridad exigidas y provoquen saltos eléctricos entre sí. Esta distancia viene indicada por la expresión internacional *Max. Recommended Wind Span for conductors separation*. Para el cálculo de esta distancia se hace uso de la ecuación cúbica del cambio de condiciones, donde se utilizan las herramientas necesarias del cálculo numérico para su resolución (en este caso se aplica la aproximación por el *método iterativo de Newton-Raphson*).

## Hiperestructuras

A partir de este tipo de cálculo, que hemos dado en llamar *Cálculo Inverso*, nos introducimos en un campo del cálculo más global que vamos a definir como el de las Hiperestructuras.

Generalizando los conceptos expuestos en este trabajo, ordenamos las restricciones de diseño estructural en los siguientes conjuntos:

- $E$  - Especificaciones de un proyecto (Datos del proyecto  $\cup$  Limitaciones de diseño)
- $F_0$  - Fuerzas particulares iniciales (Cargas  $\cup$  Viento  $\cup$  Escalada para Mantenimiento)
- $G$  - Geometría (Distancias  $\cup$  Códigos  $\cup$  Juntas)

A partir de aquí decimos que la estructura básica para transmisión eléctrica (o datos iniciales de entrada de una torre)  $T_0$  es una terna formada por

$$T_0 = EF_0G$$

Si a estos datos le aplicamos un sistema de cálculo (como es en nuestro caso el MEF), al que llamaremos la función *cálculo* o  $C$ , obtendremos un modelo de torre que cumplirá las restricciones estructurales que figuran en los tres conjuntos mencionados (ha sido diseñada, con sus correspondientes secciones de material existente y necesario para resistir las fuerzas aplicadas inicialmente bajo la geometría definida) y al que llamamos  $\mathbf{T}$ . Por tanto

$$\mathbf{T} = C(T_0)$$

De la misma manera designamos al Cálculo Inverso por  $C^{-1}$ , por el cual obtenemos

$$\mathbf{T} = C^{-1}(\mathbf{T})$$

El problema que nos encontramos en el cálculo inverso de  $\mathbf{T}$ , cuyo resultado es  $T$ , es que no se corresponde estrictamente con  $T_0$ . ¿Qué respuesta nos está dando entonces? Realmente lo que ocurre es que la función *cálculo* no es biyectiva, sino sobreyectiva (por ello el nombre de cálculo *inverso* no sería estrictamente correcto al no existir biyectividad). De aquí que, como dos grupos de datos distintos pueden dar la misma torre

$$\mathbf{T} = C(T_0) = C(T_1) \quad \text{con} \quad T_0 \neq T_1$$

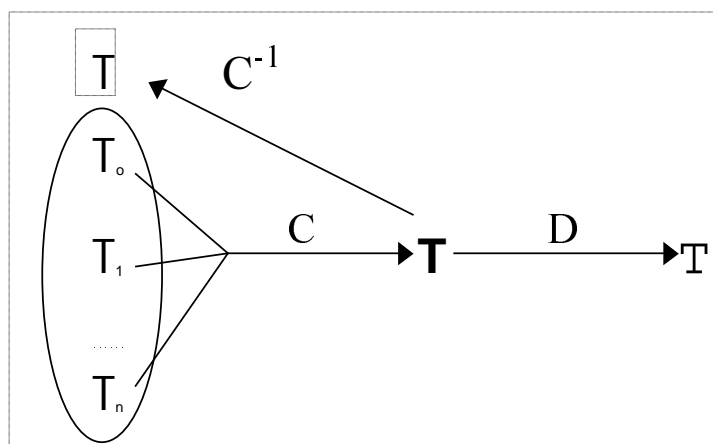
la representación de  $T = EFG$ , mediante el cálculo inverso, no es una torre, sino el poliedro (ver el gráfico del diagrama en tres dimensiones) donde están contenidas todas las condiciones de carga posibles tales que sus cálculos den la misma torre, es decir

$$T = \{T_i = EF_iG / \mathbf{T} = C(T_i)\}$$

Unido a lo anterior, podemos definir también una función de diseño o dibujo  $D$ , sólo aplicable a una torre  $\mathbf{T}$  (ya que hemos de conocer el material con el que se debe diseñar) y cuyo resultado nos servirá para la fabricación en el espacio y lo designaremos por  $\mathbf{T}$ . De aquí

$$\mathbf{T} = D(\mathbf{T}) = D(C(T_0))$$

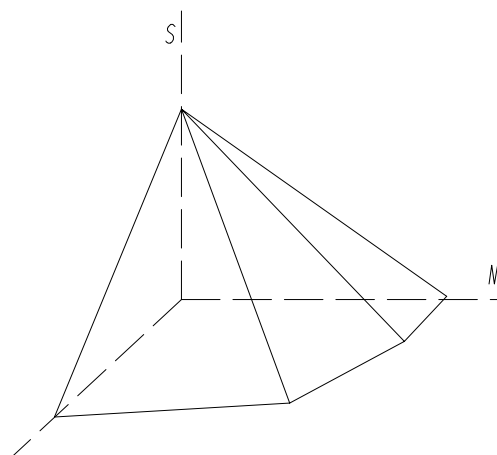
Con todo ello obtenemos el diagrama:



De aquí que definamos como Hiperestructura al conjunto

$$T = \{T_i = EF_iG / \mathbf{T} = C(T_i)\}$$

y, rigurosamente, al cálculo inverso como aquel que, a partir de los datos de una torre ya calculada  $\mathbf{T}$ , nos devuelve su hiperestructura original (todos aquellos datos de origen que producen la misma torre de cálculo). El diagrama en tres dimensiones que genera todo el conjunto  $T$ , sería:



**Figura 3.** Poliedro de utilización

## TORRES DE COMUNICACIONES

La información proporcionada por los diagramas de utilización es usada para establecer el comportamiento de una torre ante posibles cambios frecuentes y actualizaciones.

Por ello, vamos a ver cada una de las fuerzas que afectan a las torres de este tipo y cómo se incorporan a la estructura.

### Fuerzas de viento sobre la estructura

Debido a la gran altura que poseen las estructuras de telecomunicaciones, o al hecho de instalarse encima de edificios o estructuras mayores que las que hay a su alrededor, el cálculo de los vientos que les afectan es ligeramente diferente al de las torres de transmisión eléctrica.\*

En los años 60, la *US Navy* desarrolló el proyecto *OMEGA* alrededor del mundo. Se trataba de torres de comunicaciones entre 300 y 400 metros de altura que permitían establecer la posición de cualquier barco en un punto de la Tierra (esas torres han caído posteriormente en desuso al aparecer recientemente el sistema GPS por satélite). A la hora de calcular cómo era la fuerza del viento que afectaba a estas estructuras, se lanzaron globos aerostáticos para la toma de datos y de sus investigaciones se dedujo algo que hasta el momento no había sido tomado en cuenta (nunca se habían hecho estructuras tan altas y ligeras). El viento, a partir de los 10 m de altitud, va sufriendo un incremento que no se estabiliza hasta pasados los 200 m. La fórmula que deduce el factor a aplicar sobre la velocidad de viento actuante es  $\sqrt[4]{h \times 10^{-1}}$ , donde  $h$  es la altura sobre el nivel de tierra a partir de los 10 m. Este fenómeno se debe a que el viento, al ir incrementando la altura sobre el nivel de tierra, va encontrando un menor número de obstáculos (edificios, montañas, árboles, etc.) que vencer y por ello va incrementando su velocidad

\* La necesidad de mayor altura es claramente comprensible desde el momento que observamos que las torres eléctricas deben vencer ciertas distancias de seguridad con cualquier objeto que se encuentre bajo ellas, mientras que las torres de telecomunicaciones deben tratar de radiar el mayor espacio a su alrededor. Por ello buscaremos estructuras que no se desplacen mucho con el viento (para no perder señal de radio) y tan altas como sea posible.

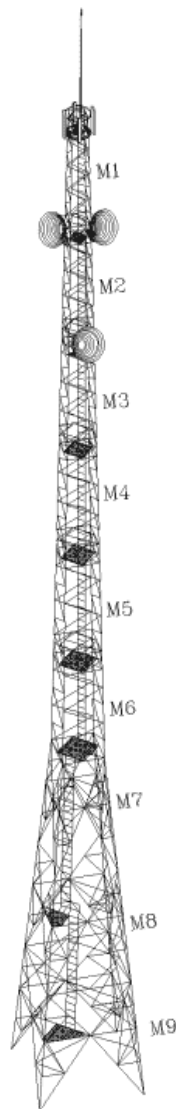


Figura 4. Torre

Para poder calcular cuál es la fuerza de viento a aplicar, sea cual sea la normativa y las velocidades de vientos que marquen cada zona geográfica, se necesitan los siguiente datos. Sean:

1.  $k(h) = \sqrt[4]{h \times 10^{-1}}$  el factor proporcional a la altura;
2.  $Op(h)$  el porcentaje de opacidad por cada metro de altura en cada nivel;
3.  $C(h)$  el valor de una carga unitaria aplicado al tope de cada panel. Si el viento es constante en toda la torre, este valor será siempre 1, pero si el viento es proporcional a la altura, entonces  $C(h) = k(h)$ ;
4.  $V_{ms} = V_{base} \times \sqrt[4]{h \times 10^{-1}} = V_{base} \times k(h)$  es la velocidad de viento expresada en metros por segundo a partir de la velocidad base (calculada para cada zona geográfica a nivel de tierra en las peores condiciones históricas registradas);
5.  $P(h)$  la presión de viento por metro cuadrado de superficie en base a la velocidad del mismo. Se calcula mediante la fórmula:  $P(h) = (V_{ms}^2/16) \times 1,6 \times 1,5$ , siendo 1,6 el factor forma del acero y 1,5 el factor debido a las dos caras de la torre.

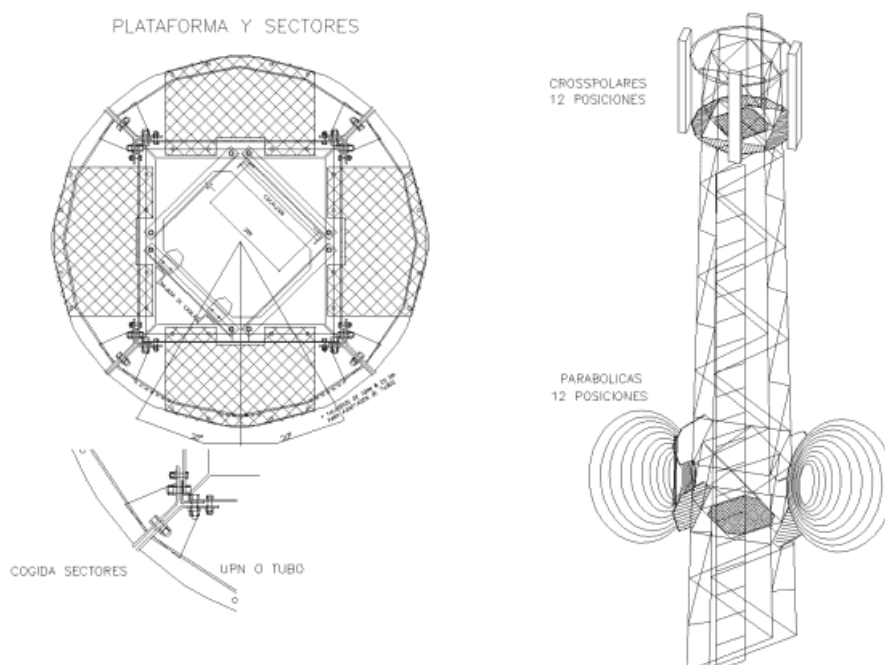
Finalmente, las cargas aplicadas por empuje del viento sobre la estructura, a cada altura, serán de

$$Carga(h) = P(h) \times Op(h) \times C(h)$$

Por lo tanto, nuestros cálculos deben partir de cuatro condiciones iniciales para establecer los factores de repercusión: carga unitaria a cada nivel y carga proporcional a cada nivel, aplicando ambos casos tanto en el sentido transversal como longitudinal.\*

### Fuerzas de viento sobre las antenas

A la hora de estimar cómo se transmite el empuje del viento sobre las antenas a la estructura, es importante considerar cuál es el sistema mecánico de acoplamiento de las antenas.



**Figura 5.** Anclaje de antenas

Se trata de un arco de circunferencia tubular que cubre 90 grados de ángulo (visto en planta) y con tres posibles posiciones de las antenas (las cuales son atornilladas a unas barras que actúan de soporte, siendo colocados estos soportes en dichas posiciones).

Una vez definido este modelo, cualesquiera combinación que se desee de antenas podrá aplicarse a la estructura. Aunque, matemáticamente, el número de posibles posiciones alrededor de la estructura es infinito, hemos de tener en cuenta que a partir de 12 posiciones es probable que las antenas parabólicas estén excesivamente próximas unas a otras y comiencen a chocar entre sí. Para el caso de antenas crosspolares de telefonía móvil, los modelos existentes en el mercado cubren un ángulo mínimo en planta de 90°, por lo que habitualmente se utiliza una configuración de cuatro antenas en círculo que cubra toda el área.

\* Usamos la nomenclatura “transversal y longitudinal” de forma incorrecta, ya que aquí no tenemos los cables de la línea eléctrica como punto de referencia, pero son definiciones que han heredado de ellas y simplemente las conservamos. En caso contrario podríamos hablar de viento frontal y viento lateral.

Elegida la configuración deseada, han de transmitirse las fuerzas a la estructura. Para ello se usa el sistema de análisis de empuje de viento sobre antenas desarrollado por la compañía Andrews [AN00]. En este sistema se han realizado todas las pruebas de túnel de viento necesarias para poder conocer con exactitud el comportamiento del viento sobre las antenas a partir del ángulo de incidencia del mismo.

A la hora de estimar la presión de viento sobre las antenas se distinguen dos tipos de cálculo en función de la clase de antenas:

1. Las antenas crosspolares: se definen por su área de pantalla, con coeficiente de forma = 1, y, por tanto, la presión ejercida tiene la expresión

$$\left(\frac{V_{ms}^2}{16}\right) \times 1,0$$

de acuerdo con la modalidad de viento, posición, etc.

2. Las antenas parabólicas se definen por su área frontal, con factores de carga variables dependiendo de la dirección del viento respecto al eje de las mismas. Se consideran las antenas en la posición local más desfavorable con relación a los vientos normal y diagonal a la estructura. Los factores de carga aplicados son

$$\text{factor carga axial: } C_a = \frac{F_a}{A \cdot V^2}$$

$$\text{factor carga normal: } C_s = \frac{F_s}{A \cdot V^2}$$

donde  $F_a$  y  $F_s$  son las cargas aplicadas al eje de la parábola y  $A$  es el área frontal de la parábola en  $m^2$ .

### Hipótesis de cargas a aplicar

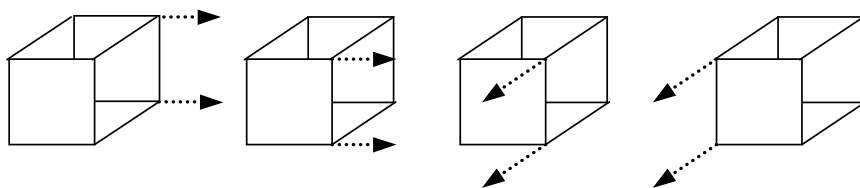
Para el cálculo de las fuerzas, han de definirse las siguientes hipótesis de carga o situaciones límite de estudio:

1. Condición de máximo desvío: es aquella situación donde el empuje de viento sobre la torre es el máximo permisible, de manera que por debajo del mismo los desplazamientos de la torre no deben provocar que sus antenas pierdan la señal de ondas que reciben y transmiten.
2. Condición de supervivencia: viento máximo soportado por la torre antes de fallar estructuralmente.

En ambas condiciones hemos de estudiar la aplicación del viento en dirección lateral y diagonal.

### Cálculo de fuerzas sobre la estructura

A la hora de transferir las cargas aplicables a los nudos de la estructura en sus niveles de antenas se calculan, de forma previa, las siguientes cuatro situaciones posibles de carga:



En cada una de estas condiciones se aplican factores de  $0,5 + 0,5$  kg y así se obtiene el factor de repercusión unitario para la combinación de cargas. Los factores de repercusión a calcular, serán por tanto

4 posibilidades  $\times$  niveles de antenas

situaciones de carga unitaria distintas para cada barra.

En resumen las condiciones estudiadas son:

1. presión de viento unitario y constante en toda la torre en sentido lateral;
2. presión de viento unitario y constante en toda la torre en sentido diagonal;
3. presión de viento unitario y proporcional a la altura en sentido lateral;
4. presión de viento unitario y proporcional a la altura en sentido diagonal;
5. opacidad de cada nivel con viento constante en toda la torre;
6. opacidad de cada nivel con viento proporcional a la altura;
7. factor peso unitario aplicado de forma proporcional al peso superior soportado, y aplicado en sentido vertical sobre cada nivel;
8. en adelante, las cuatro combinaciones de cada uno de los niveles.

De estos cálculos obtendremos, a partir de la proposición inicial, los desplazamientos estructurales, las fuerzas axiales y las reacciones.

## REFERENCIAS

- 1 R. Argüelles Álvarez, “*Cálculo de estructuras*”, Fundación Conde del Valle de Salazar, Madrid, España, (1986).
- 2 American Society of Civil Engineers, “*Guide for design of steel transmission towers*”, ASCE, New York, EE.UU., (1988).
- 3 A. Bericua Llamas, “*Truss, structural analysis program to design planar structures*”, Sydney, Australia, (1973).
- 4 F.J. Ceballos Sierra, “*Enciclopedia de microsoft visual basic*”, Ra-Ma, Madrid, España, (1994).
- 5 ISI, “*Computer integrated transmission towers system*”, Manual, Málaga, España, (1997).
- 6 L. Joyanes Aguilar, “*Metodología de la programación*”, McGraw Hill, Madrid, España, (1987).
- 7 J. Moreno Clemente, “*Cálculo de líneas eléctricas aéreas de alta tensión*”, Manual, Málaga, España, (1988).
- 8 S. Merino y M. Ojeda, “*Preliminares sobre la automatización del diseño de torres*”, ACIIC2001, Cádiz.
- 9 E. Oñate, “*Cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos*”, CIMNE, Barcelona, España, (1992).
- 10 M.F. Rubinstein, “*Matrix computer analysis of structures*”, Prentice Hall, New Jersey, EE.UU., (1966).
- 11 M.J. Turner, “*The direct stiffness method of structural analysis*”, AGARD Meeting, Aachen, Alemania, (1959).
- 12 N. Wirth, “*Algoritmos + estructuras de datos = programas*”, Del Castillo, Madrid, España, (1986).



- 13 O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor, “*El método de los elementos finitos*”, McGraw Hill, Barcelona, España, (1994).

## SOFTWARE UTILIZADO



ANDREW CORPORATION, “AntWind, version 1.0”, programado por Allan Kennedy, EE.UU., (2000).



Empresa ISI, “Torres de comunicaciones de ISI”, programado por ISI, España, (2000).



Empresa ISI, “Sistema de cálculo, diseño y fabricación de torres”, programado por ISI, España, (2001).

**Microstran** Empresa EEC, “MSTOWER & MAST, versión 5.00”, programado por EEC, Inglaterra, (1997).



Empresa CADRE Analytic, “CADRE Pro - finite element structural análisis, versión versión 4.0”, programado por CADRE, EE.UU., (2001).