

Metodologias para o cálculo sísmico não-linear de barragens de betão

R. Faria

Monografías de Ingeniería Sísmica

Editor A. H. Barbat

**Metodologias para o cálculo
sísmico não-linear de
barragens de betão**

R. Faria

Monografía CIMNE IS-29 1998

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA
Edificio C1, Campus Norte UPC
C/ Gran Capitán, s/n
08034 Barcelona, España.

MONOGRAFÍAS DE INGENIERÍA SÍSMICA
Editor A.H. Barbat

ISSN: 1134-3249

METODOLOGIAS PARA O CÁLCULO SÍSMICO NÃO-LINEAR DE BARRAGENS DE BETÃO
Monografía CIMNE IS-29
© El autor

ISBN: 84-89925-25-9
Depósito Legal: B-41368-98

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

ABSTRACT

In this monograph the basic methodologies for the non-linear seismic analysis of concrete dams are presented.

The Finite Element Method is used to discretize the dam-foundation-reservoir ensemble, whereas the dynamic equations will be solved in the time domain according to implicit integration schemes, namely the Newmark method and the Hilber-Hughes-Taylor α method. For the non-linear problem a predictor multicorrector algorithm is adopted.

In view of the large scale computations inherent to dam analysis, a constitutive damage model for massive concrete is briefly presented. It incorporates two scalar damage variables with independent evolutions, simulating the degradation which occurs under tension or compression. Irreversible deformations are also accounted for, as well as concrete strain-rate effects.

Attention is devoted to the numerical noise which arises from direct time integration, and to its control through the algorithmic dissipation provided by the α method, or by a stiffness proportional damping matrix which is updated to account for material degradation.

Radiation damping to be provided at the artificial far boundaries located on the foundation and on the reservoir is also focused.

Special care is devoted to the simulation of the reservoir. Numerical modelling of the hydrodynamic effect is discussed in detail, either by means of pressure or displacement formulations, or even through the technique of the added masses from Westergaard.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS	1
1.2. ORGANIZAÇÃO EM CAPÍTULOS	2

CAPÍTULO 2 - EQUILÍBRIO ESTÁTICO E DINÂMICO DE MEIOS SÓLIDOS CONTÍNUOS

2.1. CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MECÂNICA ESTRUTURAL	5
2.1.1 Introdução da notação essencial	5
2.1.2 Tensor de deformações e de tensões	5
2.1.3 Equações de equilíbrio	6
2.1.4 Equação de resíduos pesados num problema dinâmico	6
2.1.5 Princípio dos Trabalhos Virtuais	7
2.2. DISCRETIZAÇÃO DOS MEIOS SÓLIDOS CONTÍNUOS COM BASE EM ELEMENTOS FINITOS	8
2.2.1 Conceitos fundamentais	8
2.2.2 Equações de equilíbrio dinâmico em forma espacialmente discreta	9
2.3. DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL	10
2.3.1 Generalidades sobre os métodos de integração	10
2.3.2 Método de Newmark	12
2.4. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DINÂMICO NÃO-LINEAR	14
2.4.1 Método de Newton-Raphson	14
2.4.2 Algoritmo preditor multicorrector	16
2.5. REFERÊNCIAS	18

CAPÍTULO 3 - MODELO DE DANO CONTÍNUO PARA ESTRUTURAS DE BETÃO DE GRANDES DIMENSÕES

3.1. ASPECTOS GERAIS	19
3.2. ENERGIA LIVRE	20
3.3. CRITÉRIOS DE DANO	20
3.4. LEIS DE EVOLUÇÃO PARA AS VARIÁVEIS INTERNAS	21
3.4.1 Variáveis de dano	21
3.4.2 Tensor de deformações plásticas	22
3.5. DISSIPAÇÃO	23
3.6. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DA LEI CONSTITUTIVA	24
3.7. MODELAÇÃO DO EFEITO DA DEPENDÊNCIA DA VELOCIDADE DE CARGA	25
3.7.1 Aspectos gerais	25
3.7.2 Regularização viscosa	25
3.7.3 Integração numérica	26
3.8. REFERÊNCIAS	27

CAPÍTULO 4 - AMORTECIMENTO ALGORÍTMICO, MATERIAL E POR RADIAÇÃO

4.1. AMORTECIMENTO ALGORÍTMICO	29
4.1.1 Ruído numérico	29
4.1.2 Integração directa segundo métodos implícitos clássicos	31
4.1.2.1 Expressões fundamentais	31
4.1.2.2 Matriz de amplificação	32
4.1.2.3 Precisão	34
4.1.2.4 Estabilidade	34
4.1.2.5 Amortecimento e distorção algorítmicos	36
4.1.2.6 Análise comparativa de vários métodos	37
4.1.3 Método α de Hilber-Hughes-Taylor	39
4.1.3.1 Expressões fundamentais	39
4.1.3.2 Matriz de amplificação	40

4.1.3.3 Precisão e estabilidade	40
4.1.3.4 Amortecimento e distorção algorítmicos	41
4.1.3.5 Aplicação numérica: comparação do método α de Hilber-Hughes-Taylor com o método de Newmark não amortecido	42
4.1.3.6 Situação envolvendo comportamento materialmente não-linear	43
4.1.4 Referência a outros métodos	44
4.1.4.1 Método α de Bossak	44
4.1.4.2 Método ρ de Bazzi-Anderheggen	44
4.2. AMORTECIMENTO MATERIAL	45
4.2.1 Considerações gerais	45
4.2.2 Matriz de amortecimento genérica num espaço modal	46
4.2.3 Matriz de amortecimento de Rayleigh	46
4.2.3.1 Expressões fundamentais	46
4.2.3.2 Efeito da matriz de amortecimento de Rayleigh na análise do comportamento não-linear da barragem de Koyna	48
4.2.3.2.1 Matriz $C = a M$	49
4.2.3.2.2 Matriz $C = b K_0$	51
4.2.3.2.3 Explicação das diferenças encontradas	51
4.2.4 Actualização da matriz de amortecimento em análises não-lineares	53
4.3. AMORTECIMENTO POR RADIAÇÃO EM MEIOS ELÁSTICOS	55
4.3.1 Considerações gerais	55
4.3.2 Propagação de ondas unidimensionais	56
4.3.2.1 Ondas envolvendo movimento axial das partículas	56
4.3.2.1.1 Condição de radiação perfeita	57
4.3.2.1.2 Fronteira transparente num sentido e com imposição de uma onda no outro	59
4.3.2.2 Ondas envolvendo movimento transversal das partículas	60
4.3.3 Propagação de ondas planas em meios multidimensionais	61
4.3.3.1 Condição de radiação perfeita	62
4.3.3.2 Condição de radiação ponderada	63
4.3.3.3 Fronteira transparente num sentido e com imposição de ondas no outro	65
4.3.3.4 Modelação numérica	65
4.3.4 Exemplos de aplicação	66

4.3.4.1 Barra semi-infinita: comparação das condições de radiação perfeita e ponderada	66
4.3.4.2 Barra semi-infinita em apoio elástico	68
4.4. REFERÊNCIAS	69

CAPÍTULO 5 - MODELAÇÃO DA ALBUFEIRA E DA INTERACÇÃO SÓLIDO-LÍQUIDO

5.1. HIPÓTESES E EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS	73
5.2. FORMULAÇÃO EM PRESSÕES	74
5.2.1 Equação de resíduos pesados	74
5.2.2 Condições de fronteira	75
5.2.2.1 Superfície livre	75
5.2.2.2 Superfície envolvendo uma condição de radiação	75
5.2.2.3 Superfícies envolvendo interacção com meios sólidos	76
5.2.3 Discretização com recurso a elementos finitos	76
5.2.4 Equações de equilíbrio dinâmico do conjunto sólido-líquido	77
5.2.5 Resolução do sistema de equações do conjunto barragem-fundaçao-albufeira	78
5.2.5.1 Abordagem directa do sistema global de equações	78
5.2.5.2 Resolução iterativa por blocos	79
5.3. FORMULAÇÃO EM DESLOCAMENTOS ATRAVÉS DE UM SÓLIDO DEGENERADO	81
5.3.1 Considerações gerais	81
5.3.2 Propriedades do sólido degenerado	81
5.3.3 Exemplo de validação: reservatório submetido a uma aceleração subitamente aplicada	83
5.3.4 Condições de fronteira	85
5.3.4.1 Superfície livre	85
5.3.4.2 Superfície envolvendo uma condição de radiação	85
5.3.4.2.1 Considerações gerais	85
5.3.4.2.2 Aplicação numérica	86
5.3.4.3 Superfícies envolvendo interacção com meios sólidos	87
5.3.4.3.1 Necessidade de um elemento de junta	87

5.3.4.3.1.1 Matriz de rigidez do elemento de junta	87
5.3.4.3.1.2 Considerações sobre a utilização do elemento de junta	89
5.3.4.3.1.3 Aplicação numérica: problema estático	91
5.3.4.3.1.4 Aplicação numérica: problema dinâmico	94
5.3.4.3.2 Absorção de energia no fundo do reservatório	97
5.3.4.3.2.1 Considerações gerais	97
5.3.4.3.2.2 Modelação numérica	98
5.3.5 Condição de irrotacionalidade	100
5.3.6 Breve referência à modelação da cavitação	102
5.4. MODELAÇÃO APROXIMADA ATRAVÉS DE MASSAS ADICIONAIS	103
5.4.1 Hipótese de incompressibilidade da água	103
5.4.2 Limitações decorrentes da hipótese de incompressibilidade	104
5.4.3 Modelos de massas adicionais em problemas planos	105
5.4.3.1 Barragem gravidade infinitamente rígida com paramento de montante plano e vertical	105
5.4.3.2 Generalização a outras situações	107
5.4.4 Utilização dos modelos de massas adicionais em problemas tridimensionais	109
5.5. REFERÊNCIAS	111

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Apesar de a comunidade técnica e científica relacionada com o cálculo de barragens ter vindo a incorporar os sucessivos melhoramentos verificados ao nível das técnicas de discretização numérica, e sejam já relativamente comuns modelações integradas do conjunto barragem-fundação-albufeira, a análise de barragens de betão contemplando a utilização de modelos constitutivos não-lineares encontra-se ainda muito longe de ser prática corrente.

Neste contexto a presente monografia introduz e discute o conjunto de ferramentas de tipo numérico tido como essencial para a modelação de barragens de betão, envolvendo não só a complexidade inerente ao comportamento constitutivo não-linear do betão em massa, como ainda a interacção da superestrutura com a fundação e com a albufeira. Atendendo ao elevado esforço de cálculo computacional associado à simulação de comportamentos constitutivos não-lineares, a selecção daquelas ferramentas foi sustentada nas seguintes considerações, que visam assegurar um razoável compromisso entre o nível de sofisticação subjacente à modelação de diferentes aspectos:

- (i) Em primeiro lugar é requerida a possibilidade de modelação simultânea de diferentes domínios, que correspondem à barragem propriamente dita, ao maciço de fundação e à albufeira. A discretização espacial baseia-se no Método dos Elementos Finitos, que assegura a necessária versatilidade indispensável à satisfação deste objectivo. A nível constitutivo o refinamento da análise é concentrado na barragem, cujo estudo constitui o objectivo primordial. Relativamente ao maciço de fundação e à albufeira referir-se-á uma modelação constitutiva mais simplificada, decorrente de soluções lineares e elásticas. Os cálculos dinâmicos serão efectuados com recurso a uma integração no domínio do tempo, recorrendo quer ao método implícito de Newmark quer ao método α de Hilber-Hughes-Taylor, que se revelam adequados para a realização de análises que contemplam comportamentos constitutivos não-lineares.
- (ii) Dada a interacção da barragem com o maciço de fundação e o reservatório de água, que nas situações reais constituem domínios praticamente ilimitados, será necessário prever artifícios de natureza numérica indispensáveis à simulação da condição de amortecimento por radiação, fundamental para obviar a que as vibrações provenientes do interior dos meios discretizados sofram reflexões espúrias ao atingirem fronteiras numéricas artificiais, determinadas pela necessidade de limitar o domínio de análise. Esta modalidade de dissipaçāo completa o amortecimento algorítmico, utilizado no controlo do ruído de natureza numérica, e o amortecimento material, de tipo viscoso.

(iii) Atendendo à natureza particular dos problemas envolvidos na análise do comportamento sísmico de grandes barragens, o modelo constitutivo para simulação do comportamento não-linear do betão em massa deverá ser directamente vocacionado para esse objectivo, e não uma mera adaptação de versões originais de modelos destinados a estruturas de menores dimensões, de betão armado ou pré-esforçado. No modelo constitutivo assim desenvolvido estará contemplada a simulação do comportamento diferenciado do betão à tracção e à compressão, não descurando a economia de utilização do ponto de vista computacional, por forma a permitir a realização de um elevado número de análises em grande escala.

1.2. ORGANIZAÇÃO EM CAPÍTULOS

Do ponto de vista do respectivo conteúdo a presente monografia foi organizada em 5 capítulos, nos quais se procurou cobrir, com algum desenvolvimento, os aspectos mais relevantes requeridos para uma adequada abordagem do comportamento das barragens de betão em massa.

Assim, e em seguimento à presente introdução, no Capítulo 2 é feita uma revisão sumária dos conceitos e equações fundamentais da Mecânica Estrutural, com destaque para as equações de equilíbrio indefinido e de contorno. É referida a discretização de meios sólidos contínuos através de elementos finitos que introduzem aproximações ao nível do campo de deslocamentos, e deduzidas, com base numa equação de resíduos pesados, as equações de equilíbrio dinâmico em forma espacialmente discreta. Seguidamente, e no contexto da análise dinâmica, é abordada a problemática da discretização da variável tempo. Alguns aspectos de ordem geral relacionados com os métodos de integração directa são referidos neste capítulo, como forma de introdução a um tratamento mais aprofundado que será considerado no Capítulo 4. Seleccionando a formulação correspondente ao método implícito de Newmark, é deduzido o sistema de equações que possibilita a resolução numérica de um problema dinâmico, à custa de uma sequência de soluções obtidas em instantes pré-selecionados. É discutida a aplicação do Método de Newton-Raphson na resolução de problemas dinâmicos que envolvem materiais com comportamento constitutivo não-linear, sendo preconizada a sua utilização com apoio num algoritmo preditor multicorrector.

O Capítulo 3 é dedicado à apresentação breve de um modelo constitutivo original, vocacionado para a simulação do comportamento não-linear do betão em massa. A equação constitutiva obtida assumirá uma forma bastante simples, na qual podem ser incluídos tanto os efeitos da degradação de rigidez como ainda a irreversibilidade das deformações, esta última traduzida com base num tensor de deformações plásticas. As evoluções das variáveis de dano e do tensor de deformações plásticas são controladas por leis apropriadas, tanto quanto possível baseadas no tensor de deformações, que constitui uma entidade de fácil obtenção no contexto de um algoritmo de elementos finitos com uma formulação através dos deslocamentos. Dois critérios de dano distintos controlam a evolução das variáveis de dano, consoante os valores assumidos por normas apropriadas, estabelecidas com base nas tensões principais (de tracção ou de compressão) correspondentes a um estado de tensão efectivo. No domínio da tracção o comportamento do modelo de dano assemelha-se ao de um modelo de fissura distribuída, enquanto que no domínio da compressão a superfície relativa ao critério de dano foi inspirada no critério de

Drucker-Prager. Na parte final do Capítulo 3 é sugerida uma modelação do efeito da dependência do comportamento do betão relativamente à velocidade de carga, realizada à custa de uma regularização viscosa das leis de evolução das variáveis de dano, que introduz apenas ligeiras modificações na formulação básica do modelo constitutivo.

No Capítulo 4 são discutidas três modalidades sob as quais se pode apresentar o amortecimento: algorítmico, material e por radiação. Através de um exemplo simples evidenciar-se-á que a utilização de métodos de integração directa sem qualquer modalidade de amortecimento induz o surgimento de ruído numérico, facilmente detectável nos registos das acelerações, em que é possível observar uma desmesurada irregularidade. Este efeito traduz-se na ‘poluição’ da solução numérica com frequências espúrias de alta frequência, que induzem uma variação muito rápida das acelerações, e portanto uma grande oscilação da contribuição das forças de inércia, que em cálculo não-linear se revela particularmente nociva. Mediante a utilização de determinados esquemas de integração no domínio do tempo a atenuação das amplitudes de oscilação no domínio das altas frequências pode ser induzida numericamente, facultando uma modalidade de amortecimento, dito algorítmico, que pode ser aproveitado para controlo do ruído numérico. Uma vez que a utilização desta modalidade de dissipação não pode, em geral, ser efectuada sem determinados cuidados, dada a sua eventual implicação na precisão e na estabilidade dos algoritmos de integração, neste capítulo procede-se a uma discussão relativamente aprofundada das características básicas de diversos métodos implícitos de integração directa. O método α de Hilber-Hughes-Taylor conjuga a possibilidade de controlo da dissipação algorítmica com características de estabilidade incondicional e de precisão de 2^a ordem.

A modelação do amortecimento material é abordada em seguida, com uma ênfase particular na definição devida a Rayleigh, que estabelece a matriz de amortecimento como uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez. A partir da análise do comportamento não-linear da barragem de Koyna evidenciar-se-á o claramente distinto desempenho de uma matriz de amortecimento de Rayleigh que contenha apenas uma daquelas contribuições, e explicado este insólito comportamento num enquadramento em que o ruído numérico, despertado pela rotura súbita do betão sob condições de tracção, assume enorme relevo. A matriz de amortecimento baseada exclusivamente na contribuição devida à matriz de rigidez acabará por ser seleccionada, dado proporcionar uma excelente capacidade de dissipação no domínio das altas frequências em que o ruído se manifesta, complementando assim a capacidade de dissipação algorítmica proporcionada pelo método α de Hilber-Hughes-Taylor. Com o objectivo de impedir que sob pronunciada degradação do betão o equilíbrio dinâmico possa ser assegurado, de forma artificial, à custa de uma desmesurada contribuição das forças de viscosidade, é sugerida a contínua actualização da matriz de amortecimento material, em função dos valores das variáveis de dano e do estado de tensão correntes.

Na parte final do Capítulo 4 é abordada a problemática do amortecimento por radiação, circunscrevendo todas as formulações ao domínio da elasticidade perfeita. As condições de propagação de ondas elásticas unidimensionais são discutidas em primeiro lugar, possibilitando o estabelecimento de expressões e conceitos essenciais, na base dos quais se procede depois a uma generalização a meios multidimensionais, considerando a hipótese de as ondas serem planas. De um ponto de vista numérico as condições de radiação são estabelecidas à custa de amortecedores de natureza viscosa, cujas leis constitutivas são igualmente apresentadas.

No Capítulo 5 discutem-se diversas questões relacionadas com a modelação da albufeira e da interacção sólido-líquido. Depois de breve referência às equações fundamentais que regem o equilíbrio de um meio líquido, procede-se à apresentação de duas alternativas de modelação da água por elementos finitos, bastante diferenciadas, e com diferentes custos computacionais: a formulação em pressões, cuja designação deriva de a variável nodal ser a pressão do líquido, e a formulação em deslocamentos através de um sólido degenerado, que recorre ao artifício de modelação de um líquido como um ‘sólido’ com rigidez ao corte desprezável, sendo então deslocamentos as respectivas variáveis nodais. Diversos aspectos relacionados com a utilização de ambas as formulações são amplamente discutidos, nomeadamente os que se relacionam com a modelação da condição de contorno na superfície livre da albufeira, da condição de radiação na fronteira artificial que limita o reservatório, da interacção sólido-líquido, ou com a resolução dos sistemas de equações do conjunto barragem-fundação-albufeira.

Uma ênfase particular é dedicada à formulação em deslocamentos, dada a facilidade da sua articulação com um algoritmo desenvolvido para a análise de domínios sólidos. A fim de possibilitar uma adequada simulação do contacto do líquido com a barragem e com o maciço de fundação, um modelo de junta é especificamente desenvolvido por forma a assegurar uma perfeita compatibilidade de deslocamentos na direcção normal à interface, deixando sem restrição movimentos relativos sólido-líquido na direcção tangencial. A modelação da condição de absorção de energia na camada de aluviões disposta no fundo do reservatório e a introdução da condição de irrotacionalidade do líquido são igualmente comentadas. A apresentação da formulação em deslocamentos encerra com a referência à modelação do fenómeno de cavitação do líquido.

A parte final do Capítulo 5 é integralmente dedicada à apresentação de modelos de massas adicionais, que na hipótese de incompressibilidade da água possibilitam uma modelação económica do efeito hidrodinâmico, à custa de um conjunto de massas aderentes ao paramento de montante da barragem. O procedimento é obviamente simplificado, sendo primeiramente estabelecido para problemas planos, e depois generalizado a problemas tridimensionais mediante o postulado de algumas idealizações.

Capítulo 2

EQUILÍBRIO ESTÁTICO E DINÂMICO DE MEIOS SÓLIDOS CONTÍNUOS

2.1. CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MECÂNICA ESTRUTURAL

2.1.1 Introdução da notação essencial

Com o propósito de introduzir a notação básica utilizada na caracterização dos meios contínuos, a Figura 1 esquematiza uma estrutura convenientemente ligada ao exterior, em que Ω caracteriza o volume do domínio e Γ a área do respectivo contorno. Sendo t o tempo, para um ponto genérico de coordenadas (x, y, z) na configuração in-deformada a representação local das forças aplicadas por unidade de volume será designada pelo vector b , enquanto que q se referirá às forças aplicadas na unidade de superfície do contorno e u ao vector deslocamento. Em problemas dinâmicos haverá ainda que definir os vectores velocidade \dot{u} e aceleração \ddot{u} , primeiras e segundas derivadas temporais de u .

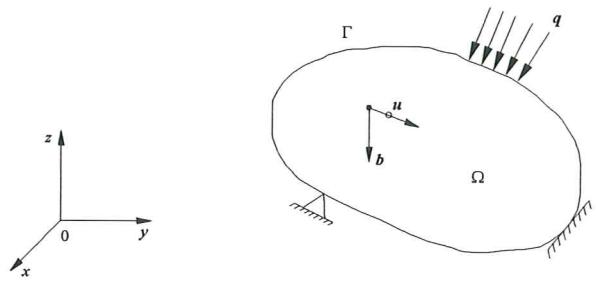


Figura 1 - Estrutura contínua genérica.

2.1.2 Tensores de deformações e de tensões

Considerando estruturas em que unicamente ocorrem pequenos deslocamentos e deformações infinitesimais, o tensor de deformações de um ponto genérico pode ser definido como um gradiente simétrico do vector deslocamento $u = (u_x, u_y, u_z)$, isto é,

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla \otimes u + u \otimes \nabla) \quad (1)$$

com

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right\}^T \quad (2)$$

As componentes do tensor ε que acabam de ser definidas correspondem a uma deformação possível na vizinhança de um dado ponto, caracterizado pelo vector posição (x, y, z) e pelo vector deslocamento (u_x, u_y, u_z) . Para se obter o estado de deformação de um corpo é necessário impor condicionamentos aos tensores de deformação dos infinitos elementos de volume em que aquele pode ser subdividido, a fim de garantir uma deformada global compatível, na qual os diferentes elementos de volume se deformem sem

desligamentos ou sobreposições entre si. Desta forma surgem seis equações de compatibilidade, cuja dedução pode ser encontrada na referência (4).

Relativamente ao estado de tensão num dado ponto, este fica completamente caracterizado uma vez conhecido o respectivo tensor de tensões σ . Com base neste tensor de segunda ordem, simétrico, a tensão t no referido ponto e para um elemento de superfície de normal exterior n obtém-se da expressão

$$t = \sigma \cdot n \quad (3)$$

que decorre de considerações elementares de equilíbrio.

2.1.3 Equações de equilíbrio

Num problema estático o equilíbrio interno é expressável mediante as equações de equilíbrio indefinido:

$$\nabla \cdot \sigma + b = 0 \quad (4)$$

Relativamente a um problema dinâmico estas equações podem ser facilmente generalizadas desde que o vector b seja complementado com as forças de inércia ($-\rho \ddot{u}$) e de viscosidade ($-c \dot{u}$):

$$\nabla \cdot \sigma + b = \rho \ddot{u} + c \dot{u} \quad (5)$$

(ρ é a massa específica e c caracteriza o amortecimento viscoso por unidade de volume).

No contorno Γ do corpo da Figura 1 podem definir-se dois domínios: (i) Γ_q , no qual são aplicadas acções exteriores sob a forma de tensões q e (ii) Γ_u , em cujos apoios de ligação ao exterior são prescritos deslocamentos u^Γ . Esta última condição é trivialmente satisfeita nos procedimentos numéricos usualmente adoptados no âmbito da Engenharia Estrutural, que a introduzem de forma forçada no sistema de equações resolventes, de acordo com a igualdade

$$u = u^\Gamma \quad \text{em } \Gamma_u \quad (6)$$

Quanto às acções aplicadas na forma de forças distribuídas na superfície, q , é imperioso garantir o seu equilíbrio face ao estado interno de tensão do material. Recorrendo à propriedade (3) a equação de equilíbrio pode expressar-se de acordo com

$$\sigma \cdot n = q \quad \text{em } \Gamma_q \quad (7)$$

2.1.4 Equação de resíduos pesados num problema dinâmico

Para uma estrutura submetida a uma acção de natureza dinâmica, o estado de tensão correspondente, que obedece às equações de equilíbrio indefinido (5) e às condições de contorno (6-7), pode ser determinado uma vez que este conjunto de equações seja estabelecido e resolvido para todo o contínuo. Contudo, e como é sabido, as soluções exactas para este tipo de problemas só são acessíveis para determinadas estruturas com geometrias, carregamentos e ligações ao exterior muito particulares e simples. As situações mais correntes estão, portanto, fora deste âmbito, pelo que a sua resolução só pode ser efectuada através de procedimentos aproximados, como sejam os decorrentes da utilização de discretizações da estrutura e do tempo, que ao nível local introduzem inevitáveis erros (ou resíduos).

De um ponto de vista prático, porém, estas aproximações serão aceitáveis desde que:

- (i) Os erros locais possam ser sucessivamente reduzidos à medida que um refinamento da discretização seja considerado, isto é, à medida que o ‘discreto’ se aproxime do ‘contínuo’.
- (ii) Seja nulo o integral dos erros locais, avaliado sobre todo o volume e contorno da estrutura.

Do ponto de vista da modelação da realidade física a condição (ii) assume relevância primordial, necessitando, por isso, de ser traduzida matematicamente. Retomando as equações (5) e (7), expressas agora de outra forma, isto é,

$$\psi_{\Omega} = \nabla \cdot \sigma + b - \rho \ddot{u} - c \dot{u} \quad \text{com } \psi_{\Omega} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (8)$$

$$\psi_{\Gamma} = \sigma \cdot n - q \quad \text{com } \psi_{\Gamma} = 0 \quad \text{em } \Gamma_q \quad (9)$$

a consideração dos erros associados às discretizações pode ser traduzida mediante a presunção de que ψ_{Ω} e ψ_{Γ} deixarão de ser exactamente nulos, mas antes razoavelmente próximos de zero, motivo pelo qual doravante serão designados por resíduos. Ponderando estes resíduos com base em funções de peso w_{Ω} e w_{Γ} arbitrárias (apenas com a condicionante de $w_{\Omega} = w_{\Gamma} = 0$ em Γ_u , a equação que traduz a condição (ii) pode ser estabelecida de acordo com a igualdade

$$\int_{\Omega} w_{\Omega} \cdot \psi_{\Omega} \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} w_{\Gamma} \cdot \psi_{\Gamma} \, d\Gamma = 0 \quad (10)$$

resultando então

$$\int_{\Omega} w_{\Omega} \cdot (\nabla \cdot \sigma + b - \rho \ddot{u} - c \dot{u}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} w_{\Gamma} \cdot (\sigma \cdot n - q) \, d\Gamma = 0 \quad (11)$$

Tomando $w_{\Omega} = -w_{\Gamma}$, o segundo integral desta equação pode ser modificado de acordo com o Teorema da Divergência de Gauss:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_q} w_{\Gamma} \cdot (\sigma \cdot n - q) \, d\Gamma &= - \int_{\Omega} (\nabla \otimes w_{\Omega}) : \sigma \, d\Omega - \int_{\Omega} w_{\Omega} \cdot (\nabla \cdot \sigma) \, d\Omega + \\ &\quad + \int_{\Gamma_q} w_{\Omega} \cdot q \, d\Gamma \end{aligned} \quad (12)$$

pelo que a equação (11) pode assumir um novo aspecto

$$\int_{\Omega} (\nabla \otimes w_{\Omega}) : \sigma \, d\Omega = \int_{\Omega} w_{\Omega} \cdot (b - \rho \ddot{u} - c \dot{u}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} w_{\Omega} \cdot q \, d\Gamma \quad (13)$$

Esta é uma forma fraca da equação de resíduos pesados (11), porquanto deixou de envolver derivadas sobre o tensor σ , embora à custa do envolvimento de derivadas das funções de peso w_{Ω} .

2.1.5 Princípio dos Trabalhos Virtuais

Dada a natureza arbitrária das funções de peso, uma forma notável da equação de resíduos pesados pode ser obtida elegendo para w_{Ω} o deslocamento virtual u^* associado a uma deformação infinitesimal da estrutura. Da compatibilidade da correspondente deformada com as ligações da estrutura ao exterior decorre que $u^* = 0$ ao longo do contorno Γ_u , o que assegura a satisfação da condição $w_{\Omega} = w_{\Gamma} = 0$ em Γ_u imposta às

funções de peso. Considerando a expressão (1) para determinação do tensor de deformações infinitesimais associado a \mathbf{u}^* ter-se-á:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{u}^* + \mathbf{u}^* \otimes \nabla) \quad (14)$$

Por outro lado, dada a simetria do tensor $\boldsymbol{\sigma}$ pode constatar-se que

$$(\nabla \otimes \mathbf{u}^*) : \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{u}^* + \mathbf{u}^* \otimes \nabla) : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon}^* : \boldsymbol{\sigma} \quad (15)$$

Retomando (13), transformações elementares permitem estabelecer a equação que expressa o bem conhecido Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^* : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{c} \dot{\mathbf{u}}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{q} \, d\Gamma \quad (16)$$

2.2. DISCRETIZAÇÃO DOS MEIOS SÓLIDOS CONTÍNUOS COM BASE EM ELEMENTOS FINITOS

2.2.1 Conceitos fundamentais

Os problemas mais usualmente encontrados no âmbito da Engenharia Estrutural, se bem que de natureza contínua, só podem ser analiticamente abordados mediante a consideração de algum tipo de discretização espacial. A modalidade de discretização espacial que recolhe o consenso mais generalizado na análise de problemas estruturais é, sem dúvida, a baseada no Método dos Elementos Finitos.

Elegendo para variável de campo o vector de deslocamentos no interior de um elemento finito genérico, a essência do método consiste na substituição da função contínua \mathbf{u} por um conjunto de valores discretos \mathbf{a}_e , da mesma função nos pontos nodais daquele, mediante a utilização de funções interpoladoras apropriadas, as funções de forma N_i . Em notação condensada esta aproximação é expressa do seguinte modo

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_e \quad (17)$$

em que a matriz \mathbf{N} envolve as diversas funções de forma N_i e no vector \mathbf{a}_e estão sequencialmente contidas as contribuições a_{e_i} .

Com base na aproximação ao vector deslocamento considerada em (17), a dedução das expressões de aproximação aos campos de velocidades e de acelerações é imediata

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \cdot \dot{\mathbf{a}}_e \quad \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \cdot \ddot{\mathbf{a}}_e \quad (18)$$

nas quais $\dot{\mathbf{a}}_e$ e $\ddot{\mathbf{a}}_e$ correspondem às velocidades e acelerações nos pontos nodais do elemento finito.

Estabelecida a aproximação (17) a determinação do tensor de deformações pode ser efectuada com base na definição (1)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \nabla \otimes (\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_e) + \frac{1}{2} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_e) \otimes \nabla \quad (19)$$

Condensando num operador matricial \mathbf{L} as diferenciações presentes nesta equação, numa representação vectorial $\boldsymbol{\varepsilon}$ poderia assumir o aspecto

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_e \quad \text{com } \mathbf{B} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{N} \quad (20)$$

Dada a natureza contínua dos deslocamentos no interior do elemento as equações de compatibilidade do campo de deformações são trivialmente satisfeitas.

Conhecida a dependência do tensor das tensões relativamente ao tensor das deformações, fica igualmente clara a dependência $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{a}_e)$. No caso de um material idealmente linear e elástico, a respectiva equação constitutiva estabeleceria (para estados de deformação e de tensão iniciais nulos)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_0 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_e \quad (21)$$

sendo \mathbf{D}_0 a matriz constitutiva de constantes elásticas.

Num caso mais geral, porém, a dependência $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$ é não-linear, embora possa ser admitida (pelo menos conceptualmente) a existência de uma relação secante do tipo

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_e \quad (22)$$

na qual a matriz \mathbf{D} traduz o comportamento não-linear actualizado do material.

2.2.2 Equações de equilíbrio dinâmico em forma espacialmente discreta

O equilíbrio de um elemento finito genérico pode ser traduzido com base na expressão (16):

$$\int_{\Omega_e} \rho \mathbf{u}^* \cdot \ddot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Omega_e} c \mathbf{u}^* \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}^* : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Omega_e} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{q_e}} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{q} \, d\Gamma \quad (23)$$

De acordo com as expressões estabelecidas em (18) para $\dot{\mathbf{u}}$ e $\ddot{\mathbf{u}}$, e designando por \mathbf{a}_e^* o vector de deslocamentos nodais da deformada virtual ao nível do elemento finito, tem-se

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{N} \cdot \mathbf{a}_e^* \quad \boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_e^* \quad (24)$$

pelo que de (23) resulta então:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_e^{*T} \left[\int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega \right] \ddot{\mathbf{a}}_e + \mathbf{a}_e^{*T} \left[\int_{\Omega_e} c \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega \right] \dot{\mathbf{a}}_e + \mathbf{a}_e^{*T} \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \right] = \\ = \mathbf{a}_e^{*T} \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, d\Omega \right] + \mathbf{a}_e^{*T} \left[\int_{\Gamma_{q_e}} \mathbf{N}^T \mathbf{q} \, d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (25)$$

Procedendo à eliminação de \mathbf{a}_e^* , e introduzindo as seguintes definições para as matrizes elementares de massa e de amortecimento

$$\mathbf{M}_e = \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega \quad \mathbf{C}_e = \int_{\Omega_e} c \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\Omega \quad (26)$$

e ainda a noção de vector elementar de forças resistentes internas

$$\mathbf{k}_e(\mathbf{a}_e) = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{a}_e) \, d\Omega \quad (27)$$

a expressão (25) pode ser simplificada:

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{a}}_e + \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{a}}_e + \mathbf{k}_e(\mathbf{a}_e) = \mathbf{f}_e \quad (28)$$

\mathbf{f}_e é um vector elementar, de forças nodais equivalentes às acções exteriores aplicadas:

$$f_e = \int_{\Omega_e} N^T b \, d\Omega + \int_{\Gamma_{q_e}} N^T q \, d\Gamma \quad (29)$$

Com base nas expressões (26-29) a equação de equilíbrio dinâmico da globalidade da estrutura pode ser traduzida em forma espacialmente discreta, para o que é suficiente proceder ao agrupamento ordenado das contribuições dos diferentes elementos finitos:

$$M \ddot{a}_t + C \dot{a}_t + k(a_t) = f_t \quad (30)$$

Esta expressão reflecte o equilíbrio dinâmico de uma estrutura caracterizada por uma matriz de massa M e por uma matriz de amortecimento C . Dada a expressão considerada em (27), na representação do contributo das forças resistentes $k(a_t)$ devidas às tensões internas $\sigma(a_t)$ nenhuma restrição foi introduzida relativamente à lei constitutiva $\sigma(\varepsilon)$, pelo que a expressão (30) contempla o comportamento materialmente não-linear.

2.3. DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL

2.3.1 Generalidades sobre os métodos de integração

Para um dado instante t o equilíbrio entre a acção dinâmica exterior f_t e as forças de massa, de amortecimento e de rigidez é expresso através da igualdade (30), à qual subjaz uma discretização espacial, realizada com base no MEF. A resolução desta equação conduz à determinação do vector $a_t = a(t)$, tendo em atenção as condições prevalecentes no instante inicial, isto é,

$$a(t_0) = a_0 \quad \dot{a}(t_0) = \dot{a}_0 \quad (31)$$

Dada a natureza contínua associada à variável tempo, a resolução de (30) requer a introdução de uma discretização temporal. Esta discretização consiste na selecção de um dado conjunto de instantes separados por intervalos de duração Δt , nos quais a condição de equilíbrio (30) é satisfeita. Partindo das condições iniciais (31), a estratégia consiste em avançar de um dado instante t (no qual o equilíbrio foi satisfeito e as variáveis a_t , \dot{a}_t , \ddot{a}_t determinadas) para o instante subsequente $t + \Delta t$, formulando determinadas hipóteses de aproximação, e buscando os valores de $a_{t+\Delta t}$, $\dot{a}_{t+\Delta t}$ e $\ddot{a}_{t+\Delta t}$ de tal forma que o equilíbrio seja assegurado.

De entre os vários métodos de integração disponíveis para apoiar a referida discretização temporal, o procedimento mais frequentemente adoptado consiste em recorrer a métodos de integração directa. Dentro desta categoria, podem ainda seleccionar-se os métodos explícitos e os métodos implícitos.

Nos métodos explícitos, de entre os quais se destaca o método das diferenças centrais², a aproximação é introduzida de tal forma que, estabelecido o equilíbrio no instante t , se calcula muito facilmente $a_{t+\Delta t}$ (e respectivas derivadas temporais). Como vantagens este método alia a facilidade e a intuitividade conceptual à possibilidade de dispensar a penosa tarefa computacional de proceder à factorização do sistema de equações resolventes, desde que as matrizes M e C sejam diagonais (procedimento geralmente aceitável). De entre os inconvenientes o mais relevante é o que se prende com o facto de se tratar de um método condicionalmente estável, que exige a consideração de intervalos de integração extremamente reduzidos, por forma a que os erros acumulados até um dado

instante não se propaguem descontroladamente aos instantes seguintes, destruindo a solução numérica.

Em contrapartida, nos métodos implícitos a determinação das entidades relativas ao instante $t + \Delta t$ é conseguida mediante um sistema de equações estabelecido num instante posterior a t . Desta forma são obtidos algoritmos incondicionalmente estáveis, nos quais o Δt a utilizar é determinado exclusivamente por razões de precisão e não por condicionamentos de estabilidade (geralmente mais restritivos), que permitem a adopção de intervalos de integração manifestamente superiores aos exigidos com o emprego de métodos explícitos.

Com base no Teorema de Dahlquist¹⁰ algumas conclusões importantes podem ser enunciadas para aplicação no âmbito da dinâmica estrutural:

- 1) Não existe nenhum método de integração explícito incondicionalmente estável.
- 2) Não existe nenhum método incondicionalmente estável com precisão de 3^a ordem.
- 3) O método com precisão de 2^a ordem e erro mínimo é o que se fundamenta na ‘regra trapezoidal’[†].

Por outro lado, e segundo a referência (8), um método de integração para ser competitivo deverá possuir os seguintes atributos:

- (i) Estabilidade incondicional quando aplicado a problemas lineares.
- (ii) Exigir, no máximo, a resolução de um conjunto de equações implícitas por passo de integração.
- (iii) Precisão de 2^a ordem.
- (iv) Capacidade de controlo da dissipação algorítmica nos modos de frequência elevada.
- (v) Ser auto-suficiente no instante $t = 0$.

A exigência (i) justifica-se pelas razões previamente expostas, pois é desejável que o erro cometido num certo instante se transmita de forma amortecida aos instantes subsequentes, e portanto tenda à eliminação para passos de tempo consideravelmente afastados. De acordo com a primeira conclusão do Teorema de Dahlquist, a satisfação do requisito (i) só pode ser conseguida mediante a utilização de métodos de integração implícitos.

A exigência (ii) relaciona-se com o facto de a aplicação de determinados algoritmos implícitos, com excelentes características do ponto de vista numérico, impor a consideração simultânea de pelo menos dois sistemas de equações da dimensão do problema real, com as evidentes desvantagens computacionais daí decorrentes¹⁰. Atendendo a que os algoritmos implícitos já naturalmente obrigam a um considerável esforço de cálculo, pelo facto de obrigarem ao armazenamento e factorização da matriz resolvente do problema, comprehende-se que esse esforço não deva ser multiplicado, o que justifica a existência daquele requisito.

Segundo a referência (7) a experiência tem revelado que em dinâmica estrutural os métodos com precisão de 2^a ordem superam francamente os métodos com precisão de 1^a ordem. Por outro lado, o ponto 2) do Teorema de Dahlquist mostra que é de 2^a ordem a

[†] Esta regra é igualmente reconhecida como ‘da aceleração média’, de que é exemplo o método de Newmark.

precisão máxima que pode ser obtida com um método incondicionalmente estável, o que explica a recomendação do ponto (iii).

O requisito (iv) traduz a atenção que vem merecendo um efeito indesejável verificado nas aplicações que envolvem discretizações espaciais e temporais: o ruído numérico. Na realidade tem-se constatado que em determinadas condições específicas do problema em análise se produzem ondas parasitas de alta frequência, sem realidade física, que percorrem a malha de elementos finitos, e perturbam a solução, por vezes de forma muito drástica. Este efeito de natureza numérica acentua-se quando associado a bruscas variações na rigidez estrutural, pelo que é particularmente de recear em aplicações que envolvam leis constitutivas não-lineares – exemplos desta situação são referidos em (9), associados à modelação com juntas de comportamentos não-lineares de barragens abóbada. Sem entrar em detalhe, porquanto o assunto merecerá desenvolvimento no Capítulo 4, referir-se-á contudo que o ruído numérico afecta seriamente a convergência, prejudicando ou inviabilizando a obtenção de soluções. Por estes motivos o assunto tem merecido destaque em inúmeras publicações científicas^{1,3,7,8,10,13}, nas quais é realçada a conveniência de dotar os algoritmos de formas de controlo do ruído, basicamente à custa da introdução de dissipação numérica que, sem afectar significativamente as contribuições dos primeiros modos de vibração, seja eficaz na atenuação das participações associadas às altas frequências.

Finalmente a existência do ponto (v) poderá considerar-se intuitiva, uma vez que do ponto de vista prático serão pouco atractivos os algoritmos que necessitam do apoio de outros métodos para iniciarem a integração, pois isso inevitavelmente conduzirá a códigos computacionais mais complexos.

2.3.2 Método de Newmark

Indo de encontro às considerações que foram apresentadas no ponto anterior, os métodos de integração da família de Newmark constituem, provavelmente, a opção que recolhe mais ampla aceitação na comunidade científica, uma vez que satisfazem boa parte dos requisitos (i)-(v).

No essencial o método implícito proposto por Newmark admite uma variação linear das acelerações durante o intervalo $[t, t + \Delta t]$, razão pela qual este método se integra na categoria das ‘regras trapezoidais’. As expressões cinemáticas estabelecidas no âmbito deste método decorrem de integrações matemáticas que se baseiam na definição de uma aceleração média naquele intervalo

$$\ddot{a}_t + \gamma (\ddot{a}_{t+\Delta t} - \ddot{a}_t) \quad (32)$$

das quais resulta então²

$$\dot{a}_{t+\Delta t} = \dot{a}_t + [(1 - \gamma) \ddot{a}_t + \gamma \ddot{a}_{t+\Delta t}] \Delta t \quad (33)$$

$$a_{t+\Delta t} = a_t + \dot{a}_t \Delta t + [(1/2 - \beta) \ddot{a}_t + \beta \ddot{a}_{t+\Delta t}] \Delta t^2 \quad (34)$$

β e γ são parâmetros por intermédio dos quais se pode controlar a estabilidade e a precisão. O método de Newmark é incondicionalmente estável se $\gamma \geq 1/2$ e tem precisão de 2^a ordem para $\gamma = 1/2$. Verifica-se que neste método o amortecimento algorítmico só pode ser introduzido para $\gamma > 1/2$, situação em que se obtém precisão de 1^a ordem, pelo que se

revela impossível satisfazer simultaneamente os requisitos (iii) e (iv): assegurar precisão de 2^a ordem e capacidade dissipativa nas altas frequências¹⁰.

Por outro lado considerações de natureza matemática¹⁰ permitem concluir que, para um dado γ seleccionado, a máxima dissipação algorítmica (quando existe) é obtida para $\beta = (\gamma + 1/2)^2 / 4$, o que significa que nas aplicações numéricas se obterá estabilidade incondicional e eficiência máxima seleccionando os parâmetros de acordo com

$$\gamma \geq 1/2 \quad \beta = (\gamma + 1/2)^2 / 4 \quad (35)$$

Definindo $\Delta\mathbf{a}_{t+\Delta t} = \mathbf{a}_{t+\Delta t} - \mathbf{a}_t$, as expressões (33-34) podem ser rescritas, separando de forma mais marcada as contribuições associadas ao instante prévio t , portanto conhecidas, das correspondentes ao instante a determinar $t + \Delta t$:

$$\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} = \tilde{\mathbf{a}}_t + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta\mathbf{a}_{t+\Delta t} \quad (36)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} = \tilde{\mathbf{v}}_t + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta\mathbf{a}_{t+\Delta t} \quad (37)$$

$$\mathbf{a}_{t+\Delta t} = \mathbf{a}_t + \Delta\mathbf{a}_{t+\Delta t} \quad (38)$$

com

$$\tilde{\mathbf{a}}_t = - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{a}}_t - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{a}}_t \quad (39)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_t = - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{a}}_t - \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{a}}_t \quad (40)$$

Da substituição das relações (36-38) na equação (30), rescrita para $t + \Delta t$, resulta

$$\left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \right] \Delta\mathbf{a}_{t+\Delta t} + \mathbf{k}(\mathbf{a}_t + \Delta\mathbf{a}_{t+\Delta t}) = \mathbf{f}_{t+\Delta t} - \mathbf{M} \tilde{\mathbf{a}}_t - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{v}}_t \quad (41)$$

equação que traduz uma modalidade de aplicação do método de Newmark, na qual a incógnita é a variação incremental do vector deslocamento $\Delta\mathbf{a}_{t+\Delta t}$, cuja resolução tem de ser efectuada iterativamente, dada a dependência não-linear do vector das forças resistentes internas, \mathbf{k} , do vector deslocamento actualizado, $\mathbf{a}_{t+\Delta t} = \mathbf{a}_t + \Delta\mathbf{a}_{t+\Delta t}$.

Uma particularidade notável do sistema de equações (41) relaciona-se com o facto de, com extrema simplicidade, poder assumir o aspecto típico de um problema de natureza estática, mediante a anulação das contribuições relativas às forças de inércia e de viscosidade. Computacionalmente este facto revela-se de extrema utilidade, pois permite condensar num só algoritmo a abordagem de problemas não-lineares estáticos e dinâmicos[†].

No decurso do último quarto de século foram propostas diversas variantes ao método de Newmark clássico, com o objectivo de assegurar substancial dissipação algorítmica nas frequências espúrias elevadas, e obter pequena dissipação ao nível das frequências mais baixas. De entre essas alternativas são de salientar a variante método α de Hilber-Hughes-

[†] Do ponto de vista do autor, esta capacidade algorítmica de abordagem do problema estático deveria ser acrescentada aos requisitos (i)-(v), e ser considerada para selecção dos algoritmos de integração directa.

-Taylor referenciada em (7), e a variante método α de Bossak referenciada em (13), as quais mantêm as expressões de colocação (32-34) típicas do método de Newmark, mas alteram ligeiramente a forma da equação geral do problema dinâmico através da introdução de um parâmetro adicional α , que controla o amortecimento algorítmico. Formalmente as variantes método α diferem muito pouco do método de Newmark, e podem aliás retomar a forma clássica com que este método foi primeiramente introduzido por consideração de $\alpha=0$, pelo que de momento será suficiente clarificar a resolução iterativa da equação não-linear definida em (41), deixando para o Capítulo 4 os aspectos específicos do método α devido a Hilber-Hughes-Taylor.

2.4. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DINÂMICO NÃO-LINEAR

2.4.1 Método de Newton-Raphson

A equação não-linear expressa em (41) pode ser rescrita a fim de tomar o aspecto

$$\psi = \bar{f}_{t+\Delta t} - \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \right] \Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t} - \mathbf{k}(\mathbf{a}_t + \Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}) = 0 \quad (42)$$

com

$$\bar{f}_{t+\Delta t} = \mathbf{f}_{t+\Delta t} - \mathbf{M} \tilde{\mathbf{a}}_t - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{v}}_t \quad (43)$$

ou, equivalentemente, tal como decorre de (30),

$$\psi = \mathbf{f}_{t+\Delta t} - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} - \mathbf{k}(\mathbf{a}_{t+\Delta t}) = 0 \quad (44)$$

em que o vector ψ deverá anular-se para o equilíbrio dinâmico ser satisfeito.

Não sendo possível traduzir de forma explícita a dependência de \mathbf{k} relativamente ao vector deslocamento, a estratégia para resolução da equação (42) fundamenta-se no estabelecimento de um processo iterativo que, partindo dos vectores deslocamento (e demais entidades) determinados no instante t anterior, vá fornecendo estimativas sucessivamente mais aproximadas para $\Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}$, até que a condição $\psi=0$ seja cumprida. Durante o processo iterativo, porém, a condição de equilíbrio não será satisfeita, pelo que o vector $\psi \neq 0$ pode ser encarado como correspondendo a um conjunto de forças que exprimem o desequilíbrio entre as forças exteriores aplicadas e as forças devidas à inércia, ao amortecimento e à rigidez da estrutura.

Dada a dependência $\psi = \psi(\Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t})$ expressa em (42), é possível proceder ao desenvolvimento do vector de forças residuais em série de polinómios de Taylor. Assinalando com sobre-índices i e $i+1$ as aproximações respeitantes a duas iterações consecutivas do processo descrito, e designando por $\delta_{t+\Delta t}^i$ a variação a considerar para $\Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}^i$, a expressão daquela série, truncada por forma a desprezar os termos de ordem superior à 1^a, é então

$$\psi(\Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}^{i+1}) = \psi(\Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}^i) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial (\Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t})} \right)^i \delta_{t+\Delta t}^i \quad (45)$$

Se o equilíbrio fosse exactamente satisfeito na iteração $i+1$ o correspondente vector de forças residuais anular-se-ia, o que permitiria concluir que

$$- \left(\frac{\partial \Psi}{\partial (\Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t})} \right)^i \delta_{t+\Delta t}^i = \psi(\Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}^i) \quad (46)$$

De acordo com (42) e uma vez que $\partial(\cdot) / \partial(\Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}) = [\partial(\cdot) / \partial \mathbf{a}]_{t+\Delta t}$, a expressão (46) dá origem à equação

$$\left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + \left(\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{a}} \right)_{t+\Delta t}^i \right] \delta_{t+\Delta t}^i = \psi_{t+\Delta t}^i \quad (47)$$

com

$$\psi_{t+\Delta t}^i = \psi(\Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}^i) \quad (48)$$

Este conjunto de expressões pode ser interpretado como correspondendo à equação resolvente do problema pseudo-estático

$$\bar{\mathbf{K}}_{t+\Delta t}^i \delta_{t+\Delta t}^i = \psi_{t+\Delta t}^i \quad (49)$$

cuja matriz de rigidez, $\bar{\mathbf{K}}_{t+\Delta t}^i$, dita efectiva, decorre de (47):

$$\bar{\mathbf{K}}_{t+\Delta t}^i = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + \left(\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{a}} \right)_{t+\Delta t}^i \quad (50)$$

Na realidade, dada a sequência de passos considerada nas expressões (45-48) e o conceito de resíduos ψ introduzido em (42), a equação (49) traduz o princípio iterativo de resolução de um sistema de equações não-lineares pelo método de Newton-Raphson, cuja sequência de melhoramentos para a solução $\Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}$ pode ser obtida de acordo com a fórmula recursiva

$$\Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}^{i+1} = \Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}^i - [\bar{\mathbf{K}}_{t+\Delta t}^i]^{-1} \psi_{t+\Delta t}^i \quad (51)$$

Como é sabido, o método de Newton-Raphson assegura um procedimento globalmente estável na obtenção de aproximações sucessivamente convergentes para a verdadeira solução do problema, desde que o processo iterativo seja iniciado com base numa predição $\Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}^0$ suficientemente próxima da solução real. O procedimento é interrompido quando a variação da solução entre duas iterações sucessivas seja considerada desprezável, face a um determinado critério de convergência.

Em múltiplas aplicações o processo iterativo esquematizado em (51) é estabelecido substituindo na definição (50) a matriz de rigidez tangente $(\partial \mathbf{k} / \partial \mathbf{a})_{t+\Delta t}^i$ por uma matriz de rigidez que, mantendo-se constante num dado número de passos, permita evitar as sucessivas factorizações subjacentes à continuada actualização de $\bar{\mathbf{K}}$. Este artifício, usualmente referido sob a designação de Newton-Raphson modificado, reduz a taxa de convergência do algoritmo, mas é muito usual sobretudo no contexto da Engenharia Sísmica. Na realidade, atendendo ao grande número de intervalos de tempo envolvidos neste tipo de problemas, é geralmente preferível aproveitar a economia decorrente da dispensa (em algumas fases do cálculo) do agrupamento e factorização da matriz de rigidez efectiva, ainda que à custa da realização de um número de iterações mais elevado. Um procedimento bastante comum consiste em adoptar a matriz de rigidez elástica, \mathbf{K}_0 , na definição da matriz de rigidez efectiva^{5,11,12}, isto é,

$$\bar{\mathbf{K}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K}_0 \quad (52)$$

realizando uma única vez as operações de formação e eliminação de $\bar{\mathbf{K}}$.

Nas aplicações estáticas e dinâmicas da presente monografia foi igualmente esta a metodologia adoptada.

2.4.2 Algoritmo predictor multicorrector

Atentando na metodologia sugerida para resolução do problema de equilíbrio dinâmico não-linear, reconhece-se que aquela se estrutura na determinação, para cada instante, do vector $\Delta\mathbf{a}$, fazendo uso da fórmula recorrente

$$\Delta\mathbf{a}_{t+\Delta t}^{i+1} = \Delta\mathbf{a}_{t+\Delta t}^i + \delta_{t+\Delta t}^i \quad (53)$$

em que

$$\delta_{t+\Delta t}^i = - \left[\bar{\mathbf{K}}_{t+\Delta t}^i \right]^{-1} \psi(\Delta\mathbf{a}_{t+\Delta t}^i) \quad (54)$$

A expressão (53) pode ser encarada como correspondendo a um algoritmo multicorrector, em que os melhoramentos da solução vão sendo introduzidos em $\Delta\mathbf{a}_{t+\Delta t}^{i+1}$ através do vector $\delta_{t+\Delta t}^i$. Por sua vez as alterações ocorridas sobre o vector deslocamento incremental reflectem-se na deformada e nos vectores velocidade e aceleração, e também sobre o vector de forças residuais.

Para o processo iterativo ser iniciado é indispensável estabelecer uma primeira estimativa para o vector incremental de deslocamentos $\Delta\mathbf{a}_{t+\Delta t}^0$, que servirá não só para ser directamente considerado na expressão (53), mas também para permitir o cálculo do primeiro vector de forças residuais $\psi(\Delta\mathbf{a}_{t+\Delta t}^0)$, com base no qual se determinará o primeiro vector correctivo $\delta_{t+\Delta t}^0$. Esta fase de predição é relativamente arbitrária, porquanto é à fase multicorrectora que incumbirá a obtenção da solução correcta, e nesse sentido poderá ser permitida ao utilizador uma apreciável dose de liberdade e de espírito criativo. Convém no entanto ter presente que da razoabilidade das previsões efectuadas depende largamente o número das iterações necessárias para assegurar a convergência, pelo que convirá dedicar um mínimo de atenção a este aspecto.

De entre os esquemas preditores mais intuitivos seleccionaram-se os seguintes⁶:

$$(i) \quad \Delta\mathbf{a}_{t+\Delta t}^0 = \mathbf{0} \quad (55a)$$

$$(ii) \quad \Delta\mathbf{a}_{t+\Delta t}^0 = \Delta\mathbf{a}_t \quad (55b)$$

$$(iii) \quad \Delta\mathbf{a}_{t+\Delta t}^0 = \Delta t \dot{\mathbf{a}}_t + 1/2(1-2\beta) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{a}}_t \quad \Leftarrow \quad \ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}^0 = \mathbf{0} \quad (55c)$$

$$(iv) \quad \Delta\mathbf{a}_{t+\Delta t}^0 = \Delta t \dot{\mathbf{a}}_t + 1/2 \Delta t^2 \ddot{\mathbf{a}}_t \quad \Leftarrow \quad \ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}^0 = \ddot{\mathbf{a}}_t \quad (55d)$$

Os preditores (i) e (ii) revelaram-se adequados em todas as situações analisadas na presente monografia, com relevância para o (ii) que provou exigir um menor número de iterações, o que se deve ao facto de uma previsão do incremento de deslocamento efectuada com base na variação ocorrida no intervalo de tempo precedente ser, na generalidade das situações, mais acertada do que a previsão de uma variação nula para o vector $\Delta\mathbf{a}_{t+\Delta t}$.

Quadro 1 - Algoritmo preditor multicorrector.

DADOS
 $\beta, \gamma, TOLER, \Delta t, \Delta \mathbf{a}_t, \mathbf{a}_t, \dot{\mathbf{a}}_t, \ddot{\mathbf{a}}_t, \mathbf{M}, \mathbf{C}$, (variáveis internas)_t
RESULTADOS
 $\Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}, \mathbf{a}_{t+\Delta t}, \dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}, \ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}$, (variáveis internas)_{t+Δt}
ALGORITMO

- (1) Calcula-se o vector solicitação $\mathbf{f}_{t+\Delta t}$.
- (2) Coloca-se em zero o contador de iterações ($i = 0$).
- (3) Seleccionando um dos preditores, estabelece-se $\Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}^{i=0}$ de acordo com uma das seguintes hipóteses:

$$(i) \quad \Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}^{i=0} = \mathbf{0}$$

$$(ii) \quad \Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}^{i=0} = \Delta \mathbf{a}_t$$

$$(iii) \quad \Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}^{i=0} = \Delta t \dot{\mathbf{a}}_t + 1/2(1-2\beta) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{a}}_t$$

$$(iv) \quad \Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}^{i=0} = \Delta t \dot{\mathbf{a}}_t + 1/2 \Delta t^2 \ddot{\mathbf{a}}_t$$

- (4) Calculam-se os novos vectores de deslocamentos, velocidades e acelerações:

$$\mathbf{a}_{t+\Delta t}^i = \mathbf{a}_t + \Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}^i$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}^i = - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{a}}_t - \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{a}}_t + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}^i$$

$$\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}^i = - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{a}}_t - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{a}}_t + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}^i$$

- (5) Determinam-se as forças residuais

$$\Psi_{t+\Delta t}^i = \mathbf{f}_{t+\Delta t} - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}^i - \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}^i - \mathbf{k}(\mathbf{a}_{t+\Delta t}^i)$$

- (6) Avalia-se uma norma deste vector e compara-se com uma tolerância pré-definida

$$\|\Psi_{t+\Delta t}^i\| \leq TOLER ?$$

SIM : O algoritmo convergiu. **FIM**.

NÃO: É necessário activar a fase correctora. Prosseguir para o ponto (7).

- (7) Caso seja pretendido poder-se-á actualizar a matriz de rigidez efectiva

$$\bar{\mathbf{K}}_{t+\Delta t}^i = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + \left(\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{a}} \right)_{t+\Delta t}^i$$

- (8) Procede-se à correcção do vector incremento de deslocamentos

$$\Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}^{i+1} = \Delta \mathbf{a}_{t+\Delta t}^i - [\bar{\mathbf{K}}_{t+\Delta t}^i]^{-1} \Psi_{t+\Delta t}^i$$

- (9) Actualiza-se o contador de iterações,

$$i = i + 1$$

e prossegue-se para o ponto (4).

Quanto aos preditores (iii) e (iv), baseados na hipótese de o vector de acelerações ser nulo ou igual ao vector aceleração no instante prévio, não se observou que da sua consideração tenha resultado qualquer vantagem notória.

O Quadro 1 sumaria o conjunto de operações mais relevantes do algoritmo preditor multicorrector.

2.5. REFERÊNCIAS

1. Adams, D.D. and Wood, W.L. (1983) - Comparison of Hilber-Hughes-Taylor and Bossak ‘ α -Methods’ for the Numerical Integration of Vibration Equations - *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 19, Nº 5, pp. 765-771.
2. Bathe, K.J. and Wilson, E.L. (1976) - Numerical Methods in Finite Element Analysis - *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs*, New Jersey, U.S.A..
3. Bazzi, G. and Anderheggen, E. (1982) - The ρ -Family of Algorithms for Time-Step Integration With Improved Numerical Dissipation - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 10, pp. 537-550.
4. Correia de Araújo, F. (1961) - Elasticidade e Plasticidade - *Imprensa Portuguesa*, Porto, Portugal.
5. Costa, A.G. (1989) - Análise Sísmica de Estruturas Irregulares - *Tese de Doutoramento*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.
6. Galindo, M. (1993) - Una Metodología para el Análisis Numérico del Comportamiento Resistente No Lineal de Presas de Hormigón Bajo Cargas Estáticas y Dinámicas - *Tesis Doctoral*, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España.
7. Hilber, H.M.; Hughes, T.J. and Taylor, R.L. (1977) - Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 5, pp. 283-292.
8. Hilber, H.M. and Hughes, T.J. (1978) - Collocation, Dissipation and ‘Overshoot’ for Time Integration Schemes in Structural Dynamics - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 6, pp. 99-117.
9. Hohberg, J.-M. (1991) - Seismic Arch Dam Analysis With Full Joint Nonlinearity - *Proc. Int. Conf. on Dam Fracture*, Boulder, U.S.A., pp. 57-74.
10. Hughes, T.J. (1987) - The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis - *Prentice-Hall, Englewood Cliffs*, New Jersey, U.S.A..
11. Ma, S.Y. and May, I.M. (1986) - The Newton-Raphson Method Used in the Non-Linear Analysis of Concrete Structures - *Comp. & Structures*, Vol. 24, Nº 2, pp. 177-185.
12. Pina, C. e Câmara, R. (1988) - Non-Linear Analysis of Arch Dams - *Memória Nº 717*, LNEC, Lisboa, Portugal.
13. Wood, W.L.; Bossak, M. and Zienkiewicz, O.C. (1980) - An Alpha Modification of Newmark’s Method - *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 15, pp. 1562-1566.

Capítulo 3

MODELO DE DANO CONTÍNUO PARA ESTRUTURAS DE BETÃO DE GRANDES DIMENSÕES

3.1. ASPECTOS GERAIS

A Mecânica de Dano Contínuo caracteriza a degradação interna de um material mediante um conjunto de variáveis de dano, que assumem valores entre 0 e 1, e exprimem a densidade média de defeitos (microfissuras e microcavidades) existentes numa determinada secção^{6,10}. O valor 0 corresponde ao estado virgem (ou elástico) do material e o valor 1 ao estado completamente colapsado.

Embora as variáveis de dano possam ser tensoriais, em muitas situações uma simples representação do dano em forma escalar é considerada, assegurando mesmo assim um modelo material suficientemente realista^{13,14}, com a vantagem de o algoritmo resultante ser significativamente menos complicado do que nas alternativas tensoriais. Neste tipo de modelo de dano escalar nenhuma direcção específica é associada a cada variável de dano, o que corresponde a assumir que os defeitos se encontram uniformemente distribuídos em todas as direcções.

Intrinsecamente relacionado com o conceito de variável de dano, o conceito de tensão efectiva é também fulcral na Mecânica de Dano Contínuo. Assim, tomando em consideração o provete esquematizado na Figura 2, e designando por S a secção total onde é aplicada a usual tensão de Cauchy σ , e por \bar{S} a secção efectivamente resistente à qual é reportada a tensão $\bar{\sigma}$ (isto é, após exclusão dos defeitos do material, simbolicamente representados por um entalhe ou fissura), a condição de equilíbrio pode ser expressa de acordo com

$$\sigma S = \bar{\sigma} \bar{S} \quad \Rightarrow \quad \bar{\sigma} = \sigma S / \bar{S} \quad (56)$$

que constitui uma definição da tensão efectiva⁹ $\bar{\sigma}$. No decurso do processo de degradação $\bar{\sigma}$ é fisicamente mais representativa do que a habitual tensão σ , uma vez que a solicitação exterior é realmente suportada na secção efectiva \bar{S} .

Relacionada com o conceito de tensão efectiva, a hipótese de equivalência deformacional é igualmente estabelecida⁸: “a deformação associada a um estado de dano sob a tensão aplicada σ é equivalente à deformação associada ao estado elástico sob a tensão efectiva $\bar{\sigma}$ ”. A utilização desta hipótese conjuntamente com a dependência entre σ e $\bar{\sigma}$ estabelecida na expressão (56) possibilita a dedução de leis constitutivas de modo mais comprehensível, mediante o postulado de relações $\bar{\sigma} - \varepsilon$ para os pontos materiais

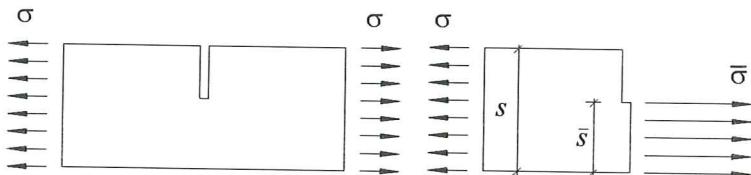


Figura 2 - Tensão de Cauchy *versus* tensão efectiva.

localizados na área efectiva. Nesta monografia a hipótese de equivalência deformacional será utilizada num contexto mais generalizado, supondo para a deformação contribuições elásticas e plásticas. Numa representação tridimensional adoptar-se-á a seguinte definição para o tensor de tensões efectivas $\bar{\sigma}$ (de 2^a ordem):

$$\bar{\sigma} = \mathbf{D}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^P) \quad (57)$$

Nesta expressão \mathbf{D}_0 é a usual matriz constitutiva linear e elástica de 4^a ordem e $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o tensor de deformações de 2^a ordem; $\boldsymbol{\varepsilon}^P$ é um tensor de deformações plásticas de 2^a ordem, com o qual se pretende simular a componente irreversível das deformações do betão.

A fim de conferir um tratamento diferenciado à tracção e à compressão o tensor efectivo $\bar{\sigma}$ será decomposto em componentes de tracção $\bar{\sigma}^+$ e de compressão $\bar{\sigma}^-$, de acordo com as seguintes expressões

$$\bar{\sigma}^+ = \sum_i \langle \bar{\sigma}_i \rangle \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_i \quad \bar{\sigma}^- = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}^+ \quad (58)$$

em que $\bar{\sigma}_i$ designa a tensão principal de ordem i do tensor $\bar{\sigma}$ e \mathbf{p}_i assinala a correspondente direcção principal. A função dos parêntesis de Macaulay $\langle \cdot \rangle$ consiste em devolver o valor da entidade (\cdot) quando esta é positiva e estabelecer o valor zero quando negativa. Os índices (+) e (-) destinam-se a assinalar entidades de tracção e de compressão, respectivamente.

3.2. ENERGIA LIVRE

Para estabelecimento de uma lei constitutiva energeticamente consistente a Mecânica de Dano Contínuo fundamenta-se na Termodinâmica dos Processos Irreversíveis¹¹. Um potencial de energia livre deve então ser introduzido, no qual têm de figurar quer as variáveis livres quer as variáveis internas do modelo. Sem entrar em demasiados detalhes postular-se-á à seguinte expressão para este potencial, devida a Faria e Oliver^{3,4}:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^P, d^+, d^-) = (1 - d^+) \psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^P) + (1 - d^-) \psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^P) \quad (59)$$

em que ψ_0^+ e ψ_0^- são energias livres elásticas, com as seguintes definições

$$\psi_0^+ = 1/2 \bar{\sigma}^+ : \mathbf{D}_0^{-1} : \bar{\sigma}^+ \quad \psi_0^- = 1/2 \bar{\sigma}^- : \mathbf{D}_0^{-1} : \bar{\sigma}^- \quad (60)$$

O conjunto de variáveis internas inclui assim um tensor de deformações plásticas $\boldsymbol{\varepsilon}^P$, bem como d^+ e d^- , variáveis escalares de dano directamente relacionáveis com as degradações produzidas por componentes de tracção e de compressão, neste modelo assumidas como correspondendo a processos independentes; o tensor de deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$ é a única variável livre.

3.3. CRITÉRIOS DE DANO

A fim de possibilitar a utilização de conceitos como ‘carga’ e ‘descarga’, recorrer-se-á à definição das duas seguintes normas dos tensores $\bar{\sigma}^+$ e $\bar{\sigma}^-$:

$$\bar{\tau}^+ = \sqrt{\bar{\sigma}^+ : \mathbf{D}_0^{-1} : \bar{\sigma}^+} \quad \bar{\tau}^- = \sqrt{\sqrt{3} (K \bar{\sigma}_{oct}^- + \bar{\tau}_{oct}^-)} \quad (61)$$

Na última equação $\bar{\sigma}_{oct}^-$ e $\bar{\tau}_{oct}^-$ são as tensões octaédricas, normal e tangencial, obtidas a partir do tensor $\bar{\sigma}^-$; K é uma propriedade material.

Conjuntamente com estas normas, e segundo uma definição proposta por Simo e Ju¹⁴, estabelecem-se os dois seguintes critérios de dano, o primeiro para tracção e o segundo para compressão:

$$g^+(\bar{\tau}^+, r^+) = \bar{\tau}^+ - r^+ \leq 0 \quad g^-(\bar{\tau}^-, r^-) = \bar{\tau}^- - r^- \leq 0 \quad (62)$$

As variáveis r^+ e r^- correspondem a limiares de dano actualizados, cujos valores controlam a dimensão das superfícies de dano em expansão. No estado prévio à aplicação de qualquer carga estes limiares de dano estarão colocados nos valores r_0^+ e r_0^- , os quais correspondem à fronteira entre o regime de comportamento linear e elástico e o regime não-linear. Designando por f_0^+ e f_0^- as tensões a partir das quais se torna visível o comportamento não-linear do betão em ensaios 1D (tracção e compressão, respectivamente), das expressões (61) resultam as seguintes definições para os limiares de dano referentes à fronteira da elasticidade:

$$r_0^+ = f_0^+ / \sqrt{E} \quad r_0^- = \sqrt{3/3 (K - \sqrt{2})} f_0^- \quad (63)$$

A expressão (62a) estabelece que o dano em tracção tende a aumentar quando $\bar{\tau}^+ = r^+$, e portanto terá início quando pela primeira vez ocorrer $\bar{\tau}^+ = r_0^+$; raciocínio idêntico aplicar-se-ia à compressão, com base na expressão (62b).

Na Figura 3 pode observar-se a superfície envolvente que se obtém com o presente modelo para o domínio elástico, bem como a respectiva comparação com os resultados experimentais devidos a Kupfer *et al.*⁷; genericamente a concordância é aceitável, para os propósitos do presente modelo.

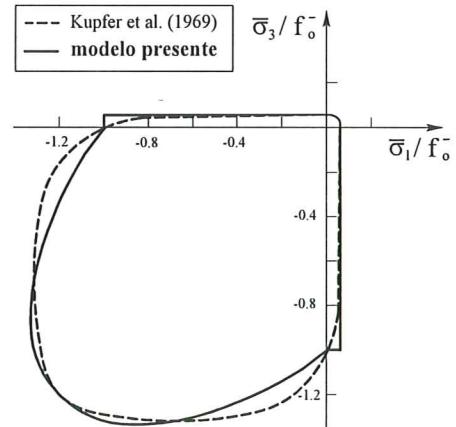


Figura 3 - Domínio elástico.

3.4. LEIS DE EVOLUÇÃO PARA AS VARIÁVEIS INTERNAS

3.4.1 Variáveis de dano

Para a variável de dano de tracção assumir-se-á a seguinte lei de evolução:

$$\dot{d}^+ = \dot{\vartheta}^+ \frac{\partial G^+(r^+)}{\partial r^+} \quad \dot{\vartheta}^+ = \dot{r}^+ \quad (64)$$

G^+ é uma função monotonamente crescente, seleccionada de acordo com a observação experimental. ϑ^+ é um parâmetro que pode ser determinado a partir da condição de consistência: quando o dano está a aumentar $\dot{g}^+(\bar{\tau}^+, r^+) = 0 = \text{const.}$, e portanto

$$\dot{g}^+(\bar{\tau}^+, r^+) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\bar{\tau}}^+ = \dot{r}^+ = \dot{\vartheta}^+ \quad (65)$$

Consequentemente, desta condição resulta que

$$r^+ = \max \left\{ r_0^+, \max (\bar{\tau}^+) \right\} \quad (66)$$

Introduzindo na expressão (64a) a condição expressa em (64b) torna-se possível definir a cinemática da variável de dano em tracção de acordo com

$$\dot{d}^+ = \frac{\partial G^+(r^+)}{\partial r^+} \dot{r}^+ = \dot{G}^+(r^+) \geq 0 \quad (67)$$

Para a compressão ter-se-ia identicamente

$$\dot{d}^- = \frac{\partial G^-(r^-)}{\partial r^-} \dot{r}^- = \dot{G}^-(r^-) \geq 0 \quad (68)$$

A integração destas equações conduz a

$$d^+ = G^+(r^+) \quad d^- = G^-(r^-) \quad (69)$$

em que

$$0 \leq G^+(r^+) \leq 1 \quad 0 \leq G^-(r^-) \leq 1 \quad (70a)$$

$$\dot{G}^+(r^+) \geq 0 \quad \dot{G}^-(r^-) \geq 0 \quad (70b)$$

$$G^+(r_0^+) = 0 \quad G^-(r_0^-) = 0 \quad (70c)$$

No presente trabalho utilizar-se-ão as seguintes funções escalares G^+ e G^- :

- Tracção

$$d^+ = G^+(r^+) = 1 - r_0^+/r^+ e^{A^+(1-r^+/r_0^+)} \quad \text{se } r^+ \geq r_0^+ \quad (71)$$

Esta expressão dá origem a uma resposta que exibe amaciamento, pelo que o único parâmetro que apresenta, A^+ , deve ser fixado tendo em vista a satisfação de requisitos de objectividade face ao tamanho da malha de elementos finitos¹³.

- Compressão

$$d^- = G^-(r^-) = 1 - r_0^-/r^- (1-A^-) - A^- e^{B^-(1-r^-/r_0^-)} \quad \text{se } r^- \geq r_0^- \quad (72)$$

Esta expressão, inspirada em Mazars e Pijaudier-Cabot¹², envolve os parâmetros A^- e B^- , cuja determinação pode ser efectuada impondo à curva $\sigma-\varepsilon$ a condição de passagem em dois pontos especificados de um ensaio 1D em compressão.

3.4.2 Tensor de deformações plásticas

Relativamente ao tensor de deformações plásticas $\dot{\varepsilon}^p$ a lei de evolução a ser adoptada é^{3,5}

$$\dot{\varepsilon}^p = \beta E H(\dot{d}^-) \langle \bar{\sigma} : \dot{\varepsilon} \rangle / (\bar{\sigma} : \bar{\sigma}) \mathbf{D}_0^{-1} : \bar{\sigma} \quad (73)$$

em que E designa o módulo de Young e β representa um parâmetro material que gradua a taxa de deformação plástica. $H(\dot{d}^-)$ é a função de Heaviside aplicada à derivada temporal do dano em compressão.

Da derivação em ordem ao tempo da expressão (57), e tomando em consideração a expressão (73), resulta:

$$\dot{\bar{\sigma}} = \mathbf{D}_0 : \dot{\varepsilon} - \beta E H(\dot{d}^-) \langle \bar{\sigma} : \dot{\varepsilon} \rangle / (\bar{\sigma} : \bar{\sigma}) \bar{\sigma} \quad (74)$$

Procedendo a uma discretização temporal baseada num ‘backward-Euler’, assinalando com $(\cdot)_{n+1}$ as entidades respeitantes a um novo instante e com $(\cdot)_n$ as entidades já conhecidas do instante anterior, resulta:

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \bar{\sigma}_n + \mathbf{D}_0 : \Delta \varepsilon - \beta E H(\dot{d}_{n+1}^-) \langle \bar{\sigma}_{n+1} : \Delta \varepsilon \rangle / (\bar{\sigma}_{n+1} : \bar{\sigma}_{n+1}) \bar{\sigma}_{n+1} \quad (75)$$

Estabelecendo ainda as seguintes convenções

$$\bar{\sigma}_{n+1}^{trial} = \bar{\sigma}_n + \mathbf{D}_0 : \Delta \varepsilon \quad \mathbf{I}_{n+1} = \bar{\sigma}_{n+1}^{trial} / \sqrt{\bar{\sigma}_{n+1}^{trial} : \bar{\sigma}_{n+1}^{trial}} \quad (76)$$

pode demonstrar-se que o tensor de tensões efectivas é actualizável de acordo com a expressão³

$$\bar{\sigma}_{n+1} = \lambda \bar{\sigma}_{n+1}^{trial} \quad (77)$$

em que

$$\lambda = 1 - \beta E H(\dot{d}_{n+1}^-) \langle \mathbf{I}_{n+1} : \Delta \varepsilon \rangle / \sqrt{\bar{\sigma}_{n+1}^{trial} : \bar{\sigma}_{n+1}^{trial}} \quad (78)$$

Observar-se-á que uma vez conhecido $H(\dot{d}_{n+1}^-)$ a actualização de $\bar{\sigma}_{n+1}$ pode ser efectuada directamente, já que $\Delta \varepsilon$, $\bar{\sigma}_{n+1}^{trial}$ e \mathbf{I}_{n+1} são entidades completamente definidas em função do tensor das deformações ε , pelo que da estrutura das expressões (77-78) se torna evidente que a determinação de $\bar{\sigma}_{n+1}$ se inspira num algoritmo de retorno radial: $\bar{\sigma}_{n+1}^{trial}$ pode ser encarado como um tensor preditor, a partir do qual o tensor de tensões efectivas pode ser obtido uma vez calculado o factor de escala λ . Devido à descontinuidade 0/1 introduzida na expressão (78) pela função de Heaviside é necessário um procedimento iterativo para fixação do valor de λ , o qual é muito expedito, pois no máximo envolve duas tentativas⁴.

3.5. DISSIPAÇÃO

Qualquer processo de carregamento dá origem a uma dissipação de energia não negativa. Esta não negatividade da dissipação, que exprime a tendência para o crescimento da entropia, é uma característica inerente a um processo de natureza irreversível, de acordo com o 2º Princípio da Termodinâmica, e pode ser matematicamente expressa através da desigualdade de Clausius-Duheim, cuja forma reduzida é¹¹

$$\dot{\gamma} = - \dot{\psi} + \sigma : \dot{\varepsilon} \geq 0 \quad (79)$$

sendo ψ o potencial postulado na expressão (59) para a energia livre e σ o usual tensor de tensões de Cauchy. Desta expressão e do facto de ε ser uma variável livre resulta, após alguma manipulação matemática, a seguinte relação constitutiva³:

$$\sigma = (1 - d^+) \bar{\sigma}^+ + (1 - d^-) \bar{\sigma}^- \quad (80)$$

3.6. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DA LEI CONSTITUTIVA

Como foi enfatizado, uma vez conhecido o tensor de deformações ε e o seu incremento $\Delta\varepsilon$ a determinação das variáveis internas ε^p , d^+ e d^- pode ser efectuada com base num algoritmo muito expedito. Esta particularidade revela-se de capital importância no contexto do presente modelo material, garantindo a exequibilidade de análises que, pela sua natureza e dimensão, tendem a envolver grande esforço computacional. Para uma global apreensão das fases mais relevantes do modelo de dano com plasticidade que foi desenvolvido, o Quadro 2 esquematiza a sequência das etapas indispensáveis à determinação do tensor σ correspondente a um dado tensor de deformações ε , sendo de realçar a extrema clareza e elegância formal do algoritmo resultante, e bem assim a simplicidade das operações envolvidas.

A Figura 4 ilustra o desempenho típico do modelo num ensaio 1D cíclico de tracção-compressão, conduzido sobre um provete idealizado de betão.

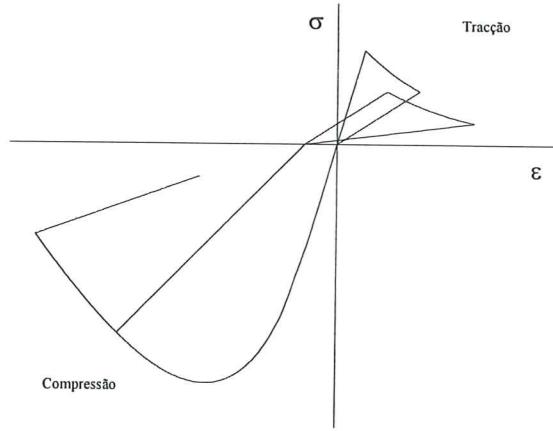


Figura 4 - Ensaio 1D cíclico.

Quadro 2 - Algoritmo do modelo constitutivo.

PASSO $n=0$:

Estabelece-se $r_n^+ = r_0^+$, $r_n^- = r_0^-$, $d_n^+ = 0$ e $d_n^- = 0$.

PASSO $n+1$:

- (1) Determina-se ε_{n+1} . Calcula-se $\bar{\sigma}_{n+1}$ de acordo com as expressões (77-78).
- (2) Efectua-se a decomposição de $\bar{\sigma}_{n+1}$ em $\bar{\sigma}_{n+1}^+$ e $\bar{\sigma}_{n+1}^-$ de acordo com as expressões (58).
- (3) Calcula-se $\bar{\tau}_{n+1}^+$ e $\bar{\tau}_{n+1}^-$ de acordo com as expressões (61).
- (4) Se $\bar{\tau}_{n+1}^+ > r_n^+$ ou $\bar{\tau}_{n+1}^- > r_n^-$ actualizam-se os limiares de dano:

$$r_{n+1}^+ = \max \{r_n^+, \bar{\tau}_{n+1}^+\} \quad r_{n+1}^- = \max \{r_n^-, \bar{\tau}_{n+1}^-\}$$

Actualizam-se as variáveis de dano $d_{n+1}^+ = G^+(r_{n+1}^+)$ e $d_{n+1}^- = G^-(r_{n+1}^-)$ de acordo com as expressões (71) e (72).

- (5) Calcula-se a tensão de Cauchy final

$$\sigma_{n+1} = (1-d_{n+1}^+) \bar{\sigma}_{n+1}^+ + (1-d_{n+1}^-) \bar{\sigma}_{n+1}^- \quad \text{FIM.}$$

3.7. MODELAÇÃO DO EFEITO DA DEPENDÊNCIA DA VELOCIDADE DE CARGA

3.7.1 Aspectos gerais

Como é amplamente reconhecido, o betão apresenta um comportamento viscoso quando submetido a elevadas velocidades de deformação¹⁵, cujos efeitos visíveis são, relativamente ao que é observado em ensaios quase estáticos, o aumento das resistências de pico e o decréscimo da não-linearidade nas curvas tensão-deformação. Este peculiar comportamento assume importância extrema sob carregamentos de natureza impulsiva, como sucede aquando da solicitação das estruturas por impactos ou explosões, mas o fenómeno é já observável sob as velocidades de deformação registadas no decurso de acções sísmicas. A importância deste fenómeno é reconhecida desde longa data, mas a sua complexidade determinou que o efeito da velocidade de deformação fosse excluído da prática corrente, ou, quando muito, atendido com base em drásticas hipóteses simplificativas, como a assunção em cálculo dinâmico de resistências e módulos de deformação artificialmente aumentados.

A Viscoplasticidade forneceu as primeiras contribuições com verdadeira consistência teórica para a abordagem do efeito da dependência da velocidade de carga, como na referência (1). Mais recentemente, significativas contribuições teóricas e experimentais foram introduzidas por Suaris *et al.*¹⁵, possibilitando uma abordagem realista deste fenómeno no contexto da Mecânica de Dano Contínuo, envolvendo um modelação vectorial para o dano interno, cuja evolução é retardada sob elevadas velocidades de deformação. Atendendo aos objectivos do presente modelo, a simulação do efeito viscoso deverá ser conseguida a partir da evolução do modelo constitutivo anteriormente descrito, deixando intocadas, tanto quanto possível, as respectivas clareza e eficiência computacionais. A estratégia seleccionada para modelação daquele efeito consistiu exclusivamente na modificação da cinemática dos limiares de dano r^+ e r^- , introduzindo uma regularização viscosa nas correspondentes leis de evolução.

3.7.2 Regularização viscosa

De acordo com um procedimento similar à clássica regularização viscosa sugerida por Perzina no contexto da Viscoplasticidade, a evolução do limiar de dano r^+ descrita pela expressão (64b) será substituída por^{2,3}:

$$\dot{r}^+ = \mu^+ \phi^+(\bar{\tau}^+, r^+) \geq 0 \quad \phi^+(\bar{\tau}^+, r^+) = r_0^+ (\langle \bar{\tau}^+ - r^+ \rangle / r^+)^{a^+} \quad (81)$$

ϕ^+ é a função de fluxo do limiar de dano, μ^+ é um parâmetro de fluidez e a^+ é um expoente positivo, assumidos como propriedades materiais e determináveis com base em ensaios 1D de tracção. Relativamente à variável de dano em tracção propriamente dita, a lei de evolução descrita pela expressão (64a) permanece sem modificação, e em consequência d^+ pode ser actualizada com a mesma eficiência que para o modelo não viscoso, através da expressão (69a) que estabelece $d^+ = G^+(r^+)$.

No caso da compressão um conjunto de equações similar a (81) pode ser postulado, com distintos parâmetros materiais (μ^- , a^-) e função de fluxo ϕ^- sendo então introduzidos, a fim de simular a diferente sensibilidade ao efeito ‘strain-rate’ manifestada

pelo betão sob compressão, em comparação com o que sucede sob tracção. A determinação explícita de d^- através da função $G^-(r^-)$, expressão (69b), permanece aplicável.

3.7.3 Integração numérica

Mediante o estabelecimento de um algoritmo de avanço no domínio do tempo em que Δt designe o incremento temporal, equações do tipo (81a) podem ser integradas de acordo com a seguinte regra do ponto médio generalizado:

$$r_{n+1} = r_n + \Delta t \mu \phi(\bar{\tau}_\alpha, r_\alpha) \quad (82)$$

em que

$$\bar{\tau}_\alpha = (1-\alpha) \bar{\tau}_n + \alpha \bar{\tau}_{n+1} \quad r_\alpha = (1-\alpha) r_n + \alpha r_{n+1} \quad (83)$$

($\alpha \in [0.5, 1.0]$, sendo aqui preconizada a utilização de $\alpha = 0.5$).

Rearranjando (82) tendo em consideração as expressões (83) resulta

$$f(r_{n+1}) = -r_{n+1} + r_n + \Delta t \mu r_0 (\bar{\tau}_\alpha - r_\alpha)^a = 0 \quad (84)$$

Para $a \neq 1$ esta equação é não-linear, e consequentemente se a é um inteiro superior a 4 é necessário adoptar um procedimento iterativo de Newton-Raphson para determinar r_{n+1} , de acordo com a fórmula recursiva

$$r_{n+1}^{i+1} = r_{n+1}^i - f(r_{n+1}^i) / f'(r_{n+1}^i) \quad (85)$$

que possibilita a obtenção de uma aproximação $(i+1)$ para r , tendo em consideração a informação de uma iteração prévia (i) ; f' designa a primeira derivada de f :

$$f'(r_{n+1}) = -1 - H(\bar{\tau}_\alpha - r_\alpha) a \alpha \Delta t \mu r_0 \bar{\tau}_\alpha / (r_\alpha)^2 ((\bar{\tau}_\alpha - r_\alpha) / r_\alpha)^{a-1} \quad (86)$$

A Figura 5 permite avaliar o desempenho do modelo viscoso sob velocidades de deformação entre $10^{-6} / \text{s}$ e $1 / \text{s}$, para um betão solicitado em tracção 1D. Pode observar-se que as resistências de pico crescem continuamente à medida que as velocidades de deformação aumentam, distinguindo-se claramente da resistência quase estática (aproximadamente coincidente com a curva assinalada por $\dot{\epsilon} = 10^{-6} / \text{s}$).

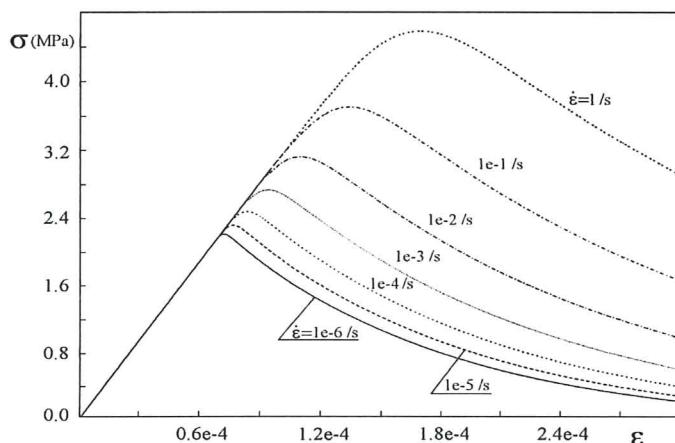


Figura 5 - Efeito viscoso em tracção.

3.8. REFERÊNCIAS

1. Bicanic, N. and Zienkiewicz, O.C. (1983) - Constitutive Model for Concrete Under Dynamic Loading - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 11, pp. 689-710.
2. Cervera, M., Oliver, J. and Manzoli, O. (1996) - A Rate-Dependent Isotropic Damage Model for the Seismic Analysis of Concrete Dams - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 25, pp. 987-1010.
3. Faria, R. and Oliver, X. (1993) - A Rate Dependent Plastic-Damage Constitutive Model for Large Scale Computations in Concrete Structures - *Monografía CIMNE N° 17*, Barcelona, Espanha.
4. Faria, R. (1994) - Avaliação do Comportamento Sísmico de Barragens de Betão Através de um Modelo de Dano Contínuo - *Tese de Doutoramento*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.
5. Faria, R.; Oliver, J. and Cervera, M. (1998) – A Strain-Based Plastic Viscous-Damage Model for Massive Concrete Structures – *Int. J. Solids Structures*, Vol. 35, N° 14, pp. 1533-1558.
6. Kachanov, L.M. (1986) - Introduction to Continuum Damage Mechanics - *Martinus Nijhoff Publishers*, Dordrecht, Netherlands.
7. Kupfer, H.B.; Hilsdorf, H.K. and Rusch, H. (1969) - Behaviour of Concrete Under Biaxial Stresses - *J. Am. Conc. Inst.*, Vol. 66, N° 8, pp. 656-666.
8. Lemaitre, J. et Chaboche J.L. (1978) - Aspects Phénoménologiques de la Rupture par Endommagement - *J. Méc. Appl.*, Vol. 2, N° 3, pp. 317-365.
9. Lemaitre, J. (1984) - How to Use Damage Mechanics - *Nuclear Eng. Design*, Vol. 80, pp. 233-245.
10. Lemaitre, J. (1985) - Coupled Elasto-Plasticity and Damage Constitutive Equations - *Computer Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 51, pp. 31-49.
11. Lubliner, J. (1972) - On the Thermodynamic Foundations of Non-Linear Solid Mechanics - *Int. J. Non-Linear Mech.*, Vol. 7, pp. 237-254.
12. Mazars, J. and Pijaudier-Cabot, G. (1989) - Continuum Damage Theory - Application to Concrete - *J. Eng. Mech., ASCE*, Vol. 115, N° 2, pp. 345-365.
13. Oliver, J.; Cervera, M.; Oller, S. and Lubliner, J. (1990) - Isotropic Damage Models and Smeared Crack Analysis of Concrete - *Proc. 2nd Int. Conf. on Comp. Aided Analysis and Design of Conc. Struct.*, Zell am See, Austria, pp. 945-957.
14. Simo, J.C. and Ju, J.W. (1987) - Strain- and Stress-Based Continuum Damage Models - I. Formulation - *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 23, N° 7, pp. 821-840.
15. Suaris, W.; Ouyang, C. and Fernando, V.M. (1990) - Damage Model for Cyclic Loading of Concrete - *J. Eng. Mech., ASCE*, Vol. 116, N° 5, pp. 1020-1035.

Capítulo 4

AMORTECIMENTO ALGORÍTMICO, MATERIAL E POR RADIAÇÃO

4.1. AMORTECIMENTO ALGORÍTMICO

4.1.1 Ruído numérico

Na generalidade das aplicações estruturais de natureza dinâmica a resposta é essencialmente condicionada pelas contribuições dos modos de vibração que apresentam as mais baixas frequências próprias. No entanto, ao proceder à integração directa das equações de equilíbrio dinâmico (30) surgem sobrepostas à solução fundamental as participações de modos de frequências elevadas. Atendendo a que nos algoritmos de integração implícita a fixação do incremento Δt com que a solução avança no domínio do tempo é geralmente estabelecida com o propósito de assegurar uma boa representação dos primeiros modos de vibração, comprehende-se que aquelas participações devam ser consideradas espúrias, uma vez que os modos de vibração com frequência elevada não estão a ser adequadamente traduzidos na modelação numérica. Deste facto resulta que análises efectuadas para um mesmo problema mas adoptando distintos incrementos de tempo podem apresentar perturbações na solução, razão pela qual se revela vantajoso dotar os algoritmos de integração de alguma forma de dissipação de natureza numérica, que permita amortecer as contribuições indesejadas dos modos de ordem mais elevada¹⁷.

A fim de ilustrar o comportamento do algoritmo de Newmark quando isento de qualquer modalidade de dissipação ($\gamma=0.5$, $\beta=0.25$), um exemplo muito simples¹⁵ encontra-se esquematizado na Figura 6, e diz respeito à simulação da resposta de uma barra, solicitada no seu encastramento por um movimento forçado caracterizado pela seguinte lei, representada na Figura 7:

$$u(t) = \begin{cases} -1.5 \times 10^{-4} (1 + \sin(2\pi t / 0.012 - \pi / 2)) & , \text{ para } 0 \leq t \leq 0.012\text{s} \\ 0 & , \text{ para } t > 0.012\text{s} \end{cases} \quad (\text{em m})$$

A barra, com dimensões $100\text{m} \times 1\text{m} \times 1\text{m}$, foi discretizada com 100 elementos finitos de 4 nós em estado plano de deformação, tendo sido exclusivamente permitidos deslocamentos na direcção axial. Na simulação considerou-se um material com comportamento linear e elástico, caracterizado por $E = 25\text{ GPa}$ e $\nu = 0.2$, tendo por massa específica 2500 Kg/m^3 . Nenhum tipo de amortecimento material foi previsto.

De acordo com considerações que serão desenvolvidas posteriormente, a onda de pressão gerada pelo movimento imposto na extremidade esquerda da barra desloca-se com velocidade $c=3333\text{ m/s}$, apresentando uma amplitude de $3.0 \times 10^{-4}\text{ m}$ e um período de 0.012s .

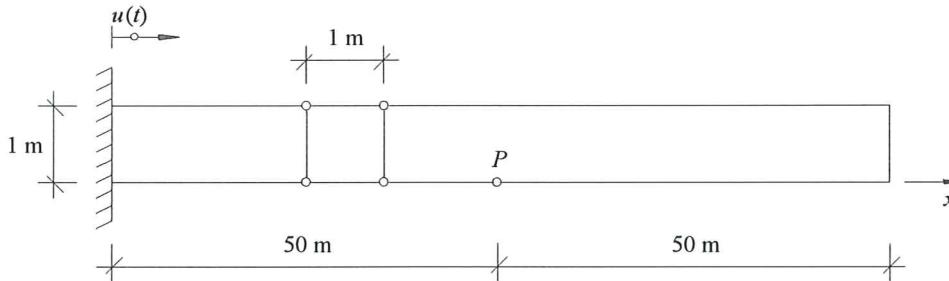


Figura 6 - Barra analisada.

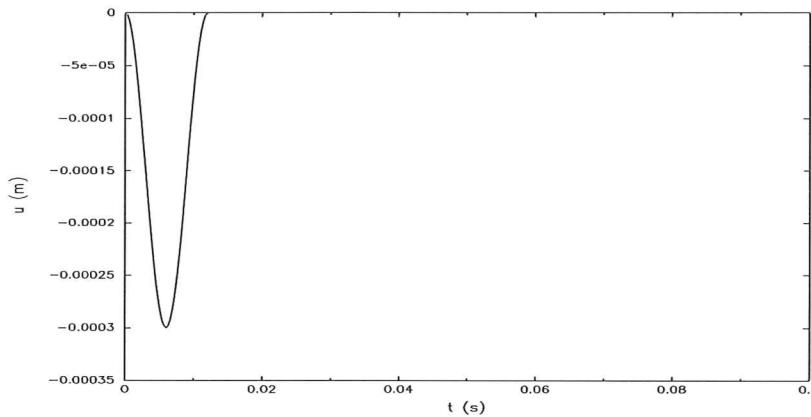


Figura 7 - Movimento forçado.

Os resultados apresentados na Figura 8 reportam-se ao deslocamento, velocidade, aceleração e tensão axial determinados numericamente num ponto P situado a meio comprimento da barra (rever a Figura 6), tendo sido obtidos com $\Delta t = 0.0003$ s.

Conforme se pode constatar, a perturbação atinge o ponto de análise ao fim de ≈ 0.015 s, o que está de acordo com a respectiva velocidade de propagação teórica ($t = 50/3333 = 0.015$ s), verificando-se reflexões quer na extremidade livre quer na extremidade apoiada. A evolução do deslocamento (Figura 8a) manifesta um andamento regular, em concordância com a teoria de propagação de ondas em meios elásticos, verificando-se que as reflexões não alteram a amplitude do movimento.

No entanto, é evidente a acentuada irregularidade inerente à curva da aceleração (Figura 8c), efeito aliás já algo evidente, embora de forma menos clara, nas curvas da velocidade (Figura 8b) e da tensão (Figura 8d). Note-se que, em termos da aceleração, as vibrações que se sobrepõem à resposta fundamental têm uma frequência cerca de 10 vezes superior à induzida pela solicitação aplicada, sendo manifesta a sua natureza espúria, sem correspondência física.

Esta manifestação de ruído numérico, cuja origem está obviamente associada à discretização (tanto espacial como temporal) subjacente ao modelo matemático, revela-se particularmente inconveniente em análises não-lineares, porquanto a oscilação frequente das acelerações origina grandes perturbações na contribuição das forças de inércia para o equilíbrio dinâmico, afectando drasticamente a convergência e chegando mesmo a inviabilizar a obtenção de uma solução numérica.

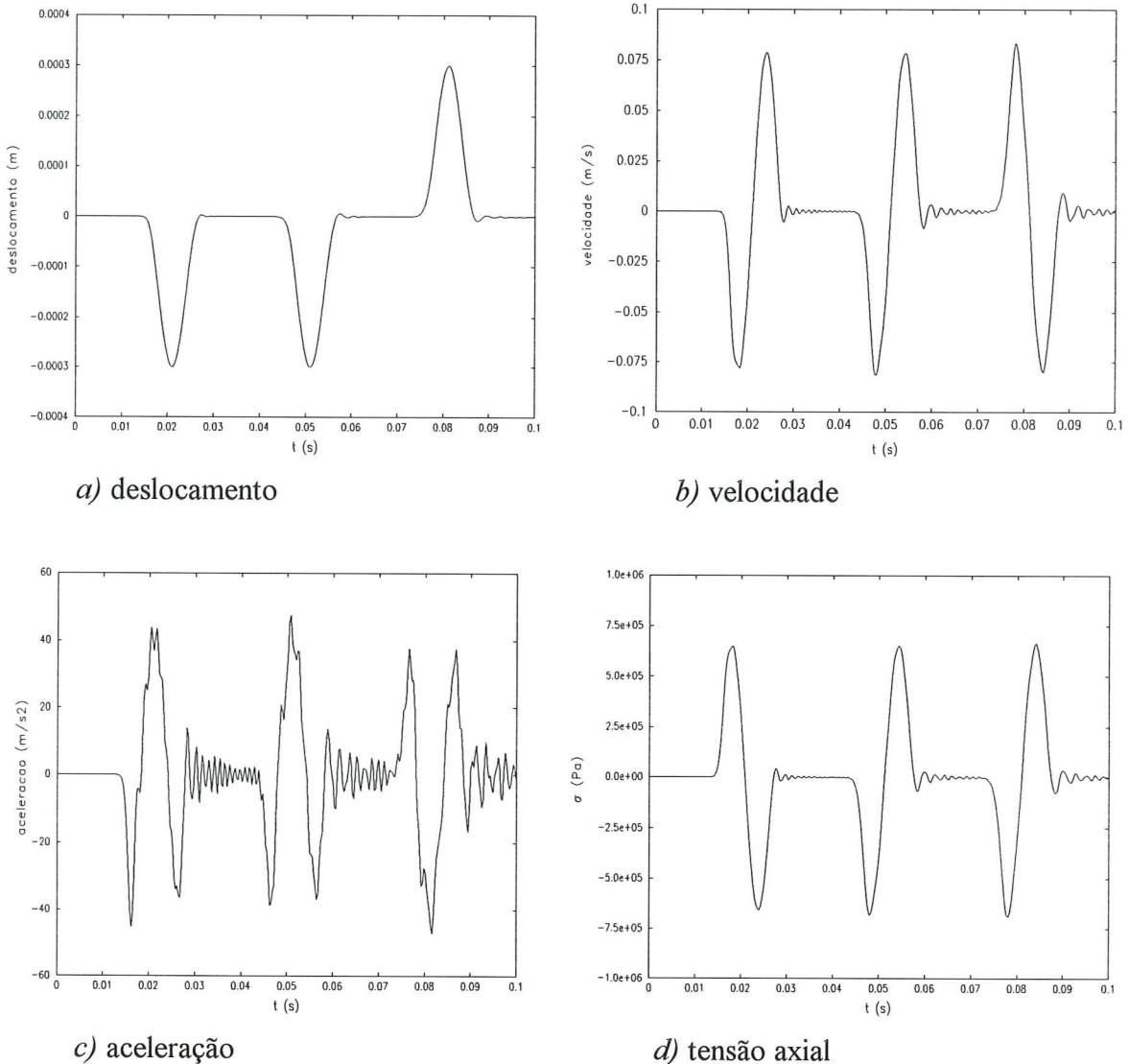


Figura 8 - Resultados referentes ao ponto P da Figura 6
 (método de Newmark: $\gamma = 0.5$, $\beta = 0.25$).

Pelos motivos apontados é fácil de inferir que os métodos de integração que contenham alguma modalidade controlável de amortecimento algorítmico exibirão uma maior robustez, sendo a próxima secção dedicada ao aprofundamento deste assunto.

4.1.2 Integração directa segundo métodos implícitos clássicos

4.1.2.1 Expressões fundamentais

A caracterização do comportamento algorítmico de um método implícito de integração directa é substancialmente simplificada se aplicada a um material de comportamento linear e elástico. Nestas condições a expressão de equilíbrio dinâmico (30) reduz-se à forma

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}_0 \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (87)$$

sendo ainda necessário respeitar as condições iniciais

$$\mathbf{a}(0) = \mathbf{a}_0 \quad (88a)$$

$$\dot{\mathbf{a}}(0) = \dot{\mathbf{a}}_0 \quad (88b)$$

$$\ddot{\mathbf{a}}(0) = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{f}_0 - \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}_0 - \mathbf{K}_0 \mathbf{a}_0) \quad (88c)$$

Um importante conjunto de métodos clássicos de integração directa procedem à resolução da equação (87) rescrevendo-a sob a forma

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_{n+\theta} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}_{n+\theta} + \mathbf{K}_0 \mathbf{a}_{n+\theta} = \mathbf{f}_{n+\theta} \quad (89)$$

em que n designa o número de ordem do instante precedente (isto é, $t_n = n \Delta t$), θ é um parâmetro denominado ‘de colocação’ e se admitem as seguintes expressões²⁰:

$$\ddot{\mathbf{a}}_{n+\theta} = (1-\theta)\ddot{\mathbf{a}}_n + \theta\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} \quad (90a)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{n+\theta} = \dot{\mathbf{a}}_n + [(1-\gamma)\ddot{\mathbf{a}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{a}}_{n+\theta}] \theta \Delta t \quad (90b)$$

$$\mathbf{a}_{n+\theta} = \mathbf{a}_n + \dot{\mathbf{a}}_n \theta \Delta t + [(1/2-\beta)\ddot{\mathbf{a}}_n + \beta\ddot{\mathbf{a}}_{n+\theta}] (\theta \Delta t)^2 \quad (90c)$$

$$\mathbf{f}_{n+\theta} = (1-\theta)\mathbf{f}_n + \theta\mathbf{f}_{n+1} \quad (90d)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{n+1} = \dot{\mathbf{a}}_n + [(1-\gamma)\ddot{\mathbf{a}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}] \Delta t \quad (90e)$$

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \dot{\mathbf{a}}_n \Delta t + [(1/2-\beta)\ddot{\mathbf{a}}_n + \beta\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}] \Delta t^2 \quad (90f)$$

Consoante o valor do parâmetro θ , assim as expressões (89) e (90a-d) dão origem ao esquema de integração de Wilson θ ($\theta > 1.37$) ou de Newmark ($\theta = 1$), pelo que estes dois métodos se podem englobar sob a designação genérica de ‘esquemas de colocação’¹⁸. Os parâmetros γ e β foram já definidos no Capítulo 2, a propósito do método de Newmark.

O método de Houbolt, um dos primeiros a ser utilizado no contexto da dinâmica estrutural, não se integra nesta categoria porquanto o sistema de equações resolventes, escrito no instante t_{n+1} ,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_{n+1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}_{n+1} + \mathbf{K}_0 \mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} \quad (91)$$

é apoiado por um conjunto de fórmulas em diferenças finitas distinto do utilizado nas expressões (90a-d), envolvendo vários instantes sucessivos

$$\ddot{\mathbf{a}}_{n+1} = (2\mathbf{a}_{n+1} - 5\mathbf{a}_n + 4\mathbf{a}_{n-1} - \mathbf{a}_{n-2}) / \Delta t^2 \quad (92a)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{n+1} = (11\mathbf{a}_{n+1} - 18\mathbf{a}_n + 9\mathbf{a}_{n-1} - 2\mathbf{a}_{n-2}) / (6 \Delta t)^2 \quad (92b)$$

situação que obriga à utilização de um procedimento especial para a solução ser determinada nos dois primeiros passos de integração.

4.1.2.2 Matriz de amplificação

As características mais relevantes dos métodos de integração podem ser avaliadas considerando a equação de equilíbrio dinâmico de um oscilador de 1 grau de liberdade em vibração livre não amortecida:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_{n+\theta} + \mathbf{K}_0 \mathbf{a}_{n+\theta} = 0 \quad (93)$$

Fazendo intervir as expressões (90a,c,e-f), após alguma manipulação matemática chegar-se-ia à fórmula recursiva

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{A} \mathbf{X}_n \quad (94)$$

na qual

$$\mathbf{X}_n = \begin{Bmatrix} a_n & \Delta t \dot{a}_n & \Delta t^2 \ddot{a}_n \end{Bmatrix}^T \quad \mathbf{X}_{n+1} = \begin{Bmatrix} a_{n+1} & \Delta t \dot{a}_{n+1} & \Delta t^2 \ddot{a}_{n+1} \end{Bmatrix}^T \quad (95)$$

\mathbf{A} constitui a denominada matriz de amplificação¹⁸, sendo a seguinte a sua definição explícita:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 + \beta A_{31} & 1 + \beta A_{32} & \frac{1}{2} + \beta(A_{33} - 1) \\ \gamma A_{31} & 1 + \gamma A_{32} & 1 + \gamma(A_{33} - 1) \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (96)$$

com

$$\begin{aligned} A_{31} &= -\Omega^2 / D & A_{32} &= -\theta \Omega^2 / D \\ A_{33} &= 1 - (1 + \theta^2 \Omega^2 / 2) / D & D &= \theta(1 + \beta \theta^2 \Omega^2) \\ \Omega &= \omega \Delta t & \omega &= \sqrt{K_0 / M} \end{aligned} \quad (97)$$

Atentando na expressão (94) pode constatar-se que o avanço da solução de dado instante t_n para o instante seguinte t_{n+1} depende exclusivamente das características da matriz de amplificação, e portanto da análise desta matriz, e em particular dos seus valores próprios λ , podem determinar-se as propriedades mais relevantes do algoritmo de integração que lhe está subjacente. A equação característica de \mathbf{A} é

$$-\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^3 - 2A_1\lambda^2 + A_2\lambda - A_3 = 0 \quad (98)$$

em que

$$A_1 = 1 - \Omega^2(\gamma + \theta - 1/2) / (2D) + A_3 / 2 \quad (99a)$$

$$A_2 = 1 - \Omega^2(\gamma + \theta - 3/2) / D + 2A_3 \quad (99b)$$

$$A_3 = (\theta - 1) \left\{ 1 + \Omega^2 \left[\beta(\theta^2 + \theta + 1) - \gamma - (\theta - 1)/2 \right] \right\} / D \quad (99c)$$

Utilizando repetidamente a expressão (94), e procedendo à eliminação das velocidades e acelerações, poder-se-ia obter a seguinte expressão em diferenças finitas, que apenas envolve deslocamentos de 4 instantes sucessivos:

$$a_{n+1} - 2A_1 a_n + A_2 a_{n-1} - A_3 a_{n-2} = 0 \quad (100)$$

A semelhança formal desta expressão com a equação característica (98) permite concluir que a solução discreta em dado instante tem a forma¹⁸:

$$a_n = k_1 \lambda_1^n + k_2 \lambda_2^n + k_3 \lambda_3^n \quad (101)$$

em que λ_1 , λ_2 e λ_3 são os valores próprios de \mathbf{A} e k_1 , k_2 e k_3 dependem das condições iniciais do problema. Nesta expressão está implícita a hipótese $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$; no caso de valores próprios múltiplos ter-se-ão as seguintes variantes àquela definição:

- $\lambda_1 = \lambda_2$

$$a_n = (k_1 + n k_2) \lambda_1^n + k_3 \lambda_3^n \quad (102)$$

- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

$$a_n = (k_1 + n k_2 + n^2 k_3) \lambda_1^n \quad (103)$$

4.1.2.3 Precisão

Procedendo a considerações sobre a expressão algorítmica (100) e sobre a equação teórica (93) Hilber e Hughes¹⁸ deduziram a seguinte expressão para o erro ε que afecta a solução a determinada pelos métodos de coloção:

$$\varepsilon = (\gamma - 0.5) \dot{a} \omega^2 \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (104)$$

$O(\Delta t^2)$ assinala o facto de na parte remanescente desta expressão estarem envolvidas quantidades da ordem de grandeza de Δt^2 .

De (104) conclui-se que impondo $\gamma = 0.5$ se obtém $\varepsilon = O(\Delta t^2)$, o que corresponde à obtenção de um algoritmo com precisão de 2^a ordem, condição cujo cumprimento irá ser assumido no seguimento desta apresentação, a fim de satisfazer a recomendação (iii) que no subcapítulo 2.3.1 foi enunciada a propósito dos métodos de integração directa. Para $\gamma \neq 0.5$ o algoritmo apresenta, como é evidente, precisão de 1^a ordem.

4.1.2.4 Estabilidade

Um algoritmo de integração directa é considerado ‘estável’ se igualmente o for a respectiva matriz de amplificação, o que segundo Bazzi e Anderheggen⁴ significa que os deslocamentos não tenderão para infinito quando $n = \infty$.

Da análise das expressões (101-103) pode concluir-se que a estabilidade dos algoritmos de coloção impõe que algumas condições elementares sejam verificadas pelos valores próprios de A , em virtude de a solução para dado instante envolver potências de ordem n sobre λ_1 , λ_2 e λ_3 . Assim, definindo por raio espectral ρ a entidade

$$\rho = \max \{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\}$$

torna-se evidente que a obtenção de estabilidade impõe, para a situação descrita na expressão (101) (isto é, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$), que $\rho \leq 1$. No caso das expressões (102-103) esta condição por si só não é suficiente, dada a existência de factores que envolvem crescimentos lineares (expressão (102)) ou quadráticos (expressão (103)) com a ordem n do passo de integração, o que torna indispensável que a condição adicional $|\lambda| < 1$ seja imposta sobre os valores próprios múltiplos de valor comum λ .

Do ponto de vista das aplicações práticas importa ainda especificar o valor de Ω_c tal que, uma vez satisfeito o requisito $\Omega \in [0, \Omega_c]$, o algoritmo cumpra automaticamente as condições de estabilidade enunciadas[†]. Se Ω_c for um valor finito o algoritmo é dito ‘de

[†] Rever em (97) a definição $\Omega = \omega \Delta t$.

estabilidade condicional', mas mediante a imposição de determinadas restrições sobre os parâmetros (θ, γ, β) os métodos de colocação podem ser estabelecidos de tal forma que $\Omega_c = \infty$, obtendo-se assim 'estabilidade incondicional'. Este último caso, em que $\Omega \in [0, \infty[$, corresponde ao cumprimento do item *(i)* do conjunto de recomendações enunciado no subcapítulo 2.3.1 a propósito dos métodos de integração directa, e tem um evidente interesse prático por assegurar uma elevada robustez algorítmica, que do ponto de vista da estabilidade se caracteriza pela inexistência de restrições quer sobre o incremento de tempo Δt quer sobre a frequência a integrar ω .

Circunscrevendo a atenção ao caso em que $\gamma = 0.5$ e procurando caracterizar as situações em que o raio espectral assume o valor unitário (limiar de violação da condição de estabilidade) poder-se-á definir Ω_c , e consequentemente determinar o campo de valores a atribuir aos parâmetros θ e β por forma a assegurar que $\Omega_c = \infty$. Assim, as situações em que um valor próprio da matriz A apresenta módulo unitário podem ser traduzidas pela expressão $\lambda = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ (com $\varphi \in [0, 2\pi]$)[†], pelo que da sua substituição na equação característica (98) resultam as duas seguintes igualdades (correspondentes ao anulamento da parte real e da parte imaginária), que permitirão precisar as respectivas condições de ocorrência:

$$\cos\varphi (1 - 4\sin^2\varphi - 4A_1\cos\varphi + A_2) + 2A_1 - A_3 = 0 \quad (105a)$$

$$\sin\varphi (1 - 4\cos^2\varphi + 4A_1\cos\varphi - A_2) = 0 \quad (105b)$$

Três situações podem ser consideradas:

(i) $\varphi = 0$

Neste caso resulta que $\cos\varphi = 1$ e $\sin\varphi = 0$, pelo que só interessa reter a expressão (105a), que então assume a forma:

$$1 - 2A_1 + A_2 - A_3 = 0 \quad (106)$$

Recorrendo às expressões (99), nas quais se suporá $\gamma = 0.5$, tem-se

$$\begin{aligned} 1 - 2A_1 + A_2 - A_3 &= 1 - (2 - \Omega^2\theta/D + A_3) + (1 - \Omega^2(\theta - 1)/D + 2A_3) - A_3 = \\ &= \Omega^2/D = 0 \end{aligned} \quad (107)$$

onde claramente se conclui que a ocorrência de $\lambda = e^{i0} = 1$ só poderia ter lugar impondo a situação limite $\Omega = 0$.

(ii) $\varphi = \pi$

Neste caso $\cos\varphi = -1$ e $\sin\varphi = 0$ (e portanto $\lambda = -1$), pelo que uma vez mais há exclusivamente necessidade de considerar a expressão (105a), que dá lugar à condição

$$1 + 2A_1 + A_2 + A_3 = 0 \quad (108)$$

[†] Notar que $|\lambda| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$.

A utilização das expressões (97d) e (99) permitiria constatar que seleccionando $\theta \geq 1$ e $\beta \geq (2\theta^2 - 1)/(4(2\theta^3 - 1))$ jamais se obteria $\lambda = -1$ para $\Omega \in [0, \infty[$.

(iii) Restantes valores de ϕ

Neste caso os valores próprios λ resultam do tipo complexo e torna-se indispensável lidar com ambas as expressões (105). Procedimentos matemáticos elementares permitem eliminar ϕ , resultando uma única equação:

$$1 - A_2 + 2A_1A_3 - A_3^2 = 0 \quad (109)$$

Adoptando os procedimentos utilizados nas situações (i)-(ii) concluir-se-ia que seleccionando $\theta \geq 1$ e $\beta \leq \theta/(2(\theta+1))$ se obteriam valores próprios tais que $|\lambda| \leq 1$ para $\Omega \in [0, \infty[$.

Em suma, para os métodos de colocação é possível assegurar simultaneamente estabilidade incondicional e precisão de 2^a ordem nas seguintes condições:

$$\gamma = 0.5 \quad \theta \geq 1 \quad \frac{\theta}{2(\theta+1)} \geq \beta \geq \frac{2\theta^2 - 1}{4(2\theta^3 - 1)} \quad (110)$$

Note-se que para o método de Newmark ($\theta=1$) resultaria então trivialmente $\gamma=0.5$ e $\beta=0.25$.

4.1.2.5 Amortecimento e distorção algorítmicos

Como foi oportunamente referido, os métodos de colocação são caracterizados por erros de aproximação do tipo $\varepsilon = O(\Delta t^k)$, com $k=1$ para $\gamma \neq 0.5$ e $k=2$ para $\gamma = 0.5$. Em qualquer dos casos verifica-se que $k > 0$, o que permite afirmar que o erro tende a decrescer à medida que é introduzido um crescente refinamento, particularidade habitualmente designada por ‘consistência’.

Uma consequência importante desta propriedade, conjugada com a estabilidade, permite aplicar aos métodos de colocação o Teorema da Equivalência de Lax²⁰: “a estabilidade e a consistência são as condições necessárias e suficientes para assegurar a convergência”.

Deste teorema resulta então que os métodos de colocação são convergentes (isto é, a solução obtida algorítmicamente tende para a solução teórica à medida que $\Delta t \rightarrow 0$), e pode provar-se a existência de um valor $\tilde{\Omega} > 0$ tal que se $\Omega \in [0, \tilde{\Omega}]$ então a matriz A apresenta dois valores próprios complexos conjugados, $\lambda_{1,2}$ (denominados raízes principais), e um valor próprio real λ_3 (denominado raiz espúria), verificando-se entre eles a relação $|\lambda_3| < |\lambda_{1,2}| \leq 1$, segundo a referência (18). Nestas condições, e ainda de acordo com os referidos autores, designando por A e B os parâmetros na base dos quais são definidos os valores próprios conjugados $\lambda_{1,2}$, isto é $\lambda_{1,2} = A \pm Bi$, a expressão (101) transforma-se em

$$a_n = e^{-\bar{\xi}\bar{\omega}t_n} [k_1 \cos(\bar{\omega}t_n) + k_2 \sin(\bar{\omega}t_n)] + k_3 \lambda_3^n \quad (111)$$

sendo

$$\lambda_{1,2} = A \pm Bi = e^{\bar{\Omega}(-\bar{\xi} \pm i)} \quad (112a)$$

$$\bar{\omega} = \bar{\Omega} / \Delta t \quad (112b)$$

$$\bar{\xi} = -\ln(\rho^2) / (2\bar{\Omega}) = -\ln(A^2 + B^2) / (2\bar{\Omega}) \quad (112c)$$

$$\bar{\Omega} = \arctan(B/A) \quad (112d)$$

Num algoritmo convergente a contribuição do termo $k_3 \lambda_3^n$ da expressão (111) tende a desvanecer-se¹⁷ à medida que $\Delta t/T \rightarrow 0$, situação limite para a qual se pode então constatar a perfeita identificação da expressão remanescente com a lei de vibração de um oscilador de 1 grau de liberdade, caracterizado por uma frequência $\bar{\omega}$ e por um coeficiente de amortecimento $\bar{\xi}$. O sentido destas entidades é intrinsecamente análogo ao dos seus equivalentes ω e ξ a nível estrutural (e decorrentes das propriedades materiais), dos quais foram contudo distinguidos pela aposição de uma barra, dada a sua proveniência estritamente algorítmica.

Igualmente de realçar é o facto de o conjunto de expressões (111-112) poder ser analisado estritamente com base nos parâmetros A e B que caracterizam os valores próprios da matriz de amplificação, cuja determinação tem de ser efectuada com base na respectiva equação característica (98).

Note-se, por outro lado, que uma vez que se tem vindo a supor que $\xi=0$, a manifestação de uma dissipação (ou amortecimento algorítmico) $\bar{\xi}$ na resposta numérica do oscilador em vibração livre, ainda que um objectivo eventualmente desejável, tem de ser encarada como um indício de erro na solução. Logo dissipação implica perda de precisão. Da análise da expressão (112c) pode ainda concluir-se que a maximização da precisão, correspondente à situação em que $\bar{\xi}=0$, se obtém para $\rho=1$, e que o aumento da dissipação algorítmica pode ser conseguido mediante a redução do raio espectral ρ .

Uma outra manifestação do erro introduzido pelo algoritmo resulta do facto de ser $\bar{\omega} \neq \omega$.

Assim, usualmente a eficiência dos algoritmos de integração é avaliada com base nas medidas de precisão proporcionadas pela dissipação $\bar{\xi}$ e pela dispersão τ (ou distorção na frequência), esta última definida como

$$\tau = (\bar{T} - T)/T \quad (113)$$

sendo $T = 2\pi/\omega$ e $\bar{T} = 2\pi/\bar{\omega}$ períodos de vibração com significado evidente.

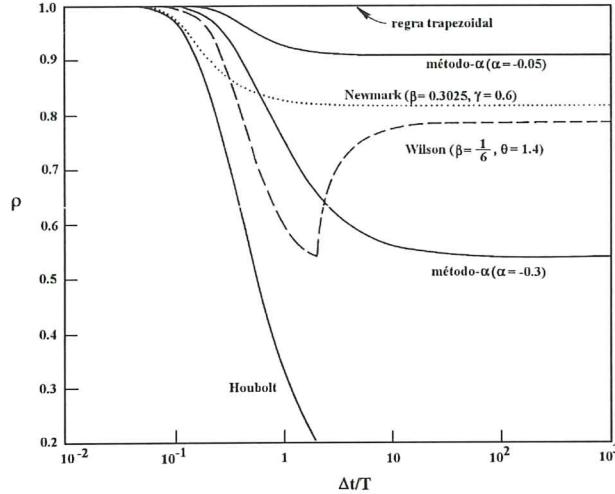
4.1.2.6 Análise comparativa de vários métodos

Na Figura 9 procede-se à representação de ρ , $\bar{\xi}$ e τ para diversos algoritmos de integração.

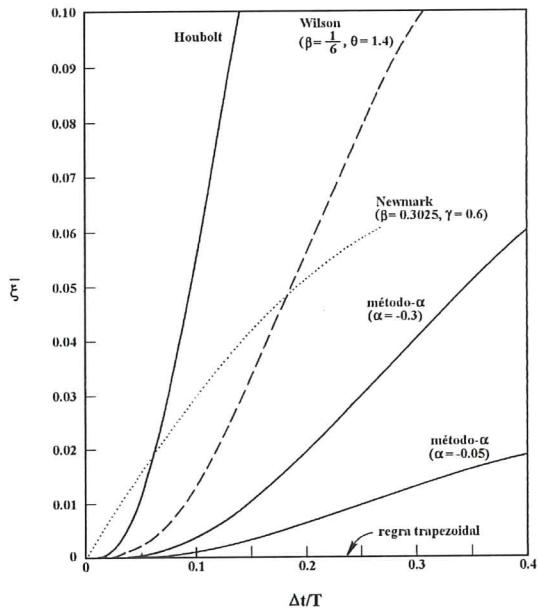
Conforme se pode constatar, o método de Newmark utilizado na sua modalidade com precisão de 2^a ordem ($\theta=1$, $\gamma=0.5$, $\beta=0.25$) – a denominada regra trapezoidal – determina um raio espectral unitário (Figura 9a) e revela-se o algoritmo de 2^a ordem com mais elevada precisão, que conduz à minimização da dispersão τ (Figura 9c) e ao anulamento da dissipação $\bar{\xi}$ (Figura 9b). A obtenção de amortecimento algorítmico só pode ser conseguida abdicando da precisão de 2^a ordem e adoptando $\gamma>0.5$ (situação

ilustrada na Figura 9a pela curva correspondente a $\gamma = 0.6$, e $\beta = 0.3025$); o valor de β a seleccionar para este caso deverá ser o que conduz à minimização de ρ para $\Delta t/T \rightarrow \infty$ (pois desta forma a dissipação é maximizada no domínio das altas frequências), efeito que segundo Hughes²⁰ pode ser obtido considerando

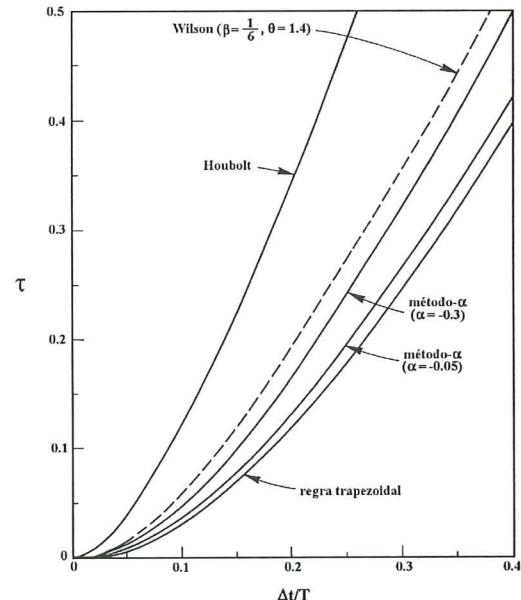
$$\beta = (\gamma + 1/2)^2 / 4 \quad (114)$$



a) raio espectral



b) dissipação



c) dispersão

Figura 9 - Comparaçāo de diferentes mētodos implícitos de integraçāo directa (da referênciā (20)).

Um outro resultado que pode ser verificado na Figura 9b relaciona-se com o facto de, para altas frequências, as características de dissipação inerentes ao mētodo de Newmark amortecido ($\gamma > 0.5$) serem claramente inferiores às dos mētodos de Houbolt e de Wilson θ . No domínio das baixas frequências o mētodo de Newmark conduz a excessivo

amortecimento algorítmico, ao contrário do que sucede para frequências elevadas, comportamento manifestamente oposto ao pretendido, pois seria conveniente que as frequências de ordem mais baixa exibissem dissipação nula (por conterem a componente mais significativa da resposta estrutural) e só as frequências elevadas fossem intensamente amortecidas. Neste sentido a curva ideal numa representação $\bar{\xi} - (\Delta t/T)$ deveria apresentar uma 1^a derivada tendencialmente crescente, objectivo do qual os métodos de Houbolt e de Wilson θ se aproximam bastante mais, com destaque para o método de Houbolt que exibe um amortecimento muito superior ao do Wilson θ .

Contudo, o método de Houbolt apresenta o inconveniente de não possibilitar o controlo do amortecimento algorítmico, e além disso do ponto de vista da dispersão τ e do raio espectral ρ manifesta o pior comportamento dos métodos representados na Figura 9. Estes factos contribuiram para que durante muito tempo o método de Wilson θ fosse considerado como a melhor opção entre os métodos dissipativos incondicionalmente estáveis, revelando melhor comportamento do que o método de Houbolt do ponto de vista da distorção das frequências, e permitindo além disso um controlo (limitado) do amortecimento algorítmico.

Pelas razões apontadas, no lote de métodos implícitos clássicos de integração directa a escolha recaia essencialmente sobre os métodos de Newmark e de Wilson θ .

Quando a dissipação de natureza numérica não seja um objectivo importante o método de Newmark, considerado com $\gamma = 0.5$ e $\beta = 0.25$, proporciona o método de integração mais preciso, através da conhecida regra trapezoidal que apresenta precisão de 2^a ordem.

Pretendendo obter e controlar amortecimento numérico o método de Newmark pode ainda ser utilizado mediante a consideração de $\gamma > 0.5$, $\beta = (\gamma + 1/2)^2 / 4$, procedimento aliás muito generalizado^{7,9,19}, embora o método de Wilson θ constitua, sob este ponto de vista, uma opção manifestamente mais eficiente. No entanto o amortecimento numérico no domínio das baixas frequências tende a ser excessivo em qualquer dos casos, e no método de Wilson θ a dissipação não pode sequer ser continuamente reduzida até ao valor nulo (daí o carácter limitado precedentemente referido, a propósito do controlo da dissipação neste método).

Uma outra característica indesejável exibida pelo método de Wilson θ relaciona-se com a sua manifesta tendência para a sobrestimação da solução exacta nos primeiros passos da integração, quando os incrementos de tempo não são próximos de zero – efeito designado por ‘overshoot’⁴. Este efeito é inerente aos métodos de colocação¹⁸, e embora em algoritmos convergentes possa ser eliminado tomando $\Delta t \rightarrow 0$, revela-se particularmente inconveniente em problemas de impacto ou que envolvam cargas subitamente aplicadas.

4.1.3 Método α de Hilber-Hughes-Taylor

4.1.3.1 Expressões fundamentais

Partindo do esquema de colocação utilizado por Newmark, mas introduzindo-lhe um conjunto mínimo de alterações por forma a dotá-lo de boas características de amortecimento algorítmico, na referência (17) Hilber, Hughes e Taylor propõem um

método de integração denominado método α . Na sua versão mais recente este método, que recorre às fórmulas em diferenças finitas próprias do método de Newmark, isto é,

$$\dot{\mathbf{a}}_{n+1} = \dot{\mathbf{a}}_n + [(1-\gamma)\ddot{\mathbf{a}}_n + \gamma \ddot{\mathbf{a}}_{n+1}] \Delta t \quad (115a)$$

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \dot{\mathbf{a}}_n \Delta t + [(1/2-\beta)\ddot{\mathbf{a}}_n + \beta \ddot{\mathbf{a}}_{n+1}] \Delta t^2 \quad (115b)$$

utiliza a seguinte forma para a equação de equilíbrio dinâmico (87)^{20,24}:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_{n+1} + (1+\alpha)\mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}_{n+1} - \alpha \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}_n + (1+\alpha)\mathbf{K}_0 \mathbf{a}_{n+1} - \alpha \mathbf{K}_0 \mathbf{a}_n = (1+\alpha) \mathbf{f}_{n+1} - \alpha \mathbf{f}_n \quad (116)$$

O parâmetro α assegura um meio eficiente de controlo contínuo da dissipação algorítmica, verificando-se que a redução de α conduz ao aumento do amortecimento numérico. Para $\alpha=0$ o algoritmo recupera a versão correspondente ao método de Newmark, retomando então a familiar regra trapezoidal que, como foi anteriormente referido, assegura o algoritmo implícito de 2^a ordem com mais elevada precisão. Esta particularidade, conjugada com o facto de as modificações inerentes ao método α se confinarem ao relativamente escasso conjunto de alterações envolvido na expressão (116), torna aliciante a consideração da hipótese de transformar um programa de cálculo vocacionado para o método de Newmark num outro destinado ao método α de Hilber-Hughes-Taylor.

Uma vez que a regra trapezoidal constitui um caso particular do método α , este método permite reproduzir situações de equilíbrio estático, o que obviamente constitui uma particularidade de inegável interesse prático.

4.1.3.2 Matriz de amplificação

Como se observou a propósito dos métodos clássicos de integração, a generalidade das propriedades mais relevantes de um algoritmo podem ser determinadas com base nos valores próprios da respectiva matriz de amplificação. No método α a matriz de amplificação tem a seguinte constituição:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} 1 + \alpha \beta \Omega^2 & 1 & \frac{1}{2} - \beta \\ -\gamma \Omega^2 & 1 - (1+\alpha)(\gamma - \beta) \Omega^2 & 1 - \gamma - (1+\alpha)\left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right) \Omega^2 \\ -\Omega^2 & - (1+\alpha) \Omega^2 & - (1+\alpha)\left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Omega^2 \end{bmatrix} \quad (117)$$

em que

$$D = 1 + (1+\alpha)\beta\Omega^2 \quad (118)$$

e Ω conserva o significado atribuído na expressão (97).

4.1.3.3 Precisão e estabilidade

Sem entrar em grandes detalhes, porquanto na análise dos atributos do método α se utilizariam precisamente os mesmos raciocínios e conceitos referidos a propósito dos algoritmos de colocação (atendendo unicamente às especificidades decorrentes de a matriz \mathbf{A} ter agora a definição (117)), seria possível demonstrar que a selecção dos parâmetros do método de acordo com

$$\alpha \in [-1/3, 0] \quad \gamma = 1/2 - \alpha \quad \beta = (1 - \alpha)^2 / 4 \quad (119)$$

assegura a obtenção de um algoritmo incondicionalmente estável, com precisão de 2^a ordem²⁰.

4.1.3.4 Amortecimento e distorção algorítmicos

Embora o método α de Hilber-Hughes-Taylor exiba dissipação para valores positivos de α , do ponto de vista do amortecimento algorítmico a máxima eficiência é conseguida para valores negativos deste parâmetro. Na referência (17) é referido que o método é estável para $\alpha \in [-1/2, 0]$, mas na prática só se adopta para α o intervalo proposto em (119), pois experimentação de natureza numérica evidenciou que a consideração de $\alpha < -1/3$ não conduziu a quaisquer ganhos de eficiência, do ponto de vista da maximização da dissipação.

Utilizando os conceitos de raízes principais e de raiz espúria o conjunto de expressões (111-112) anteriormente apresentado seria igualmente obtido para o método α , o que permite que a dissipação $\bar{\xi}$ e a dispersão τ sejam definidas da forma habitual, isto é, a partir dos valores próprios da matriz de amplificação (117).

Na Figura 9 pode apreciar-se o comportamento do presente método para $\alpha = -0.05$ e $\alpha = -0.3$, verificando-se que a diminuição deste parâmetro conduz à redução do raio espectral (Figura 9a), o que tem como consequência o aumento da dissipação (Figura 9b) e da dispersão (Figura 9c).

Por comparação do método α com o método de Newmark (relativamente ao qual apresenta maiores afinidades), constata-se que aquele apresenta características de dissipação manifestamente superiores: relativamente ao método de Newmark com $\gamma = 0.6$ e $\beta = 0.3025$ observe-se como o método α praticamente inverte a curvatura da lei de evolução $\bar{\xi} - (\Delta t/T)$ representada na Figura 9b, determinando amortecimentos próximos de zero num considerável intervalo associado às baixas frequências, mas assegurando $\bar{\xi}$ elevados no domínio em que se manifesta o ruído.

Um aspecto bastante atractivo do método α de Hilber-Hughes-Taylor decorre de a obtenção do amortecimento numérico poder ser conseguida assegurando uma precisão de 2^a ordem, o que não sucedia com o método de Newmark, facto que obviamente o coloca em vantagem face a este.

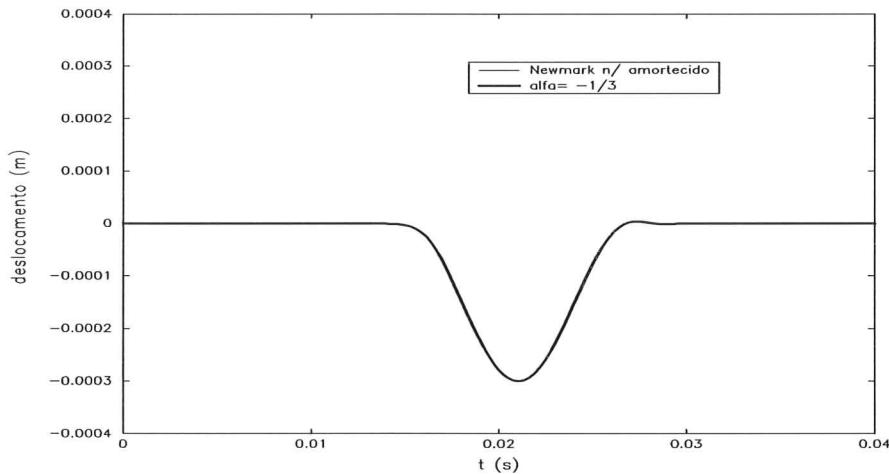
Em relação aos métodos de Houbolt e de Wilson θ o método α apresenta igualmente vantagens importantes, pois embora aqueles métodos conduzam a amortecimentos bastante superiores, deve ter-se em conta que o controlo da dissipação é impossível no método de Houbolt e limitado no método de Wilson θ . Além disso aqueles métodos clássicos começam por determinar $\bar{\xi}$ excessivamente elevados para valores de $\Delta t/T$ próximos de zero, efeito claramente indesejável.

Em termos da evolução da dissipação o comportamento do método α é próximo do ideal, e resulta de neste método o raio espectral se conservar próximo de 1 para uma franja de valores de $\Delta t/T$ mais extensa do que nos restantes métodos (ver Figura 9a), apresentando uma redução progressiva à medida que se caminha para o domínio das frequências elevadas.

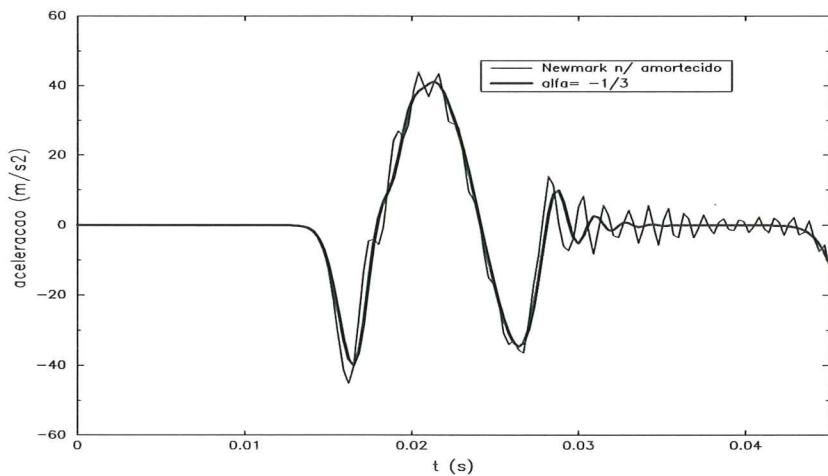
Do ponto de vista da distorção τ , e exceptuando a regra trapezoidal, o método α manifesta o melhor comportamento do conjunto de métodos representado na Figura 9c, revelando-se um algoritmo muito preciso. A diminuição de α acarreta um aumento da distorção.

4.1.3.5 Aplicação numérica: comparação do método α de Hilber-Hughes-Taylor com o método de Newmark não amortecido

A fim de poder apreciar o desempenho do método α de Hilber-Hughes-Taylor, o exemplo da barra da Figura 6 é retomado. Considerando $\alpha = -1/3$ na Figura 10 procede-se à comparação da solução correspondente à aplicação do método α com a anteriormente obtida através do método de Newmark sem dissipação algorítmica.



a) deslocamento



b) aceleração

Figura 10 - Método α versus método de Newmark ($\gamma = 0.5$, $\beta = 0.25$): resultados referentes ao ponto P da Figura 6.

Como se pode constatar na Figura 10a, em termos da evolução do deslocamento do ponto P os dois métodos praticamente não se distinguem. Em termos da evolução da velocidade ou da tensão axial a conclusão seria idêntica, motivo pelo qual se considerou redundante proceder à respectiva representação. No entanto em relação às acelerações já a eficácia do método α na diminuição do ruído numérico se torna evidente (Figura 10b), determinando uma resposta claramente mais suave do que a correspondente à regra trapezoidal.

4.1.3.6 Situação envolvendo comportamento materialmente não-linear

Nas aplicações que envolvam comportamento materialmente não-linear a equação (116) referente ao método α deverá ser modificada, substituindo as contribuições do tipo $K_0 \mathbf{a}$ por $k(\mathbf{a})$:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_{n+1} + (1+\alpha) \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}_{n+1} - \alpha \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}_n + (1+\alpha) \mathbf{k}(\mathbf{a}_{n+1}) - \alpha \mathbf{k}(\mathbf{a}_n) = (1+\alpha) \mathbf{f}_{n+1} - \alpha \mathbf{f}_n \quad (120)$$

Uma outra forma de encarar este problema consiste em estabelecer que o equilíbrio será satisfeito uma vez que seja nulo (ou muito próximo de zero) o seguinte vector de forças residuais

$$\begin{aligned} \psi_{n+1} = & (1+\alpha) \mathbf{f}_{n+1} - \alpha \mathbf{f}_n - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_{n+1} - \mathbf{C}[(1+\alpha) \dot{\mathbf{a}}_{n+1} - \alpha \dot{\mathbf{a}}_n] - \\ & - (1+\alpha) \mathbf{k}(\mathbf{a}_{n+1}) + \alpha \mathbf{k}(\mathbf{a}_n) \end{aligned} \quad (121)$$

Atendendo às equações (46-47) e ainda às definições (36-40) um algoritmo preditor multicorrector fundamentado no método de Newton-Raphson poderia ser estabelecido, considerando (para uma iteração i)

$$\left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{(1+\alpha)\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + (1+\alpha) \left(\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{a}} \right)_{n+1}^i \right] \delta_{n+1}^i = \psi_{n+1}^i \quad (122)$$

sendo ψ_{n+1}^i o vector de forças residuais actualizado e δ_{n+1}^i o vector que expressa os melhoramentos a introduzir em $\Delta \mathbf{a}_{n+1}^i = \mathbf{a}_{n+1}^i - \mathbf{a}_n$ por forma a obter $\Delta \mathbf{a}_{n+1}^{i+1}$.

Se no decurso do processo iterativo a matriz de rigidez tangente que figura em (122) for substituída pela matriz de rigidez elástica \mathbf{K}_0 , conforme procedimento efectivamente adoptado na presente monografia, uma equação resolvente do tipo

$$\bar{\mathbf{K}} \delta_{n+1}^i = \psi_{n+1}^i \quad (123)$$

será então obtida, na qual

$$\bar{\mathbf{K}} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{(1+\alpha)\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + (1+\alpha) \mathbf{K}_0 \quad (124)$$

e

$$\psi_{n+1}^i = \Psi_{n+1} \left(\ddot{\mathbf{a}}_{n+1}^i, \dot{\mathbf{a}}_{n+1}^i, \mathbf{a}_{n+1}^i \right) \quad (125)$$

4.1.4 Referência a outros métodos

4.1.4.1 Método α de Bossak

Adoptando um conjunto de procedimentos análogo ao utilizado no método α de Hilber-Hughes-Taylor, o método α de Bossak³⁰ foi desenvolvido com base nas fórmulas em diferenças finitas propostas por Newmark (expressões (115)), mas preconizando a seguinte forma para a equação de equilíbrio dinâmico (87):

$$(1-\alpha_B)M\ddot{a}_{n+1} + \alpha_B M\ddot{a}_n + C\dot{a}_{n+1} + K_0 a_{n+1} = f_{n+1} \quad (126)$$

O parâmetro α_B permite controlar a dissipação no domínio das altas frequências, obtendo-se estabilidade incondicional, precisão de 2^a ordem e eficiência máxima para as seguintes condições:

$$\alpha_B \leq 0 \quad \gamma = 1/2 - \alpha_B \quad \beta = (1-\alpha_B)^2/4 \quad (127)$$

Com $\alpha_B=0$ o método α de Bossak recupera a formulação do método de Newmark clássico.

As comparações documentadas na referência (1) dão conta de que para valores iguais dos parâmetros α e α_B o comportamento do presente método α de Bossak e o do método α de Hilber-Hughes-Taylor são muito análogos, tanto do ponto de vista da dissipação que proporcionam como da distorção a que conduzem. Este facto reflecte a semelhança formal de ambos os métodos, o que torna praticamente irrelevante a opção por qualquer deles.

4.1.4.2 Método ρ de Bazzi-Anderheggen

Na referência (4) é apresentado o método ρ , que segundo Hughes²⁰ pode ser aplicado com base na expressão

$$M(\dot{a}_{n+1} - \dot{a}_n) + C(a_{n+1} - a_n) + \Delta t K_0 [\alpha a_{n+1} + (1-\alpha) a_n] = \Delta t [\alpha f_{n+1} + (1-\alpha) f_n] \quad (128)$$

admitindo-se que

$$a_{n+1} = a_n + \dot{a}_n \Delta t + (1-\alpha) [(1/2 - \beta) \ddot{a}_n + \beta \ddot{a}_{n+1}] \Delta t^2 \quad (129a)$$

$$\dot{a}_{n+1} = \dot{a}_n + [(1-\gamma) \ddot{a}_n + \gamma \ddot{a}_{n+1}] \Delta t \quad (129b)$$

Os parâmetros do método podem ser estabelecidos de acordo com as seguintes relações

$$\alpha = \frac{1}{1+\rho} \quad \beta = \frac{1}{\rho(\rho^2+1)} \quad \gamma = \frac{2}{(\rho^2+1)(\rho+1)} \quad (130)$$

nas quais figura ρ como único parâmetro verdadeiramente independente, e que se identifica com o raio espectral da matriz de amplificação inerente ao método quando $\Delta t/T \rightarrow \infty$. Desta forma um método incondicionalmente estável é obtido seleccionando valores no intervalo $[0,1]$ para o parâmetro ρ . Para $\rho=1$ o algoritmo torna-se idêntico à regra trapezoidal.

Como se constata, uma particularidade atractiva deste método reside no facto de o analista poder controlar a dissipação no domínio das altas frequências actuando directamente no raio espectral, e não em parâmetros indirectos. Desta forma o utilizador

tem plena consciência de que para se assegurar um amortecimento algorítmico crescente ter-se-á que proceder à contínua diminuição do valor de ρ , embora este efeito seja obtido à custa do progressivo agravamento da distorção.

4.2. AMORTECIMENTO MATERIAL

4.2.1 Considerações gerais

A modalidade de amortecimento que tradicionalmente inspirou a consideração da parcela $C \dot{a}$, na expressão (30) relaciona-se com a atenuação observada ao longo do tempo na resposta de estruturas em vibração livre, em geral associada a mecanismos de dissipação de energia que ocorrem no material.

Embora verdadeiramente ainda sejam desconhecidas as reais condições sob as quais se processa esta dissipação energética, é possível, sem dúvida, relacioná-la com mecanismos de comportamento não-linear viscoso, que ocorrem no material a nível microscópico, de que constituem exemplo os escorregamentos com atrito que têm lugar nas microfissuras e microdefeitos internos.

É importante realçar que é prática corrente esta forma de dissipação ser conceptualmente separada da dissipação de energia considerada nas modelações usuais de comportamentos materialmente não-lineares, uma vez que usualmente se considera que a natureza microscópica dos fenómenos que lhe correspondem não é captada pela generalidade dos modelos constitutivos, de índole mais macroscópica. Estas considerações em parte explicam o motivo pelo qual em quase todas as análises de comportamento sísmico, mesmo as descritas em bibliografia recente, se continua a adoptar a estratégia de explicitamente incluir uma matriz de amortecimento material C , ainda que a lei constitutiva seja manifestamente não-linear. Por outro lado, nos livros de texto que abordam a dinâmica estrutural é usual pressupor-se a utilização de uma matriz de amortecimento mesmo quando claramente se admite um comportamento material em regime linear e elástico⁶, indo assim ao encontro da evidência experimental segundo a qual, mesmo sob ensaios de vibração forçada de baixa intensidade, o comportamento das estruturas manifesta atenuação das amplitudes ao longo do tempo.

Contrariamente ao procedimento utilizado para a definição das matrizes de massa e de rigidez, a matriz de amortecimento não é determinada com base na formulação consistente expressa em (26b), pois na prática tem-se revelado impossível quantificar de forma fiável a propriedade material c que nela figura⁶. Por este motivo a matriz C é habitualmente definida com base em formulações explícitas, que tendem a caracterizar o amortecimento a partir de percentagens ξ do amortecimento crítico, as quais são quantificadas para cada modo de vibração da estrutura a partir de ensaios experimentais. Estas formulações explícitas são estabelecidas por forma a que a matriz de amortecimento satisfaça determinadas propriedades notáveis, a mais importante das quais é, sem dúvida, a ortogonalidade face aos modos próprios de vibração, a fim de permitir o desligamento das equações de equilíbrio dinâmico, efeito essencial quando se pretende tirar partido das vantagens inerentes à utilização de uma transformação modal.

4.2.2 Matriz de amortecimento genérica num espaço modal

Uma expressão consagrada, na base da qual se pode constituir uma matriz C que assegura a observância de um dado coeficiente de amortecimento ξ_i num modo de vibração genérico caracterizado pelo configuração ϕ_i e pela frequência $\omega_i = 2\pi f_i$, é a seguinte⁶:

$$C = M \left[\sum_i \frac{2\xi_i \omega_i}{m_i} \phi_i^T \phi_i \right] M \quad (131)$$

em que

$$m_i = \phi_i^T M \phi_i \quad (132)$$

Esta definição tem a vantagem de permitir especificar separadamente o coeficiente de amortecimento correspondente a cada modo de vibração, característica que em análises que envolvem comportamentos materialmente não-lineares perde parte do seu interesse, uma vez que as frequências e as configurações dos modos de vibrações estão sujeitas a modificações, por vezes muito marcadas. Além disso, a necessidade de proceder à determinação dos modos de vibração constitui uma exigência pouco atractiva quando se pretendem efectuar análises não-lineares baseadas na integração directa das equações de equilíbrio dinâmico.

4.2.3 Matriz de amortecimento de Rayleigh

4.2.3.1 Expressões fundamentais

Por estes motivos a fórmula preconizada por Rayleigh, que estabelece a matriz de amortecimento material em função das matrizes de massa e de rigidez, constitui uma alternativa bastante consensual e atractiva⁶:

$$C = aM + bK \quad (133)$$

Dadas as propriedades de ortogonalidade das matrizes M e K relativamente aos modos de vibração, a matriz C assim definida satisfaz igualmente a referida condição de ortogonalidade. Além disso os parâmetros a e b podem ser estabelecidos de forma a garantir coeficientes de amortecimento ξ_1 e ξ_2 em dois modos de vibração distintos, caracterizados por frequências f_1 e f_2 . Recorrendo a noções fundamentais da análise modal, e em conjugação com as expressões (132-133), a rigidez generalizada

$$k_i = \phi_i^T K \phi_i \quad (134)$$

permite definir o amortecimento generalizado c_i de acordo com a seguinte relação:

$$c_i = \phi_i^T C \phi_i = a m_i + b k_i \quad (135)$$

Por sua vez o coeficiente de amortecimento ξ_i relativo ao modo de vibração ϕ_i pode ser estabelecido de acordo com a igualdade

$$\xi_i = c_i / 2 m_i \omega_i \quad (136)$$

sendo

$$\omega_i = 2\pi f_i = \sqrt{k_i / m_i} \quad (137)$$

Atendendo à expressão (135) ter-se-á finalmente que

$$\xi_i = \frac{a}{4\pi f_i} + b\pi f_i \quad (138)$$

Aplicando esta definição a dois modos de vibração distintos é imediato o estabelecimento do sistema de equações

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4\pi f_1} & \pi f_1 \\ \frac{1}{4\pi f_2} & \pi f_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \quad (139)$$

com o qual se podem determinar os parâmetros a e b . Observe-se que em todo este conjunto de raciocínios foi possível evitar a determinação explícita dos modos de vibração ϕ_1 e ϕ_2 , o que constitui uma óbvia vantagem do ponto de vista numérico.

Dado o procedimento na base do qual foram determinados os parâmetros a e b , o amortecimento correspondente a modos de vibração de frequências diferentes de f_1 e f_2

não pode ser especificado pelo utilizador, sendo controlado por (138). Pode verificar-se que a primeira parcela, relativa à contribuição para o amortecimento atribuível à matriz de massa, tende a cancelar-se para frequências elevadas, passando então a ser dominante a contribuição associada à matriz de rigidez, a qual de acordo com (138) cresce linearmente com a frequência.

A Figura 11 ilustra a evolução do amortecimento viscoso determinado por aquela expressão, para um conjunto de parâmetros a e b especificados com o objectivo de assegurar coeficientes de

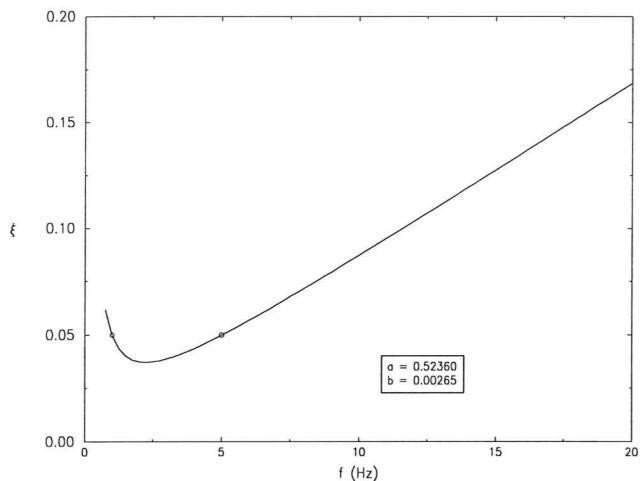


Figura 11 - Amortecimento de Rayleigh.

amortecimento $\xi_1 = \xi_2 = 5\%$ nas frequências $f_1 = 1\text{ Hz}$ e $f_2 = 5\text{ Hz}$:

$$\begin{cases} f_1 = 1\text{ Hz} ; \xi_1 = 5\% \\ f_2 = 5\text{ Hz} ; \xi_2 = 5\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0.52360 \\ b = 0.00265 \end{cases}$$

Dado o carácter algo arbitrário de que se reveste a modelação do amortecimento material – particularmente acentuado quando as matrizes de amortecimento constituídas sob a idealização de um comportamento linear e elástico são empregues, sem qualquer modificação, em regime de comportamento material manifestamente não-linear (procedimento frequentemente reportado em bibliografia recente da especialidade^{8,9,13,14,26}) –, a utilização de expressões muito elaboradas para a definição da matriz de amortecimento revela-se inconsistente, pelo menos enquanto uma abordagem mais científica não estiver disponível para o tratamento desta questão. Do ponto de vista do autor, no contexto de aplicações não-lineares a utilização da expressão geral (131) não apresenta vantagens significativas relativamente à matriz de amortecimento proposta por Rayleigh, pois em ambos os casos a definição de uma matriz C constante contém implícita a hipótese de a estrutura poder ser referenciada com base num conjunto fixo de frequências e modos

próprios de vibração, situação que obviamente não se aplica ao tipo de análises e metodologias que constituem o objectivo da presente monografia. Por este motivo a expressão (133) foi seleccionada, tendo sido utilizada nas aplicações.

4.2.3.2 Efeito da matriz de amortecimento de Rayleigh na análise do comportamento não-linear da barragem de Koyna

Associado à utilização da matriz de amortecimento de Rayleigh um comportamento peculiar foi detectado aquando da realização de análises que envolveram modelos constitutivos não-lineares. Atendendo a que a possibilidade de especificação da matriz C por forma a serem assegurados determinados amortecimentos em dois modos de frequências distintas perde parte do seu sentido no contexto da análise dinâmica não-linear, porquanto ao serem progressivamente modificadas as frequências e as configurações dos modos de vibração se deixam de verificar os pressupostos em que é feita a dedução dos parâmetros a e b que intervêm na expressão (133), é relativamente frequente encontrarem-se definições da matriz de amortecimento de Rayleigh dos tipos (i) $C = a M$ ou (ii) $C = b K$. Nestas circunstâncias a matriz C é geralmente estabelecida com o objectivo de assegurar um dado amortecimento no modo de vibração fundamental correspondente à fase em que prevalece um comportamento linear e elástico, isto é, na situação em que $K = K_0$.

No entanto nas aplicações não-lineares realizadas no âmbito da presente monografia foram notadas diferenças substanciais ao nível do comportamento do algoritmo computacional quando a matriz de amortecimento foi considerada com as formas $C = a M$ ou $C = b K_0$, supondo a e b definidos com vista a assegurarem o mesmo coeficiente de amortecimento no modo fundamental elástico da estrutura. Em todos os casos analisados verificou-se que a modalidade $C = a M$ conduziu sempre a velocidades de convergência mais baixas e a degradações do material mais acentuadas do que as registadas para $C = b K_0$.

Com o propósito de ilustrar esta situação, a barragem de Koyna, cuja malha se representa na Figura 12, será aqui considerada num conjunto de diferentes análises sísmicas, admitindo um coeficiente de amortecimento de 2% na frequência correspondente ao modo de vibração fundamental elástico.

A acção sísmica foi simulada numericamente mediante a prescrição da lei de velocidades indicada na Figura 13. Para os propósitos de ilustração visados na presente secção referir-se-á unicamente que é de 0.5g a aceleração de pico correspondente, sendo o respectivo conteúdo em frequências rico na vizinhança da frequência fundamental da barragem de Koyna.

Nas Figuras 14 e 15, além da evolução temporal da aceleração total num ponto situado no coroamento, são igualmente representados o número de iterações despendido no processo iterativo em cada passo de integração e a evolução do valor médio da distribuição da variável de dano d^+ no corpo da barragem, expresso através do índice de dano

$$D^+ = \int_{\Omega_B} d^+ d\Omega / \Omega_B \quad (\Omega_B - \text{volume de betão})$$

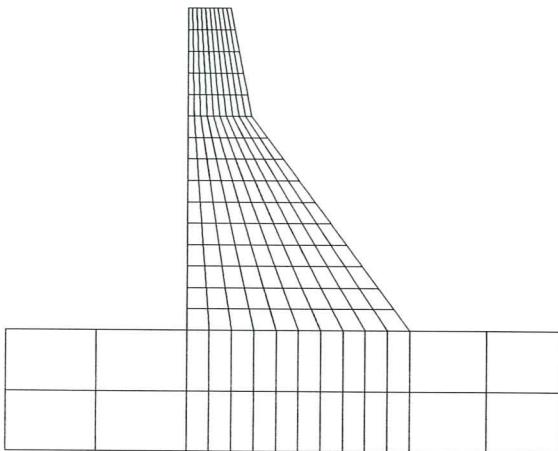


Figura 12 - Barragem de Koyna.

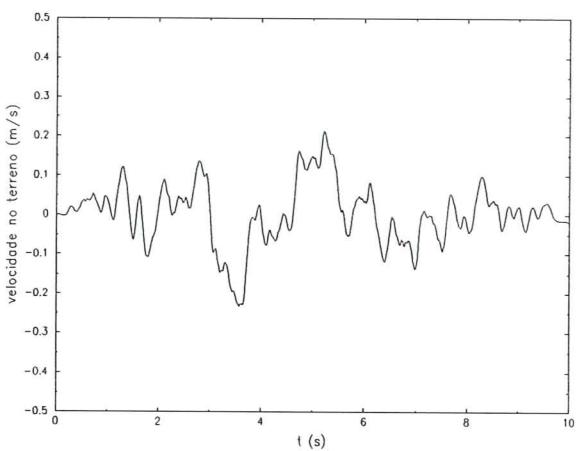


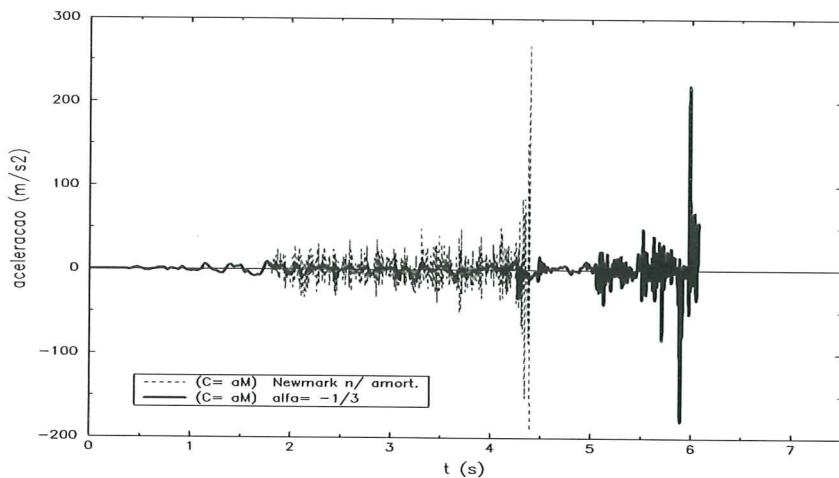
Figura 13 - Sismo.

4.2.3.2.1 Matriz $C = \alpha M$

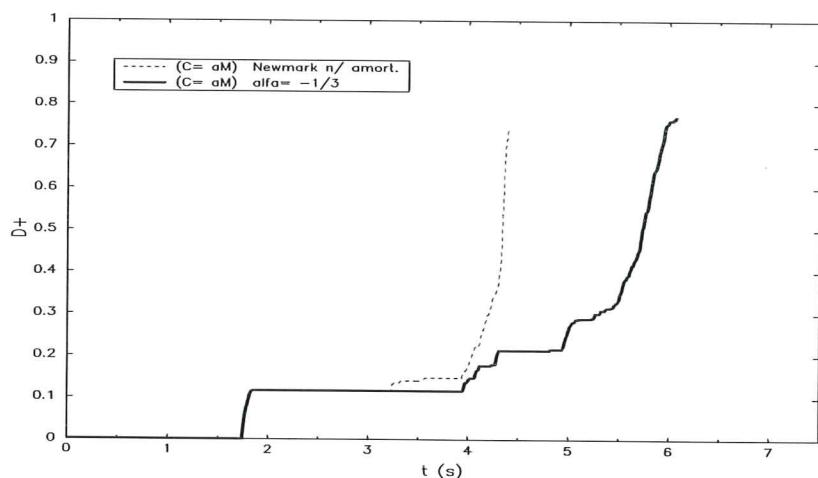
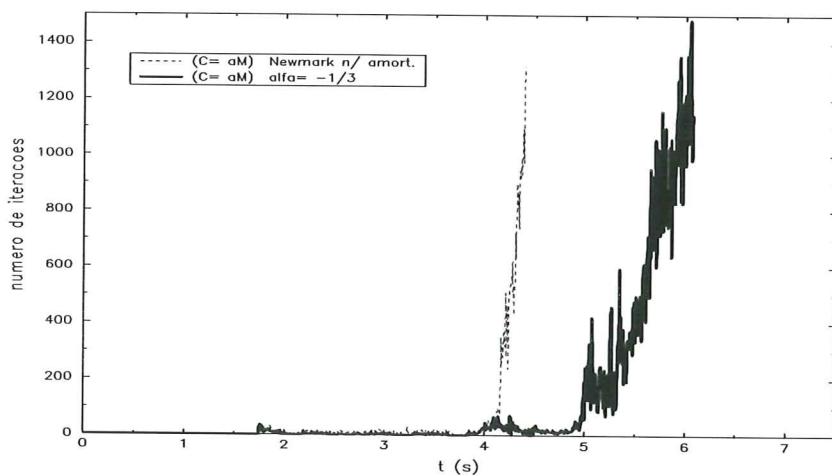
Na Figura 14 podem ser observados os resultados correspondentes à utilização da modalidade de amortecimento $C = \alpha M$, quer com base na regra trapezoidal quer com base no método α (tomado com $\alpha = -1/3$).

Conforme a Figura 14b permite constatar, até ao instante $t \approx 1.7$ s predomina o comportamento linear e elástico, sendo praticamente coincidentes as acelerações correspondentes ao método de Newmark não amortecido e ao método α , sem vestígios de ruído numérico (ver Figura 14a). No entanto para $1.7 \leq t \leq 4.3$ s, e associada à evolução do dano em tracção, constata-se a ocorrência de intenso ruído numérico quando se utiliza a regra trapezoidal (observar as elevadas frequências nas acelerações representadas na Figura 14a), conduzindo depois dos 4 s a um rápido crescimento do número de iterações (ver Figura 14c), que chega a atingir a marca das 1300, o que em termos práticos acaba por inviabilizar o prosseguimento da integração para instantes posteriores aos 4.3 s. Com o método α , e até este instante, o ruído é eficazmente controlado, sendo o número de iterações reduzido de cerca de 2 ordens de grandeza; no entanto, a partir dos 5 s o ruído numérico volta novamente a assumir uma expressão desmesurada, conduzindo à interrupção da solução para $t \approx 6.1$ s, depois de se terem chegado a atingir as 1500 iterações por incremento.

A Figura 14b demonstra que para qualquer dos métodos de integração as fases de mais intensa manifestação de ruído numérico estão associadas a uma progressão excessivamente rápida da degradação do material por fissuração em tracção, efeito acompanhado de uma drástica redução da taxa de convergência, como o atesta a Figura 14c. A natureza estritamente numérica deste comportamento é evidenciada pelo facto de o brusco crescimento do índice D^+ que com a regra trapezoidal é registado no intervalo 4–4.5 s ser suprimido quando o método de Newmark é substituído pelo método α , fazendo prever ser de carácter igualmente numérico o comportamento do mesmo tipo que se verifica na fase final da solução determinada com base neste método dissipativo.



a) aceleração no coroamento

b) índice de dano D^+ 

c) número de iterações

Figura 14 - Comportamento sísmico da barragem de Koyna com $C = \alpha M$.

4.2.3.2.2 Matriz $C = b K_0$

Visando caracterizar as modificações suscitadas pela utilização de uma matriz de amortecimento do tipo $C = b K_0$, na Figura 15 procede-se à comparação dos resultados correspondentes a esta hipótese com os relativos à hipótese $C = a M$ anteriormente apresentada. Em ambos os casos considerou-se unicamente o método α , ao qual estiveram associados os melhores resultados da Figura 14.

Conforme se pode observar na Figura 15a, sob a modalidade de amortecimento $C = b K_0$ a aceleração do coroamento apresenta uma evolução notoriamente mais suave e regular do que a registada com uma matriz de amortecimento proporcional à matriz de massa, não se vislumbrando qualquer sintoma de ruído numérico, circunstância que possibilitou a condução da análise até ao instante desejado, isto é, $t = 7.5\text{ s}$.

Relativamente à evolução do índice de dano (Figura 15b) constata-se que a abrupta evolução observada com $C = a M$ para $5\text{ s} \leq t \leq 6\text{ s}$, e que determina que D^+ tenda para 1 de forma muito rápida, é completamente eliminada mediante o recurso à matriz de amortecimento $C = b K_0$, com a qual a solução numérica progride entre $t = 4\text{ s}$ e $t = 7.5\text{ s}$ sem evolução de D^+ , cujo valor final em pouco excede 0.1.

O número de iterações correspondente a cada uma das referidas modalidades da matriz de amortecimento apresenta uma evidente coerência com as já comentadas evoluções da aceleração do coroamento e do índice D^+ , sendo notório que com $C = b K_0$ o número de iterações raramente excede 3, valor 500 vezes inferior ao máximo obtido com $C = a M$, o que serve de justificação ao facto de só com $C = b K_0$ se ter podido conduzir a análise até ao seu termo, sem interrupções ditadas pela lentidão do processo de convergência.

4.2.3.2.3 Explicação das diferenças encontradas

A explicação de comportamentos tão acentuadamente contrastantes quando, para um mesmo coeficiente de amortecimento no modo fundamental elástico, se adopta uma matriz de amortecimento proporcional à matriz de massa ou à matriz de rigidez relaciona-se com o facto de o amortecimento nas frequências mais elevadas tender a anular-se com $C = a M$ (rever a expressão (138)), o contrário sucedendo para $C = b K_0$, pois neste caso o amortecimento cresce linearmente com o valor da frequência, como ficou ilustrado na Figura 11. Esta característica da matriz $C = b K_0$ permite conjugar um adequado amortecimento material no modo fundamental com uma eficaz condição de filtro de ruído numérico, conduzindo a uma forte atenuação das vibrações espúrias de elevada frequência, e completando assim o efeito da dissipação algorítmica conferido pelo método α . Esta interessante particularidade da matriz $C = b K_0$ melhora tão notoriamente a estabilidade e a taxa de convergência do processo iterativo que justifica a frequência com que na bibliografia da especialidade^{5,10,11,26} é preferida relativamente à modalidade $C = a M$.

A propósito da problemática do ruído numérico observado nas análises não-lineares, e da relativa incapacidade de proceder à sua completa eliminação apenas com base na dissipação algorítmica conferida pelo método α , é importante salientar que a sua gênese tem de ser directamente associada ao efeito de ‘softening’ em tracção, e não tanto à perda

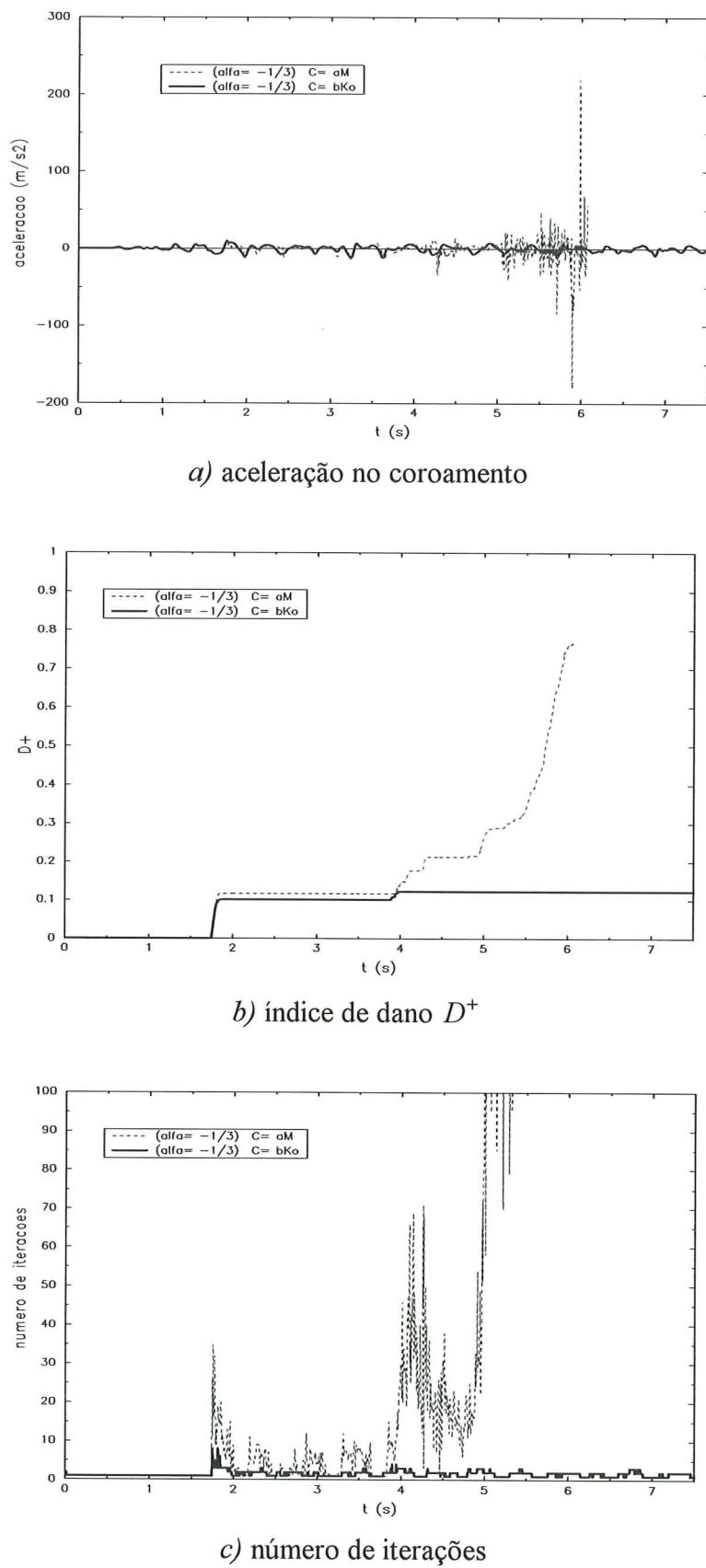


Figura 15 - Comportamento sísmico da barragem de Koyna com o método α .

de rigidez em sentido geral. Na realidade, diversos ensaios numéricos realizados quer com barragens gravidade quer com barragens abóbada¹² permitiram concluir que à medida que a energia de fractura era aumentada (determinando, portanto, curvas de ‘softening’ cada vez mais suaves e alongadas) o ruído numérico era progressivamente atenuado, facto que determinava serem sucessivamente menos expressivas as diferenças decorrentes da utilização das matrizes $C = a M$ ou $C = b K_0$. A título exemplificativo referem-se as situações em que a não-linearidade foi permitida exclusivamente no domínio da compressão (por natureza mais gradual e progressiva do que a que normalmente se regista sob condições de tracção), ou então em que o comportamento em tracção foi idealizado como elástico-perfeitamente plástico, para as quais qualquer das matrizes de amortecimento conduziu a resultados semelhantes, envolvendo idêntico esforço computacional.

É portanto a brusca perda de resistência que caracteriza o comportamento frágil do betão em tracção que desencadeia o problema de ruído numérico, pois a transferência de um comportamento linear e elástico para uma situação que envolva rigidez nula em tracção pode ocorrer em poucos incrementos de tempo, dada a pequena ductilidade do material, sobrevindo bruscas perdas de resistência similares ao ‘cut-off’. A transposição do pico de resistência e o consequente anulamento da contribuição do betão no domínio da tracção são geralmente tão rápidos que no interior de cada elemento da malha tudo se passa como se se produzissem pequenas ‘explosões’ (devidas à brusca quebra de rigidez), registando-se variações quase instantâneas no respectivo campo de deslocamentos, cuja transmissão aos elementos vizinhos ocasiona a propagação de vibrações espúrias de elevada frequência.

A este propósito já na referência (3) se alertava para a conveniência de em problemas dinâmicos se preverem modelações que envolvessem uma gradual perda de resistência em tracção, em alternativa à utilização de ‘cut-off’, responsável pela propagação de ondas de choque através da malha. A realidade, porém, tem demonstrado que mesmo cumprindo esta recomendação (caso do exemplo analisado da barragem de Koyna), a anulação da capacidade resistente em tracção tende sempre a produzir este indesejável efeito, que na presente monografia pode ser eficazmente controlado mediante a utilização de uma matriz de amortecimento envolvendo uma contribuição do tipo $C = b K_0$.

4.2.4 Actualização da matriz de amortecimento em análises não-lineares

A utilização de uma matriz de amortecimento proporcional à matriz de rigidez elástica levanta, contudo, a preocupação legítima sobre as implicações em termos de uma adequada avaliação da segurança estrutural. Na realidade, o aumento do amortecimento com o valor de f manifesta-se não só sobre as frequências associadas ao ruído numérico (frequentemente superiores a 30–40 Hz), mas também sobre os modos de vibração que se seguem ao primeiro, com legítima participação na resposta.

Além disso, o facto de a rigidez estrutural se ir modificando não permite prever com clareza as implicações decorrentes da utilização, em cálculo não-linear, de uma matriz de amortecimento que foi estabelecida para um estádio de comportamento elástico. É no entanto absolutamente certo que, mediante a mobilização de importantes contribuições das forças de natureza viscosa, o equilíbrio dinâmico poderá continuar a ser artificialmente assegurado nos elementos finitos, mesmo quando a respectiva capacidade resistente tenha já sido esgotada. Este mecanismo de equilíbrio é evidentemente irreal, pelo que tem de ser questionada a razoabilidade de um elemento finito totalmente colapsado se continuar a

admitir a existência de amortecimento, e em particular o amortecimento correspondente à fase elástica inicial.

Pelos motivos apontados El-Aidi e Hall¹⁰ preconizam a remoção do amortecimento material nos elementos fissurados. Bhattacharjee e Léger⁵ advogam um procedimento ligeiramente mais complexo, consistindo na permanente actualização da matriz de amortecimento de acordo com a relação $\mathbf{C} = b \mathbf{K}(t)$, na qual $\mathbf{K}(t)$ corresponde a uma matriz de rigidez tangente, que contempla o efeito da fendilhação.

Do ponto de vista prático a metodologia sugerida por Bhattacharjee e Léger⁵ é mais apropriada, e facilmente generalizável a situações em que a não-linearidade provenha também da compressão, possibilitando a actualização da matriz de amortecimento em função da evolução registada no real estado de degradação da estrutura. A conjugação desta metodologia com a utilização do modelo de dano referido no Capítulo 3 é difícil, devido à complexidade formal da correspondente matriz de rigidez tangente. No entanto, e dado o acentuado nível de aproximações que decorrem de em análise não-linear ser utilizada uma matriz de amortecimento de Rayleigh, é perfeitamente aceitável a substituição de $\mathbf{K}(t)$ por uma pseudo-matriz de rigidez actualizada, ${}^* \mathbf{K}(t)$, pelo que se propõe a seguinte definição para a matriz de amortecimento ao nível do elemento

$$\mathbf{C}_e(t) = b \, {}^* \mathbf{K}_e(t) \quad (140a)$$

na qual

$${}^* \mathbf{K}_e(t) = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T [\mathbf{h}(t) \mathbf{D}_0] \mathbf{B} \, d\Omega \quad (140b)$$

O escalar $\mathbf{h} = \mathbf{h}(t)$ é calculado em cada ponto de amostragem, de acordo com a definição

$$\mathbf{h} = (1 - d^+) \mathbf{h}^+ + (1 - d^-) \mathbf{h}^- \quad (141)$$

na qual \mathbf{h}^+ e \mathbf{h}^- correspondem às seguintes normas das contribuições de tracção $\bar{\sigma}^+$ e de compressão $\bar{\sigma}^-$ decorrentes da decomposição do tensor de tensões efectivas $\bar{\sigma}$:

$$\mathbf{h}^+ = \frac{\sqrt{\bar{\sigma}^+ : \bar{\sigma}^+}}{\sqrt{\bar{\sigma}^+ : \bar{\sigma}^+} + \sqrt{\bar{\sigma}^- : \bar{\sigma}^-}} \quad \mathbf{h}^- = 1 - \mathbf{h}^+ \quad (142)$$

Conforme se pode constatar, durante a fase linear e elástica $\mathbf{h} = 1$; uma vez que nessa situação $\mathbf{C} = b \mathbf{K}_0$ o parâmetro b pode continuar a ser estabelecido da forma usual, isto é, por forma a assegurar um dado coeficiente de amortecimento no modo de vibração fundamental. Um outro aspecto curioso relacionado com a definição de \mathbf{h} reside no facto de a matriz \mathbf{C} poder apresentar recuperação de amortecimento: uma situação que envolva tracção pura e $d^+ = 1$ conduz obviamente ao anulamento de \mathbf{C} , mas uma situação subsequente que envolva compressão e $d^- \neq 1$ determina $\mathbf{h} \neq 0$, e portanto a matriz de amortecimento deixa de ser nula, o que fisicamente se afigura aceitável por acompanhar a recuperação de rigidez.

Refira-se ainda que ensaios numéricos preliminares realizados com a matriz de amortecimento definida em (140a) demonstraram ser adequado garantir sempre um valor residual não nulo para \mathbf{h} a fim de controlar o ruído¹², situação que foi atendida impondo $\mathbf{h} \geq 0.1$.

Do ponto de vista das aplicações a actualização da matriz C traduzida pelas expressões (140) processar-se-á segundo uma cadência pré-estabelecida, por exemplo no final de cada passo de integração, após obtenção de convergência.

Finalmente importa referir que a estratégia numérica adoptada para simular a actualização de C se baseia num procedimento do mesmo tipo do considerado para atender à não-linearidade material: a matriz de rigidez efectiva \bar{K} (expressão (124)) é estabelecida uma única vez no início do cálculo, considerando $C = b K_0$, pelo que a não-linearidade decorrente da alteração da matriz de amortecimento é atendida à custa das forças residuais ψ (expressões (121) e (125)), calculadas com $C = b^* K$ e adoptando a matriz de rigidez correspondente ao precedente incremento convergido.

4.3. AMORTECIMENTO POR RADIAÇÃO EM MEIOS ELÁSTICOS

4.3.1 Considerações gerais

Na abordagem de problemas estruturais de natureza dinâmica sucede, com alguma frequência, que o analista tenha de ser confrontado com a propagação de ondas em meios de dimensão infinita. Exemplos destas situações ocorrem a propósito do estudo sísmico de barragens, dada a ligação destas estruturas a maciços de fundação, que constituem domínios semi-indefinidos, e a albufeiras de grande extensão.

Neste tipo de problemas, como é sabido, a discretização de todo o domínio constitui tarefa de realização impossível, pelo que o analista se vê obrigado a proceder a uma delimitação artificial do meio a estudar, o que torna inevitável o estabelecimento de fronteiras sem realidade física. Seja impondo deslocamentos nulos ou possibilitando a ocorrência de deslocamentos livres nestas fronteiras, as reais condições de propagação das ondas que tendem a atravessá-las são alteradas, o que ocasiona reflexões de natureza espúria, com devolução ao interior do meio discretizado de energia que tenderia a escapar-se e a dissipar-se no meio infinito envolvente.

As soluções para obviar a este inconveniente decorrem da análise das condições de propagação das ondas, a fim de procurar dotar as referidas fronteiras das necessárias características de transparência, de tal forma que, ao serem atingidas, se simulem nas fronteiras as condições do movimento real, permitindo o livre travessamento. Este assunto tem merecido apreciável destaque em bibliografia especializada^{2,21,22,23,25,27,28,29}, sendo usualmente abordado sob a designação de amortecimento por radiação, em atenção ao facto de a dissipação decorrente da saída de energia do domínio discretizado (e consequente dispersão no meio envolvente) conduzir ao amortecimento das vibrações. As fronteiras artificiais passam então a designar-se por radiantes, transparentes ou silenciosas.

A complexidade inerente às modelações mais poderosas das fronteiras com radiação pode ser muito elevada, pelo que se impõe a consideração de algumas simplificações se o objectivo não for um tratamento absolutamente rigoroso deste assunto, mas antes dotar os algoritmos computacionais de um mínimo de recursos, a fim de obviar aos efeitos mais indesejáveis da reflexão nas fronteiras artificiais da energia proveniente da vibração da estrutura. Neste contexto um comportamento constitutivo linear e elástico será admitido para o meio de propagação em que se localizam as fronteiras, hipótese que permite reduzir consideravelmente a complexidade da abordagem, embora obviamente retire alguma

generalidade ao tratamento, por exemplo, de situações que envolvam comportamento não-linear no maciço rochoso de fundação das barragens.

Atendendo à necessidade de assegurar uma adequada harmonização com a filosofia subjacente aos métodos de integração no domínio do tempo, os artifícios de radiação serão igualmente tomados como independentes da frequência das ondas em propagação. Complementarmente, será ainda admitida a independência das fronteiras transparentes relativamente à direcção de incidência das ondas, salvaguardando assim a abordagem das situações práticas em que esta característica é desconhecida.

4.3.2 Propagação de ondas unidimensionais

4.3.2.1 Ondas envolvendo movimento axial das partículas

No sentido de aclarar as questões essenciais relacionadas com a propagação de ondas considere-se a Figura 16, na qual está representada uma barra elástica de comprimento infinito. A barra encontra-se em equilíbrio estático até ao instante em que uma perturbação axial, de natureza dinâmica, é imposta à extremidade livre 0. Circunscrevendo as deduções a um caso unidimensional com amortecimento material nulo, o equilíbrio dinâmico expresso em (5) pode ser simplificado resultando

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho \ddot{u}_x = 0 \quad (143)$$

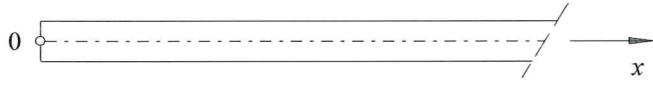


Figura 16 - Barra elástica de comprimento infinito.

Observe-se que a consideração de um comportamento linear e elástico assegura a validade do Princípio da Sobreposição dos Efeitos, pelo que a componente b_x das forças de volume pôde ser suprimida da equação (143), uma vez que o seu efeito de natureza estática é susceptível de ser avaliado num cálculo prévio e adicionado ao decorrente da perturbação.

Atendendo a que no presente problema se tem

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (144)$$

a seguinte equação de movimento poderia então ser obtida a partir de (143)

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_p^2} \ddot{u}_x = 0 \quad (145)$$

cujo aspecto formal permite concluir tratar-se da lei de propagação de uma onda axial, que se movimenta com velocidade $c_p = \sqrt{E/\rho}$.

A integração desta equação pode ser efectuada de forma relativamente simples procedendo à substituição das variáveis (x, t) pelas variáveis (ξ, η) , relacionadas entre si de acordo com as igualdades

$$\xi = x - c_p t \quad \eta = x + c_p t \quad (146)$$

Sendo a solução da equação de onda do tipo $u_x = u_x(x, t)$ e tendo em atenção a mudança de variáveis que acaba de ser descrita, a utilização da regra da derivação em cadeia permite expressar como segue as derivadas presentes na equação (145):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial \xi} + \frac{\partial u_x}{\partial \eta} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 u_x}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial^2 u_x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial \xi \partial \eta}\end{aligned}\quad (147a)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = c_p \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_x}{\partial \eta} - \frac{\partial u_x}{\partial \xi} \right) = \\ &= c_p \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = \\ &= c_p^2 \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial \xi \partial \eta}\right)\end{aligned}\quad (147b)$$

Substituindo estes resultados em (145) obtém-se a equação de movimento

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (148)$$

cuja integração permite obter uma solução do tipo

$$u_x = f(\xi) + g(\eta) = f(x - c_p t) + g(x + c_p t) \quad (149)$$

$f(x - c_p t)$ e $g(x + c_p t)$ são duas ondas que se propagam com velocidade c_p mas mantêm sempre a respectiva configuração. $f(x - c_p t)$ desloca-se no sentido positivo do eixo $0x$, enquanto $g(x + c_p t)$ se movimenta em sentido contrário.

A validade da solução $u_x = f(\xi) + g(\eta)$ pode ser comprovada ao proceder-se à respectiva derivação:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial f(\xi)}{\partial \eta} + \frac{\partial g(\eta)}{\partial \eta} \right) \quad (150)$$

Dada a independência das variáveis ξ e η resulta evidente que $\partial^2 u_x / (\partial \xi \partial \eta) = 0$, pelo que (149) constitui de facto solução da equação (148).

4.3.2.1.1 Condição de radiação perfeita

Se a fronteira artificial for colocada em $x = L$ (ver a Figura 17), a condição de transmissão perfeita nesta fronteira pode ser estabelecida tendo em atenção as seguintes considerações:

- (i) Uma onda f incidente deve atingir a fronteira artificial e atravessá-la sem modificação, propagando-se em direcção a $x = +\infty$.
- (ii) Nenhuma onda g deve desapontar em $x = L$, pois como a correspondente propagação se daria no sentido negativo do eixo $0x$ a violação deste requisito seria equivalente à formação de uma reflexão na fronteira.

De acordo com a natureza dos argumentos das funções f e g (ver expressão (149)) é fácil constatar que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{c_p} \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (151)$$

pois

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c_p \frac{\partial f}{\partial x} \quad (152)$$

De forma análoga ter-se-ia

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{c_p} \frac{\partial g}{\partial t} = 0 \quad (153)$$

De acordo com as considerações (i) e (ii) a lei de movimento na fronteira deverá ser estabelecida com base na expressão (151):

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)_{(x=L)} + \frac{1}{c_p} \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right)_{(x=L)} = 0 \quad (154)$$

Atendendo a (149) esta equação é equivalente a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{(x=L)} + \frac{1}{c_p} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial t} \right)_{(x=L)} = 0 \quad (155)$$

Fazendo intervir (151) resultaria ainda

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{(x=L)} + \frac{1}{c_p} \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)_{(x=L)} = 0 \quad (156)$$

expressão que confrontada com a equação (153) permitiria concluir ser

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{(x=L)} = 0 \quad \left(\frac{\partial g}{\partial t} \right)_{(x=L)} = 0 \quad (157)$$

Desta forma pode verificar-se que por intermédio da equação (154) se satisfazem as condições de propagação desejadas para a onda f (através da relação (151), estabelecida para $x = L$), evitando-se igualmente reflexões na fronteira, tal como decorre das condições (157) impostas sobre a onda g .

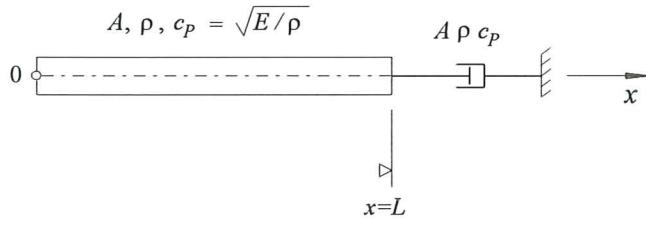


Figura 17 - Truncatura de uma barra elástica.

Da multiplicação por E de ambos os membros da equação (154), e fazendo intervir (144) e a definição da velocidade de propagação c_P , resulta

$$\sigma_x + \rho c_P \dot{u}_x = 0 \quad (\text{em } x=L) \quad (158)$$

que constitui a condição de radiação perfeita no exemplo considerado. Em termos do esforço axial N o equilíbrio a assegurar na fronteira $x=L$ de uma barra de secção A pode então ser expresso através da equação

$$N + [A \rho c_P] \dot{u}_x = 0 \quad (159)$$

a qual se identifica com a lei de comportamento de um amortecedor com viscosidade $A \rho c_P$, com o qual se pode substituir de forma exacta a parte da barra correspondente a $x > L$ (ver a Figura 17).

4.3.2.1.2 Fronteira transparente num sentido e com imposição de uma onda no outro

Um artifício de interesse prático, desenvolvido na referência (15), diz respeito à possibilidade de uma fronteira artificial situada numa barra à distância $x=L$ se comportar como transparente para a onda $f(x-c_P t)$ que tende a escapar-se da barra (sentido positivo de $0x$), mas permitir prescrever um dado movimento $\underline{u}_x(t)$ com sentido de propagação coincidente com o de uma onda g (sentido negativo de $0x$), isto é,

$$g(L+c_P t) = \underline{u}_x(t) \quad (160)$$

Considerando a transformação

$$g(x+c_P t) = g\left(L + c_P \left(\frac{x-L}{c_P} + t\right)\right) \quad (161)$$

e a definição

$$t^* = \frac{x-L}{c_P} + t \quad (162)$$

de (160) conclui-se que

$$g(x+c_P t) = g\left(L + c_P t^*\right) = \underline{u}_x(t^*) = \underline{u}_x\left(\frac{x-L}{c_P} + t\right) \quad (163)$$

Atendendo à solução da equação de onda expressa em (149), na presente situação ter-se-á então que

$$u_x = f(x-c_P t) + \underline{u}_x\left(\frac{x-L}{c_P} + t\right) \quad (164)$$

Derivando este resultado em ordem a x e a t

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \underline{u}_x}{\partial t^*} \frac{\partial t^*}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial \underline{u}_x}{\partial t^*} \frac{1}{c_P} \quad (165a)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \underline{u}_x}{\partial t^*} \frac{\partial t^*}{\partial t} = -c_P \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial \underline{u}_x}{\partial t^*} \quad (165b)$$

conclui-se que

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{1}{c_P} \left(-c_P \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\partial u_x}{\partial t^*} \right) = -\frac{1}{c_P} \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} - 2 \frac{\partial u_x}{\partial t^*} \right) \quad (166)$$

Uma vez que para $x=L$ se tem $t^* = t$ (confirmar através de (162)), no contorno a expressão (166) converte-se na igualdade

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)_{(x=L)} + \frac{1}{c_P} (\dot{u}_x - 2 \dot{u}_x)_{(x=L)} = 0 \quad (167)$$

Procedendo como para (158) resulta finalmente a condição de equilíbrio a satisfazer na fronteira:

$$\sigma_x + \rho c_P \dot{u}_x = \rho c_P (2 \dot{u}_x) \quad (168)$$

Note-se que esta equação difere da considerada em (158) pela existência de um termo viscoso no segundo membro, que assegura a imposição da onda pretendida. O termo viscoso do primeiro membro está, em ambas as expressões, associado à condição de radiação da onda f .

4.3.2.2 Ondas envolvendo movimento transversal das partículas

As equações (158) e (168) foram estabelecidas para uma perturbação que se propagava longitudinalmente numa barra, acompanhada de um movimento axial das partículas, em concordância com a natureza da solicitação especificada na extremidade 0 ou na fronteira artificial. As ondas deste tipo têm portanto um carácter volumétrico ou dilatacional, usualmente designadas por ondas de tipo P .

A consideração de ondas de corte ou de tipo S , que se propagam longitudinalmente mas induzem um movimento transversal das partículas da barra, u_y , não suscita nenhuma dificuldade especial, sendo exclusivamente necessário proceder à substituição da equação de equilíbrio indefinido (143) por

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \rho \ddot{u}_y = 0 \quad (169)$$

Invocando as relações da elasticidade linear a seguinte equação de movimento seria obtida

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_S^2} \ddot{u}_y = 0 \quad (170)$$

na qual $c_S = \sqrt{G/\rho}$ corresponde à velocidade de propagação das ondas de corte (G é o módulo de elasticidade transversal do material da barra).

Procedendo a considerações do mesmo tipo das invocadas a propósito das ondas P obter-se-ia a seguinte condição de radiação perfeita, a aplicar numa fronteira artificial:

$$\tau_{xy} + \rho c_S \dot{u}_y = 0 \quad (\text{em } x=L) \quad (171)$$

Novamente se constata que a porção de barra correspondente a $x > L$ pode ser simulada, de forma exacta, através de um amortecedor colocado na fronteira artificial. No caso de uma barra de secção A a viscosidade do amortecedor seria então dada por $A \rho c_S$.

Na situação que envolvesse a imposição na fronteira de uma dada lei de movimento $u_y(t)$ a equação de contorno a aplicar seria então

$$\tau_{xy} + \rho c_s \dot{u}_y = \rho c_s (2 \dot{u}_y) \quad (172)$$

4.3.3 Propagação de ondas planas em meios multidimensionais

A partir das condições de propagação das ondas P e S em meios unidimensionais podem deduzir-se as leis de movimento associadas à propagação de ondas planas em meios multidimensionais com comportamento linear e elástico. A transmissão de ondas planas caracteriza-se pelo facto de a respectiva propagação apresentar uma direccionalidade bem definida, o que mediante uma apropriada orientação do sistema de eixos de referência possibilita consideráveis simplificações no respectivo tratamento matemático.

Designando por $0x'y'z'$ o novo referencial e por $0x'$ o eixo coordenado que constitui a direcção de propagação, o campo de deslocamentos \mathbf{u}' pode então ser caracterizado de acordo com a seguinte redução de coordenadas:

$$\mathbf{u}'(x', y', z', t) \rightarrow \mathbf{u}'(x', t) \quad (173)$$

Invocando a Lei de Hooke Generalizada, expressa com base nas constantes de Lamé λ e μ ,

$$\sigma' = \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon') \mathbf{I} + 2\mu \varepsilon' = \lambda \mathbf{I} (\mathbf{I} : \varepsilon') + 2\mu \varepsilon' \quad (174)$$

na ausência de forças de volume e de amortecimento a expressão de equilíbrio indefinido (5) pode ser traduzida de acordo com

$$\nabla' \cdot \sigma' = \lambda \nabla' (\mathbf{I} : \varepsilon') + 2\mu (\nabla' \cdot \varepsilon') = \rho \ddot{\mathbf{u}'} \quad (175)$$

Utilizando a definição (1) para o tensor de deformações pode constatar-se que

$$\mathbf{I} : \varepsilon' = \frac{1}{2} (\mathbf{I} : (\nabla' \otimes \mathbf{u}') + \mathbf{I} : (\mathbf{u}' \otimes \nabla')) = \mathbf{I} : (\nabla' \otimes \mathbf{u}') \quad (176a)$$

$$\nabla' \cdot \varepsilon' = \frac{1}{2} (\nabla' \cdot (\nabla' \otimes \mathbf{u}') + \nabla' \cdot (\mathbf{u}' \otimes \nabla')) = \frac{1}{2} (\nabla'^2 \mathbf{u}' + \nabla' \cdot (\mathbf{u}' \otimes \nabla')) \quad (176b)$$

sendo

$$\nabla'^2 = \nabla' \cdot \nabla' = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \quad (177)$$

Substituindo (176) em (175) resulta

$$\lambda \nabla' (\mathbf{I} : (\nabla' \otimes \mathbf{u}')) + \mu \nabla'^2 \mathbf{u}' + \mu \nabla' \cdot (\mathbf{u}' \otimes \nabla') = \rho \ddot{\mathbf{u}'} \quad (178)$$

Recorrendo à notação indicial esta expressão converte-se em

$$\lambda \nabla'_{i'} \delta_{j'l'} \nabla'_{j'} u'_{l'} + \mu \nabla'^2_{i'} u'_{i'} + \mu \nabla'_{m'} u'_{m'} \nabla'_{i'} = \rho \ddot{u}'_{i'} \quad (179)$$

na qual está obviamente implícito que aos índices deverão ser atribuídos os valores literais x' , y' e z' , embora do ponto de vista matemático as operações possam ser conduzidas como se de facto lhes correspondessem valores numéricos.

De acordo com a convenção de índices mudos e o significado do δ de Kronecker é possível simplificar (179):

$$(\lambda + \mu) \nabla'_{i'} \nabla'_{i'} u'_{i'} + \mu \nabla'^2 u'_{i'} = \rho \ddot{u}'_{i'} \quad (180)$$

Explicitando as derivações associadas à utilização do operador ∇' resulta:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial i'} \left[\frac{\partial u'_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial u'_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial u'_{z'}}{\partial z'} \right] + \mu \left[\frac{\partial^2 u'_{i'}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'_{i'}}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'_{i'}}{\partial z'^2} \right] = \rho \ddot{u}'_{i'} \quad (i' = x', y', z') \quad (181)$$

Uma vez que o vector deslocamento não depende de outras coordenadas cartesianas além de x' a esta expressão pode atribuir-se a forma

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u'_{x'}}{\partial i' \partial x'} + \mu \frac{\partial^2 u'_{i'}}{\partial x'^2} = \rho \ddot{u}'_{i'} \quad (i' = x', y', z') \quad (182)$$

ou ainda

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u'_{x'}}{\partial x'^2} \delta_{i'x'} + \mu \frac{\partial^2 u'_{i'}}{\partial x'^2} = \rho \ddot{u}'_{i'} \quad (i' = x', y', z') \quad (183)$$

Analisando os casos $i' = x'$ e $i' \neq x'$, correspondentes às situações para as quais as componentes do movimento das partículas apresentam ou não colinearidade com a direcção de propagação, ter-se-á:

- $i' = x'$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u'_{x'}}{\partial x'^2} - \rho \ddot{u}'_{x'} = 0 \quad (184a)$$

- $i' \neq x'$

$$\mu \frac{\partial^2 u'_{i'}}{\partial x'^2} - \rho \ddot{u}'_{i'} = 0 \quad (i' = y', z') \quad (184b)$$

Definindo

$$c_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (185)$$

facilmente se conclui que as expressões (184) se podem converter nas equações

$$\frac{\partial^2 u'_{x'}}{\partial x'^2} - \frac{1}{c_P^2} \ddot{u}'_{x'} = 0 \quad \frac{\partial^2 u'_{i'}}{\partial x'^2} - \frac{1}{c_S^2} \ddot{u}'_{i'} = 0 \quad (i' = y', z') \quad (186)$$

que representam as leis de propagação de uma onda P e de duas ondas S , com velocidades de propagação c_P e c_S , respectivamente.

4.3.3.1 Condição de radiação perfeita

A aplicação às expressões (186) dos raciocínios invocados para as expressões (145) e (170) torna evidente que a condição de radiação necessária para dotar uma fronteira artificial de absoluta transparência, relativamente a ondas cuja direcção de propagação lhe seja perpendicular, pode ser modelada com base num conjunto de amortecedores com viscosidades ρc_P e ρc_S , tal como ficou demonstrado nas expressões (158) e (171) – ver Figura 18.

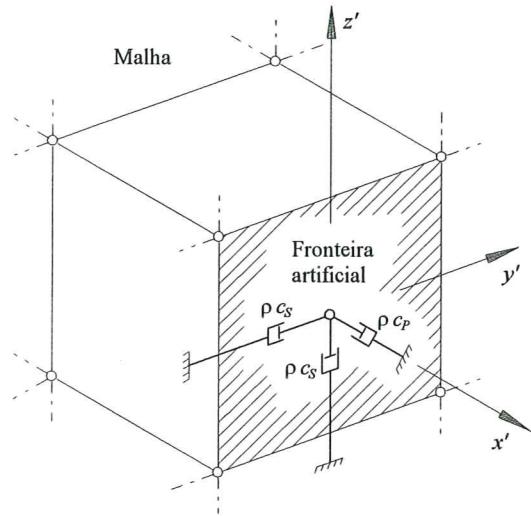


Figura 18 - Condição de transparência numa fronteira artificial.

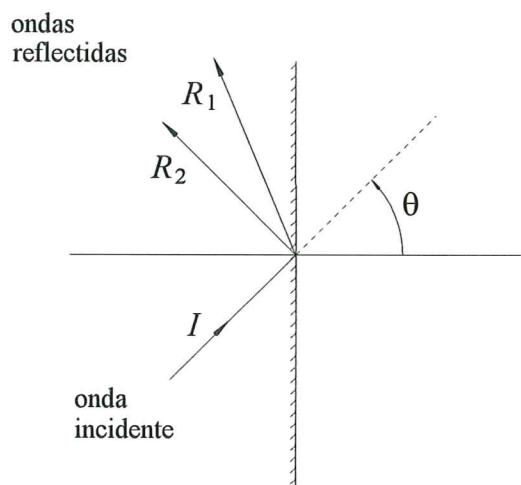


Figura 19 - Ondas incidentes e reflectidas numa fronteira artificial.

Tendo em consideração que de (185) resulta que $\rho c_p = \sqrt{\rho(\lambda+2\mu)}$ e $\rho c_s = \sqrt{\rho\mu}$, a condição matricial que expressa o conjunto de tensões que é necessário desenvolver na fronteira para lhe conferir características de radiação perfeita, e para o referencial considerado na Figura 18, é então

$$\mathbf{q}' = -\mathbf{C}'_{per} \cdot \dot{\mathbf{u}}' \quad (187)$$

na qual

$$\mathbf{q}' = \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \end{Bmatrix}^T \quad \dot{\mathbf{u}}' = \begin{Bmatrix} \dot{u}'_{x'} & \dot{u}'_{y'} & \dot{u}'_{z'} \end{Bmatrix}^T \quad (188)$$

e

$$\mathbf{C}'_{per} = \begin{bmatrix} \sqrt{\rho(\lambda+2\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\rho\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\rho\mu} \end{bmatrix} \quad (189)$$

4.3.3.2 Condição de radiação ponderada

A condição de radiação estabelecida em (187) foi deduzida com o propósito de conferir à fronteira artificial condições de transparência perfeita relativamente a ondas planas que nela incidissem perpendicularmente. Assim, para outros ângulos de incidência a condição de radiação não é satisfeita de forma exacta, pelo que nessas circunstâncias se produzirão reflexões parciais das ondas em propagação para o exterior do domínio discretizado.

Neste enquadramento White *et al.*²⁷ propõem uma variante à matriz de amortecimento \mathbf{C}'_{per} definida em (189). Situando todas as deduções no contexto de meios bidimensionais com comportamento linear e elástico, a equação constitutiva desenvolvida naquela referência para aplicação às fronteiras artificiais decorreu de uma sequência de raciocínios afim da que permitiu estabelecer a equação (187), na qual foi contudo

salvaguardada a possibilidade de ser qualquer o ângulo de incidência θ das ondas planas (ver Figura 19).

Nestas condições a matriz constitutiva exacta a considerar para os amortecedores posicionados no contorno, $\mathbf{C}'_{exa}(\theta)$, depende obviamente de θ , o que do ponto de vista prático se revela inconveniente, já que em geral se desconhece a direcção das ondas que atingem a fronteira, sendo inclusivamente de prever que esta sofra a incidência simultânea de ondas com distintas orientações. Com o propósito de estabelecer uma condição de radiação independente de θ , naquele trabalho foi então proposta a definição de uma matriz constitutiva ponderada, \mathbf{C}'_{pon} , que em termos médios tenderá a aproximar $\mathbf{C}'_{exa}(\theta)$.

Na fronteira do problema 2D representado na Figura 19 a onda incidente I tende a produzir duas ondas reflectidas R_1 e R_2 . A partir de considerações de equilíbrio naquela fronteira, na referência anteriormente citada foi demonstrada a dependência das amplitudes das ondas reflectidas relativamente à grandeza dos termos da matriz soma expressa em (190). Recorrendo à ponderação

$$\mathbf{C}'_{pon} + \mathbf{C}'_{exa}(\theta) \quad (190)$$

Como a maximização da eficiência da condição de radiação corresponde à minimização das reflexões R_1 e R_2 na fronteira, e esta é equivalente à minimização dos valores das correspondentes amplitudes, a pretendida optimização da condição de transparência será assegurada através da minimização de cada termo da matriz soma expressa em (190). Recorrendo à ponderação

$$F_{ij} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[(\mathbf{C}'_{pon})_{ij} + (\mathbf{C}'_{exa}(\theta))_{ij} \right]^2 \cos^2 \theta \, d\theta \quad (191)$$

a referida minimização poderá ser expressa com base na condição

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial (\mathbf{C}'_{pon})_{ij}} = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[(\mathbf{C}'_{pon})_{ij} + (\mathbf{C}'_{exa}(\theta))_{ij} \right] \cos^2 \theta \, d\theta = 0 \quad (192)$$

que conduz ao resultado

$$(\mathbf{C}'_{pon})_{ij} = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\mathbf{C}'_{exa}(\theta))_{ij} \cos^2 \theta \, d\theta \Big/ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta \quad (193)$$

Para a expressão analítica de $\mathbf{C}'_{exa}(\theta)$ considerada na referência (27) esta definição (193) permite obter a seguinte matriz de amortecimento ponderada (para um estado plano de deformação):

$$\mathbf{C}'_{pon} = \frac{8 \sqrt{\rho G}}{15 \pi} \begin{bmatrix} 5/s - 2s + 2 & 0 \\ 0 & 2s + 3 \end{bmatrix} \quad (194)$$

com

$$s = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}} \quad (195)$$

A generalização de (193) a problemas 3D está documentada na referência (16), tendo conduzido a

$$\mathbf{C}'_{pon} = \frac{8 \sqrt{\rho G}}{15 \pi} \begin{bmatrix} 5/s - 2s + 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 + s & 0 \\ 0 & 0 & 4 + s \end{bmatrix} \quad (196)$$

Em ambos os casos a condição de radiação expressa no referencial local da Figura 18 é então

$$q' = -\mathbf{C}'_{pon} \cdot \dot{\mathbf{u}}' \quad (197)$$

sendo claro, a partir das expressões (194) e (196), que a matriz de amortecimento \mathbf{C}'_{pon} não depende de direção de incidência das ondas na fronteira.

4.3.3.3 Fronteira transparente num sentido e com imposição de ondas no outro

Retomando o artifício de uma fronteira artificial poder comportar-se como transparente em relação às ondas que tendam a escapar-se do interior da malha para o meio ilimitado exterior, mas também como mecanismo de prescrição de um movimento $\underline{\mathbf{u}}'$ determinado por ondas com sentido de propagação inverso, a generalização das expressões (168) e (172) conduz à relação

$$q' = -\mathbf{C}'_r \cdot (\dot{\mathbf{u}}' - 2\underline{\dot{\mathbf{u}}}') \quad (198)$$

que substitui as condições de radiação (187) e (197). \mathbf{C}'_r identificar-se-á, constante o caso, com \mathbf{C}'_{per} ou com \mathbf{C}'_{pon} .

4.3.3.4 Modelação numérica

A utilização computacional da expressão (198) pressupõe, primeiramente, uma mudança do referencial local $0x'y'z'$ da Figura 18 para o referencial geral $0xyz$. De acordo com a transformação tensorial correspondente ter-se-á

$$q = -\mathbf{C}_r \cdot (\dot{\mathbf{u}} - 2\underline{\dot{\mathbf{u}}}) \quad (199)$$

sendo

$$\mathbf{C}_r = \mathbf{T} \mathbf{C}'_r \mathbf{T}^T \quad (200)$$

e \mathbf{T} a matriz de rotação dos referenciais.

No contexto da discretização inerente ao MEF o vector elementar das forças nodais estaticamente equivalentes ao vector q expresso em (199) obtém-se a partir da avaliação numérica do integral

$$\int_{\Gamma_{r_e}} \mathbf{N}^T q \, d\Gamma = - \int_{\Gamma_{r_e}} \mathbf{N}^T \mathbf{C}_r (\dot{\mathbf{u}} - 2\underline{\dot{\mathbf{u}}}) \, d\Gamma \quad (201)$$

no qual Γ_{r_e} designa a área do elemento de contorno onde é imposta a condição de radiação. Introduzindo as habituais aproximações ao nível dos campos de velocidades $\dot{\mathbf{u}}$ e $\underline{\dot{\mathbf{u}}}$, caracterizados nos nós de cada elemento finito por intermédio dos vectores $\dot{\mathbf{a}}_e$ e $\underline{\dot{\mathbf{a}}}_e$ (respectivamente), a igualdade (201) dá lugar à expressão

$$\int_{\Gamma_{r_e}} \mathbf{N}^T q \, d\Gamma = - \mathbf{C}_{r_e} (\dot{\mathbf{a}}_e - 2\underline{\dot{\mathbf{a}}}_e) \quad (202)$$

sendo \mathbf{C}_{r_e} a seguinte matriz elementar de amortecimento por radiação

$$C_{r_e} = \int_{\Gamma_{r_e}} \mathbf{N}^T \mathbf{C}_r \mathbf{N} d\Gamma \quad (203)$$

A equação de equilíbrio dinâmico de cada elemento finito pode finalmente ser estabelecida, introduzindo em (28) o resultado expresso em (202):

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{a}}_e + (\mathbf{C}_e + \mathbf{C}_{r_e}) \dot{\mathbf{a}}_e + \mathbf{k}_e(\mathbf{a}_e) = \mathbf{f}_e + 2 \mathbf{C}_{r_e} \underline{\dot{\mathbf{a}}}_e \quad (204)$$

A equação de equilíbrio dinâmico da globalidade da estrutura é facilmente obtida a partir do agrupamento das contribuições dos diferentes elementos, resultando por fim

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_t + (\mathbf{C} + \mathbf{C}_r) \dot{\mathbf{a}}_t + \mathbf{k}(\mathbf{a}_t) = \mathbf{f}_t + 2 \mathbf{C}_r \underline{\dot{\mathbf{a}}}_t \quad (205)$$

Como se constata, a matriz de amortecimento passa a incluir, além da contribuição devida ao amortecimento material, uma participação devida à radiação nas fronteiras. A prescrição na fronteira das velocidades $\underline{\dot{\mathbf{a}}}_t$ traduz-se na adição de um conjunto de forças suplementares ao vector \mathbf{f}_t que exprime a solicitação exterior.

4.3.4 Exemplos de aplicação

4.3.4.1 Barra semi-infinita: comparação das condições de radiação perfeita e ponderada

A eficiência das matrizes constitutivas \mathbf{C}'_{per} e \mathbf{C}'_{pon} na simulação de condições de radiação em fronteiras artificiais poderá ser avaliada a partir da análise do comportamento de uma barra elástica semi-infinita, com 5 m de altura e 1 m de espessura (ver Figura 20).

A extensão discretizada da barra foi limitada a 100 m, tendo para o efeito sido utilizados 500 elementos finitos de 4 nós, em estado plano de deformação. A fronteira artificial, modelada com 5 elementos de radiação de 2 nós, foi considerada com duas inclinações distintas (observar a extremidade direita das malhas da Figura 20), a fim de deliberadamente provocar que a incidência de uma onda plana ocorresse com diferentes ângulos: $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 65^\circ$.

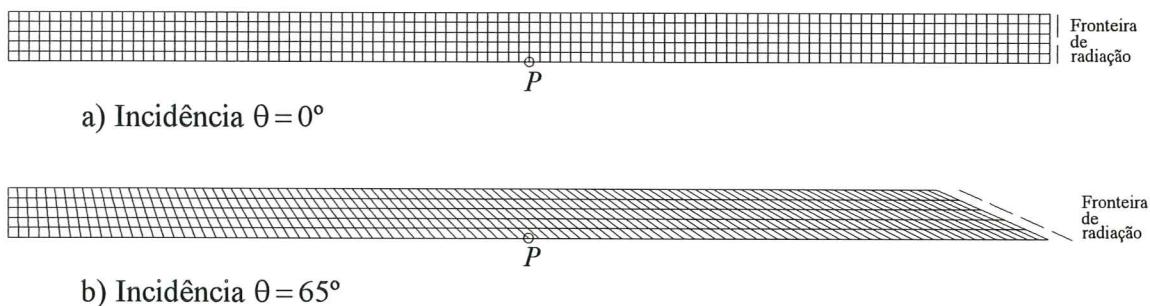


Figura 20 - Malhas com distintas incidências nas fronteiras de radiação.

As propriedades do material que constitui a barra são as mesmas que foram utilizadas a propósito da Figura 6. A acção imposta à extremidade esquerda, sob a forma de um deslocamento forçado com direcção axial, corresponde à evolução temporal representada na Figura 7, que assim induz a propagação de uma onda volumétrica ao longo das malhas

do presente exemplo. Na integração foi utilizado o método de Newmark ($\gamma=0.5$, $\beta=0.25$) com $\Delta t=0.0006\text{ s}$.

O funcionamento que idealmente se desejaría obter para as fronteiras radiantes deveria revelar insensibilidade ao ângulo de incidência θ , embora a realidade seja algo diferente, uma vez que as matrizes empregues na modelação da condição de radiação contêm limitações que já foram descritas.

A Figura 21 permite comparar o desempenho dos modelos de radiação subjacentes à utilização das matrizes $\mathbf{C}_{per}^!$ e $\mathbf{C}_{pon}^!$ – ‘rad. perfeita’ e ‘rad. ponderada’ na legenda –, mediante a representação da história do deslocamento do ponto P , assinalado na Figura 20 a 50m da extremidade esquerda. Dada a velocidade de propagação da onda volumétrica (3333 m/s), a Figura 21 permite observar a chegada da perturbação para um instante muito próximo do teórico ($t = 50/3333 = 0.015\text{ s}$). Uma eventual reflexão na fronteira implicará, por parte da onda reflectida, a realização de um percurso adicional de 50m até P ser novamente atingido, manifestando-se portanto através do surgimento neste ponto de deslocamentos não nulos para $t \geq 150/3333 = 0.045\text{ s}$.

Conforme pode ser observado, a fronteira associada à condição de radiação perfeita revela uma modelação exacta da condição de transparência para $\theta=0^\circ$, não se registando qualquer reflexão da onda incidente. Este desempenho era aliás esperado, uma vez que a onda plana elástica incide perpendicularly à fronteira de radiação, situação para a qual se cumprem todos os requisitos teóricos que garantem a exactidão de $\mathbf{C}_{per}^!$. Contudo, para $\theta=65^\circ$ já a mesma condição de radiação se caracteriza pelo aparecimento de uma reflexão, com uma amplitude de cerca de 18% da amplitude da onda incidente, constituindo assim o pior desempenho do conjunto de situações representado na Figura 21.

Para $\theta=65^\circ$ o desempenho da condição de radiação ponderada é superior ao correspondente à condição de radiação perfeita, reduzindo para metade a amplitude da onda reflectida. Como era esperado para $\theta=0^\circ$ a condição de transparência não é absolutamente satisfeita, mas em todo o caso o erro decorrente da reflexão que se observa na Figura 21 não atinge sequer os 5%, pelo que é perfeitamente aceitável no âmbito das aplicações da Engenharia Estrutural.

Dos resultados obtidos infere-se que a utilização da condição de radiação ponderada deverá, em princípio, ser privilegiada relativamente à opção pela condição de radiação perfeita, uma vez que dá garantias de poder assegurar uma condição de transparência mais eficaz num leque bastante amplo de possibilidades de ângulos de incidência, cobrindo uma

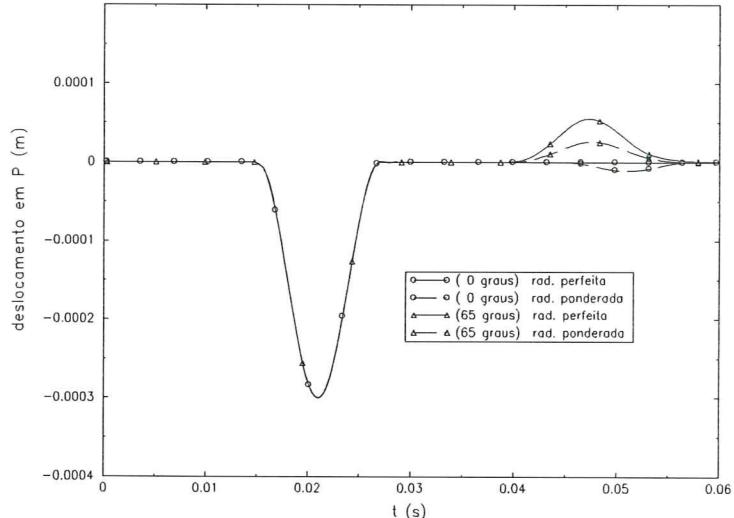


Figura 21 - Diferentes condições de radiação.

grande variedade de situações práticas em que θ é desconhecido *a priori*. O caso pontual referente a um ângulo de incidência nulo, em que o desempenho da condição de radiação ponderada foi suplantado pelo da condição de radiação perfeita, não deve ser sobrevalorizado, dado constituir uma situação isolada, na qual em todo o caso foi pequeno o erro envolvido, sobretudo tendo em conta que outras limitações mais graves estão subjacentes às formulações de radiação apresentadas (como sejam as hipóteses de as ondas serem planas, e de se deslocarem em meios com comportamento linear e elástico).

4.3.4.2 Barra semi-infinita em apoio elástico

O ensaio que seguidamente será discutido corresponde à análise do comportamento da barra semi-infinita da Figura 22, que se encontra elasticamente apoiada num meio caracterizado por uma rigidez por unidade de comprimento k_g . A solicitação foi aplicada sob a forma de um movimento axial, prescrito na extremidade 0 de acordo com a lei

$$u(t) = \begin{cases} -0.5 \cos(\pi t) + 0.5 & , \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2 \text{ s} \\ 0 & , \quad \text{para } t > 2 \text{ s} \end{cases} \quad (\text{em m})$$

que se encontra representada na Figura 23.

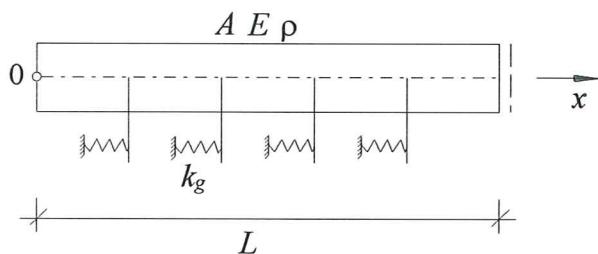


Figura 22 - Barra semi-infinita em apoio elástico.

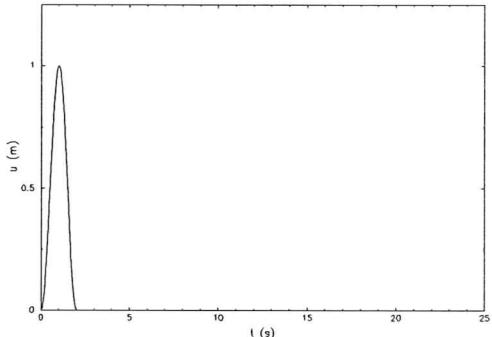


Figura 23 - Movimento forçado.

A modelação do apoio elástico foi efectuada por intermédio de elementos de barra, que ligaram cada nó da discretização a um apoio fixo no meio exterior, tendo as respectivas características geométricas e elásticas sido convenientemente seleccionados por forma a corresponderem à rigidez k_g e à área de influência do nó.

Para o problema em análise, cuja solução teórica é conhecida, a simulação da condição de radiação exacta na fronteira localizada em $x=L$ exigiria, segundo Wolf²⁹, a utilização de amortecedores dependentes da frequência. Neste sentido o exemplo em questão constitui um severo teste para os modelos de radiação, pelo que foi utilizado para avaliação do desempenho da condição de radiação ponderada.

Na modelação consideraram-se valores unitários para k_g , L , A , E e ρ , tendo sido admitido um valor nulo para ω . A discretização da barra foi efectuada através de 10 elementos de 4 nós em estado plano de tensão, com 1m de altura e 0.1m de comprimento na direcção $0x$, e a fronteira artificial foi modelada com um elemento de radiação de 2 nós. Para Δt adoptou-se o valor de 0.05s.

Atendendo a que para $t=2$ s a solicitação imposta conduz a um anulamento brusco da aceleração no ponto 0, e este facto determinou que com a regra trapezoidal se registasse a ocorrência de ruído numérico, os resultados obtidos correspondem à utilização do método α , que foi considerado com um parâmetro de dissipação igual a $-1/3$.

A Figura 24, em que se reproduz a evolução temporal da reacção no apoio 0, permite comparar a solução correspondente à condição de radiação ponderada com a solução teórica referente às características A , E , ρ e ν adoptadas. Os desvios que a solução numérica evidencia relativamente à solução teórica são pequenos, e aliás perfeitamente aceitáveis, uma vez que os amortecedores considerados na fronteira são independentes da frequência. Igualmente se verifica a completa dissipação da onda para $t>5$ s.

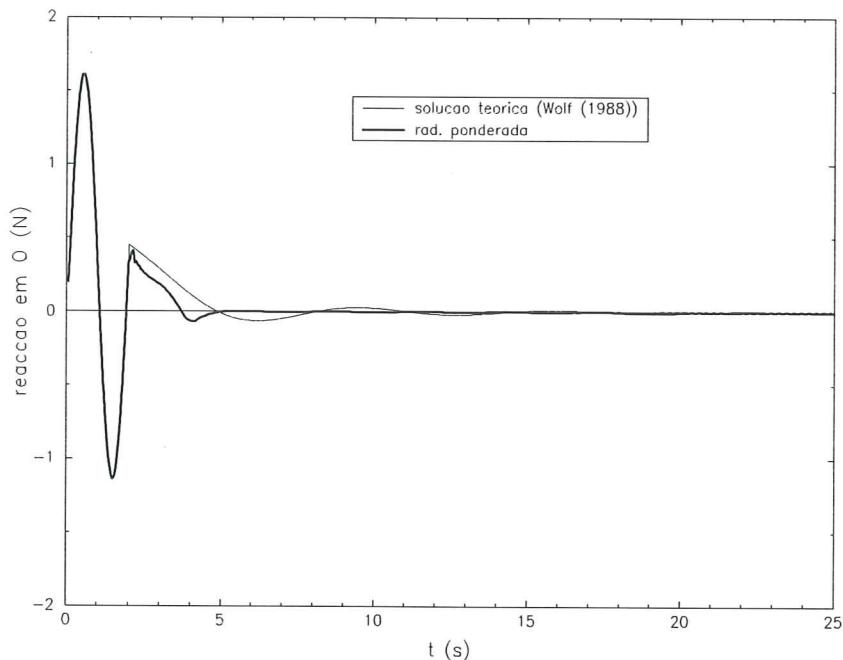


Figura 24 - Condição de radiação ponderada.

Do exemplo analisado conclui-se que o modelo de radiação ponderada é adequado para os objectivos propostos, conjugando simplicidade formal e eficiência na simulação de fronteiras transparentes.

4.4. REFERÊNCIAS

1. Adams, D.D. and Wood, W.L. (1983) - Comparison of Hilber-Hughes-Taylor and Bossak ‘ α -Methods’ for the Numerical Integration of Vibration Equations - *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 19, Nº 5, pp. 765-771.
2. Al-Hunaidi, M.O.; Towhata, I. and Ishihara, K. (1990) - Silent Boundary for Time Domain Wave Motion Analysis Based on Direct Energy Deletion - *Soil Dyn. Earth. Eng.*, Vol. 9, Nº 2, pp. 85-95.
3. Bazant, Z.P. and Oh, B.H. (1983) - Crack Band Theory for Fracture of Concrete - *Matériaux et Constructions*, Vol. 16, Nº 93, pp. 155-177.

4. Bazzi, G. and Anderheggen, E. (1982) - The ρ -Family of Algorithms for Time-Step Integration With Improved Numerical Dissipation - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 10, pp. 537-550.
5. Bhattacharjee, S.S. and Léger, P. (1993) - Seismic Cracking and Energy Dissipation in Concrete Gravity Dams - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 22, pp. 991-1007.
6. Clough, R.W. and Penzien, J. (1975) - Dynamics of Structures - *McGraw-Hill Kogakusha, Ltd.*, Tokyo, Japan.
7. Costa, A.G. (1989) - Análise Sísmica de Estruturas Irregulares - *Tese de Doutoramento*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.
8. Dowling, M.J. and Hall, J.F. (1989) - Nonlinear Seismic Analysis of Arch Dams - *J. Eng. Mech., ASCE*, Vol. 115, Nº 4, pp. 768-789.
9. Droz, P. (1987) - Modèle Numérique du Comportement Non-Linéaire d’Ouvrages Massifs en Béton Non Armé - *Thèse N° 682*, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Suisse.
10. El-Aidi, B. and Hall, J.F. (1989) - Non-Linear Earthquake Response of Concrete Gravity Dams Part 1: Modelling - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 18, pp. 837-851.
11. El-Aidi, B. and Hall, J.F. (1989) - Non-Linear Earthquake Response of Concrete Gravity Dams Part 2: Behaviour - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 18, pp. 853-865.
12. Faria, R. (1994) - Avaliação do Comportamento Sísmico de Barragens de Betão Através de um Modelo de Dano Contínuo - *Tese de Doutoramento*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.
13. Feltrin, G.; Galli, M. and Bachmann, H. (1992) - Influence of Cracking on the Earthquake Response of Concrete Gravity Dams - *Proc. 10th World Conf. on Earth. Eng.*, Madrid, Spain, pp. 4627-4632.
14. Fenves, G.L.; Mojtahedi, S. and Reimer, R.B. (1992) - Nonlinear Earthquake Analysis of Arch Dam/Reservoir - *Proc. 10th World Conf. on Earth. Eng.*, Madrid, Spain, pp. 4595-4600.
15. Galindo, M. (1993) - Una Metodología para el Análisis Numérico del Comportamiento Resistente No Lineal de Presas de Hormigón Bajo Cargas Estáticas y Dinámicas - *Tesis Doctoral*, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España.
16. Guedes, J.P. (1992) - Análise Sísmica de Estruturas com Interacção Sólido-Fluido - *Tese de Mestrado*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.
17. Hilber, H.M.; Hughes, T.J. and Taylor, R.L. (1977) - Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 5, pp. 283-292.
18. Hilber, H.M. and Hughes, T.J. (1978) - Collocation, Dissipation and ‘Overshoot’ for Time Integration Schemes in Structural Dynamics - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 6, pp. 99-117.
19. Hohberg, J.-M. (1991) - Seismic Arch Dam Analysis With Full Joint Nonlinearity - *Proc. Int. Conf. on Dam Fracture*, Boulder, U.S.A., pp. 57-74.
20. Hughes, T.J. (1987) - The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis - *Prentice-Hall, Englewood Cliffs*, New Jersey, U.S.A..

21. Kausel, E. (1988) - Local Transmitting Boundaries - *J. Eng. Mech., ASCE*, Vol. 114, Nº 6, pp. 1011-1027.
22. Kunar, R.R. and Rodriguez-Ovejero, L. (1980) - A Model With Non-Reflecting Boundaries for Use in Explicit Soil-Structure Interaction Analysis - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 8, pp. 361-374.
23. Liao, Z.P. and Wong, H.L. (1984) - A Transmitting Boundary for the Numerical Simulation of Elastic Wave Propagation - *Soil Dyn. Earth. Eng.*, Vol. 3, Nº 4, pp. 174-183.
24. Miranda, I.; Ferencz, R.M. and Hughes, T.J. (1989) - An Improved Implicit-Explicit Time Integration Method for Structural Dynamics - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 18, pp. 643-653.
25. Sarma, S.K. (1990) - A Two Dimensional Radiating Boundary Condition for Seismic Response of Large Structures - *Proc. 9th Europ. Conf. on Earth. Eng.*, Moscow, U.S.S.R., Vol. 7-B, pp. 115-124.
26. Vargas-Loli, L.M. and Fenves, G.L. (1989) - Effects of Concrete Cracking on the Earthquake Response of Gravity Dams - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 18, pp. 575-592.
27. White, W.; Valliappan, S. and Lee, I.K. (1977) - Unified Boundary for Finite Dynamic Models - *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, Vol. 103, Nº EM5, pp. 949-964.
28. Wolf, J.P. (1986) - A Comparison of Time-Domain Transmiting Boundaries - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 14, pp. 655-673.
29. Wolf, J.P. (1988) - Soil-Structure-Interaction Analysis in Time Domain - *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs*, New Jersey, U.S.A..
30. Wood, W.L.; Bossak, M. and Zienkiewicz, O.C. (1980) - An Alpha Modification of Newmark's Method - *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 15, pp. 1562-1566.

Capítulo 5

MODELAÇÃO DA ALBUFEIRA E DA INTERACÇÃO SÓLIDO-LÍQUIDO

5.1. HIPÓTESES E EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

Nos problemas da Engenharia Sísmica que envolvem a interacção de estruturas com massas líquidas, como sucede relativamente a barragens e a plataformas ‘off-shore’, a modelação do efeito da água é geralmente conduzida estabelecendo as seguintes hipóteses simplificativas:

- (i) As velocidades e os deslocamentos do fluido são pequenos, sendo desprezável a parcela convectiva das acelerações.
- (ii) O fluxo é irrotacional.
- (iii) As forças de natureza viscosa são desprezáveis.

Atendendo à hipótese (iii) as tensões de corte no líquido são nulas, pelo que o tensor de tensões pode ser expresso através da relação

$$\boldsymbol{\sigma} = -P \mathbf{I} \quad (206)$$

sendo P a pressão (positiva quando induzindo compressão).

De acordo com o que no Capítulo 2 foi referido a propósito da expressão (5), o equilíbrio dinâmico do fluido, caracterizado por uma massa específica $\hat{\rho}_0$, é traduzido pelo seguinte sistema de equações

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \hat{\rho}_0 \ddot{\mathbf{u}} \quad (207)$$

Um vez que as forças de volume \mathbf{b} associadas ao peso próprio são praticamente constantes, é habitual proceder à sua aplicação em forma estática, num cálculo prévio, sendo os seus efeitos posteriormente adicionados aos decorrentes do comportamento dinâmico. Assim, invocando (206) a equação de equilíbrio estritamente hidrodinâmico pode ser expressa mediante a relação

$$\nabla P = -\hat{\rho}_0 \ddot{\mathbf{u}} \quad (208)$$

sendo que P traduzirá então apenas a variação de pressão relativamente à distribuição hidrostática.

Por sua vez num fluido não-viscoso pode estabelecer-se a seguinte lei constitutiva

$$\varepsilon_v = -P/\hat{K} \quad (209)$$

sendo ε_v a deformação volumétrica, dada por

$$\varepsilon_v = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (210)$$

e \hat{K} o correspondente módulo de deformação. Substituindo este resultado na expressão (209) e procedendo seguidamente a uma derivação em ordem ao tempo resulta

$$\nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} = - \ddot{P} / \hat{K} \quad (211)$$

Aplicando o operador diferencial ∇ a ambos os membros de (208) conclui-se que

$$\nabla^2 P = - \hat{\rho}_0 \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} \quad (212)$$

sendo

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (213)$$

Introduzindo (211) em (212) obtém-se finalmente

$$\nabla^2 P - \frac{1}{\hat{c}^2} \ddot{P} = 0 \quad \text{com } \hat{c} = \sqrt{\hat{K}/\hat{\rho}_0} \quad (214)$$

A analogia da equação (214) com (145) permite concluir tratar-se aquela da lei de propagação de uma onda acústica (ou volumétrica), que se movimenta no líquido com velocidade \hat{c} , representando portanto a expressão fundamental que governa a distribuição da pressão hidrodinâmica P . A resolução desta equação pode ser efectuada com recurso ao MEF, introduzindo a aproximação ao nível da pressão (formulação em pressões), ao nível do campo de deslocamentos de um sólido degenerado (formulação em deslocamentos) ou ao nível de potenciais apropriados (de deslocamentos ou de velocidades). As formulações em pressões e em deslocamentos são as mais habitualmente utilizadas, pelo que no presente texto se omitirá a abordagem das formulações baseadas em potenciais, que envolvem um esforço computacional análogo ao da primeira daquelas formulações^{8,20,31}.

5.2. FORMULAÇÃO EM PRESSÕES

5.2.1 Equação de resíduos pesados

A utilização de uma formulação em pressões constitui a estratégia mais natural para abordagem da equação de onda (214) que se pretende solucionar. O estabelecimento do correspondente sistema de equações semi-discretas pode ser efectuado através do Método dos Resíduos Pesados, invocando raciocínios já apresentados no Capítulo 2. Assim poder-se-á definir o resíduo

$$\psi_\Omega = \nabla^2 P - \frac{1}{\hat{c}^2} \ddot{P} \quad (215)$$

e a função de peso w_Ω , pelo que a equação de ponderação pode assumir o aspecto

$$\int_\Omega w_\Omega \psi_\Omega \, d\Omega = \int_\Omega w_\Omega \nabla^2 P \, d\Omega - \frac{1}{\hat{c}^2} \int_\Omega w_\Omega \ddot{P} \, d\Omega = 0 \quad (216)$$

Uma vez que

$$\int_\Omega w_\Omega \nabla^2 P \, d\Omega = \int_\Omega \nabla \cdot (w_\Omega \nabla P) \, d\Omega - \int_\Omega (\nabla w_\Omega) \cdot (\nabla P) \, d\Omega \quad (217)$$

invocando o Teorema da Divergência de Gauss conclui-se

$$\int_{\Omega} w_{\Omega} \nabla^2 P \, d\Omega = \int_{\Gamma} w_{\Gamma} (\nabla P \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla w_{\Omega}) \cdot (\nabla P) \, d\Omega \quad (218)$$

(\mathbf{n} é um versor normal ao contorno Γ e w_{Γ} representa a função de peso correspondente). Substituindo este resultado na expressão (216) obtém-se a forma fraca da equação de resíduos pesados:

$$\frac{1}{\hat{c}^2} \int_{\Omega} w_{\Omega} \ddot{P} \, d\Omega - \int_{\Gamma} w_{\Gamma} (\nabla P \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma + \int_{\Omega} (\nabla w_{\Omega}) \cdot (\nabla P) \, d\Omega = 0 \quad (219)$$

5.2.2 Condições de fronteira

Para estabelecimento de um sistema de equações semi-discretas torna-se indispensável caracterizar adequadamente as condições aplicáveis ao contorno Γ do domínio fluido, as quais figurarão no segundo termo do primeiro membro de (219). Com referência à Figura 25 serão discutidas as condições de fronteira que se seguem, consideradas as mais relevantes para o domínio fluido.

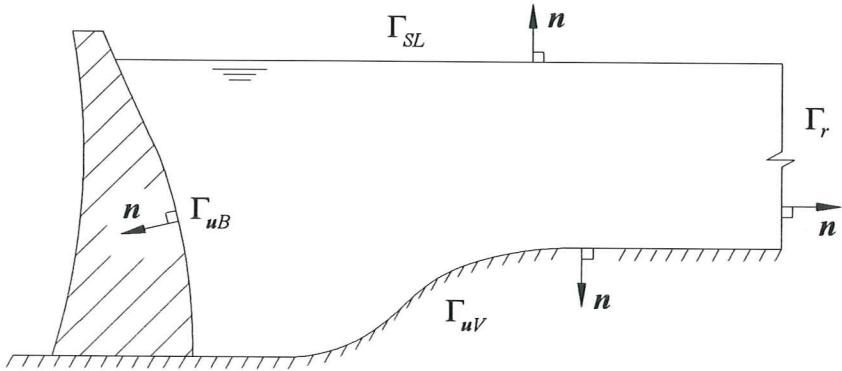


Figura 25 - Condições de contorno específicas.

5.2.2.1 Superfície livre

Admitindo a possibilidade de formação de ondas de superfície, em Γ_{SL} ter-se-á:

$$P = \hat{\rho}_0 g u_n = \hat{\rho}_0 g \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \quad (220)$$

sendo g a aceleração da gravidade e u_n a elevação da onda relativamente à superfície média. Na generalidade das aplicações, dado que u_n assume valores muito pequenos, é frequente substituir esta condição por

$$P = 0 \quad (221)$$

5.2.2.2 Superfície envolvendo uma condição de radiação

Conforme foi discutido no Capítulo 4, a fronteira Γ_r corresponde a uma truncatura artificial da extensão (suposta infinita) da albufeira, ditada pela necessidade de limitar o domínio discretizado. Assim o equilíbrio a impor nesta fronteira corresponde à condição de radiação da onda de pressão P . Estabelecendo a analogia da expressão (214) com a

expressão (145), de acordo com a equação (154) facilmente se conclui que a condição de transparência para a pressão hidrodinâmica pode ser expressa através da igualdade

$$\nabla P \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{\hat{c}} \dot{P} \quad (222)$$

5.2.2.3 Superfícies envolvendo interacção com meios sólidos

Como reflexo da hipótese correspondente à inexistência de fenómenos de natureza viscosa, as componentes tangenciais do movimento do fluido relativamente a contornos sólidos não geram forças, pelo que o equilíbrio ao longo do contacto da albufeira com a barragem, Γ_{uB} , ou com o vale, Γ_{uV} , pode ser exclusivamente expresso segundo a direcção normal \mathbf{n} .

Designando por $\ddot{u}_n = \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}$ a aceleração normal prescrita em $\Gamma_u = \Gamma_{uB} \cup \Gamma_{uV}$, a expressão (208) permite traduzir o equilíbrio nesta fronteira da seguinte forma:

$$\nabla P \cdot \mathbf{n} = -\hat{\rho}_0 \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = -\hat{\rho}_0 \ddot{u}_n \quad (223)$$

No contorno Γ_{uV} é frequente admitir-se a hipótese $\ddot{u}_n = 0$, pelo que nesse caso a equação aplicável é $\nabla P \cdot \mathbf{n} = 0$.

5.2.3 Discretização com recurso a elementos finitos

Adoptando a seguinte aproximação para o campo de pressões num elemento finito

$$P = \hat{N} \cdot \mathbf{p}_e \quad (224)$$

em que \hat{N} e \mathbf{p}_e são vectores que sequencialmente contêm as funções de forma e as pressões nodais do elemento considerado, resultaria igualmente óbvio que

$$\dot{P} = \hat{N} \cdot \dot{\mathbf{p}}_e \quad \ddot{P} = \hat{N} \cdot \ddot{\mathbf{p}}_e \quad (225)$$

Por sua vez, identificando as funções de peso com uma pressão hidrodinâmica virtual $P^* = \hat{N} \cdot \mathbf{p}_e^*$, e substituindo em (219) as expressões (224-225) e ainda as condições de fronteira (221-223), a formulação de Galerkin permitiria obter a seguinte equação matricial para cada elemento finito

$$\hat{\mathbf{M}}_e \ddot{\mathbf{p}}_e + \hat{\mathbf{C}}_e \dot{\mathbf{p}}_e + \hat{\mathbf{K}}_e \mathbf{p}_e = -\hat{\rho}_0 \int_{\Gamma_{u_e}} \hat{N} \mathbf{n}^T \ddot{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (226)$$

em que as matrizes $\hat{\mathbf{M}}_e$, $\hat{\mathbf{C}}_e$ e $\hat{\mathbf{K}}_e$ são determinadas de acordo com as expressões

$$\hat{\mathbf{M}}_e = \frac{1}{\hat{c}^2} \int_{\Omega_e} \hat{N} \hat{N}^T d\Omega \quad (227a)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_e = \frac{1}{\hat{c}} \int_{\Gamma_e} \hat{N} \hat{N}^T d\Gamma \quad (227b)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_e = \int_{\Omega_e} (\nabla \hat{N}^T)^T (\nabla \hat{N}) d\Omega \quad (227c)$$

O sistema de equações semi-discretas que regem o equilíbrio da globalidade da albufeira obtém-se de (226-227) procedendo como em relação ao domínio sólido, isto é, agrupando convenientemente as contribuições dos diversos elementos, resultando assim

matrizes $\hat{\mathbf{M}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ e $\hat{\mathbf{K}}$ e vectores \mathbf{p}_t , $\dot{\mathbf{p}}_t$ e $\ddot{\mathbf{p}}_t$ globais. Atendendo ainda a que o segundo membro da expressão (226) representa a interacção do líquido com fronteiras em que há prescrição de acelerações, usualmente associadas a meios sólidos nos quais é legítimo considerar a discretização $\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \cdot \ddot{\mathbf{a}}_e$, o sistema de equações aplicável ao domínio fluido pode então ser colocado sob a forma

$$\hat{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{p}}_t + \hat{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{p}}_t + \hat{\mathbf{K}} \mathbf{p}_t = -\hat{\rho}_0 \mathbf{H} \ddot{\mathbf{a}}_t \quad (228)$$

na qual está envolvida a seguinte matriz de interacção sólido-fluido:

$$\mathbf{H} = \sum_{e=1}^{nelin} \left[\int_{\Gamma_{ue}} \hat{\mathbf{N}} \mathbf{n}^T \mathbf{N} d\Gamma \right] \quad (229)$$

Nesta expressão A constitui o operador simbólico de agrupamento e $nelin$ designa o número de elementos em que existe interacção sólido-fluido.

5.2.4 Equações de equilíbrio dinâmico do conjunto sólido-líquido

As equações de equilíbrio relativas aos problemas em que uma estrutura interactua dinamicamente com uma massa líquida têm de ser estabelecidas associando convenientemente a equação de equilíbrio (30), válida para um meio sólido isolado, à equação (228), deduzida para um meio líquido. Ao segundo membro da equação de equilíbrio dinâmico correspondente ao meio sólido é, evidentemente, necessário acrescentar a contribuição \mathbf{f}_H devida à pressão hidrodinâmica, que se exerce quer no paramento de montante da barragem, quer ao longo do contacto do reservatório com o maciço de fundação.

Atendendo à orientação dos versores \mathbf{n} dispostos ao longo dos contornos Γ_{uB} e Γ_{uV} da Figura 25, o efeito da pressão hidrodinâmica pode ser traduzido através da acção equivalente $\mathbf{q} = P \mathbf{n}$, pelo que invocando o procedimento referido na expressão (29) para representação das forças aplicadas na superfície de um contorno manifestamente resultará que

$$\mathbf{f}_H = \sum_{e=1}^{nelin} \left[\left(\int_{\Gamma_{ue}} \mathbf{N}^T \mathbf{n} \hat{\mathbf{N}}^T d\Gamma \right) \mathbf{p}_e \right] \quad (230)$$

Atendendo à definição considerada em (229) para a matriz \mathbf{H} é imediato concluir que

$$\mathbf{f}_H = \mathbf{H}^T \mathbf{p}_t \quad (231)$$

Desta forma a equação de equilíbrio dinâmico correspondente ao sólido passa a ser traduzida por

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_t + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}_t + \mathbf{K}(\mathbf{a}_t) \mathbf{a}_t = \mathbf{f}_t + \mathbf{H}^T \mathbf{p}_t \quad (232)^{\dagger}$$

Associando esta equação à expressão (228) referente ao líquido pode finalmente obter-se o sistema global de equações aplicável ao conjunto barragem-fundação-albufeira:

[†] Para simplificação da escrita das equações que se seguem, e sem perda de generalidade, nesta expressão procedeu-se à substituição do vector das forças resistentes internas, $\mathbf{k}(\mathbf{a}_t)$, pela entidade equivalente $\mathbf{K}(\mathbf{a}_t) \mathbf{a}_t$, na qual $\mathbf{K}(\mathbf{a}_t)$ designa a matriz de rigidez não-linear correspondente ao sólido.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \hat{\rho}_0 \mathbf{H} & \hat{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{a}}_t \\ \ddot{\mathbf{p}}_t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}}_t \\ \dot{\mathbf{p}}_t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{a}_t) & -\mathbf{H}^T \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_t \\ \mathbf{p}_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_t \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (233)$$

5.2.5 Resolução do sistema de equações do conjunto barragem-fundação-albufeira

5.2.5.1 Abordagem directa do sistema global de equações

O conjunto de deduções que possibilitou o estabelecimento da expressão (233) consistiu na harmonização, no âmbito do MEF, de duas formulações bastante distintas, a formulação em deslocamentos e a formulação em pressões, reconhecidas como adequadas para a modelação de meios sólidos e de meios fluidos, respectivamente.

A formulação em pressões representa uma estratégia muito económica para proceder à discretização de um domínio líquido, exigindo uma única incógnita (a pressão hidrodinâmica) por ponto nodal. No entanto, e como se pode observar da análise de (233), a associação desta formulação com a formulação em deslocamentos utilizada para o sólido acaba por determinar, para o conjunto sólido-líquido, um sistema de equações globalmente não-simétrico. Esta característica é, claramente, uma desvantagem que pode ser apontada à utilização da formulação de pressões na análise do comportamento sísmico do conjunto barragem-fundação-albufeira, embora deva igualmente ser realçada a elevada robustez algorítmica que lhe é inherente.

A resolução numérica do problema traduzido pela expressão (233), que condensadamente pode ser representado pelo sistema de equações não-lineares

$$\hat{\mathbf{M}} \ddot{\hat{\mathbf{a}}}_t + \hat{\mathbf{C}} \dot{\hat{\mathbf{a}}}_t + \hat{\mathbf{K}}(\hat{\mathbf{a}}_t) \hat{\mathbf{a}}_t = \hat{\mathbf{f}}_t \quad (234)$$

(em que

$$\hat{\mathbf{a}}_t = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_t \\ \mathbf{p}_t \end{Bmatrix} \quad \hat{\mathbf{f}}_t = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_t \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (235)$$

e $\hat{\mathbf{M}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ e $\hat{\mathbf{K}}(\hat{\mathbf{a}}_t)$ são matrizes de constituição evidente), pode ser efectuada mediante a consideração de uma discretização temporal. Adoptando por exemplo o método de Newmark, e estabelecendo a analogia da expressão (234) com (30), é intuitivo verificar que a solução pretendida pode ser determinada com base no método de Newton-Raphson apoiado num algoritmo preditor multicorrector, como descrito no Quadro 1 do Capítulo 2. Assim, a partir de (234) pode definir-se um vector de forças residuais

$$\hat{\Psi}_{t+\Delta t}^i = \hat{\mathbf{f}}_{t+\Delta t} - \hat{\mathbf{M}} \ddot{\hat{\mathbf{a}}}_{t+\Delta t}^i - \hat{\mathbf{C}} \dot{\hat{\mathbf{a}}}_{t+\Delta t}^i - \hat{\mathbf{K}}(\hat{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}^i) \hat{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}^i \quad (236)$$

aplicável aos domínios sólido e líquido na iteração i e instante $t + \Delta t$, pelo que a sequência de melhoramentos no vector $\Delta \hat{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} - \hat{\mathbf{a}}_t$ pode ser traduzida com base na fórmula recorrente

$$\Delta \hat{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}^{i+1} = \Delta \hat{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}^i - \left[\bar{\hat{\mathbf{K}}}_{t+\Delta t}^i \right]^{-1} \hat{\Psi}_{t+\Delta t}^i \quad (237)$$

As expressões (236-237) são, obviamente, um decalque das expressões (44) e (51), e permitem avançar da iteração i para a iteração $i+1$. O processo iterativo correspondente ao

instante $t + \Delta t$ é interrompido logo que a variação de $\Delta \hat{a}_{t+\Delta t}$ seja inferior a uma dada tolerância, prosseguindo-se então para o instante subsequente.

A definição da matriz de rigidez efectiva aplicável à situação presente, $\bar{\bar{K}}_{t+\Delta t}^i$, decorre da generalização das expressões (50) ou (52), consoante se recorra ao método de Newton-Raphson puro ou à variante que no sólido considera a matriz de rigidez elástica K_0 . Neste último caso ter-se-á

$$\bar{\bar{K}}_{t+\Delta t}^i = \bar{\bar{K}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} C + K_0 & -H^T \\ \frac{\hat{\rho}_0}{\beta \Delta t^2} H & \frac{1}{\beta \Delta t^2} \hat{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \hat{C} + \hat{K} \end{bmatrix} \quad (238)$$

A análise desta matriz permite constatar que, mediante a multiplicação por $-\beta \Delta t^2 / \hat{\rho}_0$ do conjunto de equações associadas às pressões nodais p_t , o sistema de equações resolventes, inicialmente não-simétrico, se converte em simétrico. Esta particularidade permite contornar a desvantagem inicial apontada ao sistema de equações (233), mas deve ser salientada a sua dependência da utilização do método implícito de Newmark, o que evidentemente condiciona a respectiva generalização. Além disso a referida simetrização introduz termos diagonais negativos na matriz $\bar{\bar{K}}$, sendo ainda de destacar a elevada largura de banda que lhe está associada e a coexistência de termos de ordem de grandeza distinta, características manifestamente indesejáveis do ponto de vista numérico.

Aos inconvenientes que acabam de ser enunciados sobrepõem-se ainda os que decorrem do facto de o código computacional correspondente à abordagem directa do problema equacionado em (233) obrigar a uma permanente vigilância sobre o tipo de variáveis (deslocamentos ou pressões hidrodinâmicas) a ser manipulado em cada fase do cálculo. Esta circunstância é responsável por alguma perda de eficiência computacional, agravada pelo facto de terem de ser duplicadas as rotinas correspondentes à determinação das matrizes e vectores elementares envolvidos na discretização dos dois domínios.

5.2.5.2 Resolução iterativa por blocos

Uma modalidade alternativa de resolução do sistema de equações (233), e que obvia à generalidade dos inconvenientes mencionados a propósito da abordagem directa que acaba de ser apresentada, consiste em lidar com as equações referentes ao sólido separadamente das relativas ao líquido, isto é:

$$M \ddot{a}_t + C \dot{a}_t + k(a_t) = f_t + H^T p_t \quad \Leftarrow \quad \text{Sólido} \quad (239a)$$

$$\hat{M} \ddot{p}_t + \hat{C} \dot{p}_t + \hat{K} p_t = -\hat{\rho}_0 H \ddot{a}_t \quad \Leftarrow \quad \text{Líquido} \quad (239b)$$

Esta estratégia possibilita a resolução separada dos sistemas de equações (239a) ou (239b), adoptando para cada um deles a metodologia considerada mais conveniente. Deste modo torna-se possível explorar da melhor forma as características de cada um dos sistemas de equações, nomeadamente as decorrentes da consideração de problemas de dimensão mais reduzida, com um único tipo de variáveis, que mobilizam larguras de banda substancialmente inferiores à necessária para a abordagem directa, como um todo, do sistema de equações (233).

Deve salientar-se que no contexto do comportamento sísmico de barragens a análise do domínio líquido não constitui o objectivo primordial, sendo apenas necessário proceder à respectiva modelação pelo facto de condicionar a resposta estrutural. Neste sentido, e uma vez que a interacção barragem-albufeira se processa unicamente através das fronteiras entre os dois domínios, seria perfeitamente justificável proceder à modelação do líquido com base numa formulação baseada em Integrais de Fronteira, mantendo no entanto a opção pelo MEF para o sólido. Em situações deste tipo ainda se torna mais evidente a conveniência de a abordagem de cada um dos domínios se processar de forma separada, adoptando algoritmos computacionais distintos, cada um deles vocacionado para a respectiva metodologia de discretização.

Existindo realmente interacção entre os dois sistemas de equações (239a) e (239b), consubstanciada nos termos dos segundos membros que envolvem a matriz H , em algumas fases da resolução do problema terá de proceder-se à troca de informação entre os dois conjuntos de equações, realizando a ‘comunicação’ entre os dois algoritmos de resolução. A adopção desta estratégia pressupõe, portanto, a existência de um terceiro algoritmo, de hierarquia superior, ao qual competirá a coordenação dos algoritmos que separadamente procedem à análise dos domínios sólido e líquido, gerindo igualmente a troca de informação entre eles. O procedimento é evidentemente de carácter iterativo, mesmo nas situações em que está ausente qualquer tipo de não-linearidade, pelo que as operações fundamentais que asseguram a obtenção da solução para um dado instante t podem ser sintetizadas no seguinte conjunto de passos:

- (i) Estabelece-se uma predição, por exemplo para as variáveis correspondentes ao fluido. Introduzindo então p_t como um ‘dado’ no segundo membro do sistema de equações (239a) correspondente ao sólido, a resolução deste último possibilita a determinação das variáveis a_t , \dot{a}_t e \ddot{a}_t .
- (ii) Introduzindo no sistema de equações (239b) as acelerações \ddot{a}_t entretanto calculadas, é possível proceder à determinação de p_t , \dot{p}_t e \ddot{p}_t . A consideração em (239a) do vector p_t recém calculado permite obter um novo conjunto de variáveis a_t , \dot{a}_t e \ddot{a}_t , que passará então a constituir uma aproximação melhorada relativamente à solução obtida em (i).
- (iii) A sequência de operações referida em (ii) pode ser repetida o número de vezes entendido como conveniente, terminando-se o processo iterativo quando a variação registada nas variáveis entre duas iterações consecutivas for inferior a uma tolerância pré-estabelecida.

O detalhe deste tipo de estratégia pode ser encontrado nas referências (4,20).

5.3. FORMULAÇÃO EM DESLOCAMENTOS ATRAVÉS DE UM SÓLIDO DEGENERADO

5.3.1 Considerações gerais

Uma alternativa bastante engenhosa para modelação de um líquido consiste em encará-lo como um sólido elástico degenerado, seleccionando convenientemente as propriedades E e ν por forma a ser obtido o comportamento típico da água. A vantagem principal da utilização deste artifício^{35,37} resulta do facto de a modelação do líquido poder ser realizada com base na mesma formulação utilizada para o sólido propriamente dito. Um algoritmo computacional pré-existente, desenvolvido para a análise de sólidos com recurso ao MEF e a uma formulação em deslocamentos, pode ser utilizado para o líquido sem necessidade de alterações, correspondendo este último, tão-somente, a um domínio ‘sólido’ com propriedades específicas.

Desta forma todo o esforço de programação indispensável para complementar aquele algoritmo com a formulação em pressões é evitado, obviando-se igualmente aos inconvenientes que foram apontados, particularmente os decorrentes da necessidade de lidar em simultâneo com variáveis de tipos distintos. O sistema de equações resultante é obviamente simétrico, desde que igualmente o seja a matriz de rigidez correspondente ao sólido.

Além disso, como no contexto da análise sísmica de barragens o comportamento do líquido não constitui o objectivo de estudo preferencial, é aceitável que a modelação deste último se processe com algumas simplificações, nomeadamente as que decorrem da utilização do artifício descrito.

5.3.2 Propriedades do sólido degenerado

A ideia base subjacente à modelação do líquido como um sólido elástico decorre da circunstância de, ao adoptar para este último um módulo de elasticidade transversal com o valor nulo, se assegurar a obtenção de um estado de tensão hidrostático, logo isento de tensões de corte. Esta situação caracteriza o comportamento de um líquido não-viscoso, pelo que dá cumprimento à hipótese (iii) referida no subcapítulo 5.1.

Complementarmente de (209-210) resulta que

$$P = -\hat{K}\varepsilon_v = -\hat{K}\nabla \cdot \mathbf{u} \quad (240)$$

facto que evidencia a dependência existente entre os campos de pressões e de deslocamentos, e permite fundamentar a possibilidade de a albufeira ser modelada com recurso ao MEF e a uma formulação em pequenos deslocamentos. A simulação da compressibilidade da água é então realizada com base na equação constitutiva (240), estabelecendo um valor apropriado para o respectivo módulo de rigidez volumétrico, \hat{K} , no presente trabalho tomado invariavelmente igual a 2.11 GPa.

É importante salientar que, pese embora toda a consistência teórica do tratamento de um líquido com um sólido degenerado, do ponto de vista numérico a consideração de um valor nulo para o correspondente módulo de elasticidade transversal, \hat{G} , conduz ao

anulamento de termos diagonais da matriz constitutiva elástica D_0 , a qual, como é sabido, pode ser escrita sob a forma

$$D_0 = \hat{K} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} + \hat{G} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} & [0] \\ [0] & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (241)$$

O resultado prático deste facto é o aparecimento de matrizes de rigidez singulares, circunstância que claramente evidencia a menor robustez algorítmica da presente formulação relativamente à estabelecida com base nas pressões. Existem no entanto algumas formas de contornar este inconveniente, sendo de destacar, desde já, que a especificação de valores pequenos (mas não nulos) para \hat{G} – conforme sugerem as referências (8,35) – permitiu resolver com sucesso a generalidade das situações suscitadas pelos ensaios de validação considerados na presente monografia, tendo sido obtidos resultados praticamente coincidentes com os correspondentes a soluções de referência.

Do que tem vindo a ser referido decorre que na modelação da albufeira como um ‘sólido’ elástico se procurará satisfazer, em simultâneo, as condições $\hat{G} = 0$ MPa e $\hat{K} = 2.11$ GPa, dispondo para o efeito da possibilidade de especificação das constantes elásticas E e ν do ‘sólido’.

Atentando nas relações de dependência existentes entre as entidades (\hat{G}, \hat{K}) e o módulo de Young e o coeficiente de Poisson

$$\hat{G} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \hat{K} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

facilmente se conclui que

$$\hat{G} = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \hat{K}$$

Constata-se, assim, que como \hat{K} constitui uma propriedade material, e além disso manifestamente não nula, a obtenção de valores pequenos para \hat{G} só poderá ser assegurada mediante a especificação de valores elevados para ν , isto é, deverá ser $\nu \rightarrow 0.5$. Como a consideração de $\nu=0.5$ não é aceitável do ponto de vista numérico, a imposição de $\hat{K} = 2.11$ GPa não pode ser assegurada sem que a condição $\hat{G} = 0$ MPa seja violada, sendo o grau da aproximação introduzida na modelação claramente dependente do valor especificado para o coeficiente de Poisson.

Assim, nas aplicações ter-se-á de aceitar um certo compromisso entre a satisfação da condição $\hat{G} = 0$ MPa (só possível mediante a imposição de $\nu=0.5$) e a robustez numérica (que obriga a que $\nu \neq 0.5$). Seleccionado um valor de ν , a relação $E = 3(1-2\nu)\hat{K}$ determina directamente o valor a especificar para o módulo de Young.

A título exemplificativo, a consideração de $E = 6.33$ MPa e $\nu = 0.4995$ conduz a $\hat{G} = 2.11$ MPa e $\hat{K} = 2.11$ GPa. Observe-se que embora a condição referente ao módulo de rigidez volumétrico seja adequadamente satisfeita, o módulo de elasticidade transversal é claramente distinto de zero. O substancialmente distinto conjunto de propriedades definido por $E = 0.0633$ MPa e $\nu = 0.499995$, que conduzindo ao mesmo \hat{K} será igualmente adoptado em algumas situações, não ocasionou variação sensível das soluções, apesar de corresponder a um módulo de elasticidade transversal $\hat{G} = 0.0211$ MPa, cujo valor é 100 vezes inferior ao anteriormente indicado. Desta forma se constata que uma aceitável simulação do comportamento da água não determina necessariamente a singularidade da matriz de rigidez.

As dificuldades a que é feita maior referência na bibliografia^{1,9,13} que recorre a este tipo de modelação relacionam-se com o aparecimento de modos de vibração de frequências muito baixas, envolvendo movimentos que afectam quase exclusivamente a parte líquida. Este peculiar comportamento é suscitado pela coexistência na matriz de rigidez de termos de ordem de grandeza muito distinta¹³, consoante se refiram aos domínios sólido ou líquido, sendo particularmente mais baixos neste último caso. No contexto de uma análise modal este facto tem como indesejável consequência o surgimento de um grande número de modos de vibração dizendo exclusivamente respeito ao reservatório, sem envolvimento de significativa participação da estrutura propriamente dita, o que não só obriga a maior esforço de cálculo, como ainda dificulta a selecção dos modos de vibração relevantes (procedendo ao seu ordenamento de acordo com o crescimento do valor da frequência, as correspondentes configurações manifestam-se muito antes do primeiro modo de vibração verdadeiramente mobilizador de deformações na barragem).

No contexto de uma integração directa das equações de equilíbrio dinâmico este inconveniente é menos evidente, dado que os modos de vibração que apenas mobilizam o reservatório não chegam a condicionar o comportamento da barragem. Além disso, ver-se-á oportunamente que estes modos de vibração podem ser filtrados, mediante a consideração da condição de fronteira referente às ondas de superfície, e ainda de uma técnica de penalização visando introduzir no sistema de equações a condição de irrotacionalidade do líquido preconizada no ponto (ii) do subcapítulo 5.1. Nas referências (11,12,18) é ainda proposta a consideração para o líquido de uma matriz de amortecimento proporcional à matriz de rigidez, contemplando coeficientes de amortecimento da ordem de 0.1%-1%, com o objectivo de suprimir as oscilações espúrias observadas no reservatório no contexto de análises numéricas em que se procedeu à modelação do fenómeno da cavitação.

Relativamente à determinação da matriz de massa para o líquido não há nenhuma alteração a registar, tendo sido utilizada a formulação consistente estabelecida para o sólido na expressão (26a), considerando para a água uma massa específica de 1020 Kg/m³.

5.3.3 Exemplo de validação: reservatório submetido a uma aceleração subitamente aplicada

Com o objectivo de ilustrar a aplicabilidade da técnica de modelação de um líquido como um sólido degenerado, seguidamente considerar-se-á o reservatório representado na Figura 26, que foi submetido a uma acção sísmica ideal, caracterizada por uma aceleração horizontal de 0.1g, aplicada de forma súbita e mantida constante ao longo do tempo.

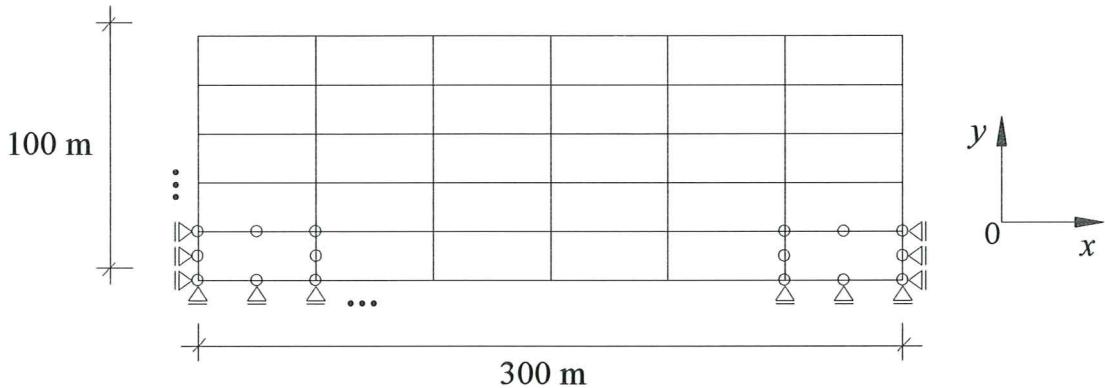


Figura 26 - Geometria e discretização do reservatório de água.

Na discretização foram utilizados 30 elementos finitos de 8 nós em estado plano de deformação, e o avanço no tempo processou-se com $\Delta t = 0.005\text{ s}$. O líquido foi simulado através das propriedades $E = 0.0633\text{ MPa}$, $\nu = 0.499995$ e $\hat{\rho}_0 = 1020\text{ Kg/m}^3$, e ao longo das paredes e fundo do reservatório foram previstos apoios consentindo unicamente deslocamentos tangenciais, conforme representado na Figura 26.

Designando por R_e e R_d as resultantes da pressão hidrostática e da pressão hidrodinâmica na parede esquerda do reservatório, na Figura 27 encontra-se registada a evolução temporal da relação R_d/R_e . Conforme pode ser constatado, e tendo em atenção a discretização utilizada, a solução correspondente à simulação do líquido como um sólido degenerado apresenta uma notável concordância com a solução analítica, determinada para este exemplo por Chopra *et al.*⁵. Este facto atesta a viabilidade da técnica numérica descrita, devendo ainda realçar-se que no exemplo analisado não foi observado nenhum tipo de problemas numéricos.

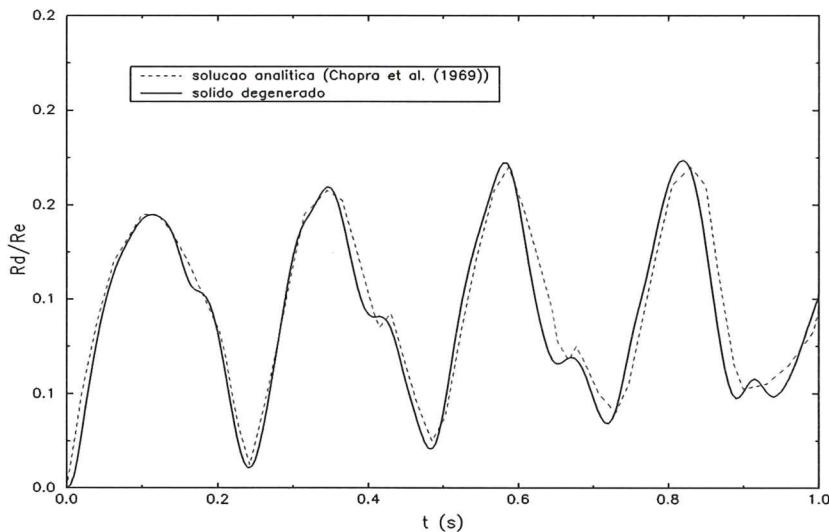


Figura 27 - Reacção horizontal na parede esquerda.

5.3.4 Condições de fronteira

As condições de fronteira referidas no parágrafo 5.2.2, no contexto da modelação de um líquido através de uma formulação em pressões, irão ser novamente retomadas, a fim de introduzir as alterações inerentes à presente formulação em deslocamentos.

5.3.4.1 Superfície livre

A possibilidade de no contorno Γ_{SL} da Figura 25 se formarem ondas de superfície foi contemplada mediante o estabelecimento da equação (220): $P = \hat{\rho}_0 g \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$. O efeito desta pressão P pode ser representado através da seguinte força distribuída por unidade de superfície

$$\mathbf{q} = -P \mathbf{n} = -\hat{\rho}_0 g (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} \quad (242)$$

De acordo com (29) a consideração desta acção distribuída \mathbf{q} na expressão de equilíbrio dinâmico (28) dá lugar, para cada elemento finito, à seguinte equação

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{a}}_e + \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{a}}_e + \mathbf{k}_e(\mathbf{a}_e) + \left[\hat{\rho}_0 g \int_{\Gamma_{SL_e}} \mathbf{N}^T \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{N} d\Gamma \right] \mathbf{a}_e = \mathbf{f}_e \quad (243)$$

na qual se torna evidente que o efeito das ondas de superfície pode ser simulado com base numa matriz de rigidez adicional, que tem por definição

$$\mathbf{K}_{OS_e} = \hat{\rho}_0 g \int_{\Gamma_{SL_e}} \mathbf{N}^T \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{N} d\Gamma \quad (244)$$

5.3.4.2 Superfície envolvendo uma condição de radiação

5.3.4.2.1 Considerações gerais

Dada a natureza da formulação em deslocamentos subjacente à modelação de um líquido como um sólido degenerado, considerando $\hat{G} \rightarrow 0$ a propagação de uma onda de pressão hidrodinâmica tende a ser numericamente reproduzida na sua verdadeira qualidade de onda dilatacional, para a qual foi estabelecida a condição de radiação perfeita (186a). Assim a condição de transparência no contorno Γ_r da Figura 25 pode ser simulada através dos amortecedores viscosos estabelecidos para o sólido com base nas matrizes constitutivas (189) ou (196), não sendo necessário, portanto, qualquer desenvolvimento específico para tratamento desta condição de fronteira. Quanto às ondas de corte, cuja existência no líquido, se bem que indesejada, se tem de supor inevitável (dado que nesta formulação se terá realmente $\hat{G} \neq 0$), as matrizes \mathbf{C}_{per}^r ou \mathbf{C}_{pon}^r assegurarão igualmente a sua dissipação por radiação, atendendo a que serão igualmente não nulos os termos diagonais correspondentes.

Conforme foi oportunamente referido, a condição de radiação perfeita subjacente à utilização da matriz constitutiva (189) fundamentou-se nas hipóteses simplificativas de as ondas se propagarem de forma plana e de apresentarem uma incidência normal à fronteira artificial. A fim de assegurar a máxima eficiência daquela condição de radiação, a localização da fronteira Γ_r deve ser convenientemente estabelecida por forma a que as condições de propagação e de incidência das ondas se aproximem das admitidas naquelas hipóteses. Este objectivo é usualmente assegurado afastando Γ_r do domínio próximo da

barragem, onde a interacção sólido-líquido determinará grandes perturbações na onda de pressão, particularmente no caso das barragens abóbada. Este domínio próximo (ou ‘nearfield’) corresponde à porção do meio líquido a ser discretizada com maior rigor, incumbindo-lhe estabelecer a transição para um domínio afastado (ou ‘farfield’), no qual deve ser localizada a fronteira artificial com condição de transparência.

Designando por H a profundidade máxima da albufeira e por L a distância a que a fronteira artificial deverá ser colocada da barragem, a experiência de alguns investigadores^{1,3,10,11,30} tem demonstrado a conveniência de se adoptarem para L valores da ordem de $2-3H$.

Idêntico tipo de recomendações deve ser seguido para a condição de radiação ponderada, expressa na matriz constitutiva (196).

5.3.4.2.2 Aplicação numérica

Com o objectivo de demonstrar a aplicabilidade a um líquido das condições de transparência definidas para um sólido a malha referente ao reservatório da Figura 26 é retomada, substituindo os apoios da parede direita por um conjunto de amortecedores correspondentes à condição de radiação ponderada descrita no Capítulo 4.

As propriedades materiais e os aspectos mais significativos relacionados com a modelação devem considerar-se inalterados relativamente aos definidos a propósito daquela figura, sendo apenas necessário assinalar a alteração da solicitação exterior, que agora consiste na imposição à parede esquerda do seguinte movimento horizontal:

$$u_x(t) = \sin(22.6 t) \quad \text{para } t > 0 \text{ s} \quad (\text{em m})$$

Este movimento prescrito destina-se a produzir a ressonância do modo de vibração fundamental do reservatório, cuja frequência pode ser aproximadamente avaliada de acordo com a expressão²⁵

$$f = \frac{\hat{c}}{4H} = \frac{1}{4H} \sqrt{\hat{K}/\hat{\rho}_0} \quad (\text{em Hz})$$

na qual H designa a profundidade máxima. Nas condições do exemplo analisado $H = 100 \text{ m}$, $\hat{K} = 2.11 \text{ GPa}$ e $\hat{\rho}_0 = 1020 \text{ Kg/m}^3$, o que conduz a $\omega = 2\pi f \cong 22.6 \text{ rad/s}$.

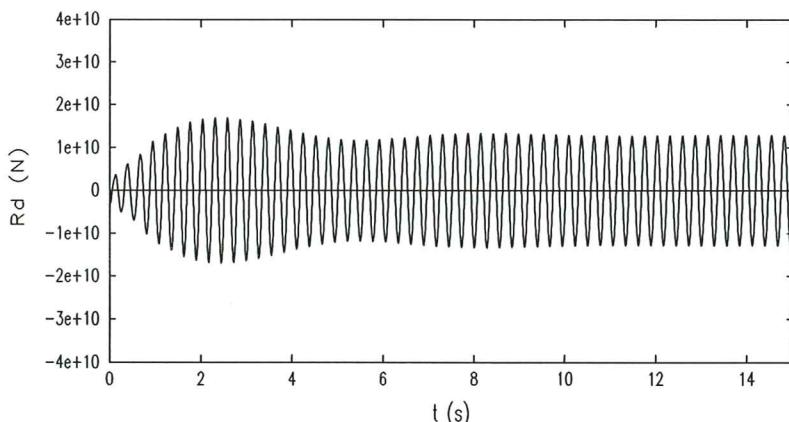


Figura 28 - Reacção hidrodinâmica na parede de um reservatório infinito.

Na Figura 28 pode observar-se a evolução temporal da resultante R_d da pressão hidrodinâmica exercida sobre a parede esquerda. Conforme pode ser constatado, depois de um regime transitório inicial sobreveio um regime permanente uniforme, caracterizado por uma oscilação enquadrada entre dois limites constantes e simétricos. Este comportamento revela que o fluxo de energia que entra no reservatório pela parede esquerda é igual ao fluxo que o abandona através da fronteira de radiação colocada à direita, evidenciando-se assim a correcta modelação da condição de transparência pretendida.

5.3.4.3 Superfícies envolvendo interacção com meios sólidos

5.3.4.3.1 Necessidade de um elemento de junta

A fim de nas fronteiras Γ_{uB} e Γ_{uV} poder ser assegurada uma correcta representação da interacção sólido-líquido, na respectiva interface deverá ser contemplada a possibilidade de se desenvolverem movimentos relativos tangenciais, garantindo no entanto uma perfeita compatibilidade de deslocamentos na direcção normal.

Estes requisitos, que são manifestamente consequência da utilização de uma formulação em deslocamentos para a modelação de um material, o líquido, cujo comportamento constitutivo é caracterizado por uma significativa rigidez volumétrica e por uma desprezável rigidez ao corte, podem ser satisfeitos mediante a disposição no referido contacto de um elemento de junta apropriado.

5.3.4.3.1.1 Matriz de rigidez do elemento de junta

Na Figura 29 encontra-se representado um elemento de interface do tipo pretendido, vocacionado para problemas 3D. Tomando em consideração que embora realmente distintos os nós i e i' daquele elemento se encontram de facto geometricamente coincidentes, as coordenadas de um ponto genérico da interface podem ser determinadas de acordo com a interpolação

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{nnf} \tilde{N}_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_i \quad (245)$$

Nesta expressão nnf designa o número de nós de cada face do elemento (o número global de nós do elemento é $2 \times nnf$) e $\tilde{N}_i(\xi, \eta)$ corresponde ao conjunto de funções de forma usuais em problemas planos.

Para além do sistema de coordenadas naturais (ξ, η) , na Figura 29 está igualmente representado, para um dado ponto de amostragem, um referencial ortonormado de versores (s, t, n) , definindo n a direcção perpendicular ao elemento no ponto considerado. Designando por \tilde{a}_i e $\tilde{a}'_{i'}$ os deslocamentos que

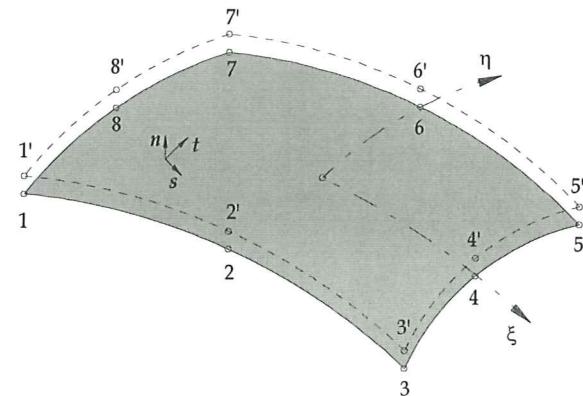


Figura 29 - Elemento 3D de interface.

expressam a deformada em cada nó i e no nó i' associado, o vector correspondente ao deslocamento relativo Δ das duas faces do elemento naquele ponto de amostragem é então (no referencial (s, t, n)):

$$\Delta = \begin{bmatrix} s^T \\ t^T \\ n^T \end{bmatrix} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n_{mf}} \check{N}_i (\check{a}'_{i'} - \check{a}_i) \right] \quad (246)$$

Definindo uma matriz \check{N} e dois vectores \check{a} e \check{a}' contendo ordenadamente as contribuições das funções de forma \check{N}_i e dos vectores \check{a}_i e $\check{a}'_{i'}$, é possível exprimir (246) de forma mais compacta

$$\Delta = \begin{bmatrix} s^T \\ t^T \\ n^T \end{bmatrix} \cdot \check{N} \cdot (\check{a}' - \check{a}) \quad (247)$$

Em sentido generalizado este vector Δ passará a ser designado por ‘deformação’, podendo ser traduzido de acordo com a expressão

$$\Delta = \check{B} \cdot (\check{a}' - \check{a}) \quad (248)$$

na qual está envolvida uma matriz de deformação, \check{B} , definida como

$$\check{B} = \begin{bmatrix} s^T \\ t^T \\ n^T \end{bmatrix} \cdot \check{N} \quad (249)$$

Associado àquela deformação, e mediante uma relação constitutiva adequada, no mesmo referencial local pode definir-se um vector de forças F , que irá ser designado por ‘tensão’. Atendendo às características que se pretendem atribuir ao elemento de junta, a referida matriz constitutiva (linear e elástica) terá a seguinte composição

$$D_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E^\dagger \end{bmatrix} \quad (250)$$

responsável pela ocorrência de tensões nulas na direcção tangencial, mas estabelecendo uma forte ligação na direcção normal, através de um elevado módulo de contacto E^\dagger .

Uma vez que

$$F = D_J \cdot \Delta = D_J \cdot \check{B} \cdot (\check{a}' - \check{a}) \quad (251)$$

a determinação explícita da matriz de rigidez do elemento de junta, K_{J_e} , decorre da consideração do termo

$$\int_{\Gamma_{u_e}} \Delta^{*T} F d\Gamma \quad (252)$$

na expressão geral do PTV, no qual está envolvida a deformação virtual Δ^* e se admite que $\Gamma_{u_e} = (\Gamma_{uB} \cup \Gamma_{uV})_e$.

Agrupando os deslocamentos nodais do elemento de junta num único vector \mathbf{a}_e tal que $\mathbf{a}_e = \{\bar{\mathbf{a}}' \quad \bar{\mathbf{a}}\}^T$, e definindo simultaneamente as matrizes

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{N}} & -\bar{\mathbf{N}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}} & -\bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \quad (253)$$

as expressões (248) e (251) podem assumir um aspecto mais usual:

$$\Delta = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_e \quad \mathbf{F} = \mathbf{D}_J \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_e \quad (254)$$

De acordo com raciocínios já familiares, a consideração na expressão geral do PTV do termo definido em (252) conduz à seguinte definição para a matriz de rigidez do elemento de junta

$$\mathbf{K}_{J_e} = \int_{\Gamma_{u_e}} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_J \mathbf{B} d\Gamma \quad (255)$$

Atendendo à estrutura das matrizes \mathbf{N} e \mathbf{B} apresentadas em (253) a matriz de rigidez do elemento de interface tem a seguinte composição

$$\mathbf{K}_{J_e} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{J_e} & -\bar{\mathbf{K}}_{J_e} \\ -\bar{\mathbf{K}}_{J_e} & \bar{\mathbf{K}}_{J_e} \end{bmatrix} \quad (256)$$

em que

$$\bar{\mathbf{K}}_{J_e} = \int_{\Gamma_{u_e}} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D}_J \bar{\mathbf{B}} d\Gamma = \int_{\Gamma_{u_e}} \bar{\mathbf{N}}^T [\mathbf{s} \ \mathbf{t} \ \mathbf{n}] \mathbf{D}_J \begin{bmatrix} \mathbf{s}^T \\ \mathbf{t}^T \\ \mathbf{n}^T \end{bmatrix} \bar{\mathbf{N}} d\Gamma \quad (257)$$

Esta circunstância permite que na determinação de \mathbf{K}_{J_e} possa ser economizado algum esforço computacional.

Por sua vez a existência de um único termo não nulo na matriz \mathbf{D}_J torna redundante a consideração em (257) dos versores \mathbf{s} e \mathbf{t} , podendo então simplificar-se aquela expressão:

$$\bar{\mathbf{K}}_{J_e} = E^\dagger \int_{\Gamma_{u_e}} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{n} \ \mathbf{n}^T \bar{\mathbf{N}} d\Gamma \quad (258)$$

5.3.4.3.1.2 Considerações sobre a utilização do elemento de junta

- Penalização associada a E^\dagger

Um aspecto que importa salientar, e que se relaciona com a utilização do elemento de interface descrito, resulta do facto de na expressão (258) E^\dagger se encontrar fora do integral indicado, o que permite que a matriz de rigidez da junta possa ser traduzida na forma

$$\mathbf{K}_{J_e} = E^\dagger \mathbf{K}_{J_e} \quad (259)$$

sendo \mathbf{K}_{J_e} uma matriz de constituição evidente. Sendo assim, num problema estático linear a associação das matrizes de rigidez dos elementos de junta às matrizes de rigidez dos demais elementos finitos (sólidos ou líquidos) acaba por conduzir à seguinte equação global:

$$[\mathbf{K}_0 + E^\dagger \mathbf{K}_J] \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (260)$$

Conforme se pode constatar, dado o elevado valor que convirá atribuir a E^\dagger (a fim de assegurar a compatibilidade de deslocamentos do sólido e do líquido na direcção normal à respectiva interface), de um ponto de vista numérico a utilização do elemento de junta descrito é comparável à aplicação de uma técnica de penalização³⁴. Consequentemente, e para determinadas direcções nodais, o aumento de E^\dagger pode então conduzir à dominância de \mathbf{K}_J na matriz de rigidez global, efeito que obviamente tem de ser vigiado, sob pena de conduzir a um típico efeito de bloqueamento (ou ‘locking’), de consequências indesejáveis.

- *Integração numérica*

No decurso de aplicações computacionais para validação do elemento de interface constatou-se que o desempenho da junta foi melhorado quando, em substituição da usual regra de colocação de Gauss-Legendre, a integração numérica inerente à expressão (258) foi efectuada com base no esquema de colocação de Lobatto.

Como é facilmente reconhecível, em geral a regra de Gauss-Legendre determina para a interface uma matriz de rigidez não diagonal, responsável pela interdependência dos deslocamentos associados a distintos pares de nós $i - i'$. Este facto torna-se inconveniente quando conjugado com a especificação de elevados valores para E^\dagger que caracteriza a técnica de penalização descrita, acentuando o efeito de bloqueamento da matriz de rigidez. Nas aplicações envolvendo barragens abóbada, caracterizadas por significativas curvaturas no interior de cada elemento de interface, a variação do versor \mathbf{n} entre dois pontos de integração pode ser importante, acabando a junta por revelar uma certa dificuldade em satisfazer os requisitos para que foi desenvolvida simultaneamente em todos os pontos de integração.

Com a regra de Lobatto o funcionamento de cada par de nós $i - i'$ torna-se independente dos demais pares de nós do elemento de junta, uma vez que a coincidência dos pontos de integração com os pontos nodais permite explorar as características de ortogonalidade do respectivo conjunto de funções de forma. Esta circunstância atenua os problemas referidos, por retirar sentido àquela exigência de simultaneidade, tornando o elemento de junta assimilável a um conjunto de barras biarticuladas independentes, dispostas na direcção normal em cada par de nós $i - i'$.

O resultado prático desta constatação é que a ordem de grandeza da rigidez axial de cada uma destas bielas é a mesma de E^\dagger , ficando as diferenças a dever-se unicamente aos pesos determinados pelo esquema de colocação de Lobatto. Dado ser de 10^{11} N/m o valor seleccionado para E^\dagger na generalidade das aplicações que irão ser apresentadas, as diferenças referidas não têm realmente expressão do ponto de vista prático. Assim, atendendo a que nos pontos de integração inerentes ao esquema de colocação de Lobatto as funções de forma assumem valores 0 ou 1, desprezando as diferenças decorrentes da contribuição dos pesos de integração (que podem então tomar-se iguais a 1) resultaria a seguinte definição para $\check{\mathbf{K}}_{J_e}$, alternativa a (258):

$$\check{\mathbf{K}}_{J_e} = E^\dagger \begin{bmatrix} [\mathbf{n} \mathbf{n}^T]_{i=1} & [0] & \cdots & [0] \\ [0] & [\mathbf{n} \mathbf{n}^T]_{i=2} & & \\ \vdots & & & \vdots \\ [0] & \cdots & & [\mathbf{n} \mathbf{n}^T]_{i=mf} \end{bmatrix} \quad (261)$$

Esta é a matriz de rigidez que acabou por ser adoptada para a junta, sendo do mesmo tipo da preconizada nas referências (8,13,21).

5.3.4.3.1.3 Aplicação numérica: problema estático

- *Validação*

O funcionamento da junta definida com base na expressão (261) vai poder ser apreciado através de uma aplicação, na qual se procede à análise da barragem do Alto Lindoso sob a acção do impulso hidrostático. Para o efeito o betão será idealizado sem massa, com comportamento linear e elástico, traduzido pelas propriedades $E = 30$ GPa e $\nu = 0.2$. A estrutura propriamente dita, do tipo abóbada, foi analisada admitindo a existência de um plano de simetria, tendo sido considerados 22 elementos 3D de 20 nós na discretização da correspondente metade direita (ver Figura 30).

O efeito do impulso hidrostático foi simulado comunicando uma aceleração gravítica vertical, de valor $g = 9.81$ m/s², a um reservatório discretizado com 66 elementos finitos do mesmo tipo dos considerados para a abóbada, recorrendo ao artifício que envolve a idealização de um líquido como um sólido degenerado. As propriedades elásticas correspondentes foram $E = 6.33$ MPa e $\nu = 0.4995$. No contacto barragem-albufeira foram interpostos 22 elementos de junta do tipo descrito, admitindo $E^* = 10^{11}$ N/m. A fundação foi considerada infinitamente rígida.

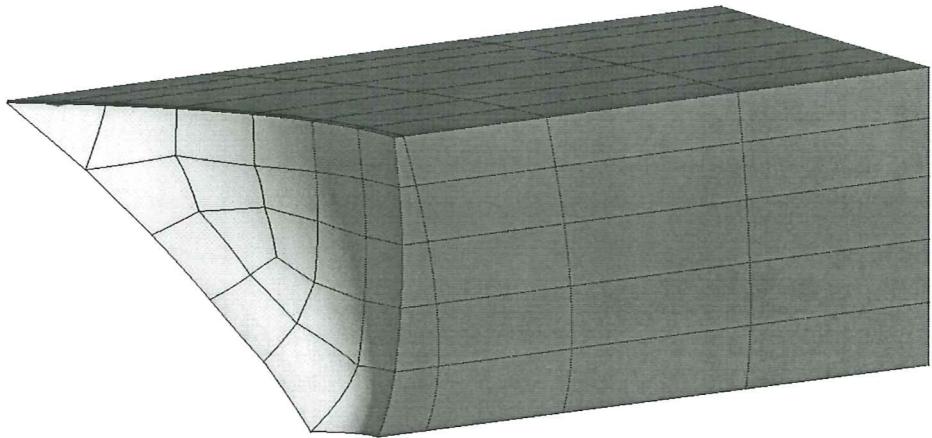


Figura 30 - Barragem do Alto Lindoso: malha referente a metade da abóbada e do reservatório.

Na ligação da abóbada à fundação foram restringidos todos os deslocamentos. Em relação ao reservatório, no plano horizontal inferior e na fronteira artificial foram impedidos os deslocamentos com direcção normal àqueles planos; no plano inclinado, ao longo do qual se realiza o contacto líquido-fundação, foi unicamente permitido o deslocamento na direcção montante-jusante.

A fim de constituir uma solução de referência que permitisse avaliar o funcionamento do elemento de junta e da interacção sólido-líquido, um outro cálculo foi realizado, no qual o efeito do impulso hidrostático foi directamente simulado da forma usual, através de uma pressão aplicada sobre o paramento de montante e apresentando uma

distribuição linearmente crescente com a profundidade. Nesta situação foram exclusivamente utilizados os 22 elementos correspondentes à abóbada. Em qualquer das análises o reservatório foi suposto com a superfície livre à cota máxima do coroamento da barragem.

Tal como pode ser observado na Figura 31, na qual se procede à representação da deformada da consola central para as duas simulações do impulso da água que foram referidas, a solução envolvendo elementos de junta e de sólido degenerado não se distingue da solução de referência, associada à modelação do efeito hidrostático através de uma pressão com distribuição linear. Esta constatação permite validar o elemento de interface, e bem assim a própria formulação em deslocamentos considerada para a albufeira.

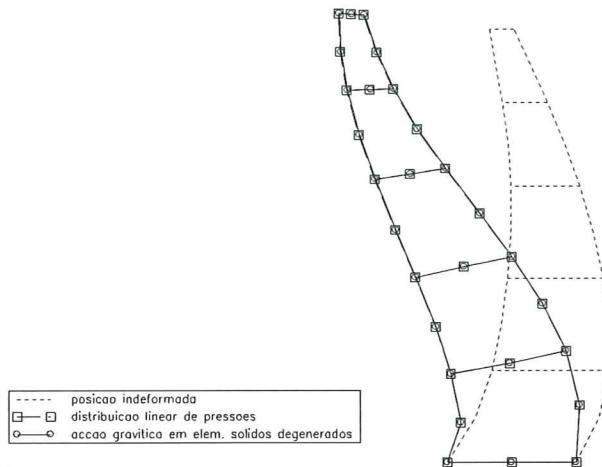
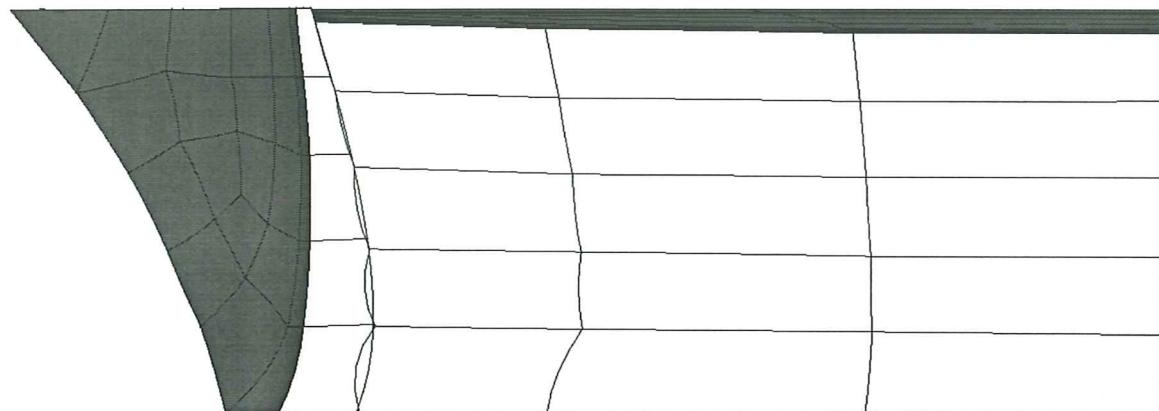


Figura 31 - Deformação da consola central sob o impulso hidrostático.

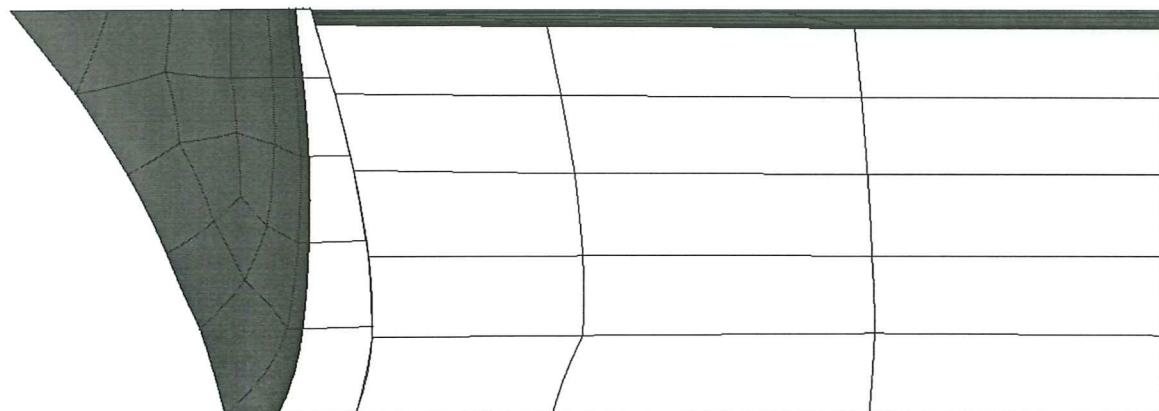
• *Influência do valor de E^\dagger*

A fim de determinar a influência do valor de E^\dagger no comportamento do elemento de junta, o exemplo que acaba de ser referido (envolvendo 22+66 elementos 3D de 20 nós e 22 elementos de junta), e cuja deformada se encontra igualmente representada na Figura 32b, foi reanalizado adoptando para aquela propriedade os seguintes valores: 10^{10} N/m (Figura 32a), 10^{12} N/m (Figura 32c) e 10^{13} N/m (Figura 32d).

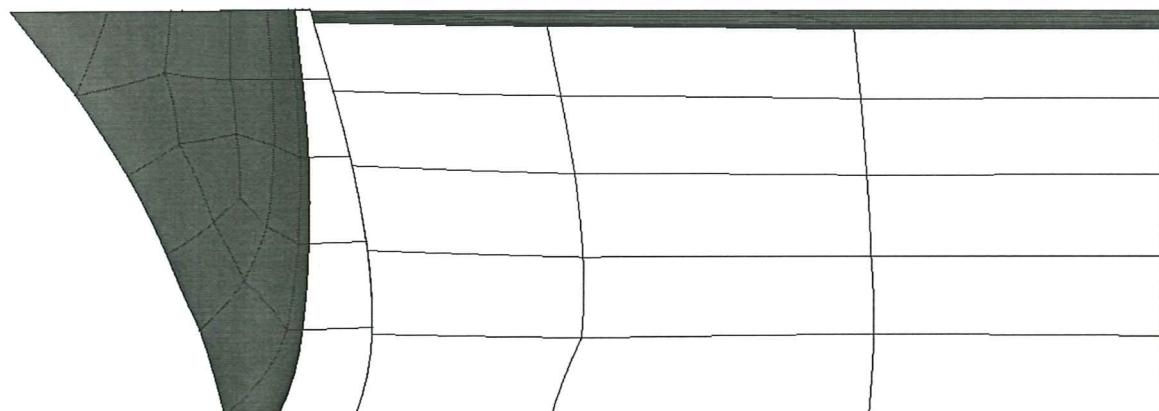
Concentrando a atenção nos deslocamentos relativos ao longo da interface barragem-albufeira, pode verificar-se que o valor de $E^\dagger = 10^{10}$ N/m é insuficiente para assegurar a compatibilização pretendida na direcção normal à junta, favorecendo o avanço da água sobre o betão. No extremo oposto $E^\dagger = 10^{13}$ N/m determina a ocorrência de compatibilidade na direcção normal àquele contacto, mas em contrapartida tornam-se evidentes os problemas numéricos decorrentes do surgimento na matriz de rigidez de números com ordem de grandeza muito distinta (ver Figura 32d): o líquido exibe tendência para ficar excessivamente ligado ao paramento de betão, facto que conduz à perda de horizontalidade da superfície livre, e é igualmente denunciado pela insuficiência de deslocamentos relativos que ocorre na direcção tangencial à junta.



$$a) E^\uparrow = 10^{10} \text{ N/m}$$

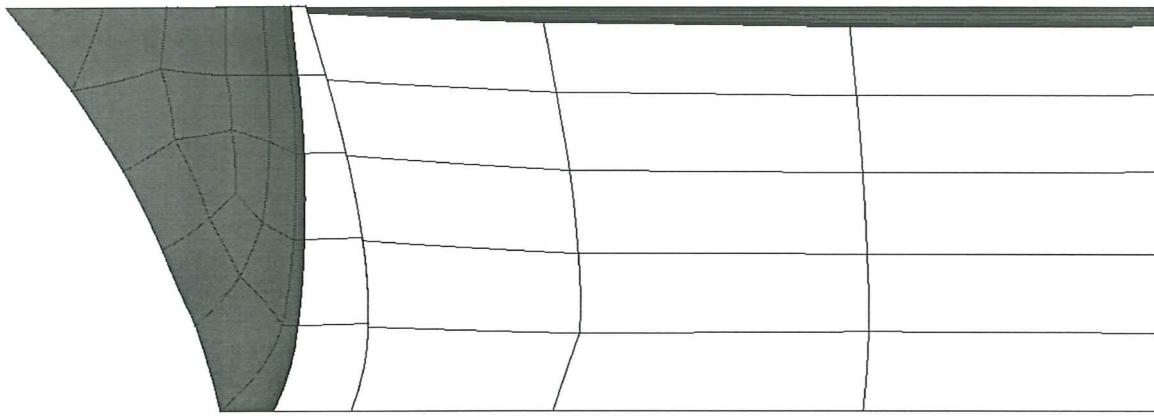


$$b) E^\uparrow = 10^{11} \text{ N/m}$$



$$c) E^\uparrow = 10^{12} \text{ N/m}$$

Figura 32 - Comportamento do elemento de junta em cálculo estático
(factor de ampliação: 150).



$$d) E^t = 10^{13} \text{ N/m}$$

Figura 32 (cont.) - Comportamento do elemento de junta em cálculo estático
(factor de ampliação: 150).

Da análise das Figuras 32b,c conclui-se que um adequado funcionamento da junta e da modelação do líquido pode ser obtido com valores intermédios de E^t , observando-se o melhor comportamento para $E^t = 10^{11} \text{ N/m}$ (Figura 32b): a superfície livre e os leitos que horizontalmente separam os elementos de líquido permanecem horizontais apóis deformação, registando-se igualmente o bom desempenho da junta, que permite o livre movimento relativo de nós homólogos na direcção tangencial.

Ao valor de 10^{11} N/m considerado para a propriedade E^t da junta correspondem as seguintes relações

$$E^t/E_B = 3.3 \quad E^t/\hat{G} = 47393.3 \quad E^t/\hat{K} = 47.4 \text{ (m)}$$

estabelecidas em função do módulo de Young do betão da barragem, E_B , e dos módulos \hat{G} e \hat{K} do líquido.

5.3.4.3.1.4 Aplicação numérica: problema dinâmico

- Influência do valor de E^t

Com o intuito de apreciar o funcionamento do elemento de junta numa análise dinâmica, a barragem e o reservatório da Figura 30 foram submetidos à acção do sismo de referência representado na Figura 33, caracterizado por uma aceleração de pico de 1g. O comportamento constitutivo permanece linear e elástico, havendo a salientar o facto de o betão ser agora suposto com $\rho = 2400 \text{ Kg/m}^3$. Uma matriz de amortecimento do tipo $C = b K_0$ foi estabelecida para a superestrutura, e constituída por forma a determinar um coeficiente de amortecimento de 2% na frequência do modo de vibração fundamental da barragem (correspondente à hipótese de albufeira cheia). A integração foi conduzida com o método α de Hilber-Hughes-Taylor (com $\alpha = -1/3$), adoptando $\Delta t = 0.01 \text{ s}$. A fronteira vertical do reservatório foi dotada de uma condição de transparência, modelada através de 22 elementos de contorno correspondentes à condição de radiação ponderada.

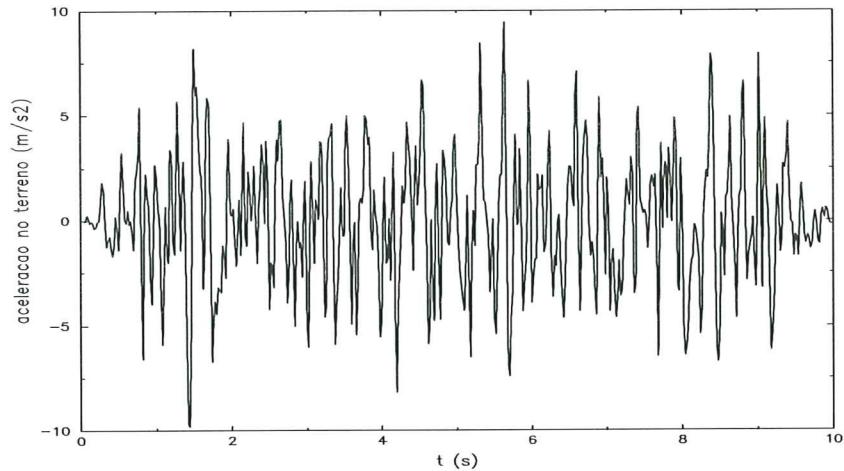


Figura 33 - Sismo 1g.

Cada análise é iniciada com um cálculo estático, para aplicação da acção gravítica, seguido do cálculo dinâmico propriamente dito. Os apoios existentes na fase estática em correspondência com a fronteira de radiação são suprimidos na fase dinâmica.

Assim, e para os diferentes valores de E^\dagger considerados na Figura 32, a Figura 34 permite acompanhar a evolução do deslocamento relativo montante-jusante do coroamento da barragem (no fecho). O deslocamento não nulo registado para $t=0\text{s}$ corresponde à influência da acção gravítica no cálculo estático inicial.

Conforme decorre da análise da Figura 34, a hipótese $E^\dagger=10^{10}\text{ N/m}$ determina uma resposta que se afasta significativamente da evidenciada para valores mais elevados de E^\dagger . O período de vibração é, naquele caso, manifestamente superior, aparecendo associado a uma importante redução da amplitude do movimento. Como se concluiu a propósito da Figura 32, o mau desempenho da junta associado a $E^\dagger=10^{10}\text{ N/m}$ aconselhou a utilização de valores de E^\dagger na ordem de 10^{11} N/m – 10^{12} N/m , que conduzem, no presente cálculo dinâmico, a respostas bastante próximas entre si.

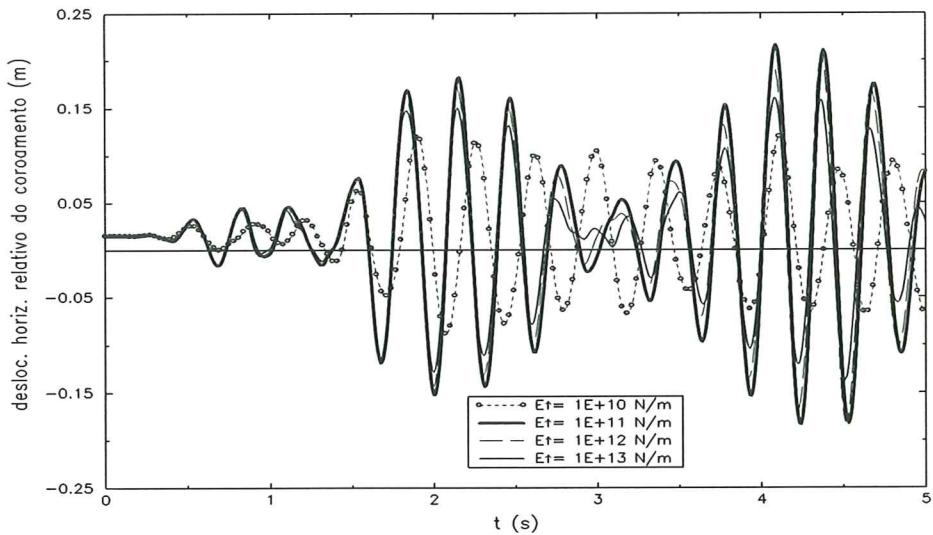


Figura 34 - Comportamento do elemento de junta em cálculo dinâmico.

Para $E^\dagger = 10^{13} \text{ N/m}$ já são visíveis as consequências do deficiente funcionamento da junta, realçando-se o facto de a modificação que se observa quando se passa de $E^\dagger = 10^{12} \text{ N/m}$ para $E^\dagger = 10^{13} \text{ N/m}$ ser bastante superior à que ocorre quando se muda de $E^\dagger = 10^{12} \text{ N/m}$ para $E^\dagger = 10^{11} \text{ N/m}$.

Da análise destes resultados conclui-se ser mais aconselhável, para o presente exemplo, a utilização de $10^{11} \text{ N/m} \leq E^\dagger \leq 10^{12} \text{ N/m}$, a que correspondem as seguintes relações:

$$3.3 \leq E^\dagger/E_B \leq 33 \quad 47393.3 \leq E^\dagger/\hat{G} \leq 473933 \quad 47.4 \leq E^\dagger/\hat{K} \leq 474 \text{ (m)}$$

• Influência da modelação do líquido

Tendo sido detectados problemas numéricos no decurso da análise do funcionamento da junta, o receio de que aqueles pudessem ser agravados pela modelação artificiosa do líquido como um sólido degenerado levou a que se procedesse à avaliação das repercussões na resposta estrutural decorrentes da modificação do módulo \hat{G} da água. Assim, e prosseguindo com a barragem do Alto Lindoso, na Figura 35 encontram-se representadas duas variantes à aplicação da Figura 34 correspondente a $E^\dagger = 10^{11} \text{ N/m}$, consistindo na consideração para o líquido dos dois seguintes conjuntos de propriedades elásticas (ambos determinando o mesmo $\hat{K} = 2.11 \text{ GPa}$):

$$(i) \quad E = 0.0633 \text{ MPa} \quad v = 0.499995 \quad (\hat{G} = 0.0211 \text{ MPa})$$

$$(ii) \quad E = 6.33 \text{ MPa} \quad v = 0.4995 \quad (\hat{G} = 2.11 \text{ MPa})$$

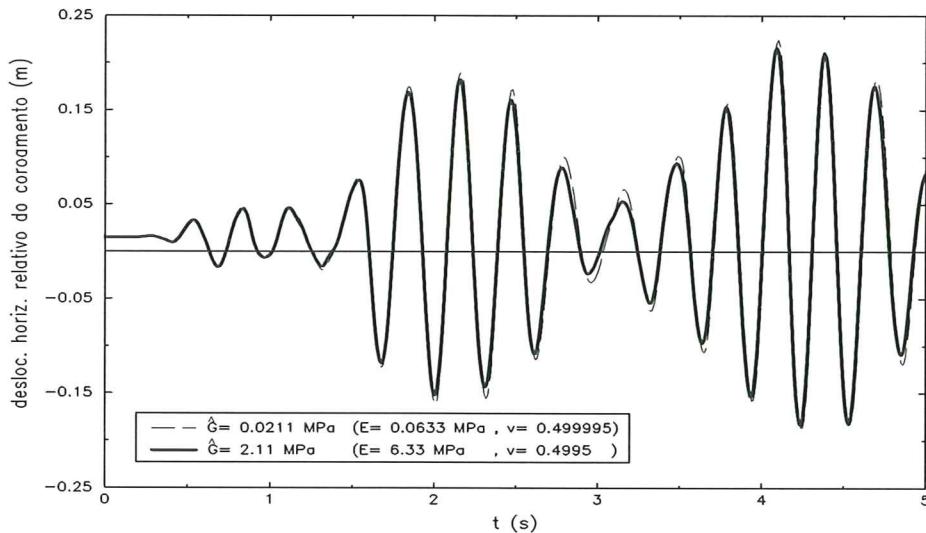


Figura 35 - Efeito da modificação de \hat{G} (para $E^\dagger = 10^{11} \text{ N/m}$).

Conforme é observável, as diferenças que podem ser detectadas ao nível do deslocamento relativo horizontal do coroamento da barragem (no fecho) são diminutas, não tendo grande significado sobretudo quando comparadas com as que foram notadas aquando da modificação da propriedade E^\dagger da junta. Esta constatação faz supor que a perda de robustez algorítmica observada na Figura 34 quando se simulou a albufeira através de

uma formulação em deslocamentos foi fundamentalmente determinada pela inapropriada utilização do elemento de interface sólido-líquido, e não pelo recurso em si mesmo ao artifício de modelação da água como um sólido degenerado.

5.3.4.3.2 Absorção de energia no fundo do reservatório

5.3.4.3.2.1 Considerações gerais

Ensaios laboratoriais realizados por Hatano²² suscitarão a discussão sobre a eventualidade de no contacto da albufeira com o maciço de fundação (fronteira Γ_{uV} da Figura 25) se desenvolverem mecanismos de dissipação de energia, devidos a uma absorção parcial da onda de pressão hidrodinâmica na camada de aluvões e sedimentos depositada no fundo do reservatório.

No decurso daqueles ensaios, um tanque com dimensões em planta de $4.8\text{ m} \times 0.1\text{ m}$ foi cheio com água até ser realizada uma profundidade de 1.5 m. Num dos topo do tanque, no qual poderia ser idealizado o paramento de uma barragem, um pistão produzia a excitação harmónica da água e registava a correspondente pressão hidrodinâmica. Comparando os resultados referentes à situação em que o fundo do reservatório se encontrava isento de qualquer material absorvente com os obtidos quando a base do tanque foi revestida de uma camada de areia, uma drástica redução da pressão hidrodinâmica foi detectada no segundo caso, resultado explicado pelo facto de nesta situação ter sido introduzido um mecanismo de amortecimento adicional na base do tanque, o qual seria responsável por importante dissipação energética.

A ser válida esta interpretação, também na situação real de contacto de uma albufeira com o maciço de fundação é de esperar a ocorrência de mecanismos de amortecimento da onda de pressão hidrodinâmica, uma vez que aí se depositam sedimentos, constituindo uma camada aluvionar muito mole.

Procedendo a uma análise numérica aprofundada dos efeitos sobre o comportamento de barragens gravidade da modelação deste amortecimento ‘por absorção’ (por vezes também dito ‘por refracção’), Chopra e seus colaboradores^{7,14,15,16,17,19} têm precisado as condições em que a resposta estrutural é afectada de forma sensível, consoante se considere ou não aquele mecanismo de dissipação.

De entre as suas conclusões mais relevantes salienta-se a que resulta de ter sido observado um notável incremento do efeito hidrodinâmico quando, sob a acção de um sismo com direcção de actuação vertical, o amortecimento por absorção foi considerado inexistente. Nesta situação o amortecimento por radiação na fronteira Γ_r da Figura 25 está quase inactivo, em virtude de a onda de pressão não apresentar propagação na direcção montante-jusante¹⁴, e portanto o domínio líquido não dispõe de qualquer mecanismo de dissipação significativo. Procedendo a uma análise no domínio da frequência, picos ilimitados para a força hidrodinâmica são então obtidos em ressonância com os modos de vibração da albufeira, o que conduz a uma significativa sobreestimação do efeito da componente vertical da acção sísmica⁷.

Procedendo à modelação numérica do amortecimento por absorção, uma notória (e por vezes drástica) suavização daqueles picos foi obtida, resultando então uma substancial atenuação da resposta estrutural.

5.3.4.3.2.2 Modelação numérica

Dado o desconhecimento das reais condições sob as quais a energia associada à propagação da onda de pressão hidrodinâmica é parcialmente absorvida ou dissipada no fundo do reservatório, é usual que esta modalidade de amortecimento seja simulada de forma simplificada.

Um coeficiente de reflexão de onda, $\hat{\alpha}$, definido como a relação entre a amplitude da onda de pressão hidrodinâmica reflectida, A_R , e a amplitude da onda de pressão perpendicularmente incidente ao fundo do reservatório, A_I ,

$$\hat{\alpha} = A_R / A_I \quad (262)$$

torna-se um conceito precioso, em redor do qual se fundamentam os passos essenciais em que se apoia a modelação numérica daquela condição de fronteira. O coeficiente $\hat{\alpha}$ pode assumir valores no intervalo $[-1,1]$, sendo particularmente importantes as situações correspondentes a $\hat{\alpha}=1$, que pressupõe a reflexão total da onda incidente, e a $\hat{\alpha}=0$, relacionada com a possibilidade de a onda incidente ser completamente absorvida na camada aluvionar. Conforme muito incisivamente salientado na referência (16), o valor de $\hat{\alpha}$ não deve ser seleccionado em função das propriedades da rocha de fundação propriamente dita, mas antes das características do material que reveste superficialmente o respectivo maciço, no qual depósitos aluvionares se associam a uma camada externa de rocha mais branda, alterada por meteorização. Além disso o coeficiente de reflexão deverá ser encarado em termos médios, porquanto a camada na qual se processa a absorção apresenta espessura variável ao longo do vale, tendendo a aumentar com a antiguidade do reservatório. No Quadro 3 pode encontrar-se a indicação de alguns valores típicos de $\hat{\alpha}$, sendo de destacar que com $0.7 \leq \hat{\alpha} \leq 0.9$ se cobrem as situações de maior interesse prático na análise sísmica de barragens.

Do ponto de vista da correspondente modelação numérica o amortecimento por absorção pode ser simulado a partir das ferramentas desenvolvidas no Capítulo 4 para o amortecimento por radiação. Retomando as considerações então efectuadas, a lei do movimento u_x associado à propagação de uma onda elástica de pressão hidrodinâmica numa dada direcção $0x$ é da forma

$$u_x = f(x - \hat{c}t) + g(x + \hat{c}t) \quad (263)$$

Quadro 3 - Valores típicos de $\hat{\alpha}$ (da referência (1)).

Tipo de camada de absorção	Condição	$\hat{\alpha}$
Infinitamente rígida	Reflexão total	1
Rígida	Absorção parcial	0.6–0.8
Branda	Absorção parcial	0.5
Água	Radiação	0
Ar	Reflexão negativa	-1
Fundo de reservatórios recentes	Absorção parcial	0.9
Fundo de reservatórios antigos	Absorção parcial	0.7–0.9

Designando por $f(x - \hat{c}t)$ a componente de onda que incide perpendicularmente à fronteira Γ_{uV} e por $g(x + \hat{c}t)$ a componente gerada por reflexão que se propaga em sentido oposto, a seguinte relação é aplicável (atendendo à definição de $\hat{\alpha}$):

$$g = -\hat{\alpha} f \quad (264)$$

Procedendo à derivação de u_x conclui-se que

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \quad \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial t} \quad (265)$$

Da natureza dos argumentos de f e g resulta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{\hat{c}} \frac{\partial f}{\partial t} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\hat{c}} \frac{\partial g}{\partial t} \quad (266)$$

e além disso de (264) conclui-se que

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\hat{\alpha} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (267)$$

As expressões (265) podem assim ser simplificadas, resultando:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{(1+\hat{\alpha})}{\hat{c}} \frac{\partial f}{\partial t} \quad \frac{\partial u_x}{\partial t} = (1-\hat{\alpha}) \frac{\partial f}{\partial t} \quad (268)$$

Eliminando $\partial f / \partial t$ a seguinte relação é finalmente obtida:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(\frac{1+\hat{\alpha}}{1-\hat{\alpha}} \right) \frac{1}{\hat{c}} \frac{\partial u_x}{\partial t} = 0 \quad (269)$$

Observe-se que dada a natureza unidimensional do problema em análise se tem obviamente que

$$\varepsilon_v = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (270)$$

e

$$\sigma_x = -P = \hat{K} \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (271)$$

Assim, procedendo à multiplicação da equação (269) por \hat{K} , e tendo ainda presente a definição considerada para \hat{c} em (214), resultaria

$$\sigma_x + \left(\frac{1+\hat{\alpha}}{1-\hat{\alpha}} \right) \hat{\rho}_0 \hat{c} \dot{u}_x = 0 \quad (272)$$

expressão do mesmo tipo da obtida em (158) para a propagação de uma onda dilatacional num sólido elástico. Atendendo à coincidência da direcção $0x$ com a do versor \mathbf{n} normal à fronteira Γ_{uV} da Figura 25, a modelação numérica da condição de absorção pode ser realizada incluindo nas equações de equilíbrio de cada elemento de fluido o efeito de uma acção distribuída por unidade de área directamente decorrente da condição de fronteira (272). Ao nível elementar considerar-se-ia então

$$\mathbf{q} = - \left(\frac{1+\hat{\alpha}}{1-\hat{\alpha}} \right) \hat{\rho}_0 \hat{c} \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{N} \dot{\mathbf{a}}_e \quad (273)$$

a que corresponderia o seguinte vector de forças nodais estaticamente equivalentes:

$$\mathbf{f}_e = \left[- \left(\frac{1+\hat{\alpha}}{1-\hat{\alpha}} \right) \hat{\rho}_0 \hat{c} \int_{\Gamma_{u'_e}} \mathbf{N}^T \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{N} d\Gamma \right] \dot{\mathbf{a}}_e \quad (274)$$

Este vector pode ser transferido para o primeiro membro da equação de equilíbrio dinâmico do elemento (expressão (28)), dando origem a uma matriz de amortecimento por absorção

$$\mathbf{C}_{a_e} = \left(\frac{1+\hat{\alpha}}{1-\hat{\alpha}} \right) \hat{\rho}_0 \hat{c} \int_{\Gamma_{u'_e}} \mathbf{N}^T \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{N} d\Gamma \quad (275)$$

que pode ser adicionada à matriz de amortecimento \mathbf{C}_e .

5.3.5 Condição de irrotacionalidade

Como foi oportunamente referido, em cálculo dinâmico a modelação de um líquido através da formulação em deslocamentos correspondente a um sólido sem rigidez ao corte tem o inconveniente de suscitar a ocorrência de modos espúrios de deformação, cujo número tende a aumentar com o refinamento da malha. Este efeito é consequência da singularidade que ocorre na matriz de rigidez para $\hat{G}=0$, e relaciona-se com o facto de os deslocamentos nodais em cada elemento finito corresponderem a um número de incógnitas superior ao número de condições independentes estabelecidas ao nível dos pontos de integração.

Muitos daqueles modos espúrios estão relacionados com configurações que envolvem movimentos circulatórios no líquido, o que constitui uma violação da hipótese de irrotacionalidade invocada no ponto (ii) da secção 5.1. Calculando o rotacional de ambos os membros da equação de equilíbrio hidrodinâmico (208) conclui-se que

$$\text{rot}(\nabla P) = -\hat{\rho}_0 \text{rot}(\hat{\mathbf{u}}) \quad (276)$$

É fácil constatar que $\text{rot}(\nabla P) = 0$, resultando então

$$\text{rot}(\hat{\mathbf{u}}) = 0 \quad (277)$$

Procedendo à dupla integração em ordem ao tempo desta equação, e tomando ainda em atenção que para $t=0$ o fluido se encontra imóvel, torna-se igualmente claro que

$$\omega = \text{rot}(\mathbf{u}) = 0 \quad (278)$$

equação que explicitamente traduz a necessidade de a condição de irrotacionalidade ser respeitada. Na formulação em pressões esta condição é satisfeita de forma implícita, mas na formulação em deslocamentos ela pode ser violada devido à acumulação de erros numéricos, induzindo-se então vorticidade ω no domínio líquido.

A condição de irrotacionalidade pode ser introduzida de forma forçada na equação de resíduos pesados correspondente à formulação em deslocamentos, recorrendo para o efeito a uma técnica de penalização, que consiste na adição do termo

$$\alpha_\omega \int_{\Omega_e} \omega^{*T} \omega \, d\Omega \quad (279)$$

ao primeiro membro de (23)³⁵. O parâmetro α_ω traduz a grandeza da penalização, que em geral assume valores elevados, quase sempre expressos em função do módulo de rigidez volumétrico – na referência (18) é sugerido $\alpha_\omega = 50 \hat{K}$, enquanto que (1) preconiza a utilização de $\alpha_\omega = 100 \hat{K}$.

Invocando a interpolação do campo de deslocamentos, e tendo em atenção que

$$\text{rot}(\mathbf{u}) = \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{u} \quad (280)$$

sendo $\hat{\mathbf{L}}$ o seguinte operador matricial

$$\hat{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (281)$$

de (279) resulta que

$$\alpha_\omega \int_{\Omega_e} \omega^{*T} \omega \, d\Omega = \mathbf{a}_e^{*T} \left[\alpha_\omega \int_{\Omega_e} (\hat{\mathbf{L}} \mathbf{N})^T (\hat{\mathbf{L}} \mathbf{N}) \, d\Omega \right] \mathbf{a}_e \quad (282)$$

Conforme se pode constatar, a condição de irrotacionalidade pode ser introduzida no sistema de equações que expressa o equilíbrio dinâmico do líquido mediante a consideração de uma matriz de rigidez adicional, \mathbf{K}_ω , definida por

$$\mathbf{K}_\omega = \alpha_\omega \sum_{e=1}^{neliq} \left[\int_{\Omega_e} (\hat{\mathbf{L}} \mathbf{N})^T (\hat{\mathbf{L}} \mathbf{N}) \, d\Omega \right] \quad (283)$$

($neliq$ designa o número de elementos de líquido). Esta matriz de rigidez é não-singular³⁵, pelo que ao ser adicionada à matriz de rigidez elástica do líquido, \mathbf{K}_0 , permite a obtenção de um sistema de equações de cuja solução são eliminadas as deformações espúrias decorrentes da consideração de $\hat{G}=0$.

A utilização destas técnicas de penalização não está isenta de inconvenientes³⁴, sendo de salientar que à medida que se aumenta o valor de α_ω assim a condição de irrotacionalidade é satisfeita de forma mais completa, embora à custa de uma eventual dominância de \mathbf{K}_ω sobre \mathbf{K}_0 . Na situação limite em que $\alpha_\omega \rightarrow \infty$ ocorrerá que $\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\omega \cong \mathbf{K}_\omega$, sendo que nessas condições a deformada do líquido tenderá a anular-se, dado o bloqueamento decorrente da infinita rigidez que então será considerada em \mathbf{K}_ω . A fim de evitar esta solução trivial, que dada a limitada precisão numérica dos computadores se torna observável mesmo para valores finitos (mas elevados) de α_ω , certos autores preconizam a determinação da matriz \mathbf{K}_ω com base numa ordem de integração reduzida, como sucede nas referências (18,34,35).

5.3.6 Breve referência à modelação da cavitação

A análise do comportamento dinâmico não-linear de barragens de betão pode exigir a consideração de sismos de elevadas intensidades, caracterizadas por acelerações de pico da ordem de 1g. Nestas situações a razoabilidade da hipótese de o comportamento constitutivo do líquido permanecer linear e elástico é questionável, tendo de encarar-se a possibilidade de desenvolvimento de fenómenos de cavitação.

A cavitação está relacionada com a incapacidade de um líquido poder suportar pressões negativas (isto é, tracções) abaixo de um determinado limiar, denominado pressão de vaporização, \hat{P}_v . Ao contrário do que sucede em escoamentos, nos quais a cavitação é despoletada pela diminuição de pressão associada à ocorrência de elevadas velocidades de fluxo no líquido, nos problemas de interacção barragem-albufeira aquele fenómeno ocorre para pequenas velocidades, sendo determinado pela expansão volumétrica da água³⁶. No decurso desta expansão volumétrica a pressão no líquido conserva-se constante e igual a \hat{P}_v , sendo a cavitação acompanhada da vaporização da água, com formação de bolhas de gás, produzindo-se uma redução da massa específica de $\hat{\rho}_0$ para $\hat{\rho}$.

O comportamento constitutivo de um fluido pode ser traduzido a partir da relação da pressão hidrodinâmica P e da variação da massa específica $\hat{\rho} - \hat{\rho}_0$. Num processo barotrópico, isento de fenómenos de cavitação, um fluido ideal obedece à seguinte equação de estado¹⁸:

$$P = \hat{c}^2 (\hat{\rho} - \hat{\rho}_0) \quad (284)$$

Designando por P_0 a pressão do líquido correspondente à situação hidrostática, o fenómeno da cavitação iniciar-se-á para

$$P + P_0 = \hat{P}_v \quad (285)$$

Durante a subsequente fase de expansão a expressão (284) deixa de ser aplicável, só podendo ser retomada a partir do instante em que se verifique que $P + P_0 \geq \hat{P}_v$, isto é, se suprima a cavitação. Durante a fase de expansão com cavitação a pressão no líquido mantém-se constante, e a pressão hidrodinâmica decorre de (285):

$$P = \hat{P}_v - P_0 \quad (286)$$

A Figura 36 ilustra o comportamento que acaba de ser descrito para o líquido.

Invocando a equação de continuidade, que é aplicável ao líquido mesmo durante a fase de cavitação[†],

$$\dot{\hat{\rho}} + \hat{\rho}_0 \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (287)$$

e procedendo à respectiva integração (tendo em atenção que para $\mathbf{u} = 0$ se tem $\dot{\hat{\rho}} = \hat{\rho}_0$) conclui-se que

$$\hat{\rho} - \hat{\rho}_0 = - \hat{\rho}_0 \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (288)$$

[†] Segundo Zienkiewicz *et al.*³⁶ a cavitação dá origem a um campo contínuo de bolhas microscópicas, nunca se observando perda de continuidade por formação de cavidades.

Esta expressão pode ser substituída em (284), e atendendo ainda a que $\hat{c}^2 = \hat{K}/\hat{\rho}_0$ constata-se finalmente que

$$P = -\hat{K} \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (289)$$

Recordar-se-á que em (240) já havia sido deduzida esta relação entre os campos de pressões e de deslocamentos, na base da qual foi proposta a modelação de um líquido através de uma formulação em deslocamentos. Do ponto de vista computacional a modelação da cavitação através do artifício de simulação de um líquido como um sólido degenerado não suscita nenhuma dificuldade especial, uma vez que em cada ponto de integração é obtido um estado de tensão caracterizado por tensões principais praticamente iguais, sendo qualquer delas identificável com a pressão absoluta $P + P_0$. Sempre que a condição de cavitação (285) for atingida, o estado de tensão é ‘forçado’ a assumir as componentes

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\hat{P}_v \quad (290)$$

sendo o estado de tensão remanescente incluído no vector de forças residuais, procedendo-se à sua eliminação por via iterativa, recorrendo aos procedimentos habituais. Nas situações em que não seja verificada a condição de cavitação o comportamento do líquido não necessita de nenhum tratamento especial, relativamente ao que é usual num sólido degenerado em estado elástico.

Apesar da facilidade conceptual de modelação da cavitação, na realidade a simulação deste fenómeno pode conduzir a importantes problemas numéricos. Estes estão directamente relacionados com a ocorrência de oscilações espúrias de alta frequência, cuja responsabilidade pode ser atribuída à recuperação de rigidez que acompanha a transposição do patamar da Figura 36, durante a retoma do comportamento linear e elástico subsequente ao abandono de um estado de cavitação. Entre as soluções preconizadas para controlo deste problema é frequentemente sugerida a adopção de uma matriz de amortecimento¹¹, do tipo $\mathbf{C} = b \mathbf{K}_0$.

5.4. MODELAÇÃO APROXIMADA ATRAVÉS DE MASSAS ADICIONAIS

5.4.1 Hipótese de incompressibilidade da água

A complexidade inerente à modelação da albufeira e à resolução do problema da interacção sólido-líquido é drasticamente reduzida se a hipótese de incompressibilidade da água ($\hat{K} = \infty$) for introduzida. Nesta situação a velocidade de propagação da onda acústica no fluido torna-se infinita, pelo que da análise das expressões (227a,b) ressalta que $\hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$. Fazendo intervir este resultado em (233), o seguinte sistema de equações é obtido:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}_t + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}_t + \mathbf{k}(\mathbf{a}_t) - \mathbf{H}^T \mathbf{p}_t = \mathbf{f}_t \quad (291a)$$

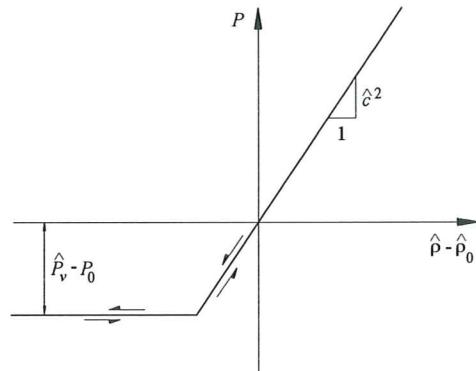


Figura 36 - Líquido com cavitação.

$$\hat{\rho}_0 \mathbf{H} \ddot{\mathbf{a}}_t + \hat{\mathbf{K}} \mathbf{p}_t = 0 \quad (291b)$$

Da segunda equação conclui-se que

$$\mathbf{p}_t = -\hat{\rho}_0 \hat{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{H} \ddot{\mathbf{a}}_t \quad (292)$$

resultado que ao ser substituído em (291a) permite obter um sistema de equações que envolve exclusivamente as variáveis correspondentes ao domínio sólido:

$$[\mathbf{M} + \hat{\rho}_0 \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{H}] \ddot{\mathbf{a}}_t + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}_t + \mathbf{k}(\mathbf{a}_t) = \mathbf{f}_t \quad (293)$$

Conforme pode ser constatado, na hipótese de incompressibilidade a contribuição do líquido pode ser traduzida mediante a consideração de uma matriz de massa, que ao ser adicionada à matriz de massa estrutural permite assimilar o efeito do reservatório ao de um conjunto de massas virtuais aderentes ao paramento de montante. Assim, na modelação de uma albufeira incompressível é suficiente proceder, no início de cada cálculo, à constituição da matriz de massa adicional

$$\hat{\mathbf{M}}_A = \hat{\rho}_0 \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{H} \quad (294)$$

que em seguida é somada à matriz de massa \mathbf{M} , tornando-se evidente a notável diminuição quer da complexidade quer da dimensão do problema dinâmico inicial, expresso no sistema de equações (233).

5.4.2 Limitações decorrentes da hipótese de incompressibilidade

De um ponto de vista físico, e no contexto da análise do comportamento sísmico de barragens e correspondentes albufeiras, a hipótese de incompressibilidade da água raramente se verifica, como o atestam os trabalhos de investigação referenciados em (6,23,24,28).

A Figura 37 pretende sintetizar algumas das conclusões apresentadas naqueles trabalhos, reportando-se a uma barragem de betão do tipo gravidade, idealizada com uma secção transversal triangular, e ligada a um reservatório de extensão infinita, contemplando amortecimento por radiação e absorção. Na figura encontra-se representada a evolução do módulo da componente horizontal da aceleração do coroamento com a frequência de excitação ω de uma acção sísmica sinusoidal, considerada com direcção horizontal (Figura 37a) ou vertical (Figura 37b). À aceleração do coroamento foi retirada a componente pseudo-estática correspondente ao movimento de transporte da fundação, e nos eixos das abcissas foi representada a variável adimensional ω/ω_V , sendo ω_V a frequência da barragem com a albufeira vazia.

Conforme pode ser observado, para um movimento sísmico horizontal a consideração da hipótese de incompressibilidade deu origem a frequências e acelerações que se situam entre as correspondentes a um líquido compressível ou à hipótese de albufeira vazia (Figura 37a). Igualmente se constata que, relativamente à solução mais realista (fluido compressível), a hipótese de incompressibilidade do líquido faz recuar não se situarem as correspondentes soluções do lado da segurança, particularmente na presença de movimentos sísmicos com significativa componente vertical (ver Figura 37b).

Uma outra consequência decorrente da substituição de um líquido compressível por um incompressível é o aumento da largura da banda de frequências correspondente à

amplificação dinâmica na vizinhança da ressonância, facto que indica a consideração de um amortecimento efectivo superior ao real.

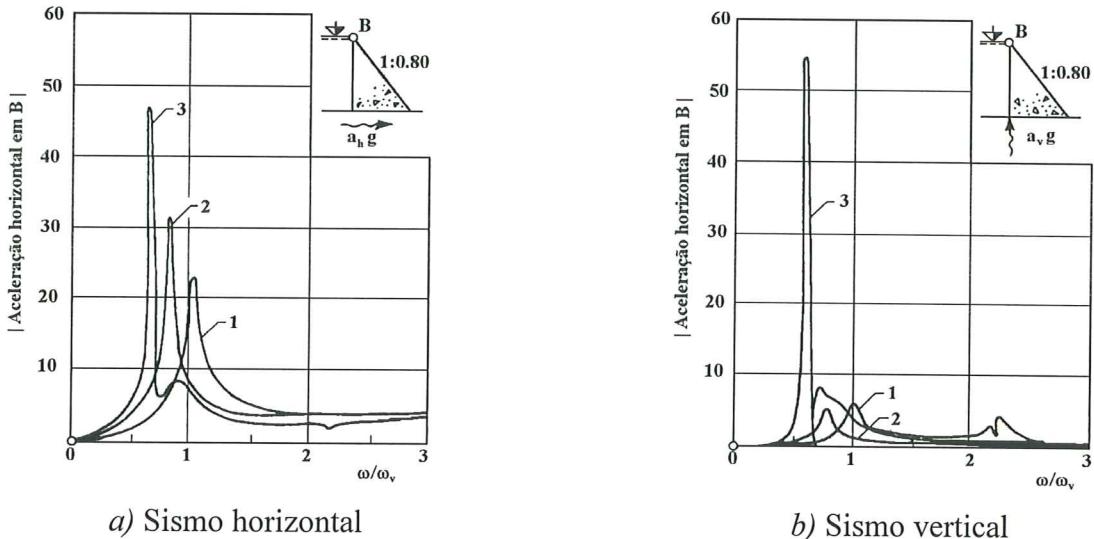


Figura 37 - Influência do tipo de reservatório: 1 - sem água; 2 - água incompressível; 3 - água compressível (da referência (29)).

Apesar dos erros induzidos pela consideração da hipótese de incompressibilidade, a necessidade de enquadrar o esforço computacional dentro de limites praticáveis obriga, por vezes, à recorrência a este tipo de simplificações, particularmente quando o objectivo das análises comprehende a realização de cálculos intensivos, e se pretende representar unicamente um efeito global e aproximado da albufeira^{2,10}.

5.4.3 Modelos de massas adicionais em problemas planos

5.4.3.1 Barragem gravidade infinitamente rígida com paramento de montante plano e vertical

Apesar da assinalável simplificação que o estabelecimento da hipótese de incompressibilidade da água introduz no sistema de equações de equilíbrio dinâmico do conjunto sólido-líquido, geralmente a matriz de massa adicional \hat{M}_A não é determinada com base na expressão (294), dada a elevada largura de banda que lhe está associada. Assim é usual recorrer a definições aproximadas para aquela matriz, dotando-a de um perfil com características similares ao das matrizes envolvidas na discretização do domínio sólido.

Um modelo de massas adicionais bastante clássico decorre da consideração do problema bidimensional esquematizado na Figura 38, na qual uma barragem infinitamente rígida, com paramento de montante plano e vertical, se desloca horizontalmente contra um reservatório de profundidade H e extensão infinita, de acordo com um movimento sinusoidal u_g de frequência ω .

Considerando um fluido compressível não-viscoso e desprezando a contribuição das ondas de superfície o problema em análise obedece à equação de campo (214)

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{1}{\hat{c}^2} \ddot{P} \quad (295)$$

tendo sido resolvido analiticamente por Westergaard³². A distribuição da pressão hidrodinâmica no paramento de montante da barragem tem a seguinte definição²⁷

$$P = \left[2 \hat{\rho}_0 H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{a_n b_n} \cos\left(\frac{a_n y}{H}\right) \right] \ddot{u}_g \quad (296)$$

com

$$a_n = (2n - 1) \pi / 2 \quad b_n = \sqrt{a_n^2 - (\omega H / \hat{c})^2} \quad (297)$$

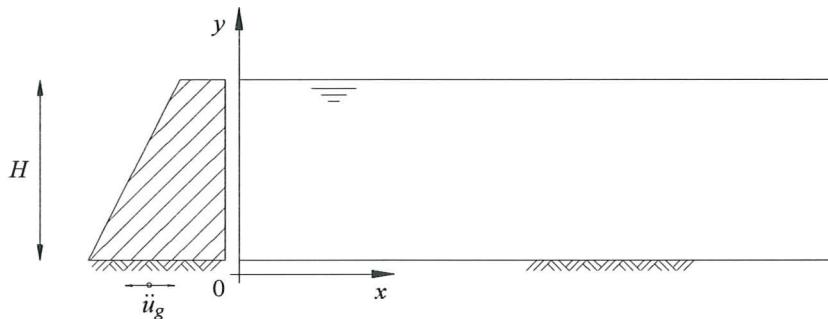


Figura 38 - Problema de Westergaard.

Pode observar-se que só respeitando a condição

$$\omega H / \hat{c} < a_1 = \pi / 2 \quad (298)$$

se podem assegurar valores reais para P . Para o valor mais usualmente considerado para a velocidade de propagação das ondas acústicas, isto é $\hat{c} = 1438$ m/s, verifica-se ser então o seguinte o intervalo de aplicabilidade da expressão (296):

$$0 \leq H/T < 360 \text{ m/s} \quad (299)$$

(T é o período de vibração correspondente à frequência ω).

Uma expressão mais simplificada mas que aproxima bem (296) é a conhecida fórmula de Westergaard²⁹:

$$P = \left[\frac{7}{8} \hat{\rho}_0 \sqrt{H(H-y)} \right] \ddot{u}_g \quad (300)$$

O facto de as expressões contidas no interior dos parêntesis [.] que surgem em (296) e (300) aparecerem a multiplicar por \ddot{u}_g sugere o artifício de o efeito da pressão hidrodinâmica poder ser traduzido através de uma massa virtual distribuída, \hat{m}_A , aderente ao paramento de montante da barragem.

A introdução em (295) da hipótese de incompressibilidade do líquido conduz à equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \quad (301)$$

Para as mesmas condições de fronteira do problema anterior a esta situação corresponderia a solução²⁷

$$P = \left[2 \hat{\rho}_0 H \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{a_n^2} \cos\left(\frac{a_n y}{H}\right) \right] \ddot{u}_g \quad (302)$$

na qual se constata ser a expressão da massa virtual completamente independente do movimento do solo (à semelhança do que sucede com a expressão (300)), particularidade de evidente comodidade prática, e que não se verificava na expressão (296), em que a frequência de excitação ω intervinha na definição de b_n .

A Figura 39 permite comparar as distribuições de massas virtuais \hat{m}_A a que se é conduzido mediante a utilização das expressões (300) ou (302). Conforme pode ser verificado, nas zonas média e alta da barragem as distribuições são similares, embora junto à base a expressão (300), que aproxima a solução de Westergaard, conduza a valores superiores ao da solução que admite a incompressibilidade.

Dadas as aproximações inerentes à utilização de modelos de massas adicionais, as diferenças encontradas nas distribuições da Figura 39 não têm grande significado, o que faz com que seja relativamente indiferente a opção por qualquer delas. Em todo o caso a utilização de massas aderentes é usualmente associada à hipótese de incompressibilidade do líquido, uma vez que desta forma se pode tirar partido da independência das respectivas matrizes de massas adicionais relativamente à frequência da acção.

5.4.3.2 Generalização a outras situações

A forma particular de que se reveste a lei de campo da pressão hidrodinâmica num fluido incompressível – expressão (301) – tem clara semelhança com as equações de Laplace que são conhecidas noutros domínios científicos. Aproveitando o facto de o regime estacionário de um fluxo eléctrico ser uma destas situações, Zangar³³ estabeleceu uma analogia entre os problemas respeitantes à determinação da distribuição das pressões hidrodinâmicas num reservatório e a determinação do potencial eléctrico num dispositivo experimental (contendo um electrólito), este último constituído por forma a assemelhar-se geometricamente ao reservatório que se pretende analisar. Introduzindo no referido dispositivo diversas condições de fronteira, criteriosamente seleccionadas por forma a equivalerem às prevalecentes na albufeira (atendendo à correspondência entre os problemas hidrodinâmico e eléctrico), uma rede de fluxo foi então estabelecida para cada caso, na base da qual foi possível especificar a massa adicional no paramento de montante da barragem de acordo com a expressão

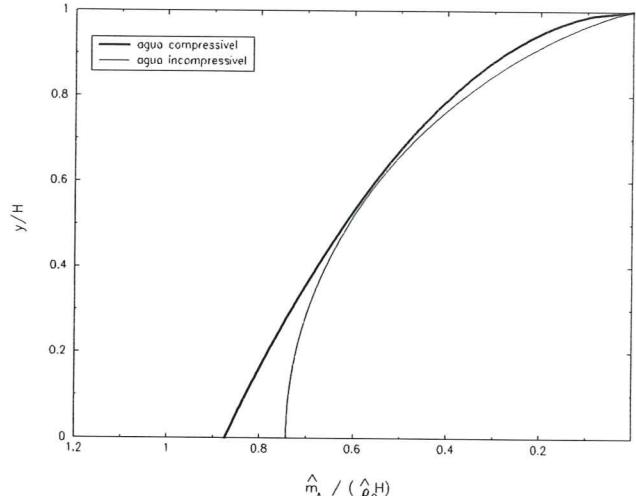


Figura 39 - Distribuições de massas adicionais.

$$\hat{m}_A = C \hat{\rho}_0 H \quad (303)$$

Na Figura 40 pode observar-se a variação do coeficiente C para diversas situações de interesse prático, que envolvem albufeiras de comprimento infinito e barragens infinitamente rígidas, dotadas de paramentos de formas várias. Da análise desta figura ressalta que a situação correspondente a um paramento plano e vertical (caso 5) conduz a uma distribuição de pressões que se pode considerar envolvente das demais situações, envolvendo paramentos inclinados ou com declives duplos.

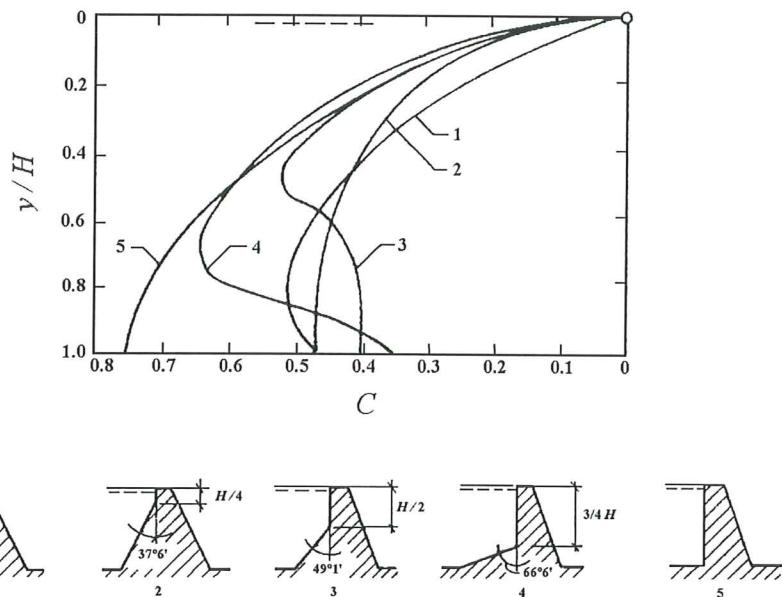


Figura 40 - Coeficiente C para diversos tipos de paramentos (da referência (29)).

Uma referência especial deve ainda ser feita relativamente aos trabalhos de Kotsubo²⁶, no âmbito dos quais foi analisada a influência na distribuição de massas adicionais da forma da secção transversal do reservatório (ver Figura 41). Pode constatar-se que a hipótese correspondente a um vale de secção transversal rectangular é envolvente das demais situações.

De um ponto de vista informativo os resultados decorrentes dos trabalhos de Zangar e Kotsubo têm obviamente interesse, mas em termos práticos as soluções correspondentes não respondem com generalidade aos problemas reais que se deparam na análise da interacção sólido-fluido. É exemplo desta situação o facto de ser limitativa a hipótese segundo a qual a barragem deve ser encarada como uma estrutura infinitamente rígida.

Assim o procedimento habitual consiste em estender o domínio de aplicabilidade dos modelos de massas adicionais aos casos de barragens flexíveis, admitindo como válida a hipótese de as pressões hidrodinâmicas que se desenvolvem em cada ponto do paramento de montante poderem ser calculadas a partir do produto das massas virtuais correspondentes pela aceleração total nesse ponto (em geral supondo como vertical aquele paramento). Note-se que esta generalização não tem um verdadeiro suporte teórico, constituindo um típico ‘artifício de engenheiro’, que corresponde a substituir \ddot{u}_g por $\ddot{u}_g + \ddot{u}$ nas expressões (296), (300) ou (302), sendo \ddot{u} a componente relativa da aceleração, relacionada com a deformação da barragem.

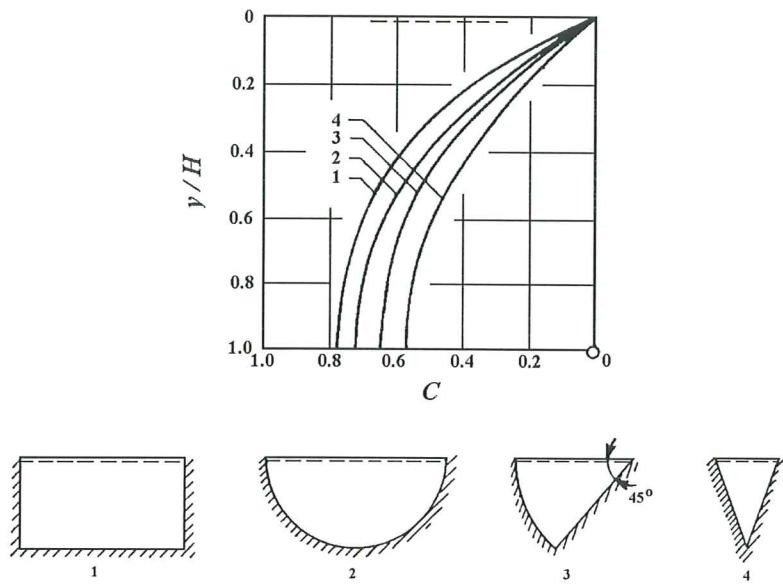


Figura 41 - Coeficiente C para diversas formas da secção transversal do reservatório (da referência (29)).

A consideração de paramentos com configurações quaisquer e de movimentos sísmicos sem a restrição de terem de ser perpendiculares à face de montante da barragem é efectuada pressupondo que a massa aderente em cada ponto reage apenas à componente normal da correspondente aceleração total. Designando por $-\mathbf{n}$ o vessor da normal exterior ao paramento (ver Figura 25), e por $\ddot{\mathbf{u}}_g$ e $\ddot{\mathbf{u}}$ as entidades correspondentes à representação vectorial do movimento do solo e da aceleração relativa no ponto em análise, esta hipótese pode ser traduzida através da expressão

$$P = -\hat{m}_A (\ddot{\mathbf{u}}_g + \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n} \quad (304)$$

5.4.4 Utilização dos modelos de massas adicionais em problemas tridimensionais

Em problemas 3D a modelação da albufeira com recurso ao artifício das massas adicionais não tem subjacente nenhum verdadeiro modelo teórico, correspondendo à generalização da expressão (304). Em todo o caso o tratamento numérico que irá ser apresentado tem a virtude de possibilitar a consideração de paramentos com geometria qualquer, permitindo não só incorporar o efeito da flexibilidade da barragem, como ainda contemplar acções sísmicas sem orientação pré-definida.

Assim, atendendo a que a pressão hidrodinâmica P se exerce na barragem segundo o vessor \mathbf{n} da normal à fronteira Γ_{uB} da Figura 25, o seu efeito pode ser traduzido através da acção distribuída:

$$\mathbf{q} = -\hat{m}_A (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot (\ddot{\mathbf{u}}_g + \ddot{\mathbf{u}}) \quad (305)$$

Procedendo à interpolação de $\ddot{\mathbf{u}}_g + \ddot{\mathbf{u}}$ para um elemento finito genérico em contacto com a fronteira Γ_{uB} , o vector de forças nodais estaticamente equivalentes a esta acção \mathbf{q} é então

$$\int_{\Gamma_{uB_e}} \mathbf{N}^T \mathbf{q} \, d\Gamma = -\hat{M}_{A_e} (\ddot{\mathbf{u}}_g + \ddot{\mathbf{a}}_e) \quad (306)$$

em que

$$\hat{\mathbf{M}}_{A_e} = \int_{\Gamma_{uB_e}} \hat{m}_A \mathbf{N}^T \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{N} d\Gamma \quad (307)$$

Da transferência para o primeiro membro de (30) do efeito das pressões hidrodinâmicas considerado em (306) resulta a seguinte equação de equilíbrio dinâmico para o conjunto sólido-líquido

$$[\mathbf{M} + \hat{\mathbf{M}}_A] (\ddot{\mathbf{u}}_g + \ddot{\mathbf{a}}_t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}_t + \mathbf{k}(\mathbf{a}_t) = \mathbf{f}_t \quad (308)$$

Nesta expressão a matriz de massa adicional $\hat{\mathbf{M}}_A$ decorre do agrupamento das contribuições $\hat{\mathbf{M}}_{A_e}$ provenientes de elementos finitos em contacto com Γ_{uB} , tornando-se evidente que a modelação do efeito do reservatório se resume à constituição de uma matriz de massa, que no início de cada cálculo é somada à matriz de massa \mathbf{M} do sólido.

Em barragens abóbada a utilização de (307) obriga ainda à adaptação da expressão relativa a \hat{m}_A , uma vez que esta massa distribuída foi deduzida para problemas planos, e por isso pressupõe a consideração de uma profundidade H constante. Neste tipo de barragens (e noutras situações tipicamente tridimensionais) esta hipótese não se verifica, conforme se encontra ilustrado na Figura 42 (o plano Oxy coincide com a superfície livre da água).

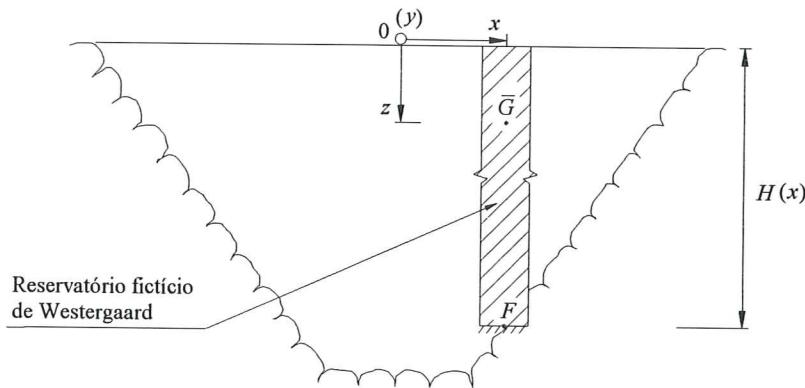


Figura 42 - Generalização do conceito de massa adicional de Westergaard.

Na presente monografia \hat{m}_A é calculada em cada ponto de Gauss \bar{G} através da expressão

$$\hat{m}_A = \frac{7}{8} \hat{\rho}_0 \sqrt{H(x) z(x)} \quad (309)$$

que decorre da distribuição de massa adicional de Westergaard definida em (300) e da consideração dos seguintes raciocínios:

- (i) Em cada ponto de Gauss \bar{G} definido pela coordenada x admite-se que o efeito do reservatório real pode ser substituído por um reservatório fictício de Westergaard, com profundidade igual à profundidade corrente, isto é $H(x)$. Esta é avaliada a partir da distância à superfície livre do ponto F situado no contacto barragem-fundaçāo, e na mesma vertical de \bar{G} .

- (ii) O termo $H - y$ da expressão (300) é substituído pela cota $z(x)$, correspondente à distância de \bar{G} à superfície livre.

A matriz de massa adicional \hat{M}_{A_e} envolvida na expressão (307), do tipo consistente, corresponde ao melhoramento de uma estratégia idêntica descrita por Faria¹³, e foi deduzida com base num conjunto de artifícios proposto na referência (29).

5.5. REFERÊNCIAS

1. Ahmadi, M.T. (1988) - New Method of Analysis for Arch Dam: Reservoir and Foundation Dynamic Interactions, and Static Joint Opening - *PhD Dissertation*, Tohoku University, Japan.
2. Bhattacharjee, S.S. and Léger, P. (1993) - Seismic Cracking and Energy Dissipation in Concrete Gravity Dams - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 22, pp. 991-1007.
3. Câmara, R.J. (1989) - Modelos para o Estudo do Comportamento Dinâmico de Barragens de Betão pelo Método dos Elementos Finitos - *Tese de Especialista*, LNEC, Portugal.
4. Cervera, M.; Oliver, J. and Galindo, M. (1994) - Seismic Evaluation of Concrete Dams Using Continuum Damage Models - *Proc. EURO-C 1994 Int. Conf. held in Innsbruck*, Austria, pp. 629-638.
5. Chopra, A.K.; Wilson, E.L. and Farhousmand, I. (1969) - Earthquake Analysis of Reservoir-Dam-Systems - *Proc. 4th World Conf. on Earth. Eng.*, Chile, Vol. 2, B-4, pp. 1-10.
6. Chopra, A.K. and Chakrabarti, P. (1981) - Earthquake Analysis of Concrete Gravity Dams Including Dam-Water-Foundation Rock Interaction - *Earth. Eng. Struct. Dyn.* Vol. 9, pp. 363-383.
7. Chopra, A.K. (1988) - Earthquake Response Analysis of Concrete Dams - *Advanced Dam Engineering for Design, Construction, and Rehabilitation* (Chap. 15), Robert B. Jansen (ed.), *Van Nostrand Reinhold*, New York, U.S.A..
8. Delgado, R.M. (1984) - O Método dos Elementos Finitos na Análise Dinâmica de Barragens, Incluindo a Interacção Sólido-Líquido - *Tese de Doutoramento*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.
9. Delgado, R.M. and Faria, R. (1988) - Earthquake Response of Arch Dams Including the Foundation-Reservoir-Dam Interaction - *Proc. 6th Int. Conf. on Num. Meth. in Geomech.*, Innsbruck, Austria, Vol. 3, pp. 1739-1742.
10. Dowling, M.J. and Hall, J.F. (1989) - Nonlinear Seismic Analysis of Arch Dams - *J. Eng. Mech., ASCE*, Vol. 115, Nº 4, pp. 768-789.
11. El-Aidi, B. and Hall, J.F. (1989) - Non-Linear Earthquake Response of Concrete Gravity Dams Part 1: Modelling - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 18, pp. 837-851.
12. El-Aidi, B. and Hall, J.F. (1989) - Non-Linear Earthquake Response of Concrete Gravity Dams Part 2: Behaviour - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 18, pp. 853-865.
13. Faria, R. (1988) - Análise Numérica de Barragens Abóbada Sujeitas à Acção Sísmica - *Tese de Mestrado*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

14. Fenves, G. and Chopra, A.K. (1983) - Effects of Reservoir Bottom Absorption on Earthquake Response of Concrete Gravity Dams - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 11, pp. 809-829.
15. Fenves, G. and Chopra, A.K. (1984) - Earthquake Analysis of Concrete Gravity Dams Including Reservoir Bottom Absorption and Dam-Water-Foundation Rock Interaction - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 12, pp. 663-680.
16. Fenves, G. and Chopra, A.K. (1985) - Reservoir Bottom Absorption Effects in Earthquake Response of Concrete Gravity Dams - *J. Struct. Eng., ASCE*, Vol. 111, Nº 3, pp. 545-562.
17. Fenves, G. and Chopra, A.K. (1985) - Effects of Reservoir Bottom Absorption and Dam-Water-Foundation Rock Interaction on Frequency Response Functions for Concrete Gravity Dams - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 13, pp. 13-31.
18. Fenves, G. and Vargas-Loli, L.M. (1988) - Nonlinear Dynamic Analysis of Fluid-Structure Sistems - *J. Eng. Mech., ASCE*, Vol. 114, Nº 2, pp. 219-240.
19. Fok, K.-L. and Chopra, A.K. (1986) - Frequency Response Functions for Arch Dams: Hydrodynamic and Foundation Flexibility Effects - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 14, pp. 769-795.
20. Galindo, M. (1993) - Una Metodología para el Análisis Numérico del Comportamiento Resistente No Lineal de Presas de Hormigón Bajo Cargas Estáticas y Dinámicas - *Tesis Doctoral*, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España.
21. Guedes, J.P. (1992) - Análise Sísmica de Estruturas com Interacção Sólido-Fluido - *Tese de Mestrado*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.
22. Hatano, T. (1966) - An Examination on the Resonance of Hydrodynamic Pressure During Earthquakes Due to Elasticity of Water - *Proc. Jap. Society of Civil Engineers* (in Japanese).
23. Hall, J.F. and Chopra, A.K. (1982) - Two-Dimensional Dynamic Analysis of Concrete Gravity and Embankment Dams Including Hydrodynamic Effects - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 10, pp. 305-332.
24. Hall, J.F. and Chopra, A.K. (1982) - Hydrodynamic Effects in the Dynamic Response of Concrete Gravity Dams - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 10, pp. 333-345.
25. Hall, J.F. (1988) - The Dynamic and Earthquake Behaviour of Concrete Dams: Review of Experimental Behaviour and Observational Evidence - *Soil Dyn. Earth. Eng.*, Vol. 7, Nº 2.
26. Kotsubo, S. (1960) - Dynamic Water Pressure on Dams During Earthquakes - *Proc. 2nd World Conf. on Earth. Eng.*, Tokyo, Japan.
27. Newmark, N. and Rosenblueth, E. (1971) - Fundamentals of Earthquake Engineering - *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs*, New York, U.S.A..
28. Porter, C.S. and Chopra, A.K. (1981) - Dynamic Analysis of Simple Arch Dams Including Hydrodynamic Interaction - *Earth. Eng. and Struct. Dyn.*, Vol. 9, pp. 573-597.
29. Priscu, R.; Popovici, A.; Stematiu, D. and Stere, C. (1985) - Earthquake Engineering for Large Dams - *Editura Academiei and John Wiley & Sons, Ltd.*, Bucuresti, Romania.

30. Vargas-Loli, L.M. and Fenves, G.L. (1989) - Effects of Concrete Cracking on the Earthquake Response of Gravity Dams - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 18, pp. 575-592.
31. Weber, B.; Hohberg, J.-M. and Bachmann, H. (1990) - Earthquake Analysis of Arch Dams Including Joint Nonlinearity and Fluid-Structure Interaction - *Dam Engineering*, Vol. 1, Nº 4, pp. 267-278.
32. Westergaard, H. (1933) - Water Pressure on Dams During Earthquakes - *Trans. ASCE*, Vol. 98.
33. Zangar, C.N. (1952) - Hydrodynamic Pressures on Dams Due to Horizontal Earthquake Effects - *USBR, Engineering Monographs*, Nº 11.
34. Zienkiewicz, O.C. (1977) - The Finite Element Method (Third Edition) - *McGraw-Hill*, London, U.K..
35. Zienkiewicz, O.C. and Bettess, P. (1978) - Fluid-Structure Dynamic Interaction and Wave Forces. An Introduction to Numerical Treatment - *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 13, pp. 1-16.
36. Zienkiewicz, O.C.; Paul, D.K. and Hinton, E. (1983) - Cavitation in Fluid-Structure Response (With Particular Reference to Dams Under Earthquake Loading) - *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 11, pp. 463-481.
37. Zienkiewicz, O.C.; Clough, R.W. and Seed, H.B. (1986) - Earthquake Analysis Procedures for Dams - State of the Art - *ICOLD, Bulletin 52*.

CENTRO INTERNACIONAL DE METODOS NUMERICOS EN INGENIERIA

Lista de monografías publicadas en la Serie de Ingeniería Sísmica

Las monografías pueden adquirirse dirigiéndose al Departamento de Publicaciones del Centro Internacional de Métodos Numericos en Ingeniería, Edificio C1, Campus Norte UPC, c/ Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, teléfono: 93-401.60.37, Fax: 93-401-65-17.

- IS-1 *Qualitative Reasoning for Earthquake Resistant Buildings*, Luís M. Bozzo, 149 pp., ISBN 84-87867-36-7, 1993.
- IS-2 *Control predictivo en sistemas de protección sísmica de estructuras*, R. Andrade Cascante, J. Rodellar, F. López Almaza, 143 pp., ISBN 84-87867-37-5, 1993.
- IS-3 *Simulación numérica del comportamiento no lineal de presas de hormigón ante acciones sísmicas*, M. Galindo, J. Oliver, M. Cervera, 255 pp., ISBN 84-87867-38-3, 1994.
- IS-4 *Simulación del daño sísmico en edificios de hormigón armado*, A. Hanganu, A.H. Barbat, S. Oller, E. Oñate, 96 pp., ISBN 84-87867-40-5, 1994.
- IS-5 *Edificios con aislamiento de base no lineal*, N. Molinares, A.H. Barbat, 96 pp., ISBN: 84-87867-41-3, 1994.
- IS-6 *Vulnerabilidad sísmica de edificios*, C. Caicedo, A.H. Barbat, J.A. Canas, R. Aguiar 100 pp., ISBN 84-87867-43-X, 1994.
- IS-7 *Ánálisis de terremotos históricos por sus efectos*, J. R. Arango Gonzalez, 119 pp., ISBN 84-87867-44-8, 1994.
- IS-8 *Control activo no lineal de edificios con aislamiento de base*, A.H. Barbat, N. Molinares, J. Rodellar, 124 pp., ISBN 84-87867-46-4, 1994.
- IS-9 *Análise estocástica da resposta sísmica nao-linear de estructuras*, A.M. F. Cunha, 199 pp., ISBN: 84-87867-47-2, 1994
- IS-10 *Definición de la acción sísmica*, A.H. Barbat, L. Orosco, J.E. Hurtado, M. Galindo, 122 pp., ISBN: 84-87867-448-0, 1994
- IS-11 *Sismología y peligrosidad sísmica*, J.A. Canas Torres, C. Pujades Beneit, E. Banda Tarradellas, 87 pp., ISBN: 84-87867-49-9, 1994
- IS-12 *Riesgo, peligrosidad y vulnerabilidad sísmica de edificios de mampostería*, F. Yépez, A.H. Barbat, J.A. Canas, 104 pp., ISBN: 84-87867-50-2, 1995
- IS-13 *Estudios de ingeniería sismológica y sísmica*, J.A. Canas, ISBN: 84-87867-57-X, 13 pp., 1995
- IS-14 *Simulación de escenarios de daño para estudios de riesgo sísmico*, F. Yépez, A.H. Barbat y J.A. Canas, ISBN: 84-87867-58-8, 103 pp., 1995

- IS-15 *Diseño sismorresistente de edificios de hormigón armado*, L. Bozzo, A.H. Barbat, ISBN: 84-87867-59-6, 185 pp., 1995
- IS-16 *Modelo tridimensional de atenuación anelástica de las ondas sísmicas en la Península Ibérica*, J.O. Caselles, J. A. Canas, Ll. G. Pujades, R.B. Herrmann, ISBN: 84-87867-60-X, 119 pp., 1995
- IS-17 *Índices de daño sísmico en edificios de hormigón armado*, R. Aguiar ISBN: 84-87867-43-X, 99 pp., 1996
- IS-18 *Experimental study of a reduced scale model seismically base isolated with Rubber-Layer Roller Bearings (RLRB)*, D. Foti, J.M. Kelly ISBN: 84-87867-82-0, 112 pp., 1996
- IS-19 *Modelos de evaluación del comportamiento sísmico no lineal de estructuras de hormigón armado*, F. Yépez Moya ISBN: 84-87867-80-4., 96pp., 1996
- IS-20 *Evaluación probabilista de la vulnerabilidad y riesgo sísmico de estructuras de hormigón armado por medio de simulación*, F. Yépez Moya, A.H. Barbat, J.A. Canas, ISBN: 84-87867-81-2, 1996
- IS-21 *Modelización de la peligrosidad sísmica. Aplicación a Cataluña*, J.A. Canas, J.J. Egózcue, J. Miquel Canet y A.H. Barbat, ISBN: 84-87867-83-9, 101pp., 1996
- IS-22 *Evaluación del daño sísmico global en edificios porticados de hormigón armado*, R. Aguiar, A.H. Barbat and J. Canas, ISBN: 84-87867-96-0, 173pp., 1997
- IS-23 *Daño sísmico global en edificios con muros de cortante*, R. Aguiar, ISBN: 84-89925-00-3, 101 pp., 1997
- IS-24 *Conceptos de cálculo de estructuras en las normativas de diseño sismorresistente*, A.H. Barbat y S. Oller, ISBN: 84-89925-10-0, 107pp., 1997
- IS-25 *Stochastic dynamics of hysteretic structures*, J.E. Hurtado, ISBN: 84-89925-09-7, 205pp., 1998
- IS-26 *Ánalysis de los acelerogramas de la serie de Adra (Almería). Diciembre 1993 a Enero 1994*, R. Blázquez, A. Suárez, E. Carreño y A.J. Martín, 91pp., 1998
- IS-27 *Respuesta de puentes frente a acciones sísmicas*, E. Maldonado, J.A. Canas, J.R. Casas, L.G. Pujades, 107pp., 1998
- IS-28 Estudio de parámetros en la vulnerabilidad sísmica de puentes, E. Maldonado, J.A. Canas y J.R. Casas, 97pp., 1998

Los autores interesados en publicar monografías en esta serie deben contactar con el editor para concretar las normas de preparación del texto.