Rev. Int. Mét. Num. Cálc. Dis. Ing.
Vol. **18**, **2**, 255–278 (2002)

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

Análisis de sensibilidad de primer orden respecto a variables geométricas para estructuras de nudos rígidos en teoría lineal

Juan Carlos Perezzan y Santiago Hernández

Universidad de La Coruña
ETS Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Campus de Elviña s/n, 15192 La Coruña, España
Tel.: 34-981-16 70 00, Fax: +34 981 16 71 70
e-mail: perezzan@iccp.udc.es
e-mail: hernandez@iccp.udc.es

Resumen

Si bien el diseño óptimo de sistemas estructurales a flexión ha sido un tema muy habitual en la optimización de estructuras, en la mayoría de los problemas abordados no se han considerado variables geométricas. Además, en las escasas aplicaciones donde sí se han considerado, los análisis de sensibilidad respecto a las variables geométricas, tanto de la matriz de rigidez como de las condiciones, han sido realizadas, generalmente, mediante diferencias finitas.
En la investigación que se presenta se ha desarrollado una metodología para la optimización del tamaño de las secciones transversales y de la geometría, de sistemas estructurales trabajando a flexión. En ella es necesario efectuar los análisis de sensibilidad de primer orden tanto de la función objetivo como de las condiciones, respecto a las variables de diseño del problema. Dichos análisis de sensibilidad se han efectuado por derivación explícita y constituyen el núcleo de lo que se expone en este artículo.
Además, como ejemplo de aplicación, se exponen los resultados obtenidos para un puente pórtico de gran longitud con numerosos vanos y para el que se han considerado diferentes conjuntos de variables de diseño y de condiciones limitativas.

FIRST ORDER SHAPE SENSITIVITY ANALISYS OF FRAME STRUCTURES IN LINEAR THEORY

Summary

While optimum design of flexural systems is a well-established topic of structural optimization most applications only consider size variables. In addition, sensitivity analysis of the stiffness matrix and the conditions with respect to shape variables, in the scarce applications where this kind of variables are considered, has been usually carried out by finite differences. In this paper an approach to size and shape optimization of flexural systems is presented using explicit differentiation of the stiffness matrix, the vector loading and conditions with respect to size and shape variables. As an application example, the results obtained for a multi-span long portal bridge with different sets of design variables and conditions are exposed.

©Universitat Politècnica de Catalunya (España). ISSN: 0213–1315 Recibido: Enero 2001

INTRODUCCIÓN

El diseño óptimo de estructuras de nudos rígidos es un tema muy habitual en optimización de estructuras y si bien la cantidad de referencias que es posible encontrar es innumerable, las referencias [1−11] representan una amplia panorámica de resultados en diferentes tipologías estructurales como pórticos, emparrillados y vigas hiperestáticas de varios vanos.

Sin embargo, cabe señalar, entre las principales deficiencias que actualmente existen en la optimización de estructuras de barras a flexión, el escaso número de aplicaciones [12−16] considerando conjuntamente variables de tamaño y de geometría, a pesar de que para esta situación serían de esperar grandes reducciones de la función objetivo, como ya se ha constatado para estructuras de nudos articulados, donde el número de aplicaciones considerando ambos tipos de variables de diseño es muy elevado. Esto es así, hasta el momento, debido a la gran complejidad del problema que habría que resolver para estructuras reticuladas.

Las dificultades propias de la optimización de geometría en estructuras de nudos rígidos surgen principalmente del hecho de que los métodos de optimización más eficientes resultan ser aquellos que emplean información acerca de las derivadas de primer orden, tanto de la función objetivo como de las condiciones que limitan el problema, y si bien la obtención de las sensibilidades de la función objetivo no suele entrañar especiales problemas, no ocurre lo mismo con las de las condiciones, cuyo cálculo se complica bastante con relación al que se efectúa para estructuras de nudos articulados.

Todo esto ha llevado a evitar el cálculo analítico de las sensibilidades para estructuras de nudos rígidos recurriéndose, generalmente, a su aproximación mediante diferencias finitas. A pesar de ello, esta solución no ha terminado de resolver satisfactoriamente el problema debido al mayor tiempo de cálculo que requiere su obtención y a la menor precisión que se obtiene cuando la perturbación necesaria para su determinación no es lo suficientemente pequeña. Es precisamente esta situación la que justifica la necesidad de su calculo analítico y, por tanto, la de este trabajo que se presenta en el artículo.

DISEÑO ÓPTIMO DE SISTEMAS ESTRUCTURALES FORMADOS POR BARRAS A FLEXIÓN

La optimización de estructuras planas de barras de nudos rígidos se formula en este artículo como la minimización del peso del material requerido por la estructura para soportar las cargas actuantes, sujeta a una serie de condiciones con el objeto de limitar los máximos movimientos y los mayores niveles de tensiones normales que se pueden producir en la estructura como consecuencia de las cargas actuantes, además del rango de variación de las variables de diseño, es decir

$$\text{minimizar} \qquad F = \gamma \sum_{b=1}^{N_b} (A_b L_b) \tag{1a}$$

sujeta a

$$\mathbf{u} \leq \mathbf{u}_M \tag{1b}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_m \leq \boldsymbol{\sigma} \leq \boldsymbol{\sigma}_M \tag{1c}$$

$$\mathbf{x}_m \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_M \tag{1d}$$

donde F representa la función objetivo, γ el peso específico del material, N_b el número de barras de la estructura, A_b y L_b el área y longitud de la barra b. Además $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$ y $\mathbf{x}$ son, respectivamente, los vectores de movimientos, de tensiones normales y de variables de diseño

y, finalmente, $\mathbf{u}_M$, $\boldsymbol{\sigma}_m$, $\boldsymbol{\sigma}_M$, $\mathbf{x}_m$ y $\mathbf{x}_M$ representan los vectores cuyas componentes son las limitaciones tanto para las condiciones como para el rango de variación de las variables de diseño.

En las relaciones anteriores la limitación de los intervalos puede venir fijada por las características del material, las normativas técnicas que sean de obligado cumplimiento y los aspectos de diseño, fabricación o montaje que deban ser tenidos en cuenta. La obtención de las componentes de los vectores $\mathbf{u}$ y $\boldsymbol{\sigma}$ se realiza mediante el correspondiente análisis estructural. Así, el vector $\mathbf{u}$ de movimientos en los nudos de la estructura se obtiene a partir de la ecuación del método del equilibrio

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u} \tag{2}$$

donde $\mathbf{f}$ es el vector de cargas en los nudos de la estructura y $\mathbf{K}$ es la matriz de rigidez de la estructura. Esta última se obtiene del ensamblaje de las matrices de rigidez en ejes globales $\mathbf{K}_b^g$ de cada una de las barras. Cada matriz $\mathbf{K}_b^g$ se obtiene a partir de la correspondiente matriz de rigidez en ejes locales $\mathbf{K}_b^l$ y de la matriz $\mathbf{T}_b$ que está asociada a la orientación de los ejes de la barra con respecto a los ejes globales. Denominando $c = \cos\alpha$ y $s = \operatorname{sen}\alpha$, siendo α el ángulo que forma la barra con el eje global x, y definiendo, para estructuras planas, como matriz $\mathbf{T}$ a

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

la matriz $\mathbf{T}_b$ viene definida por

$$\mathbf{T}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{T} & \boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{\Omega} & \mathbf{T} \end{pmatrix} \tag{4}$$

en donde la matriz $\boldsymbol{\Omega}$ es la matriz nula cuadrada de orden 3.

Con estas notaciones la matriz de rigidez en ejes globales de la barra b se obtiene mediante

$$\mathbf{K}_b^g = \mathbf{T}_b \cdot \mathbf{K}_b^l \cdot \mathbf{T}_b^T \tag{5}$$

En esta última expresión la matriz de rigidez en ejes locales de la barra b viene dada por

$$\mathbf{K}_b^l = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}^l & \mathbf{K}_{12}^l \\ \mathbf{K}_{21}^l & \mathbf{K}_{22}^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \tag{6}$$

donde, para las cuatro submatrices de rigidez en ejes locales de la barra b que componen la matriz $\mathbf{K}_b^l$, se ha prescindido, por no haber posibilidad de confusión y en aras de la claridad de notación, del subíndice b que indica la barra que se está considerando.

En cuanto al vector $\boldsymbol{\sigma}$, sus componentes son las máximas tensiones normales, en valor absoluto, que se pueden dar en cada una de las barras de la estructura. Por tanto, la localización geométrica de los puntos donde se pueden producir éstas resulta ser la de las fibras superior e inferior de las secciones en los extremos de las barras y de secciones del interior del vano cuya localización depende del tipo de carga aplicada.

Para mayor claridad en el desarrollo que se va a realizar resulta conveniente subdividir el vector $\boldsymbol{\sigma}$ anterior en dos subvectores, uno para cada tipo de localización, es decir, el $\boldsymbol{\sigma}^{\text{extr}}$ cuyas componentes son las tensiones normales en las fibras superior e inferior que se producen en las secciones de los extremos de las barras de la estructura y el $\boldsymbol{\sigma}^{\text{int}}$ para las máximas tensiones normales que se producen en el interior del vano de cada una de las barras.

El vector $\boldsymbol{\sigma}^{\text{extr}}$ se puede obtener mediante

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{extr}} = \mathbf{Su} + \sum_{b=1}^{N_b} \boldsymbol{\sigma}_b \tag{7}$$

donde $\boldsymbol{\sigma}_b$ es la aportación de la barra b al vector $\boldsymbol{\sigma}^{\text{extr}}$ de tensiones normales en extremos de barra debido a las fuerzas nodales de equilibrio por las cargas aplicadas en el interior del vano ocupado por la barra, que por tanto depende del tipo de carga aplicada. Además, cada una de las componentes del vector $\mathbf{Su}$ se obtiene mediante la expresión

$$\begin{aligned}
\sigma_{ik} &= (-1)^i \frac{N_i^b}{A_b} + (-1)^{(i+k)} \frac{M_i^b}{W_{bk}} = u_{1x} \left(\frac{-E}{L} c + (-1)^{i+k+1} \frac{6EI}{L^2 W_{bk}} s \right) + \\
&+ u_{1y} \left(\frac{-E}{L} s + (-1)^{i+k} \frac{6EI}{L^2 W_{bk}} c \right) + u_{1z} \left((-1)^{i+k} \frac{4}{2^{i-1}} \frac{EI}{L^2 W_{bk}} \right) + \\
&+ u_{2x} \left(\frac{E}{L} c + (-1)^{i+k} \frac{6EI}{L^2 W_{bk}} s \right) + u_{2y} \left(\frac{E}{L} s + (-1)^{i+k+1} \frac{6EI}{L^2 W_{bk}} c \right) + u_{2z} \left((-1)^{i+k} 2^i \frac{EI}{L^2 W_{bk}} \right)
\end{aligned} \tag{8a}$$

donde i toma el valor 1 para el extremo inicial de la barra b y el valor 2 para el extremo final y k vale 1 para la fibra superior y 2 para la inferior. Además N_i y M_i son, respectivamente, el esfuerzo axil y el momento flector en el extremo i de la barra b, W_{bk} representa el módulo resistente para la fibra superior o inferior, en función del valor de k, de la sección transversal de la barra b y A_b es el área de la sección transversal. La obtención de los esfuerzos axiles y momentos flectores necesarios en la expresión anterior se realiza a partir de las correspondientes componentes de los vectores $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ de esfuerzos en extremos de barra que vienen dados por

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{K}_{11}^l \mathbf{T}^T \mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_{12}^l \mathbf{T}^T \mathbf{u}_2 \tag{8b}$$

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{K}_{21}^l \mathbf{T}^T \mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_{22}^l \mathbf{T}^T \mathbf{u}_2 \tag{8c}$$

En (7) la matriz $\mathbf{S}$ se puede obtener como la suma de la aportación de cada una de las barras de la estructura

$$\mathbf{S} = \sum_{b=1}^{N_b} \mathbf{S}_b \tag{9a}$$

donde la matriz $\mathbf{S}_b$ es una matriz de cajas con submatrices nulas y submatrices no nulas. La submatriz no nula estándar es del tipo

$$E\begin{pmatrix} \frac{-c}{L}-\frac{6Is}{L^2W_b^{\sup}} & \frac{-s}{L}+\frac{6Ic}{L^2W_b^{\sup}} & \frac{4I}{LW_b^{\sup}} & \frac{c}{L}+\frac{6Is}{L^2W_b^{\sup}} & \frac{s}{L}-\frac{6Ic}{L^2W_b^{\sup}} & \frac{2I}{LW_b^{\sup}} \\ \frac{-c}{L}+\frac{6Is}{L^2W_b^{\inf}} & \frac{-s}{L}-\frac{6Ic}{L^2W_b^{\inf}} & \frac{-4I}{LW_b^{\inf}} & \frac{c}{L}-\frac{6Is}{L^2W_b^{\inf}} & \frac{s}{L}+\frac{6Ic}{L^2W_b^{\inf}} & \frac{-2I}{LW_b^{\inf}} \\ \frac{-c}{L}+\frac{6Is}{L^2W_b^{\sup}} & \frac{-s}{L}-\frac{6Ic}{L^2W_b^{\sup}} & \frac{-2I}{LW_b^{\sup}} & \frac{c}{L}-\frac{6Is}{L^2W_b^{\sup}} & \frac{s}{L}+\frac{6Ic}{L^2W_b^{\sup}} & \frac{-4I}{LW_b^{\sup}} \\ \frac{-c}{L}-\frac{6Is}{L^2W_b^{\inf}} & \frac{-s}{L}+\frac{6Ic}{L^2W_b^{\inf}} & \frac{2I}{LW_b^{\inf}} & \frac{c}{L}+\frac{6Is}{L^2W_b^{\inf}} & \frac{s}{L}-\frac{6Ic}{L^2W_b^{\inf}} & \frac{4I}{LW_b^{\inf}} \end{pmatrix} \tag{9b}$$

donde $W_b^{\sup}$ y $W_b^{\inf}$ son los módulos resistentes para las fibra superior y la inferior, respectivamente.

Finalmente, las componentes de $\boldsymbol{\sigma}^{\text{int}}$ se pueden obtener, cuando la carga actuante es una carga distribuida p_b perpendicular a la barra y extendida a todo el vano, mediante

$$\sigma_C^{\sup} = \frac{-N_i}{A_b} + \frac{M_i}{W_b^{\sup}} - \frac{V_i^2}{2p_bW_b^{\sup}} = \sigma_i^{\sup} - \frac{V_i^2}{2p_bW_b^{\sup}} \tag{10a}$$

$$\sigma_C^{\inf} = \frac{-N_i}{A_b} - \frac{M_i}{W_b^{\inf}} + \frac{V_i^2}{2p_bW_b^{\inf}} = \sigma_i^{\inf} + \frac{V_i^2}{2p_bW_b^{\inf}} \tag{10b}$$

siendo C la sección del interior del vano donde se localizan las máximas tensiones normales en el interior del vano y V_i el esfuerzo cortante en el extremo inicial de la barra.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE PRIMER ORDEN. MÉTODOS GENERALES

Como ya se ha comentado anteriormente, los métodos de optimización más eficientes que existen en la actualidad suelen emplear información de primer orden por lo que, generalmente, se requiere calcular las sensibilidades de primer orden, tanto de la función objetivo como de las condiciones que limitan el problema de optimización.

Los análisis de sensibilidad de primer orden tratan de obtener, para una función φ, los valores

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{11}$$

donde φ puede ser la función objetivo o cualquiera de las condiciones del problema que se tenga planteado. Para el caso en que la función φ represente la función objetivo, la obtención de (11) suele ser muy sencilla. Así, por ejemplo, en estructuras de barras, cuando la función objetivo sea el peso de la misma y las variables de diseño sean las secciones transversales de las diferentes barras, su determinación es inmediata y se tendrá que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \gamma L_i \qquad i = 1, \ldots, n \tag{12}$$

siendo L_i la longitud de la barra i-ésima y γ el peso específico del material empleado para la estructura.

Mucho más complicado resulta, en general, el proceso de obtención de los gradientes de las condiciones del problema, que para el caso que se plantea serán los movimientos en los nudos extremos de barras y las tensiones normales máximas en cada una de las barras de la estructura.

La obtención de las sensibilidades de los movimientos en los nudos extremos de las barras se calcularán, generalmente, a partir de las ecuaciones del análisis en movimientos para la estructura (2) y las de las tensiones normales a partir de las relaciones entre tensiones y movimientos dadas por (7) para el caso de tensiones normales máximas en los extremos de las barras y por (10a) y (10b) para las que se producen en el interior del vano.

De forma general, si la función φ representa una condición cualquiera del problema de optimización que se tiene planteado, la sensibilidad de primer orden respecto a una variable genérica x_i se podrá calcular mediante[17,18]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \tag{13}$$

En esta última expresión, la obtención de las derivadas $\partial \mathbf{u}/\partial x_i$ se puede realizar a partir de (2) derivando respecto a x_i los dos miembros de la expresión

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i}\mathbf{u} + \mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} \tag{14}$$

por tanto

$$\mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i}\mathbf{u} \tag{15}$$

si ahora se premultiplica por $\mathbf{K}^{-1}$, se tendrá

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \mathbf{K}^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i}\mathbf{u}\right) \tag{16}$$

y sustituyendo en (13)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}}\mathbf{K}^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i}\mathbf{u}\right) \tag{17}$$

La expresión (17) se ha obtenido aplicando las reglas de derivación, por ello este método se denomina *directo*. Tiene la dificultad de requerir el cálculo de la matriz $\mathbf{K}^{-1}$, que suele ser difícil o costoso. Este último cálculo puede evitarse resolviendo el sistema de ecuaciones dado por (15) que proporciona $\partial \mathbf{u}/\partial x_i$ e introduciendo los resultados en (13) se llega igualmente a la solución.

Una alternativa al método directo la representa el denominado *método de la variable adjunta o intermedia*. En él se define el vector de variables adjuntas $\boldsymbol{\lambda}$ en la forma

$$\boldsymbol{\lambda} = \left|\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}}\mathbf{K}^{-1}\right|^T = \mathbf{K}^{-1}\frac{\partial \varphi^T}{\partial \mathbf{u}} \tag{18}$$

por tanto el vector de variables adjuntas se puede calcular resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial \varphi^T}{\partial \mathbf{u}} \tag{19}$$

sustituyendo en (17) se tendrá finalmente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \boldsymbol{\lambda}^T\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i}\mathbf{u}\right) \tag{20}$$

La resolución del sistema de ecuaciones (19) para obtener $\boldsymbol{\lambda}$ sería idéntica a la del sistema que resuelve, para la estructura en estudio, los desplazamientos si el vector de cargas actuantes fuera el vector $(\partial\varphi/\partial\mathbf{u})^T$. El método de las variables adjuntas es también conocido como el *método de la carga ficticia*[19] o también *método de la carga virtual* debido a que a menudo el vector $(\partial\varphi/\partial\mathbf{u})^T$ es descrito como una *carga ficticia* o *carga virtual*.

Repitiendo el proceso descrito para la variable x_i, por uno cualquiera de los dos métodos descritos, con el resto de variables de diseño se llegan a obtener las sensibilidades buscadas

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cdots\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right) \tag{21}$$

Para analizar la conveniencia de uno u otro procedimiento, en una aplicación concreta, se ha de comparar el número de sistemas de ecuaciones asociado a cada uno de los métodos. Así, por ejemplo, el sistema de ecuaciones representado por (15) deberá resolverse para cada caso de carga, ya que tanto el vector de movimientos $\mathbf{u}$ como el $\partial\mathbf{f}/\partial x_i$ dependen de la hipótesis de carga, y para cada variable de diseño, pero no depende de la condición de la que se esté calculando su sensibilidad. En cuanto a las variables adjuntas contenidas en el vector $\boldsymbol{\lambda}$ son únicas para todos los casos de carga, pero varían para cada una de las condiciones.

Por tanto, en una estructura solicitada por c casos de carga y para la que se consideran n variables de diseño y se desea realizar el análisis de sensibilidad de m condiciones, hay que proceder a la comparación de los valores nc y m, siendo el primer valor el número de sistemas de ecuaciones para el método directo y el segundo valor el número de sistemas de ecuaciones para el método de la variable adjunta. Aquel que resulte menor indicará el método que debe utilizarse.

Finalmente cabe señalar que en cualquiera de los métodos descritos anteriormente la obtención de las sensibilidades analíticas de la matriz de rigidez respecto a las variables de diseño supone un esfuerzo computacional importante, que para estructuras de barras de nudos articulados ya ha sido abordado y que sin embargo, para estructuras de barras a flexión, generalmente ha sido evitado recurriéndose a su cálculo mediante diferencias finitas. Esto ha sido así a pesar de que numerosos autores[20] señalan que la obtención de las sensibilidades por diferencias finitas puede conducir a errores importantes si la elección de la perturbación necesaria para su cálculo no es lo suficientemente pequeña. Esta es, junto al mayor tiempo de cálculo necesario con los esquemas de diferencias finitas, una de las motivaciones principales del trabajo de investigación que se presenta en este artículo.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD RESPECTO A LA GEOMETRÍA

Las variables de diseño que caracterizan la optimización de geometría de sistemas estructurales a flexión hacen referencia a las coordenadas de los nudos en los extremos de las barras que componen la estructura. El desarrollo que se realizará a continuación es plenamente válido para cualquier coordenada nodal.

En todo lo que sigue se considerará que x_j representa la variable geométrica respecto a la que se calculan las sensibilidades y será, por tanto, una coordenada según una dirección global de un nudo de la estructura.

Se designará con L_{bk} a la longitud de la barra b según la dirección global que representa k, por tanto representará L_{bx} o L_{by} según cual sea el valor de k. Con $L_{b\alpha}$ se designará a la longitud de la barra b según la dirección de la variable geométrica x_j y con $L_{b\beta}$ a la longitud de la barra b en la dirección perpendicular a la de la variable x_j.

En la Figura 1a se han representado los significados de $L_{b\alpha}$ y $L_{b\beta}$ para el caso en que la coordenada nodal respecto a la que se deriva es una coordenada x y en la Figura 1b se ha representado lo anterior pero para el caso en que la coordenada nodal respecto a la que se deriva es una coordenada y.

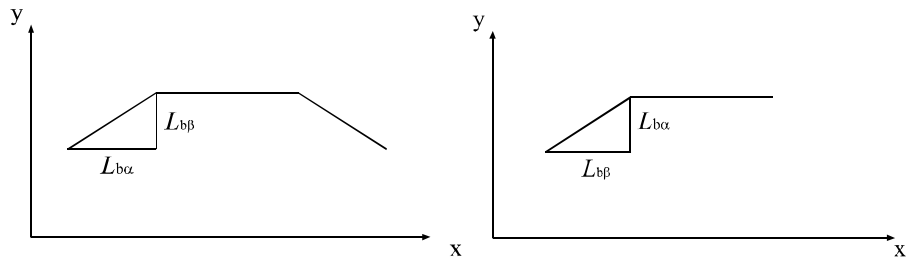


Figura 1. (a) x_j es una coordenada x; (b) x_j es una coordenada y

Además se empleará la variable δ_{bj} cuyos valores, también para la barra b que se esté considerando, serán:

$\delta_{bj} = 0$, si para la barra b sus extremos no contienenx_j;
$\delta_{bj} = -1$, si para la barra b el extremo 1 contiene x_j;
$\delta_{bj} = 1$, si para la barra b el extremo 2 contiene x_j.

Además se tendrá en cuenta que c y s son, respectivamente, el coseno y el seno del ángulo α que forma la barra que se esté considerando con el eje global x, en consecuencia

$$c = \cos\alpha = \frac{L_{bx}}{L_b} \tag{22a}$$

$$s = \operatorname{sen}\alpha = \frac{L_{by}}{L_b} \tag{22b}$$

Sensibilidades de primer orden de la función objetivo

La función objetivo para el planteamiento que se está siguiendo es el peso estructural y viene dada por la expresión

$$F = \gamma \sum_{b=1}^{N_b} (A_b L_b) \tag{23}$$

En la expresión anterior lo único que depende de la geometría es la longitud de cada una de las barras de la estructura L_b, por tanto

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \gamma \sum_{b=1}^{N_b} A_b \frac{\partial L_b}{\partial x_j} \tag{24}$$

y puesto que la dependencia de L_b respecto de las coordenadas nodales viene dada por

$$L_b = \sqrt{\sum_{k=1}^{nds} (x_{k2} - x_{k1})^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{nds} L_{bk}^2} \tag{25}$$

donde el extremo inicial de la barra b es el 1, el final el 2 y nds es el número de dimensiones espaciales del problema que se esté resolviendo, por ejemplo en un problema plano el valor de nds será de 2, se tendrá que

$$\frac{\partial L_b}{\partial x_j} = \frac{0,5}{\sqrt{\sum_{k=1}^{nds} L_{bk}^2}} 2L_{b\alpha}\delta_{bj} \tag{26a}$$

y, por tanto

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \gamma \sum_{b=1}^{N_b} \delta_{bj} \frac{A_b L_{b\alpha}}{L_b} \tag{26b}$$

Sensibilidades de primer orden de los movimientos

Las sensibilidades de los movimientos pueden obtenerse bien por el método directo (17) o bien por el método de la variable adjunta (20). En ambos casos hay que calcular las sensibilidades respecto de las coordenadas nodales del vector de cargas y de la matriz de rigidez de la estructura, es decir $\partial\mathbf{f}/\partial x_j$ y $\partial\mathbf{K}/\partial x_j$.

Sensibilidades del vector de cargas

El vector $\mathbf{f}$ de cargas en nudos se puede obtener como la suma del vector de cargas puntuales directamente aplicadas en los nudos y de los vectores de contribución de cada una de las barras por las cargas que no actúan directamente sobre los nudos de la estructura, mediante las fuerzas nodales equivalentes.

Si se designa con $\mathbf{f}_p$ al primero y con $\mathbf{f}_b$ a la contribución de la barra b por el segundo tipo de cargas, se tendrá que

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_p + \sum_{b=1}^{N_b} \mathbf{f}_b \tag{27}$$

En cuanto a las cargas que no actúan en los nudos de la estructura, sólo se considerarán cargas distribuidas uniformes a lo largo de toda la barra y su valor se denominará p_b. Por tanto las componentes no nulas del vector $\mathbf{f}_b$ corresponden a los grados de libertad de los nudos extremos de la barra en la que actúa la carga y se obtendrán como producto del factor p_b por un vector $\mathbf{g}_{\mathbf{f}_b}$ que sólo depende de la geometría, por tanto

$$\mathbf{f}_b = p_b\, \mathbf{g}_{\mathbf{f}_b} \tag{28}$$

Para estas cargas distribuidas únicamente se considerarán dos posibilidades:

a) *No provienen de un peso propio.* Para este caso el valor de la carga distribuida es constante y se supondrá además, que la carga distribuida es ortogonal a la directriz de la barra.
b) *Provienen de un peso propio.* En este otro caso se tendrá que p_b es el producto del área de la sección transversal por el peso específico del material. Además, puesto que la barra no tiene porque ser perpendicular a la dirección de la acción gravitatoria, como sucede con las barras verticales o en las inclinadas, se considerará que esta carga distribuida puede tener componentes ortogonal y paralela a la barra, por lo que el factor utilizado para proyectar según estas direcciones, que es un factor geométrico, aparecerá en el vector $\mathbf{g}_{\mathbf{f}_b}$.

En definitiva, se tendrá que p_b no depende de la geometría y que

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_p + \sum_{b=1}^{N_b} p_b \, \mathbf{g}_{\mathbf{f}_b} \tag{29}$$

Las cargas puntuales directamente aplicadas en los nudos de la estructura generalmente son constantes, por lo que no dependen de las variables geométricas y, en consecuencia, su contribución a $\mathbf{f}$ no cambia con dichas variables por lo que

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} = \sum_{b=1}^{N_b} p_b \, \frac{\partial \mathbf{g}_{\mathbf{f}_b}}{\partial x_j} \tag{30}$$

Para calcular $\partial \mathbf{g}_{\mathbf{f}_b} / \partial x_j$ se tendrán en cuenta las diferentes posibilidades que se pueden producir.

a) *Las cargas distribuidas no provienen de un peso propio.* En esta situación los factores geométricos que se han de derivar son L_{bx}, L_{by} y L_b. Para los dos primeros si el elemento contiene la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial L_{bk}}{\partial x_j} = \delta_{bj} \tag{31a}$$

y si el elemento no contiene la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial L_{bk}}{\partial x_j} = 0 \tag{31b}$$

En cuanto a L_b

$$\frac{\partial L_b}{\partial x_j} = \delta_{bj} \frac{L_{b\alpha}}{L_b} \tag{31c}$$

b) *Las cargas distribuidas provienen de un peso propio.* En esta otra situación se han de derivar $L_{bx}L_{by}/L_b$, L_{bx}^2/L_b y L_{by}^2/L_b. Además se ha de derivar el término $L_b L_{bx}$ o el término $L_b L_{by}$, en función de que, respectivamente, la acción gravitatoria sea según la dirección del eje global y o según la dirección del eje global x.

Para los tres primeros si el elemento contiene en orden cuadrático la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial \left(\dfrac{L_{b\alpha}^2}{L_b} \right)}{\partial x_j} = \delta_{bj} \frac{L_{b\alpha} \, 2L_b^2 - L_{b\alpha}^3}{L_b^3} \tag{32a}$$

si el elemento contiene en orden lineal la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial \left(\dfrac{L_{b\alpha} L_{b\beta}}{L_b} \right)}{\partial x_j} = \delta_{bj} \frac{L_{b\beta} \, L_b^2 - L_{b\alpha}^2 \, L_{b\beta}}{L_b^3} \tag{32b}$$

y si el elemento no contiene la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial \left(\dfrac{L_{b\beta}^2}{L_b} \right)}{\partial x_j} = \delta_{bj} \frac{-L_{b\alpha} \, L_{b\beta}^2}{L_b^3} \tag{32c}$$

En cuanto al término que falta, $L_b L_{bx}$ o $L_b L_{by}$, si el elemento contiene en orden lineal la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial(L_b\, L_{b\alpha})}{\partial x_j} = \delta_{bj}\left(L_b + \frac{L_{b\alpha}^2}{L_b}\right) \tag{32d}$$

y si, finalmente, el elemento no contiene la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial(L_b\, L_{b\beta})}{\partial x_j} = \delta_{bj}\frac{L_{b\alpha}\, L_{b\beta}}{L_b} \tag{32e}$$

Sensibilidades de la matriz de rigidez

Se había visto que la matriz de rigidez de la estructura se obtenía del ensamblaje, para cada una de las barras que componen la estructura, de las diferentes matrices $\mathbf{K}_b^g$. Esta última matriz se obtenía mediante la expresión (5).

Si se denomina $\mathbf{K}_b$ a la participación de la barra b en la matriz de rigidez total de la estructura, se tendrá que la matriz $\mathbf{K}$ de la estructura podrá expresarse como

$$\mathbf{K} = \sum_{b=1}^{N_b} \mathbf{K}_b \tag{33}$$

y por tanto, derivando respecto de x_j

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_j} = \sum_{b=1}^{N_b} \frac{\partial \mathbf{K}_b}{\partial x_j} \tag{34}$$

Pero todos los elementos no nulos de las matrices $\mathbf{K}_b$ tienen un factor geométrico que se encuadra en uno de los grupos siguientes:

- El denominador del término es L_b^5.

En este grupo el elemento puede ser L_{bx}^2/L_b^5, L_{by}^2/L_b^5 o $L_{bx}L_{by}/L_b^5$. Al derivar, si el elemento contiene en orden cuadrático la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial\left(\dfrac{L_{b\alpha}^2}{L_b^5}\right)}{\partial x_j} = \delta_{bj}\frac{L_{b\alpha}\, 2L_b^2 - 5L_{b\alpha}^3}{L_b^7} \tag{35a}$$

si el elemento contiene en orden lineal la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial\left(\dfrac{L_{b\alpha}\, L_{b\beta}}{L_b^5}\right)}{\partial x_j} = \delta_{bj}\frac{L_{b\beta}\, L_b^2 - 5L_{b\alpha}^2\, L_{b\beta}}{L_b^7} \tag{35b}$$

y si el elemento no contiene la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial\left(\dfrac{L_{b\beta}^2}{L_b^5}\right)}{\partial x_j} = \delta_{bj}\frac{-5L_{b\beta}^2\, L_{b\alpha}}{L_b^7} \tag{35c}$$

- El denominador del término es L_b^3 con un numerador cuadrático.

En este otro grupo el elemento puede ser L_{bx}^2/L_b^3, L_{by}^2/L_b^3 o $L_{bx}L_{by}/L_b^3$ y al derivar, si el elemento contiene en orden cuadrático la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial\left(\dfrac{L_{b\alpha}^2}{L_b^3}\right)}{\partial x_j} = \delta_{bj}\frac{2L_{b\alpha}\,L_b^2 - 3L_{b\alpha}^3}{L_b^5} \tag{36a}$$

si el elemento contiene en orden lineal la dirección que repesenta x_j

$$\frac{\partial\left(\dfrac{L_{b\alpha}\,L_{b\beta}}{L_b^3}\right)}{\partial x_j} = \delta_{bj}\frac{L_{b\beta}L_b^2 - 3L_{b\alpha}^2\,L_{b\beta}}{L_b^5} \tag{36b}$$

y si el elemento no contiene la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial\left(\dfrac{L_{b\beta}^2}{L_b^3}\right)}{\partial x_j} = \delta_{bj}\frac{-3L_{b\beta}^2\,L_{b\alpha}}{L_b^5} \tag{36c}$$

- El denominador del término es L_b^3 con un numerador lineal.

Para este grupo el elemento puede ser L_{bx}/L_b^3 o L_{by}/L_b^3, y al derivar, si el elemento contiene en orden lineal la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial\left(\dfrac{L_{b\alpha}}{L_b^3}\right)}{\partial x_j} = \delta_{bj}\frac{L_b^2 - 3L_{b\alpha}^2}{L_b^5} \tag{37a}$$

y si el elemento no contiene la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial\left(\dfrac{L_{b\beta}}{L_b^3}\right)}{\partial x_j} = \delta_{bj}\frac{-3L_{b\beta}\,L_{b\alpha}}{L_b^5} \tag{37b}$$

- El denominador del término es L_b.

Para este último grupo el elemento sólo puede ser $1/L_b$, por lo que al derivar quedará

$$\frac{\partial\left(\dfrac{1}{L_b}\right)}{\partial x_j} = \delta_{bj}\frac{-L_{b\alpha}}{L_b^3} \tag{38}$$

Sensibilidades de primer orden de las tensiones normales

Puesto que para las condiciones tensionales se están considerando las fibras extremas de las secciones en los extremos de barras y de aquellas del interior donde se localizan los máximos relativos de los valores absolutos de las tensiones normales, se calcularán las sensibilidades de las tensiones normales en las fibras extremas de las secciones indicadas.

Sensibilidades del las tensiones en extremos de barra

Para el cálculo de estas sensibilidades cabe señalar que si bien para estructuras de nudos articulados es aplicable cualquiera de los dos métodos generales anteriormente citados, directo y de la variable adjunta, para estructuras de nudos rígidos resulta mucho más conveniente calcular las sensibilidades a partir de la expresión (7)

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{extr}} = \mathbf{S}\mathbf{u} + \sum_{b=1}^{N_b} \boldsymbol{\sigma}_b \tag{39}$$

en donde $\boldsymbol{\sigma}_b$ representaba la aportación de la barra b de la estructura al vector de tensiones normales en extremos de barra $\boldsymbol{\sigma}^{\text{extr}}$, debida a las fuerzas nodales de equilibrio. Si en la barra b las únicas cargas existentes estuvieran aplicadas directamente sobre los nudos extremos, esta aportación sería, obviamente, nula, y si existieran cargas no directamente aplicadas sobre los nudos extremos $\boldsymbol{\sigma}_b$ tendría todas sus componentes nulas a excepción de las correspondientes a las fibras superior e inferior de las secciones en los extremos de la barra b. Estas últimas componentes dependerán del tipo de carga aplicada y en general serán función de la geometría. Por tanto, derivando la expresión anterior respecto de la variable geométrica x_j, se tendrá

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{\text{extr}}}{\partial x_j} = \mathbf{S}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_j}\mathbf{u} + \sum_{b=1}^{N_b} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_b}{\partial x_j} \tag{40}$$

En la expresión anterior se conoce ya $\mathbf{S}$, $\mathbf{u}$ y $\partial\mathbf{u}/\partial x_j$, lo único que resta por conocer son los términos $\partial\mathbf{S}/\partial x_j$ y $\partial\boldsymbol{\sigma}_b/\partial x_j$. Para calcular el primero se tendrá en cuenta que por (9a)

$$\mathbf{S} = \sum_{b=1}^{N_b} \mathbf{S}_b \tag{41}$$

Derivando esta última expresión

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_j} = \sum_{b=1}^{N_b} \frac{\partial \mathbf{S}_b}{\partial x_j} \tag{42}$$

Todos los elementos no nulos de las matrices $\mathbf{S}_b$ tienen un factor geométrico que se encuadra en uno de los grupos siguientes

- El denominador del término es L_b^3.

Para este grupo el elemento puede ser L_{bx}/L_b^3 o L_{by}/L_b^3. Estos elementos ya aparecían en la matriz de rigidez por lo que sus derivadas ya son conocidas. Si el elemento contiene en orden lineal la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial\left(\dfrac{L_{b\alpha}}{L_b^3}\right)}{\partial x_j} = \delta_{bj}\frac{L_b^2 - 3L_{b\alpha}^2}{L_b^5} \tag{43a}$$

y si el elemento no contiene la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial\left(\dfrac{L_{b\beta}}{L_b^3}\right)}{\partial x_j} = \delta_{bj}\frac{-3L_{b\beta}\,L_{b\alpha}}{L_b^5} \tag{43b}$$

- El denominador del término es L_b^2.

Para este grupo el elemento puede ser L_{bx}/L_b^2 o L_{by}/L_b^2, y al derivar, si el elemento contiene en orden lineal la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial\left(\dfrac{L_{b\alpha}}{L_b^2}\right)}{\partial x_j} = \delta_{bj}\frac{L_b^2 - 2L_{b\alpha}^2}{L_b^4} \tag{44a}$$

y si el elemento no contiene la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial\left(\dfrac{L_{b\beta}}{L_b^2}\right)}{\partial x_j} = \delta_{bj}\frac{-2L_{b\beta}\,L_{b\alpha}}{L_b^4} \tag{44b}$$

- El denominador del término es L_b.

Para este último grupo el elemento sólo puede ser $1/L_b$, que también aparecía en la matriz de rigidez, y al derivar se obtenía

$$\frac{\partial\left(\dfrac{1}{L_b}\right)}{\partial x_j} = \delta_{bj}\frac{-L_{b\alpha}}{L_b^3} \tag{45}$$

A continuación, para calcular las derivadas de las componentes del vector $\boldsymbol{\sigma}_b$ se tendrá en cuenta que dada una barra b genérica sobre la que actúa una carga distribuida uniforme p_b perpendicular a la dirección de la barra y que ocupa todo el vano, las componentes no nulas del vector $\boldsymbol{\sigma}_b$, que hacen referencia a las tensiones normales en las fibras superior e inferior de las secciones 1 y 2, respectivamente inicial y final de la barra b, vienen dadas por las expresiones

$$\sigma_1^{\sup} = \sigma_2^{\sup} = \frac{p_b\,L_b^2}{12\,W_b^{\sup}} \tag{46a}$$

$$\sigma_1^{\inf} = \sigma_2^{\inf} = \frac{-p_b\,L_b^2}{12\,W_b^{\inf}} \tag{46b}$$

Al derivar respecto de la variable geométrica x_j las expresiones anteriores tendremos dos situaciones, según el origen de la carga distribuida:

a) *No es un peso propio.* En esta situación, puesto que p_b es una constante, lo único que depende de la geometría es el factor L_b^2 cuya derivada es

$$\frac{\partial L_b^2}{\partial x_j} = \delta_{bj}\;2L_{b\alpha} \tag{47}$$

por consiguiente

$$\frac{\partial\sigma_1^{\sup}}{\partial x_j} = \frac{\partial\sigma_2^{\sup}}{\partial x_j} = \frac{p_b}{6W_b^{\sup}}\;L_{b\alpha}\;\delta_{bj} \tag{48}$$

$$\frac{\partial\sigma_1^{\inf}}{\partial x_j} = \frac{\partial\sigma_2^{\inf}}{\partial x_j} = \frac{-p_b}{6W_b^{\inf}}\;L_{b\alpha}\;\delta_{bj} \tag{49}$$

b) *Es un peso propio.* Para esta otra situación p_b tiene un factor geométrico que depende de la dirección de la gravedad. Así, cuando la dirección según la que actúa la gravedad es la del eje global y el factor geométrico es c y cuando la dirección es la del eje global x el factor geométrico es s, por tanto en la primera situación se ha de derivar el factor $L_{bx}\ L_b$ y para la segunda situación se ha de derivar el factor $L_{by}\ L_b$. Por lo tanto, si el factor contiene en orden lineal la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial(L_{b\alpha}\ L_b)}{\partial x_j} = \delta_{bj}\left(L_b + \frac{L_{b\alpha}^2}{L_b}\right) \tag{50a}$$

y si el factor no contiene la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial(L_{b\beta}\ L_b)}{\partial x_j} = \delta_{bj}\frac{L_{b\beta}\ L_{b\alpha}}{L_b} \tag{50b}$$

<u>*Sensibilidades de las tensiones normales máximas en el interior de la barra*</u>

Para el caso en que la carga actuante en el interior del vano de una barra genérica b sea una carga distribuida uniforme p_b perpendicular a la dirección de la barra se tendrá que, al ser el esfuerzo axil constante a lo largo de toda la barra, los valores máximos de las tensiones normales se situarán en las secciones donde los momentos flectores sean también máximos.

Si se denomina V_i al esfuerzo cortante que existe en el extremo inicial de la barra b, la sección donde se produce el momento flector de mayor valor absoluto se localiza a una distancia de dicho extremo i dada por

$$d_i = \frac{V_i}{p_b} \tag{51}$$

y el valor del correspondiente flector es

$$M_{f_{\text{extr}}} = M_i - \frac{V_i^2}{2p_b} \tag{52}$$

donde M_i es el momento flector en el extremo i de la barra y $M_{f_{\text{extr}}}$ es el momento flector máximo relativo, en valor absoluto, que existe en el interior de la barra.

Por tanto las tensiones normales en las fibras superior e inferior, respectivamente, de la sección interior indicada, que designaremos con C, venían dadas por (10a) y (10b), es decir

$$\sigma_c^{\text{sup}} = \frac{-N_i}{A_b} + \frac{M_i}{W_b^{\text{sup}}} - \frac{V_i^2}{2p_b W_b^{\text{sup}}} = \sigma_i^{\text{sup}} - \frac{V_i^2}{2p_b W_b^{\text{sup}}} \tag{53a}$$

$$\sigma_c^{\text{inf}} = \frac{-N_i}{A_b} - \frac{M_i}{W_b^{\text{inf}}} + \frac{V_i^2}{2p_b W_b^{\text{inf}}} = \sigma_i^{\text{inf}} + \frac{V_i^2}{2p_b W_b^{\text{inf}}} \tag{53b}$$

Si se derivan las dos expresiones anteriores respecto de la variable geométrica x_j

$$\frac{\partial\sigma_c^{\text{sup}}}{\partial x_j} = \frac{\partial\sigma_i^{\text{sup}}}{\partial x_j} - \frac{V_i^2}{2W_b^{\text{sup}}}\frac{\partial\left(\dfrac{1}{p_b}\right)}{\partial x_j} - \frac{V_i}{p_b W_b^{\text{sup}}}\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \tag{54a}$$

$$\frac{\partial\sigma_c^{\text{inf}}}{\partial x_j} = \frac{\partial\sigma_i^{\text{inf}}}{\partial x_j} - \frac{V_i^2}{2W_b^{\text{inf}}}\frac{\partial\left(\dfrac{1}{p_b}\right)}{\partial x_j} - \frac{V_i^2}{p_b W_b^{\text{inf}}}\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \tag{54b}$$

En las dos expresiones anteriores hay que calcular todavía $\partial(1/p_b)/\partial x_j$ y $\partial V_i/\partial x_j$.

Si la carga distribuida *no proviene de un peso propio*, p_b es un valor constante y no depende de la geometría y por tanto

$$\frac{\partial\left(\dfrac{1}{p_b}\right)}{\partial A_b} = 0 \tag{55}$$

por el contrario, si la carga distribuida *proviene de un peso propio*, p_b es el producto de un factor que no depende de la geometría por otro que sí depende de la geometría, por tanto sólo se tendrá que derivar la inversa del factor geométrico. En el caso de que la dirección según la que actúa la gravedad sea la del eje global y se debe derivar el término L_b/L_{bx} y para el caso en que la dirección en que actúa la gravedad sea la del eje global x, el término que se ha de derivar es L_b/L_{by}, por tanto, si el término contiene en orden lineal la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial\left(\dfrac{L_b}{L_{b\alpha}}\right)}{\partial x_j} = \delta_{bj}\ \frac{L_{b\alpha}^2 - L_b^2}{L_b\ L_{b\alpha}^2} \tag{56a}$$

y si el término no contiene la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial\left(\dfrac{L_b}{L_{b\beta}}\right)}{\partial x_j} = \delta_{bj}\ \frac{L_{b\alpha}}{L_b\ L_{b\beta}} \tag{56b}$$

Para calcular el último término, es decir las sensibilidades respecto de la geometría del esfuerzo cortante en el extremo inicial i de la barra b, se tendrá en cuenta que dicho cortante se puede obtener sumando al de las fuerzas nodales de equilibrio en el nudo i el que proporciona la expresión

$$V_i = \mathbf{C}_{V_i}\ \mathbf{u} \tag{57}$$

donde la matriz $\mathbf{C}_{V_i}$ era una matriz de dimensiones $1 \times n$, con tantas componentes como tiene el vector $\mathbf{u}$ y siendo todas sus componentes nulas excepto las correspondientes a los movimientos de los nudos i y j correspondientes a los nudos inicial y final, respectivamente, de la barra b. La matriz fila resultaba ser por tanto

$$\mathbf{C}_{V_i} = \left[\boldsymbol{\Omega}\quad \frac{-12EI_b s}{L^3}\quad \frac{12EI_b c}{L^3}\quad \frac{6EI_b}{L^2}\quad \boldsymbol{\Omega}\quad \frac{12EI_b s}{L^3}\quad \frac{-12EI_b c}{L^3}\quad \frac{6EI_b}{L^2}\quad \boldsymbol{\Omega}\right] \tag{58}$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ representa matrices fila, de la dimensión adecuada, con todos sus elementos nulos. Los tres primeros elementos no nulos de la matriz $\mathbf{C}_{V_i}$ corresponden al nudo i y los otros tres corresponden al nudo j.

Derivando en la expresión (57) respecto de la geometría, se tendrá

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \mathbf{C}_{V_i}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{C}_{V_i}}{\partial x_j}\mathbf{u} \tag{59}$$

El término $\partial \mathbf{u}/\partial x_j$ ya ha sido calculado y del resto de términos el único que resta por conocer es $\partial \mathbf{C}_{V_i}/\partial x_j$. Para ello se tendrá en cuenta que los únicos factores que dependen de la geometría en (58) son L_{bx}/L_b^4, L_{by}/L_b^4 y $1/L_b^2$.

- El denominador del término es L_b^4.

  Si el elemento contiene en orden lineal la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial\left(\dfrac{L_{b\alpha}}{L_b^4}\right)}{\partial x_j} = \delta_{bj}\frac{L_b^2 - 4L_{b\alpha}^2}{L_b^6} \tag{60a}$$

y si el elemento no contiene la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial\left(\dfrac{L_{b\beta}}{L_b^4}\right)}{\partial x_j} = \delta_{bj}\frac{-4L_{b\alpha}\,L_{b\beta}}{L_b^6} \tag{60b}$$

- El denominador del término es L_b^2.

  Para esta situación

$$\frac{\partial\left(\dfrac{1}{L_b^2}\right)}{\partial x_j} = \delta_{bj}\frac{-2L_{b\alpha}}{L_b^4} \tag{61}$$

Al valor resultante de la expresión (59) hay que sumarle la sensibilidad del cortante correspondiente a las fuerzas nodales de equilibrio en el nudo i de la barra b. Puesto que este cortante tiene por valor

$$V_i^* = \frac{p_b L_b}{2} \tag{62}$$

Al derivar este cortante, de nuevo se producen, en función del origen de la carga distribuida, dos situaciones:

a) *No es un peso propio*, en esta situación lo único que depende de la geometría es L y por tanto

$$\frac{\partial L_b}{\partial x_j} = \delta_{bj}\,\frac{L_{b\alpha}}{L_b} \tag{63}$$

b) *Es un peso propio* y de nuevo el valor de p_b tiene un factor geométrico que depende de la dirección en que actúa la gravedad, por tanto si la dirección es la del eje global y se debe derivar L_{bx} y si la dirección es la del eje global x se ha de derivar L_{by}.
   Si el elemento contiene en orden lineal la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial L_{b\alpha}}{\partial x_j} = \delta_{bj} \tag{64a}$$

y si el elemento no contiene la dirección que representa x_j

$$\frac{\partial L_{b\beta}}{\partial x_j} = 0 \tag{64b}$$

Con esto queda desarrollado todo lo necesario para realizar el análisis de sensibilidad de primer orden para estructuras de barras de nudos rígidos cuando el análisis estructural se realiza en teoría lineal.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Con la finalidad de validar los desarrollos analíticos anteriores se han optimizado diversos ejemplos de aplicación con un programa FORTRAN desarrollado por los autores y cuyo diagrama de flujo se muestra en la Figura 2. Si bien la aportación original del trabajo que se presenta en el artículo constituye el módulo de análisis de sensibilidad, ha sido necesario desarrollar todo el programa a medida, incluido el módulo de análisis estructural, para que éste resultara orientado al objetivo principal, que es el de la optimización. Sin embargo, no se desarrollaron los algoritmos de optimización, utilizándose los que proporciona el código ADS[21] que resultaba muy adecuado al objetivo buscado y concretamente se ha empleado el método de las direcciones eficientes.

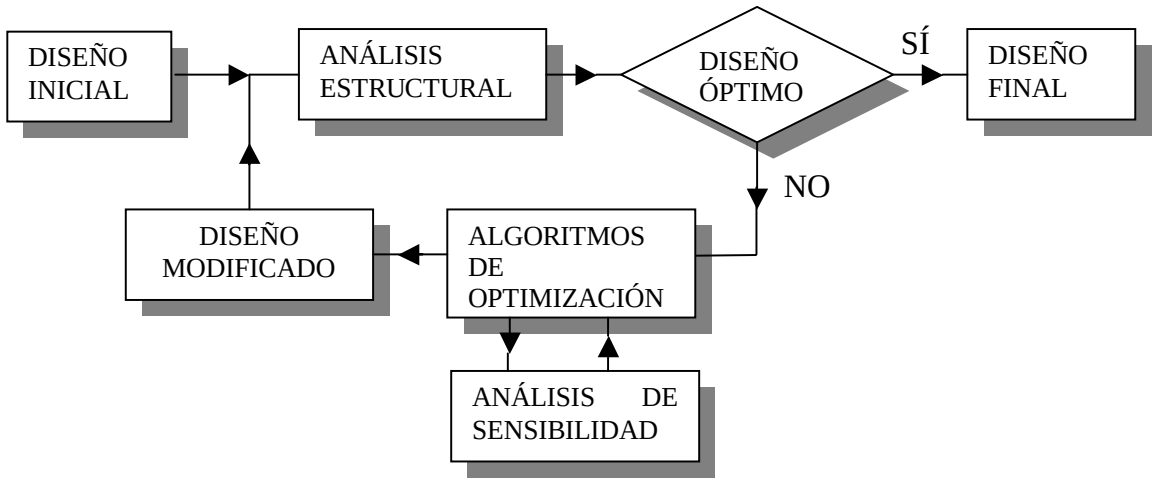


Figura 2. Diagrama de flujo

Como ejemplo de aplicación se ha incluido un puente de gran longitud compuesto por veinticuatro vanos de 93, 75 m de longitud y 43 vanos de 250 m de longitud. En virtud de la simetría del modelo sólo se ha representado la mitad en la Figura 3.

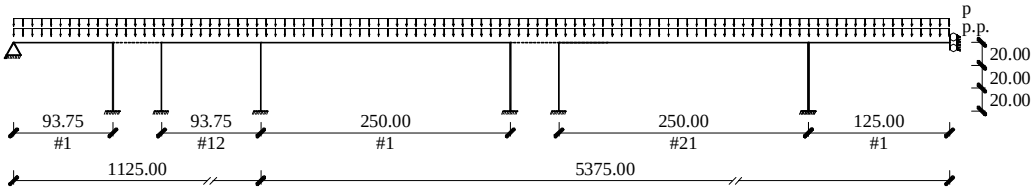


Figura 3. Geometría y carga del puente

La geometría es muy similar a la del Puente de la Confederación construido recientemente en Canadá[22,23] Si bien para dicho puente la sección transversal fue construida en hormigón, en el ejemplo aquí presentado se han considerado secciones de acero o secciones compuestas de hormigón y acero del tipo de las que aparecen en la Figura 4.

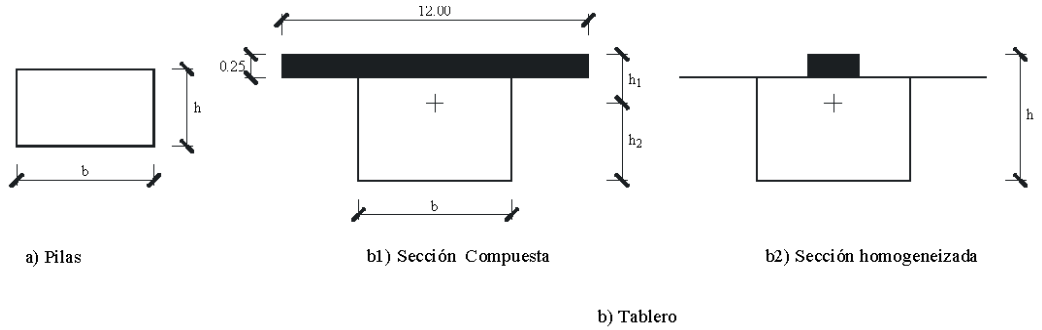


Figura 4. Secciones transversales consideradas

En cada elemento el momento de inercia y los módulos resistentes correspondientes a la profundidad de la fibra h_1 y h_2 se relacionaron con el área A en la forma siguiente

$$I = a_I A^{a_I}; \qquad W_1 = a_{w_1} A^{b_{w_1}}; \qquad W_2 = a_{w_2} A^{b_{w_2}} \tag{65}$$

Los valores numéricos de los coeficientes de (65) en cada sección transversal son los siguientes:

- Pilas:

$$a_I = 1,87 \times 10^{-7}; \quad b_I = 3,86; \quad a_{w_1} = a_{w_2} = 2,67 \times 10^{-3}; \quad b_{w_1} = b_{w_2} = 2,18 \tag{66a}$$

- Tablero:

para $A \geq 17\ 000$ cm^2

$$\begin{aligned} &a_I = 7,53 \times 10^{-13}; \quad b_I = 4,94; \quad a_{w_1} = 4,32 \times 10^{-6} \\ &a_{w_2} = 3,74 \times 10^{-6}; \quad b_{w_1} = 2,81; \quad b_{w_2} = 2,82 \end{aligned} \tag{66b}$$

para $A \leq 17\ 000$ cm^2

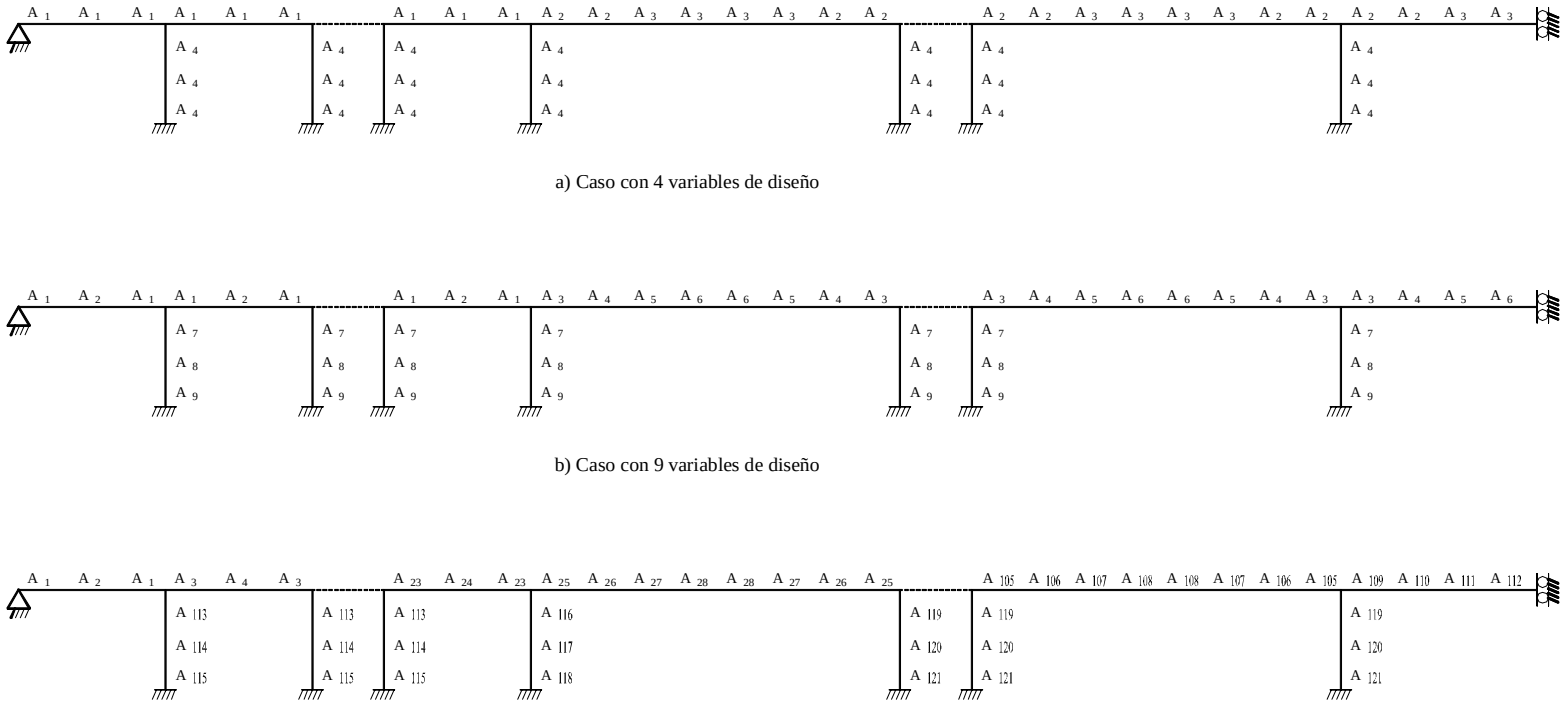
$$\begin{aligned} &a_I = 2,99 \times 10^{-13}; \quad b_I = 5,21; \quad a_{w_1} = 4,23 \times 10^{-4} \\ &a_{w_2} = 1,73 \times 10^{-7}; \quad b_{w_1} = 2,40; \quad b_{w_2} = 3,18 \end{aligned} \tag{66c}$$

Las cargas consideradas fueron el peso propio de la estructura y una sobrecarga distribuida de valor $p = 9,36$ t/m, equivalente a una sobrecarga de uso de $0,4$ t/m^2 sobre el tablero del puente.

Optimización de tamaño

En el proceso de optimización se consideraron, en una primera fase, únicamente variables de diseño que hacían referencia al tamaño, en concreto se escogieron las áreas de las barras y se consideraron los tres casos siguientes:

1) Caso con cuatro variables de diseño: en este supuesto los vanos del puente con longitud menor tenían todos la misma área A_1, en todas las pilas se consideró un área A_4 y en los tramos largos del puente se consideraron dos valores del área A_2, A_3 como se indica en la Figura 5a.
2) Caso con nueve variables de diseño: la variedad de valores del área se aumenta como se indica en la Figura 5b, haciendo que los vanos menores tengan dos áreas diferentes A_1, A_2, los vanos mayores posean las áreas A_3, A_4, A_5, A_6 y las pilas tengan tres áreas A_7, A_8, A_9.



a) Caso con 4 variables de diseño

b) Caso con 9 variables de diseño

c) Caso con 121 variables de diseño

Figura 5. Variables de diseño en optimización de tamaño

3) Caso con ciento veintiuna áreas: este gran número de variables se obtiene al asignar dos valores del área a los tramos menores, y cuatro a los mayores, pudiendo ser todas ellas diferentes entre sí. A las pilas se les asignan las variables A_{113} hasta la A_{121} según aparece en la Figura 5c.

En cada uno de los casos indicados se consideran dos problemas de optimización diferentes en función de las condiciones incluidas.

a) Condición exclusivamente de tipo tensional: en todas las barras se consideró que la máxima tensión normal admisible debía ser $\sigma_M = 2,6$ t/cm^2.
b) Condiciones de movimiento y de tipo tensional: la flecha vertical en cada tramo del puente se limitó a un valor de $l/400$, siendo l la longitud del vano, y se incluyeron las condiciones tensionales del caso anterior.

Los valores que se obtuvieron de la función objetivo para cada caso aparecen en la Figura 6.

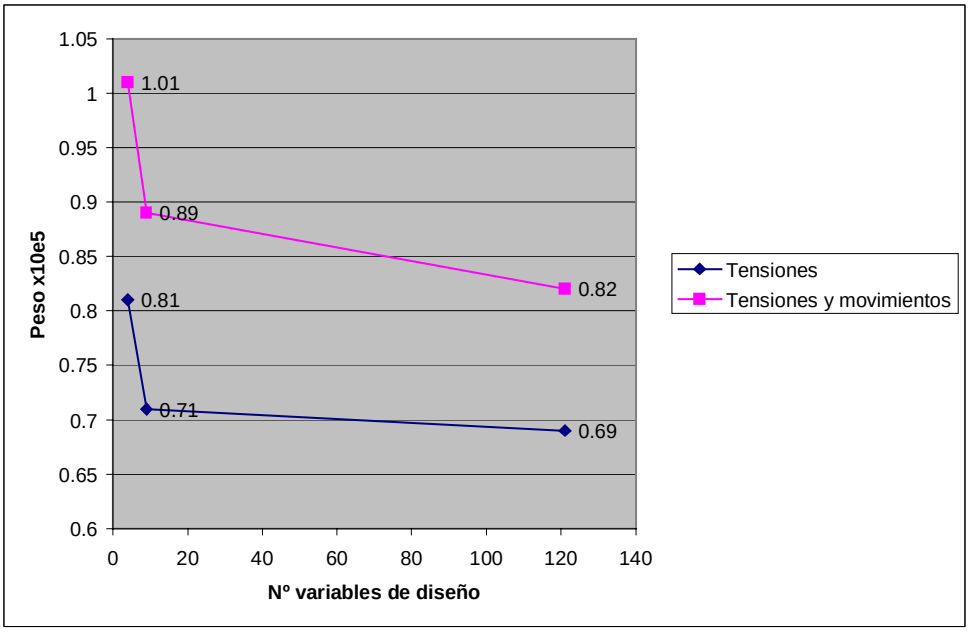


Figura 6. Optimización de tamaño. Evolución de la función objetivo

Optimización de tamaño y geometría

En este proceso de optimización las variables de diseño fueron tanto las variables asociadas al área de las secciones transversales como las longitudinales de los tramos. Se definieron como nuevas variables de diseño las longitudes L_1 a L_{12} correspondientes a los vanos más cortos y las longitudes L_{13} a L_{34} de los vanos mayores. A fin de conservar las características conceptuales del diseño se consideró fija la longitud total del conjunto de vanos cortos y largos. Es decir, el conjunto de variable de diseño geométrica debía cumplir

$$\sum_{i=1}^{12} L_i = 1\,125 \text{ m} \qquad \sum_{i=13}^{34} L_i = 5\,375 \text{ m} \tag{67}$$

En la Figura 7 aparecen representadas las nuevas variables de diseño.

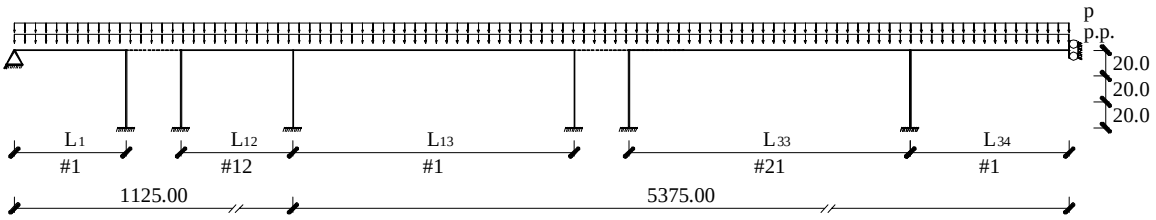


Figura 7. Definición de las variables de diseño geométricas

El conjunto de casos considerados en la optimización conjunta de tamaño y geometría fueron los que se indican en la Tabla I.

Variables de diseño		
Longitudes	Áreas	TOTAL
34	4	38
34	9	43
34	121	155

Tabla I. Número de variables de diseño

Las clases de condiciones incluidas en el problema fueron las de tipo tensional y de movimientos mencionadas en el apartado anterior. La evolución del valor de la función objetivo en función del número de variables de diseño y tipo de condiciones aparece en la Figura 8.

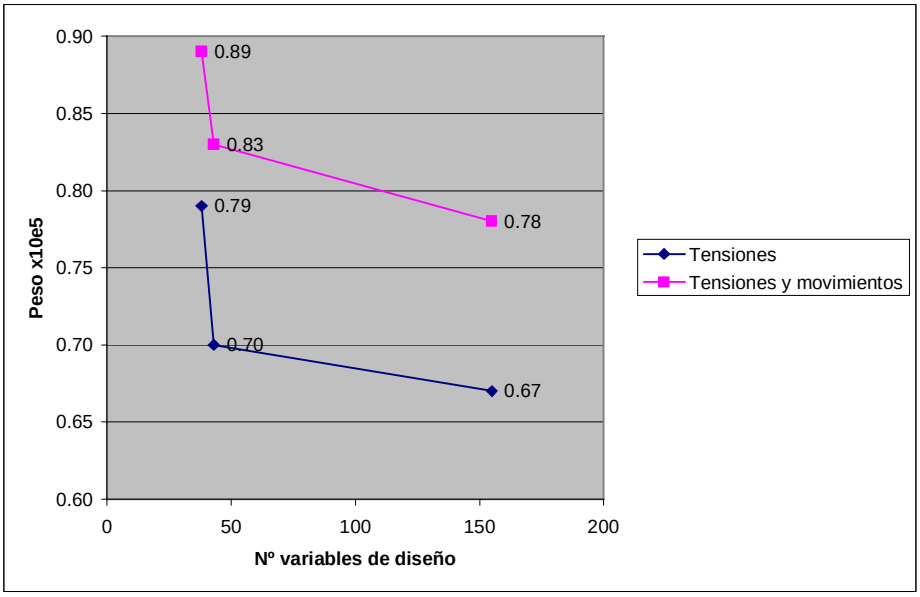


Figura 8. Optimización conjunta de tamaño y geometría. Evolución de la función objetivo

CONCLUSIONES

De la investigación efectuada se pueden extraer algunas conclusiones, las cuales se comentan a continuación.

- Si bien desde hace bastante tiempo se ha realizado la optimización de sistemas estructurales a flexión, la optimización de geometría raramente ha sido considerada.
- Los análisis de sensibilidad en estos sistemas estructurales han sido efectuados generalmente mediante diferencias finitas a pesar de que la derivación explícita puede conducir a procedimientos de optimización más rápidos que además proporcionan resultados más precisos.
- Los ejemplos de optimización de tamaño y de tamaño y geometría presentados en este artículo dejan claro, que el considerar variables de diseño geométricas conjuntamente a las de tamaño conduce a diseños con disminuciones importantes del peso estructural.

REFERENCIAS

1 M.Z. Cohn, S.K. Ghosh y S.R Parimi, "Unified approach to the theory of plastic structures", *J. Engng. Mech. Div.*, ASCE, Vol. **98**, EM5, pp. 1133–1158, (1972).

2 M.R. Horne y L.I. Morris, "Optimum design of multistory rigid frames", *Optimum structural design*, R.H. Gallagher (ed.), John Wiley, (1973).

3 D. Kavlie y J. Moe, "Automated design of frame structures", *J. Struc. Div.*, ASCE, Vol. **97**, ST1, pp. 33–62, (1971).

4 F. Moses y S. Onoda, "Minimum weight design of structures with application to elastic grillages", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **1**, pp. 311–331, (1969).

5 D. Kavlie y J. Moe, "Application of nonlinear programming to optimum grillage design with nonconvex sets of variables", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **1**, pp. 351–378, (1969).

6 S. Hernández, "Size and shape optimization of truss and frame structures with multiple local optima", *33rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Dallas (USA), (1992).

7 D.E. Grierson, "Computer-automated optimal design of structural steel frameworks", *Optimization and artificial intelligence in civil and structural engineering*, B.H.V. Topping (ed.), Kluwer Academic Publishers, (1992).

8 D.E. Grierson y L. Xu, "Design optimization of steel frameworks accounting for semi-rigid connections", *Optimization of large structural systems*, G.I.N. Rozvany (ed.), Kluwer Academic Publishers (1992).

9 H. Adeli y N.T. Cheng, "Concurrent genetic algorithms for optimization of large structures", *Journal of Aerospace Engineering*, ASCE, Vol. **7**, N° 3, pp. 276–296, (1994).

10 H. Adeli y H.S. Park, "A neural dynamics model for structural optimization theory", *Computers and structures*, Vol. **57**, 3, pp. 383–390, (1995).

11 H. Adeli y H.S. Park, "Optimization of space structures by neural dynamics", *Neural networks*, Vol. **8**, N° 5, pp. 769–781, (1995).

12 S. Ohkubo y K. Taniwaki, "Shape and sizing optimization of steel cable stayed bridges", *Computer aided optimum design of structures, OPTI 91, Optimization of structural systems and industrial applications*, S. Hernández y C.A. Brebbia (eds.), Comp. Mech. Publications & Elsevier App. Sci., pp. 529–540, (1991).

.

13 L.M.C. Simões y J.H.J.O. Negrão, "Optimization of cable-stayed bridges with box-girder decks", *Computer aided optimum design of structures V, OPTI 97*, S. Hernández y C.A. Brebbia (eds.), Computational Mechanics Publications, pp. 21–32, (1997).

14 J.C. Perezzan y S. Hernández, "Size and shape optimization of long portal bridges", in *Computer aided optimum design of structures VI*, pp. 287–301, S. Hernández, A.J. Kassab y C.A. Brebbia (eds.), WIT Press, (1999).

15 J.C. Perezzan y S. Hernández, "Size and shape optimization of flexural structures with explicit sensitivity analysis", 1999 *AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dinamics and Materials Conference and Exhibit*, St. Louis, pp. 1605–1611, (1999).

16 J.C. Perezzan y S. Hernández, "Optimización de tamaño y geometría de sistemas a flexión en régimen lineal y no lineal", *IV Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, Sevilla, (1999).

17 E. Haug, K. Choi y V. Komkov, "*Design sensitivity analisis of structural systems*", Academic Press, Inc., (1986).

18 S. Hernández, "Métodos de diseño óptimo de estructuras", Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Colección Seinor N° 8, (1990).

19 R. Haftka y Z. Gürdal, "*Elements of structural optimization*, Kluwer Academic Publishers, (1992).

20 H.M. Adelman y R.T. Haftka, "Sensitivity analisys of discrete systems", *Structural optimization: Status and promise*, P.M. Kamat (ed.), *Progress in Astronautics and Aeronautics*, Vol. **150**, pp. 291–315, (1993).

21 ADS User's manual, VR & D, (1988).

22 R. Gilmour, G. Sauvageot, D. Tassin y J.D. Lockwood, "Northumberland's ice breaker", *Civil Engineering*, pp. 34–38, ASCE, January, (1997).

23 J. Dupré, "*Bridges*", Black Dog & Leventhal, (1997).