

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE FORMAS EN PROBLEMAS ESTRUCTURALES CON COMPORTAMIENTO NO LINEAL DEL MATERIAL

LLUÍS GIL
GABRIEL BUGEDA
y
EUGENIO OÑATE

*Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Módulo C1, Campus Norte UPC, Gran Capitán s/n
08034 Barcelona, España
Tel: + 34-93-205 7016, Fax: + 34-93-401 6517
E-mail: lluis@ulises.upc.es*

RESUMEN

El presente trabajo describe las dificultades y consideraciones acerca del análisis de sensibilidad cuando en una estructura el material deja de comportarse en forma elástica lineal. Se propone el cálculo de la sensibilidad en un esquema directo para los casos de plasticidad y daño. Se ofrece una solución general para tratar el problema del ablandamiento y obtener valores de sensibilidad con sentido físico. Diversos ejemplos de fácil reproducción ilustran la utilidad del método y la bondad de los planteamientos propuestos.

SHAPE SENSITIVITY ANALYSIS FOR STRUCTURAL PROBLEMS WITH NON LINEAR MATERIAL BEHAVIOUR

SUMMARY

This work describes the difficulties and considerations around sensitivity analysis when the material of the structure behaves non linearly. It is proposed a direct methodology to obtain such sensitivity in plasticity and damage structures. Moreover, a general solution to deal with the softening problem in structures is formulated obtaining values of sensitivity with physical sense. Several examples of applications explain the utility and benefits of the methods proposed.

Recibido: Octubre 1997

INTRODUCCIÓN

El mundo del diseño en la ingeniería evoluciona muy rápidamente. Hasta hace muy poco, la base del diseño de piezas, en ingeniería, residía en la confección y ensayo de prototipos. Sin embargo, actualmente, el diseño mediante simulación con ordenadores es una realidad presente en la mayor parte de industrias que desean ser competitivas. Dos causas principales fundamentan este crecimiento, por un lado las mejores prestaciones en los equipos informáticos y por otro, los nuevos algoritmos computacionales.

En el diseño de una pieza, los planteamientos de optimización de costes y las exigencias de calidad han estimulado la investigación sobre el análisis de sensibilidad. La información que se obtiene a través de dicho análisis permite el uso directo de algoritmos de optimización y fiabilidad. Asimismo, la posibilidad de predecir el comportamiento estructural mediante la extrapolación de la respuesta del sistema, facilita la toma de decisiones durante las etapas de diseño. En el presente artículo, los autores abordan el análisis de sensibilidad cuando el comportamiento del material que conforma el sistema estructural no puede modelizarse según una ley lineal.

En términos generales, la sensibilidad se concibe como una relación incremental entre unos parámetros de control, como puede ser la respuesta estructural, y unas variables de diseño que definen la forma del problema. Por lo tanto, dada una variable de diseño q se definiría la sensibilidad de la respuesta estructural en desplazamientos \mathbf{u} como la relación $d\mathbf{u}/dq$ y en tensiones como $d\boldsymbol{\sigma}/dq$. Debe destacarse que en el caso de un problema de optimización, dicha sensibilidad se puede calcular para la función objetivo y para las restricciones. Dichas funciones dependen, en general, de la respuesta estructural; por ello, en este trabajo, se ha considerado primordialmente la obtención de la sensibilidad de los campos respuesta.

El artículo se organiza como sigue. En los apartados siguientes se presentan los aspectos básicos del cálculo de sensibilidad en problemas estructurales con no linealidad del material. Las expresiones generales se particularizan para los modelos materiales de elastoplasticidad y daño. Se presta especial atención al cálculo de sensibilidades en problemas de ablandamiento utilizando un método de control de carga. La eficacia de la metodología propuesta se ilustra en diversos ejemplos de aplicación.

EL CÁLCULO DE LA SENSIBILIDAD

Actualmente, es posible obtener los valores del análisis de sensibilidad en problemas estructurales mediante el empleo de tres grandes estrategias de cálculo que, a su vez, se subdividen en otras clasificaciones: diferencias finitas (DF), método de diferenciación directa (MDD) y método de la variable adjunta (MVA)⁴. Las diferencias finitas han sido, hasta hace poco, el método habitual de cálculo de la sensibilidad dado su carácter claramente intuitivo. En este caso, se concibe el cociente diferencial como un cociente incremental y se puede obtener la sensibilidad con una simple perturbación del diseño. En su detrimento debe alegarse el alto coste computacional, dado que exigen un reanálisis de la estructura, así como una notable dependencia de los resultados con la

magnitud de la perturbación y la naturaleza de la variable de diseño⁵. Dichos aspectos negativos hacen que, en general, se opte por utilizar los otros métodos mencionados. En particular, cuando se desea obtener la sensibilidad de las restricciones en el problema de optimización, suele ser más ventajoso realizar el cálculo mediante el método de la variable adjunta, pero si se desea la sensibilidad de los campos de la respuesta estructural, entonces el método de diferenciación directa es el más competitivo. En el caso de comportamiento no lineal algunos autores recomiendan este último método (MDD)^{12,7}.

En el caso de comportamiento no lineal del material diversos autores se han preocupado por los problemas de sensibilidad en plasticidad y son varias las aportaciones en este campo^{6,12,8,9}. Dado que la mayoría de problemas no lineales se resuelven de forma incremental, los planteamientos actualmente existentes se fundamentan en la obtención de la sensibilidad como suma de incrementos, esto es

$$\frac{t+\Delta t du}{dq} = \frac{t du}{dq} + \Delta \quad \Delta t \left(\frac{du}{dq} \right) \quad (1)$$

La magnitud incremental de la sensibilidad se obtiene en cada paso de cálculo a través de la derivación de la ecuación ecuación integral incremental de equilibrio

$$\frac{d}{dq} \left[\int_V \mathbf{B}^t \dot{\boldsymbol{\sigma}} dV - \dot{\mathbf{f}} \right] = 0 \quad (2)$$

donde \mathbf{B} es la matriz de deformación, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ el vector incremental de tensiones y $\dot{\mathbf{f}}$ el vector incremental de las fuerzas externas.

O de forma alternativa, a partir de la ecuación discreta incremental de equilibrio, en un esquema incremental-iterativo se tiene que

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}, q) \Delta \mathbf{u}(q) = {}^{t+\Delta t} \mathbf{f} - {}^t \mathbf{r} \quad (3)$$

donde \mathbf{K}_T es la matriz tangente del sistema, $\Delta \mathbf{u}$ el vector de incrementos de desplazamientos, ${}^{t+\Delta t} \mathbf{f}$ el vector de fuerzas externas nodales y ${}^t \mathbf{r}$ la fuerza interna del paso de carga anteriormente convergido.

Dichas estrategias conllevan un cierto coste computacional, debido a que se debe calcular la sensibilidad al final de cada incremento de carga. Asimismo, su naturaleza incremental las hace susceptibles de acumular y arrastrar errores previos y, en ciertos modelos de plasticidad, pueden depender de la estrategia de cálculo, número y tamaño de los incrementos. Otra forma de abordar con carácter general el problema de la sensibilidad con comportamiento no lineal del material aparece en¹¹ y aplicado de forma específica a la plasticidad en¹. En este último artículo se propone la derivación de la ecuación global de equilibrio en su forma variacional integral

$$\frac{d}{dq} \left[\int_V \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma} dV - \mathbf{f} \right] = 0 \quad (4)$$

donde \mathbf{B} es la matriz de deformación, $\boldsymbol{\sigma}$ el vector de tensiones y \mathbf{f} el vector de fuerzas nodales externas. En el artículo que se presenta se sigue esta línea de razonamiento

y se propone una estrategia de evaluación de la sensibilidad de forma directa en los puntos de equilibrio, sin necesidad de recurrir a una estrategia de tipo incremental. Además, en el caso del ablandamiento se plantea una metodología de carácter general para solventar los problemas de la evaluación de la sensibilidad que conlleva este tipo de análisis.

PLANTEAMIENTO GENERAL DEL ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN PROBLEMAS NO LINEALES

En los modelos constitutivos con comportamiento no lineal del material, es frecuente expresar de forma general las tensiones en un punto de la pieza según una ley del tipo

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, \kappa(\varepsilon)) \quad (5)$$

donde ε es la deformación total del punto y κ es el conjunto de variables internas que caracterizan el comportamiento constitutivo no lineal. En el caso de plasticidad es la deformación plástica y en el caso de un modelo de daño coincide con el parámetro que evalúa el nivel de daño.

Se sabe que en el momento de alcanzar una posición de equilibrio entre las fuerzas internas y las externas que solicitan la estructura (Figura 1) se puede escribir la ecuación discretizada por elementos finitos como

$$\sum_{\text{elem}} \int_V \mathbf{B}^t \sigma dV - \mathbf{f} = 0 \quad (6)$$

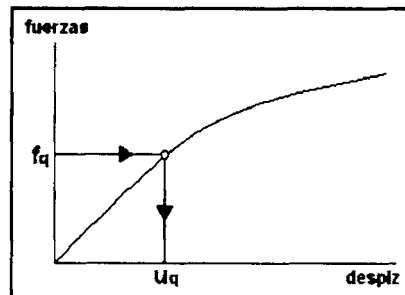


Figura 1. Curva de equilibrio en una respuesta estructural no lineal

Teniendo en cuenta que se desea calcular la sensibilidad de la respuesta en dicha posición, se debería derivar de forma natural la ecuación de equilibrio según la expresión siguiente donde q es una variable de diseño

$$\frac{d}{dq} \left[\sum_{\text{elem}} \int_V \mathbf{B}^t \sigma dV - \mathbf{f} \right] = \sum_{\text{elem}} \left[\frac{d}{dq} \int_V \mathbf{B}^t \sigma dV \right] - \frac{d\mathbf{f}}{dq} = 0 \quad (7)$$

Desarrollando la expresión anterior para cada elemento de la malla y suponiendo que se integra en un recinto isoparamétrico, se obtiene que para cada integral elemental se verifica

$$\int_{V_0} \frac{d\mathbf{B}^t}{dq} \boldsymbol{\sigma} |J| dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{B}^t \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dq} |J| dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma} \frac{d|J|}{dq} dV_0 - \frac{d\mathbf{f}}{dq} = 0 \quad (8)$$

La mayor parte de dichas integrales tienen expresiones ya conocidas¹³. Sin embargo, la segunda contiene los términos de no linealidad que caracterizan al comportamiento constitutivo.

El reagrupamiento de los términos de la ec. (8) conduce a

$$\int_{V_0} \mathbf{B}^t \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dq} |J| dV_0 = \frac{d\mathbf{f}}{dq} - \int_{V_0} \frac{d\mathbf{B}^t}{dq} \boldsymbol{\sigma} |J| dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma} \frac{d|J|}{dq} dV_0 \quad (9)$$

donde la sensibilidad de la respuesta estructural aparece en el primer miembro de la igualdad, mientras que los términos del segundo miembro no dependen de la misma. El problema de la no linealidad mecánica estriba en calcular la primera integral de la expresión anterior. A continuación se detalla dicho cálculo para los modelos de plasticidad y daño.

MODELO DE PLASTICIDAD

En los modelos de plasticidad, el estado tensional depende de forma implícita del estado de deformaciones y, en consecuencia, se puede escribir

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dq} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial q} + \left[\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \frac{d\boldsymbol{\kappa}}{dq} \right] \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dq} \quad (10)$$

Siendo \mathbf{D} la matriz constitutiva tangente, se puede escribir

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dq} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial q} - \mathbf{D}_T \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dq} \quad (11)$$

Debe destacarse que en la integración numérica de las tensiones es común emplear un algoritmo de retorno. En consecuencia, la matriz tangente proviene de diferenciar la expresión discreta de las tensiones². El uso de dicha matriz es necesario para converger de forma cuadrática el problema. Por lo tanto, no es necesario un esquema incremental para evaluar la sensibilidad en un cierto punto de equilibrio, basta con aprovechar la matriz tangente utilizada en el proceso iterativo de resolución y resolver el sistema de ecuaciones asociado.

En lo que sigue se considera una relación infinitesimal entre las deformaciones y los desplazamientos que en forma discretizada se expresa según

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (12)$$

donde \mathbf{B} es la matriz de deformación y \mathbf{u} el vector de desplazamientos nodales incógnita. Derivando la ec. (12) se obtiene

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dq} = \frac{d\mathbf{B}}{dq} + \mathbf{B} \frac{d\mathbf{u}}{dq} \quad (13)$$

Por lo tanto, reagrupando las ecs. (9)-(13) una parte de los términos se convierte en la respuesta incógnita y otra va a engrosar el vector de pseudocargas, obteniéndose

$$\int_{V_0} \mathbf{B}^t \mathbf{D}_T \mathbf{B} \frac{d\mathbf{u}}{dq} |J| dV_0 = \frac{d\mathbf{f}}{dq} - \int_{V_0} \frac{d\mathbf{B}^t}{dq} \boldsymbol{\sigma} |J| dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma} \frac{d|J|}{dq} dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{B}^t \mathbf{D}_T \frac{d\mathbf{B}}{dq} \mathbf{u} |J| dV_0 \quad (14)$$

o bien, en forma matricial, se puede expresar como

$$\mathbf{K} - \frac{d\mathbf{u}}{dq} = \mathbf{f}^* \quad (15)$$

siendo \mathbf{K}_T la matriz tangente y \mathbf{f}^* el vector de pseudocargas

$$\mathbf{K}_T = \int_{V_0} \mathbf{B}^t \mathbf{D}_T \mathbf{B} |J| dV_0 \quad (16)$$

$$\mathbf{f}^* = \frac{d\mathbf{f}}{dq} - \int_{V_0} \frac{d\mathbf{B}^t}{dq} \boldsymbol{\sigma} |J| dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma} \frac{d|J|}{dq} dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{B}^t \mathbf{D}_T \frac{d\mathbf{B}}{dq} \mathbf{u} |J| dV_0 \quad (17)$$

En consecuencia, aunque tradicionalmente el análisis de sensibilidad estructural para este tipo de problemas se realiza de forma incremental, tal y como se ha observado en los desarrollos previos, el cálculo de dicha sensibilidad puede hacerse en el último estado de equilibrio y sin necesidad de realizar ningún cálculo incremental previo. Sin embargo, debe tenerse en cuenta la particularización de las expresiones para la formulación de cada modelo de plasticidad. Desde un punto de vista intuitivo, las afirmaciones anteriores son lógicas, piénsese que la derivada de una función genérica, no necesariamente lineal, en un punto $f(\mathbf{x})$ es un concepto local y no depende de los valores de las derivadas en los puntos anteriores $f(\mathbf{x}^{t-\Delta-t})$. Por otro lado, hay que advertir que la matriz constitutiva tangente ya incorpora, en sí misma, la historia de cargas del problema.

MODELO DE DAÑO

Los modelos de daño se basan en la existencia de una variable interna del material d que modifica el comportamiento tensional de la estructura. La ecuación constitutiva en el modelo de daño más sencillo depende de un solo parámetro \mathcal{D} como

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - \mathcal{D}) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad 0 \leq \mathcal{D} \leq 1 \quad (18)$$

El modelo exige definir una superficie de fluencia y realizar una comparación entre una norma del estado tensional, equiparable a las que se establecen de forma clásica en plasticidad y un valor límite de cedencia.

La variable de daño evoluciona en función del estado de deformaciones. Para la formulación utilizada en este trabajo se ha tomado la ecuación de evolución siguiente¹⁰

$$\mathcal{D} = 1 - \frac{\tau^*}{\tau} e^{A(1-\frac{\tau}{\tau^*})} \quad (19)$$

Donde τ es una norma del estado tensional que en este caso es equivalente a la energía de deformación, τ^* es el valor límite de la norma a partir del cual se inicia el daño y A una constante de regularización de la malla que depende explícitamente de la longitud característica l_c del elemento. La regularización pretende asegurar el balance energético de disipación adecuado del problema y eliminar la dependencia que la respuesta tiene con respecto de la calidad de la malla que se utiliza. De forma práctica esto significa que las tensiones en el elemento dependen implícitamente de su tamaño, y por lo tanto en el caso de cambio de formas se debe incluir este efecto en el cálculo de derivadas.

Nótese que

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathcal{D}(\boldsymbol{\varepsilon}, l_c)) \quad (20)$$

En consecuencia ahora se obtiene

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dq} = \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial q} + \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dq} + \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\mathcal{D}} \frac{d\mathcal{D}}{dq} \quad (21)$$

y según (20)

$$\frac{d\mathcal{D}}{dq} = \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial q} + \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dq} + \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial l_c} \frac{dl_c}{dq} \quad (22)$$

Nótese que en este caso, en la derivación, aparece un término más que en el caso de la plasticidad (14). Si la longitud característica utilizada en el cálculo depende del tamaño del elemento, se toma

$$l_c = (V_{\text{elem}})^{1/n} \quad (23)$$

donde el índice n toma el valor de 1, 2 o 3 según estemos en un problema uni, bi o tridimensional. Por consiguiente, de forma sencilla se obtiene

$$\frac{dl_c}{dq} = \frac{1}{nl_c^{n-1}} \frac{d|J|}{dq} \quad (24)$$

donde es el J jacobiano de la transformación isoparamétrica. En consecuencia, la expresión final de la derivación de la ecuación de equilibrio es la misma que en plasticidad, pero añadiendo nuevos términos en la pseudocarga donde se incluye el efecto de la longitud característica, la expresión final es

$$\mathbf{K}_T \frac{d\mathbf{u}}{dq} = \mathbf{f}_{\text{new}}^* \quad (25)$$

donde ahora, siendo \mathbf{f}^* la pseudocarga de la ec. (17)

$$\mathbf{f}_{\text{new}}^* = \mathbf{f}^* + \int_{V_0} \mathbf{B}^t \left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial l_c} \frac{dl_c}{dq} \right) \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} dV \quad (26)$$

Algo parecido sucede en los modelos de plasticidad con ablandamiento, ya que también necesitan una regularización de la respuesta a través de la longitud característica de los elementos de la malla.

Análisis crítico de la formulación en el modelo de daño

La resolución del sistema anterior de ecuaciones (25) conduce a una sensibilidad de la respuesta estructural a carga constante. En particular, si se realiza una predicción del comportamiento de una estructura perturbada mediante una extrapolación de primer orden en la respuesta de la estructura original, se obtiene la posible respuesta para el mismo nivel de carga que en la estructura sin perturbar. Es decir, la respuesta de la estructura para una perturbación de la variable de diseño q se extrapolaría según

$$\mathbf{u}(q + \Delta q) = \mathbf{u}(q) + \frac{d\mathbf{u}}{dq} \Delta q \quad (27)$$

En el caso en que dicha extrapolación fuera buena se obtendría el resultado de la Figura 2.

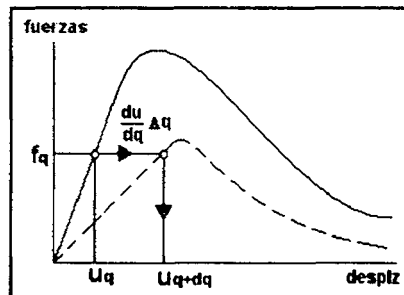


Figura 2. Extrapolación de primer orden de la respuesta estructural del sistema, haciendo uso de la información que proporciona un análisis de sensibilidad

Cuando el comportamiento estructural es no lineal con ablandamiento, este tipo de extrapolación puede no tener ningún sentido. Nótese que *a priori*, no se sabe si la modificación en el diseño va a mejorar o empeorar el comportamiento estructural del problema. En particular, en los casos para los cuales la capacidad resistente disminuya, ni siquiera va a tener sentido intentar calcular las sensibilidades de los desplazamientos a carga constante. Nótese que si el nivel de fuerzas aplicadas fuera excesivo la extrapolación horizontal conduciría a puntos donde no existiría ningún equilibrio en la estructura modificada. Igualmente, un tipo de análisis interesante consiste en la predicción de la carga última. En el caso opuesto al anterior, una mejora de la capacidad resistente en la estructura perturbada nunca podría ser predicha desde la estructura original utilizando la extrapolación a carga constante (Figura 3).

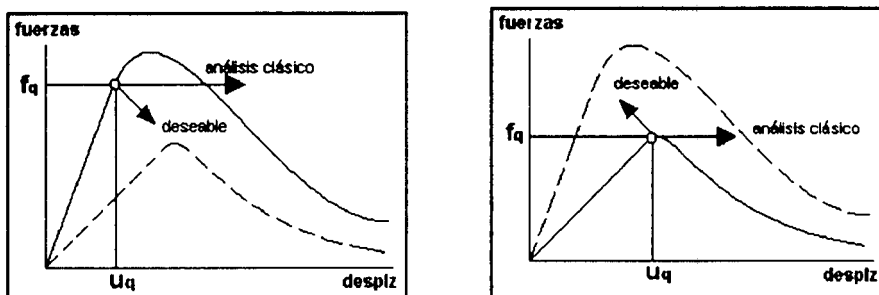


Figura 3. Extrapolaciones de respuestas estructurales impredecibles con un análisis de sensibilidad a carga constante

Es evidente que ambas situaciones exigen conocer la variación simultánea en los campos de fuerzas y desplazamientos. Por lo tanto, se puede afirmar que para ciertos tipos de análisis en régimen no lineal, no basta con conocer la sensibilidad de las variables incógnita en la ecuación de equilibrio, también es necesario conocer la sensibilidad de las fuerzas. Algunas cargas dependen explícitamente de la variable de diseño y, en este caso particular, se puede obtener directamente la sensibilidad según

$$\frac{df}{dq} = \frac{\partial f}{\partial q} \quad (28)$$

Sin embargo, en general, la expresión (28) no se consigue de forma tan inmediata, debido a que la variable de diseño tiene un efecto implícito sobre el comportamiento de las cargas, y no aparece de forma explícita y derivable en la formulación.

En el ablandamiento, a partir de un cierto instante se produce una pérdida de la capacidad portante de la estructura y, en esas condiciones, es imposible seguir aumentando la sollicitación del sistema. En cambio, los desplazamientos sí que pueden seguir aumentando y permitir así, la existencia de nuevos puntos de equilibrio en la curva. En consecuencia, el análisis clásico, basado en el incremento de sollicitación no permite llegar a soluciones más allá de la carga máxima de la estructura, y por ello en los problemas con ablandamiento se lleva a cabo el análisis del comportamiento estructural utilizando estrategias de control de desplazamientos o longitud de arco. El método de longitud de arco se fundamenta en exigir al mismo tiempo el equilibrio estructural del sistema y las condiciones sobre el nivel de desplazamientos². Ambos requisitos aseguran la obtención de nuevos puntos de la curva fuerza-desplazamiento que caracteriza el comportamiento de la estructura. En este trabajo se propone que el análisis de sensibilidad en los casos de comportamiento con ablandamiento se lleve a cabo a longitud de arco constante, en lugar del análisis clásico realizado hasta ahora a sollicitación constante. Este planteamiento tiene la ventaja de que no presupone cual va a ser la variación de la capacidad portante de la estructura y es, además, consistente con la formulación del análisis de equilibrio. Por lo tanto, se replantea la ecuación de

equilibrio introduciendo un parámetro de arco y una restricción en desplazamientos

$$\sum_{\text{elem}} \int_V \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma} dV - \lambda \mathbf{f} = 0 \quad (29)$$

$$g(\mathbf{u}, \lambda) = 0 \quad (30)$$

En este caso el problema de equilibrio introduce una incógnita más, el parámetro de arco α . Sin embargo, también se introduce una ecuación más, la ec. (30), por lo tanto el sistema de ecuaciones sigue estando correctamente definido. Para calcular la sensibilidad se debe derivar la ecuación de equilibrio de la estructura que viene representada por el cumplimiento de las ecs. (29) y (30). Por lo tanto, realizando la derivación total del sistema de ecuaciones se obtienen unos nuevos términos en la expresión integral que modifican el vector de pseudocargas

$$\frac{d}{dq} \left[\sum_{\text{elem}} \int_V \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma} dV \right] - \frac{d\lambda}{dq} \mathbf{f} - \lambda \frac{d\mathbf{f}}{dq} = 0 \quad (31)$$

$$\frac{dg}{dq} = \frac{\partial g}{\partial q} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dq} + \frac{\partial g}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dq} \quad (32)$$

Las ecs. (31) y (32) conducen a la resolución del problema de sensibilidad y se pueden reagrupar en forma compacta según

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{f} \\ \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial g}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\mathbf{u}}{dq} \\ \frac{d\lambda}{dq} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^* \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

Un tipo de esquema parecido fue propuesto por primera vez por⁹ y se aplicó a problemas con no linealidad geométrica. En el presente trabajo se ha deducido un esquema similar para el comportamiento no lineal con ablandamiento del material.

En definitiva, para hallar la sensibilidad de la respuesta estructural a longitud de arco constante se debe resolver el sistema (33). Se observa que la matriz del sistema pierde la simetría, por ello se recomienda utilizar un algoritmo iterativo de minimización donde se verifique la ecuación derivada de la condición de arco y poder gozar de las ventajas del sistema de ecuaciones simétrico de la submatriz superior³.

EJEMPLOS

Ejemplo 1: plasticidad uniaxial

Se pretende observar el comportamiento del algoritmo del análisis de sensibilidad sobre un problema unidimensional isostático trabajando a esfuerzo axil y llegando a plastificación. La estructura se discretiza con dos elementos simples de tipo barra trabajando a tracción pura, y tomando como variable de diseño la longitud de los elementos (Figura 4). Nótese que en este problema no se realiza un análisis de sensibilidad tomando como variable de diseño la sección transversal, a pesar de que

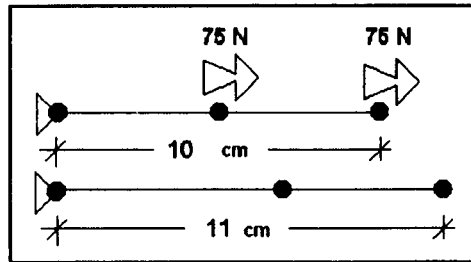


Figura 4. Definición geométrica del primer ejemplo

desde el punto de vista de ingeniería sería más interesante, porque en este caso particular sería un análisis de parámetros y no de formas.

Datos del análisis

- Criterio de plasticidad de Von Mises con ley de endurecimiento lineal $\sigma_y = \sigma_0 + H\kappa$ (Tabla I).

Módulo de elasticidad E	$2,1 \times 10^6$	KN/m ²
Coefficiente de Poisson	0	
Tensión elástica límite σ_0	$4,0 \times 10^2$	KN/m ²
Parámetro de endurecimiento H	1,0E6	KN/m ²

Tabla I. Propiedades del material para el Ejemplo 1

- Elementos unidimensionales con área de 2 cm².
- Criterio de convergencia, se acepta un error de un 1 % en la norma del residuo sobre el total de fuerzas aplicadas, 15 pasos de carga, con incrementos de 5 N en cada nudo e integrando con una cuadratura de un solo punto.
- Variable de diseño: la longitud del primer elemento.
- Se realizan dos análisis, por un lado el de la estructura original y su sensibilidad, y por otro lado el análisis de la estructura modificada según una variación del 20 % de la variable de diseño. Es decir, se incrementa en 1 cm la longitud de la barra primera y se desplaza en 1cm la segunda sin alterar su tamaño. Los resultados de ambas análisis se pueden ver en la Figura 5.

Para analizar el correcto funcionamiento del algoritmo se han comparado las curvas de respuesta fuerza-desplazamiento en el nudo central que se obtienen en los casos siguientes: El diseño original, el diseño modificado según un incremento de la variable de diseño y la extrapolación de primer orden de la estructura original mediante los resultados de la sensibilidad siguiendo la ec. (27).

En el cálculo analítico por Resistencia de Materiales y para los valores del problema definidos anteriormente, se calcula que la carga última elástica toma el valor de

$$P = \sigma A = 80 \text{ N}$$

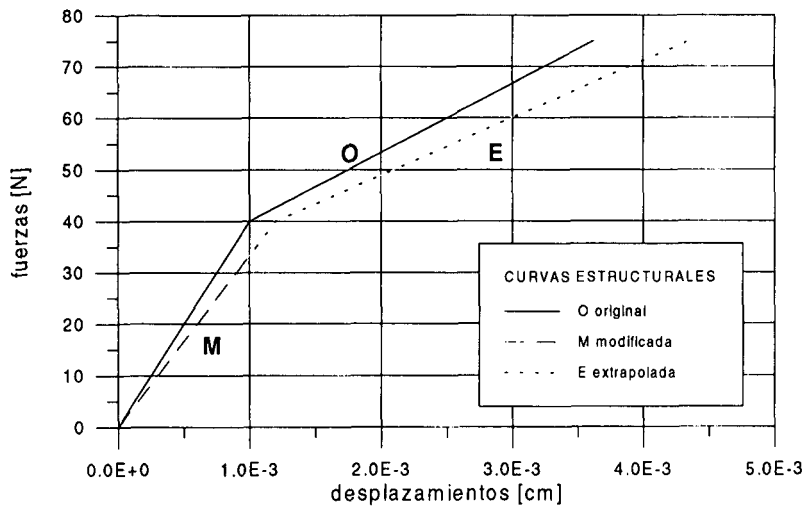


Figura 5. Gráfica con las curvas superpuestas de comportamiento de los análisis indicados

confirmando los resultados de la gráfica de la Figura 5.

Nótese que, en este caso, la curva (E) de la extrapolación de comportamiento y la curva (M) modificada coinciden perfectamente, motivo por el cual se han representado mitad y mitad. Las razones de tan buen funcionamiento hay que buscarlas en la naturaleza del problema, por un lado el estado uniaxial de tensiones; por otro el modelo con endurecimiento lineal y finalmente la relación variable de diseño-tipo de carga. Todas estas condiciones aseguran que la matriz tangente de la formulación se comporta como una verdadera secante en la rama plástica, tal y como sucede en la rama elástica.

Ejemplo 2: daño uniaxial

En este caso se pretende observar el comportamiento del algoritmo de sensibilidad cuando el material se comporta según un modelo de daño con ablandamiento. La estructura se discretiza con un único elemento bilineal de 4 nodos trabajando a tracción pura y tomando como variable de diseño el ancho de la pieza (Figura 6).

Datos del análisis

- Comportamiento del material según el modelo de daño anterior (Tabla II)

Módulo de elasticidad E	$2,1 \times 10^6$	KN/m ²
Coefficiente de Poisson	0	
Máxima tensión a compresión	$2,0 \times 10^4$	KN/m ²
Máxima tensión a tracción	500,0	KN/m ²
Energía de fractura	200,0	J/m ²

Tabla II. Propiedades del material para el Ejemplo 2

- Tensión plana con espesor de la pieza de 1cm.
- Longitud de arco de tipo esférico con restricción tal que $\Delta l = 0,005$ cm en cada paso de carga.
- Criterio de convergencia: se acepta un error de un 1 % en la norma del residuo sobre el total de fuerzas aplicadas.
- Variable de diseño: el ancho de la pieza.
- Se realizan dos análisis, por un lado el de la estructura original y su sensibilidad y por otro lado el análisis de la estructura modificada para un incremento de 1 cm de la variable de diseño. Los resultados de ambas análisis se pueden ver en la Figura 7.

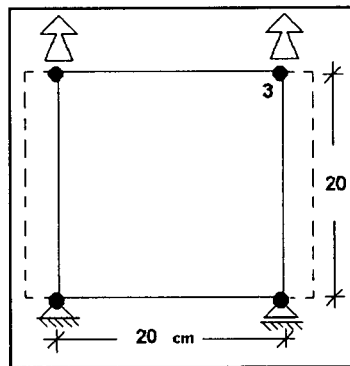


Figura 6. Descripción geométrica del segundo ejemplo

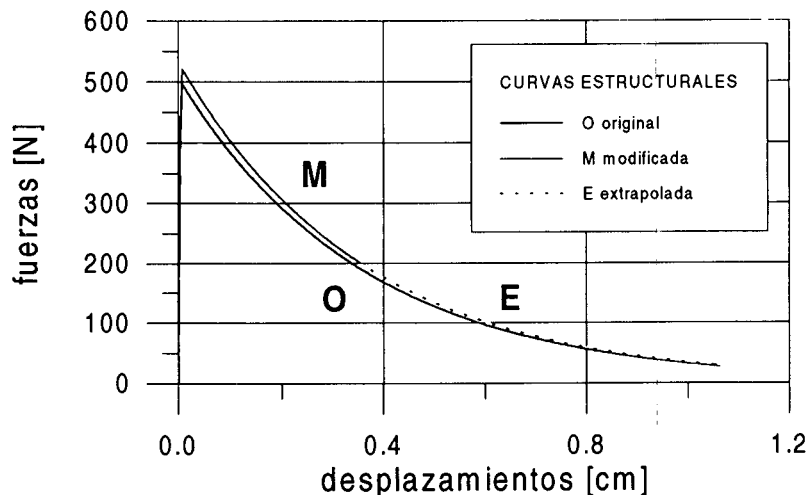


Figura 7. Curva fuerza-desplazamiento de respuesta en el nudo 3

Lo primero que se observa es que la curva extrapolada reproduce notablemente bien el comportamiento de la estructura modificada. De hecho la superposición entre (E) y (M) es casi perfecta, motivo por el cual se han dibujado mitad y mitad.

La estructura modificada y la original tienen un comportamiento estructural diferente, dado que entre ambas hay una diferencia en el tamaño de la sección resistente. En el caso del cálculo a carga constante dicha propiedad no podría ser captada, en cambio, gracias a la estrategia de la longitud de arco se ha podido extrapolar en las direcciones de fuerzas y desplazamientos y, por consiguiente, predecir satisfactoriamente el comportamiento estructural.

El cálculo de la carga última se obtiene como la suma de las cargas últimas de los dos nodos solicitados y se observa que da un número razonablemente bueno. En concreto, la carga última elástica se obtiene con un 0,7 % de error respecto de la que predice la teoría clásica de Resistencia de Materiales. Estos valores se pueden contemplar en la Tabla III.

	Res. Mat.	Modificada	Extrapolada
Carga última [N]	1050	1043,3	1042,3
Error		0,64 %	0,73 %

Tabla III. Valores de la carga última para el Ejemplo 2

Dicho error es debido a que el control esférico de desplazamientos impone un paso de carga que no conduce directamente a la cúspide, motivo por el cual aparece una cierta inclinación en la zona cercana al máximo tal y como muestra la gráfica de la Figura 8.

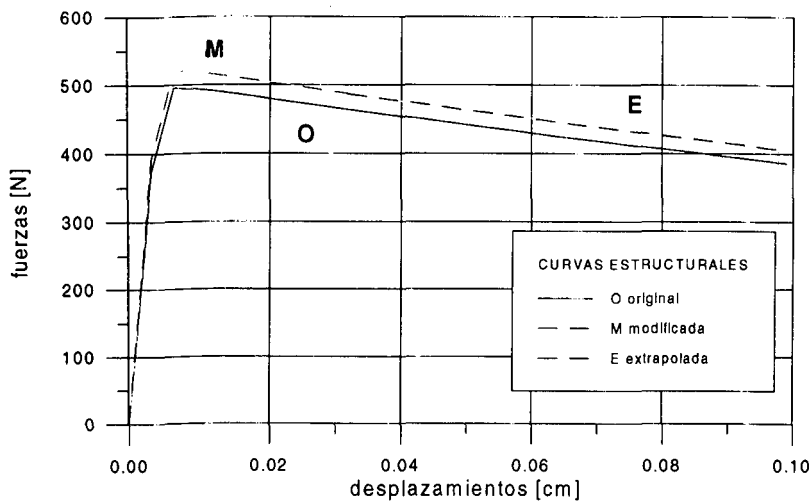
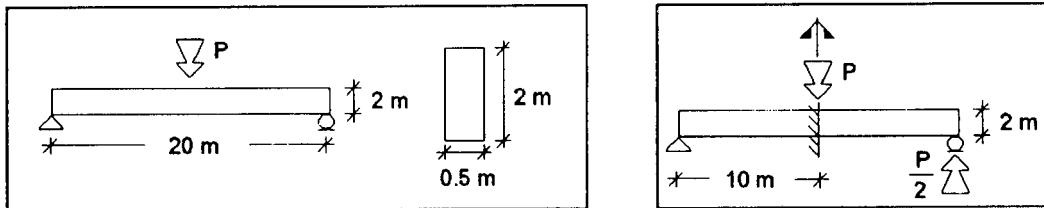


Figura 8. Detalle de la zona de carga máxima

Ejemplo 3: viga trabajando a flexión

En este caso se estudia el comportamiento del algoritmo sobre una viga isostática de hormigón, trabajando a flexión y tomando como variable de diseño el canto. Supóngase que en el proyecto se define un canto determinado y posteriormente en obra, por defectos en la ejecución, dicho canto se reduce en un 2,5% evolucionar el comportamiento de la viga y estimar la disminución de la carga máxima debida al defecto constructivo.

Para realizar el análisis se ha simplificado el problema aprovechando la simetría de la pieza y se ha procedido a calcular según el esquema adjunto, cargando en la reacción y empotrando en el centro de la luz (Figura 9).



Figuras 9. Viga a flexión, definición geométrica y esquema de análisis

Datos del análisis

- Comportamiento del material según el modelo de daño anterior y con los valores de la Tabla IV.

Módulo de Elasticidad E	$2,1 \times 10^7$	KN/m ²
Coefficiente de Poisson	0	
Máxima tensión a compresión	$2,0 \times 10^4$	KN/m ²
Máxima tensión a tracción	500,0	KN/m ²
Energía de fractura	200,0	J/m ²

Tabla IV. Propiedades del material para el Ejemplo III

- Tensión plana con espesor de la viga de 50 cm.
- Longitud de arco con desplazamiento controlado en el nudo 11 siendo la restricción de $\Delta l = 0,006$ cm en cada paso de carga.
- Variable de diseño: el canto de la pieza disminuido en 5cm.
- Malla de 40 elementos cuadriláteros de 8 nodos (Figura 10).

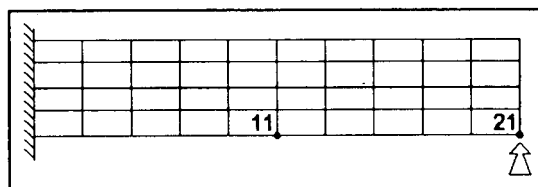


Figura 10. Malla estructurada utilizada en el análisis

- Se realizan dos análisis, por un lado el de la estructura original y su sensibilidad y por otro lado el análisis de la estructura modificada según una variación del 2,5 % de la variable de diseño. Los resultados de ambas análisis se recogen en la Figura 11

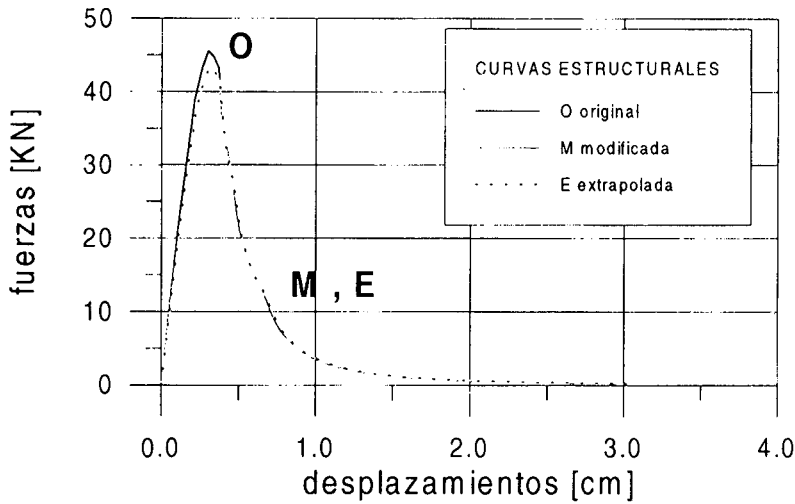


Figura 11. Respuesta de la estructura

Igualmente, como en los casos anteriores se reproducen perfectamente las curvas de equilibrio. Siendo en la zona de carga máxima donde se puede realizar una correcta estimación de la modificación del comportamiento resistente, tal como se puede ver en la Figura 12.

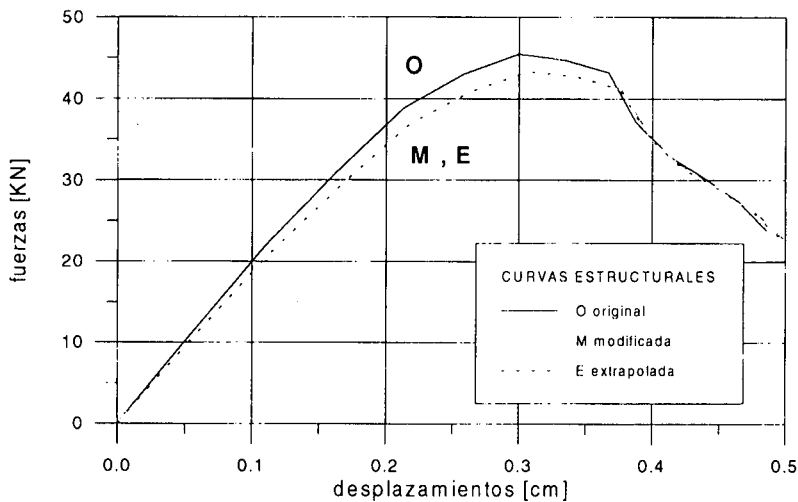


Figura 12. Detalle de la zona de carga máxima

CONCLUSIONES

La derivación de la ecuación de equilibrio global de la estructura permite evaluar la sensibilidad de forma satisfactoria tanto para modelos de elastoplasticidad como de daño a través de la matriz constitutiva tangente sin necesidad de recurrir a estrategias de tipo incremental.

En términos generales, un análisis lineal representa calcular la estructura a solicitación constante, es decir, exigir el equilibrio del sistema a carga dada y considerar como incógnita del problema el campo de desplazamientos. La teoría lineal garantiza que siempre se alcanza el estado de equilibrio para cualquier nivel de solicitación dada y, en consecuencia, siempre se puede calcular satisfactoriamente la sensibilidad de los desplazamientos con respecto a una variable de diseño.

Si se realiza un análisis con comportamiento no lineal del material y la variable de diseño interviene de forma claramente activa en la definición del comportamiento de la estructura, aunque dicha dependencia sea implícita, el cálculo de la sensibilidad a solicitación constante produce resultados no extrapolables. En particular, en el caso de un material que se comporta según un modelo constitutivo con ablandamiento, la estructura no puede superar una cierta cota máxima de solicitación. A partir de dicho estado límite, los sucesivos estados de equilibrio se situarán en la rama de descarga. En este caso se produce una duplicidad de situaciones anómalas, por un lado va a existir más de una posición de equilibrio en el sistema a carga fija y asimismo sólo van a existir posiciones de equilibrio del sistema para niveles de carga situados por debajo de la carga última. Por consiguiente, si en la estructura modificada la curva de comportamiento presenta un nivel de carga última distinto, será imposible obtener posiciones de equilibrio extrapolando desde la estructura original.

A través de la utilización del método de longitud de arco se ha formulado una nueva metodología de carácter general que permite el análisis de sensibilidad tanto en fuerzas como en desplazamientos. En general, el control de desplazamientos asegura que será posible llegar a cualquier posición de equilibrio de la estructura original y, desde ese punto, obtener la sensibilidad de los campos de desplazamientos y de solicitaciones.

Los ejemplos ilustran el correcto funcionamiento numérico de los planteamientos teóricos previos, tanto para análisis a carga constante como a carga variable. En especial, muestran la forma de abordar desde un punto de vista general, el cálculo de la sensibilidad en un problema con ablandamiento. En particular, el tercer ejemplo muestra como dichos análisis pueden ayudar a la hora de elaborar estimaciones de comportamiento bajo situaciones límite y en consecuencia, facilitar las decisiones del ingeniero.

REFERENCIAS

1. C.E.K. Silva, E. Hinton, L.E. Vaz y J. Sienz, "2D Shape Optimization with Rate-independent Elastoplasticity", *Proceedings Computational Plasticity, Fundamentals and Applications*, D.R.J. Owen, E. Oñate y E. Hinton (Eds.), CIMNE, pp. 836-852, (1997).
2. M.A. Crisfield, "*Non-linear Finite Elements Analysis of Solids and Structures*", John Wiley & Sons, (1991).

3. L. Gil, "Análisis de sensibilidad con comportamiento no lineal del material y su aplicación en el diseño asistido de estructuras", Tesis doctoral, ETS Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universitat Politècnica de Catalunya. Barcelona, (1996).
4. E. Hinton y J. Sienz, "Aspects of Adaptive Finite Element Analysis and Structural Optimization", *Advances in Structural Optimization*, Civil-Comp. Press, pp. 1-25, B.H.V. Topping y M. Papadrakakis (Eds.), (1994).
5. R.T. Haftka y B. Barthelemy, "On the Accuracy of Shape Sensitivity", *Structural Optimization*, Vol. **3**, pp. 1-6, (1991).
6. J. Haslinger y R. Mkinen, "Shape Optimization of Elasto-plastic Bodies under Plane Strains: Sensitivity Analysis and Numerical Implementation", *Structural Optimization*, Vol. **4**, pp. 133-141, (1992).
7. M. Kleiber, T.D. Hien y E. Postek, "Incremental Sensitivity Analysis for Nonlinear Mechanic Applications", *Int. J. Num. Meth. in Engng*, Vol. **37**, pp. 3291-3308, (1994).
8. M. Kleiber, T.D. Hien, H. Antunez y P. Kowalczyk, "Parameter Sensibility of Elastoplastic Response", *Engineering Computations*, Vol. **12**, pp. 263-280, (1995).
9. M. Kleiber y T.D. Hien, "Parameter Sensitivity in Nonlinear Dynamics, Structural Stability and Plasticity", *Proceedings del III Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, M. Doblaré, J.M. Correas, E. Alarcón, L. Gavete y M. Pastor (Eds.), SEMNI, (1996).
10. J. Oliver, M. Cervera, S. Oller y J. Lubliner, "A Simple Damage Model for Concrete, Including Long Term Effects", *Proceedings II International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Vol. **2**, pp. 945-958, Zell am See, Austria, (1990).
11. Y.S. Ryu, M. Haririan, C.C. Wu y J.S. Arora, "Structural Design Sensitivity Analysis of Nonlinear Response", *Computers and Structures*, **21**, pp. 245-255, (1985).
12. C.A. Vidal y R.B. Haber, "Design Sensitivity Analysis for Rate-Independent Elastoplasticity", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, Vol. **107**, pp. 393-431, (1993).
13. S.Y. Wang, Y. Sun, y R.H. Gallagher, "Sensitivity Analysis in Shape Optimization of Continuum Structures", *Computers and Structures*, Vol. **20**, pp. 855-867, (1985).