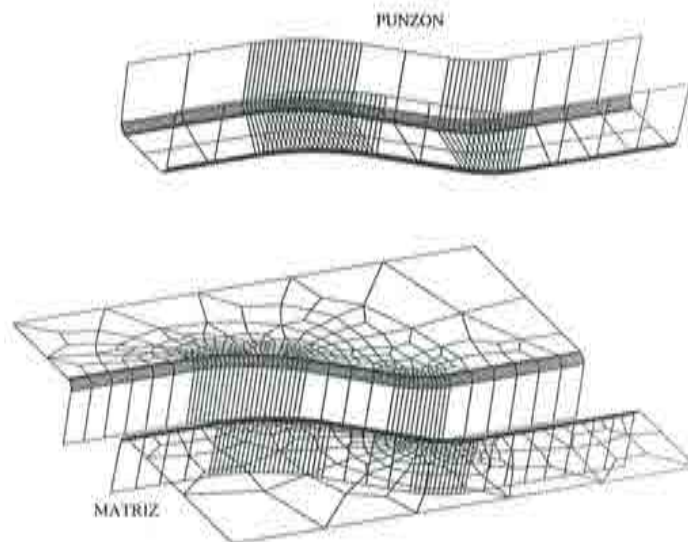


# Nuevos Elementos Finitos para el Análisis Dinámico Elastoplástico no Lineal de Estructuras Laminadas

P. Cendoya  
E. Oñate  
J. Miquel



# **Nuevos Elementos Finitos para el Análisis Dinámico Elastoplástico no Lineal de Estructuras Laminadas**

**P. Cendoya  
E. Oñate  
J. Miquel**

**Monografía CIMNE Nº 36, Enero 1997**

Diseño de la cubierta: Jordi Pallí

Primera Edición, Enero 1997

@ Los autores

Edita:

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería

Edificio C1, Campus Norte UPC

Gran Capitán, s/n

08034 Barcelona, España

ISBN: 84-87867-90-1

Deposito Legal: B-8143-97

# ÍNDICE

	<u>pag.</u>
<b>Índice</b>	i
<b>1. Introducción</b>	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos del trabajo	3
1.3. Contenidos del trabajo	3
<b>2. Ecuaciones de Movimiento</b>	5
2.1. Introducción	5
2.2. Leyes de movimiento	6
2.2.1. Forma diferencial	7
2.2.2. Forma variacional	8
2.3. Solución de la ecuación de movimiento	9
2.3.1. Discretización espacial	11
2.3.2. Integración temporal explícita	12
2.3.3. Matriz de masa concentrada	14
2.4. Estabilidad numérica	15
2.4.1. Algoritmo de búsqueda de la frecuencia circular máxima	16
2.5. Conclusiones	18
2.6. Referencias	19
<b>3. Modelos Constitutivos</b>	21
3.1. Introducción	21
3.2. Modelos basados en la hipoeelasticidad	22
3.2.1. Implementación numérica de los modelos hipoeelásticos	24
3.3. Ecuaciones constitutivas para materiales anisótropicos	25
3.3.1. Modelo anisótropo de Hill 48	26



3.3.2.	Relaciones para anisotropía normal criterio de Hill	48	32
3.3.3.	Modelo Anisótropo de Hill mejorado		34
3.3.4.	Relaciones para anisotropía normal en el criterio de Hill mejorado		36
3.4.	Algoritmos de verificación de la condición de consistencia plástica		40
3.4.1.	Superficie de fluencia Hill	48	40
3.4.2.	Superficie de fluencia de Hill mejorada		44
3.5.	Otros criterios de anisotropía plástica		47
3.5.1.	Modelo anisótropo de Barlat		47
3.5.2.	Modelo anisótropo de Chu		48
3.6.	Conclusiones		49
3.7.	Referencias		49
Ap3A	Medida de deformación finita		53
<b>4.</b>	<b>Nuevas formulaciones de elementos finitos de lámina en 3D</b>		<b>57</b>
4.1.	Introducción		57
4.2.	Formulación de placas gruesas		58
4.2.1.	Hipótesis de la teoría de placas de Reissner-Mindlin		58
4.2.2.	Campo de desplazamientos		59
4.2.3.	Campo de deformaciones y tensiones		60
4.2.4.	Relación tensión-deformación		62
4.2.5.	Esfuerzos y deformaciones generalizadas		62
4.3.	Formulación de láminas planas de Reissner-Mindlin		63
4.3.1.	Campo de desplazamientos		63
4.3.2.	Campo de deformaciones		64
4.3.3.	Campo de tensiones		66
4.3.4.	Esfuerzos generalizados		66
4.3.5.	Expresión del principio de los trabajos virtuales		67
4.4.	Formulación mixta de elementos finitos de placa de Reissner-Mindlin		67
4.4.1.	Elemento triangular <i>TLCL</i>		68
4.4.2.	Elemento triangular <i>TLLL</i>		71
4.4.3.	Elementos de placa delgada discretos de Kirchhoff		72
4.4.3.1.	Elemento <i>DKT</i>		73
4.4.3.2.	Elemento <i>DKTLL</i>		75
4.4.4.	Nuevos elementos de placa <i>BPT</i>		77
4.4.4.1.	Aplicación de las condiciones de contorno		82
4.5.	Extensión al análisis de láminas		83
4.5.1.	Formulación de membrana. Elemento <i>CST</i>		84
4.5.1.1.	Discretización del campo de deformaciones		84
4.5.2.	Elemento de lámina <i>DKT15</i>		85
4.5.3.	Nuevo elemento de lámina <i>BST</i>		87

4.6.	Implementación computacional	88
4.7.	Conclusiones	91
4.8.	Referencias	91
Ap4A	Consideraciones acerca del elemento <i>DKT</i>	95
A.4A.1.	Introducción	95
A.4A.2.	Funciones de forma $H_x$ y $H_y$	95
A.4A.3.	Transformación al sistema de referencia global	99
Ap4B	Integración numérica por capas	101
A.4B.1.	Introducción	101
A.4B.2.	Integración numérica del vector de fuerzas internas	101
Ap4C	Transformaciones matriciales del nuevo elemento de lámina delgada <i>CST – BPT</i>	103
A.4C.1.	Introducción	103
A.4C.2.	Vector de giros normales	103
A.4C.3.	Matriz de deformación por flexión: $\mathbf{B}_f$	103
A.4C.4.	Matriz de deformación por membrana: $\mathbf{B}'_m$	107
A.4C.5.	Matriz de transformación de variables globales a locales	108
<b>5.</b>	<b>Problemas transitorios con grandes deformaciones elastoplásticas</b>	<b>109</b>
5.1.	Introducción	109
5.2.	Ejemplos numéricos	110
5.2.1.	Cúpula esférica bajo carga impulsiva	110
5.2.2.	Panel cilíndrico bajo carga impulsiva	117
5.2.3.	Impacto entre dos tubos	124
5.3.	Conclusiones	127
5.4.	Referencias	128
<b>6.</b>	<b>Simulación numérica de procesos de embutición de chapas</b>	<b>129</b>
6.1.	Introducción	129
6.2.	Ejemplos numéricos	130
6.2.1.	Test de estiramiento con punzón cilíndrico	130
6.2.2.	Test <i>OSU</i> : estiramiento de una chapa circular con punzón hemisférico	137
6.2.3.	Embutición profunda de una chapa cuadrada	144
6.2.4.	Test LDH	165
6.2.5.	Embutición profunda de un Rail	181
6.3.	Conclusiones	197
6.4.	Referencias	197

<b>7. Conclusiones y líneas futuras de investigación</b>	201
7.1. Introducción	201
7.2. Principales aportaciones del trabajo	203
7.3. Líneas futuras de investigación	203

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1. MOTIVACIÓN

La simulación numérica de muchos problemas encontrados en el ámbito de la Ingeniería Civil y Mecánica requieren de adecuadas herramientas teóricas y computacionales, que permitan estudiar el comportamiento de las estructuras bajo un cierto régimen de cargas y condiciones de frontera. En este contexto se encuentra que en muchas ocasiones el proyectista se enfrenta al problema de determinar si una determinada tipología estructural satisface los requerimientos de coste y seguridad que le demanda el entorno social. En este proceso del análisis estructural siempre es necesario efectuar estudios de la sensibilidad de los parámetros que intervienen en la respuesta, como son las cargas, las dimensiones, la calidad de los materiales, etc. Bajo estas hipótesis una correcta modelación de todos los fenómenos físicos que intervienen es fundamental para poder decidir correctamente. En la mayoría de los casos el procedimiento experimental es costoso por la infraestructura involucrada, siendo la simulación numérica una poderosa herramienta de ayuda en la determinación de la estructura más adecuada para un determinado conjunto de acciones.

Dentro de las formas estructurales comúnmente encontradas en los problemas ingenieriles debemos destacar a las estructuras denominadas laminares. En estas tipologías el comportamiento estructural viene gobernado por la teoría de láminas, y su tratamiento teórico involucra dificultades matemáticas y físicas. Sus soluciones no pueden ser rápidamente obtenidas, salvo en situaciones particulares o introduciendo hipótesis simplificadoras en la teoría. Físicamente la respuesta de estructuras laminares requiere de un adecuado balance entre términos de flexión y membrana, las dificultades matemáticas aun en el caso lineal son extensas encontrándose muy pocas soluciones analíticas las que por lo general se limitan a formas simples y condiciones de carga y contorno sencillas.

Dentro de las teorías de lámina más recurridas encontramos a la de Kirchhoff y a la de Reissner-Mindlin en donde la única diferencia entre ambas radica en las hipótesis sobre el giro de la normal al plano medio. Así, la teoría más clásica de láminas de Kirchhoff establece que dichas normales se mantienen rectas y ortogonales a la deformada de dicho plano lo cual es cierto solamente en láminas



delgadas ( $\frac{\text{espesor}}{\text{ancho}} \leq 0.1$ ), en cambio la teoría de Reissner-Mindlin mantiene la condición de deformación recta de la normal pero no exige su ortogonalidad con la deformada del plano medio, lo que introduce el efecto de la deformación por cortante transversal permitiendo el análisis de placas gruesas.

Desde el punto de vista de la formulación de elementos finitos la teoría de Kirchhoff requiere que los elementos utilizados tengan continuidad de clase  $C_1$  debido a la presencia de derivadas segundas de la flecha en la expresión del principio de los trabajos virtuales, en cambio bajo la teoría de Reissner-Mindlin se requiere que los elementos finitos tengan solamente continuidad de clase  $C_0$ , dando origen a elementos más sencillos que puedan aplicarse indistintamente a problemas de placas delgadas y gruesas. Sin embargo, el precio que se paga por la utilización de elementos basados en la teoría de Reissner-Mindlin es que aparecen dificultades numéricas en su aplicación a láminas de pequeño espesor produciéndose el bloqueo de la solución numérica debido a los efectos de los términos de cortante transversal. Estas dificultades se resuelven con técnicas de integración reducida-selectiva o utilizando campos de deformaciones de cortante impuestos.

Desde el punto de vista geométrico la forma de la superficie media de la lámina puede ser arbitraria. Una de las formas más sencillas de aproximación de la geometría real es modelarla a partir de elementos planos de tamaño pequeño. Dentro de las ventajas de esta aproximación se encuentra el hecho de encontrarse desacoplados a nivel elemental las contribuciones de membrana y flexión. La mayoría de los elementos de lámina planos que comúnmente se utilizan consideran cinco grados de libertad por nodo a nivel elemental, tres desplazamientos contenidos en el plano medio ( $u'$ ,  $v'$  y  $w'$ ) y dos rotaciones de la normal al plano medio ( $\theta_{x'}$ ,  $\theta_{y'}$ ), apareciendo un sexto grado de libertad ( $\theta_z$ ) cuando se realiza el ensamblaje a nivel global de cada una de las contribuciones elementales.

El uso de grados rotacionales de libertad en la formulación de láminas presenta algunas dificultades, las cuales pueden resumirse en:

- (1) Las variables rotacionales no son conmutativas en 3D, de modo que la implementación computacional de elementos de lámina que utilizan este tipo de variables nodales no es sencillo, especialmente en el contexto de problemas no lineales con grandes deformaciones.
- (2) La aplicación e interpretación de las condiciones de borde no siempre es sencilla.
- (3) En problemas de gran escala los requerimientos de almacenamiento pueden llegar a ser considerables.

Estas razones han llevado a muchos investigadores a proponer nuevas formulaciones de elementos finitos, que se independicen de los grados rotacionales de libertad. La importancia de estos nuevos desarrollos, en el ámbito de problemas

industriales y académicos es enorme por la posibilidad de realizar análisis de estructuras laminares con elementos sencillos, y de bajo coste computacional en situaciones complejas de cargas y condiciones de apoyo como son los problemas de impacto entre estructuras o de embutición de chapa.

Otro punto complementario al de la tecnología de elementos finitos en el proceso de análisis estructural, es la descripción matemática del comportamiento del material que se utilice, el cual debe ser considerado con modelos que describan de una forma lo más cercana a la realidad su fenomenología.

## 1.2. OBJETIVOS DEL PRESENTE TRABAJO

Los objetivos de este trabajo se enmarcan en el análisis de estructuras laminares delgadas sometidas a un régimen dinámico de cargas, que dan origen a grandes cambios de forma sobre la estructura. Se consideraran dos nuevas formulaciones de elementos finitos de lámina delgada, siendo una de ellas una nueva formulación que solo considera los desplazamientos de la superficie media del elemento como variables cinemáticas independizándose de los grados rotacionales de libertad.

Los objetivos principales del presente trabajo se resumen en:

- ♣ Extender una formulación de lámina delgada que utiliza únicamente grados traslacionales de libertad como variables nodales al contexto de problemas dinámicos no lineales en presencia de grandes cambios de formas, orientado a la simulación numérica de problemas de impacto de estructuras y de embutición de láminas metálicas.

Con este propósito una serie de requisitos parciales se deben cumplir:

- ♣ Implementación computacional en un código con esquema de integración temporal del tipo explícito.
- ♣ Determinación de un criterio de limitación del tamaño del paso de tiempo crítico  $\Delta t_{crit}$  en la nueva formulación de lámina delgada.
- ♣ Introducir un modelo constitutivo capaz de simular situaciones de grandes cambios de forma, y que considere la anisotropía plástica del material.
- ♣ Validación numérica de la herramienta propuesta.



### 1.3. CONTENIDO DEL TRABAJO

Para la materialización de los objetivos anteriormente nombrados el trabajo se ha estructurado en siete capítulos.

El capítulo 2 introduce los conceptos de la dinámica explícita no lineal, en donde se presentan los operadores fuerzas internas, fuerzas inerciales y fuerzas externas que definen a la ecuación de movimiento. Luego se trata el esquema de integración temporal basado en el método de las diferencias finitas que permite resolver las ecuaciones discretizadas de movimiento en forma explícita. Finalmente se presenta la forma de determinación del paso de tiempo  $\Delta t$  que asegure la estabilidad numérica del esquema de integración temporal.

En el capítulo 3 se presenta el modelo hipoeelástico utilizado en la definición de la ecuación constitutiva y el tratamiento de actualización de las tensiones de Cauchy. También se introduce el concepto de anisotropía plástica, las superficies de fluencia utilizadas en su modelación y las hipótesis comúnmente empleadas en la simulación numérica de procesos de embutición de chapa.

En el capítulo 4 se presentan una familia de nuevos elementos finitos triangulares planos desarrollados en los últimos años para el análisis de estructuras laminares. Luego se presenta como éstos evolucionan a formas más sencillas, hasta llegar al nuevo elemento de placa delgada que utiliza únicamente grados traslacionales de libertad como variables nodales.

En el capítulo 5 se presenta la validación numérica del nuevo elemento de lámina delgada, en el contexto de la dinámica no lineal en problemas que ocurren a altas velocidades en presencia de grandes deformaciones comparando su respuesta con la nueva formulación de lámina delgada *CST - DKT15* y con resultados experimentales.

El capítulo 6 se dedica exclusivamente al estudio de problemas de embutición de láminas metálicas. Para ello se estudian diferentes geometrías considerando la nueva formulación de lámina delgada y el modelo constitutivo hipoeelástico con superficie de fluencia anisotrópica. Se estudia la influencia de la anisotropía plástica sobre la formabilidad de la pieza metálica y se realizan comparaciones de los valores de deformaciones plásticas efectivas, deformaciones principales y deslizamientos con resultados numéricos y experimentales obtenidos por otros investigadores.

Finalmente en el capítulo 7 se presentan las conclusiones del estudio, se destacan las aportaciones originales y se sugieren futuras líneas de investigación.

Cabe señalar que con el fin realizar la simulación numérica de problemas de embutición de láminas metálicas se hacen uso de los algoritmos de contacto y rozamiento disponibles en el entorno académico, (algoritmos basados en el método de penalización) no entrándose en ningún momento a realizar nuevas aportaciones sobre los ya existentes.

## CAPÍTULO 2

# ECUACIONES DE MOVIMIENTO

### 2.1. INTRODUCCIÓN

Partiendo de los principios de la mecánica de los medios continuos, se describe un procedimiento para encontrar la respuesta dinámica no lineal de estructuras. El método de los elementos finitos y el de las diferencias finitas son utilizados en conjunto para resolver las ecuaciones de movimiento, las cuales son dadas en una forma general y por tanto válidas tanto para comportamiento lineal o no lineal ya sea geométrico, material o combinación de ambos.

La ecuación del principio de los trabajos virtuales (PTV) se plantea en términos de elementos finitos isoparamétricos en la configuración deformada al tiempo  $t$ . El sistema de ecuaciones diferenciales resultante, se resuelve mediante un esquema de integración temporal del tipo explícito en donde las aceleraciones y velocidades del sólido se expresan en función de los desplazamientos a través de expresiones en diferencias finitas, es decir, la nueva configuración al tiempo  $t + \Delta t$  es obtenida a partir de la descripción del movimiento en la configuración de equilibrio al tiempo  $t$ .

La introducción del concepto de matriz de masa concentrada, permite resolver el sistema de ecuaciones sin necesidad de costosas transformaciones matriciales. Dado que los algoritmos de integración explícitos son condicionalmente estables, es decir, el paso de tiempo  $\Delta t$  debe ser acotado a modo de asegurar que la respuesta sea estable, existiendo un paso de tiempo  $\Delta t_{crit}$  sobre el cual la respuesta se amplifica artificialmente. Diferentes expresiones para determinar el valor del paso de tiempo crítico en función de la frecuencia circular máxima del sistema discreto se encuentran en la literatura<sup>[B-5],[C-1]</sup>, en el presente trabajo el valor de este se determinará a partir del método de búsqueda del mayor autovalor del sistema discreto de acuerdo con el algoritmo de Mises<sup>[B-3]</sup>

Un código con las características anteriores se denomina en la literatura como hidrocódigo <sup>[B-2],[D-1],[D-2]</sup>, y es definido como un programa para la solución de problemas transitorios con grandes deformaciones que ocurren en un pequeño intervalo de tiempo, generalmente en presencia de muy altas velocidades <sup>[B-2]</sup>. El origen de los hidrocódigos nació en la necesidad de resolver problemas militares y de defensa, aunque hoy en día su rango de aplicación se extiende<sup>[G-1]</sup>



a problemas estructurales tales como de conformado de metales e impacto entre cuerpos.

## 2.2. LEYES DE MOVIMIENTO

### 2.2.1. FORMA DIFERENCIAL

Considerése el movimiento de un cuerpo de volumen  $V$  con respecto a un sistema coordinado cartesiano estacionario y asumamos que el cuerpo puede experimentar grandes desplazamientos y tener una respuesta constitutiva no lineal. Diferencialmente el problema se traducirá en encontrar el campo de desplazamientos materiales  $u_i({}^o\mathbf{x}, t)$  que satisfaga la ecuación de movimiento de Cauchy <sup>[M-1]</sup>,

$${}^t\rho {}^t\ddot{u}_i = \frac{\partial {}^t\sigma_{ij}}{\partial {}^tx_j} + {}^t\rho {}^tb_i \quad (2.1)$$

con :

$${}^t\sigma_{ij} = {}^t\sigma_{ji} \quad (2.2)$$

sobre el intervalo de tiempo  $t \in (0, t)$ , donde  $i$  y  $j$  varían de 1 al número de dimensiones del problema. Las condiciones de contorno pueden ser especificadas ya sea como desplazamientos impuestos o como tensiones. Los bordes donde los desplazamientos y tensiones son aplicados se denotarán por  $\Gamma_x$ ,  $\Gamma_\tau$  respectivamente, ver Figura 2.1.

$${}^tu_i = f_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{sobre } \Gamma_x \quad (2.3)$$

$${}^t_i = {}^t\sigma_{ij}n_j = h_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{sobre } \Gamma_\tau \quad (2.4)$$

y con condiciones iniciales dadas por:

$${}^ou_i = u_i({}^o\mathbf{x}) \quad (2.5)$$

$${}^o\dot{u}_i = \dot{u}_i({}^o\mathbf{x}) \quad (2.6)$$

donde  $n_j$  son las componentes del vector normal a la superficie, los superíndices izquierdos denotan la configuración en donde el cuerpo se encuentra, los subíndices derechos indican los ejes coordinados y los izquierdos la

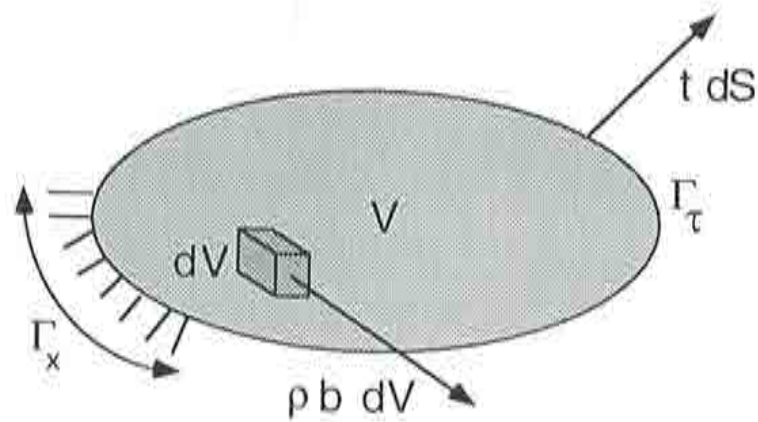


Figura 2.1 Sólido en una posición deformada al tiempo  $t$ .

configuración con respecto a la cual se mide la variable. En las expresiones anteriores  $\mathbf{x} = \mathbf{x}({}^0\mathbf{x}, t)$  es el vector de coordenadas espaciales y  ${}^0\mathbf{x}$  es el vector de coordenadas iniciales o materiales del sólido,  ${}^t\sigma_{ij}$  son las componentes cartesianas del tensor de tensiones verdaderas o de Cauchy,  ${}^t b_i$  son las componentes cartesianas de las fuerzas de cuerpo y  ${}^t\rho$  es la densidad.

El problema anterior quedará totalmente determinado cuando se considere una adecuada ecuación constitutiva que relacione las tensiones con los desplazamientos que experimenta el cuerpo.

### 2.2.2. FORMA VARIACIONAL

Para propósitos numéricos es más apropiado transformar la ecuación de movimiento de Cauchy (2.1) a su forma débil. Utilizando el método de los residuos ponderados, y eligiendo como funciones de peso al campo de desplazamientos virtuales  $\delta^t u_i$ , se tiene:

$$\int_{tV} \left( {}^t\rho \, {}^t\ddot{u}_i - \frac{\partial {}^t\sigma_{ij}}{\partial {}^t x_j} - {}^t\rho \, {}^t b_i \right) \delta^t u_i \, {}^t dV = 0 \quad (2.7)$$

con  $\delta^t \mathbf{u}$  satisfaciendo los mismos requerimientos de continuidad e integrabilidad que el vector solución  ${}^t \mathbf{u}$ , con la diferencia que :

$$\delta^t u_i = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_x \quad (2.8)$$

Aplicando el teorema de la divergencia a la ecuación (2.7), se tiene:

$$\int_{tV} {}^t\rho {}^t\ddot{u}_i \delta^t u_i {}^t dV = \int_{tV} {}^t\rho {}^t b_i \delta^t u_i {}^t dV + \int_{tS} h_i \delta^t u_i {}^t dS - \int_{tV} {}^t\sigma_{ij} \frac{\partial \delta^t u_i}{\partial {}^t x_j} {}^t dV \quad (2.9)$$

donde se puede apreciar las contribuciones de las fuerzas inerciales, externas e internas que actúan sobre el cuerpo.

$$F_i^{ine}({}^t\ddot{u}_i) = \int_{tV} {}^t\rho {}^t\ddot{u}_i \delta^t u_i {}^t dV \quad (2.10)$$

$$F_i^{ext}({}^t u_i) = \int_{tV} {}^t\rho {}^t b_i \delta^t u_i {}^t dV + \int_{tS} h_i \delta^t u_i {}^t dS \quad (2.11)$$

$$F_i^{int}({}^t u_i) = \int_{tV} {}^t\sigma_{ij} \frac{\partial \delta^t u_i}{\partial {}^t x_j} {}^t dV \quad (2.12)$$

luego el problema variacional se traduce en encontrar el campo de desplazamientos materiales  $\mathbf{u}({}^o\mathbf{x}, t)$  que satisfaga la ecuación:

$$F^{ine}({}^t\ddot{\mathbf{u}}) = F^{ext}({}^t\mathbf{u}) - F^{int}({}^t\mathbf{u}) \quad (2.13)$$

dado que las componentes cartesianas del tensor de deformación infinitesimal son simétricas<sup>[B-1]</sup>, el operador fuerza interna puede ser reescrito como:

$$F_i^{int}({}^t u_i) = \int_{tV} {}^t\sigma_{ij} \delta {}^t e_{ij} {}^t dV \quad (2.14)$$

donde  $\delta {}^t e_{ij}$  corresponde a la variación virtual del tensor de deformación<sup>[B-1]</sup>:

$$\delta {}^t e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta^t u_i}{\partial {}^t x_j} + \frac{\partial \delta^t u_j}{\partial {}^t x_i} \right) \quad (2.15)$$

con  $\delta^t u_i$  la variación virtual de las componentes de desplazamiento  ${}^t u_i$ , y el producto  ${}^t\sigma_{ij} \delta {}^t e_{ij}$  en (2.14) representando al trabajo de deformación en el tiempo  $t$  por unidad de volumen deformado.

Puesto que la masa del cuerpo durante el movimiento se conserva, de acuerdo con la ecuación de continuidad<sup>[M-1]</sup>, podemos escribir:

$${}^t\rho {}^t dV = {}^o\rho {}^o dV \quad (2.16)$$

luego el operador fuerza inercial puede ser expresado con respecto al volumen inicial, de la siguiente forma:

$$F_i^{inc}({}^t\ddot{u}_i) = \int_{{}^oV} {}^o\rho {}^t\ddot{u}_i \delta^t u_i {}^o dV \quad (2.17)$$

si se supone que las fuerzas de superficie son independientes del nivel de deformaciones que alcance el cuerpo, el operador fuerzas externas puede expresarse con respecto al volumen inicial  ${}^oV$ , como:

$$F_i^{ext}({}^t u_i) = \int_{{}^oV} {}^o\rho {}^t b_i \delta^t u_i {}^o dV + \int_{{}^oS} h_i \delta^t u_i {}^o dS \quad (2.18)$$

en el presente desarrollo la fuerzas de amortiguamiento viscoso han sido omitidas, pero pueden ser fácilmente incorporadas en la ecuación de equilibrio (2.13).

### 2.3. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

El objetivo de esta sección es evaluar las posiciones de equilibrio del sólido en puntos discretos del tiempo  $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$ , donde  $\Delta t$  es el incremento de tiempo. Dos alternativas distintas para encontrar las posiciones de equilibrio en puntos discretos del tiempo son posibles, así por ejemplo si se considera la forma débil de la ecuación de Cauchy con respecto a la última configuración conocida en el tiempo  $t$ , el esquema de integración en el tiempo será explícito, sin embargo cuando se considera la proxima configuración al tiempo  $t + \Delta t$  en donde todas las variables cinemáticas y estáticas aún no se conocen, el esquema de integración en el tiempo sera implícito (Newmark, Bossak-Newmark, Houbolt, etc. [B-1], [B-5]).

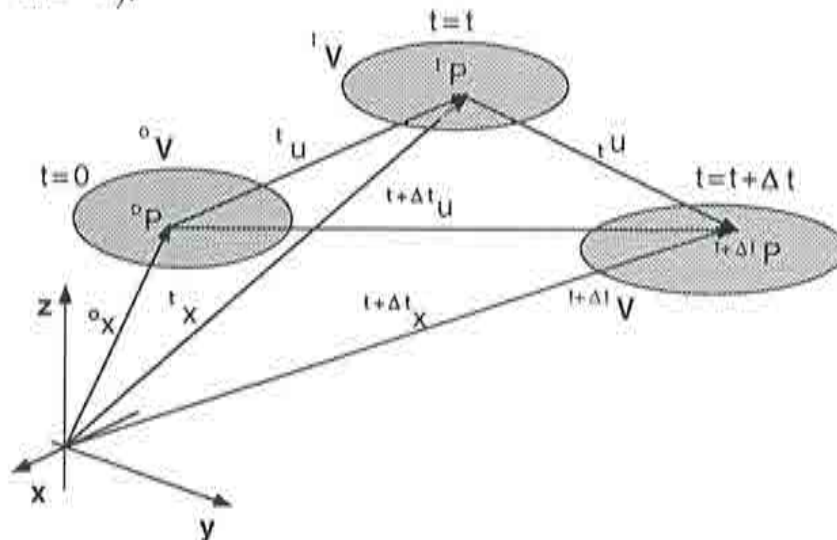


Figura 2.2 Movimiento del cuerpo en un sistema coordenado cartesiano estacionario. Distintas configuraciones deformadas.



La elección del esquema de integración a utilizar depende normalmente de tres factores: estabilidad, precisión y coste [B-3],[B-5]. En la presente investigación, se adoptará un esquema de integración del tipo explícito. Las razones de tal elección se discutirán en próximas secciones. Como ya se demostró, tanto los operadores fuerzas externas e inerciales pueden ser expresados con respecto a la configuración inicial en  $t = 0$ , una solución a la ecuación (2.13) puede ser obtenida refiriendo todas las variables del operador fuerzas internas a cualquiera de las configuraciones previamente calculadas. En la práctica sólo dos posibilidades dentro de un contexto lagrangiano † se utilizan, una solución en la cual todas las variables cinemáticas y estáticas se refieran a la configuración inicial del sólido al tiempo  $t = 0$  se define como formulación lagrangiana total (*FLT*)<sup>[B-1]</sup>, una solución en donde todas las variables cinemáticas y estáticas se refieran a la última configuración conocida al tiempo  $t$ , se definirá como formulación lagrangiana actualizada (*FLA*)<sup>[B-1]</sup>. Ambas formulaciones incluyen todos los efectos no lineales cinemáticos debido a los efectos de grandes desplazamientos y deformaciones. Sin embargo su correcta aplicación al caso de grandes deformaciones depende fundamentalmente del modelo constitutivo empleado, la única diferencia entre las dos está en la elección de diferentes configuraciones de referencia para las variables cinemáticas y estáticas. Si se utilizan adecuadas medidas de tensión y deformación en cada formulación (*FLA* o *FLT*) se deberían obtener idénticos resultados para un problema dado.

En el presente trabajo se utilizará una formulación lagrangiana actualizada para la descripción del movimiento de las partículas del sólido. Consecuentemente el tensor de tensiones de Cauchy es utilizado para expresar la ecuación constitutiva en la configuración deformada, por lo tanto, la forma débil de la ecuación de movimiento se escribirá, como:

$$F_i^{inc}(t\ddot{u}_i) = {}^tF_i^{ext}(t u_i) - \int_{tV} {}^t\sigma_{ij} \delta_t e_{ij} {}^t dV \quad (2.19)$$

de acuerdo con Figura 2.2, el movimiento de las partículas del sólido en la *FLA*, se describe por:

$${}^{t+\Delta t}x_i = {}^t x_i + {}_t u_i \quad (2.20)$$

$${}_t u_i = {}^{t+\Delta t}u_i - {}^t u_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.21)$$

donde  ${}_t u_i$  es el incremento de desplazamientos entre las configuraciones  $t$  y  $t+\Delta t$ . El tratamiento tensional, es decir, la determinación de la tensión de Cauchy en

---

† El movimiento de las partículas del sólido, es seguido desde la configuración inicial a la final del cuerpo, esta aproximación contrasta con la formulación euleriana usada normalmente en mecánica de fluidos, en donde la atención se centra en el movimiento de las partículas a través de un volumen de control ( $U^{-1}$ ).

la configuración  $t + \Delta t$  se discutirá en el próximo capítulo, por tener directa relación con el modelo constitutivo a emplear.

### 2.3.1. DISCRETIZACIÓN ESPACIAL

Considérese un dominio discretizado en elementos finitos isoparamétricos  $[O-1],[Z-1]$  en una configuración  $t$  arbitraria, con los desplazamientos  ${}^t u_{\alpha i}$  y las velocidades  ${}^t \dot{u}_{\alpha i}$  conocidas en los nodos, donde  $\alpha$  es el número de nodo e  $i$  corresponde a la dirección con respecto a un sistema cartesiano rectangular. Eligiendo adecuadas funciones de forma  $N_\alpha$ , los valores de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones pueden ser interpolados, en función de sus valores nodales:

$${}^t u_i = N_\alpha {}^t u_{\alpha i} \quad (2.22)$$

$${}^t \dot{u}_i = N_\alpha {}^t \dot{u}_{\alpha i} \quad (2.23)$$

$${}^t \ddot{u}_i = N_\alpha {}^t \ddot{u}_{\alpha i} \quad (2.24)$$

de manera análoga la variación virtual del desplazamiento y su gradiente se interpolan, de acuerdo con:

$$\delta {}^t u_i = N_\alpha \delta {}^t u_{\alpha i} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \delta {}^t u_i}{\partial {}^t x_j} = \frac{\partial N_\alpha}{\partial {}^t x_j} \delta {}^t u_{\alpha i} \quad (2.26)$$

si se sustituyen las relaciones anteriores en ecuaciones (2.17), (2.18) y (2.19), se tiene:

$$\left[ \int_{\circ V} N_\beta {}^\circ \rho N_\alpha {}^t \ddot{u}_{\beta i} {}^\circ dV + \int_{\circ V} {}^t \sigma_{ij} \frac{\partial N_\alpha}{\partial {}^t x_j} {}^\circ dV - \int_{\circ V} {}^\circ \rho b_i N_\alpha {}^\circ dV - \int_{\circ S} h_i N_\alpha {}^\circ dS \right] \delta {}^t u_{\alpha i} = 0 \quad (2.27)$$

puesto que los desplazamientos virtuales en los nodos,  $\delta^t u_{\alpha i}$  son arbitrarios, los términos entre paréntesis deben ser nulos. Luego las aceleraciones nodales pueden ser calculadas a partir de (2.27), como:

$$\left[ \int_{\sigma V} N_{\beta}{}^{\sigma} \rho N_{\alpha}{}^{\sigma} dV \right] {}^t \ddot{u}_{\beta i} = \left[ \int_{\sigma V} {}^{\sigma} \rho b_i N_{\alpha}{}^{\sigma} dV + \int_{\sigma S} h_i N_{\alpha}{}^{\sigma} dS \right] - \int_{\sigma V} {}^t \sigma_{ij} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial {}^t x_j} {}^t dV \quad (2.28)$$

la cual, matricialmente se expresa por:

$$\mathbf{M} {}^t \ddot{\mathbf{u}} = {}^t \mathbf{F}^{ext} - {}^t \mathbf{F}^{int}({}^t \mathbf{u}) \quad (2.29)$$

con:

$${}^t \mathbf{F}^{int}({}^t \mathbf{u}) = \sum_e \int_{\sigma V(e)} {}^t \mathbf{B}_L^T {}^t \boldsymbol{\sigma} {}^t dV \quad (2.30)$$

en donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de masa consistente referida a la configuración inicial,  ${}^t \ddot{\mathbf{u}}$  es el vector de aceleraciones nodales,  ${}^t \mathbf{F}^{ext}$  es el vector de fuerzas externas con respecto a la configuración inicial,  ${}^t \mathbf{F}^{int}({}^t \mathbf{u})$  es la expresión discreta del vector global de fuerzas internas,  ${}^t \mathbf{B}_L$  es la matriz de deformación lineal  $^{[B-1]}$  del tipo de elemento elegido y  ${}^t \boldsymbol{\sigma}$  el vector de tensiones de Cauchy. Matemáticamente la ecuación (2.29) representa un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden de coeficientes variables.

### 2.3.2. INTEGRACIÓN TEMPORAL EXPLICITA

La solución numérica del sistema de ecuaciones de movimiento representado por (2.29), se realizará mediante un esquema de integración temporal explícita. Las razones que motivaron a tal elección se pueden resumir en:

- la simplicidad en la evaluación de las incógnitas nodales, cuando la matriz de masa es construida diagonal. No siendo necesario resolver un sistema de ecuaciones en el proceso de búsqueda de las incógnitas nodales.
- cuando la malla crece el esfuerzo computacional aumenta proporcionalmente al número de grados de libertad del sistema.
- computacionalmente atractivo a causa de las pocas operaciones requeridas en cada paso de tiempo y el reducido espacio de memoria utilizado, sólo la solución para el tiempo  $t$  se almacena dentro del código, no siendo necesario construir la matriz de rigidez global del sistema, lo que en problemas de gran escala se traduce en importantes ahorros de memoria.



Estas ventajas de los métodos explícitos vienen acompañadas por el inconveniente de la estabilidad numérica  $^{[B-2],[B-5]}$ , dependiendo del tamaño del intervalo  $\Delta t$  de integración, existiendo un intervalo  $\Delta t$  crítico por encima del cual la solución se amplifica de forma artificial. Esto significa que en problemas prácticos el número de pasos de tiempo puede llegar a ser del orden de  $10^4 - 10^5$ . Cabe señalar que un gran número de problemas no lineales requieren pasos de tiempo pequeños a modo de alcanzar una respuesta adecuada independientemente de las consideraciones de estabilidad numérica  $^{[H-1]}$ , en particular los problemas de propagación de ondas, es decir, en aquellos en donde el frente de ondas es de importancia ingenieril. Típicamente los problemas de impacto entre cuerpos caen dentro de esta categoría.

En los métodos explícitos expresiones en diferencias finitas en el dominio del tiempo son usadas para aproximar las aceleraciones y velocidades en función de los desplazamientos. Teóricamente un gran número de expresiones en diferencias finitas podrían ser utilizadas, siendo el método de las diferencias centrales el más recomendado  $^{[K-1],[B-2],[C-1]}$ .

El método de las diferencias centrales se basa en una aproximación de segundo orden en  $\Delta t$ , la cual se deriva a partir de expansiones en series de Taylor  $^{[B-2]}$ . Un superíndice  $n$  indicará que la función se evaluará en  $t = t^n$ , así se tiene:

$$f^n = f^{n+1/2} - \frac{\partial f^{n+1/2}}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \Delta t^{n+1/2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \left( \frac{1}{2} \Delta t^{n+1/2} \right)^2 + \dots \quad (2.31)$$

$$f^{n+1} = f^{n+1/2} + \frac{\partial f^{n+1/2}}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \Delta t^{n+1/2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \left( \frac{1}{2} \Delta t^{n+1/2} \right)^2 + \dots \quad (2.32)$$

restando la segunda ecuación de la primera, se obtiene una regla de integración explícita de segundo orden en  $\Delta t$ .

$$f^{n+1} = f^n + \frac{\partial f^{n+1/2}}{\partial t} \Delta t^{n+1/2} + O((\Delta t^{n+1/2})^3) \quad (2.33)$$

tomándose  $f^{n+1}$  igual al desplazamiento en  $t+\Delta t$   $\mathbf{u}$ , se resuelven los siguientes pasos:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{u} = {}^t \mathbf{u} + {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \dot{\mathbf{u}} \Delta t + \frac{\Delta t}{2} \quad (2.34)$$

$${}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \dot{\mathbf{u}} = {}^{t-\frac{\Delta t}{2}} \dot{\mathbf{u}} + {}^t \ddot{\mathbf{u}} \Delta t \quad (2.35)$$



con:

$$\Delta t^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \frac{1}{2}(\Delta t^t + \Delta t^{t+\Delta t}) \quad (2.36)$$

el algoritmo supone conocidos los desplazamientos nodales en el instante  $t$  y las velocidades nodales en  $t - \frac{\Delta t}{2}$ , así como las fuerzas externas e internas. Donde  $\Delta t^t$  y  $\Delta t^{t+\Delta t}$  son dos intervalos de tiempo sucesivos, entre los instantes  $(t - \Delta t, t)$  y  $(t, t + \Delta t)$ , respectivamente. Este esquema de integración no amortiguado junto con la ecuación (2.29) es utilizado para avanzar la posición de los nodos en el tiempo.

### 2.3.3. MATRIZ DE MASA CONCENTRADA

En ecuación (2.29)  $\mathbf{M}$  representa la matriz de masa consistente, la cual es la matriz que resulta al aplicar en forma directa el método de elementos finitos. Resultando una matriz no diagonal que genera un sistema de ecuaciones poco atractivo desde el punto de vista computacional pues se produce un acoplamiento entre las ecuaciones asociadas a las distintas incógnitas nodales. A fin de evitar este problema se construye una matriz de masa equivalente conocida como matriz de masa concentrada la cual sólo posee términos sobre su diagonal principal.

La matriz de masa concentrada para un elemento se obtiene distribuyendo la masa del elemento en proporción a los términos de la matriz de masa consistente<sup>[B-2],[H-2]</sup>. Donde para un nodo  $j$  genérico, el término de masa diagonal  $m_{jj}$  de la matriz de masa concentrada se calcula de acuerdo con:

$$m_{jj} = \left( \frac{\int_V \rho N_j N_j dV}{\sum_{k=1}^n \int_V \rho N_k N_k dV} \right) \int_V \rho dV \quad (2.37)$$

donde  $n$  es el número de nodos del elemento,  $\rho$  es la densidad de masa y  $V$  representa el volumen ocupado por el elemento.

El concepto de matriz de masa concentrada permite resolver el sistema de ecuaciones definido por la ecuación (2.29), de una forma eficiente y a un bajo coste computacional. Puesto que la matriz de masa así construida tiene sólo términos sobre su diagonal principal, transformando el sistema de ecuaciones de (2.29) en un conjunto de  $n$  ecuaciones independientes.

## 2.4. ESTABILIDAD NUMÉRICA

Como ya se comentó anteriormente los algoritmos de integración temporal del tipo explícito son condicionalmente estables, siendo necesario limitar el tamaño del incremento de tiempo  $\Delta t$  a modo de asegurar la estabilidad numérica de la respuesta, es decir:

$$\Delta t \leq \Delta t_{crit} \quad (2.38)$$

en problemas unidimensionales el valor del paso de tiempo es acotado por el número de Courant <sup>[B-2]</sup>:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c} \quad (2.39)$$

donde  $\Delta x$  es la longitud del elemento más pequeño y  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  es la velocidad de transmisión de las ondas. En el caso de 3D, una expresión para el tiempo crítico es dada en referencia [K-1] para análisis lineal y mallas regulares:

$$\Delta t \leq \Delta t_{crit} = \frac{2}{\omega_n} \quad (2.40)$$

donde  $\omega_n$  es la frecuencia natural más alta del sistema discreto y puede ser calculada a partir de la solución del problema de autovalores. Dado que el valor de  $\omega_n$  no se mantiene constante durante el análisis, modificándose en función de las características de no linealidad del problema <sup>[B-1]</sup>, es necesario recalcularlo el valor de  $\Delta t_{crit}$  cada cierto número de pasos de tiempo a modo de asegurar la estabilidad numérica de la respuesta. A modo de evitar el cálculo de  $\omega_n$ , muchos autores utilizan factores de seguridad con la siguiente relación aproximada para estimar el valor del tiempo crítico <sup>[K-1]</sup>:

$$\Delta t_{crit} = \gamma' L^{(c)} \sqrt{\left( \frac{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right)} \quad (2.41)$$

donde  $\gamma'$  es un factor de seguridad,  $L^{(c)}$  es la longitud característica del elemento y  $E, \nu$  y  $\rho$  representan el módulo de elasticidad, el coeficiente de Poisson y la densidad del material respectivamente. La mayoría de los códigos del tipo explícito utilizan relaciones del tipo de (2.41) en conjunto con factores de seguridad en la evaluación del paso de tiempo crítico, por ejemplo se encuentra que DYNA2D toma un factor de seguridad de 0.67, 0.90 en DYNA3D y de 0.25 en TENSOR (ver referencias [D-1],[D-2] y [T-1] respectivamente).

Bicanic <sup>[B-4]</sup> ha sugerido que proceder de acuerdo con la ecuación (2.41) no siempre es un método adecuado, y puede llegar a ser hasta dos veces más

costoso que calcular el valor de la frecuencia máxima del sistema discreto. En el presente trabajo siguiendo a Bicanic se opta por el cálculo de la frecuencia máxima  $\omega_{max}$  del sistema discreto, para ello mediante la utilización de técnicas de iteración vectorial [B-3] se evalúa el valor de  $\omega_{max}$ , y mediante la ecuación (2.40) más la aplicación de un factor de seguridad  $\gamma' = 0.75$  se determina el paso de tiempo crítico por:

$$\Delta t \leq \Delta t_{crit} = \gamma' \left( \frac{2}{\omega_n} \right) \quad (2.42)$$

#### 2.4.1. ALGORITMO DE BÚSQUEDA DE LA FRECUENCIA CIRCULAR MÁXIMA.

El problema de determinar solamente el valor de la frecuencia máxima o mínima y sus respectivas formas modales en un sistema discreto ha sido abordado en la referencia [B-3], en donde la ecuación básica a resolver es dada por:

$$\mathbf{K}\mathbf{A} = \Lambda\mathbf{M}\mathbf{A} \quad (2.43)$$

donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez global de  $(n \times n)$  y  $\mathbf{M}$  es la matriz de masa de  $(n \times n)$  para el modelo de elementos finitos.  $\mathbf{A}$  es la matriz modal en la que cada columna es un autovector y  $\Lambda$  es una matriz diagonal conteniendo a los autovalores  $\omega_1^2, \dots, \omega_n^2$  como elementos de su diagonal. El problema de autovalores definido por la ecuación anterior corresponde a un sistema algebraico de  $n$  ecuaciones lineales y homogéneas. Puesto que solamente nos interesa el valor de la frecuencia máxima (mayor autovalor de (2.43)) y su correspondiente forma modal, se adoptará el algoritmo de von Mises el cual permite conocer el autovector  $\mathbf{A}_n$  correspondiente al mayor autovalor  $\omega_n^2$ . La ventaja de utilizar este método radica en que no es necesario construir la matriz de rigidez global del sistema y de este modo ser consecuentes con el esquema de integración temporal.

En este método se parte considerando un valor para  $\omega_n^2 = 1$ , y un valor para el autovector  $\mathbf{A}_n = \mathbf{x}_1$ , y puesto que este par  $(\omega_n^2, \mathbf{A}_n)$  debe satisfacer (2.43), se tiene:

$$\mathbf{R}_1 = \{1\}\mathbf{M}\mathbf{x}_1 \quad (2.44)$$

donde  $\mathbf{x}_1$  es un vector elegido arbitrariamente, dado que  $\mathbf{K}\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{R}_1$  salvo que  $\mathbf{x}_1$  sea realmente el autovector buscado, se tendrá:

$$\mathbf{K}\mathbf{x}_2 = \mathbf{R}_1 \quad ; \quad \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \quad (2.45)$$

donde  $\mathbf{x}_2$  es la solución correspondiente a las fuerzas aplicadas  $\mathbf{R}_1$ . Luego un esquema iterativo se realiza hasta que  $\mathbf{x}_1 \approx \mathbf{x}_2$ . Computacionalmente es más efectivo proceder de la siguiente forma [B-2]: asumir un vector de partida  $\mathbf{x}_{k=1} = \mathbf{1}$  y calcular el vector de fuerzas globales como ensamblaje de cada una de las contribuciones elementales, es decir:

$$\mathbf{R}_k = \sum_e \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{x}_k^{(e)} \quad (2.46)$$

donde  $\mathbf{K}^{(e)}$  es la matriz de rigidez elemental con respecto al sistema coordenado global.

$$\bar{\mathbf{x}}_{k+1} \mathbf{M} = \mathbf{R}_k \quad (2.47)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{k+1} = \sum_e \mathbf{K}^{(e)} \bar{\mathbf{x}}_{k+1}^{(e)} \quad (2.48)$$

$$\rho(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}) = \frac{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \sum_e \mathbf{K}^{(e)} \bar{\mathbf{x}}_{k+1}^{(e)}}{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \sum_e \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{x}_k^{(e)}} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{R}_{k+1} = \frac{\bar{\mathbf{R}}_{k+1}}{(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{R}_k)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.50)$$

la expresión (2.49) corresponde al cociente de Rayleigh, y es utilizado como aproximación al valor de la frecuencia circular máxima  $\omega_n^2$ . Se demuestra en la referencia [B-3] que:

$$\mathbf{R}_{k+1} \rightarrow \mathbf{K} \mathbf{A}_n \quad \text{y} \quad \rho(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}) \rightarrow \omega_n^2 \quad \text{cuando} \quad k \rightarrow \infty$$

la convergencia se logra cuando:

$$\frac{|\omega_n^{2k+1} - \omega_n^{2k}|}{\omega_n^{2k+1}} \leq \text{toler} \quad (2.51)$$

obteniéndose finalmente:

$$\omega_n^2 \approx \rho(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}) \quad \text{y} \quad \mathbf{A}_n \approx \frac{\bar{\mathbf{x}}_{k+1}}{(\bar{\mathbf{x}}_{k+1}^T \mathbf{R}_k)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.52)$$

con  $\omega_n^2$  conocido se procede a evaluar el paso de tiempo crítico de acuerdo con la ecuación (2.42).



Este procedimiento de búsqueda y determinación del paso de tiempo crítico, debe ser repetido durante el análisis de acuerdo con las características de no linealidad que presente el problema en particular. Cabe destacar que las relaciones del tipo (2.41) tienen un carácter muy limitado, puesto que los requisitos necesarios para su correcta aplicación lo son (mallas regulares, problemas elásticos lineales, etc.) y por lo tanto subestiman el valor del tiempo crítico. No ocurre así en el caso de utilizar el procedimiento anterior en conjunto con la ecuación (2.42), lográndose en este caso disminuir el coste computacional al tener una estimación de mejor calidad del paso de tiempo crítico.

## 2.5. CONCLUSIONES

Se han presentado las ecuaciones de movimiento que gobiernan el comportamiento de estructuras, sometidas a cargas dinámicas. Las ecuaciones resultantes se resuelven en el tiempo mediante un esquema de integración del tipo explícito y espacialmente mediante un esquema de elementos finitos isoparamétricos, describiendo el movimiento de las partículas del sólido de acuerdo con una formulación lagrangiana actualizada. La ventaja de la utilización de una formulación lagrangiana actualizada en hidrocódigos es que sólo intervienen los términos lineales de la matriz de deformación  $\{B_L$  en el cálculo del vector de fuerzas internas.

La condición para que un método de integración del tipo explícito sea eficiente, es que la matriz de masa sea concentrada a fin de no tener que resolver sistemas de ecuaciones que requieran la inversión de matrices. La construcción de la matriz de masa concentrada permite operar de una manera sencilla, eficiente y de bajo coste computacional en la actualización de la configuración del sólido. Siendo conveniente, en este tipo de esquemas la utilización de elementos finitos de bajo orden a modo de simplificar la construcción de la matriz de masa concentrada.

La principal desventaja de este tipo de esquemas de integración es la limitación en el tamaño del paso de tiempo. El procedimiento de búsqueda de la mayor frecuencia circular del sistema discreto permite operar de una forma más eficiente desde el punto de vista computacional y teórico, al considerar en el cálculo del tiempo crítico las propiedades físicas reales de la estructura.

## 2.6. REFERENCIAS

- [B-1] **Bathe, K.J.** -*Finite elements procedures in engineering analysis*, - Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1983.
- [B-2] **Benson, D.J.** -*Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes*, - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 99, pp.235 -394, 1992.
- [B-3] **Bathe, K. J. and Wilson, E.L.** -*Numerical methods in finite element analysis*, -Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1976.
- [B-4] **Bicanic, N.** -*Nonlinear finite element response of concrete structures*, - Ph. D. Thesis, Univ. College, Swansea, Ref. C/Ph/ /78, 1978.
- [B-5] **Barbat, A. and Miquel, J.,** -*Estructuras sometidas a acciones sísmicas (Cálculo por ordenador)*, -CIMNE, Barcelona, España, 1994.
- [C-1] **Caldis, E.S.** -*A preliminary study of large deformation transient dynamic finite element analysis*, -M. Sc. Thesis Univ. College, Swansea, Sept., 1978.
- [D-1] **Hallquist, J. O.** -*User's manual for DYNA2D-An explicit two-dimensional hydrodynamic finite element code with interactive rezoning*, -Lawrence Livermore National Laboratory, UCID-19899, Rev. 2, 1987.
- [D-2] **Hallquist, J. O. and Benson D. J.** -*DYNA3D user's manual (nonlinear dynamic analysis of structures in three dimensions)*, -Lawrence Livermore National Laboratory, UCID-19592, Rev. 3, 1987.
- [G-1] **Garcia, C.** -*Un modelo numérico para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones*, -Tesis Doctoral, UPC, Barcelona, junio 1993.
- [H-1] **Halleux, J.P. and Casadei, F.** -*Transient large strain finite element analysis of solids*, -Computational Methods for Non-linear Problems, Pineridge Press Ltda, Swansea, U.K. 1987.
- [H-2] **Hinton, E., Rock, T. and Zienkiewicz, O.C.** -*A note on mass lumping and related processes in the finite elements method*, -Earthquake Eng. and Struct. Dynamics, Vol. 4, pp. 245-259, 1976.
- [K-1] **Krieg, R.D.** -*Unconditional stability in numerical time integration methods*, - Trans. A.S.M.E., J. of Applied Mechanics, pp. 417-421; June 1973.
- [M-1] **Malvern, L. E.** -*Introduction to the Mechanics of a Continuum Medium*, - Printice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.
- [O-1] **Oñate, E.** -*Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos. Análisis estático lineal*, - CIMNE, Barcelona, 1992.

- [T-1] Maenchen, G. and Sack, S. -*The TENSOR Code, in: Methods in Computational Physics, Vol. 3*, -Academic Press, New York, 1964.
- [Z-1] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. -*The finite element method Vol. II*, - McGraw Hill, 1991.



## CAPÍTULO 3

### MODELOS CONSTITUTIVOS

#### 3.1. INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se introducen las ecuaciones constitutivas empleadas para modelar el comportamiento anisótropo de piezas de chapa fabricadas mediante procesos industriales de embutición.

En una primera parte se describe el modelo elastoplástico para grandes deformaciones que se utiliza, el cual se basa en el concepto de hipoeelasticidad<sup>[B-2],[H-1]</sup>, modelo que puede considerarse como estandar en el contexto de hidrocódigos <sup>[D-2],[D-3],[H-1]</sup>. A continuación se presenta el esquema numérico utilizado en la actualización del tensor de tensiones de Cauchy<sup>[B-2]</sup>. Se introduce el concepto de tasa de tensiones, considerándose a la tasa Jaumann como medida objetiva de la derivada material del tensor de tensiones de Cauchy. Se presenta también un algoritmo de dos pasos conocido en la literatura como  $JJ$ <sup>[B-2],[G-1]</sup> para la actualización de la tensiones de Cauchy entre dos configuraciones.

En una segunda parte se introduce el concepto de anisotropía plástica aplicada a materiales con simetría ortotrópica. Se presentan dos criterios de fluencia desarrollados por Hill<sup>[H-2],[H-3]</sup>, los cuales son particularizados para estados de tensión plana y *anisotropía normal*, hipótesis normalmente utilizadas en la modelación numérica de problemas de estampación de chapas <sup>[H-2],[C-2],[V-1],[Z-2]</sup>.

Se presentan expresiones de la tasa de deformación plástica efectiva para cada uno de los criterios, al igual que se discuten las principales limitaciones de cada una de las superficies de fluencia. Se desarrollan dos algoritmos de corrección de las tensiones predictoras elásticas dependiendo de la superficie de fluencia anisotrópica que se utilice. Para el primer criterio de Hill<sup>[H-2]</sup> se presenta una modificación al algoritmo de integración numérica propuesto por Simo et al.<sup>[S-1],[S-2]</sup> y Jetteur<sup>[J-1]</sup> para el criterio de von Mises, para el segundo criterio<sup>[H-3]</sup> se procede mediante un algoritmo del tipo de Euler hacia atrás (backward-Euler)<sup>[C-2]</sup> estandar.



Finalmente se presentan con caracter informativo dos nuevas superficies de fluencia desarrolladas en los últimos años, para el tratamiento de la anisotropía plástica en chapas metálicas.

### 3.2. MODELOS BASADOS EN HIPOELASTICIDAD

Este tipo de modelos ha sido y sigue siendo utilizado en muchos códigos, sobre todo en el contexto de hidrocódigos<sup>[D-2],[D-3],[H-1]</sup>. La razón de tal popularidad se debe a que los mismos son una extensión *ad hoc* de las teorías y códigos de la plasticidad infinitesimal<sup>[N-1],[H-1]</sup>. Las hipótesis fundamentales en que se basan este tipo de modelos, se pueden resumir en:

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}(d_{kl} - d_{kl}^p) \quad (3.1)$$

$$d_{kl} = d_{kl}^e + d_{kl}^p \quad (3.2)$$

$$d_{kl}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \quad (3.3)$$

en donde  $\bar{\sigma}_{ij}$  son las componentes de una derivada objetiva del tensor de tensiones de Cauchy,  $d_{kl}^e$  y  $d_{kl}^p$  corresponden a la parte elástica y plástica del tensor velocidad de deformación, el cual se define como la parte simétrica del tensor espacial de velocidad  $\mathbf{l}$ <sup>[M-1]</sup>:

$$l_{ij} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}(l_{ij} + l_{ij}^T) + \frac{1}{2}(l_{ij} - l_{ij}^T) = d_{ij} + \omega_{ij} \quad (3.4)$$

con:

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad ; \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.5)$$

en donde  $\omega_{ij}$  representa la parte antisimétrica del tensor espacial de velocidad  $\mathbf{l}$  y se conoce con el nombre de tensor *spin*. El tensor constitutivo de cuarto orden  $\mathbf{C}$  de la ecuación (3.1), en este contexto se considera constante e igual al de la elasticidad infinitesimal<sup>[G-1]</sup>.

En la configuración espacial la derivada material del tensor de tensiones de Cauchy  $\dot{\sigma}_{ij}$  no satisface el principio de objetividad<sup>[H-7]</sup>, es decir, no se transforma adecuadamente cuando el sólido realiza un movimiento de cuerpo rígido. Es necesario en la definición de la ecuación constitutiva (ecuación 3.1) operar con una derivada objetiva del tensor de tensiones de Cauchy. Esta clase de derivada se conoce con el nombre de *tasa de tensión*, y puede escribirse en función de la derivada material del tensor de tensiones de Cauchy y de algún tensor de rotación genérico  $\boldsymbol{\pi}$ , como:

$$\bar{\sigma} = \dot{\sigma} - \pi\sigma + \sigma\pi \quad (3.6)$$

en donde, los términos de transporte  $-\pi\sigma + \sigma\pi$  son incluidos para satisfacer el principio de objetividad<sup>[H-7]</sup>. En la práctica las tres tasas de tensiones más utilizadas son la tasa de Jaumann, la tasa de Truesdell y la tasa de Green-Naghdi, una discusión detallada de cada una de ellas se encuentra en las referencias [B-2] y [P-1]. La elección de una tasa de tensiones objetiva se basa en la conveniencia desde el punto de vista computacional y la mayoría de los hidrocódigos utilizan la tasa de Jaumann, la cual se define como la derivada de Lie del tensor de tensiones de Cauchy con respecto a un sistema coordinado cartesiano bajo la hipótesis que el movimiento es puramente rotacional<sup>[B-2]</sup>. En la presente investigación, en la definición de la ecuación constitutiva se empleará la tasa de tensiones de Jaumann. Matemáticamente, se expresa por:

$$\bar{\sigma}^J = \dot{\sigma} - \omega\sigma + \sigma\omega \quad (3.7)$$

La mayor crítica en el uso de esta tasa de tensiones en códigos explícitos, es la respuesta oscilatoria que se genera bajo estados de carga de corte puro cuando se utiliza endurecimiento cinemático, en la teoría de plasticidad de von Mises<sup>[J-2]</sup>. El endurecimiento cinemático se presenta en la modelación del efecto Bauschinger, y es la reducción en la tensión de fluencia debido a cargas cíclicas. Para evitar este fenómeno algunos autores proponen reemplazar el tensor *spin* por otro antisimétrico, o seguir un procedimiento similar al utilizado en el código DYNA2D<sup>[D-3]</sup>, en donde la tasa de Green-Naghdi se utiliza exclusivamente en presencia de endurecimiento cinemático. Desde un punto de vista computacional el uso de la tasa de tensiones de Green-Naghdi es complicado, puesto que su evaluación necesita del tensor de rotación  $\mathbf{R}$ , el cual se obtiene a partir de la descomposición polar del tensor gradiente de deformación  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ <sup>[M-1]</sup>, lo que en problemas 3D se complica transformándose en un problema adicional al de la objetividad.

Cabe señalar que desde el punto de vista conceptual los modelos hipocelásticos, presentan el inconveniente de disipar energía en régimen elástico<sup>[G-1]</sup>. Luego no son elásticos en el sentido de la termodinámica, sin embargo, para problemas de plasticidad este efecto no tiene consecuencias importantes.

### 3.2.1 Implementación Numérica de Modelos Hipoelásticos

En esta sección se presenta el esquema de integración numérica empleado en la actualización de las tensiones de Cauchy. En la práctica varios esquemas de integración son posibles dependiendo de la tasa de tensiones objetiva que se elija. Una discusión sobre la implementación numérica de cada una de ellas es dada en la referencia [G-1].

El problema básico es determinar el estado tensional alcanzado por el sólido en la configuración al tiempo  $t + \Delta t$ , conocido el estado tensional en la configuración anterior al tiempo  $t$ . Matemáticamente se puede expresar, mediante la siguiente ecuación:

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} = {}^t\sigma_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}\Delta t \quad (3.8)$$

puesto que la derivada material del tensor de tensiones de Cauchy no es una derivada objetiva, se reemplaza por la tasa de tensiones de Jaumann, definida de acuerdo con la ecuación (3.7):

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} = {}^t\sigma_{ij} + (C_{ijkl}d_{kl} + {}^t\sigma_{ip}{}^t\omega_{jp} + {}^t\sigma_{pj}{}^t\omega_{ip})\Delta t \quad (3.9)$$

En presencia de grandes deformaciones los requerimientos de objetividad incremental<sup>[H-7]</sup> obligan a evaluar el incremento de tensiones  $C_{ijkl}d_{kl}\Delta t$  y los términos de transporte en la configuración intermedia  ${}^{t+\frac{\Delta t}{2}}V$  [B-2],[H-6] (ver Apéndice 3A), la cual se define de acuerdo con:

$${}^{t+\frac{\Delta t}{2}}x_i = \frac{1}{2}({}^{t+\Delta t}x_i + {}^tx_i) \quad (3.10)$$

En un primer paso, las tensiones son transportadas a la configuración intermedia:

$${}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\sigma_{ij}^* = {}^t\sigma_{ij} + ({}^t\sigma_{ip}{}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\omega_{jp} + {}^t\sigma_{pj}{}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\omega_{ip})\frac{\Delta t}{2} \quad (3.11)$$

las nuevas tensiones de Cauchy, en la configuración intermedia  $t + \frac{\Delta t}{2}$ , se evalúan de acuerdo con:

$${}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\sigma_{ij} = {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\sigma_{ij}^* + C_{ijkl}{}^{t+\frac{\Delta t}{2}}d_{kl}\Delta t \quad (3.12)$$

puesto que,  ${}^{t+\frac{\Delta t}{2}}d_{kl}\Delta t$  no se conoce a priori, se supone que todo el incremento de deformaciones en el paso de tiempo  $\Delta t$  es elástico, es decir:

$${}^{t+\frac{\Delta t}{2}}d_{kl}^e = {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}d_{kl} \quad (3.13)$$



con el valor de la *tensión predictorica elástica* conocida de acuerdo con las ecuaciones (3.12) y (3.13), se procede a verificar el criterio de fluencia adoptado:

$${}^{t+\frac{\Delta t}{2}}f = {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}f({}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\sigma_{ij}, {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}q) \leq 0 \quad (3.14)$$

en donde  ${}^{t+\frac{\Delta t}{2}}q$  representa al conjunto de variables internas evaluadas en la configuración intermedia. Considerando la ecuación (3.14), si se está dentro de la superficie de fluencia el comportamiento es elástico y la hipótesis inicial es correcta, en caso contrario se procede a la utilización de un algoritmo *corrector* de las tensiones  ${}^{[C-1],[J-1]}$ .

Finalmente en un segundo paso, se procede a transformar las tensiones corregidas a la configuración final en  $t + \Delta t$ :

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} = {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\sigma_{ij} + ({}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\sigma_{ip} \cdot {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\omega_{jp} + {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\sigma_{pj} \cdot {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\omega_{ip}) \frac{\Delta t}{2} \quad (3.15)$$

este algoritmo de dos pasos se denomina en la literatura como  $\Pi^{[G-1],[B-2]}$ . Cabe señalar que los términos de transporte en la relación (3.11) satisfacen objetividad incremental sólo en un sentido infinitesimal  ${}^{[B-1]}$ . Sin embargo, en códigos con esquemas de integración temporal del tipo explícito los incrementos de desplazamientos y rotación son muy pequeños, y la objetividad incremental se satisface de forma natural  ${}^{[H-1]}$ .

### 3.3. ECUACIONES CONSTITUTIVAS PARA MATERIALES ANISOTRÓPOS

A continuación se presentan las ecuaciones constitutivas empleadas en el presente trabajo para la modelación numérica de materiales anisotrópos. En lo que sigue, los desarrollos se restringirán a materiales anisotrópos con simetría ortótropa, o sea, materiales que poseen tres planos mutuamente ortogonales de simetría en cada punto  ${}^{[H-2]}$ . Esta hipótesis dentro de un contexto de problemas de embutición de chapa delgada, se considera adecuada puesto que la mayoría de los materiales fabricados mediante algún proceso industrial son ortotrópos  ${}^{[B-3],[V-1]}$ .

### 3.3.1 Modelo anisótropo de Hill 48

Por analogía con el criterio de von Mises para materiales isótropos, Hill<sup>[H-2]</sup> propuso una función cuadrática para describir la superficie de fluencia de metales con comportamiento ortótropo:

$$f = F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2 - 1 = 0 \quad (3.16)$$

en donde los seis parámetros  $F, G, H, L, M$  y  $N$  caracterizan el comportamiento ortótropo del material y el sistema de ejes 1-2-3 se encuentra en las direcciones en donde se desarrolla la anisotropía. La función anterior referida a cualquier otro sistema de ejes cambia en la forma en que lo hagan sus componentes de tensión. Por razones de implementación numérica del algoritmo de integración de la ecuación constitutiva, es conveniente reexpresar la relación (3.16) de la siguiente forma:

$$f_2 = \sigma_e^2 - \sigma_y^2 = 0 \quad (3.17)$$

donde  $\sigma_y$  corresponde a la tensión de comparación, la cual se determina a partir de la relación de *Ludwik - Nadai*<sup>†</sup> para el material bajo estudio. Y la tensión efectiva  $\sigma_e$  se expresa por:

$$2\sigma_e^2 = \alpha_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \alpha_{23}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \alpha_{31}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6\alpha_{44}\sigma_{12}^2 + 6\alpha_{55}\sigma_{23}^2 + 6\alpha_{66}\sigma_{31}^2 \quad (3.18)$$

en donde los valores de los coeficientes  $\alpha_{ij}$  se obtienen a partir de ensayos de tracción uniaxial en cada una de las direcciones de ortotropía. Sean  $\bar{\sigma}_{11}$ ,  $\bar{\sigma}_{22}$ ,  $\bar{\sigma}_{33}$ , las tensiones de fluencia en las direcciones 1, 2 y 3 respectivamente y  $\bar{\sigma}_{12}$ ,  $\bar{\sigma}_{23}$ ,  $\bar{\sigma}_{31}$  las tensiones de cortante en fluencia, evaluando en las relaciones (3.16) y (3.18), se tiene:

$$\frac{1}{2}\alpha_{12} = H\sigma_y^2 = \left(\frac{\sigma_y}{\bar{\sigma}_{11}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\bar{\sigma}_{22}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_y}{\bar{\sigma}_{33}}\right)^2 \quad (3.19)$$

†

$$\sigma_y = C(\epsilon_0 + \epsilon_{ps})^n$$

donde  $\sigma_y$  es la tensión de comparación,  $C$  es la constante de Ludwik-Nadai,  $\epsilon_{ps}$  es la deformación plástica efectiva y  $\epsilon_0$  se obtiene a partir de la tensión de fluencia inicial  $\sigma_0 = C(\epsilon_0)^n$  con  $n$  variando normalmente entre 0.1 - 0.5.

$$\frac{1}{2}\alpha_{23} = F\sigma_y^2 = \left(\frac{\sigma_y}{\bar{\sigma}_{22}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\bar{\sigma}_{33}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_y}{\bar{\sigma}_{11}}\right)^2 \quad (3.20)$$

$$\frac{1}{2}\alpha_{31} = G\sigma_y^2 = \left(\frac{\sigma_y}{\bar{\sigma}_{11}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\bar{\sigma}_{33}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_y}{\bar{\sigma}_{22}}\right)^2 \quad (3.21)$$

$$2\alpha_{44} = 2N\sigma_y^2 = \left(\frac{\sigma_y}{\bar{\sigma}_{12}}\right)^2 \quad (3.22)$$

$$2\alpha_{55} = 2L\sigma_y^2 = \left(\frac{\sigma_y}{\bar{\sigma}_{12}}\right)^2 \quad (3.23)$$

$$2\alpha_{66} = 2M\sigma_y^2 = \left(\frac{\sigma_y}{\bar{\sigma}_{12}}\right)^2 \quad (3.24)$$

si se elige  $\sigma_y = \bar{\sigma}_{11}$ , los valores de los parámetros  $\alpha_{ij}$  y consecuentemente  $F, G, H, L, M$  y  $N$  pueden ser determinados. Si en la relación (3.18), se considera que cada uno de los coeficientes  $\alpha_{ij}$  son unitarios la superficie de fluencia se reduce a la de von Mises:

$$2\sigma_e^2 = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \quad (3.25)$$

la relación (3.17) puede reescribirse alternativamente en forma matricial  $[C^{-1}]_i[V^{-1}]_i$ , como:

$$f_2 = \sigma_e^2 - \sigma_y^2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} - \sigma_y^2 = 0 \quad (3.26)$$

donde la matriz  $\mathbf{P}$ , contiene los parámetros de anisotropía y  $\boldsymbol{\sigma}$  las componentes del tensor de tensiones de Cauchy:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} (\alpha_{12} + \alpha_{31}) & -\alpha_{12} & -\alpha_{31} & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{12} & (\alpha_{12} + \alpha_{23}) & -\alpha_{23} & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{23} & (\alpha_{31} + \alpha_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6\alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6\alpha_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\alpha_{66} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}]^T \quad (3.28)$$

La regla de flujo para la superficie definida de acuerdo con la relación (3.26), se expresa por:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \dot{\lambda}_2 \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \rightarrow \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \dot{\lambda}_2 \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} \quad (3.29)$$

alternativamente, la ecuación (3.26) puede ser reescrita como:

$$f_2 = \sigma_e - \sigma_y = \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} \right]^{\frac{1}{2}} - \sigma_y = 0 \quad (3.30)$$

calculando la regla de flujo para esta forma, se tiene:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \dot{\lambda} \frac{\mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}}{2\sigma_e} = \frac{\dot{\lambda}}{2\sigma_e} \begin{bmatrix} \alpha_{12}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \alpha_{31}(\sigma_{11} - \sigma_{33}) \\ \alpha_{23}(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + \alpha_{12}(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \\ \alpha_{31}(\sigma_{33} - \sigma_{11}) + \alpha_{23}(\sigma_{33} - \sigma_{22}) \\ 6\alpha_{44}\sigma_{12} \\ 6\alpha_{55}\sigma_{23} \\ 6\alpha_{66}\sigma_{31} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

igualando las expresiones para el vector de deformaciones plásticas  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p$ , de relaciones (3.29) y (3.31):

$$\dot{\lambda} \frac{\mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}}{2\sigma_e} = \dot{\lambda}_2 \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \dot{\lambda} = 2\sigma_e \dot{\lambda}_2 \quad (3.32)$$

Operando con las componentes de la tasa de deformación plástica de la expresión (3.31), se tiene:

$$\alpha_{23} \dot{\epsilon}_{p11} - \alpha_{31} \dot{\epsilon}_{p22} = \dot{\lambda}_2 A (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \quad (3.33)$$

$$\alpha_{31} \dot{\epsilon}_{p22} - \alpha_{12} \dot{\epsilon}_{p33} = \dot{\lambda}_2 A (\sigma_{22} - \sigma_{33}) \quad (3.34)$$

$$\alpha_{12} \dot{\epsilon}_{p33} - \alpha_{23} \dot{\epsilon}_{p11} = \dot{\lambda}_2 A (\sigma_{33} - \sigma_{11}) \quad (3.35)$$

$$\dot{\gamma}_{12} = \dot{\lambda}_2 6\alpha_{44}\sigma_{12}, \quad \dot{\gamma}_{23} = \dot{\lambda}_2 6\alpha_{55}\sigma_{23}, \quad \dot{\gamma}_{31} = \dot{\lambda}_2 6\alpha_{66}\sigma_{31} \quad (3.36)$$

con:

$$A = (\alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{12}\alpha_{31} + \alpha_{23}\alpha_{31}) \quad (3.37)$$



reemplazando la diferencia de tensiones  $(\sigma_{11} - \sigma_{22})$ ,  $(\sigma_{22} - \sigma_{33})$ ,  $(\sigma_{33} - \sigma_{11})$ , y las tensiones de cortante  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{23}$ ,  $\sigma_{31}$  en función del multiplicador tasa de deformación plástica  $\dot{\lambda}_2$  y los parámetros  $\alpha_{ij}$ , deducidos de acuerdo con las relaciones (3.33)-(3.37) en la ecuación (3.18):

$$2\sigma_e^2 = \frac{B^2}{\dot{\lambda}_2^2} \rightarrow \dot{\lambda}_2 = \frac{B}{\sqrt{2}\sigma_e} \quad (3.38)$$

con:

$$B^2 = \frac{1}{A^2} [\alpha_{12}(\alpha_{23}\dot{\epsilon}_{p11} - \alpha_{31}\dot{\epsilon}_{p22})^2 + \alpha_{23}(\alpha_{31}\dot{\epsilon}_{p22} - \alpha_{12}\dot{\epsilon}_{p33})^2 + \alpha_{31}(\alpha_{12}\dot{\epsilon}_{p33} - \alpha_{23}\dot{\epsilon}_{p11})^2 + \frac{\dot{\gamma}_{p12}^2}{6\alpha_{44}} + \frac{\dot{\gamma}_{p23}^2}{6\alpha_{55}} + \frac{\dot{\gamma}_{p31}^2}{6\alpha_{66}}] \quad (3.39)$$

reemplazando la relación (3.38) en la ecuación (3.32) se obtiene una expresión explícita del multiplicador plástico:

$$\dot{\lambda} = 2\sigma_e \dot{\lambda}_2 = \sqrt{2}B \quad (3.40)$$

Puesto que el valor de la tensión de comparación  $\sigma_y$  es función de la deformación plástica efectiva de acuerdo con la relación de *Ludwik-Nadai*, es necesario estudiar la forma como esta variable interna evoluciona durante el proceso de deformación plástica. Considerando que la superficie de fluencia no se traslada en el plano de tensiones, es decir, que el endurecimiento del material es isótropo, una expresión para la deformación plástica efectiva equivalente a la obtenida para materiales isótropos con superficie de fluencia de von Mises puede ser deducida<sup>[C-2]</sup>:

$$\dot{\epsilon}_{ps} = \dot{\lambda} \quad (3.41)$$

hipótesis que se justifica empleando el concepto de tasa de trabajo plástico equivalente<sup>[C-1],[C-2]</sup>:

$$\dot{W}_p = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \sigma_y \dot{\epsilon}_{ps} \quad (3.42)$$

considerando las relaciones (3.29), (3.31) y (3.32):

$$\begin{aligned} \dot{W}_p &= \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\lambda}_2 \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma} = \dot{\lambda}_2 \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma} = 2\dot{\lambda}_2 \sigma_y^2 = \sigma_y \dot{\lambda} \\ \dot{W}_p &= \sigma_y \dot{\lambda} = \sigma_y \dot{\epsilon}_{ps} \rightarrow \dot{\lambda} = \dot{\epsilon}_{ps} \end{aligned} \quad (3.43)$$



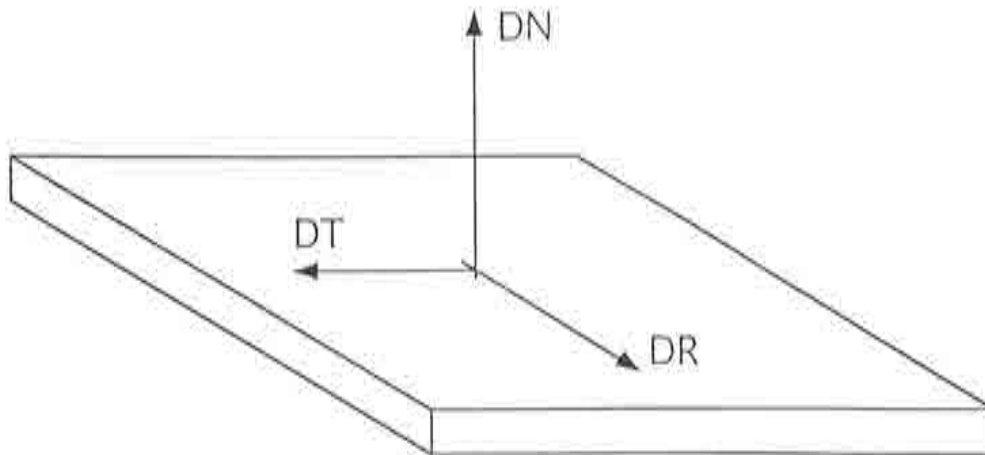
luego, considerando las ecuaciones (3.39) y (3.40), una expresión explícita para la tasa de deformación plástica efectiva se encuentra:

$$\dot{\epsilon}_{ps} = \sqrt{2}B \quad (3.44)$$

Para el análisis de estructuras laminares delgadas, las expresiones anteriores son particularizadas para estados de tensión plana, es decir,  $\sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$ . Hipótesis normalmente utilizada en problemas de embutición de láminas delgadas. En este caso, la ecuación (3.18) se reduce a:

$$f_2 = \frac{(\alpha_{31} + \alpha_{12})}{2} \sigma_{11}^2 + \frac{(\alpha_{23} + \alpha_{12})}{2} \sigma_{22}^2 - \alpha_{12} \sigma_{11} \sigma_{22} + 3\alpha_{44} \sigma_{12}^2 - \sigma_y^2 = 0 \quad (3.45)$$

en donde, es usual elegir la dirección 1 - 1 coincidiendo con la dirección de laminación, la dirección 2 - 2 se toma transversal a la de laminación y la dirección 3 - 3 se considera en la dirección del espesor de la pieza (ver Figura 3.1).



DR : dirección de laminación  
 DN : dirección Normal  
 DT : dirección Transversal

Figura 3.1 Anisotropía en una lámina metálica.

La expresión para la tasa de deformación plástica efectiva de la ecuación (3.44), considerando la hipótesis de tensión plana, se transforma en :

$$\dot{\epsilon}_{ps} = \sqrt{2} \left[ \frac{1}{A^2} \{ a_{11} \dot{\epsilon}_{11}^2 + a_{22} \dot{\epsilon}_{22}^2 + a_{12} \dot{\epsilon}_{11} \dot{\epsilon}_{22} \} + \frac{\dot{\gamma}_{12}^2}{6\alpha_{44}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.46)$$

con:

$$\dot{\epsilon}_{p33} = -(\dot{\epsilon}_{p11} + \dot{\epsilon}_{p22}) \quad (3.47)$$

$$a_{11} = \alpha_{12}A + \alpha_{23}^2(\alpha_{12} + \alpha_{31}) + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} \quad (3.48)$$

$$a_{22} = \alpha_{12}A + \alpha_{31}^2(\alpha_{12} + \alpha_{31}) + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} \quad (3.49)$$

$$a_{12} = 2\alpha_{12}A \quad (3.50)$$

La evaluación de los parámetros  $\alpha_{ij}$  que intervienen en el criterio de fluencia se realiza a través de ensayos experimentales, por ejemplo si se realiza un ensayo de tracción uniaxial en la dirección 1 - 1:

$$f_2 = \frac{(\alpha_{31} + \alpha_{12})}{2} \sigma_{11}^2 - \sigma_y^2 = 0 \quad (3.51)$$

considerando que  $\sigma_{11} = \sigma_y$ , de ecuación (3.51) se tiene:

$$(\alpha_{12} + \alpha_{31}) = 2 \quad (3.52)$$

para obtener expresiones por separado ya sea de  $\alpha_{31}$  o de  $\alpha_{12}$ , se define un nuevo parámetro  $R$ , como la razón entre la tasa de deformación plástica contenida en el plano de la chapa a la deformación plástica contenida en la dirección transversal, obtenido a partir de un ensayo de tracción uniaxial.

Considerando un ensayo de tracción uniaxial en la dirección 1 - 1 y el vector tasa de deformaciones plásticas definido por la ecuación (3.31) y particularizado para estado de tensión plana, el valor del parámetro  $R_0$  se define de acuerdo con:

$$R_0 = \frac{\dot{\epsilon}_{22p}}{\dot{\epsilon}_{33p}} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{31}} \quad (3.53)$$

en donde el subíndice asociado, denota el ángulo entre la dirección de carga y la de laminación. De forma análoga realizando un ensayo de tracción uniaxial en la dirección 2 - 2:

$$R_{90} = \frac{\dot{\epsilon}_{11p}}{\dot{\epsilon}_{33p}} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{23}} \quad (3.54)$$

combinando las ecuaciones (3.52), (3.53) y (3.54), se obtiene:

$$\alpha_{31} = \frac{2}{(1 + R_0)} \quad ; \quad \alpha_{12} = \frac{2R_0}{(1 + R_0)} \quad (3.55)$$

$$\alpha_{23} = \frac{2R_0}{R_{90}(1 + R_0)} \quad (3.56)$$

para la determinación del parámetro  $\alpha_{44}$ , es necesario realizar un ensayo de tracción uniaxial a  $45^\circ$  con respecto a la dirección 1 - 1. En este caso las tensiones con respecto a las direcciones 2 - 2 y 1 - 2 se obtienen a partir del círculo de Mohr<sup>[M-1]</sup>:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \frac{1}{2}\sigma_{45} \quad (3.57)$$

de acuerdo con la ecuación (3.31) y nuevamente utilizando el círculo de Mohr, pero esta vez para encontrar la deformación plástica a  $135^\circ$ , se tiene:

$$R_{45} = \frac{\dot{\epsilon}_p(\theta = 135^\circ)}{\dot{\epsilon}_{33p}} = -\frac{1}{2} + \frac{3\alpha_{44}}{(\alpha_{31} + \alpha_{23})} \quad (3.58)$$

luego:

$$3\alpha_{44} = (1 + 2R_{45})\frac{(R_0 + R_{90})}{R_{90}(1 + R_0)} \quad (3.59)$$

reemplazando en la relación (3.45), se obtiene:

$$\begin{aligned} f_2 = \sigma_{11}^2 + \frac{R_0(1 + R_{90})}{R_{90}(1 + R_0)}\sigma_{22}^2 - \frac{2R_0}{(1 + R_0)}\sigma_{11}\sigma_{22} + \\ \frac{(1 + 2R_{45})(R_0 + R_{90})}{R_{90}(1 + R_0)}\sigma_{12}^2 - \sigma_y^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

La ecuación anterior es la expresión final de la superficie de fluencia definida por el criterio de Hill 48, para estados de tensión plana. En donde  $R_0$ ,  $R_{45}$  y  $R_{90}$  deben ser determinados experimentalmente, y se denominan coeficientes de anisotropía de Lankford<sup>[C-2],[K-1],[L-1],[V-1]</sup>.

### 3.3.2 Relaciones para anisotropía normal criterio de Hill 48

Una aproximación usualmente utilizada en problemas de embutición de chapa, en donde la anisotropía plástica de la pieza se modela de acuerdo con el criterio de Hill 48, es suponer que la lámina tiene un comportamiento isótropo en su plano y anisótropo en la dirección normal al plano. Este comportamiento se denomina *anisotropía normal* o *isotropía planar*<sup>[H-2],[H-3],[V-1]</sup> y bajo esta hipótesis el criterio de fluencia es invariante para cualquier rotación alrededor del eje normal al plano de la lámina, es decir:



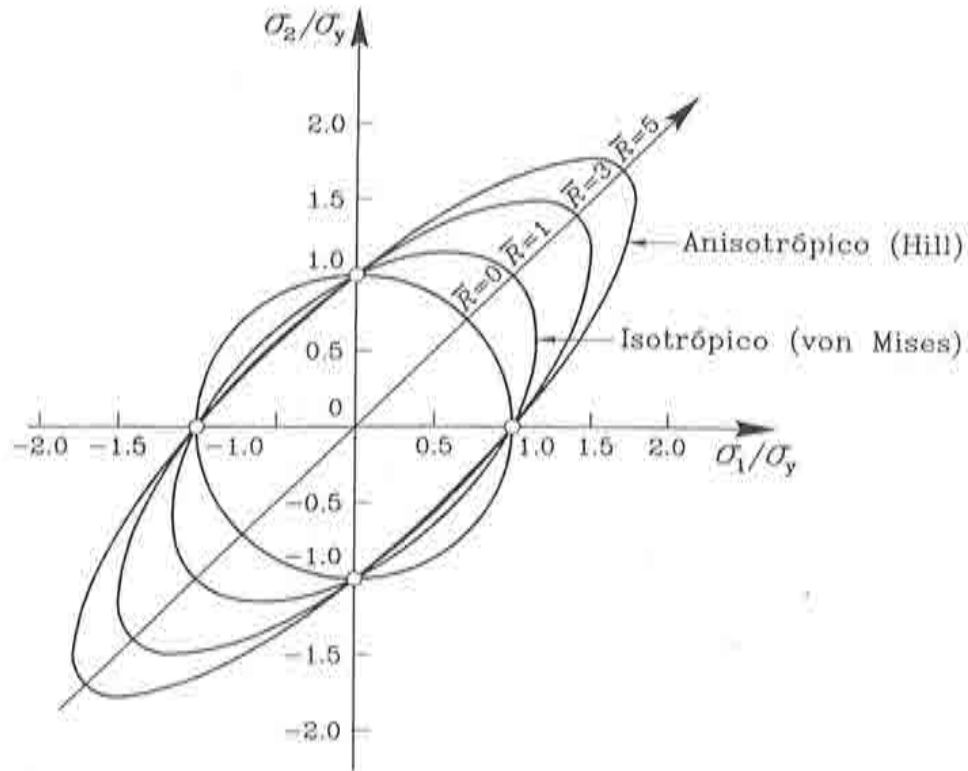


Figura 3.2 Superficie de fluencia de Hill 48, influencia del coeficiente de Lankford  $\bar{R}$  en la forma final.

$$R_0 = R_{45} = R_{90} \quad (3.61)$$

Donde el valor del coeficiente  $\bar{R}$ , a utilizar en las relaciones (3.45) y (3.46) bajo la hipótesis de *anisotropía normal*, se obtiene como el promedio de las razones de deformaciones plásticas obtenidas a partir de ensayos de tracción uniaxial en varias direcciones contenidas en el plano de la lámina<sup>[D-4]</sup>, luego:

$$\bar{R} = \frac{(R_0 + 2R_{45} + R_{90})}{4} \quad (3.62)$$

Considerando la relación (3.62), la superficie de fluencia definida por la ecuación (3.45), se transforma en:

$$f_2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \frac{2\bar{R}}{(1+\bar{R})}\sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{2(1+2\bar{R})}{(1+\bar{R})}\sigma_{12}^2 - \sigma_y^2 = 0 \quad (3.63)$$

si  $\bar{R}=1$ , la ecuación anterior se reduce al criterio de von Mises para estado de tensión plana y comportamiento isotrópico. La forma de la superficie de fluencia definida por la ecuación (3.63), en función del coeficiente de Lankford se presenta en la Figura 3.2.

El valor de la tasa de deformación plástica efectiva se obtiene reemplazando los valores de  $\alpha_{ij}$  de relaciones (3.55), (3.56) y (3.59) en (3.46):

$$\dot{\epsilon}_{ps} = \frac{(1 + \bar{R})}{\sqrt{(1 + 2\bar{R})}} \left[ \dot{\epsilon}_{p11}^2 + \dot{\epsilon}_{p22}^2 + \frac{2\bar{R}}{(1 + \bar{R})} \dot{\epsilon}_{p11} \dot{\epsilon}_{p22} + \frac{\dot{\gamma}_{12}^2}{2(\bar{R} + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.64)$$

nuevamente si  $\bar{R} = 1$ , la expresión de la tasa de deformación plástica efectiva coincide con la definida para materiales isotropos <sup>[C-1]</sup>.

### 3.3.3 Modelo anisótropo de Hill mejorado

Esta nueva superficie de fluencia propuesta por Hill en 1979, tiene su origen en observaciones de caracter experimental <sup>[W-1]</sup> con respecto al comportamiento de determinados materiales. Se observó que en metales con  $\bar{R} < 1$  (como pueden ser Aluminios, en donde  $\bar{R}$  varía entre 0.48-0.65), la razón entre la resistencia a fluencia en tensión biaxial  $\sigma_b$ , y la de tensión uniaxial  $\sigma_u$  era siempre mayor que uno.

Considerando la relación (3.63), y un estado tensional biaxial  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_b$ , se tiene:

$$\sigma_b^2 + \sigma_b^2 - \frac{2\bar{R}}{(1 + \bar{R})} \sigma_b \sigma_b = \sigma_u^2 \quad (3.65)$$

$$\left( \frac{\sigma_b}{\sigma_u} \right)^2 = \frac{(1 + \bar{R})}{2} \quad (3.66)$$

Entonces:

$$\left( \frac{\sigma_b}{\sigma_u} \right)^2 > 1 \quad \text{si} \quad \bar{R} > 1 \quad (3.67)$$

$$\left( \frac{\sigma_b}{\sigma_u} \right)^2 < 1 \quad \text{si} \quad \bar{R} < 1 \quad (3.68)$$

Puesto que las observaciones experimentales muestran un comportamiento contrario al expresado por la relación (3.68),  $\left( \frac{\sigma_b}{\sigma_u} \right)^2 > 1$  si  $\bar{R} < 1$ , se concluye que la superficie de fluencia cuadrática definida por Hill 48 subestima el valor de la tensión  $\sigma_b$  bajo estados de tensión biaxial. Este comportamiento se conoce en la literatura como *comportamiento anómalo* <sup>[W-1]</sup> y se presenta en determinados metales con  $\bar{R} < 1$ . Con el fin de poder modelar este tipo de comportamiento, Hill <sup>[H-3]</sup> propuso un nuevo criterio anisótropo de fluencia:

$$f_M = f|\sigma_2 - \sigma_3|^M + g|\sigma_3 - \sigma_1|^M + h|\sigma_1 - \sigma_2|^M + a|2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3|^M +$$

$$b|2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1|^M + c|2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2|^M - \sigma_o^M = 0 \quad (3.69)$$

en donde  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  son las componentes del tensor de tensiones con respecto a los ejes principales;  $f, g, h, a, b, c$  y  $M$  son coeficientes que dependen de las propiedades del material y  $\sigma_o$  es un factor de escala. Esta nueva formulación para la superficie de fluencia permite el tratamiento de anisotropía planar, pero la forma de la superficie presenta problemas de convexidad dependiendo de los valores que tomen los parámetros  $f, g, h, a, b, c$  y  $M$ . Cuando  $M \neq 2$  hay siete parámetros por determinar lo que permite una mayor flexibilidad en la superficie de fluencia, en comparación con la superficie propuesta inicialmente por Hill<sup>[H-2]</sup>.

La condición de consistencia plástica sin considerar endurecimiento, para esta nueva superficie se escribe como:

$$f_M = 0 \quad y \quad \dot{f}_M = \frac{\partial f_M}{\partial \sigma} \dot{\sigma} = 0 \quad (3.70)$$

luego:

$$\begin{aligned} \dot{f}_M &= (g|\sigma_3 - \sigma_1|^{M-1} + h|\sigma_1 - \sigma_2|^{M-1} + 2a|2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3|^{M-1} \\ &\quad \mp b|2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1|^{M-1} + c|2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2|^{M-1})d\sigma_1 + \\ &\quad (f|\sigma_2 - \sigma_2|^{M-1} - h|\sigma_1 - \sigma_2|^{M-1} - a|2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3|^{M-1} \\ &\quad \pm 2b|2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1|^{M-1} + c|2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2|^{M-1})d\sigma_2 + \\ &\quad (-f|\sigma_2 - \sigma_2|^{M-1} - g|\sigma_3 - \sigma_1|^{M-1} - a|2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3|^{M-1} \\ &\quad \mp b|2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1|^{M-1} - 2c|2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2|^{M-1})d\sigma_3 \end{aligned} \quad (3.71)$$

donde los signos  $\pm$  se determinan de acuerdo con:

$$2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1 > 0 \rightarrow + \quad (3.72)$$

$$2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1 < 0 \rightarrow - \quad (3.73)$$

La razón entre las tasas de deformación plástica, que define el coeficiente de Lankford, se expresa por:

$$R = \frac{\dot{\epsilon}_{p2}}{\dot{\epsilon}_{p3}} = \frac{(f|\sigma_2 - \sigma_2|^{M-1} - h|\sigma_1 - \sigma_2|^{M-1} - a|2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3|^{M-1} \dots)}{(-f|\sigma_2 - \sigma_2|^{M-1} - g|\sigma_3 - \sigma_1|^{M-1} - a|2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3|^{M-1} \dots)} \quad (3.74)$$



considerando un estado de tensión uniaxial, es decir,  $(\sigma_u, 0, 0)$  la ecuación (3.69) se reduce a :

$$(g + h + 2^M a + b + c)\sigma_u^M = \sigma_o^M \quad (3.75)$$

y de ecuación (3.74) se tiene:

$$R = \frac{\dot{\epsilon}_{p2}}{\dot{\epsilon}_{p3}} = \frac{2^{M-1}a + h + 2b - c}{2^{M-1}a + g - b + 2c} \quad (3.76)$$

bajo tensión biaxial  $(\sigma_b, \sigma_b, 0)$ , la ecuación (3.69) se reduce a:

$$(f + g + a + b + 2^M c)\sigma_b^M = \sigma_o^M \quad (3.77)$$

combinando las ecuaciones (3.75) y (3.77), se tiene:

$$\left(\frac{\sigma_b}{\sigma_u}\right)^M = \frac{(g + h + 2^M a + b + c)}{(f + g + a + b + 2^M c)} \quad (3.78)$$

### 3.3.4 Relaciones para anisotropía normal en el criterio de Hill mejorado

La nueva superficie de fluencia definida por la ecuación (3.69), puede simplificarse y restringirse al caso de tensión plana y anisotropía normal. Bajo estas hipótesis se demuestra que <sup>[H-3]</sup>  $f = g$  y  $a = b$ :

$$f_M = f(|\sigma_2|^M + |\sigma_1|^M) + a(|2\sigma_1 - \sigma_2|^M + |2\sigma_2 - \sigma_1|^M) + \\ h|\sigma_1 - \sigma_2|^M + c|\sigma_1 + \sigma_2|^M - \sigma_o^M = 0 \quad (3.79)$$

de relaciones (3.76) y (3.78):

$$R = \frac{\dot{\epsilon}_{p1}}{\dot{\epsilon}_{p3}} = \frac{\dot{\epsilon}_{p2}}{\dot{\epsilon}_{p3}} = \frac{(2^{M-1} + 2)a + h - c}{(2^{M-1} - 1)a + g + 2c} \quad (3.80)$$

$$\left(\frac{\sigma_b}{\sigma_u}\right)^M = \frac{(g + h + (2^M + 1)a + c)}{(2f + 2a + 2^M c)} \quad (3.81)$$

en donde, el número de coeficientes se reduce a cinco y cualquier par de ejes ortogonales contenidos en el plano de la lámina puede emplearse para expresar las componentes de tensión. A partir de la ecuación (3.79), se pueden deducir

cinco casos especiales en función de los valores que tomen los parámetros  $a, c, h, f$ :

- Caso 1:  $a = h = 0$

$$c|\sigma_1 + \sigma_2|^M + f(|\sigma_1|^M + |\sigma_2|^M) = \sigma^M \quad (3.82)$$

- Caso 2:  $c = f = 0$

$$a(|2\sigma_1 - \sigma_2|^M + |2\sigma_2 - \sigma_1|^M) + h|\sigma_1 - \sigma_2|^M = \sigma^M \quad (3.83)$$

- Caso 3:  $c = h = 0$

$$a(|2\sigma_1 - \sigma_2|^M + |2\sigma_2 - \sigma_1|^M) + f(|\sigma_1|^M + |\sigma_2|^M) = \sigma^M \quad (3.84)$$

- Caso 4:  $a = f = 0$

$$c|\sigma_1 + \sigma_2|^M + h|\sigma_1 - \sigma_2|^M = \sigma^M \quad (3.85)$$

- Caso 5:  $a = c = 0$

$$f(|\sigma_1|^M + |\sigma_2|^M) + h|\sigma_1 - \sigma_2|^M = \sigma^M \quad (3.86)$$

cada una de las nuevas superficies de fluencia definidas para estados de tensión plana por las ecuaciones (3.82)-(3.86), pueden ser escritas en función del coeficiente de Lankford  $\bar{R}$ :

- Caso 1:

$$\frac{(1 + 2\bar{R})}{(1 + \bar{R})}|\sigma_1 + \sigma_2|^M + \frac{\bar{R}}{(1 + \bar{R})}(|\sigma_1|^M + |\sigma_2|^M) = \sigma^M \quad (3.87)$$

- Caso 2:

$$\frac{1}{(1 + \bar{R})(2^{M-1} - 1)}(|2\sigma_1 - \sigma_2|^M + |2\sigma_2 - \sigma_1|^M) + [1 - \frac{(2^M + 1)}{(1 + \bar{R})(2^{M-1} - 1)}]|\sigma_1 - \sigma_2|^M = \sigma^M \quad (3.88)$$

- Caso 3:

$$\frac{\bar{R}}{(1 + \bar{R})(2^{M-1} + 2)}(|2\sigma_1 - \sigma_2|^M + |2\sigma_2 - \sigma_1|^M) +$$

$$\left[1 - \frac{(2^M + 1)\bar{R}}{(1 + \bar{R})(2^{M-1} + 2)}\right](|\sigma_1|^M + |\sigma_2|^M) = \sigma^M \quad (3.89)$$

- Caso 4:

$$\frac{1}{2(1 + \bar{R})}|\sigma_1 + \sigma_2|^M + \frac{(1 + 2\bar{R})}{2(1 + \bar{R})}|\sigma_1 - \sigma_2|^M = \sigma^M \quad (3.90)$$

- Caso 5:

$$\frac{1}{(1 + \bar{R})}(|\sigma_1|^M + |\sigma_2|^M) + \frac{\bar{R}}{(1 + \bar{R})}|\sigma_1 - \sigma_2|^M = \sigma^M \quad (3.91)$$

En los cinco casos anteriores cuando  $M = 2$  se recupera el criterio de fluencia de Hill del año 48, y con  $M = 2$  y  $\bar{R} = 1$  los cinco superficies se reducen al criterio de fluencia de von Mises.

Considerando las condiciones de convexidad <sup>†</sup> para cada una de las superficies de fluencia definidas anteriormente, se demuestra<sup>[L-1],[Z-1]</sup> que las superficies definidas por los casos (1), (2) y (3) son cóncavas para determinadas combinaciones de los parámetros  $\bar{R}$  y  $M$ ; en cambio los casos (4) y (5) no presentan problemas de convexidad cuando  $M > 1$  independientemente del valor que asuma  $\bar{R}$ . Teniendo en cuenta estas limitaciones, en el presente trabajo se adopta como superficie de fluencia la definida por la ecuación (3.90), cuando se consideren materiales con coeficiente de Lankford menores que uno. Esta superficie ha sido validada por numerosos autores<sup>[K-1],[L-1],[Z-2]</sup> demostrándose que puede ser utilizada para describir correctamente el comportamiento de materiales con valores de  $\bar{R} < 1$ .

En la definición de esta superficie (caso (4)) se deben utilizar valores adecuados de los parámetros  $\bar{R}$  y  $M$  con el fin de asegurar que no se presente el comportamiento anómalo<sup>[W-1]</sup>. De acuerdo con las relaciones (3.90), (3.80) y (3.81) y considerando el factor de escala  $\sigma_0$  igual a la tensión de fluencia uniaxial en la dirección de la laminación  $\sigma_y$ , se tiene:

$$f_M = \frac{1}{2(1 + \bar{R})}|\sigma_1 + \sigma_2|^M + \frac{(1 + 2\bar{R})}{2(1 + \bar{R})}|\sigma_1 - \sigma_2|^M - \sigma_y^M = 0 \quad (3.92)$$

<sup>†</sup> La condición convexidad para una función de fluencia  $f$  definida en el espacio de tensiones  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  es que la matriz Hessiana  $H$ , dada por:

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j} \quad i, j = 1, 2$$

sea semidefinida positiva, es decir, que los autovalores de  $H$  sean positivos o nulos<sup>[R-1]</sup>. Para los cinco casos discutidos anteriormente, la condición de convexidad se traduce en verificar:

$$H_{11} + H_{22} \geq 0 \quad \text{y} \quad H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21} \geq 0$$



$$\bar{R} = \frac{h-c}{2c} \quad y \quad \left(\frac{\sigma_b}{\sigma_u}\right)^M = \frac{(c+h)}{2^M c} \quad (3.93)$$

de acuerdo con la relación (3.68), debe cumplirse que:

$$\left(\frac{\sigma_b}{\sigma_u}\right)^M = \frac{[c+c(2\bar{R}+1)]}{2^M c} = \frac{(\bar{R}+1)}{2^{M-1}} > 1 \quad si \quad \bar{R} < 1 \quad (3.94)$$

entonces:

$$2^{M-1} < (\bar{R}+1) \rightarrow M < \frac{\ln(\bar{R}+1)}{\ln 2} + 1 \quad (3.95)$$

alternativamente Bressan et al.<sup>[B-5]</sup> proponen una relación lineal entre los parámetros  $M$  y  $\bar{R}$ , deducida a partir de numerosos ensayos realizados para distintas aleaciones, ver la Figura 3.3.

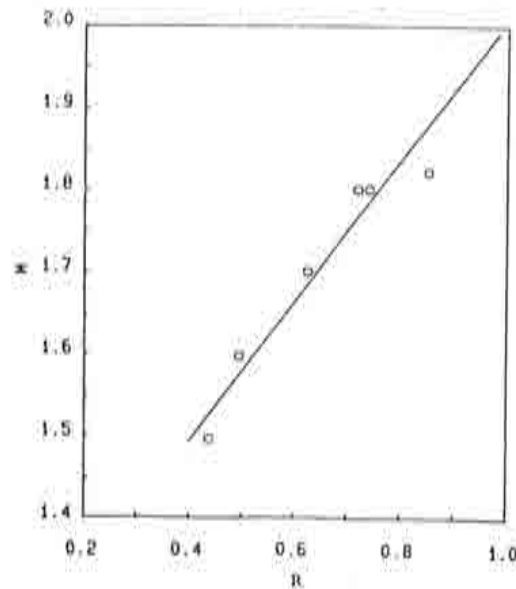


Figura 3.3 Relación experimental entre los parámetros  $\bar{R}$  y  $M$  para el caso 4. (figura extraída de referencia [L-1])

El valor de la tasa de deformación plástica efectiva, para esta superficie de fluencia, se obtiene mediante consideraciones de trabajo plástico equivalente y la expresión explícita de ella<sup>[H-3],[L-1]</sup>, tiene la siguiente forma:

$$\dot{\epsilon}_{ps} = \frac{1}{2} [2(1 + \bar{R})]^{1/M} \left[ |\dot{\epsilon}_{p1} + \dot{\epsilon}_{p2}|^{M/M-1} + (1 + 2\bar{R})^{-1/M-1} |\dot{\epsilon}_{p1} - \dot{\epsilon}_{p2}|^{M/M-1} \right]^{(M-1)/M} \quad (3.96)$$

### 3.4 ALGORITMOS DE VERIFICACIÓN DE LA CONDICIÓN DE CONSISTENCIA PLÁSTICA

A continuación se presentan los algoritmos de corrección de las tensiones predictoras elásticas definidas de acuerdo con ecuación (3.12). Debido a la forma de las superficies de fluencia<sup>[H-2],[H-3]</sup>, en un caso cuadrática y en el otro caso de grado  $M$ , se presentan dos algoritmos de corrección de las tensiones.

En el caso de considerarse la superficie de fluencia cuadrática de Hill<sup>[H-2]</sup>, se presenta una generalización al algoritmo de corrección de tensiones propuesto por Jetteur<sup>[J-1]</sup> y Simo et al.<sup>[S-1],[S-2]</sup> para el caso materiales isótropos, extendiéndolo a materiales con anisotropía normal y  $\bar{R} \geq 1$ . En el caso de considerar el caso (4) del criterio de Hill mejorado, se considera un algoritmo de corrección del tipo Backward-Euler estandar, puesto que en esta situación la superficie de fluencia no asume formas cuadráticas salvo situaciones particulares del exponente  $M$ .

La razón de definir dos algoritmos de corrección de las tensiones, en función de los valores que tome el coeficiente de Lankford, ya sea mayor o menor que uno. Dado que a partir del segundo criterio de Hill<sup>[H-3]</sup> se puede obtener el primero si se considera  $M = 2$ , se debe a la eficiencia desde el punto de vista computacional que presenta la extensión desarrollada en el presente trabajo para el caso de materiales con  $\bar{R} \geq 1$ , con superficie de fluencia cuadrática con respecto a un algoritmo de retorno del tipo Backward-Euler estandar.

#### 3.4.1 Superficie de fluencia Hill 48

Partiendo del algoritmo de integración propuesto por Jetteur<sup>[J-1]</sup> y Simo et al.<sup>[S-1],[S-2]</sup>, para problemas en tensión plana con superficie de fluencia de von Mises, se presenta una extensión de este algoritmo para el tratamiento de problemas con anisotropía normal y superficie de fluencia cuadrática. De acuerdo con la relación (3.17):

$$f_2 = \sigma_e^2 - \sigma_y^2 = 0 \quad (3.97)$$

en donde  $\sigma_y$  corresponde a la tensión de comparación de *Ludwik-Nadai* y  $\sigma_e$  se define por:

$$\sigma_e = [\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \frac{2\bar{R}}{(1+R)}\sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{2(1+2\bar{R})}{(1+R)}\sigma_{12}^2]^{\frac{1}{2}} \quad (3.98)$$

la regla de flujo se expresa, por:

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\lambda}_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} = \dot{\lambda}_2 \mathbf{a} = \dot{\lambda}_2 \frac{1}{\sigma_e} \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \frac{\bar{R}}{(1+\bar{R})} \sigma_{22} \\ \sigma_{22} - \frac{\bar{R}}{(1+\bar{R})} \sigma_{11} \\ \frac{2(1+2\bar{R})}{(1+\bar{R})} \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

el retorno a la superficie de fluencia, se realiza de acuerdo con:

$$\sigma_c = \sigma_b - \Delta\lambda_2 \mathbf{C} \mathbf{a}_e \quad (3.100)$$

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

en donde  $\sigma_c$  es la tensión final sobre la superficie de fluencia,  $\sigma_b$  es la tensión predictora elástica determinada de acuerdo con la relación (3.12),  $\mathbf{C}$  es el tensor constitutivo elástico y  $\mathbf{a}_e$  es el vector normal a la superficie de fluencia en la posición final de esta, luego:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{c11} \\ \sigma_{c22} \\ \sigma_{c12} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \sigma_{b11} \\ \sigma_{b22} \\ \sigma_{b12} \end{Bmatrix} - \\ &\frac{\Delta\lambda_2}{\sigma_e(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} E\sigma_{c11}[1 - \frac{\nu\bar{R}}{(1+\bar{R})}] + E\sigma_{c22}[\nu - \frac{\bar{R}}{(1+\bar{R})}] \\ E\sigma_{c11}[\nu - \frac{\bar{R}}{(1+\bar{R})}] + E\sigma_{c22}[1 - \frac{\nu\bar{R}}{(1+\bar{R})}] \\ 2(1-\nu^2)G_{12} \frac{(1+2\bar{R})}{(1+\bar{R})} \sigma_{c12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.102)$$

dado que las tensiones predictoras elásticas  $\sigma_{b11}$ ,  $\sigma_{b22}$ ,  $\sigma_{b12}$  se conocen, reordenando términos en la ecuación anterior, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sigma_{c11} \left[ 1 + \Delta\lambda_2' \frac{E(1 + \bar{R}(1 - \nu))}{(1 - \nu^2)(1 + \bar{R})} \right] + \sigma_{c22} \Delta\lambda_2' \left[ \frac{E(\nu + \bar{R}(\nu - 1))}{(1 - \nu^2)(1 + \bar{R})} \right] = \sigma_{b11} \quad (3.103)$$

$$\sigma_{c11} \Delta\lambda_2' \left[ \frac{E(\nu + \bar{R}(\nu - 1))}{(1 - \nu^2)(1 + \bar{R})} \right] + \sigma_{c22} \left[ 1 + \Delta\lambda_2' \frac{E(1 + \bar{R}(1 - \nu))}{(1 - \nu^2)(1 + \bar{R})} \right] = \sigma_{b22} \quad (3.104)$$

$$\sigma_{c12} \left[ 1 + \Delta\lambda_2' 2G_{12} \frac{(1 + 2\bar{R})}{(1 + \bar{R})} \right] = \sigma_{b12} \quad (3.105)$$

con:

$$\Delta\lambda_2' = \frac{\Delta\lambda_2}{\sigma_e} \quad (3.106)$$

puesto que el valor de  $\bar{R}$  y las propiedades elásticas del material se consideran constantes durante el proceso<sup>[H-2],[H-3]</sup>, se definen las siguientes constantes:

$$K_1 = \frac{E(1 + \bar{R}(1 - \nu))}{(1 - \nu^2)(1 + R)} \quad K_2 = \frac{E(\nu + \bar{R}(\nu - 1))}{(1 - \nu^2)(1 + R)} \quad (3.107)$$

$$K_3 = 2G_{12} \frac{(1 + 2\bar{R})}{(1 + R)} \quad (3.108)$$

$$b_1 = (\sigma_{b22}K_2 - \sigma_{b11}K_1) \quad b_2 = (\sigma_{b11}K_2 - \sigma_{b22}K_1) \quad (3.109)$$

$$A_1 = (K_2^2 - K_1^2) \quad A_2 = 2K_1 \quad (3.110)$$

obteniéndose para las tensiones:

$$\sigma_{c11} = \frac{b_1 \Delta \lambda_2' - \sigma_{b11}}{\Delta \lambda_2'^2 A_1 - \Delta \lambda_2' 2A_2 - 1} \quad (3.111)$$

$$\sigma_{c22} = \frac{b_2 \Delta \lambda_2' - \sigma_{b22}}{\Delta \lambda_2'^2 A_1 - 2\Delta \lambda_2' 2A_2 - 1} \quad (3.112)$$

$$\sigma_{c12} = \frac{\sigma_{b12}}{(1 + \Delta \lambda_2' K_3)} \quad (3.113)$$

sustituyendo en la relación (3.97), se tiene:

$$\begin{aligned} f_2 = & \left[ \frac{b_1 \Delta \lambda_2' - \sigma_{b11}}{\Delta \lambda_2'^2 A_1 - \Delta \lambda_2' 2A_2 - 1} \right]^2 + \left[ \frac{b_2 \Delta \lambda_2' - \sigma_{b22}}{\Delta \lambda_2'^2 A_1 - 2\Delta \lambda_2' 2A_2 - 1} \right]^2 \\ & - \frac{2R}{(1 + R)} \left[ \frac{b_1 \Delta \lambda_2' - \sigma_{b11}}{\Delta \lambda_2'^2 A_1 - \Delta \lambda_2' 2A_2 - 1} \right] \left[ \frac{b_2 \Delta \lambda_2' - \sigma_{b22}}{\Delta \lambda_2'^2 A_1 - 2\Delta \lambda_2' 2A_2 - 1} \right] \\ & + \frac{2(1 + 2R)}{(1 + R)} \frac{\sigma_{b12}^2}{(1 + \Delta \lambda_2' K_3)^2} - \sigma_{yc}^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.114)$$

ecuación no lineal en  $\Delta \lambda_2'$ , que se soluciona mediante un esquema iterativo del tipo Newton-Raphson, derivado a partir una extensión en series de Taylor:

$$f_{2n} = f_{2o} + \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \lambda_2'} \Big|_o \lambda_2' = 0 \quad (3.115)$$



donde el subíndice  $n$  indica el nuevo valor y  $o$ , el valor anterior.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial \Delta \lambda_2'} &= 2 \left[ \frac{b_1 \Delta \lambda_2' - \sigma_{b11}}{(\Delta \lambda_2'^2 A_1 - \Delta \lambda_2' 2A_2 - 1)} \right] \left[ \frac{b_1}{(\Delta \lambda_2'^2 A_1 - \Delta \lambda_2' 2A_2 - 1)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\Delta \lambda_2' b_1 - \sigma_{b11})(2\Delta \lambda_2'^2 A_1 - A_2)}{(\Delta \lambda_2'^2 A_1 - \Delta \lambda_2' 2A_2 - 1)^2} \right] - \frac{2R}{(1+R)} \left[ \frac{2\Delta \lambda_2' b_1 b_2 - (b_1 \sigma_{b22} + b_2 \sigma_{b11})}{(\Delta \lambda_2'^2 A_1 - \Delta \lambda_2' 2A_2 - 1)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2(2\Delta \lambda_2' A_1 - A_2)(\Delta \lambda_2'^2 b_1 b_2 - \Delta \lambda_2' (b_1 \sigma_{b22} + b_2 \sigma_{b11}) + \sigma_{b11} \sigma_{b22})}{(\Delta \lambda_2'^2 A_1 - \Delta \lambda_2' 2A_2 - 1)^3} \right] + \\
&\quad 2 \left[ \frac{b_2 \Delta \lambda_2' - \sigma_{b22}}{(\Delta \lambda_2'^2 A_1 - \Delta \lambda_2' 2A_2 - 1)} \right] \left[ \frac{b_2}{(\Delta \lambda_2'^2 A_1 - \Delta \lambda_2' 2A_2 - 1)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\Delta \lambda_2' b_2 - \sigma_{b22})(2\Delta \lambda_2'^2 A_1 - A_2)}{(\Delta \lambda_2'^2 A_1 - \Delta \lambda_2' 2A_2 - 1)^2} \right] \\
&\quad + \frac{-4(1+2R)}{(1+R)(1+\Delta \lambda_2' K_3)^3} - 2\sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial \Delta \lambda'} \quad (3.116)
\end{aligned}$$

de acuerdo con la relación (3.115), el valor de  $\dot{\lambda}_2'$  se obtiene de acuerdo con:

$$\dot{\lambda}_2' = - \frac{f_{2o}}{\left. \frac{\partial f_2}{\partial \Delta \lambda_2'} \right|_o} \quad (3.117)$$

$$\Delta \lambda_{2n}' = \Delta \lambda_{2o}' + \dot{\lambda}_2' \rightarrow \Delta \lambda_2 = \Delta \lambda_{2n}' \sigma_y \quad (3.118)$$

con  $\Delta \lambda_{2n}'$  se verifica si la relación (3.114) se cumple dentro de una cierta tolerancia, en caso contrario se debe proceder a realizar un proceso iterativo, actualizando cada vez la tensión de comparación  $\sigma_y$ .

Una vez lograda la tolerancia especificada se procede a evaluar las tensiones finales de acuerdo con ecuaciones (3.111), (3.112) y (3.113). Este esquema de integración necesita de un valor inicial para  $\Delta \lambda_{2o}$ , el cual se determina a partir de un desarrollo en series de Taylor<sup>†</sup> con respecto al punto de predicción elástica.

<sup>†</sup> Un valor del multiplicador plástico  $\Delta \lambda_{2o}$  puede obtenerse mediante un desarrollo en series de Taylor de primer orden con respecto a los valores predictores elásticos, es decir:

$$f = f_B + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Delta \sigma + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ps}} \Delta \epsilon_{ps} = f_B - \Delta \lambda_{2o} u_B^T C a_B - \Delta \lambda_{2o} A' = 0 \quad \text{sigue al pie pag. 44}$$

### 3.4.2 Superficie de fluencia de Hill mejorada

En este caso, se debe proceder a la integración de una forma distinta a la anterior, puesto que al ser la función polinomial de grado  $M$ , la obtención de expresiones equivalentes a (3.103), (3.104) y (3.105) es imposible. El procedimiento adoptado se basa en el algoritmo de retorno backward-Euler estandar<sup>[C-1]</sup>. Considerando la forma genérica del caso (4) (ecuación 3.90), se tiene:

$$f_M = \frac{1}{2(1+R)} |\sigma_1 + \sigma_2|^M + \frac{(1+2R)}{2(1+R)} |\sigma_1 - \sigma_2|^M - \sigma_y^M = 0 \quad (3.119)$$

sea:

$$K_1 = \frac{1}{2(1+R)} \quad ; \quad K_2 = \frac{(1+2R)}{2(1+R)} \quad (3.120)$$

$$\sigma_e = [K_1 |\sigma_1 + \sigma_2|^M + K_2 |\sigma_1 - \sigma_2|^M]^{\frac{1}{M}} \quad (3.121)$$

la regla de flujo para esta superficie se expresa, por:

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\lambda}_M \frac{\partial f_M}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda}_M \mathbf{a} = \dot{\lambda}_M \begin{bmatrix} \frac{\partial f_M}{\partial \sigma_1} \\ \frac{\partial f_M}{\partial \sigma_2} \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

donde las componentes del vector normal a la superficie de fluencia  $\mathbf{a}$ , se definen de acuerdo con:

$$\frac{\partial f_M}{\partial \sigma_1} = \left[ \frac{1}{M} (K_1 |\sigma_1 + \sigma_2|^M + K_2 |\sigma_1 - \sigma_2|^M)^{\frac{1-M}{M}} (K_1 M |\sigma_1 + \sigma_2|^{M-1} \text{sign}(\sigma_1 + \sigma_2) + K_2 M |\sigma_1 - \sigma_2|^{M-1} \text{sign}(\sigma_1 - \sigma_2)) \right] \quad (3.123)$$

$$\frac{\partial f_M}{\partial \sigma_2} = \left[ \frac{1}{M} (K_1 |\sigma_1 + \sigma_2|^M + K_2 |\sigma_1 - \sigma_2|^M)^{\frac{1-M}{M}} (K_1 M |\sigma_1 + \sigma_2|^{M-1} \text{sign}(\sigma_1 + \sigma_2) - K_2 M |\sigma_1 - \sigma_2|^{M-1} \text{sign}(\sigma_1 - \sigma_2)) \right] \quad (3.124)$$

---


$$\Delta \lambda_{2a} = \frac{f_B}{(\mathbf{a}_B^T \mathbf{C} \mathbf{a}_B + A')}$$

con  $sign(\sigma_1 + \sigma_2) = \pm 1$ , dependiendo si  $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$ . o  $\sigma_1 + \sigma_2 < 0$ , respectivamente, cumpliéndose las mismas desigualdades para la diferencias de tensiones  $sign(\sigma_1 - \sigma_2)$ . Este esquema al igual que el desarrollado en la sección anterior se basa, en satisfacer la ecuación:

$$\boldsymbol{\sigma}_c = \boldsymbol{\sigma}_b - \Delta\lambda_M \mathbf{C} \mathbf{a}_c \quad (3.125)$$

en donde el valor inicial para  $\Delta\lambda_M$  se determina mediante un desarrollo en serie de Taylor con respecto al valor predictor elástico. Conocido  $\Delta\lambda_M$  se determina de acuerdo con relación (3.125) el valor inicial de  $\boldsymbol{\sigma}_c$ , dado que este valor de partida puede no estar sobre la superficie de fluencia, un proceso iterativo se realiza para corregir las tensiones. De acuerdo con la ecuación (3.125), se tiene:

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\sigma}_c - (\boldsymbol{\sigma}_b - \Delta\lambda_M \mathbf{C} \mathbf{a}_c) = \mathbf{0} \quad (3.126)$$

donde se busca satisfacer la relación (3.126) y la condición  $f_M = 0$  dentro de una cierta tolerancia. Para ello, si se considera la tensión predictora elástica constante, y se realiza un desarrollo en serie de Taylor sobre la ecuación (3.126):

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_o + \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\lambda}_M \mathbf{C} \mathbf{a}_c + \Delta\lambda_M \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}_c}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.127)$$

con  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  definiendo al cambio en las tensiones y  $\dot{\lambda}_M$  es el cambio en  $\Delta\lambda_M$ . Considerando  $\mathbf{r}_n$  igual a cero, el valor de  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  se determina por:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = - \left[ \mathbf{I}_{2 \times 2} + \Delta\lambda_M \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}_c}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{-1} (\mathbf{r}_o + \dot{\lambda}_M \mathbf{C} \mathbf{a}_c) = -\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}_o - \dot{\lambda}_M \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{a}_c \quad (3.128)$$

de forma análoga para  $f_M$ :

$$f_M \Big|_{cn} = f_M \Big|_{co} + \frac{\partial f_M}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f_M}{\partial \epsilon_{ps}} \dot{\epsilon}_{ps} = f_M \Big|_{co} + \mathbf{a}_c^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + A' \dot{\lambda}_M = 0 \quad (3.129)$$

luego:

$$\dot{\lambda}_M = \frac{f_M \Big|_{co} - \mathbf{a}_c^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}_o}{\mathbf{a}_c^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{a}_c + A'} \quad (3.130)$$

en donde la segunda derivada de las componentes del vector de flujo  $\mathbf{a}$  (ecuaciones (3.123) y (3.124)) con respecto a las tensiones principales de Cauchy  $\sigma_1$

y  $\sigma_2$ , toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_1^2} &= \frac{1-M}{M^2} (K_1 |\sigma_1 + \sigma_2|^M + K_2 |\sigma_1 - \sigma_2|^M)^{\frac{1-2M}{M}} \\ & (K_1 M |\sigma_1 + \sigma_2|^{M-1} \text{sign}(m_1) + K_2 M |\sigma_1 - \sigma_2|^{M-1} \text{sign}(m_2))^2 + \\ & \frac{1}{M} (K_1 |\sigma_1 + \sigma_2|^M + K_2 |\sigma_1 - \sigma_2|^M)^{\frac{1-M}{M}} \\ & (K_1 M(M-1) |\sigma_1 + \sigma_2|^{M-2} + K_2 M(M-1) |\sigma_1 - \sigma_2|^{M-2}) \end{aligned} \quad (3.131)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_2^2} &= \frac{1-M}{M^2} (K_1 |\sigma_1 + \sigma_2|^M + K_2 |\sigma_1 - \sigma_2|^M)^{\frac{1-2M}{M}} \\ & (K_1 M |\sigma_1 + \sigma_2|^{M-1} \text{sign}(m_1) - K_2 M |\sigma_1 - \sigma_2|^{M-1} \text{sign}(m_2))^2 + \\ & \frac{1}{M} (K_1 |\sigma_1 + \sigma_2|^M + K_2 |\sigma_1 - \sigma_2|^M)^{\frac{1-M}{M}} \\ & (c_1 M(M-1) |\sigma_1 + \sigma_2|^{M-2} + c_2 M(M-1) |\sigma_1 - \sigma_2|^{M-2}) \end{aligned} \quad (3.132)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_2 \partial \sigma_1} = \frac{1-M}{M^2} (K_1 |\sigma_1 + \sigma_2|^M + K_2 |\sigma_1 - \sigma_2|^M)^{\frac{1-3M}{M}} \\ & (K_1 M |\sigma_1 + \sigma_2|^{M-1} \text{sign}(m_1) + K_2 M |\sigma_1 - \sigma_2|^{M-1} \text{sign}(m_2)) \\ & (K_1 M |\sigma_1 + \sigma_2|^{M-1} \text{sign}(m_1) - K_2 M |\sigma_1 - \sigma_2|^{M-1} \text{sign}(m_2)) + \\ & \frac{1}{M} (K_1 |\sigma_1 + \sigma_2|^M + K_2 |\sigma_1 - \sigma_2|^M)^{\frac{1-M}{M}} \\ & (K_1 M(M-1) |\sigma_1 + \sigma_2|^{M-2} - K_2 M(M-1) |\sigma_1 - \sigma_2|^{M-2}) \end{aligned} \quad (3.133)$$

en donde:

$$m_1 = (\sigma_1 + \sigma_2) \quad y \quad m_2 = (\sigma_1 - \sigma_2)$$

un procedimiento similar al desarrollado en la sección anterior (ecuación (3.117)) se realiza para actualizar la variación del multiplicador plástico  $\Delta \lambda_M$ , en donde  $\lambda_M$  es evaluado de acuerdo con (3.130). La corrección de las tensiones se realiza en cada paso de acuerdo con la ecuación (3.128), hasta que se satisfaga la ecuación (3.119) dentro de una tolerancia dada.



### 3.5 OTROS CRITERIOS DE ANISOTROPIA PLÁSTICA

Las principales críticas recibidas por los modelos propuestos por Hill son; que en el primer criterio<sup>[H-2]</sup> el modelo no describe adecuadamente el comportamiento de algunos metales a causa del comportamiento anómalo que se presenta en determinados metales con valores de  $\bar{R} \leq 1$ . En el segundo criterio<sup>[H-3]</sup> es que al estar la superficie definida en el espacio de tensiones principales no se incluyen los términos de cortante, y la superficie de fluencia presenta problemas de convexidad dependiendo del caso considerado, así como de los parámetros  $M$  y  $\bar{R}$  que se adopten.

A modo de tener una representación más real del comportamiento del material se han propuesto otras superficies de fluencia anisotrópicas por diferentes investigadores en los últimos años<sup>[C-3],[H-4],[B-3],[B-4],[W-2]</sup>.

A continuación se presentan dos nuevas superficies de fluencia propuestas en el contexto de aplicaciones a problemas de embutición de láminas metálicas<sup>[B-3],[C-3]</sup>.

#### 3.5.1 Modelo Anisótropo de Barlat

Una función que describe el comportamiento *anisótropo planar* de metales fue propuesta por Barlat et al.<sup>[B-3],[B-4]</sup>. Dicha función se expresa para estados de tensión plana por:

$$f = a|K_1 + K_2|^M + a|K_1 - K_2|^M + (2 - a)|2K_2|^M - 2\sigma_y^M = 0 \quad (3.134)$$

con:

$$K_1 = \frac{(\sigma_{11} + h\sigma_{22})}{2} \quad (3.135)$$

$$K_2 = \sqrt{\frac{(\sigma_{11} - h\sigma_{22})^2}{4} + p^2\sigma_{12}^2} \quad (3.136)$$

en donde los parámetros  $a$ ,  $h$ ,  $p$  y  $M$  caracterizan la anisotropía, y las tensiones se encuentran referidas a los ejes de ortotropía del material. Para un valor dado del exponente  $M$  los parámetros  $a$ ,  $h$  y  $p$  pueden ser evaluados usando los valores del coeficiente de Lankford  $R$ , es decir, la razón entre la tasas de deformación plástica obtenidas a partir de ensayos de tracción uniaxial. Nótese que cuando  $\sigma_{12} = 0$ , la relación (3.134) se reduce a:

$$f = a|\sigma_{11}|^M + a|h\sigma_{22}|^M + (2 - a)|\sigma_{11} - h\sigma_{22}|^M = 2\sigma_y^M \quad (3.137)$$

que corresponde al caso (5) del criterio de Hill mejorado (ecuación 3.86), excepto por el valor del parámetro  $h$ . Una propiedad importante de la ecuación (3.134)

es su convexidad cuando  $a, h, p$  son positivos y  $M > 1$ , como se demuestra en referencia [B-3]. Un algoritmo de integración para esta superficie de fluencia se propone en la referencia [D-1], y su aplicación a problemas de conformado de metales se discute en las referencias [N-2], [O-1].

### 3.5.2 Modelo Anisótropo de Chu

Este modelo generaliza el criterio de Hill mejorado al incluir las tensiones de cortante, al igual que la posibilidad de describir el comportamiento *anisótropo planar* en láminas metálicas<sup>[C-3]</sup>. La superficie de fluencia resultante para estados de tensión plana, se expresa por:

$$c|\sigma_{11} + b\sigma_{22}|^M + h|(\sigma_{11} - b\sigma_{22})^2 + 2d\sigma_{12}^2|^{\frac{M}{2}} = \sigma_y^M \quad (3.138)$$

con:

$$b = \sqrt{\frac{R_0(1 + R_{90})}{R_{90}(1 + R_0)}} \quad c = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{R_0 R_{90}}{(1 + R_0)(1 + R_{90})}} \right] \quad (3.139)$$

$$h = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{\frac{R_0 R_{90}}{(1 + R_0)(1 + R_{90})}} \right] \quad d = \frac{1}{2} \left[ \frac{c|1 + b|^M (2R_{45} + 1)}{h} \right]^{\frac{1}{M}} \quad (3.140)$$

en donde los parámetros que caracterizan la anisotropía  $c, b, h, d$  se obtienen a partir de las razones de deformación plástica  $R_0, R_{45}$  y  $R_{90}$  para un valor dado de  $M$ . Las condiciones de convexidad para esta superficie de fluencia se discuten en la referencia [C-3]. Es interesante observar que si  $\sigma_{12} = 0$ , y  $R_0 = R_{45} = R_{90}$ :

$$b = 1, \quad c = \frac{1}{2(1 + R)} \quad (3.141)$$

$$h = \frac{(1 + 2\bar{R})}{2(1 + R)} \quad (3.142)$$

luego, la ecuación (3.138) se reduce a:

$$\frac{1}{2(1 + R)} |\sigma_{11} + \sigma_{22}|^M + \frac{(1 + 2\bar{R})}{2(1 + R)} |\sigma_{11} - \sigma_{22}|^M = \sigma_y^M \quad (3.143)$$

recuperándose la forma del caso(4) (ecuación 3.85) del criterio de Hill mejorado.

### 3.6 CONCLUSIONES

En este capítulo se han presentado las bases teóricas de los modelos constitutivos empleados en la simulación numérica de procesos de embutición de chapas.

Como principales conclusiones podemos señalar que las superficies de fluencia definidas por los criterios de plastificación de Hill<sup>[H-2],[H-3]</sup>, juntamente con los coeficientes de anisotropía de Lankford bajo las hipótesis de comportamiento *anisótropo normal*, pueden ser utilizados para modelar adecuadamente el comportamiento de metales fabricados mediante procesos mecánicos<sup>[H-2],[H-3],[V-1]</sup>.

Con relación al primer criterio de Hill podemos afirmar que hoy en día sigue siendo válida su aplicación en la mayoría de los problemas encontrados, sobre todo por la simplicidad en su programación y la rápida convergencia presentada por el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva, debiendo considerarse otras alternativas cuando el coeficiente de Lankford sea menor que uno. En esta situación el caso (4) del criterio de fluencia de Hill mejorado es el más apropiado, siempre y cuando se asegure la convexidad de la superficie de fluencia mediante la elección de adecuados valores de los parámetros  $\bar{R}$  y  $M$  (ver ecuación 3.95).

Cabe señalar que la búsqueda de criterios de fluencia para modelar el comportamiento anisótropo de metales, es una línea abierta de investigación, como lo demuestran el número creciente de publicaciones sobre el tema<sup>[C-3],[H-4],[H-5],[B-3],[B-4],[W-2]</sup>.

### 3.7 REFERENCIAS

- [B-1] **Bathe, K.J.** - *Finite elements procedures in engineering analysis*, - Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1983.
- [B-2] **Benson, D.J.** - *Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes*, - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 99, pp.235 -394, 1992.
- [B-3] **Barlat, F., Lege, D.J. and Brem, J.,** - *A six-component yield function for anisotropic materials* - Int. J. of Plasticity, Vol. 7, pp. 693-712, 1991.
- [B-4] **Barlat, F. and Lian, J.,** - *Plastic behavior and stretchability of sheet metals. Part I: A yield function for orthotropic sheets under plane stress condition*, - Int. J. of Plasticity, Vol. 5, pp. 51-66, 1989.
- [B-5] **Bressan, J.D., and Williams, J.A.,** - *The use of shear instability criterion to predict local necking in sheet metal deformation*, -Int. J. Mech. Sci., Vol. 25, pp. 155, 1983.



- [C-1] **Crisfield, M.A.**, -*Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structure*, - Vol. 1, John Wiley, 1991.
- [C-2] **Crisfield, M.A.**, - *Short Course on Computational Techniques for Plasticity*, - Univ. Politec. Catalunya, Barcelona, 30-31 March, 1995.
- [C-3] **Chu, E.**, -*Generalization of Hill's 1979 Anisotropic Yield Criteria*, - In NUMISHEET 93 - 2nd International Conference: Numerical Simulation of 3-D Sheet Metal Forming Processes, Isehara, Japan, 1993.
- [D-1] **Dutko, R., Perić, D. and Owen, D.R.J.**, -*Universal anisotropic yield criterion based on superquadric functional representation: Part 1. Algorithmic issues and accuracy analysis*, - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 109, North-Holland, pp. 73-93, 1993.
- [D-2] **Hallquist, J. O. and Benson D. J.** -*DYNA3D user's manual (nonlinear dynamic analysis of structures in three dimensions)*, -Lawrence Livermore National Laboratory, UCID-19592, Rev. 3, 1987.
- [D-3] **Hallquist, J. O.** -*User's manual for DYNA2D-An explicit two-dimensional hydrodynamic finite element code with interactive rezoning*, -Lawrence Livermore National Laboratory, UCID-19899, Rev. 2, 1987.
- [D-4] **Dodd, B. and Caddell, R.**, -*On the anomalous behavior of anisotropic sheet metals*, -Int. J. Mech. Sci., Vol. 26, No.2, pp. 113-118, 1984.
- [G-1] **Garcia, C.** -*Un modelo numérico para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones*, -Tesis Doctoral, UPC, Barcelona, junio 1993.
- [H-1] **Halleux, J.P. and Casadei, F.** -*Transient large strain finite element analysis of solids*, -Computational Methods for Non-linear Problems, Pineridge Press Ltda, Swansea, U.K. 1987.
- [H-2] **Hill, R.**, -*A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals*, - Proc. Royal Soc. London, A193, pp.281. 1948.
- [H-3] **Hill, R.**, -*Theoretical Plasticity of Textured Aggregates*, - Proc. Camb. Phil. Soc. 85, pp.179, 1979.
- [H-4] **Hill, R.**, -*Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals*, - J. Mech. Phys. Solids, Vol. 85., No.3, pp. 405-417, 1990.
- [H-5] **Hosford, W.F.**, -*Comments on anisotropic yield criteria*, -Int. J. Mech. Sci., Vol. 27, No.7/8, pp. 423-427, 1985.
- [H-6] **Hallquist, J.O.**, -*NIKE2D - A vectorized implicit, finite deformation finite element code for analyzing the static and dynamic response of 2D solids with interactive rezoning and graphics*, -Lawrence Livermore National Laboratory, UCID-19677, Rev. 1, 1986.



- [H-7] **Hughes, T.J.R., and Winget, J.,** -*Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis*, -Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol.12, pp. 1862-1867, 1980.
- [J-1] **Jetteur, P.,** -*Implicit integration algorithm for elastoplasticity in plane stress analysis*, -Engineering Computations, Vol. 3, pp. 251-253, 1986.
- [J-2] **Johnson, G.C., and Bammann, D.J.,** -*A discussion of stress rates in finite deformation problems*, -Int. J. Solids and Structures Vol. 20, No. 8, pp. 725-737, 1984.
- [K-1] **Kobayashi, S., Caddell, R.M., and Hosford, W.F.,** -*Examination of Hill's latest yield criterion using experimental data for various anisotropic sheet metals*, -Int. J. Mech. Sci., Vol. 27, No.7/8, pp. 509-517, 1985.
- [L-1] **Lian, J., Zhou, D., and Baudalet, B.,** -*Application of Hill's new yield theory to sheet metal forming Part I. Hill's 1979 criterion and its application to predicting sheet forming limit*, - Int. J. Mech. Sci., Vol. 31, No. 4, pp.237-247, 1989.
- [M-1] **Malvern, L. E.** -*Introduction to the Mechanics of a Continuum Medium*, - Printice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.
- [N-1] **Nakazawa, S.,** -*The role of element formulations in finite deformation analyses*, -Advances in Finite Deformation Problems In Materials Processing and Structures, AMD-Vol. 125, ASME, 1991.
- [N-2] **Nakamachi, E.,** -*Sheet forming process characterization by static-explicit anisotropic elastic-plastic finite element simulation*, - In NUMISHEET 93 - 2nd International Conference: Numerical Simulation of 3-D Sheet Metal Forming Processes, Isehara, Japan, 1993.
- [O-1] **Ohwue, T., Yoshida, T., and Usuda, M.,** -*Influence of material properties and work process factors in sheet metal forming*, -Numerical Methods in Industrial Forming Processes, Chenot, Woods and Zienkiewicz, Balkema, Rotterdam. ISBN 9054100877, 1992.
- [P-1] **Pinsky, P.M., Ortiz, M., and Pister, K.,** -*Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis*, -Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 40, pp. 137-158, 1983.
- [R-1] **Rockafellar, R. T.** -*Convex Functions*, -Princeton University Press, New Jersey, pp.23-31, 1972.
- [S-1] **Simo, J.C. and Taylor, R.L.,** -*A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity*, -Int. J. Meth. Engng., Vol. 22, pp. 649-670, 1986.
- [S-2] **Simo, J.C. and Govindjee, S.,** -*Exact closed-form solution of the return mapping algorithm in plane stress elasto-viscoplasticity*, -Engineering Computations, Vol. 5, pp. 254-258, 1988.

- [V-1] **Vreede, P.**, -*A finite element method for simulation of 3-dimensional sheet metal forming*- Ph. D Thesis, University of Twente, Twente, Holland, 1992.
- [W-1] **Woodthorpe, J. and Pearce, R.**, -*The anomalous behaviour of aluminium sheet under balanced biaxial tension*, -Int. J. Mech. Sci., Vol. 12, pp. 341, 1970.
- [W-2] **Weixian, Z.**, -*A new non-quadratic orthotropic yield criterion*, -Int. J. Mech. Sci., Vol. 32, No.6, pp. 513-520, 1990.
- [Z-1] **Zhu, Y., Dodd, B., Caddell, R.M., and Hosford, W.F.**, -*Convexity restrictions on non-quadratic anisotropic yield criteria*, -Int. J. Mech. Sci., Vol. 29, No.10/11, pp. 733-741, 1987.
- [Z-2] **Zhou, D., and Lian, J.**, - *Application of Hill's new yield theory to sheet metal forming Part II. A numerical study of hydrostatic bulging using Hill's 1979 yield criterion*, - Int. J. Mech. Sci., Vol. 31, No. 4, pp.249-263, 1989.

## Apendice 3A

### MEDIDA DE DEFORMACIÓN FINITA

En este apéndice se presenta la medida de deformación objetiva utilizada, en la presente investigación.

Considérese un elemento de línea en la configuración al tiempo  $t$ , definido por los puntos  $P({}^t x_1, {}^t x_2, {}^t x_3)$  y  $Q({}^t x_1 + d {}^t x_1, {}^t x_2 + d {}^t x_2, {}^t x_3 + d {}^t x_3)$  ver Figura Ap3A.I, la longitud del segmento  $PQ$  al cuadrado se calcula de acuerdo con la norma Euclideana, como:

$$dS^2 = d {}^t x_i d {}^t x_i \quad i = 1, 3 \quad (\text{Ap3A.1})$$

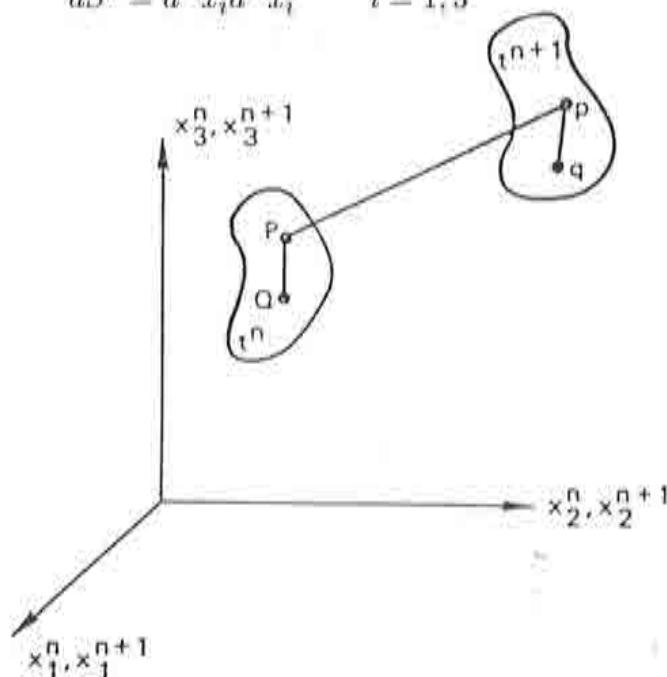


Figura Ap3A.I Desplazamiento desde la configuración  $t$  a la  $t + \Delta t$ .

En la configuración al tiempo  $t + \Delta t$ , los puntos  $P$  y  $Q$  se trasladan a las posiciones,  $p({}^{t+\Delta t} x_1, {}^{t+\Delta t} x_2, {}^{t+\Delta t} x_3)$  y  $q({}^{t+\Delta t} x_1 + d {}^{t+\Delta t} x_1, {}^{t+\Delta t} x_2 + d {}^{t+\Delta t} x_2, {}^{t+\Delta t} x_3 + d {}^{t+\Delta t} x_3)$  y una expresión similar a la definida por la ecuación (Ap3A.1) se obtiene para la longitud del segmento  $pq$ :

$$ds^2 = d {}^{t+\Delta t} x_i d {}^{t+\Delta t} x_i \quad i = 1, 3 \quad (\text{Ap3A.2})$$

La geometría en la configuración intermedia se define como el promedio de las geometrías en las configuraciones al tiempo  $t$  y  $t + \Delta t$ , luego:

$${}^{t+\frac{\Delta t}{2}}x_i = \frac{1}{2}({}^t x_i + {}^{t+\Delta t}x_i) \quad (\text{Ap3A.3})$$

Debido a que la deformación es continua, los diferenciales en las configuraciones  $t$  y  $t + \Delta t$  pueden ser calculados en términos de los diferenciales en la configuración  $t + \frac{\Delta t}{2}$ , por:

$$d {}^t x_i = \frac{\partial {}^t x_i}{\partial {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}x_j} d {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}x_j \quad (\text{Ap3A.4})$$

$$d {}^{t+\Delta t}x_i = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_i}{\partial {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}x_j} d {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}x_j \quad (\text{Ap3A.5})$$

Luego, el cambio en la longitud al cuadrado del segmento experimentado durante el movimiento, es dado por:

$$ds^2 - dS^2 = 2\Delta\epsilon_{jk} d {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}x_j d {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}x_k \quad (\text{Ap3A.6})$$

en donde  $\Delta\epsilon_{jk}$ , se define como:

$$\Delta\epsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_i}{\partial {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}x_j} \frac{\partial {}^{t+\Delta t}x_i}{\partial {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}x_k} - \frac{\partial {}^t x_i}{\partial {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}x_j} \frac{\partial {}^t x_i}{\partial {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}x_k} \right) \quad (\text{Ap3A.7})$$

y recibe el nombre de tensor de deformación *centrado*<sup>[H-6]</sup>. Este tensor puede reescribirse en términos del incremento de desplazamiento entre las configuraciones  $t$  y  $t + \Delta t$ , de acuerdo con:

$${}^t u_i = {}^{t+\Delta t}x_i - {}^t x_i \quad (\text{Ap3A.8})$$

expresando la geometría en ambas configuraciones, en función de la geometría en la configuración intermedia y de los incrementos de desplazamientos:

$${}^t x_i = {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}x_i - \frac{{}^t u_i}{2} \quad (\text{Ap3A.9})$$

$${}^{t+\Delta t}x_i = {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}x_i + \frac{{}^t u_i}{2} \quad (\text{Ap3A.10})$$



Luego, derivando las expresiones (Ap3A.9) y (Ap3A.10) con respecto a las coordenadas de la configuración intermedia y reemplazándolas en la ecuación (Ap3a.7), se tiene:

$$\Delta\epsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial {}^t u_k}{\partial {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} x_l} + \frac{\partial {}^t u_l}{\partial {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} x_k} \right) \quad (\text{Ap3A.11})$$

medida de deformación objetiva<sup>[H-6]</sup> que es una aproximación de mejor calidad a la deformación logarítmica  $\ln\left(\frac{{}^{t+\Delta t}L}{{}^tL}\right)$ , que las de Green St. Venant o de Almansi<sup>[M-1]</sup>.

El incremento de desplazamientos  ${}^t u_i$ , puede ser expresado a su vez en función de la velocidad en la configuración intermedia y del paso de tiempo  $\Delta t$  de acuerdo con las expresiones (2.34), (2.35) y (2.36) del capítulo 2, obteniéndose:

$${}^t u_i = {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \dot{u} \Delta t \quad (\text{Ap3A.12})$$

luego, reemplazando en la ecuación (Ap3A.11) se obtiene la expresión de la tasa de deformación centrada<sup>[B-2]</sup>:

$${}^{t+\frac{\Delta t}{2}} d_{kl} = \frac{\Delta\epsilon_{kl}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \dot{u}_k}{\partial {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} x_l} + \frac{\partial {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \dot{u}_l}{\partial {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} x_k} \right) \quad (\text{Ap3A.13})$$

A continuación se presenta un ejemplo extraído de referencia [H - 6], en donde se aprecia en un contexto de grandes deformaciones la importancia en la elección de la medida de deformación finita. Considérese una barra recta de longitud  $L$  sometida a un esfuerzo de uniaxial de tracción, el incremento de deformación entre las configuraciones al tiempo  $t$  y  $t + \Delta t$  puede calcularse de acuerdo con (Ap3A.7):

$$\Delta\epsilon = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{{}^{t+\Delta t}L}{{}^{t+\frac{\Delta t}{2}}L} \right)^2 - \left( \frac{{}^tL}{{}^{t+\frac{\Delta t}{2}}L} \right)^2 \right] \quad (\text{Ap3A.14})$$

donde  ${}^tL$  y  ${}^{t+\Delta t}L$  son las longitudes al comienzo y final del paso de tiempo  $\Delta t$  respectivamente. Si se calculan las deformaciones de Green St. Venant y de Almansi, se tiene:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{{}^{t+\Delta t}L}{{}^tL} \right)^2 - 1 \right] \quad (\text{Ap3A.15})$$

$$\Delta e = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{{}^tL}{{}^{t+\Delta t}L} \right)^2 \right] \quad (\text{Ap3A.16})$$

$\left(\frac{l+\Delta l}{l}\right)$	Logarítmica	Centrada	Green St. Venant	Almansi
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1.2	0.1823	0.1818	0.2200	0.1528
1.4	0.3365	0.3333	0.4800	0.2449
1.6	0.4700	0.4615	0.7800	0.3047
1.8	0.5878	0.5714	1.1200	0.3437
2.0	0.6931	0.6667	1.5000	0.3750

**Tabla Ap3a.I** Diferentes medidas de deformación para barra traccionada.

De la Tabla Ap3a.I, se concluye que la medida de deformación centrada es una aproximación de mejor calidad a la deformación logarítmica que las de Green St. Venant o de Almansi.

## CAPÍTULO 4

# NUEVAS FORMULACIONES DE ELEMENTOS FINITOS DE LÁMINA EN 3D

### 4.1. INTRODUCCIÓN

En este Capítulo se describen una serie de nuevos elementos finitos triangulares desarrollados en los últimos años, para el análisis de láminas delgadas en 3D<sup>[O-2],[O-4],[O-5],[Z-3]</sup>. La idea de operar solamente con variables traslacionales en la modelación de estructuras láminares, no es nueva y numerosos investigadores han derivado elementos finitos con estas características<sup>[B-3],[H-2],[P-1],[P-2]</sup>. En este contexto Oñate y Cervera<sup>[O-5]</sup> han desarrollado una metodología *general* basada en volúmenes finitos para derivar elementos finitos de placa delgada sin grados rotacionales de libertad. Estas ideas han sido extendidas con éxito al análisis lineal de láminas por Zarate<sup>[Z-3]</sup> y al análisis no lineal en el desarrollo del presente trabajo.

En la primera parte de este Capítulo se presentan las hipótesis fundamentales en las que se basa la teoría de placa gruesa de Reissner-Mindlin<sup>[O-1]</sup> y sus consecuencias en los campos de desplazamientos, deformaciones y tensiones. Esta teoría permitirá bajo la adopción de adecuadas hipótesis relativas a los campos de deformaciones de cortante transversal llegar a la teoría de placas de Kirchhoff, con la ventaja que en las integrales del Principio de los Trabajos Virtuales sólo aparecerán derivadas de primer orden, permitiendo así la utilización de elementos finitos con continuidad de clase  $C_0$ <sup>[0-1]</sup>.

Luego, se presenta una familia de nuevos elementos finitos triangulares, desarrollados en los últimos años para el análisis de placas gruesas, en donde se demuestra que introduciendo adecuadas restricciones sobre los campos de rotaciones, estos evolucionan a formas más sencillas válidas para el análisis de placas delgadas. De esta forma a partir del elemento triangular  $TLCCL$ <sup>[O-1],[O-2],[O-3]</sup> (triángulo con interpolación lineal para el campo de desplazamientos, cuadrática para el campo de giros y lineal para las deformaciones de cortante) se deriva el conocido elemento de placa delgada  $DKT$  (Triángulo Discreto de Kirchhoff) de una forma más sencilla y directa que la tradicional<sup>[B-1],[D-1]</sup>. La importancia de esta nueva formulación para el ya conocido elemento de placa  $DKT$ ,

es que permitirá realizar las correspondientes validaciones numéricas del nuevo elemento de placa delgada.

Siguiendo el procedimiento anterior, a partir del elemento  $TLLL$  se deriva el elemento  $DKTLL$ , al cual se le imponen nuevas restricciones sobre el campo de rotaciones normales dando origen al elemento más simple de esta familia de elementos triangulares, el cual utiliza únicamente como variables nodales desplazamientos, que en el caso de placas se traduce en una variable por nodo. El elemento así deducido se denominará  $BPT$  (Triángulo Básico de Placa)<sup>[O-2],[O-3],[Z-3]</sup>.

Finalmente se presenta la extensión de los nuevos elementos de placa delgada  $DKT$  y  $BPT$  al análisis de láminas, en donde el comportamiento membranar se modela mediante el elemento triangular de deformación constante  $CST$ <sup>[Z-1]</sup>. De esta forma se construyen los elementos  $CST - DKT15$  y  $CST - BPT$ , este último denominado  $BST$  (Triángulo Básico de Lámina). El atractivo principal de esta nueva formulación con respecto a las tradicionales, es que sólo utiliza como variables nodales los desplazamientos, lo que se traduce en una serie de ventajas de carácter físico, numérico y computacional.

## 4.2. FORMULACIÓN DE PLACAS GRUESAS

### 4.2.1 Hipótesis de la teoría de placas de Reissner-Mindlin

Las hipótesis de carácter físico y geométrico en las cuales se fundamenta la teoría de placas de Reissner-Mindlin, son las siguientes:

- 1.- En los puntos del plano medio los desplazamientos  $u$  y  $v$  (según los ejes  $x$  e  $y$ ) son nulos.
- 2.- Los desplazamientos  $u$  y  $v$  de un punto material cualesquiera  $x, y, z$  varían linealmente a lo largo del eje  $z$  y el desplazamiento transversal  $w$  (según el eje  $z$ ) de puntos contenidos en una misma normal al plano medio es el mismo.
- 3.- El estado tensional es plano sobre la placa, es decir,  $\sigma_z = 0$ .
- 4.- Los puntos que antes de la deformación estaban sobre la normal al plano medio de la placa, permanecen al deformarse sobre una misma recta, siu que esta tenga que ser necesariamente ortogonal a la deformada del plano medio.

Cabe señalar que la teoría de placas de Kirchhoff<sup>[T-1]</sup>, se basa en las mismas tres hipótesis iniciales, y la única diferencia radica en que obliga a los puntos que están sobre rectas normales al plano medio, a permanecer sobre rectas ortogonales a la deformada del plano medio después de la deformación.



### 4.2.2 Campo de desplazamientos

De las hipótesis anteriores y de acuerdo con la Figura 4.1, las componentes de desplazamiento de un punto  $A$  de coordenadas  $x, y, z$ , contenido en la normal  $OA$  son:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= -z\theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_o(x, y) \end{aligned} \quad (4.1)$$

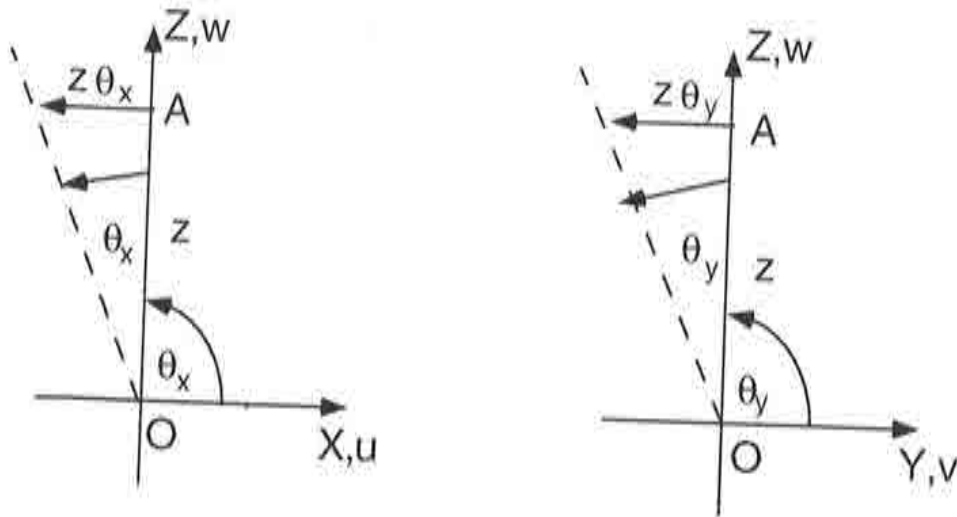


Figura 4.1 Teoría de placas de Reissner-Mindlin. Convenio de signos y giro de la normal a la superficie media.

donde  $\theta_x$  y  $\theta_y$  son los ángulos que definen el giro de la normal a la superficie media en los planos  $xz$  e  $yz$  respectivamente. El vector de movimientos para un punto de la superficie media de la placa, contiene tres variables cinemáticas independientes y se definirá por:

$$\mathbf{u} = (w_o, \theta_x, \theta_y)^T \quad (4.2)$$

de acuerdo con la Figura 4.2, se deduce que el giro de la normal contenido en el plano  $xz$ , se puede expresar como:

$$\theta_x = \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} + \phi_x \quad (4.3)$$

e igualmente el giro contenido en el plano  $yz$ , se expresa por:

$$\theta_y = \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} + \phi_y \quad (4.4)$$

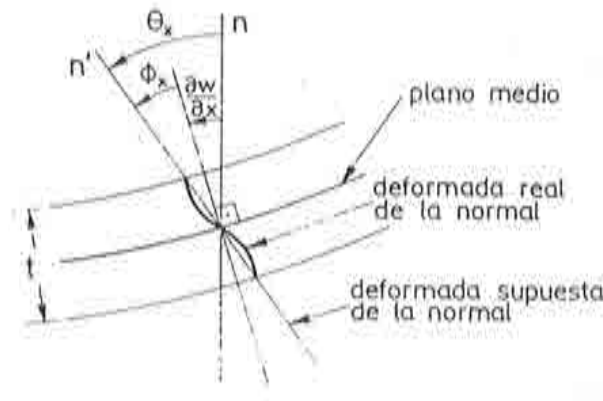


Figura 4.2 Giro de la normal, bajo las hipótesis de la teoría de Reissner-Mindlin.

de relaciones (4.3) y (4.4) se aprecia que el giro de la normal en un punto se compone de dos términos; los primeros  $\frac{\partial w}{\partial x}$  y  $\frac{\partial w}{\partial y}$ , son debidos al cambio de pendiente del plano medio y los segundos  $\phi_x$ ,  $\phi_y$  se deben al giro adicional de la normal al no permanecer ortogonal a la deformada del plano medio, también se observa que los giros de la normal no pueden obtenerse únicamente en función de la pendiente del plano medio, esto permitirá considerar los giros  $\theta_x$  y  $\theta_y$  como variables independientes<sup>[O-1]</sup>, cuando se aplique la discretización de elementos finitos.

### 4.2.3 Campo de deformaciones y tensiones

El campo de desplazamientos definido por las relaciones (4.1), genera en planos paralelos al  $xy$  el siguiente campo de deformaciones:

$$\epsilon_f = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

y en la dirección vertical:

$$\epsilon_c = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

en donde se aprecia que la hipótesis de no ortogonalidad de la normal se traduce en que las deformaciones transversales  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  no son nulas. Las relaciones (4.5) y (4.6) definen a los vectores de deformaciones de flexión y cortante transversal respectivamente. Expresiones que matricialmente se pueden expresar por:

$$\epsilon_f = z \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = z \mathbf{L} \theta \quad (4.7)$$

$$\epsilon_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \mathbf{S} \mathbf{u} \quad (4.8)$$

Puesto que por la hipótesis 3 de la teoría de Reissner-Mindlin, la tensión normal  $\sigma_z$  es nula, el vector de tensiones asociado a los términos flexionales se escribirá como:

$$\sigma_f = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

y el vector de tensiones, correspondientes a los efectos de cortante transversal se expresará por:

$$\sigma_c = \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

En el caso de considerar que la normal permanece ortogonal a la superficie media después de la deformación, es decir, que se cumplen las hipótesis de Kirchhoff, los vectores asociados a los términos de cortante (relaciones (4.6) y (4.10)) son nulos. Cumpliéndose, en este caso que:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x \quad y \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_y \quad (4.11)$$

o sea:

$$\nabla w + \theta = \mathbf{0} \quad (4.12)$$

#### 4.2.4 Relación tensión-deformación

Partiendo de la ecuación constitutiva de la elasticidad tridimensional<sup>[M-1]</sup>, y dado que  $\sigma_z$  es nula, se cumplen las siguientes relaciones entre las tensiones y deformaciones:

$$\boldsymbol{\sigma}_f = \mathbf{D}_f \boldsymbol{\epsilon}_f = z \mathbf{D}_f \mathbf{L} \boldsymbol{\theta} \quad (4.13)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_c = \mathbf{D}_c \boldsymbol{\epsilon}_c = \mathbf{D}_c \mathbf{S} \mathbf{u} \quad (4.14)$$

siendo  $\mathbf{D}_f$  y  $\mathbf{D}_c$  las matrices constitutivas de flexión y cortante, respectivamente, las cuales para elasticidad isótropa se expresan por:

$$\mathbf{D}_f = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\mathbf{D}_c = \alpha G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.16)$$

Debido al campo de desplazamientos supuesto, la distribución de deformaciones  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_{xy}$  es lineal en  $z$  y por consiguiente a través de (4.13) lo son las correspondientes tensiones  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_{xy}$ . Por otra parte la distribución de las deformaciones  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  es constante a lo largo del espesor y lo mismo sucede con las correspondientes tensiones  $\sigma_{xz}$  y  $\sigma_{yz}$ . De acuerdo con la teoría de la elasticidad la distribución exacta de las tensiones transversales no es constante a través del espesor. Generalmente dicha distribución tiene forma polinómica con valores nulos en los planos superior e inferior de la placa<sup>[T-1]</sup>. Para corregir este problema las tensiones transversales se multiplican, por un coeficiente  $\alpha = \frac{5}{6}$ , de forma tal que el trabajo de deformación de las tensiones transversales, coincida con el realizado por las tensiones transversales exactas.

#### 4.2.5 Esfuerzos y deformaciones generalizadas

Se define el vector de esfuerzos generalizados  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ , en un punto del plano medio por:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_f \\ \dots \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ \dots \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} z\sigma_x \\ z\sigma_y \\ z\sigma_{xy} \\ \dots \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} z\boldsymbol{\sigma}_f \\ \dots \\ \boldsymbol{\sigma}_c \end{Bmatrix} dz \quad (4.17)$$

en donde  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_f$  y  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_c$  son respectivamente los vectores de momentos flectores y esfuerzos cortantes, obtenidos por la integración de los vectores de tensiones a



través del espesor. La ecuación (4.17) puede modificarse haciendo uso de (4.13) y (4.14), como:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_f \\ \vdots \\ \hat{\sigma}_c \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} z\mathbf{D}_f\epsilon_f \\ \vdots \\ \mathbf{D}_c\epsilon_c \end{Bmatrix} dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} z^2\mathbf{D}_f\mathbf{L}\theta \\ \vdots \\ \mathbf{D}_c\mathbf{S}\mathbf{u} \end{Bmatrix} dz = \\ &= \begin{Bmatrix} \left(\int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} z^2 dz\right)\mathbf{D}_f\mathbf{L}\theta \\ \vdots \\ \left(\int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} dz\right)\mathbf{D}_c\mathbf{S}\mathbf{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{t^3}{12}\mathbf{D}_f\hat{\epsilon}_f \\ \vdots \\ t\mathbf{D}_c\hat{\epsilon}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{D}}_f\hat{\epsilon}_f \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{D}}_c\hat{\epsilon}_c \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde:

$$\hat{\mathbf{D}}_f = \frac{t^3}{12}\mathbf{D}_f \quad y \quad \hat{\mathbf{D}}_c = t\mathbf{D}_c \quad (4.19)$$

son las matrices constitutivas generalizadas de flexión y cortante<sup>[O-1]</sup> y:

$$\hat{\epsilon}_f = \mathbf{L}\theta \quad y \quad \hat{\epsilon}_c = \mathbf{S}\mathbf{u} \quad (4.20)$$

son los vectores de deformaciones generalizadas de flexión y cortante, respectivamente, en donde  $\hat{\epsilon}_f$  y  $\hat{\epsilon}_c$  pueden interpretarse como los vectores de curvaturas y cizallamientos transversales de un punto de la superficie media de la placa.

La relación entre los vectores de deformación y los de deformación generalizada se obtiene a partir de las ecuaciones (4.7),(4.8) y (4.20) como:

$$\epsilon_f = z\hat{\epsilon}_f \quad y \quad \epsilon_c = \hat{\epsilon}_c \quad (4.21)$$

### 4.3. FORMULACIÓN DE LÁMINAS PLANAS DE REISSNER-MINDLIN

#### 4.3.1 Campo de desplazamientos

Considérese un sistema de referencia cartesiano local  $x', y', z'$  con ejes  $x', y'$  contenidos en el plano del elemento. Admitiendo que se cumplen las hipótesis de Reissner-Mindlin para el estado de placa, los desplazamientos de un punto genérico  $A$ , situado sobre la normal  $OA$ , siendo  $O$  el punto de corte de la normal con el plano medio, ver Figura 4.3, se pueden expresar como:

$$u'(x', y', z') = u'_o(x', y') - z'\theta_{x'}(x', y')$$

$$v'(x', y', z') = v'_o(x', y') - z'\theta_{y'}(x', y')$$

$$w'(x', y', z') = w'_o(x', y') \quad (4.22)$$

donde  $u'_o$ ,  $v'_o$  y  $w'_o$  son los desplazamientos según los ejes  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , respectivamente, del punto  $O$ ;  $\theta_{x'}$  y  $\theta_{y'}$  los giros de la normal  $OA$  contenidos en los planos locales  $x'z'$  e  $y'z'$ , respectivamente, y  $z'$  la distancia  $OA$ . El vector de movimientos del punto  $A$  se define por:

$$\mathbf{u}' = [u'_o, v'_o, w'_o, \theta_{x'}, \theta_{y'}]^T \quad (4.23)$$

de acuerdo con las ecuaciones (4.22) la única diferencia con respecto a los campos de desplazamientos de flexión de placas, radica en que los puntos del plano medio se desplazan según los ejes locales  $x'$  e  $y'$ .

### 4.3.2 Campo de deformaciones

Puesto que por las hipótesis de Reissner-Mindlin  $\sigma_{z'} = 0$ , y considerando las ecuaciones (4.5), (4.6) y (4.22) el vector de deformaciones con respecto a un sistema de ejes locales, se expresará por:

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \dots \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \dots \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'_o}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'_o}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'_o}{\partial y'} + \frac{\partial v'_o}{\partial x'} \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \theta'_{x'}}{\partial x'} \\ -\frac{\partial \theta'_{y'}}{\partial y'} \\ -\left(\frac{\partial \theta'_{x'}}{\partial y'} + \frac{\partial \theta'_{y'}}{\partial x'}\right) \\ \dots \\ \frac{\partial w'_o}{\partial x'} - \theta'_{x'} \\ \frac{\partial w'_o}{\partial y'} - \theta'_{y'} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

o bien:

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_m \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} z' \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_f \\ \dots \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_c \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

donde  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_m$ ,  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_f$  y  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_c$  son los vectores de deformaciones generalizadas de membrana (alargamientos), flexión (curvaturas) y cortante (cizalladuras). Al igual, que en caso de placas, el vector de deformaciones generalizadas de membrana puede ser escrito en forma matricial, como:

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_m = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial x'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_o \\ v'_o \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

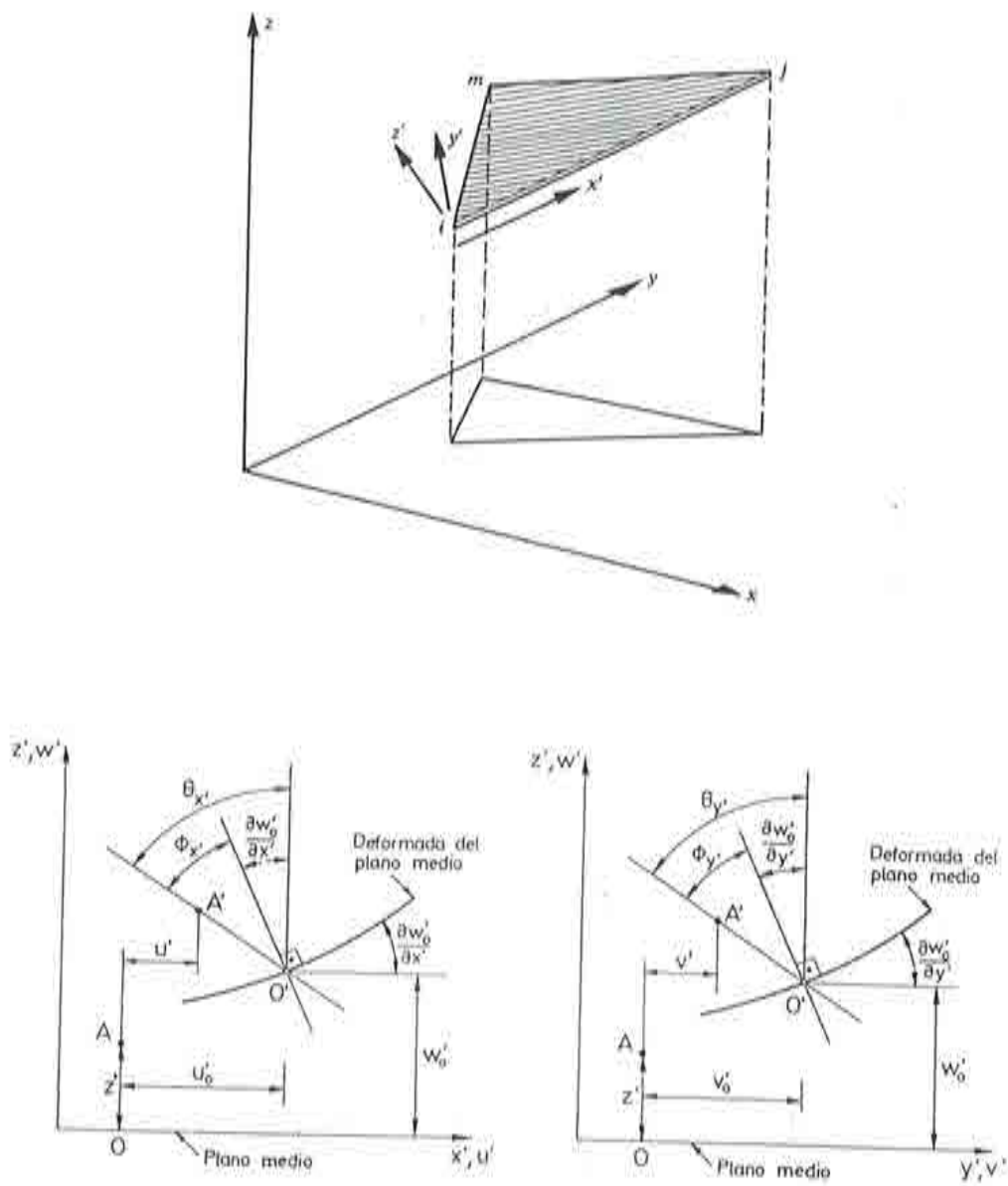


Figura 4.3 (a): Elemento de lámina plana en el espacio, ubicación de ejes locales y globales. (b): Desplazamiento de un punto de un elemento de lámina plana en los planos locales  $x'z'$ ,  $y'z'$ .

### 4.3.3 Campo de tensiones

Operando en ejes locales y teniendo en cuenta que la tensión  $\sigma_z$  es nula, se tiene:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{Bmatrix} \sigma_f' \\ \vdots \\ \sigma_c' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}'_f & 0 \\ 0 & \mathbf{D}'_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_m + z'\hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_f) \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_c \end{Bmatrix} = \mathbf{D}'\boldsymbol{\epsilon}' \quad (4.27)$$

en donde las matrices constitutivas  $\mathbf{D}'_f$  y  $\mathbf{D}'_c$  se definen de acuerdo con las ecuaciones (4.15) y (4.16), luego:

$$\boldsymbol{\sigma}_f' = \mathbf{D}'_f(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_m + z'\hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_f) \quad (4.28)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_c' = \mathbf{D}'_c\hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_c \quad (4.29)$$

En donde se observa que la distribución en el espesor de las tensiones normales  $\sigma_{x'}$  y  $\sigma_{y'}$  se obtiene como la suma de un valor constante debido a un estado de tracción o compresión pura, más la variación lineal simétrica debido a la flexión pura.

### 4.3.4 Esfuerzos generalizados

El vector de esfuerzos locales en un punto del plano medio se define por:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}' = \begin{Bmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_m \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_f \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}'_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{x'} \\ N_{y'} \\ N_{x'y'} \\ \vdots \\ M_{x'} \\ M_{y'} \\ M_{x'y'} \\ \vdots \\ Q_{x'} \\ Q_{y'} \end{Bmatrix} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{x'y'} \\ \vdots \\ z'\sigma_{x'} \\ z'\sigma_{y'} \\ z'\sigma_{x'y'} \\ \vdots \\ \sigma_{x'z'} \\ \sigma_{y'z'} \end{Bmatrix} dz' = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}'_f \\ \vdots \\ z'\boldsymbol{\sigma}'_f \\ \vdots \\ \boldsymbol{\sigma}'_c \end{Bmatrix} dz' \quad (4.30)$$

donde  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_m$ ,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_f$ ,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}'_c$  son los vectores de esfuerzos locales de membrana, flexión y cortante, respectivamente, y  $t$  el espesor de la lámina.



### 4.3.5 Expresión del principio de los trabajos virtuales

Consideremos la expresión del operador de fuerzas internas  $\mathbf{F}^{int}$  del Principio de los Trabajos virtuales (ver capítulo 2, ecuación (2.14)):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}^{int} &= \int \int \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}'^T \boldsymbol{\sigma}' dV = \int \int \int_V \delta [\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_m'^T + z' \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_f'^T, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_c'^T] \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\sigma}_f' \\ \boldsymbol{\sigma}_c' \end{array} \right\} dV = \\
 &= \int \int \int_V (\delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_m'^T \boldsymbol{\sigma}_f' + z' \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_f'^T \boldsymbol{\sigma}_f' + \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_c'^T \boldsymbol{\sigma}_c') dV = \\
 &= \int \int_A \left[ \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_m'^T \left( \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \boldsymbol{\sigma}_f' dz' \right) + \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_f'^T \left( \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} z' \boldsymbol{\sigma}_f' dz' \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_c'^T \left( \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \boldsymbol{\sigma}_c' dz' \right) \right] dA = \\
 &= \int \int_A (\delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_m'^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_m' + \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_f'^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_f' + \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_c'^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_c') dA = \int \int_A \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

Es interesante observar que si se opera con esfuerzos y deformaciones generalizadas el vector de fuerzas internas, adquiere un carácter bidimensional. También se pone de manifiesto una de las características principales de la teoría de Reissner-Mindlin, en lo que se refiere a la discretización mediante técnicas de elementos finitos, puesto que en el integrando de (4.31) sólo aparecen derivadas de primer orden, bastará con exigir a los elementos finitos continuidad de clase  $C_0^{[O-1]}$ .

## 4.4. FORMULACIÓN MIXTA DE ELEMENTOS FINITOS DE PLACA DE REISSNER-MINDLIN

El gran atractivo de esta teoría de placas, es que permite una aproximación independiente para los campos de desplazamientos y rotaciones como se demuestra por ecuaciones (4.1), (4.3) y (4.4). Luego a partir de la elección de adecuadas funciones de forma es posible realizar la discretización de los campos de movimientos y de deformaciones generalizadas de ecuaciones (4.2) y (4.7) y construir tanto la matriz de rigidez elemental y los vectores de fuerzas nodales equivalentes<sup>[O-1]</sup>. Conceptualmente la teoría de Reissner-Mindlin debería en principio ser aplicable tanto a placas gruesas como delgadas al considerar en su formulación los efectos del cortante transversal. Pero desgraciadamente, se demuestra que a medida que el espesor de la placa se va reduciendo los términos de cortante van progresivamente dominando la solución, es decir, para espesores de placa pequeños la solución numérica se bloquea.

El bloqueo de la solución fue originalmente evitado mediante la utilización de técnicas de integración *selectiva*<sup>[O-1],[Z-1]</sup>, las cuales básicamente usan una cuadratura reducida para integrar los términos asociados a la matriz de rigidez de cortante. Este simple procedimiento en algunas ocasiones modifica los modos de energía nula del elemento, introduciendo en la matriz de rigidez del elemento valores propios nulos adicionales a los que estrictamente corresponden con los movimientos de sólido rígido. Dichos mecanismos pueden o no propagarse por la malla, dependiendo de que sean o no compatibles entre elementos y con las condiciones de contorno. Otro procedimiento alternativo para evitar el bloqueo de la solución es la aplicación de las denominadas técnicas de *deformaciones de cortante impuestas*<sup>[O-1],[Z-1]</sup>, en donde se imponen las hipótesis de Kirchhoff en un número de puntos discretos de modo que las deformaciones transversales de cortante sean efectivamente nulas sobre el elemento.

A continuación se presentan una serie de elementos de placa triangulares basados en el *método de deformaciones de cortante impuestas*. Los cuales bajo la introducción de nuevas restricciones sobre los campos de rotación darán origen a nuevas formulaciones de elementos finitos válidas para el análisis de placas delgadas.

#### 4.4.1 Elemento triangular TLCL<sup>[O-2],[O-4]</sup>

Este elemento como sus siglas lo indican utiliza una interpolación lineal para el campo de desplazamientos, cuadrática para el campo de giros y lineal para las deformaciones de cortante, es decir:

- Los desplazamientos varían linealmente de acuerdo con:

$$w = \sum_{i=1}^3 N_{w_i} w_i \quad (4.32)$$

- Se utiliza la siguiente interpolación cuadrática incompleta para los giros:

$$\theta = \sum_{i=1}^3 N_{w_i} \theta_i + 4N_{w_2} N_{w_3} \mathbf{e}_{12} \Delta \theta_{s_4} + 4N_{w_1} N_{w_3} \mathbf{e}_{23} \Delta \theta_{s_5} + 4N_{w_1} N_{w_2} \mathbf{e}_{13} \Delta \theta_{s_6} \quad (4.33)$$

en donde  $N_{w_i}$  son las funciones de forma lineales del elemento triangular de tres nodos<sup>[Z-1]</sup>:

$$\begin{aligned} N_{w_1} &= 1 - \alpha - \beta \\ N_{w_2} &= \alpha \\ N_{w_3} &= \beta \end{aligned} \quad (4.34)$$

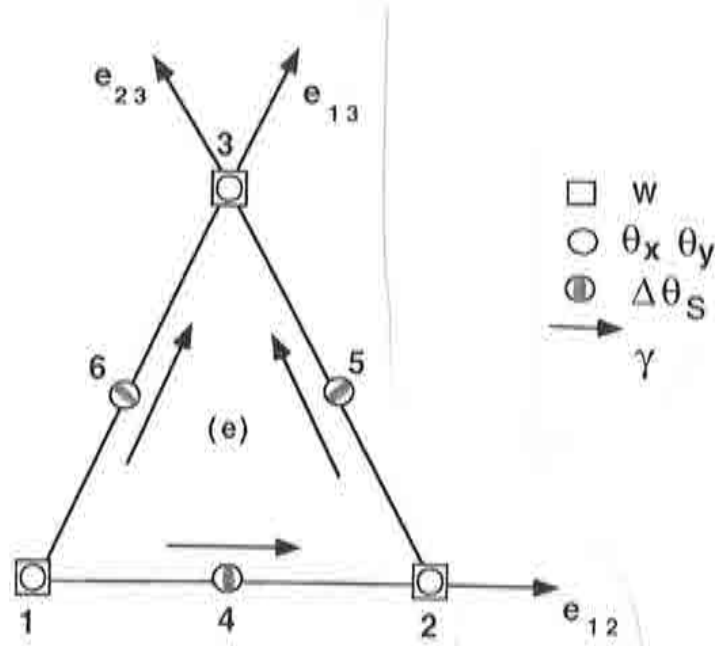


Figura 4.4 Elemento de placa de Reissner-Mindlin triangular TLCL. Descripción geométrica y variables nodales.

y  $\Delta\theta_{s_k}$  es una rotación tangencial jerárquica en los puntos medios de los lados y  $e_{ij}$  es un vector unitario en la dirección del lado  $ij$  (ver la Figura 4.4).

La ecuación (4.33) expresa una variación lineal de la rotación normal sobre cada uno de los lados, mientras que la tangencial tiene una variación cuadrática.

- El campo de deformaciones de cortante impuesto es lineal en cada elemento y las deformaciones de cortante tangenciales se suponen constantes a lo largo de cada lado. El campo de deformaciones de cortante que se asume, con respecto al sistema de coordenadas naturales tiene la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\eta & -\eta\sqrt{2} & \eta \\ \xi & \sqrt{2}\xi & 1-\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_\xi^{12} \\ \gamma_\xi^{23} \\ \gamma_\xi^{13} \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\xi \quad (4.35)$$

donde  $\gamma_\xi^{12}$ ,  $\gamma_\xi^{23}$  y  $\gamma_\xi^{13}$  son las deformaciones de cortante tangencial constantes a lo largo de los lados 1 - 2, 2 - 3 y 1 - 3, respectivamente.

En este tipo de formulaciones, en donde se interpolan de una forma independiente los desplazamientos  $w_i$ , los giros  $\theta_i$  y las deformaciones de cortante transversal  $\gamma_i$ , se debe cumplir que  $^{[O-1],[Z-1]}$ :

$$n_w + n_\theta \geq n_\gamma \quad ; \quad n_\gamma \geq n_w \quad (4.36)$$

a modo de obtener una solución estable y libre de bloqueo. En donde  $n_w, n_\theta$  y  $n_\gamma$  son el número de variables que intervienen en la interpolación de los desplazamientos, los giros y las deformaciones de cortante respectivamente. (después

de descontar las variables correspondientes a los movimientos prescritos). Oñate<sup>[O-1]</sup>, ha demostrado que este elemento satisface las condiciones (4.36) en todos los casos encontrados.

La relación entre las deformaciones tangenciales naturales con los movimientos nodales, se obtiene imponiendo a lo largo de cada lado  $\Gamma_{ij}$  la condición  $\gamma_{\xi}^{ij} - (\frac{\partial w}{\partial \xi} - \theta_{\xi}) = 0$  en forma débil o integral, es decir:

$$\int_{l_{ij}} W \left[ \gamma_{\xi}^{ij} - \frac{\partial w}{\partial \xi} + \theta_{\xi} \right] d\bar{\xi} = 0 \quad (4.37)$$

si se considera,  $W = 1$  (ponderación de Galerkin<sup>[O-1],[Z-1]</sup>) es posible obtener el valor de  $\gamma_{\xi}^{ij}$  sobre cada lado del elemento, como:

$$\gamma_{\xi}^{ij} = \frac{1}{l_{\xi}^{ij}} \int_{l_{\xi}} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} - \theta_{\xi} \right) d\bar{\xi} = \pm \frac{1}{l_{\xi}^{ij}} (w_j - w_i) - \frac{l_{ij}}{2l_{\xi}^{ij}} \mathbf{e}_{ij}^T (\theta_i + \theta_j) - \frac{2}{3} \Delta\theta_{s_k} \frac{l_{ij}}{l_{\xi}^{ij}} \quad (4.38)$$

donde  $l_{\xi}^{12} = l_{\xi}^{13} = 1$  y  $l_{\xi}^{23} = \sqrt{2}$ , con  $k = 4, 5, 6$  para los lados 12, 23, 13 respectivamente, y  $l_{ij}$  es la longitud del lado  $ij$ , la ambigüedad en el signo del primer término del lado derecho de ecuación (4.38) se debe al hecho que la dirección del cortante tangencial debe ser definida por una única dirección sobre un lado común a dos elementos, en caso contrario una definición inconsistente del grado de libertad  $\Delta\theta_{s_k}$  se obtiene. Una forma de evitar esta dificultad es hacer que  $i$  y  $j$  coincidan siempre con los nodos de menor y mayor numeración global del lado, respectivamente (ver Figura 4.4).

De acuerdo con la ecuación (4.38) las deformaciones de cortante transversal sobre los lados del elemento, se expresan en función del vector de movimientos nodales elementales  $\mathbf{a}_f$ , a través de la siguiente relación:

$$\hat{\gamma}_{\xi} = \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi}^{12} \\ \gamma_{\xi}^{23} \\ \gamma_{\xi}^{13} \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{a}_f \quad (4.39)$$

con el vector de movimientos nodales elementales, definido por:

$$\mathbf{a}_f = [w_1, \theta_{x_1}, \theta_{y_1}, w_2, \theta_{x_2}, \theta_{y_2}, w_3, \theta_{x_3}, \theta_{y_3}, \Delta\theta_{s_4}, \Delta\theta_{s_5}, \Delta\theta_{s_6}]^T \quad (4.40)$$

en donde la matriz  $\mathbf{C}$ , depende de los cosenos directores de los vectores tangentes a los lados  $\mathbf{e}_{ij}$  y de la longitud  $l_{ij}$  de los mismos. Una expresión explícita para la matriz  $\mathbf{C}$  es dada en las referencias [O-1] - [O-2].

Combinando las ecuaciones (4.35) con (4.39) y transformando las deformaciones de cortante transversal al sistema cartesiano rectangular, se obtiene:



$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi} \\ \gamma_{\eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{a}_f = \bar{\mathbf{B}}_s \mathbf{a}_f \quad (4.41)$$

con  $\mathbf{J}$  la matriz jacobiana, luego la matriz de deformación de cortante vendrá dada por:

$$\bar{\mathbf{B}}_s = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C} \quad (4.42)$$

en donde  $\bar{\mathbf{B}}_s$  recibe el nombre de matriz de deformación de cortante sustitutiva, en el sentido que es la matriz de deformación que reemplaza a la que se obtendría si no se utilizara una interpolación independiente para el campo de deformaciones de cortante transversal.

#### 4.4.2 Elemento triangular TLLL<sup>[O-2],[O-4]</sup>

En este caso los campos de desplazamientos, rotaciones y deformaciones de cortante transversal son interpolados linealmente, es decir:

- Los desplazamientos se interpolan linealmente de acuerdo con:

$$w = \sum_{i=1}^3 N_{w_i} w_i \quad (4.43)$$

en donde las funciones de forma  $N_{w_i}$ , se definen de acuerdo con las ecuaciones (4.34).

- El campo de giros se interpola linealmente, en términos de los giros en los puntos medios de cada lado, como:

$$\boldsymbol{\theta} = \sum_{i=4}^6 N_{\theta_i} \boldsymbol{\theta}_i \quad ; \quad \boldsymbol{\theta}_i = [\theta_{x_i}, \theta_{y_i}]^T \quad (4.44)$$

con:

$$\begin{aligned} N_{\theta_4} &= 1 - 2\beta \\ N_{\theta_5} &= 2\beta + 2\alpha - 1 \\ N_{\theta_6} &= 1 - 2\alpha \end{aligned} \quad (4.45)$$

definiendo a las funciones de forma lineales en los nodos intermedios, ver la Figura 4.5.

La ecuación (4.44) define un campo de rotaciones incompatible, con continuidad forzada sólo en los puntos medios de cada lado. El campo de deformaciones de cortante impuestas es tomado equivalente al del elemento *TLCL* explicado en sección anterior, la expresión para la matriz  $\mathbf{C}$  se describe en la referencia [O-2], obteniéndose de manera análoga con ecuaciones (4.41) y (4.42) la matriz de deformación de cortante sustitutiva  $\bar{\mathbf{B}}_s$ .

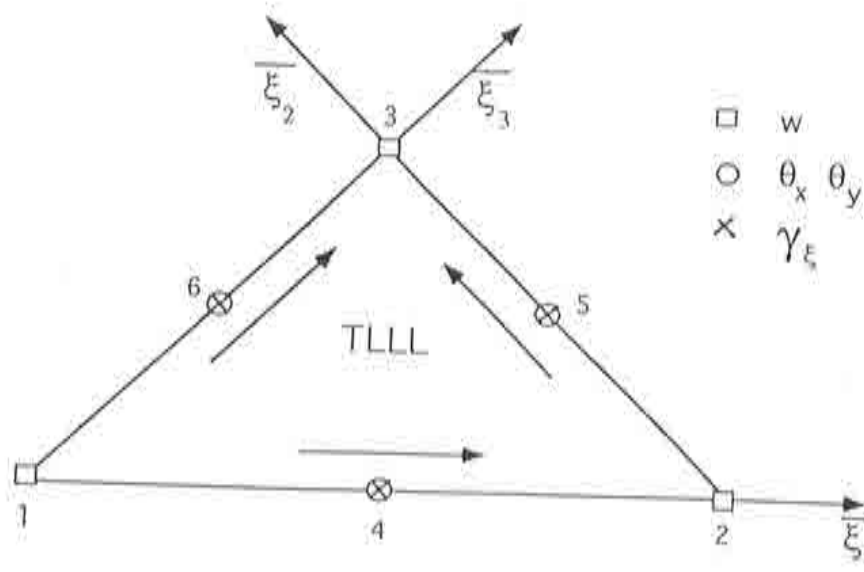


Figura 4.5 Elemento de placa de Reissner-Mindlin triangular TLLL. Descripción geométrica y variables nodales.

#### 4.4.3 Elementos de placa delgada discretos de Kirchhoff

Esta teoría parte de los elementos de placa definidos de acuerdo con la teoría de Reissner-Mindlin, a los que se les impone el cumplimiento de la hipótesis de Kirchhoff de deformación transversal nula ( $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ) en una serie de puntos discretos o líneas. El elemento de placa resultante, se denomina elemento *DK* (Discreto de Kirchhoff) y tiene un comportamiento análogo al de un elemento de placa delgada de Kirchhoff, manteniendo sin embargo continuidad de clase  $C_0$  para los movimientos nodales, lo que garantiza su compatibilidad<sup>[O-2],[B-1],[B-2]</sup>.

A continuación se presenta la derivación de dos nuevos elementos triangulares del tipo *DK*, derivados a partir de las nuevas formulaciones de placa *TLCL* y *TLLL* respectivamente. La gran ventaja de estas dos nuevas formulaciones es que permiten deducir de forma más sencilla, en un caso el elemento *DKT*<sup>[B-1],[B-2],[J-1]</sup> y en el otro el elemento triangular de Morley<sup>[M-2]</sup>.

#### 4.4.3.1 Elemento DKT

Este elemento se deriva a partir de la formulación propuesta en la sección (4.4.1), imponiendo que el campo de deformaciones de cortante transversal sea nulo en los puntos medios de cada lado. Esta hipótesis permitirá escribir las rotaciones tangenciales jerárquicas  $\Delta\theta_{sk}$  en función de los grados de libertad  $w_i$  y  $\theta_i$ . A partir de la ecuación (4.38), si  $\gamma_{\xi}^{ij} = 0$  se tiene:

$$\Delta\theta_{sk} = \frac{3}{2l_{ij}}(w_j - w_i) - \frac{3}{4}\mathbf{e}_{ij}^T(\boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\theta}_j) \quad (4.46)$$

reemplazando el giro tangencial jerárquico  $\Delta\theta_{sk}$  en la función de interpolación de los giros de (4.33), se obtiene:

$$\boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^3 N_{w_i} \boldsymbol{\theta}_i + \sum_{i=1}^3 \frac{6}{l_{ij}} N_{w_i} N_{w_j} (w_j - w_i) \cdot \mathbf{e}_{ij} - \sum_{i=1}^3 3N_{w_i} N_{w_j} \mathbf{e}_{ij} \cdot (\boldsymbol{\theta}_i + \boldsymbol{\theta}_j) \cdot \mathbf{e}_{ij} \quad (4.47)$$

reordenando términos:

$$\theta_x = \mathbf{H}_x^T(\xi, \eta) \mathbf{a}_f \quad \theta_y = \mathbf{H}_y^T(\xi, \eta) \mathbf{a}_f \quad (4.48)$$

en donde las matrices de las nuevas funciones de forma nodales  $\mathbf{H}_x$  y  $\mathbf{H}_y$  son:

$$\mathbf{H}_x = \begin{bmatrix} -\left[\frac{6N_{w_1}N_{w_2}}{l_{12}}\mathbf{e}_{12x} + \frac{6N_{w_1}N_{w_3}}{l_{13}}\mathbf{e}_{13x}\right] \\ N_{w_1} - 3N_{w_1}N_{w_2}\cos^2\omega_{12} - 3N_{w_1}N_{w_3}\cos^2\omega_{13} \\ -3N_{w_1}N_{w_2}\sin\omega_{12}\cos\omega_{12} - 3N_{w_1}N_{w_3}\sin\omega_{13}\cos\omega_{13} \\ \left[\frac{6N_{w_1}N_{w_2}}{l_{12}}\mathbf{e}_{13x} - \frac{6N_{w_2}N_{w_3}}{l_{23}}\mathbf{e}_{23x}\right] \\ N_{w_2} - 3N_{w_2}N_{w_3}\cos^2\omega_{23} - 3N_{w_1}N_{w_2}\cos^2\omega_{12} \\ -3N_{w_1}N_{w_2}\sin\omega_{12}\cos\omega_{12} - 3N_{w_2}N_{w_3}\sin\omega_{23}\cos\omega_{23} \\ \left[\frac{6N_{w_2}N_{w_3}}{l_{23}}\mathbf{e}_{23x} + \frac{6N_{w_1}N_{w_3}}{l_{13}}\mathbf{e}_{13x}\right] \\ N_{w_3} - 3N_{w_2}N_{w_3}\cos^2\omega_{23} - 3N_{w_1}N_{w_3}\cos^2\omega_{13} \\ -3N_{w_2}N_{w_3}\sin\omega_{13}\cos\omega_{23} - 3N_{w_1}N_{w_3}\sin\omega_{23}\cos\omega_{13} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$\mathbf{H}_y = \begin{bmatrix} -\left[\frac{6N_{w_1}N_{w_2}}{l_{12}}\mathbf{e}_{12y} + \frac{6N_{w_1}N_{w_3}}{l_{13}}\mathbf{e}_{13y}\right] \\ -3N_{w_1}N_{w_2}\text{sen } \omega_3 \cos \omega_{12} - 3N_{w_1}N_{w_3}\text{sen } \omega_2 \cos \omega_{13} \\ N_{w_1} - 3N_{w_1}N_{w_2}\text{sen}^2 \omega_{12} - 3N_{w_1}N_{w_3}\text{sen}^2 \omega_{13} \\ \left[\frac{6N_{w_1}N_{w_2}}{l_{12}}\mathbf{e}_{12y} - \frac{6N_{w_2}N_{w_3}}{l_{23}}\mathbf{e}_{23y}\right] \\ -3N_{w_1}N_{w_2}\text{sen } \omega_{12} \cos \omega_{12} - 3N_{w_2}N_{w_3}\text{sen } \omega_{23} \cos \omega_{23} \\ N_{w_2} - 3N_{w_2}N_{w_3}\text{sen}^2 \omega_{23} - 3N_{w_1}N_{w_2}\text{sen}^2 \omega_{12} \\ \left[\frac{6N_{w_2}N_{w_3}}{l_{23}}\mathbf{e}_{23y} + \frac{6N_{w_1}N_{w_3}}{l_{13}}\mathbf{e}_{13y}\right] \\ -3N_{w_2}N_{w_3}\text{sen } \omega_{23} \cos \omega_{23} - 3N_{w_1}N_{w_3}\text{sen } \omega_{13} \cos \omega_{13} \\ N_{w_3} - 3N_{w_2}N_{w_3}\text{sen}^2 \omega_{23} - 3N_{w_1}N_{w_3}\text{sen}^2 \omega_{13} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

el vector tangente al lado  $\mathbf{e}_{ij} = [\cos \omega_{ij}, \text{sen } \omega_{ij}]^T$ , se define de acuerdo con la Figura 4.6, y el vector de movimientos nodales  $\mathbf{a}_f$  (ver ecuación (4.40)) se ha reducido a 9 variables nodales por elemento.

$$\mathbf{a}_f = [w_1, \theta_{x_1}, \theta_{y_1}, w_2, \theta_{x_2}, \theta_{y_2}, w_3, \theta_{x_3}, \theta_{y_3}]^T \quad (4.51)$$

desarrollando los términos de las expresiones de las matrices definidas por relaciones (4.49) y (4.50), se demuestra (ver Apéndice 4A) que resultan idénticas a las propuestas por Batoz et al.<sup>[B-1],[B-2]</sup>, en donde estas son obtenidas a partir de laboriosos desarrollos, no siendo así en la presente deducción.

La discretización del campo de deformaciones generalizadas de flexión de (4.20) se expresa haciendo uso de las nuevas funciones de forma  $\mathbf{H}_x$  y  $\mathbf{H}_y$ , obteniéndose:

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_f = \mathbf{B}_f \mathbf{a}_f \quad (4.52)$$

con la matriz de deformación por flexión  $\mathbf{B}_f$ , definida por:

$$\mathbf{B}_f(\xi, \eta) = \frac{1}{2A(e)} \begin{bmatrix} y_{13} \frac{\partial H^T_x}{\partial \xi} + y_{21} \frac{\partial H^T_x}{\partial \eta} \\ x_{31} \frac{\partial H^T_y}{\partial \xi} + x_{12} \frac{\partial H^T_y}{\partial \eta} \\ x_{31} \frac{\partial H^T_x}{\partial \xi} + x_{12} \frac{\partial H^T_x}{\partial \eta} + y_{13} \frac{\partial H^T_y}{\partial \xi} + y_{21} \frac{\partial H^T_y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$



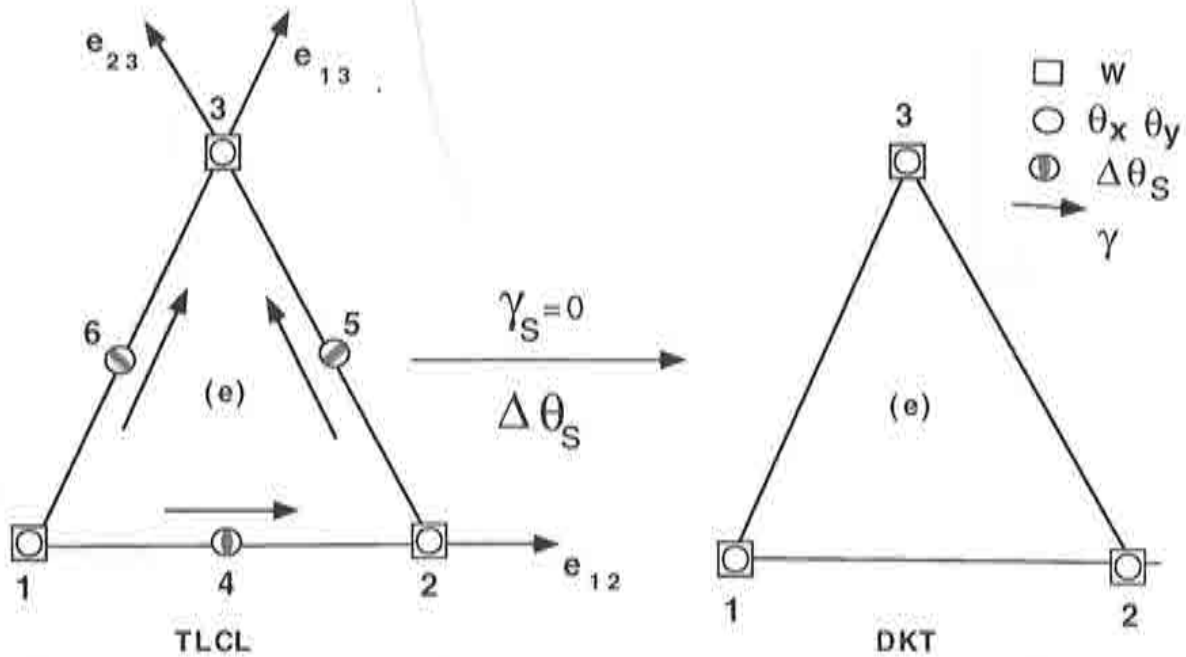


Figura 4.6 Geometría del elemento DKT.

con  $2A^{(e)} = (x_{13}y_{12} - x_{12}y_{31})$ , y  $\frac{\partial H^T}{\partial \xi} x$ ,  $\frac{\partial H^T}{\partial \eta} x$ ,  $\frac{\partial H^T}{\partial \xi} y$ ,  $\frac{\partial H^T}{\partial \eta} y$  corresponden a las derivadas de las nuevas funciones de forma con respecto a las coordenadas naturales  $\xi$  y  $\eta$  (ver el Apéndice 4A).

El vector de fuerzas internas para este elemento se evalúa de acuerdo con ecuación (4.31), obteniéndose:

$$\mathbf{F}^{int} = \int \int \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}_f^T \boldsymbol{\sigma}_f dV \quad (4.54)$$

La integración exacta del vector de fuerzas internas se obtiene usando tres puntos de integración numérica a causa de que la integral incluye términos cuadráticos. Un análisis detallado del procedimiento de integración numérica se presenta en el Apéndice 4B.

#### 4.4.3.2 Elemento DKTLL<sup>[O-4]</sup>

Un triángulo discreto de Kirchhoff (DK) se puede obtener a partir del elemento de placa *TLLL* presentado en la sección (4.4.2), simplemente restringiendo las deformaciones de cortante tangencial a lo largo de los lados  $\Gamma_{ij}$  a cero. Esto permite eliminar los tres giros tangenciales dando origen a un nuevo elemento con sólo 6 variables elementales (3 desplazamientos  $w_i$  y tres

giros normales a lo largo de los lados, ver Figura 4.7).

$$\mathbf{a}_f = [w_1, w_2, w_3, \theta_{n_4}, \theta_{n_5}, \theta_{n_6}]^T \quad (4.55)$$

La hipótesis de restringir los cortantes tangenciales sobre los lados, permite obtener una expresión explícita entre la rotación tangencial a lo largo del lado  $ij$  con los desplazamientos nodales correspondientes al lado. De acuerdo con la relación (4.37) si  $\gamma_{\bar{\xi}}^{ij} = 0$ , se tiene:

$$\int_{l_{ij}} (\theta_{\bar{\xi}} - \frac{\partial w}{\partial \bar{\xi}}) d\bar{\xi} = 0 \quad \rightarrow \quad \theta_{s_{ij}} = \frac{w_j - w_i}{l_{ij}} \quad (4.56)$$

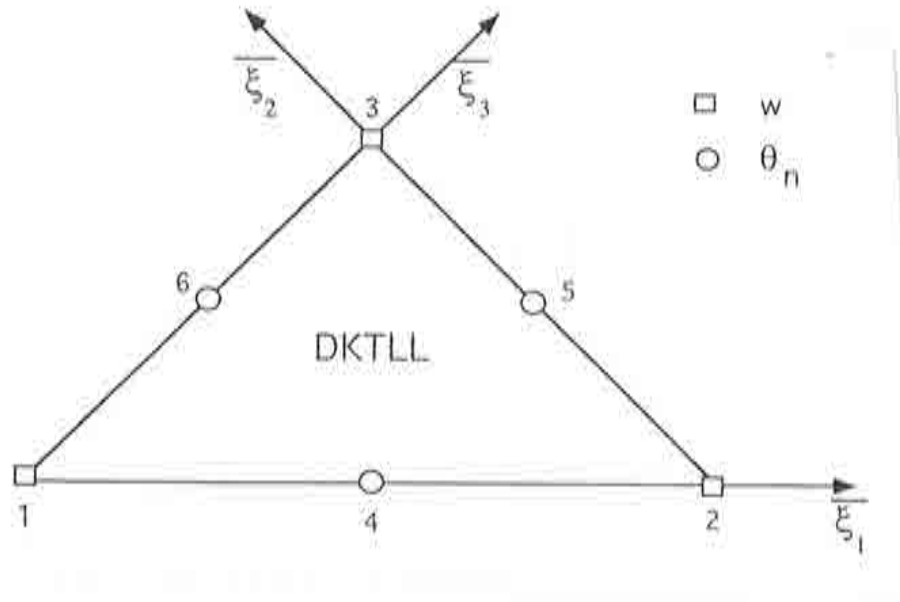


Figura 4.7 Geometría del elemento DKTLL.

la matriz de deformación por flexión, que permite relacionar el vector de curvaturas con el vector de variables elementales para este nuevo elemento, se define por:

$$\mathbf{B}_f = \frac{1}{2A(c)} \begin{bmatrix} (a_{12} - a_{13}) & (a_{23} - a_{12}) & (a_{13} - a_{23}) & c_{12} & c_{23} & -c_{13} \\ (a_{13} - a_{12}) & (a_{12} - a_{23}) & (a_{23} - a_{13}) & b_{12} & b_{23} & -b_{13} \\ (d_{13} - d_{12}) & (d_{12} - a_{23}) & (d_{23} - d_{13}) & -2a_{12} & 2a_{23} & -2a_{13} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

con:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}y_{ij}}{l_{ij}^2}, \quad b_{ij} = \frac{x_{ij}^2}{l_{ij}}, \quad c_{ij} = \frac{y_{ij}^2}{l_{ij}}, \quad d_{ij} = \frac{x_{ij}^2 - y_{ij}^2}{l_{ij}^2}$$

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j, \quad l_{ij} = (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.58)$$

Puede verificarse que este elemento es idéntico al elemento triangular de placa delgada propuesto por Morley<sup>[M-2]</sup> y también con el elemento *HSM6* propuesto por Batoz y Dhatt<sup>[B-4]</sup>, siendo necesario solamente un punto de integración para la evaluación exacta del vector de fuerzas internas.

#### 4.4.4 Nuevo elemento de placa BPT

A partir de la formulación del elemento de placa delgada *DKTLL* y mediante la introducción de nuevas restricciones sobre los campos de giros, es posible llegar al elemento más sencillo de la familia de elementos triangulares planos, es decir, un triángulo con desplazamientos nodales como únicas variables nodales.

Partiendo de la hipótesis que el giro normal sobre un borde  $\Gamma_{ij}$  y los desplazamientos nodales *no son independientes entre sí*, estando relacionados a través de la primera derivada en la dirección de la normal:

$$\theta_{n_{ij}}^{(e)} = \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{ij}^{(e)} \quad (4.59)$$

relación que puede ser reescrita en función de los giros locales y los cosenos directores del lado, como:

$$\theta_{n_{ij}}^{(e)} = -S_{ij}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{ij}^{(e)} + C_{ij}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{ij}^{(e)} \quad (4.60)$$

donde  $S_{ij}^{(e)} = \text{sen } \omega_{ij}$  y  $C_{ij}^{(e)} = \text{cos } \omega_{ij}$  son los cosenos directores correspondientes al lado  $ij$  y  $\omega_{ij} = (\mathbf{x}, \mathbf{s}_{ij})$  es el ángulo que forma el eje local  $\mathbf{x}$  con la dirección tangente  $\mathbf{s}$  al borde  $\Gamma_{ij}$  (ver Figura 4.8). Y dado que los giros con respecto a los ejes cartesianos locales  $x$  e  $y$  pueden ser expresados en función de las variables traslacionales nodales, se tiene:

$$\theta_{n_{ij}}^{(e)} = -S_{ij}^{(e)} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_{w_i}^{(e)}}{\partial x_i} w_i^{(e)} + C_{ij}^{(e)} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_{w_i}^{(e)}}{\partial y_i} w_i^{(e)} \quad (4.61)$$

expresión que matricialmente, se escribe como:

$$\theta_{n_{ij}}^{(e)} = \mathbf{n}_{ij}^{(e)T} \nabla \mathbf{N}_w^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} \quad (4.62)$$

donde  $\mathbf{w}^{(e)} = [w_i^{(e)}, w_j^{(e)}, w_k^{(e)}]^T$  es el vector de desplazamientos nodales correspondientes al elemento  $(e)$ . Puesto que un mismo borde  $ij$  puede ser común a dos elementos (ver Figura 4.9), el valor del giro normal al borde  $ij$

(global) también puede ser expresado en función de las variables traslacionales asociadas al elemento adyacente, es decir:

$$\theta_{n_{ij}}^{(a)} = -S_{ij}^{(a)} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_{w_i}^{(a)}}{\partial x_i} w_i^{(a)} + C_{ij}^{(a)} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_{w_i}^{(a)}}{\partial y_i} w_i^{(a)} \quad (4.63)$$

$$\theta_{n_{ij}}^{(a)} = \mathbf{n}_{ij}^{(a)T} \nabla \mathbf{N}_w^{(a)} \mathbf{w}^{(a)} \quad (4.64)$$

Puesto que sobre el borde común  $\Gamma_{ij}$  el giro normal es discontinuo (o sea,  $\theta_{n_{ij}}^{(e)} \neq \theta_{n_{ij}}^{(a)}$ ) violando los requisitos de integrabilidad<sup>[Z-1]</sup> para el vector de curvaturas en la expresión del vector de fuerzas internas de (4.31), es necesario adoptar un criterio de suavizado de las rotaciones normales sobre el lado a fin de asegurar su continuidad. La forma más sencilla es restringir el giro normal en el nodo medio a que tome el siguiente valor<sup>[O-2],[Z-3]</sup>:

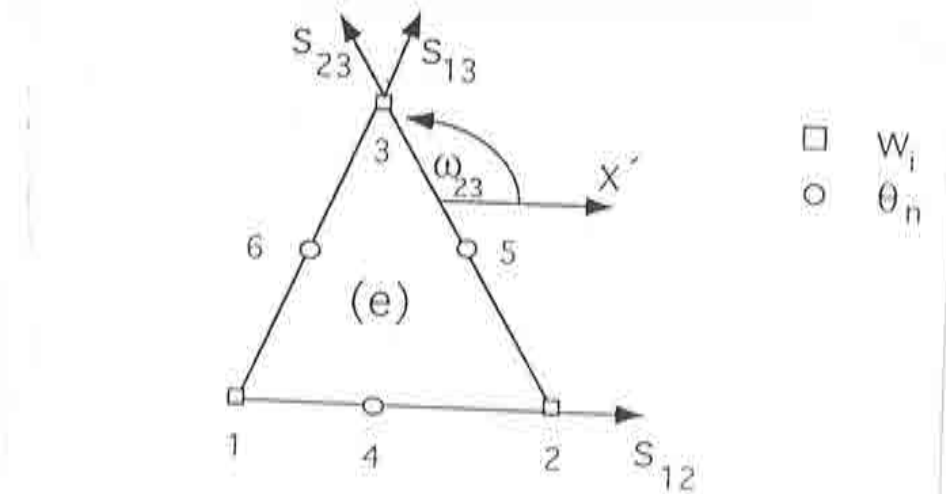


Figura 4.8 Definición de los vectores tangentes a los lados  $s_{ij}$ .

$$\theta_{n_{ij}} = \alpha_{ij} \mathbf{n}_{ij}^{(e)T} \nabla \mathbf{N}_w^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} + \beta_{ij} \mathbf{n}_{ij}^{(a)T} \nabla \mathbf{N}_w^{(a)} \mathbf{w}^{(a)} \quad (4.65)$$

La forma más simple de (4.65), es definir el giro normal como el promedio de las contribuciones de los giros normales sobre el borde común, o sea,  $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = \frac{1}{2}$ . Obviamente otras alternativas de suavizado de los giros normales son posibles, y algunas de ellas se discuten en las referencias [0-5] y [Z-3].

Siguiendo un procedimiento análogo al definido por la ecuación (4.65) para los bordes  $jk$  e  $ik$ , se construye el vector de giros normales  $\theta_n^{(e)}$  correspondiente



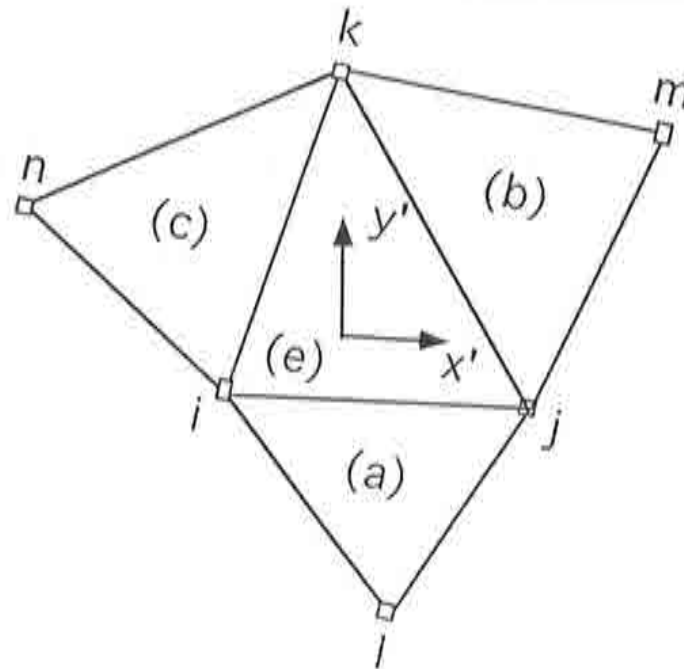


Figura 4.9 Triángulo Básico de Placa (BPT), y parcela de elementos usada para el suavizado de los giros normales a lo largo de los lados.

al elemento central de la parcela (e):

$$\theta_n^{(e)} = \begin{Bmatrix} \theta_{n_{ij}} \\ \theta_{n_{jk}} \\ \theta_{n_{ik}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{ij}^{(e)T} \nabla \mathbf{N}_w^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} + \mathbf{n}_{ij}^{(a)T} \nabla \mathbf{N}_w^{(a)} \mathbf{w}^{(a)} \\ \mathbf{n}_{jk}^{(e)T} \nabla \mathbf{N}_w^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} + \mathbf{n}_{jk}^{(b)T} \nabla \mathbf{N}_w^{(b)} \mathbf{w}^{(b)} \\ \mathbf{n}_{ik}^{(e)T} \nabla \mathbf{N}_w^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} + \mathbf{n}_{ik}^{(c)T} \nabla \mathbf{N}_w^{(c)} \mathbf{w}^{(c)} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

que matricialmente, se expresa por:

$$\begin{aligned} \theta_n^{(e)} &= \mathbf{N}_{\theta_n} \mathbf{a}_f = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{ij}^{(e)T} \nabla \mathbf{N}_w^{(e)} & \mathbf{n}_{ij}^{(a)T} \nabla \mathbf{N}_w^{(a)} & 0 & 0 \\ \mathbf{n}_{jk}^{(e)T} \nabla \mathbf{N}_w^{(e)} & 0 & \mathbf{n}_{jk}^{(b)T} \nabla \mathbf{N}_w^{(b)} & 0 \\ \mathbf{n}_{ik}^{(e)T} \nabla \mathbf{N}_w^{(e)} & 0 & 0 & \mathbf{n}_{ik}^{(c)T} \nabla \mathbf{N}_w^{(c)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}^{(e)} \\ \mathbf{w}^{(a)} \\ \mathbf{w}^{(b)} \\ \mathbf{w}^{(c)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.67)$$

donde  $\mathbf{a}_f$ , contiene solamente las variables traslacionales del elemento central (e) y las asociadas a sus elementos adyacentes (a), (b) y (c) (ver Figura 4.9), es decir:

$$\mathbf{a}_f = [\mathbf{w}^{(e)}, \mathbf{w}^{(a)}, \mathbf{w}^{(b)}, \mathbf{w}^{(c)}]^T \quad (4.68)$$

La expresión correspondiente a la matriz  $\mathbf{N}_{\theta_n}$ , puede ser simplificada si se impone que el eje coordenado local  $\mathbf{x}$  del elemento adyacente, esté en la dirección del borde común y posea el sentido contrario al del vector tangente  $\mathbf{s}_{ij}^{(e)}$  (ver Figura 4.10), en este caso el vector normal al borde en los elementos adyacentes sólo tendrá componente según su eje  $\mathbf{y}$  local, luego la expresión de  $\mathbf{N}_{\theta_n}$  se reduce a la siguiente forma:

$$\mathbf{N}_{\theta_n} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{ij}^{(e)T} \nabla \mathbf{N}_w^{(e)} & -\partial_y \mathbf{N}_w^{(a)} & 0 & 0 \\ \mathbf{n}_{jk}^{(e)T} \nabla \mathbf{N}_w^{(e)} & 0 & -\partial_y \mathbf{N}_w^{(b)} & 0 \\ \mathbf{n}_{ik}^{(e)T} \nabla \mathbf{N}_w^{(e)} & 0 & 0 & -\partial_y \mathbf{N}_w^{(c)} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

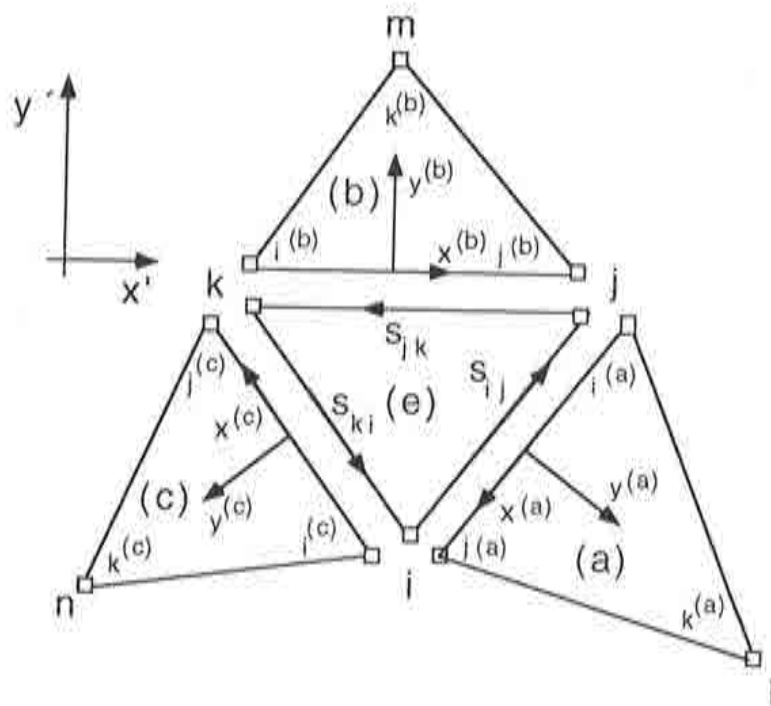


Figura 4.10 Parcela de elementos, descripción de las normales al borde.

matriz que es conveniente reescribirla, como el producto de la matriz  $\hat{\mathbf{T}}$  conteniendo las componentes cartesianas del vector normal al borde y  $\tilde{\mathbf{N}}$  dependiente de las derivadas cartesianas de las funciones de forma, ver el Apéndice 4C.

$$\boldsymbol{\theta}_n^{(e)} = \mathbf{N}_{\theta_n} \mathbf{a}_f = \hat{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{a}_f \quad (4.70)$$

Veamos ahora el tratamiento a seguir con los giros tangenciales a los bordes, de acuerdo con la ecuación (4.56) deducida a partir de imponer las hipótesis de

Kirchhoff a lo largo de los lados  $\Gamma_{ij}$ , es posible construir el siguiente vector de giros tangenciales elementales:

$$\boldsymbol{\theta}_s^{(e)} = \begin{Bmatrix} \theta_{s_{ij}} \\ \theta_{s_{jk}} \\ \theta_{s_{ik}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l_{ij}} & \frac{1}{l_{ij}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l_{jk}} & \frac{1}{l_{jk}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{l_{ki}} & 0 & -\frac{1}{l_{ki}} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{(e)} \\ \mathbf{w}^{(a)} \\ \mathbf{w}^{(b)} \\ \mathbf{w}^{(c)} \end{bmatrix} = \mathbf{N}_{\theta_s} \mathbf{a}_f \quad (4.71)$$

luego de acuerdo con las ecuaciones (4.70) y (4.71) se construye el vector de giros elementales:

$$\boldsymbol{\theta}_{sn}^{(e)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_s^{(e)} \\ \boldsymbol{\theta}_n^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\theta_s} \\ \mathbf{N}_{\theta_n} \end{bmatrix} \mathbf{a}_f \quad (4.72)$$

vector que puede ser expresado con respecto al sistema de coordenadas cartesianas locales del elemento central (e), mediante la siguiente matriz de transformación:

$$\begin{Bmatrix} \theta_{x_4} \\ \theta_{x_5} \\ \theta_{x_6} \\ \theta_{y_4} \\ \theta_{y_5} \\ \theta_{y_6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{12} & 0 & 0 & -S_{12} & 0 & 0 \\ 0 & C_{23} & 0 & 0 & -S_{23} & 0 \\ 0 & 0 & C_{13} & 0 & 0 & -S_{13} \\ S_{12} & 0 & 0 & C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & S_{23} & 0 & 0 & C_{23} & 0 \\ 0 & 0 & S_{13} & 0 & 0 & C_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{s_{12}} \\ \theta_{s_{23}} \\ \theta_{s_{13}} \\ \theta_{n_{12}} \\ \theta_{n_{23}} \\ \theta_{n_{13}} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{T}} \boldsymbol{\theta}_{sn}^{(e)} \quad (4.73)$$

reemplazando el valor de las componentes cartesianas  $\theta_{x_i}, \theta_{y_i}$  de los giros en los puntos medios de cada lado, en la expresión para la interpolación lineal de los giros de (4.44) y reordenando términos se obtiene:

$$\boldsymbol{\theta}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{\theta_4} & N_{\theta_5} & N_{\theta_6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{\theta_4} & N_{\theta_5} & N_{\theta_6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x_4} \\ \theta_{x_5} \\ \theta_{x_6} \\ \theta_{y_4} \\ \theta_{y_5} \\ \theta_{y_6} \end{Bmatrix} \quad (4.74)$$

$$\boldsymbol{\theta}^{(e)} = \mathbf{N}_{\theta} \tilde{\mathbf{T}} \boldsymbol{\theta}_{sn}^{(e)} \quad (4.75)$$

de acuerdo con la ecuación (4.20) el vector de deformaciones generalizadas de flexión o de curvaturas, se expresa por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = \mathbf{L} \boldsymbol{\theta}^{(e)} \quad (4.76)$$

combinando (4.72), (4.75) y (4.76) se obtiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = \mathbf{L} \mathbf{N}_{\theta} \tilde{\mathbf{T}} \boldsymbol{\theta}_{sn} = \mathbf{L} \mathbf{N}_{\theta} \tilde{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\theta_s} \\ \mathbf{N}_{\theta_n} \end{bmatrix} \mathbf{a}_f = \mathbf{B}_f \mathbf{a}_f \quad (4.77)$$

con:

$$\mathbf{B}_f = \mathbf{L} \mathbf{N}_\theta \bar{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\theta_s} \\ \mathbf{N}_{\theta_n} \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

Una expresión explícita para la matriz de deformación por flexión, es dada en el Apéndice 4C. Cabe señalar que al ser el elemento de lados rectos, la cuadratura de integración necesaria para la evaluación exacta del vector de fuerzas internas de (4.31) requerirá de solamente un punto.

El elemento de placa delgada resultante se denomina<sup>[O-2],[Z-3]</sup> **Triángulo Básico de Placa (BPT)**.

#### 4.4.4.1 Aplicación de las condiciones de contorno

La aplicación computacional del nuevo elemento de placa delgada *BPT*, requiere de la consideración de varios tipos de condiciones de apoyo usuales en el análisis de flexión de placas, como son, bordes simplemente apoyados, bordes libres, bordes empotrados y la condición de simetría a lo largo de un eje (ver Figura 4.11).

De acuerdo con las ecuaciones (4.56) y (4.65) el giro tangencial y el giro normal a lo largo del borde  $\Gamma_{ij}$ , se expresan respectivamente por:

$$\theta_{s_{ij}} = \frac{w_j - w_i}{l_{ij}} \quad (4.79)$$

$$\theta_{n_{ij}} = \alpha_{ij} \mathbf{n}_{ij}^{(e)T} \nabla \mathbf{N}_w^{(e)} \mathbf{w}^{(e)} + \beta_{ij} \mathbf{n}_{ij}^{(a)T} \nabla \mathbf{N}_w^{(a)} \mathbf{w}^{(a)} \quad (4.80)$$

- **Borde empotrado:** Si el lado es empotrado las condiciones que deben satisfacerse son:

$$w|_{\Gamma_{ij}} = 0 \quad (4.81)$$

$$\bar{a} : \theta_{s_{ij}} = \frac{\partial w}{\partial s}|_{\Gamma_{ij}} = 0, \quad \bar{b} : \theta_{n_{ij}} = \frac{\partial w}{\partial n}|_{\Gamma_{ij}} = 0 \quad (4.82)$$

Las ecuaciones (4.79) y (4.82a) imponen que los desplazamientos transversales correspondientes al lado  $ij$  sean iguales y nulos, y de (4.82b)  $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = 0$ .

- **Simetría de Borde:** Si el borde  $\Gamma_{ij}$  presenta simetría con respecto a una dirección tangencial  $\mathbf{s}_{ij}^{(e)}$  debe satisfacerse a lo largo del borde la ecuación (4.82b), y por lo tanto los coeficientes  $\alpha_{ij}$  y  $\beta_{ij}$  han de ser nulos.
- **Borde libre o borde simplemente apoyado:** En este caso el giro normal al borde  $\Gamma_{ij}$  sólo dependerá del giro del elemento central (e), es decir  $\alpha_{ij} = 1$



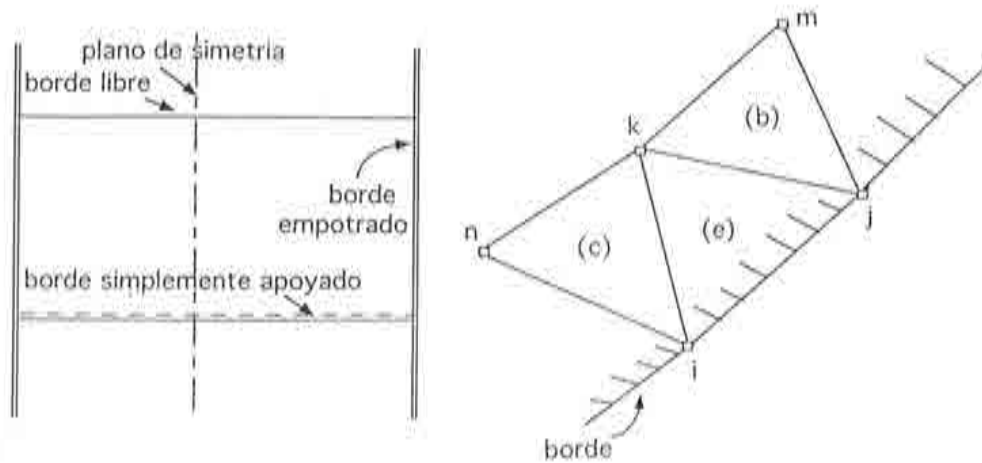


Figura 4.11 Condiciones de borde, normalmente encontradas en el análisis de placas.

y  $\beta_{ij} = 0$ , adicionalmente en bordes simplemente apoyados debe cumplirse la ecuación (4.81).

#### 4.5. EXTENSIÓN AL ANÁLISIS DE LÁMINAS

En este apartado se presenta la extensión de los elementos de placa delgada *DKT* y *BPT* desarrollados en la sección previa para el análisis estructural de láminas en 3D.

En ambas formulaciones, se utilizará el elemento triangular de tres nodos con campo de deformación constante, denominado  $CST^{[Z-1]}$  para modelar el comportamiento membranar. Generándose así dos nuevos elementos de lámina uno con 5 grados de libertad por nodo (tres desplazamientos  $\omega_i$ , y dos rotaciones  $\theta_i$ ) denominado *CST-DKT15*, y otro con 3 grados de libertad por nodo (tres desplazamientos transversales  $\omega_i$ ) denominado *BST* (Triángulo Básico de Lámina).

En el caso del elemento *CST-DKT15* para evitar los problemas asociados a la singularidad en la matriz de rigidez, en presencia de nodos coplanares se seguirá el procedimiento propuesto por Horrigmoe y Bergan<sup>[H-1]</sup> el cual permite trabajar siempre con cinco grados de libertad por nodo. Cabe recordar que si bien es cierto la construcción de la matriz de rigidez no es necesaria para la solución temporal de la ecuación de movimiento al ser el esquema de solución del tipo explícito, sí lo es para la determinación de la frecuencia máxima del sistema discreto.

### 4.5.1 Formulación de Membrana. Elemento CST

El elemento CST es un elemento triangular de tres nodos con campo de deformaciones constante con dos grados de libertad por nodo, que corresponden a los desplazamientos contenidos en su plano medio  $\mathbf{x}' - \mathbf{y}'$ . La discretización del campo de desplazamientos por el método de los elementos finitos, conduce a la expresión:

$$\mathbf{u}'_o = \begin{Bmatrix} u'_o \\ v'_o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{w_i} & N_{w_j} & N_{w_k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{w_i} & N_{w_j} & N_{w_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_{o_i} \\ u'_{o_j} \\ u'_{o_k} \\ v'_{o_i} \\ v'_{o_j} \\ v'_{o_k} \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

donde  $N_{w_i}$ ,  $N_{w_j}$  y  $N_{w_k}$  son las funciones de forma estandar del elemento triangular de tres nodos, definidas por las ecuaciones (4.34). El vector de desplazamientos nodales de la superficie media, se expresará por:

$$\mathbf{a}'_m = [u'_{o_i}, u'_{o_j}, u'_{o_k}, v'_{o_i}, v'_{o_j}, v'_{o_k}]^T \quad (4.84)$$

#### 4.5.1.1. Discretización del campo de deformaciones

Sea  $\mathbf{u}'_o = [u'_o, v'_o]^T$  el campo de desplazamientos, referido a un sistema de coordenadas local. Las deformaciones de membrana en este sistema de referencia local se definen por tres componentes contenidas en su plano medio:

$$\boldsymbol{\epsilon}'_m = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \epsilon_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial x'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_o \\ v'_o \end{Bmatrix} \quad (4.85)$$

sustituyendo (4.83) en (4.85), se obtiene:

$$\boldsymbol{\epsilon}'_m = \begin{bmatrix} \partial_{x'} \mathbf{N}_w & 0 \\ 0 & \partial_{y'} \mathbf{N}_w \\ \partial_{y'} \mathbf{N}_w & \partial_{x'} \mathbf{N}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_{o_i} \\ u'_{o_j} \\ u'_{o_k} \\ v'_{o_i} \\ v'_{o_j} \\ v'_{o_k} \end{bmatrix} = \mathbf{B}'_m \mathbf{a}'_m \quad (4.86)$$

en donde una expresión explícita de la matriz de deformación  $\mathbf{B}'_m$  de (4.86); es dada en el Apéndice 4C.

### 4.5.2 Elemento de Lámina DKT15

El elemento triangular de tres nodos resultante de la combinación del elemento *DKT* de flexión de placas delgadas y del *CST* de tensión plana, es un elemento que con respecto a un sistema de referencia local con ejes  $x', y'$  contenidos en el plano del elemento, tiene 5 grados de libertad por nodo.

Como ya se comentó en la introducción de este apartado, el tratamiento de los giros locales se realizará siguiendo a Horrigmoe y Bergan<sup>[H-1]</sup>, para ello es necesario introducir en cada nodo un sistema de coordenadas nodales, cuya orientación con respecto al sistema coordenado global se define por los ángulos de Euler, ver Figura 4.12:

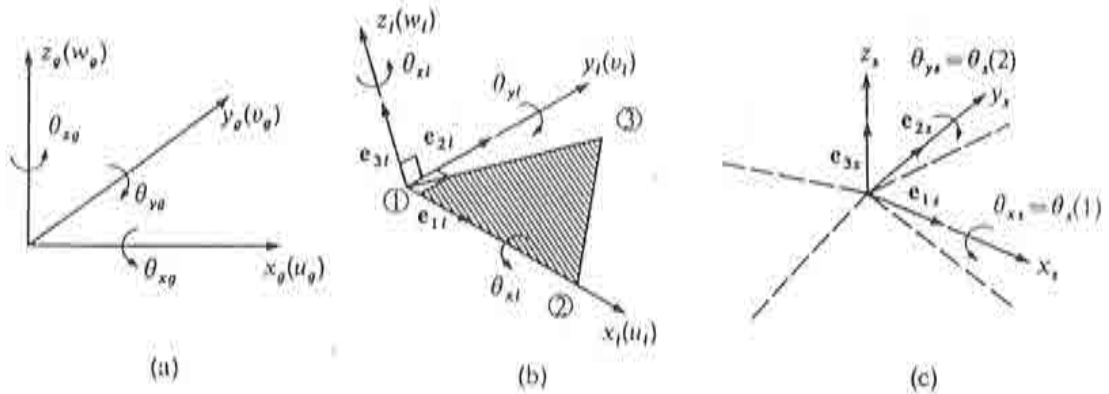


Figura 4.12 Sistemas coordenados para elementos triangulares planos: (a) Sistema Global; (b) Sistema Local; (c) Sistema Local-Nodal.

En la figura anterior  $e_{3s}$  se encuentra en la dirección del promedio de las normales elementales que concurren al nodo. Las variables nodales finales para un nodo  $i$ , serán:

$$\mathbf{a}_i = [u_i, v_i, w_i, \theta_{s_i}(1), \theta_{s_i}(2)] \tag{4.87}$$

en donde  $u_i, v_i, w_i$  son los desplazamientos con respecto al sistema coordenado global y  $\theta_{s_i}(1), \theta_{s_i}(2)$  son los giros con respecto al sistema local-nodal para el nodo  $i$ . A modo de transformar la matriz de rigidez local y el vector de fuerzas internas locales al sistema coordenado global, la matriz de transformación de

variables nodales toma la siguiente forma:

$$\mathbf{a}'_i = \begin{Bmatrix} u'_{o_i} \\ v'_{o_i} \\ w'_{o_i} \\ \theta_{x'_i} \\ \theta_{y'_i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{lg} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{ls} \end{bmatrix}^i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{s_i}(1) \\ \theta_{s_i}(2) \end{Bmatrix} = \mathbf{T}'_i \mathbf{a}_i \quad (4.88)$$

en donde  $\mathbf{T}_{lg}$  es la matriz de transformación estandar de  $(3 \times 3)$ , que contiene los cosenos directores de la base local respecto a la global. La matriz  $\mathbf{T}_{ls}$  puede obtenerse a partir de las siguientes transformaciones matriciales:

$$\mathbf{x}'_s = \mathbf{T}_{sg} \mathbf{x}_g \quad (4.89)$$

$$\mathbf{x}'_l = \mathbf{T}_{lg} \mathbf{x}_g \quad (4.90)$$

luego, despejando las variables globales  $\mathbf{x}_g$  desde ambas expresiones y combinándolas se obtiene:

$$\mathbf{x}'_l = \mathbf{T}_{lg} \mathbf{T}_{sg}^T \mathbf{x}'_s = \mathbf{T}'_{ls} \mathbf{x}'_s \quad (4.91)$$

en donde solamente la parte superior izquierda de  $\mathbf{T}'_{ls}$  es utilizada en (4.85), mayores detalles sobre la matriz de transformación  $\mathbf{T}'_i$  son dados en el Apéndice 4A.

El vector de deformaciones totales locales, se construye acoplando los efectos membranales de (4.83) con los de flexión de (4.52), es decir:

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\epsilon}'_m + z' \hat{\boldsymbol{\epsilon}}'_f = [\mathbf{B}'_1 \quad \mathbf{B}'_2 \quad \mathbf{B}'_3] \begin{Bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{B}'_i \mathbf{a}'_i \quad (4.92)$$

en donde  $\mathbf{B}'_i$  es dado por:

$$\mathbf{B}'_i = [\mathbf{B}'_{m_i} \quad z' \mathbf{B}'_{f_i}]_{3 \times 5} \quad (4.93)$$

y  $\mathbf{a}'_i$  se define de acuerdo con el lado izquierdo de relación (4.85). El vector de fuerzas internas de (4.31), se evalúa de acuerdo con:

$$\mathbf{F}_l^{int} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}'^T \boldsymbol{\sigma}' dV \quad (4.94)$$



y su valor numérico, se obtiene a partir de integración numérica considerando una discretización por capas a través del espesor, como se detalla en el Apéndice 4B. El vector de fuerzas internas resultante se encuentra referido al sistema local elemental, luego antes de proceder al ensamblaje de cada una de las contribuciones elementales se debe proceder a la transformación del vector de fuerzas internas definido por la ecuación (4.94) al sistema de referencia global, es decir:

$$\mathbf{F}_g^{int} = \sum_{e=1}^{nelem} \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{T}^1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}^3 \end{bmatrix} \right]^T \mathbf{F}_l^{(e)} \quad (4.95)$$

en donde  $\mathbf{T}^i$ , se define de acuerdo con la relación (4.88).

### 4.5.3 Nuevo elemento de Lámina BST

En este apartado se presenta la extensión de la nueva formulación de placa delgada *BPT*, para el análisis de estructuras laminares en 3D. El elemento resultante se obtiene como combinación del elemento *BPT* de flexión de placas delgadas y el *CST* de tensión plana. La principal característica de esta nueva formulación de lámina delgada es que permite representar los efectos acoplados de membrana y de flexión de placas considerando solamente 3 grados de libertad traslacionales por nodo.

Para esta nueva formulación de lámina delgada, el vector de deformaciones locales totales de ecuación (4.25) se expresa por:

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\epsilon}_m' + z' \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_f' \quad (4.96)$$

reemplazando las ecuaciones discretizadas de los campos de deformaciones de flexión y membrana de (4.77) y (4.86), respectivamente, se obtiene:

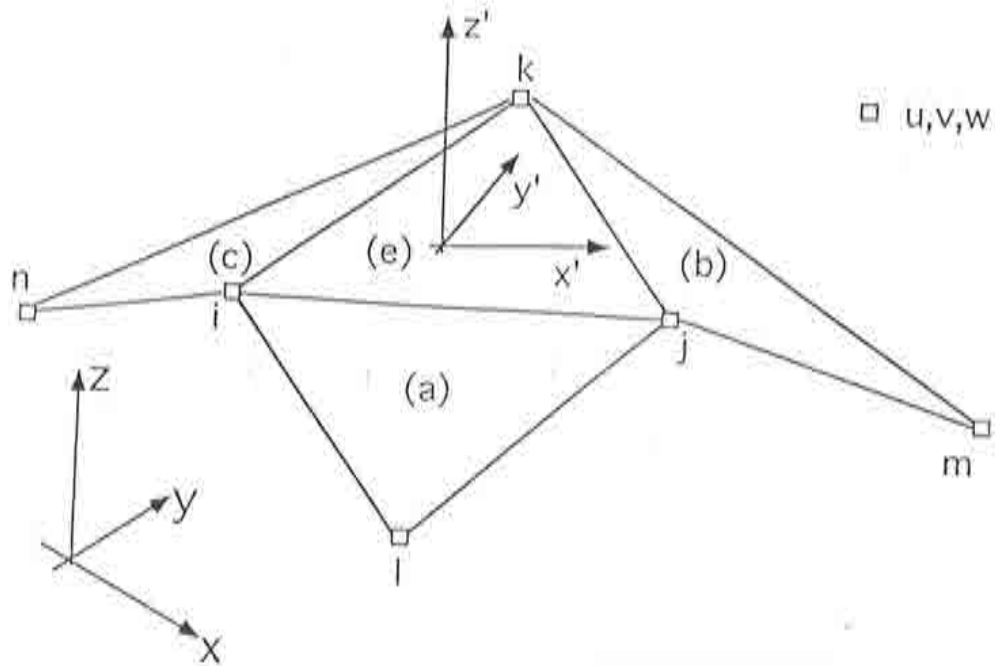
$$\boldsymbol{\epsilon}' = \mathbf{B}'_m \mathbf{a}'_m + z' \mathbf{B}'_f \mathbf{a}'_f = \left[ \mathbf{B}'_m \quad z' \mathbf{B}'_f \right]_{3 \times 18} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}'_m \\ \mathbf{a}'_f \end{Bmatrix} \quad (4.97)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \mathbf{B}' \mathbf{a}' \quad (4.98)$$

en donde el vector de incógnitas nodales locales  $\mathbf{a}'$  contiene sólo grados traslacionales de libertad asociados a la parcela de elementos (ver Figura 4.13).

La relación entre las variables de desplazamiento locales y globales, es dada por:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{T} \mathbf{a} \quad (4.99)$$

Figura 4.13 *BST* (Triángulo Básico de Lámina)

en donde  $\mathbf{T}$ , corresponde a la matriz de transformación de  $(18 \times 18)$  (ver el Apéndice 4C). Luego, el vector de desplazamientos globales  $\mathbf{a}$ , tendrá la siguiente forma:

$$\mathbf{a} = [u_{o_i}^{(e)}, v_{o_i}^{(e)}, w_{o_i}^{(e)}, u_{o_j}^{(e)}, v_{o_j}^{(e)}, w_{o_j}^{(e)}, u_{o_k}^{(e)}, v_{o_k}^{(e)}, w_{o_k}^{(e)}, u_{o_l}^{(a)}, v_{o_l}^{(a)}, w_{o_l}^{(a)}, u_{o_m}^{(b)}, v_{o_m}^{(b)}, w_{o_m}^{(b)}, u_{o_n}^{(c)}, v_{o_n}^{(c)}, w_{o_n}^{(c)}]^T \quad (4.100)$$

Conocida la matriz de deformación  $\mathbf{B}'$  de ecuación (4.98), (en el Apéndice 4C se da su expresión explícita) se procede a la evaluación del vector de fuerzas internas locales elementales, es decir:

$$\mathbf{F}_l^{int} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}'^T \boldsymbol{\sigma}' dV \quad (4.101)$$

vector que debe ser transformado al sistema cartesiano rectangular global, antes de proceder a su ensamblaje.

$$\mathbf{F}_g^{int} = \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{T}^T \mathbf{F}_l^{int} \quad (4.102)$$

#### 4.6 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

A continuación se presenta la metodología seguida en la implementación computacional de los nuevos elementos de lámina *BST* y *CST - DKT15* considerando una descripción del movimiento lagrangiana actualizada y un modelo constitutivo hipoeelástico.

1. La aceleración se evalúa de acuerdo (ver ecuación (2.29)) con:

$${}^t\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{M}^{-1} ({}^t\mathbf{F}^{ext} - {}^t\mathbf{F}^{int}) \quad (4.103)$$

2. La aceleración es integrada para obtener la velocidad en  $(t + \frac{\Delta t}{2})_t$ :

$${}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\dot{\mathbf{u}} = {}^{t-\frac{\Delta t}{2}}\dot{\mathbf{u}} + {}^t\ddot{\mathbf{u}}\Delta t \quad (4.104)$$

3. La velocidad es integrada para encontrar los desplazamientos globales en la configuración deformada en  $t + \Delta t$ :

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\dot{\mathbf{u}}\Delta t \quad (4.105)$$

4. Conocido el movimiento  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ , se procede a la actualización de la geometría. Calculándose el incremento de desplazamientos  ${}_t\mathbf{u}$  y la nueva posición de la malla de elementos finitos  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{x}$  (ver Figura 2.2):

$${}_t\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^t\mathbf{u} \quad (4.106)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{x} = {}^t\mathbf{x} + {}_t\mathbf{u} \quad (4.107)$$

5. Para cada elemento de la malla de elementos finitos y considerando una discretización por capas a través del espesor se procede a la integración de la ecuación constitutiva (ver ecuación (3.1)):
  - (i) Se refieren los incrementos de desplazamientos globales correspondientes a cada elemento ( $e$ ) al nuevo sistema de coordenadas locales en la configuración  $t + \Delta t$ :

$${}_t\mathbf{a}^{(e)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{T}^{(e)} {}_t\mathbf{u}^{(e)} \quad (4.108)$$

con  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{T}^{(e)}$  definida por ecuaciones (4.88) o (4.99) según se trate del elemento *CST - DKT15* o *BST* ver los Apéndices 4A y 4C respectivamente. Se

procede a la actualización del espesor del elemento, utilizando la condición de incompresibilidad<sup>[M-1]</sup>, es decir:

$${}^t h^{(e)} {}^t A^{(e)} = {}^{t+\Delta t} h^{(e)} {}^{t+\Delta t} A^{(e)} \quad (4.109)$$

luego:

$${}^{t+\Delta t} h^{(e)} = \frac{{}^t A^{(e)} {}^t h^{(e)}}{{}^{t+\Delta t} A^{(e)}} \quad (4.110)$$

donde  ${}^t h^{(e)}$  y  ${}^t A^{(e)}$  denotan el espesor y el área en la configuración anterior al tiempo  $t$ .

(ii) Se evalúa el incremento de deformaciones centradas para la capa ubicada a  $z'_i$  con respecto a la superficie media de la lámina (ver ecuación Ap3A.11):

$$\Delta \epsilon'(z'_i) = \left( {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \mathbf{B}'_m + {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} z'_i {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \mathbf{B}'_f \right) {}^t \mathbf{a}' \quad (4.109)$$

con:

$$\Delta z' = \frac{{}^{t+\Delta t} h^{(e)}}{ncapas}, \quad {}^{t+\Delta t} z'_i = -\frac{{}^{t+\Delta t} h^{(e)}}{2} + \frac{\Delta z'}{2}$$

$${}^{t+\frac{\Delta t}{2}} z'_i \approx {}^{t+\Delta t} z'_i \quad (4.110)$$

(iii) Se procede a evaluar el tensor velocidad de deformación, y a evaluar el incremento de tensiones Jaumann para la capa bajo análisis, suponiendo que la velocidad de deformación  ${}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \mathbf{d}$  genera un estado tensional elástico:

$${}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \mathbf{d} = \frac{\Delta \epsilon'(z'_i)}{\Delta t} \quad (4.111)$$

$${}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \mathbf{d}^E = {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \mathbf{d} \quad (4.112)$$

$${}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \boldsymbol{\sigma}^J = \mathbf{C}^E {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \mathbf{d}^E \quad (4.113)$$

con  $\mathbf{C}^E$  el tensor constitutivo elástico lineal para estados de tensión plana (ver ecuación (4.15)),

(iv) Se evalúan los términos transporte:  ${}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \boldsymbol{\omega} {}^t \boldsymbol{\sigma} - {}^t \boldsymbol{\sigma} {}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \boldsymbol{\omega}$ , en donde  ${}^t \boldsymbol{\sigma}$  son las tensiones en la capa correspondientes al paso de tiempo anterior.



(v) Se calcula la tensión *predictora elástica*:

$${}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\boldsymbol{\sigma} = {}^t\boldsymbol{\sigma} + {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\boldsymbol{\sigma}^J \Delta t + \left( {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\boldsymbol{\omega} {}^t\boldsymbol{\sigma} - {}^t\boldsymbol{\sigma} {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\boldsymbol{\omega} \right) \frac{\Delta t}{2} \quad (4.114)$$

(vi) Se verifica el criterio de fluencia adoptado (von Mises, Hill 48 o Hill mejorado) bajo la hipótesis de tensión plana y se procede a calcular el corrector plástico si corresponde:

$$\text{IF } {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}f\left({}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\boldsymbol{\sigma}, {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}q\right) > 0,$$

THEN go to (vii)

ELSE go to (viii)

ENDIF

(vii) Se corrigen las tensiones mediante el algoritmo de retorno, obteniéndose un nuevo tensor de tensiones *corregidas* en la configuración intermedia  ${}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\boldsymbol{\sigma}$ .

(viii) Se transportan las tensiones  ${}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\boldsymbol{\sigma}$  corregidas o elásticas según corresponda con (vi) a la configuración final en  $t + \Delta t$ :

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\boldsymbol{\sigma} + \left( {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\boldsymbol{\omega} {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\boldsymbol{\sigma} - {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\boldsymbol{\sigma} {}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\boldsymbol{\omega} \right) \frac{\Delta t}{2} \quad (4.115)$$

(ix) Se evalúa el vector de fuerzas internas locales en la configuración final  $t + \Delta t$  para las tensiones correspondientes a la capa bajo análisis (ver Apéndice 4B):

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_1^{(e)} = \sum_{p=1}^{n_p} \left( {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}'_m + {}^{t+\Delta t}z'_i {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}'_f \right)^T {}^{t+\Delta t}\hat{\boldsymbol{\sigma}} |J_{2D}| W_p \Delta z' \quad (4.116)$$

(x) Volver a (ii) y repetir el proceso para otra capa  ${}^{t+\Delta t}z'_{i+1}$ , hasta completar el total de capas.

6. Transformar el vector de fuerzas internas resultante del proceso de integración por capas al sistema coordenado global y proceder a su ensamblaje:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{int} = \sum_{e=1}^{nelem} {}^{t+\Delta t}\mathbf{T}^{(e)T} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_1^{(e)} \quad (4.117)$$

7. Finalmente volver a (1.) y evaluar las aceleraciones nodales correspondientes a la configuración  $t + \Delta t$  y mediante integración obtener la nueva configuración deformada en  $t + 2\Delta t$ .

## 4.7 CONCLUSIONES

Se han presentado una familia de nuevos elementos finitos triangulares basados en la teoría de placa gruesa de Reissner-Mindlin e interpolación mixta. Mediante la aplicación de técnicas de *deformaciones de cortante impuestas* se transforman en nuevas formulaciones válidas para el análisis de láminas delgadas,

Los nuevos elementos de placa y lámina delgada, *BPT* y *BST* respectivamente, presentan una serie de ventajas de carácter numérico y computacional, sobre todo en el contexto del análisis dinámico explícito<sup>[C-1]</sup>. Esta nueva formulación es fácil de implementar computacionalmente, aun cuando sea necesario considerar a los elementos vecinos. Las propiedades inerciales son fáciles de determinar al considerar solamente en la matriz de masa concentrada las masas traslacionales asociadas a cada nodo.

El buen comportamiento del nuevo elemento en problemas dinámicos, quedará de manifiesto en el desarrollo de los capítulos 5 y 6, en donde se analizará un amplio abanico de problemas.

## 4.8 REFERENCIAS

- [B-1] Batoz, J.L., Bathe, K.J. and Ho, L., -*A study of three-node triangular plate bending elements*, -Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 15, pp. 1771-1812, 1980.
- [B-2] Batoz, J.L., -*An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element*, -Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 18, pp. 1077-1089, 1982.
- [B-3] Barnes, M.R., -*Form finding and analysis of tension space structures by dynamic relaxation*, - Ph.D. Thesis, Dept. of Civil Engineering, The City University, London, 1992.
- [B-4] Batoz, J.L. and Dhatt, G., -*Modelisation des structures par elements finis*, -HERMES, Paris, 1990.
- [C-1] Cendoya, P., Oñate, E., Miquel, J. and Zarate, F., -*Análisis dinámico explícito no lineal de estructuras laminares sin variables rotacionales*, - Métodos Numéricos en Ingeniería, M. Doblare et al. CIMNE, Barcelona 1996. Actas del III Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, Zaragoza, junio 1996.
- [D-1] Dhatt, G., Marcotte, L. and Matte, Y., -*A new triangular discrete Kirchhoff plate/shell element*, -Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 23, pp. 453-470, 1986.

- [H-1] **Harrigmoie, G. and Bergan, P.G.**, -*Nonlinear analysis of free-form shells by flat finite elements*, -Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 16, pp. 11-35, 1978.
- [H-2] **Hapmshire, J.K., Topping, B.H.V. and Chan, H.C.**, -*Three node triangular elements with one degree of freedom per node*, -Eng. Comput., Vol. 9, pp. 49-62, 1992.
- [J-1] **Jeyachandrabose, C., Kirkhope, J. and Ramesh, C.**, -*An alternative explicit formulation for the DKT plate-bending element*, -Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 21, pp. 1289-1293, 1985.
- [M-1] **Malvern, L. E.**, -*Introduction to the Mechanics of a Continuum Medium*, - Printice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.
- [M-2] **Morley, L.S.D.**, -*On the constant moment plate bending element*, - J. Strain Analysis, Vol. 6, pp. 10-14, 1971.
- [O-1] **Oñate, E.**, -*Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos. Análisis estático lineal*, -CIMNE, Barcelona, 1992.
- [O-2] **Oñate, E.**, -*A review of some finite element families for thick and thin plate and shell analysis*, -Publication CIMNE N° 53, Barcelona, Mayo, 1994.
- [O-3] **Oñate, E., Zienkiewicz, O.C., Suarez, B. and Taylor, R.L.**, -*A methodology for deriving shear constrained Reissner-Mindlin plate elements*, -Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 33, pp. 345-367, 1992.
- [O-4] **Oñate, E., Zárate, F. and Flores, F.**, -*A simple triangular element for thick and thin plate and shell analysis*, -Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 37, pp. 2569-2582, 1994.
- [O-5] **Oñate, E. and Cervera, M.** -*Derivation of thin plate bending elements with one degree of freedom per node. A simple three node triangle*, - Eng. Comput., 10, pp. 543-561, 1993.
- [P-1] **Phaal, R., Calladinde, C.R.**, -*A simple class of finite elements for plate and shell problems, I: Elements for beams and thin plates*, -Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 35, pp. 955-977, 1992.
- [P-2] **Phaal, R., Calladinde, C.R.**, -*A simple class of finite elements for plate and shell problems, II: An element for thin shells with only traslational degrees of freedom*, -Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 35, pp. 979-996, 1992.
- [T-1] **Timoshenko, S.P., Goodier, J.N.**, -*Teoría de la elasticidad*, -Edic. Urmo, 1968.
- [Z-1] **Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.**, -*The finite element method Vol. II*, - McGraw Hill, 1991.

- [Z-2] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Papadopoulos, P. and Oñate, E.,  
-Plate bending elements with discrete constraints: New triangular elements,-  
Computers & Structures, Vol. 35, No 4, pp. 505-522, 1990.
- [Z-3] Zárte, F., -Nuevos elementos finitos para el análisis de placas y láminas,-  
Tesis Doctoral, U.P.C., Barcelona, Junio, 1996.



## Apéndice 4A

### CONSIDERACIONES ACERCA DEL ELEMENTO DKT.

#### A.4A.1 Introducción

En este apéndice, se demuestra que las funciones de forma definidas por ecuaciones (4.49) y (4.50) derivadas a partir de imponer las restricciones de placa delgada en puntos discretos al elemento *TLCL* (ver apartado 4.3.3.1), coinciden con las propuestas por Batoz et al. [B-1],[B-2]. Conduciendo en ambas formulaciones a la misma matriz de deformación por flexión  $\mathbf{B}_f$ .

También se presenta, la forma explícita de la matriz de transformación de ecuación (4.88) necesaria en el caso de análisis de láminas planas mediante el elemento *CST - DKT15*.

#### A.4A.2 Funciones de forma $\mathbf{H}_x$ y $\mathbf{H}_y$

A partir de las funciones de forma del elemento triangular de lados rectos definidas por:

$$\begin{aligned}N_{w_1} &= 1 - \alpha - \beta \\N_{w_2} &= \alpha \\N_{w_3} &= \beta\end{aligned}\tag{Ap4A.1}$$

definamos, el siguiente conjunto de nuevas funciones de forma:

$$\begin{aligned}N_1 &= N_{w_1} - 2N_{w_1}N_{w_2} - 2N_{w_1}N_{w_3} \\N_2 &= N_{w_2} - 2N_{w_2}N_{w_1} - 2N_{w_2}N_{w_3} \\N_3 &= N_{w_3} - 2N_{w_3}N_{w_1} - 2N_{w_3}N_{w_2} \\N_4 &= 4N_{w_1}N_{w_2} \\N_5 &= 4N_{w_2}N_{w_3}\end{aligned}$$

$$N_6 = 4N_{w_1}N_{w_3} \quad (Ap4A.2)$$

Considerando las matrices que definen a las nuevas funciones de forma  $\mathbf{H}_x$  y  $\mathbf{H}_y$  y analizando por ejemplo las tres primeras componentes de  $\mathbf{H}_{x_i}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{x_1} &= -\left[\frac{6N_{w_1}N_{w_2}}{l_{12}}\mathbf{e}_{12_x} + \frac{6N_{w_1}N_{w_3}}{l_{13}}\mathbf{e}_{13_x}\right] \\ \mathbf{H}_{x_2} &= N_{w_1} - 3N_{w_1}N_{w_2}\cos^2\omega_{12} - 3N_{w_1}N_{w_3}\cos^2\omega_{13} \\ \mathbf{H}_{x_3} &= -3N_{w_1}N_{w_2}\sin\omega_{12}\cos\omega_{12} - 3N_{w_1}N_{w_3}\sin\omega_{13}\cos\omega_{13} \end{aligned} \quad (Ap4A.3)$$

en donde los vectores tangentes a los lados, se definen de acuerdo con la figura 4.6:

$$\mathbf{e}_{ij} = \begin{Bmatrix} \cos\omega_{ij} \\ \sin\omega_{ij} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{x_{ij}}{l_{ij}} \\ -\frac{y_{ij}}{l_{ij}} \end{Bmatrix} \quad (Ap4A.4)$$

Expresando las relaciones (Ap4A.3), en términos de (Ap4A.2) y (Ap4A.4), se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{x_1} &= -1.5\left[N_4\frac{-x_{12}}{l_{12}^2} + N_6\frac{-x_{13}}{l_{13}^2}\right] = 1.5\left[N_4\frac{x_{12}}{l_{12}^2} + N_6\frac{x_{13}}{l_{13}^2}\right] \\ \mathbf{H}_{x_2} &= N_{w_1} - 3N_{w_1}N_{w_2}\cos^2\omega_{12} - 3N_{w_1}N_{w_3}\cos^2\omega_{13} = \\ &= N_{w_1} - 3N_{w_1}N_{w_2}(1 - \sin^2\omega_{12}) - 3N_{w_1}N_{w_3}(1 - \sin^2\omega_{13}) = \\ &= N_1 + N_4\frac{1}{4}(3\sin^2\omega_{12} - 1) + N_6\frac{1}{4}(3\sin^2\omega_{13} - 1) = \\ &= N_1 + N_4\frac{1}{4}\left(3\frac{y_{12}^2}{l_{12}^2} - 1\right) + N_6\frac{1}{4}\left(3\frac{y_{13}^2}{l_{13}^2} - 1\right) \\ \mathbf{H}_{x_3} &= -3N_{w_1}N_{w_2}\sin\omega_{12}\cos\omega_{12} - 3N_{w_1}N_{w_3}\sin\omega_{13}\cos\omega_{13} = \\ &= -\frac{3}{4}N_4\sin\omega_{12}\cos\omega_{12} - \frac{3}{4}N_6\sin\omega_{13}\cos\omega_{13} = \\ &= -\frac{3}{4}N_4\frac{x_{12}y_{12}}{l_{12}^2} - \frac{3}{4}N_6\frac{x_{13}y_{13}}{l_{13}^2} \end{aligned} \quad (Ap4A.5)$$

definiendo las constantes:

$$a_k = -\frac{x_{ij}}{l_{ij}^2}, \quad b_k = \frac{3}{4}\frac{x_{ij}y_{ij}}{l_{ij}^2}$$

$$c_k = \left(3 \frac{y_{ij}^2}{l_{ij}^2} - 1\right) \quad (Ap4A.6)$$

en donde,  $k = 4, 5, 6$  para los lados  $ij = 12, 23, 13$  respectivamente, reemplazando en la ecuación (Ap4A.5), se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{x_1} &= -1.5 [N_4 a_4 - N_6 a_6] \\ \mathbf{H}_{x_2} &= N_1 - c_4 N_4 - c_6 N_6 \\ \mathbf{H}_{x_3} &= -[b_4 N_4 + b_6 N_6] \end{aligned} \quad (Ap4A.6)$$

de manera análoga, si se consideran las primeras tres componentes de  $\mathbf{H}_y$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{y_1} &= - \left[ \frac{6N_{w_1} N_{w_2}}{l_{12}} \mathbf{e}_{12y} + \frac{6N_{w_1} N_{w_3}}{l_{13}} \mathbf{e}_{13y} \right] \\ \mathbf{H}_{y_2} &= -3N_{w_1} N_{w_2} \sin \omega_{12} \cos \omega_{12} - 3N_{w_1} N_{w_3} \sin \omega_{13} \cos \omega_{13} \\ \mathbf{H}_{y_3} &= N_{w_1} - 3N_{w_1} N_{w_2} \sin^2 \omega_{12} - 3N_{w_1} N_{w_3} \sin^2 \omega_{13} \end{aligned} \quad (Ap4A.7)$$

y definiendo, las constantes:

$$d_k = -\frac{y_{ij}}{l_{ij}^2}, \quad e_k = \left(3 \frac{x_{ij}^2}{l_{ij}^2} - 1\right) \quad (Ap4A.8)$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{y_1} &= -1.5 [N_4 d_4 - N_6 d_6] \\ \mathbf{H}_{y_2} &= [b_4 N_4 + b_6 N_6] \\ \mathbf{H}_{y_3} &= -N_1 + e_4 N_4 + e_6 N_6 \end{aligned} \quad (Ap4A.9)$$

de esta forma, si se comparan las ecuaciones (Ap4A.6) y (Ap4A.9) con las dadas por Batoz et al. [B-1],[B-2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{x_1} &= -1.5 [N_4 a_4 - N_6 a_6] \\ \mathbf{H}_{x_2} &= [b_4 N_4 + b_6 N_6] \\ \mathbf{H}_{x_3} &= N_1 - c_4 N_4 - c_6 N_6 \\ \mathbf{H}_{y_1} &= -1.5 [N_4 d_4 - N_6 d_6] \end{aligned} \quad (Ap4A.10)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{y2} &= -N_1 + e_4 N_4 + e_6 N_6 \\ \mathbf{H}_{y3} &= -[b_4 N_4 + b_6 N_6]\end{aligned}\quad (Ap4A.11)$$

la diferencia de signo en los términos asociados a las variables rotacionales, es debido a la diferente convención de signos utilizada por Batoz et al.:

$$\begin{aligned}\theta_{x_i} &= +\theta_{y_i}^B \\ \theta_{y_i} &= -\theta_{x_i}^B\end{aligned}\quad (Ap4A.12)$$

Las derivadas de las nuevas funciones de forma  $\mathbf{H}_x$  y  $\mathbf{H}_y$  con respecto a las coordenadas naturales  $\eta$  y  $\xi$  son:

$$\mathbf{H}_{x,\xi} = \begin{bmatrix} p_4(1-2\xi) + (p_6 - p_4)\eta \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_4(1-2\xi) - (r_6 + r_4)\eta \\ -q_4(1-2\xi) + (q_6 + q_4)\eta \\ -p_4(1-2\xi) + (p_6 + p_4)\eta \\ -2 + 6\xi + r_4(1-2\xi) + (r_5 - r_4)\eta \\ -q_4(1-2\xi) + (q_4 - q_5)\eta \\ -(p_6 + p_5)\eta \\ (r_5 - r_6)\eta \\ (q_6 - q_5)\eta \end{bmatrix}\quad (Ap4A.12)$$

$$\mathbf{H}_{y,\xi} = \begin{bmatrix} t_4(1-2\xi) + (t_6 - t_4)\eta \\ q_4(1-2\xi) - (q_6 + q_4)\eta \\ 1 + r_4(1-2\xi) - (r_6 + r_4)\eta \\ -t_4(1-2\xi) + (t_5 + t_4)\eta \\ -q_4(1-2\xi) - (q_5 - q_4)\eta \\ 1 - r_4(1-2\xi) - (r_5 - r_4)\eta \\ -(t_6 + t_5)\eta \\ -(q_5 - q_6)\eta \\ (r_6 - r_5)\eta \end{bmatrix}\quad (Ap4A.13)$$

$$\mathbf{H}_{x,\eta} = \begin{bmatrix} -p_6(1-2\eta) + (p_6 - p_4)\xi \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_6(1-2\eta) - (r_6 + r_4)\xi \\ -q_6(1-2\eta) + (q_6 + q_4)\xi \\ (p_5 + p_4)\xi \\ (r_5 + r_4)\xi \\ (q_4 - q_5)\xi \\ p_6(1-2\eta) - (p_6 + p_5)\xi \\ -2 + 6\eta + r_6(1-2\eta) - (r_6 - r_5)\xi \\ -q_6(1-2\eta) + (q_6 - q_5)\xi \end{bmatrix}\quad (Ap4A.14)$$



$$\mathbf{H}_{y,\eta} = \begin{bmatrix} -t_6(1-2\eta) + (t_6-t_4)\xi \\ q_6(1-2\eta) - (q_6+q_4)\xi \\ 1+r_6(1-2\eta) - (r_6+r_4)\xi \\ (t_5+t_4)\xi \\ -(q_5-q_4)\xi \\ (r_4-r_5)\xi \\ t_6(1-2\eta) - (t_6+t_5)\xi \\ q_6(1-2\eta) + (q_5-q_6)\xi \\ -1+r_6(1-2\eta) + (r_5-r_6)\xi \end{bmatrix} \quad (Ap4A.15)$$

en donde:

$$p_k = -6 \frac{x_{ij}}{l_{ij}^2} = 6a_k, \quad t_k = -6 \frac{y_{ij}}{l_{ij}^2} = 6d_k$$

$$q_k = 3 \frac{x_{ij}y_{ij}}{l_{ij}^2} = 4b_k, \quad r_k = 3 \frac{x_{ij}^2}{l_{ij}^2} \quad (Ap4A.16)$$

$k = 4, 5, 6$  para  $ij = 12, 23, 13$  respectivamente.

#### A.4A.3 Transformación al sistema de referencia global

De acuerdo con la ecuación (4.88), para un nodo genérico  $i$  la transformación de variables nodales, es dada por:

$$\mathbf{a}'_i = \begin{Bmatrix} u'_{o_i} \\ v'_{o_i} \\ w'_{o_i} \\ \theta_{x'_i} \\ \theta_{y'_i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{lg} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{ls} \end{bmatrix}^i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{1s_i} \\ \theta_{2s_i} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^i \mathbf{a}_i \quad (Ap4A.17)$$

en donde,  $\mathbf{T}_{lg}$  se define por:

$$\mathbf{T}_{lg} = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix} \quad (Ap4A.18)$$

y  $\mathbf{T}_{ls}$ , se define a partir de los ángulos de Euler que definen la orientación de la normal media en cada nodo  $i$ , de la superficie discretizada. La matriz de transformación entre los sistemas nodales y globales, se define por:

$$\mathbf{x}'_s = \mathbf{T}_{sg} \mathbf{x}_g \quad (Ap4A.19)$$

con  $\mathbf{T}_{sg}$ , definido por la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (Ap4A.20)$$

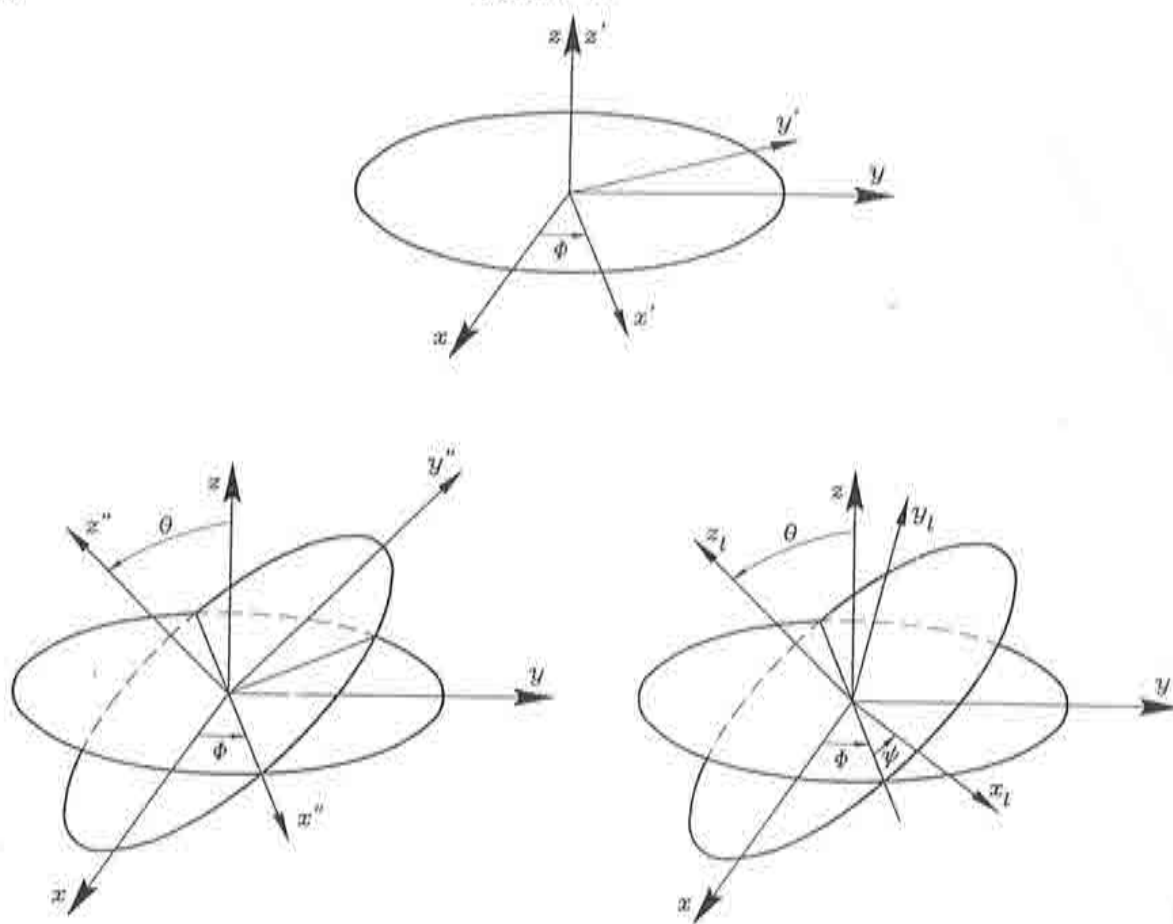


Figura Ap4A.I Rotaciones que definen los ángulos de Euler.

en donde  $\phi$  es la rotación alrededor del eje global  $z$ , definiendo el nuevo sistema coordenado local  $x'y'z'$ ,  $\theta$  es la rotación alrededor del eje local  $x'$ , la cual define el nuevo sistema  $x''y''z''$  y finalmente  $\psi$  es la rotación alrededor del eje  $z''$  que define el sistema coordenado nodal  $x'_s$ , ver Figura Ap4A.I.

Por otra parte, la matriz de transformación entre el sistema de coordenadas locales y globales, se define por la ecuación (Ap4A.18), de modo que la relación entre el sistema de coordenadas locales y nodales, puede escribirse como:

$$\mathbf{x}'_l = \mathbf{T}_{lg} \mathbf{T}_{sg}^T \Big|_{3 \times 3} \mathbf{x}'_s \quad (\text{Ap4A.21})$$

donde se define, la parte superior izquierda de  $\mathbf{T}_{lg} \mathbf{T}_{sg}^T$  como la matriz de transformación  $\mathbf{T}_{ls}$ .

## Apéndice 4B

# INTEGRACIÓN NUMÉRICA POR CAPAS.

### A.4B.1 Introducción

En este apéndice se presenta el esquema de integración numérica utilizado en la evaluación del vector de fuerzas internas. El procedimiento consiste en discretizar la estructura en un conjunto de capas de iguales propiedades mecánicas e idénticos espesores, ver Figura Ap4B.Ia. En donde el campo de tensiones resultante  $\sigma_{x'}$ ,  $\sigma_{y'}$  y  $\sigma_{x'y'}$  en cada punto de Gauss es considerado constante dentro del espesor de cada capa, ver la Figura Ap4B.Ib. Este esquema de integración numérica permitirá conocer tanto la distribución de las deformaciones como la de las tensiones a través del espesor de la chapa en cada punto de Gauss.

### A.4B.2 Integración numérica del vector de fuerzas internas

La expresión del vector de fuerzas internas con respecto a un sistema coordenado cartesiano local, se expresa de acuerdo con la relación (4.31) por:

$$\mathbf{F}_l^{int} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}'_f{}^T \boldsymbol{\sigma}_f' dV \quad (Ap4B.1)$$

De acuerdo con las relaciones (4.7) y (4.13), se tiene:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_f'(z') &= z' \mathbf{L} \boldsymbol{\theta} = z' \mathbf{B}'_f \mathbf{a}'_f \\ \boldsymbol{\sigma}_f'(z') &= \mathbf{D}_f \boldsymbol{\epsilon}_f'(z') = z' \mathbf{D}_f \mathbf{B}'_f \mathbf{a}'_f \end{aligned} \quad (Ap4B.2)$$

luego:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_l^{int} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}'_f{}^T \boldsymbol{\sigma}_f'(z') dx' dy' dz' = \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \mathbf{B}'_f{}^T \boldsymbol{\sigma}_f'(z') |J_{2D}| d\eta d\varepsilon dz' \end{aligned} \quad (Ap4B.3)$$

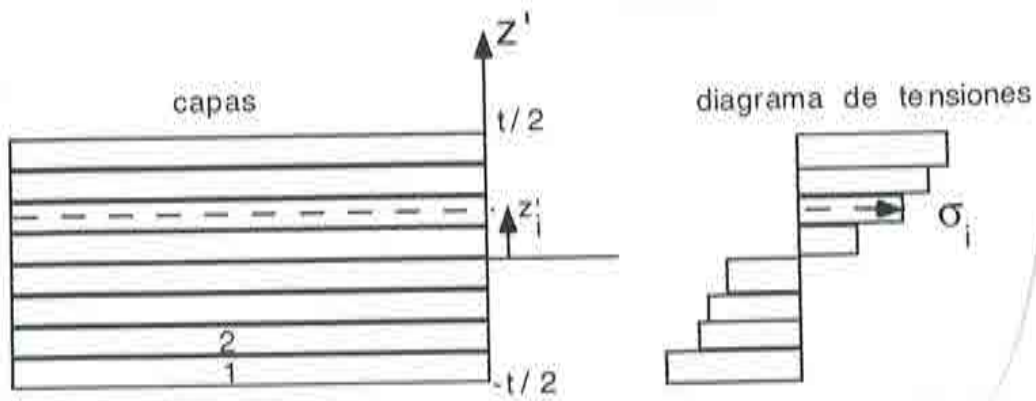


Figura Ap4b.I (a) Discretización en capas a través del espesor. (b) Distribución de tensiones.

donde  $|J_{2D}|$  es el determinante de la matriz jacobiano.

$$\mathbf{J}_{2D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial \xi} & \frac{\partial x'}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y'}{\partial \xi} & \frac{\partial y'}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (Ap4B.4)$$

luego:

$$\mathbf{F}_l^{int} = \sum_{i=1}^{ncapas} \sum_{p=1}^{n_p} (\mathbf{B}'_f)^T \boldsymbol{\sigma}_f'(z') |J_{2D}| W_p \Delta z')^i \quad (Ap4B.5)$$

con:

$$\Delta z' = \frac{h}{ncapas} \quad y \quad -\frac{h}{2} \leq z' \leq +\frac{h}{2} \quad (Ap4B.6)$$

donde  $n_p$  es el número de puntos de integración en el dominio definido por la superficie media de la chapa, y  $W_p$  es el peso en el punto de integración<sup>(O-1)</sup>.

En el caso particular del elemento de lámina *BST*, puesto que el jacobiano de la transformación isoparamétrica  $|J_{2D}|$  es igual a  $2A^{(e)}$ ,  $n_p = 1$  y  $W_p = \frac{1}{2}$ , la expresión del vector de fuerzas internas de (Ap4B.5) se simplifica, obteniéndose:

$$\mathbf{F}_l^{int} = A^{(e)} \sum_{i=1}^{ncapas} (\mathbf{B}'_f(z'))^T \boldsymbol{\sigma}_f'(z') \Delta z')^i \quad (Ap4B.7)$$

El número de capas a emplear para discretizar e integrar en la dirección del espesor depende del problema en particular. Algunos autores recomiendan que para representar el comportamiento no lineal de estructuras laminares un número de capas comprendido entre 6 y 10 se considera aceptable. En la presente investigación se ha demostrado (ver capítulo 5) que con una discretización de 4 capas o mayor las repuestas de desplazamientos no varían considerablemente en cuanto a su precisión numérica pero si en sus tiempos de CPU.



## Apéndice 4C

# TRANSFORMACIONES MATRI- CIALES DEL NUEVO ELEMENTO DE LÁMINA DELGADA CST-BPT.

### A.4C.1 Introducción

En este apéndice se presentan los operadores matriciales y las matrices de transformación necesarias en la descripción cinemática y geométrica del nuevo elemento de lámina en 3D.

### A.4C.2 Vector de giros normales

De acuerdo con la ecuación (4.70), el vector de giros normales sobre los lados se expresa por:

$$\boldsymbol{\theta}_n^{(e)} = \mathbf{N}_{\theta_n} \mathbf{a}_f \quad (\text{Ap4C.1})$$

donde la matriz  $\mathbf{N}_{\theta_n}$ , es definida por la expresión (4.69) y el vector de movimientos traslacionales de la parcela elemental  $\mathbf{a}_f$  se define por la ecuación (4.68). Expresión que al ser desarrollada se transforma en:

$$\boldsymbol{\theta}_n^{(e)} = \begin{bmatrix} \alpha_{ij} n_{x'_{ij}}^{(e)} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_{w_i}^{(e)}}{\partial x^{i'}} w'_i{}^{(e)} + \alpha_{ij} n_{y'_{ij}}^{(e)} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_{w_i}^{(e)}}{\partial y^{i'}} w'_i{}^{(e)} - \\ \beta_{ij} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_{w_i}^{(a)}}{\partial y^{i'}} w'_i{}^{(a)} \\ \alpha_{jk} n_{x'_{jk}}^{(e)} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_{w_i}^{(e)}}{\partial x^{i'}} w'_i{}^{(e)} + \alpha_{jk} n_{y'_{jk}}^{(e)} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_{w_i}^{(e)}}{\partial y^{i'}} w'_i{}^{(e)} - \\ \beta_{jk} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_{w_i}^{(b)}}{\partial y^{i'}} w'_i{}^{(b)} \\ \alpha_{ik} n_{x'_{ik}}^{(e)} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_{w_i}^{(e)}}{\partial x^{i'}} w'_i{}^{(e)} + \alpha_{ik} n_{y'_{ik}}^{(e)} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_{w_i}^{(e)}}{\partial y^{i'}} w'_i{}^{(e)} - \\ \beta_{ik} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_{w_i}^{(c)}}{\partial y^{i'}} w'_i{}^{(c)} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad (\text{Ap4C.2})$$

recordemos que la situación más simple de suavizado del giro normal sobre un borde común  $ij$ , era definirlo como el promedio de cada una de las contribuciones

de giro normal sobre el lado, es decir  $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = \frac{1}{2}$ , siempre y cuando  $ij$  no sea un contorno del dominio discretizado.

A su vez la relación (Ap4C.2), puede ser expresada como el producto de una matriz que contenga las componentes cartesianas del vector normal al borde y los coeficientes  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$  definidos de acuerdo con las condiciones de contorno, por un vector que contenga el producto de las derivadas cartesianas de las funciones de forma por el vector de desplazamientos transversales elementales, es decir:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{ij} n_{x'_{ij}}^{(e)} & \alpha_{ij} n_{y'_{ij}}^{(e)} & -\beta_{ij} & 0 & 0 \\ \alpha_{jk} n_{x'_{jk}}^{(e)} & \alpha_{jk} n_{y'_{jk}}^{(e)} & 0 & -\beta_{jk} & 0 \\ \alpha_{ik} n_{x'_{ik}}^{(e)} & \alpha_{ik} n_{y'_{ik}}^{(e)} & 0 & 0 & -\beta_{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_{w_i}^{(e)}}{\partial x'} w'_i{}^{(e)} \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_{w_i}^{(e)}}{\partial y'} w'_i{}^{(e)} \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_{w_i}^{(a)}}{\partial y'} w'_i{}^{(a)} \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_{w_i}^{(b)}}{\partial y'} w'_i{}^{(b)} \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_{w_i}^{(c)}}{\partial y'} w'_i{}^{(c)} \end{bmatrix} \quad (\text{Ap4C.3})$$

en donde, el vector del lado derecho de ecuación (Ap4C.3), puede ser reescrito por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \mathbf{N}_w^{(e)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y'} \mathbf{N}_w^{(e)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y'} \mathbf{N}_w^{(a)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y'} \mathbf{N}_w^{(b)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y'} \mathbf{N}_w^{(c)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}'^{(e)} \\ \mathbf{w}'^{(a)} \\ \mathbf{w}'^{(b)} \\ \mathbf{w}'^{(c)} \end{bmatrix} \quad (\text{Ap4C.4})$$

con la matriz  $\mathbf{N}_w = [N_{w_1}, N_{w_2}, N_{w_3}]_{1 \times 3}$  conteniendo las funciones de forma estandar del elemento triangular de tres nodos, correspondientes a cada elemento de la parcela.

Luego, la ecuación (Ap4C.2) es posible reexpresarla como el producto de las matrices  $\hat{\mathbf{T}}$  y  $\hat{\mathbf{N}}_w$  por el vector de incógnitas nodales de la parcela de elementos  $\mathbf{a}_f$ , en donde  $\hat{\mathbf{T}}$  y  $\hat{\mathbf{N}}_w$  se definen de acuerdo con:

$$\hat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \alpha_{ij} n_{x'_{ij}}^{(e)} & \alpha_{ij} n_{y'_{ij}}^{(e)} & -\beta_{ij} & 0 & 0 \\ \alpha_{jk} n_{x'_{jk}}^{(e)} & \alpha_{jk} n_{y'_{jk}}^{(e)} & 0 & -\beta_{jk} & 0 \\ \alpha_{ik} n_{x'_{ik}}^{(e)} & \alpha_{ik} n_{y'_{ik}}^{(e)} & 0 & 0 & -\beta_{ik} \end{bmatrix}_{3 \times 5} \quad (\text{Ap4C.5})$$

$$\hat{\mathbf{N}}_w = \begin{bmatrix} \partial_{x'} \mathbf{N}_w^{(e)} & 0 & 0 & 0 \\ \partial_{y'} \mathbf{N}_w^{(e)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{y'} \mathbf{N}_w^{(a)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{y'} \mathbf{N}_w^{(b)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{y'} \mathbf{N}_w^{(c)} \end{bmatrix}_{5 \times 12} \quad (Ap4C.6)$$

finalmente,  $\boldsymbol{\theta}_n^{(e)}$  se expresa por:

$$\boldsymbol{\theta}_n^{(e)} = \hat{\mathbf{T}} \hat{\mathbf{N}}_w \mathbf{a}_f \quad (Ap4C.7)$$

#### A.4C.3 Matriz de deformación por flexión: $\mathbf{B}'_f$

De acuerdo con la ecuación (4.78) la matriz de deformación por flexión, se expresa por:

$$\mathbf{B}'_f = \mathbf{L} \mathbf{N}_\theta \tilde{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\theta_s} \\ \mathbf{N}_{\theta_n} \end{bmatrix} \quad (Ap4C.8)$$

$$\mathbf{B}'_f = \mathbf{L} \mathbf{N}_\theta \tilde{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{\theta_s} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{L} \mathbf{N}_\theta \tilde{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{N}_{\theta_n} \end{bmatrix} = \mathbf{B}'^s_f + \mathbf{B}'^n_f \quad (Ap4C.9)$$

es decir, la matriz de deformación por flexión puede descomponerse como la suma de la matriz de deformación por aportación de los giros tangenciales más la matriz de deformación por aportación de los giros normales. A su vez la matriz de deformación debido a los giros normales puede descomponerse de la siguiente forma:

$$\mathbf{B}'^n_f = \mathbf{B}'_f \Gamma_{ij} + \mathbf{B}'_f \Gamma_{jk} + \mathbf{B}'_f \Gamma_{ik} \quad (Ap4C.10)$$

En donde cada una de las matrices de (Ap4C.10), se construyen de acuerdo con:

$$\mathbf{B}'_f \Gamma_{ij} = \frac{1}{A^{(e)}} \begin{bmatrix} \alpha_{ij} y'_{12}{}^2 f_{23} & \alpha_{ij} y'_{12}{}^2 f_{31} & \alpha_{ij} y'_{12}{}^2 f_{12} \\ \alpha_{ij} x'_{12}{}^2 f_{23} & \alpha_{ij} x'_{12}{}^2 f_{31} & \alpha_{ij} x'_{12}{}^2 f_{12} \\ -2\alpha_{ij} x'_{12} y'_{12} f_{23} & -2\alpha_{ij} x'_{12} y'_{12} f_{31} & -2\alpha_{ij} x'_{12} y'_{12} f_{12} \\ \beta_{ij} y'_{12}{}^2 i_{23}^{(a)} & \beta_{ij} y'_{12}{}^2 i_{31}^{(a)} & \beta_{ij} y'_{12}{}^2 i_{12}^{(a)} & 0 & \dots \\ \beta_{ij} x'_{12}{}^2 i_{23}^{(a)} & \beta_{ij} x'_{12}{}^2 i_{31}^{(a)} & \beta_{ij} x'_{12}{}^2 i_{12}^{(a)} & 0 & \dots \\ -2\beta_{ij} x'_{12} y'_{12} i_{23}^{(a)} & -2\beta_{ij} x'_{12} y'_{12} i_{31}^{(a)} & -2\beta_{ij} x'_{12} y'_{12} i_{12}^{(a)} & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (Ap4C.11)$$

$$\mathbf{B}'_f \Gamma_{jk} = \frac{1}{A^{(e)}} \begin{bmatrix} \alpha_{ij} y'_{23}{}^2 g_{23} & \alpha_{ij} y'_{23}{}^2 g_{31} & \alpha_{ij} y'_{23}{}^2 g_{12} \\ \alpha_{ij} x'_{23}{}^2 g_{23} & \alpha_{ij} x'_{23}{}^2 g_{31} & \alpha_{ij} x'_{23}{}^2 g_{12} \\ -2\alpha_{ij} x'_{23} y'_{23} g_{23} & -2\alpha_{ij} x'_{23} y'_{23} g_{31} & -2\alpha_{ij} x'_{23} y'_{23} g_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & \beta_{ij}y'_{23}{}^2 i_{23}^{(b)} & \beta_{ij}y'_{23}{}^2 i_{31}^{(b)} & \beta_{ij}y'_{23}{}^2 i_{12}^{(b)} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \beta_{ij}x'_{23}{}^2 i_{23}^{(b)} & \beta_{ij}x'_{23}{}^2 i_{31}^{(b)} & \beta_{ij}x'_{23}{}^2 i_{12}^{(b)} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & -2\beta_{ij}x'_{23}y'_{23}i_{23}^{(b)} & -2\beta_{ij}x'_{23}y'_{23}i_{31}^{(b)} & -2\beta_{ij}x'_{23}y'_{23}i_{12}^{(b)} & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (Ap4C.12)$$

$$\mathbf{B}'_f \Gamma_{ik} = \frac{1}{A^{(e)}} \begin{bmatrix} \alpha_{ij}y'_{13}{}^2 h_{23} & \alpha_{ij}y'_{13}{}^2 h_{31} & \alpha_{ij}y'_{13}{}^2 h_{12} \\ \alpha_{ij}x'_{13}{}^2 h_{23} & \alpha_{ij}x'_{13}{}^2 h_{31} & \alpha_{ij}x'_{13}{}^2 h_{12} \\ -2\alpha_{ij}x'_{13}y'_{13}h_{23} & -2\alpha_{ij}x'_{13}y'_{13}h_{31} & -2\alpha_{ij}x'_{13}y'_{13}h_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & 0 & \beta_{ij}y'_{13}{}^2 i_{23}^{(c)} & \beta_{ij}y'_{13}{}^2 i_{31}^{(c)} & \beta_{ij}y'_{13}{}^2 i_{12}^{(c)} \\ \dots & 0 & \beta_{ij}x'_{13}{}^2 i_{23}^{(c)} & \beta_{ij}x'_{13}{}^2 i_{31}^{(c)} & \beta_{ij}x'_{13}{}^2 i_{12}^{(c)} \\ \dots & 0 & -2\beta_{ij}x'_{13}y'_{13}i_{23}^{(c)} & -2\beta_{ij}x'_{13}y'_{13}i_{31}^{(c)} & -2\beta_{ij}x'_{13}y'_{13}i_{12}^{(c)} \end{bmatrix} \quad (Ap4C.13)$$

donde:

$$x'_{ij} = x'_i - x'_j \quad y'_{ij} = y'_i - y'_j$$

$$i_{ij}^{(k)} = \frac{x'_{ij}{}^{(k)}}{2l_{ij}A^{(k)}} \quad k = (a), (b), (c)$$

$$f_{ij} = \frac{x'_{ij}x'_{12} + y'_{ij}y'_{12}}{2l_{12}^2 A^{(e)}}$$

$$g_{ij} = \frac{x'_{ij}x'_{23} + y'_{ij}y'_{23}}{2l_{23}^2 A^{(e)}}, \quad h_{ij} = \frac{x'_{ij}x'_{31} + y'_{ij}y'_{31}}{2l_{31}^2 A^{(e)}} \quad (Ap4C.14)$$

la matriz de deformación por giros tangenciales  $\mathbf{B}'^s_f$ , se expresará por:

$$\mathbf{B}'^s_f = \frac{1}{A^{(e)}} \begin{bmatrix} d_{12} - d_{31} & d_{23} - d_{12} & d_{31} - d_{23} & 0 & \dots & 0 \\ d_{31} - d_{12} & d_{12} - d_{23} & d_{23} - d_{31} & 0 & \dots & 0 \\ e_{31} - e_{12} & e_{12} - e_{23} & e_{23} - e_{31} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 12} \quad (Ap4C.15)$$

donde:

$$d_{ij} = \frac{x'_{ij}y'_{ij}}{l_{ij}^2}, \quad e_{ij} = \frac{x'_{ij}{}^2 - y'_{ij}{}^2}{l_{ij}^2} \quad (Ap4C.16)$$

en las expresiones anteriores puede observarse que en las matrices de deformación debido al giro normal, los valores no nulos de cada una de sus posiciones



fila-columna corresponden a las posiciones asociadas a grados de libertad traslacionales del elemento (e) y de su adyacente, así por ejemplo, si se considera la matriz de deformación por giro normal sobre el borde  $ij$  de ecuación (Ap4C.11), sobre el lado  $ij$  común a los elementos (e) y (a) (ver la Figura 4.9), solo intervienen los vectores de desplazamiento  $\mathbf{w}^{(e)}$  y  $\mathbf{w}^{(a)}$ , es decir:

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{f(a)-(e)}^{(e)} = [\mathbf{B}'_f \Gamma_{ij} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]_{3 \times 12} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{(e)} \\ \mathbf{w}^{(a)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{12 \times 1} \quad (\text{Ap4C.17})$$

de esta forma, es posible evaluar explícitamente la matriz de deformación por flexión para este nuevo elemento. Con el consecuente beneficio desde el punto de vista de la programación de las expresiones resultantes, ya sea de las tensiones elásticas predictoras o del vector de fuerzas internas.

En las expresiones anteriores, hemos hecho uso en reiteradas ocasiones del área del elemento  $A^{(e)}$ , que en el caso de elementos triangulares de lados rectos, es igual a  $\frac{1}{2}(x'_{12}y'_{31} - x'_{31}y'_{21})$ . De las relaciones (Ap4C.11), (Ap4C.12) y (Ap4C.13), se observa que las matrices de deformación por flexión son independientes de las coordenadas naturales  $\alpha, \beta$  y contienen solamente términos conocidos, pudiendo de esta forma evaluarse explícitamente cada una de ellas.

#### A.4C.4 Matriz de deformación por membrana: $\mathbf{B}'_m$

De acuerdo con la ecuación (4.86), puede obtenerse una expresión explícita para la matriz de deformación por membrana. La cual tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{B}'_m^{(e)} = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} y'_{23} & y'_{31} & y'_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x'_{32} & x'_{13} & x'_{21} \\ x'_{32} & x'_{13} & x'_{21} & y'_{23} & y'_{31} & y'_{12} \end{bmatrix}_{3 \times 6} \quad (\text{Ap4C.18})$$

en donde  $x'_{ij}$  e  $y'_{ij}$  se definen por las ecuaciones (Ap4C.14).

### A.4C.5 Matriz de transformación de variables globales a locales

La matriz de transformación que permite relacionar las variables nodales locales con las globales, se define por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda^{(e)}_{x'xyz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(e)}_{x'xyz} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(e)}_{x'xyz} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^{(e)}_{y'xyz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(e)}_{y'xyz} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(e)}_{y'xyz} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^{(e)}_{z'xyz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(e)}_{z'xyz} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(e)}_{z'xyz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(a)}_{z'xyz} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^{(a)}_{z'xyz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{(a)}_{z'xyz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(b)}_{z'xyz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(b)}_{z'xyz} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^{(b)}_{z'xyz} & 0 \\ \lambda^{(c)}_{z'xyz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(c)}_{z'xyz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^{(c)}_{z'xyz} \end{bmatrix}_{18 \times 18} \quad (\text{Ap4C.19})$$

con:

$$\lambda^{(k)}_{x'xyz} = [\lambda_{x'x}^{(k)} \quad \lambda_{x'y}^{(k)} \quad \lambda_{x'z}^{(k)}]_{1 \times 3}$$

$$\lambda^{(k)}_{y'xyz} = [\lambda_{y'x}^{(k)} \quad \lambda_{y'y}^{(k)} \quad \lambda_{y'z}^{(k)}]_{1 \times 3}$$

$$\lambda^{(k)}_{z'xyz} = [\lambda_{z'x}^{(k)} \quad \lambda_{z'y}^{(k)} \quad \lambda_{z'z}^{(k)}]_{1 \times 3}$$

$$k = (e), (a), (b), (c) \quad (\text{Ap4C.20})$$

es decir, la matriz de transformación  $\mathbf{T}$ , estará formada por los cosenos directores de los vectores de la base local de cada elemento ((e),(a),(b),(c)) respecto de la global.

## CAPÍTULO 5

# PROBLEMAS TRANSITORIOS CON GRANDES DEFORMACIONES ELASTOPLÁSTICAS.

### 5.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudia el comportamiento de la nueva formulación de lámina delgada *BST* desarrollada en el capítulo 4, en el contexto de problemas transitorios que ocurren a altas velocidades.

Para ello se procede a la implementación computacional de los nuevos elementos de lámina *BST* y *CST - DKT15*, describiendo el comportamiento elastoplástico del material mediante un modelo constitutivo hipoeelástico con tasa de tensiones Jaumann. La solución del sistema de ecuaciones de movimiento se aborda mediante un esquema de integración temporal del tipo explícito, en donde el movimiento de las partículas del sólido se describe mediante una formulación lagrangiana actualizada. La estimación del paso de tiempo crítico se realiza mediante el algoritmo de búsqueda de la frecuencia circular máxima del sistema discreto.

Se resuelven diferentes problemas de la dinámica estructural no lineal, en donde las respuestas obtenidas con la nueva formulación *BST* son comparadas con las soluciones dadas por el elemento de lámina *CST - DKT15*, con resultados experimentales<sup>[B-2]</sup> cuando son disponibles y resultados numéricos obtenidos por otros investigadores<sup>[B-1],[S-3],[S-4],[W-1]</sup>. En primer lugar se analiza el problema de una cúpula esférica sometida a una presión uniforme, estudiándose la respuesta en el tiempo del punto central de la cúpula para diferentes densidades de mallas. En segundo lugar se presenta el problema de un panel cilíndrico bajo carga impulsiva, en donde los resultados obtenidos son comparados con los experimentales<sup>[W-1]</sup>. Finalmente se presenta el problema de impacto entre dos tubos, estudiándose su respuesta durante el proceso de choque.

## 5.2 EJEMPLOS NUMÉRICOS

### 5.2.1 Cúpula esférica bajo carga impulsiva

En este ejemplo se estudia la respuesta dinámica elastoplástica no lineal de una cúpula esférica empotrada en su contorno sometida a una presión uniforme de 600 psi, la geometría y disposición de las cargas se presentan en la Figura 5.1. Las propiedades del material se definen de acuerdo con la Tabla 5.1:

Propiedades del material	
Módulo de elasticidad	$10.5 \times 10^6$ psi
Coefficiente de Poisson	0.33
Densidad	$2.45 \times 10^{-4}$ lbs - s <sup>2</sup> /in <sup>4</sup>
Tensión de fluencia	$24 \times 10^3$ psi
Módulo tangente	$0.21 \times 10^6$ psi

Tabla 5.1

Este problema ha sido resuelto por numerosos autores, empleando tanto códigos implícitos como explícitos<sup>[B-1],[W-1]</sup>. En el análisis de este ejemplo se han considerado tres densidades de mallas diferentes, Malla 1: 288 elementos, Malla 2: 512 elementos y Malla 3: 800 elementos ver la Figura 5.2, comparándose las respuestas obtenidas para el desplazamiento del punto central, tanto para el problema elástico con grandes desplazamientos como para el problema elastoplástico no lineal. Cabe señalar que debido a la simetría que presenta la lámina, sólo se ha estudiado un cuarto de ella.

En la Figura 5.3, se observa la respuesta elástica geoméricamente no lineal del punto central, para las distintas mallas estudiadas con la nueva formulación de lámina *BST*, considerando una discretización en el espesor de cuatro capas. A continuación en la Figura 5.4 se presenta la respuesta del punto central utilizando el elemento de lámina delgada *CST-DKT15*, considerando también una discretización en el espesor de cuatro capas.

Consideremos ahora, la respuesta elastoplástica no lineal para la misma estructura con el material obedeciendo el criterio de fluencia de von Mises. En este caso la respuesta para el desplazamiento del punto central se presenta en la Figura 5.5, en donde se considera una discretización de cuatro capas en el espesor. Antes de continuar es interesante estudiar la variación de la respuesta del punto central para la malla 2 considerando distintas discretizaciones a través del espesor. Se observa en la Figura 5.6 que con 5 capas la respuesta prácticamente no difiere de la observada con la discretización de 4 capas, en lo que sigue se considerará para este problema una discretización de 4 capas, cabe



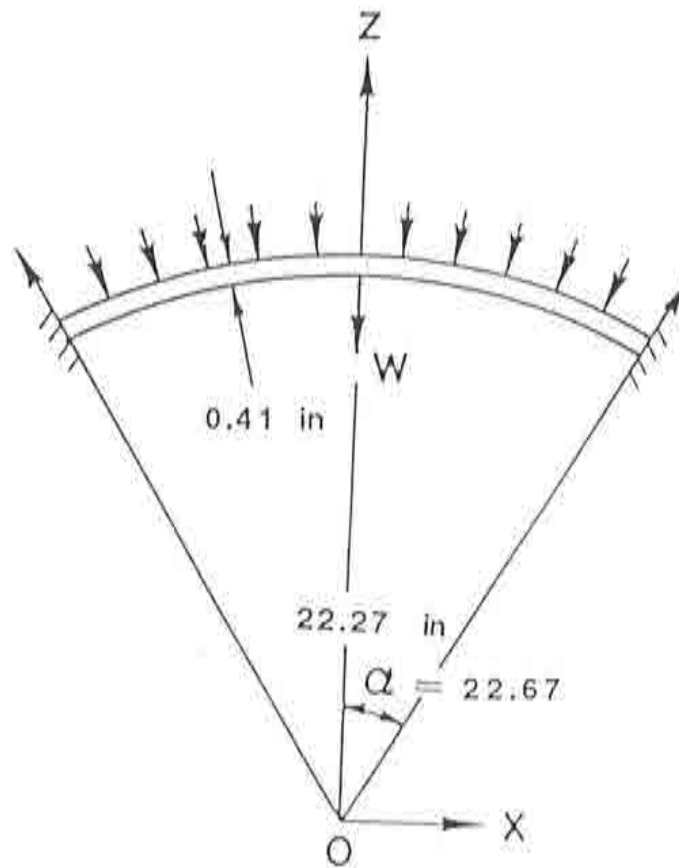


Figura 5.1 Constantes geométricas y disposición de las cargas en cúpula esférica

señalar que esta elección dependerá siempre del problema en particular bajo estudio.

En la Figura 5.7, se presenta las respuestas obtenidas con el nuevo elemento *BST*, comparada con el elemento de lámina delgada *CST - DKT15*. En las Tablas 5.2 y 5.3 se presenta la respuesta numérica para tres distintas configuraciones  $t = 2, 4, 6$  ms obtenidas utilizando el código Explícito Whams-3D<sup>[W-1]</sup> y la respuesta dada por Bathe et. al [B-1]. En la Figura 5.8 se visualiza la distribución de la deformación plástica efectiva en la configuración final. Finalmente en la Figura 5.9 se muestran las deformadas de la estructura para distintos instantes de tiempo.

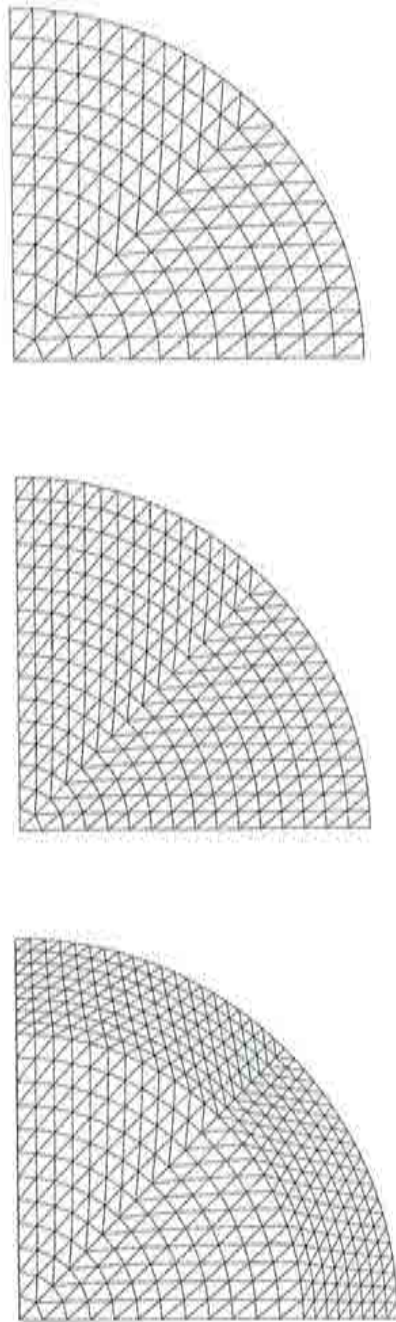


Figura 5.2 Densidades de mallas utilizadas, cúpula esférica. Malla 1, Malla 2, Malla 3.

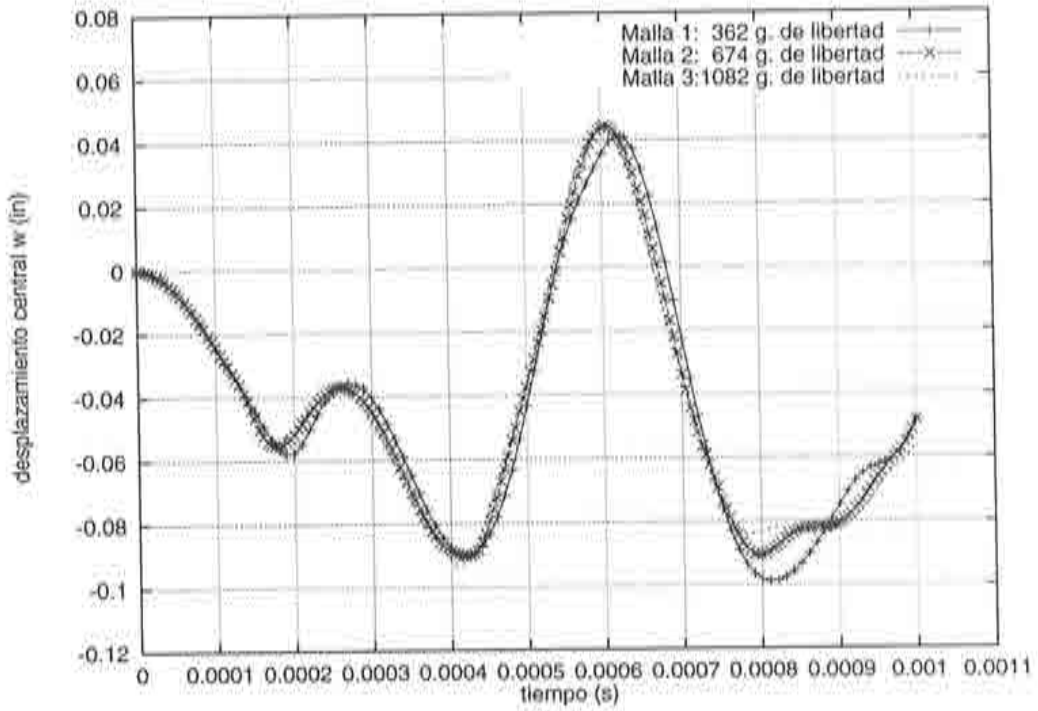


Figura 5.3 Respuesta dinámica geoméricamente no lineal del punto central, análisis de convergencia del elemento *BST*.

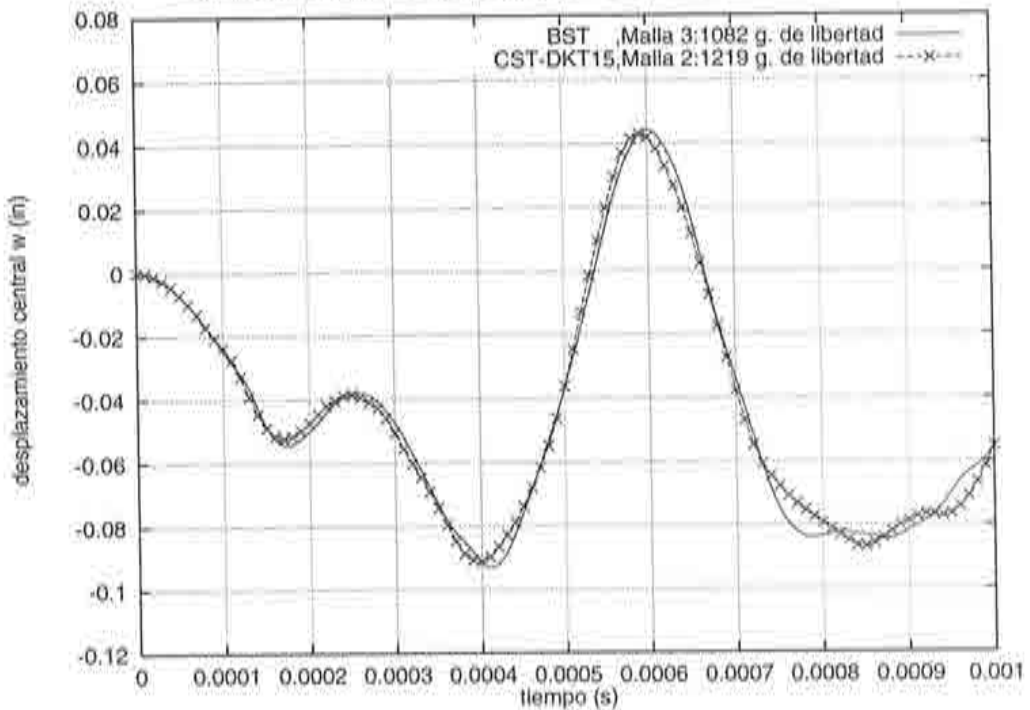


Figura 5.4 Comparación de respuestas geoméricamente no lineales del punto central, elementos *BST* y *CST - DKT15*.

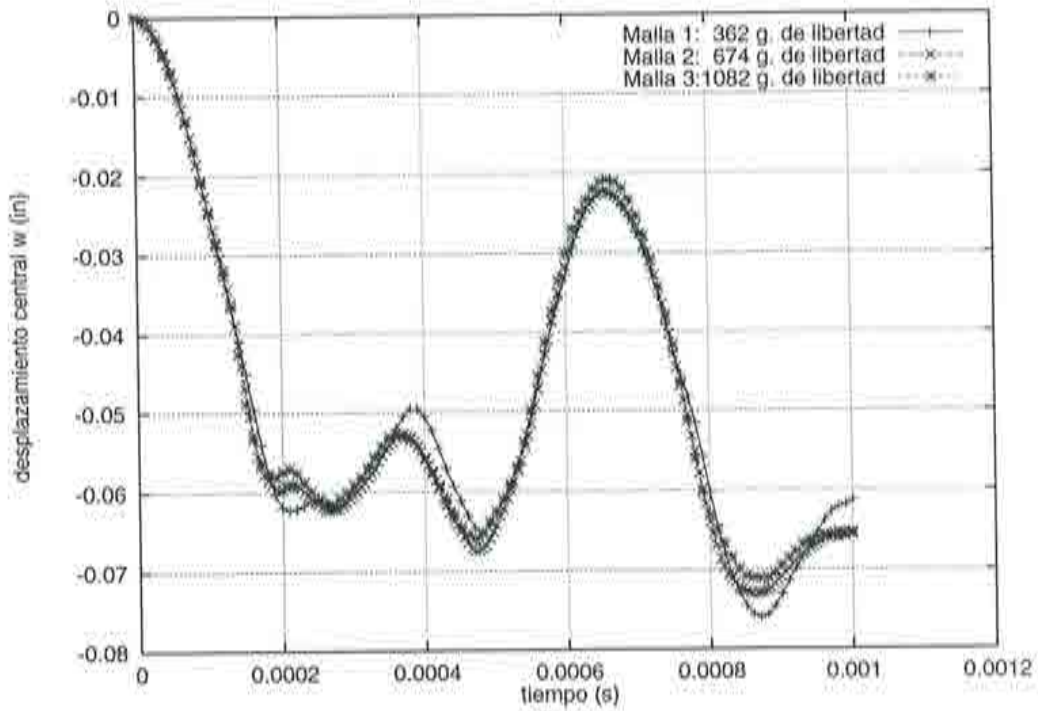


Figura 5.5 Resposta dinâmica elastoplástica geométrica não linear do ponto central, análise de convergência do elemento *BST*.

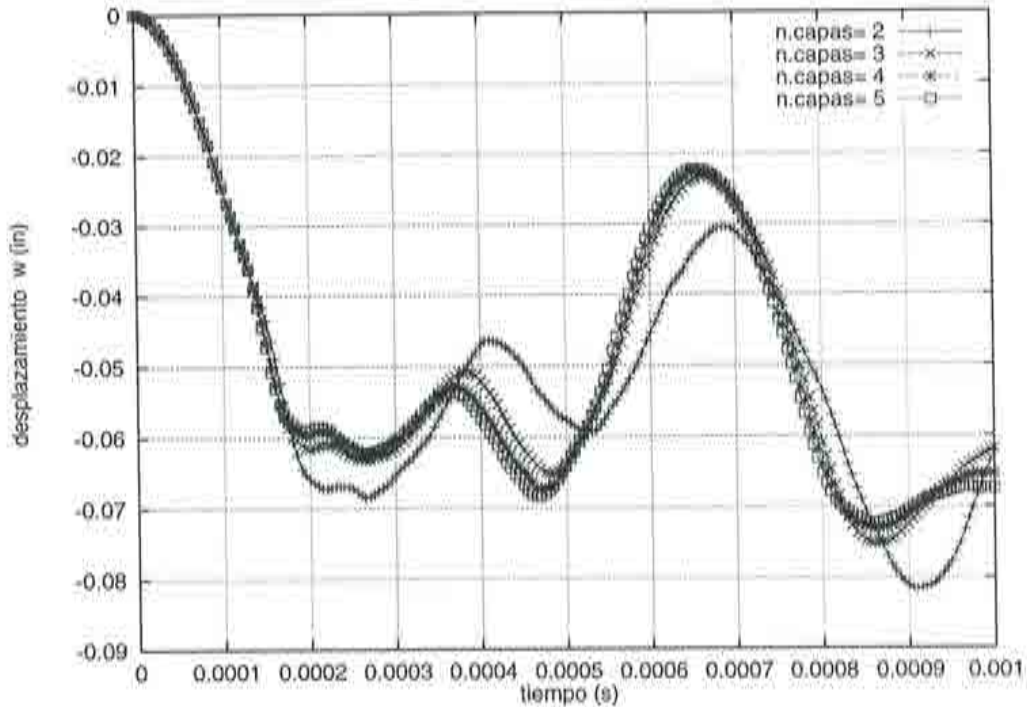


Figura 5.6 Resposta dinâmica elastoplástica geométrica não linear de Malla 2, considerando distintas discretizações no espessura, elemento *BST*.



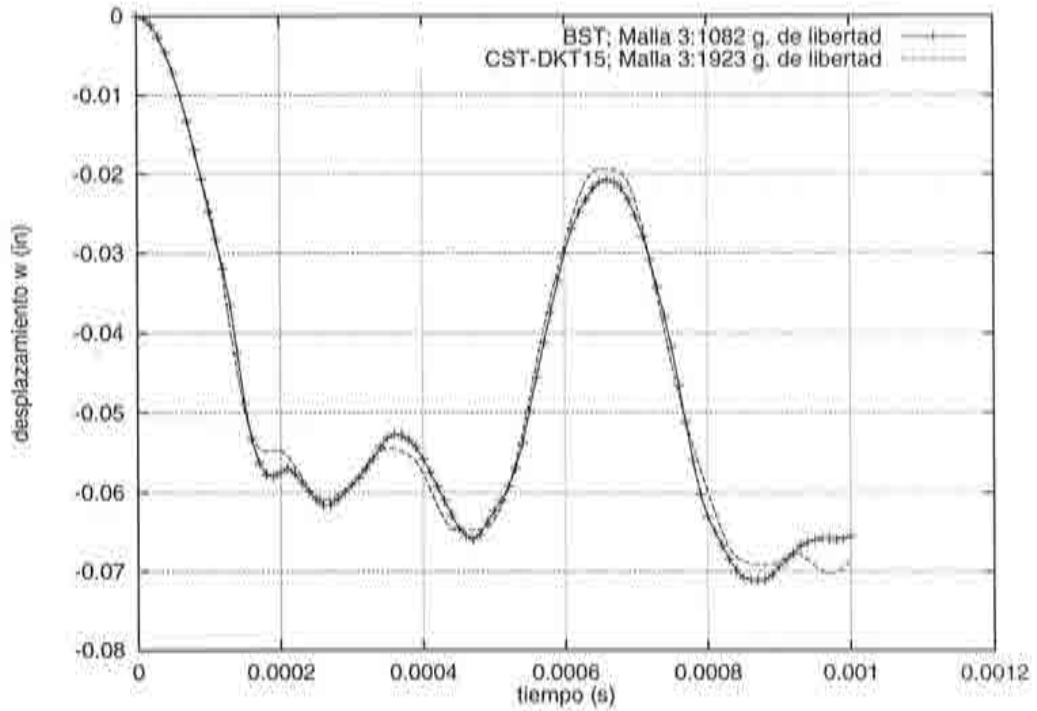


Figura 5.7 Comparación de respuestas elastoplásticas geoméricamente no lineales del punto central, elementos *BST*, *CST - DKT15*.

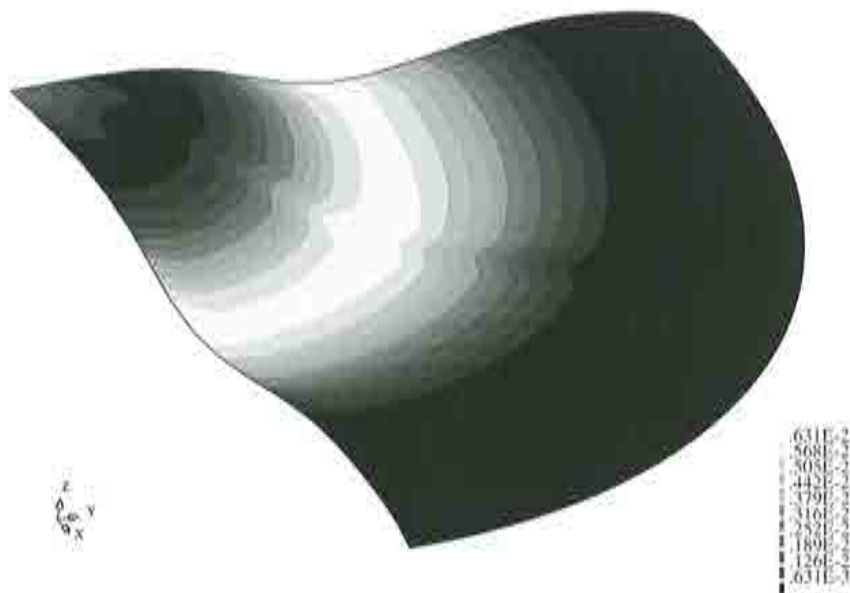


Figura 5.8 Distribución de la deformación plástica efectiva, en la configuración correspondiente al tiempo  $t = 1$  ms,

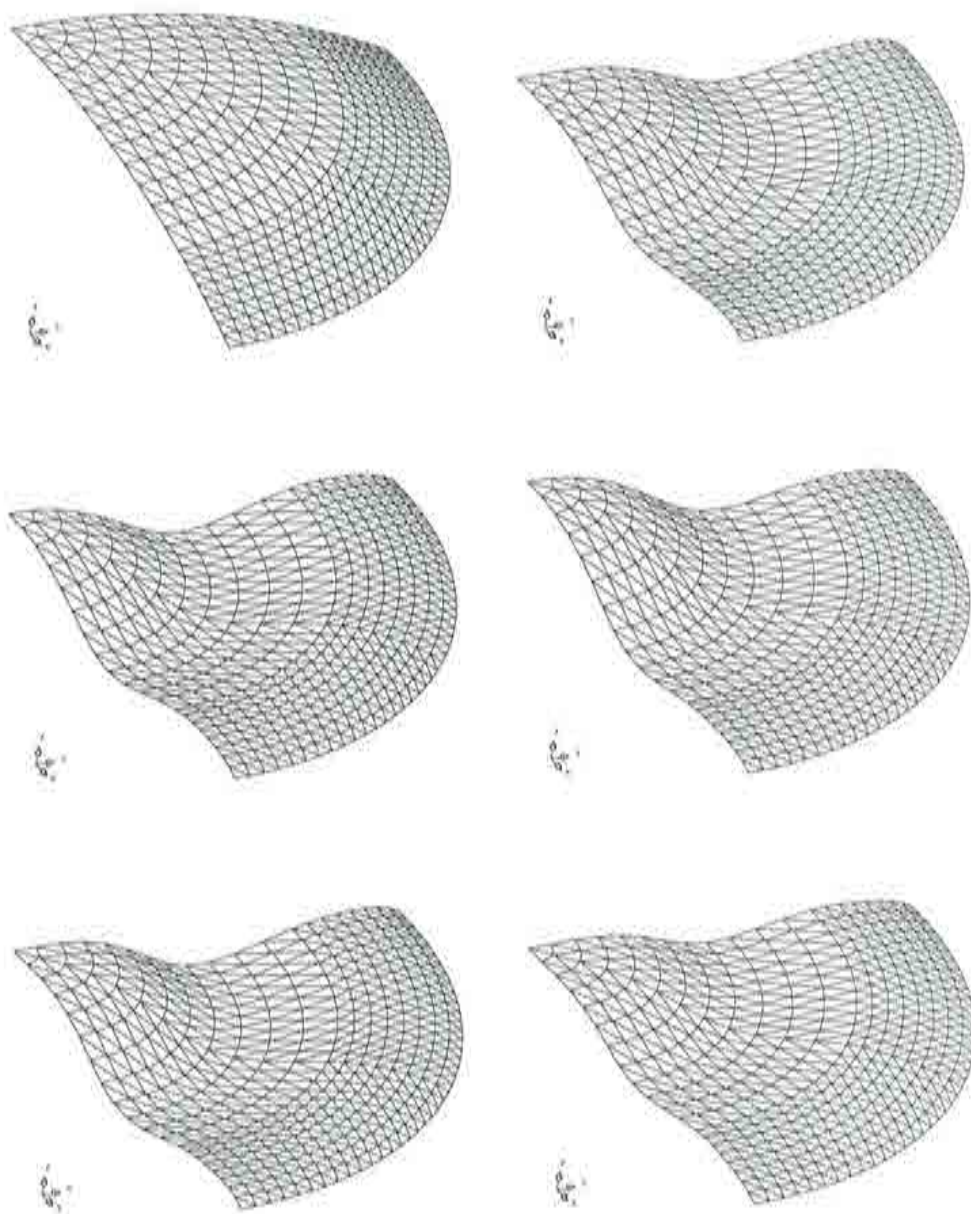


Figura 5.9 Deformadas para distintos instantes de tiempo,  $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$  ms. (amplificadas por 25)

CÓDIGO	w (in) t=0.2 ms	w (in) t=0.4 ms	w (in) t=0.6 ms
Este trabajo (BST)	-0.0500	-0.0915	0.0435
Este trabajo (CST-DKT15)	-0.0475	-0.0918	0.0420
WHAMS-3D <sup>[W-1]</sup>	-0.0466	-0.0905	0.0457
Bathe et al. <sup>[B-1]</sup>	-0.0466	-0.0800	0.0457

Tabla 5.2 Respuesta elástica geoméricamente no lineal, del punto central.

CÓDIGO	w (in) t=0.2 ms	w (in) t=0.4 ms	w (in) t=0.6 ms
Este trabajo (BST)	-0.0576	-0.0562	-0.0300
Este trabajo (CST-DKT15)	-0.0547	-0.0576	-0.0290
WHAMS-3D <sup>[W-1]</sup>	-0.0543	-0.0571	-0.0314
Bathe et al. <sup>[B-1]</sup>	-0.0580	-0.0619	-0.0361

Tabla 5.3 Respuesta elastoplástica geoméricamente no lineal, del punto central.

### 5.2.2 Panel cilíndrico bajo carga impulsiva

Un panel cilíndrico se carga impulsivamente, como se muestra en la Figura 5.10. Sólo la mitad del cilindro se estudia debido a la simetría que presenta. Para el análisis se consideraron dos mallas regulares, una con 192 elementos (Malla 1) y la otra con 768 elementos triangulares (Malla 2), ver la Figura 5.11 y Tabla 5.4. Las condiciones de contorno para el cilindro, son de apoyos rotulados en ambos extremos y de empotramiento sobre los lados paralelos al eje  $Z$ , las propiedades del material se definen en la Tabla 5.5:

MALLA	número de nodos	BST NGLT	CST-DKT15 NGLT	BST NGLA	CST-DKT15 NGLA
1: 6x12	119	357	595	226	427
2: 12x32	429	1287	2145	1023	1825

Tabla 5.4

donde  $NGLT$  representa el número de grados de libertad totales para la malla de elementos finitos y  $NGLA$  es el número de grados de libertad activos, es decir, el número de grados de libertad total menos el número de grados de libertad prescritos.

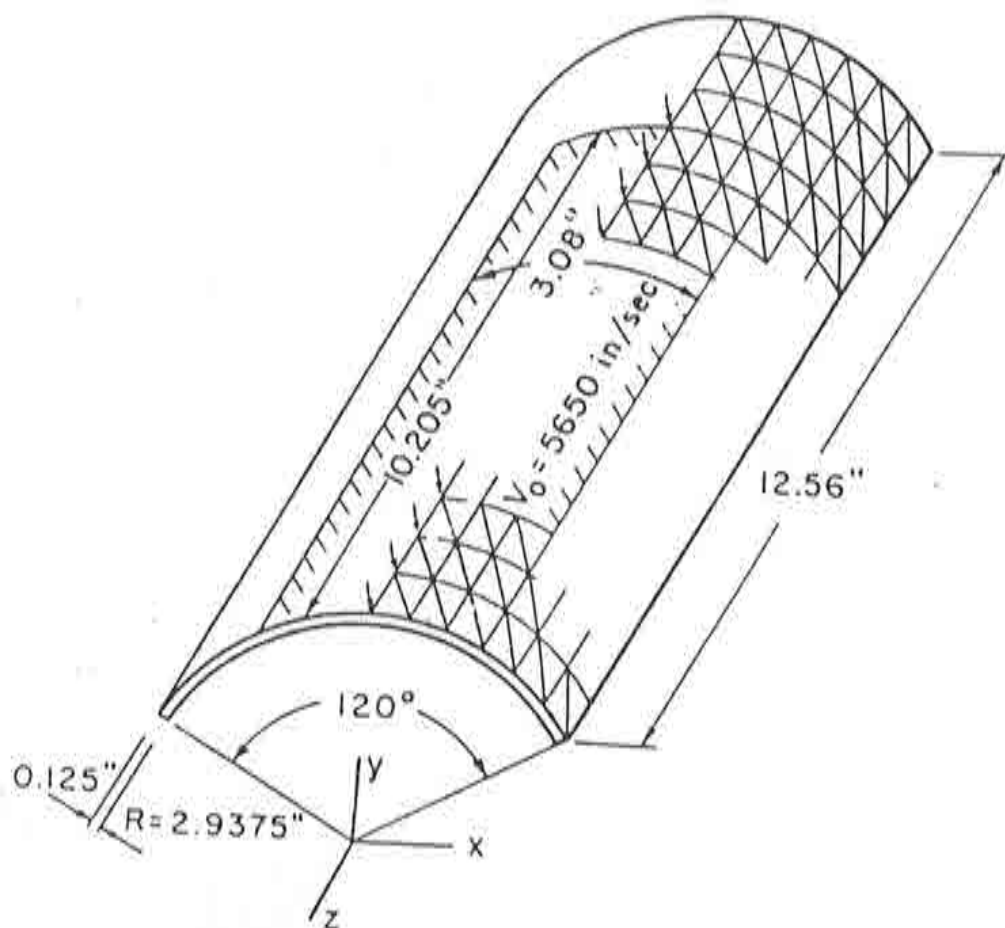


Figura 5.10 Panel cilíndrico: Constantes geométricas.

Propiedades del material	
Módulo de elasticidad	$10.5 \times 10^6$ psi
Coefficiente de Poisson	0.33
Densidad	$2.50 \times 10^{-4}$ lbs - s <sup>2</sup> /in <sup>4</sup>
Tensión de fluencia	$44 \times 10^3$ psi
Módulo tangente	0

Tabla 5.5

En la Figura 5.12 se presenta un análisis de la convergencia de la respuesta de un punto sobre el eje de simetría en  $z = 9.42$  in, considerando varias



discretizaciones a través del espesor (3, 4 y 6 capas) y la nueva formulación de lámina delgada. En donde se observa que con discretizaciones en el espesor mayores que 4 capas la respuesta no se altera, por lo tanto en los siguientes análisis se considerara una discretización de 4 capas.

En las Figuras 5.13 y 5.14, se presenta el análisis de la convergencia de la respuesta en desplazamientos para dos puntos ubicados sobre el eje de simetría en  $z = 9.42$  in y  $z = 6.28$  in, considerando tanto elementos del tipo *CST-DKT15* como *BST* y las discretizaciones definidas en la Tabla 5.4.

En la Figura 5.15, se presenta la comparación de los resultados obtenidos con respecto a los experimentales dados por Balmer y Witmer<sup>[B-2]</sup>. En las Figuras 5.16 y 5.17 se presenta el perfil de la sección transversal en  $z = 6.28$  in y el de la sección en el eje de simetría  $x = 0$ , para la configuración final al tiempo  $t = 1.0$  ms comparándose en ambos casos los perfiles resultantes con el nuevo elemento *BST*, con los obtenidos experimentalmente. Finalmente en la Figura 5.18, se presenta la deformada real de la estructura para la configuración final al tiempo  $t = 1.0$  ms, considerando elementos del tipo *BST*.

De acuerdo con las Figuras 5.13, 5.14, 5.15 y Tabla 5.6, el elemento *BST* presenta un mejor comportamiento que el elemento *CST-DKT15*, el tener una velocidad de convergencia más alta y necesitar de menos grados de libertad para obtener una respuesta más cercana a la experimental. En las Figuras 5.16 y 5.17 se observa la buena correlación con los resultados experimentales que se obtiene para la deformada final del panel cilíndrico.

CÓDIGO / Malla	desplazamiento v z=6.28 in	desplazamiento v z=9.42 in
Este trabajo (BST), 16x32	-1.213	-0.574
Este trabajo (CST-DKT15), 16x32	-1.160	-0.553
Stolarski et al. <sup>[S-3]</sup> , 16x32	-1.183	-0.530
Experimental <sup>[B-2]</sup>	-1.280	-0.700

**Tabla 5.6** Desplazamientos, para  $t = 0.4$  ms.

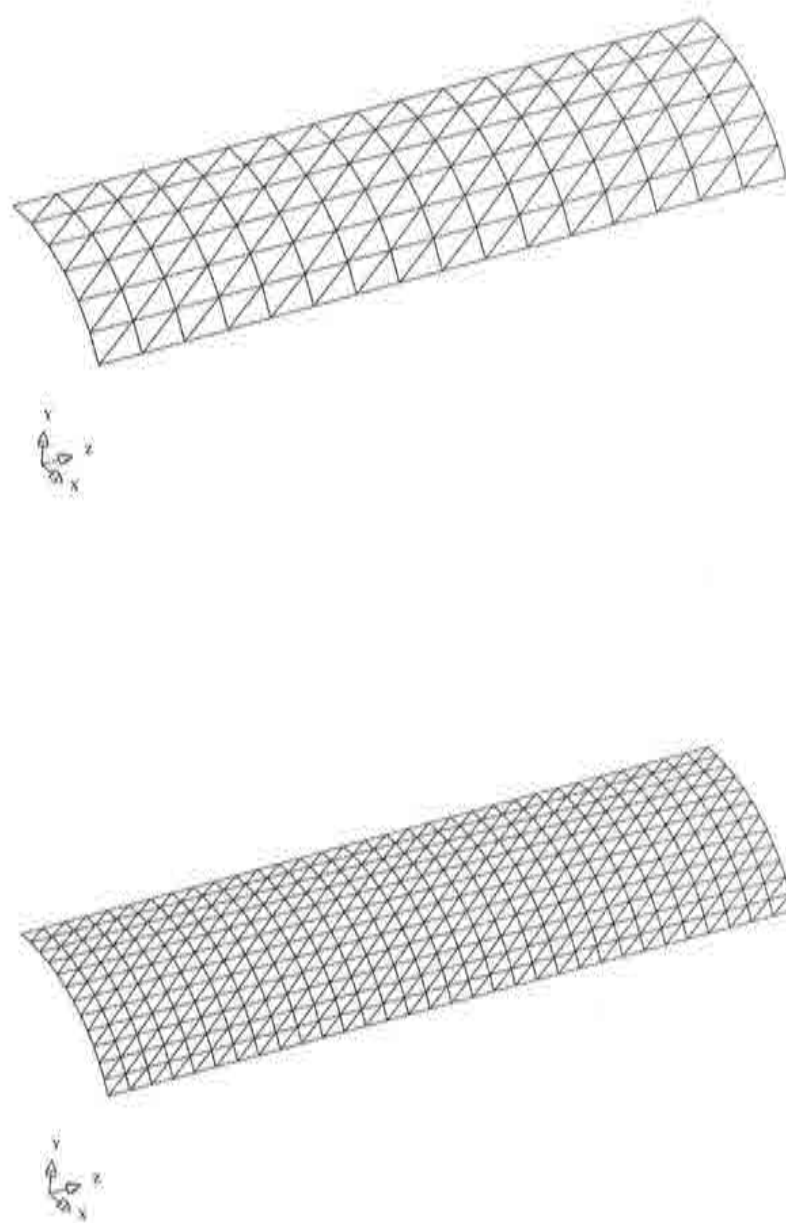


Figura 5.11 Densidades de mallas utilizadas, panel cilíndrico. Malla 1, Malla 2.

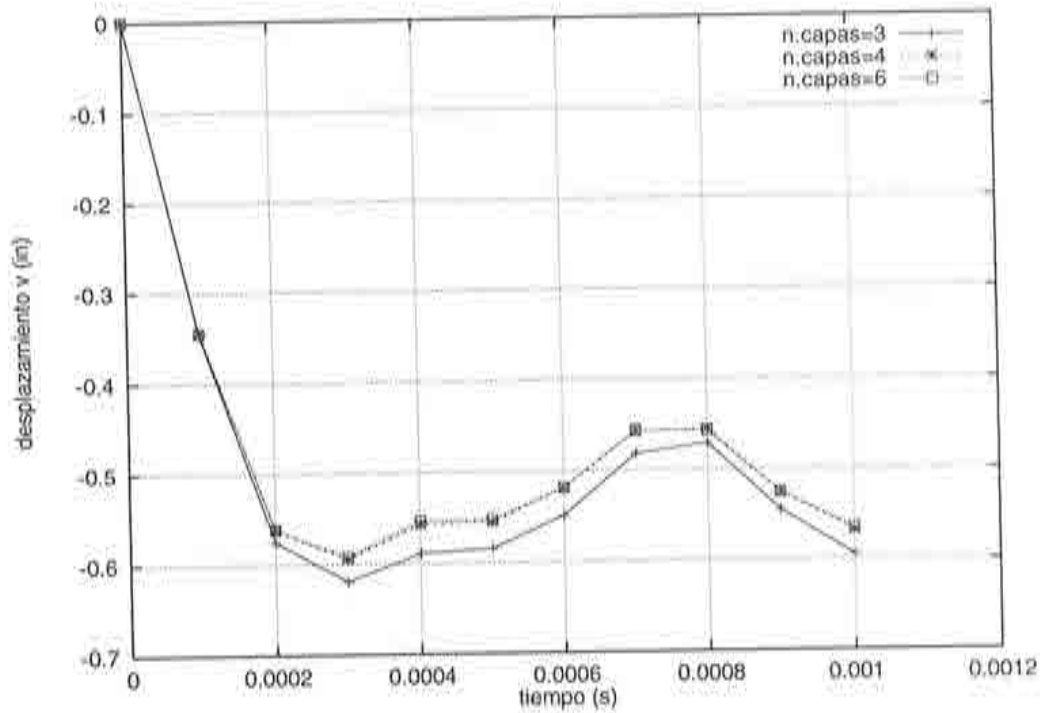


Figura 5.12 Respuesta dinámica elastoplástica geoméricamente no lineal de Malla 1 en  $z = 9.42$  in, considerando distintas discretizaciones en el espesor. Elemento *BST*

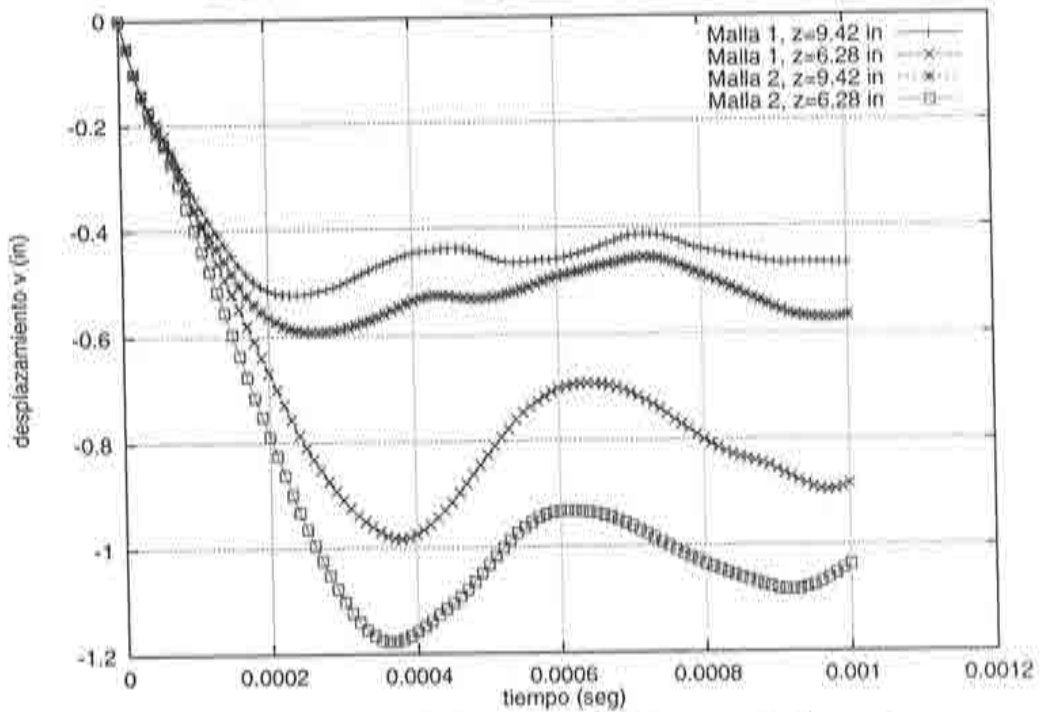


Figura 5.13 Respuesta dinámica elastoplástica geoméricamente no lineal de los puntos ubicados en  $z = 6.28$  in y  $z = 9.42$  in. Análisis de convergencia del elemento *CST - DKT15*.

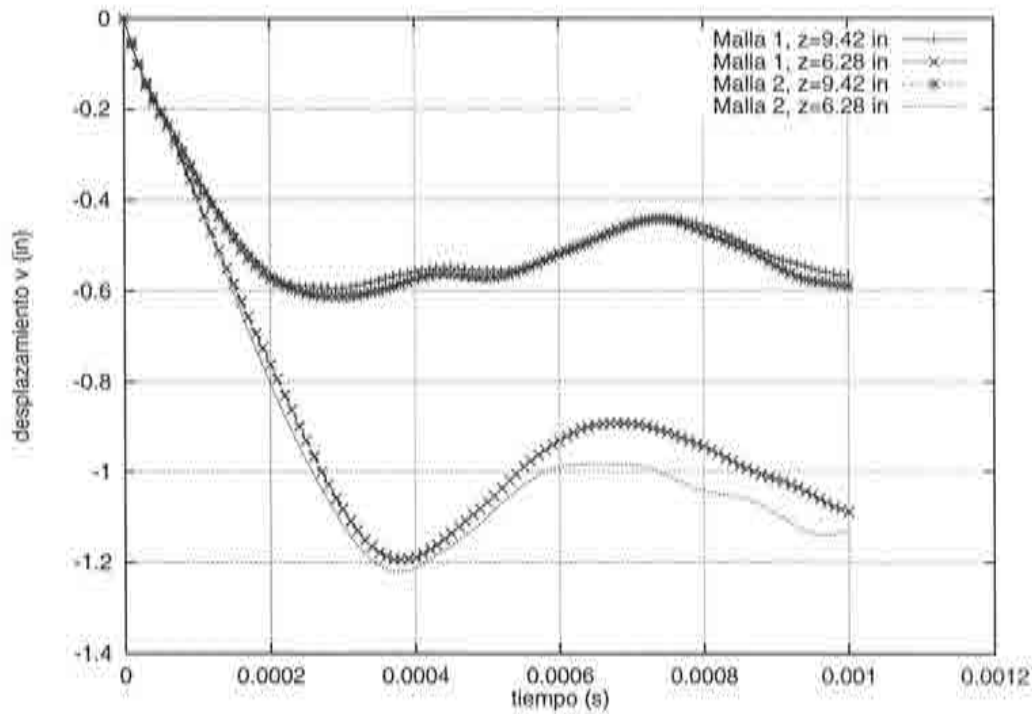


Figura 5.14 Respuesta dinámica elastoplástica geoméricamente no lineal de los puntos ubicados en  $z = 6.28$  in y  $z = 9.42$  in. Análisis de convergencia del elemento *BST*.

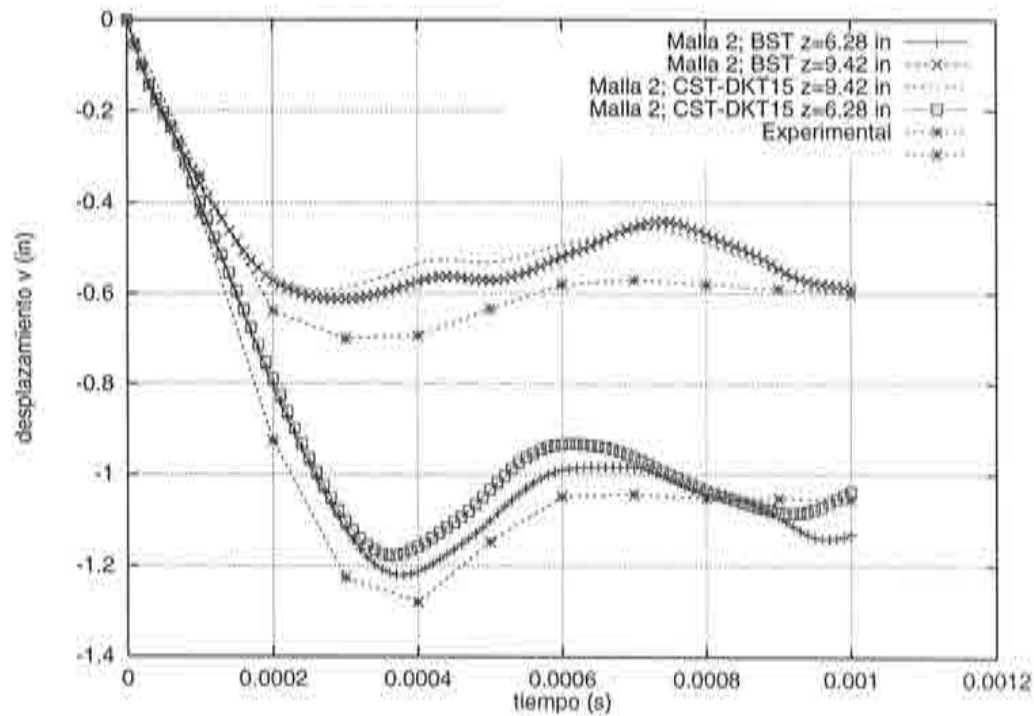


Figura 5.15 Comparación de respuestas con respecto a valores experimentales<sup>[B-2]</sup>.



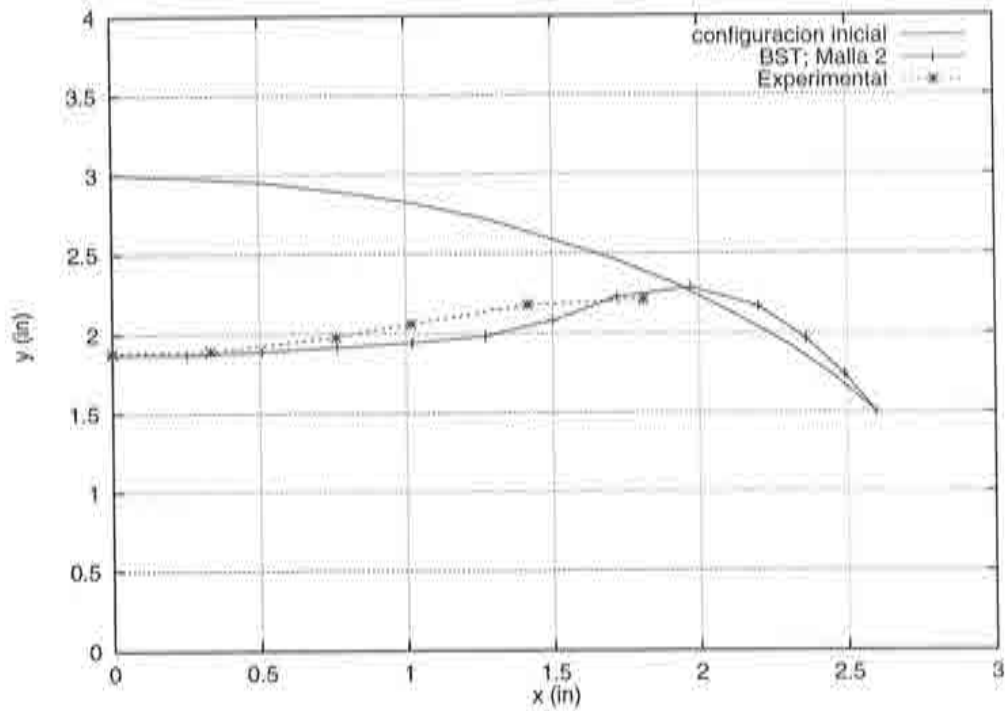


Figura 5.16 Deformada final del panel cilíndrico, en sección transversal ubicada en  $z = 6.28$  in.

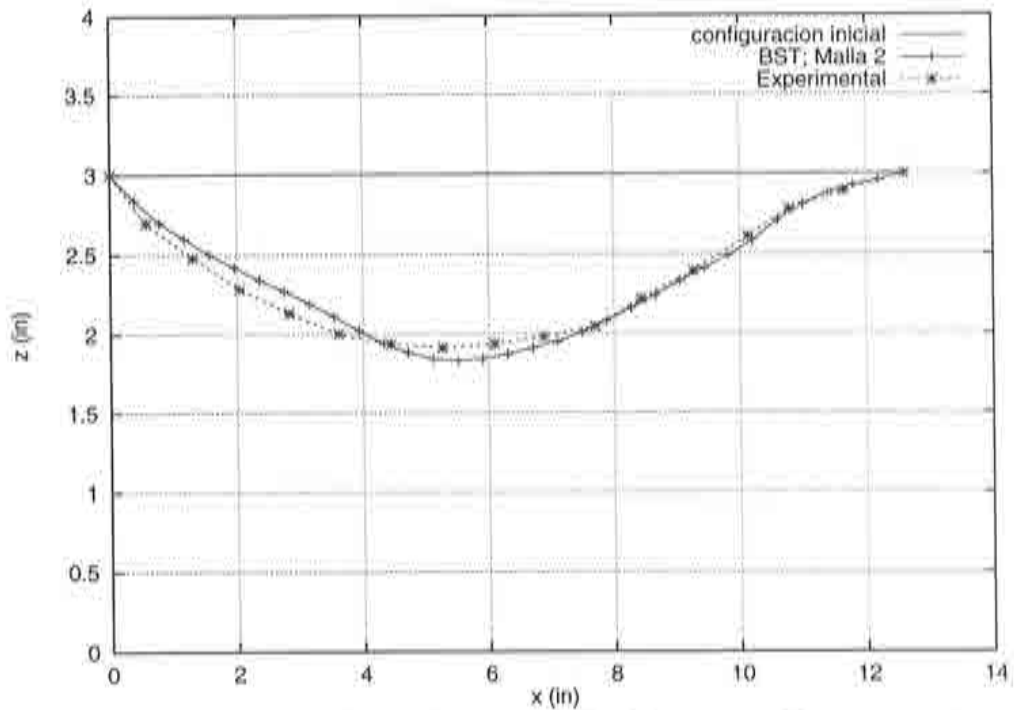


Figura 5.17 Deformada final del panel cilíndrico, en sección transversal sobre el eje de simetría  $x = 0$  in.

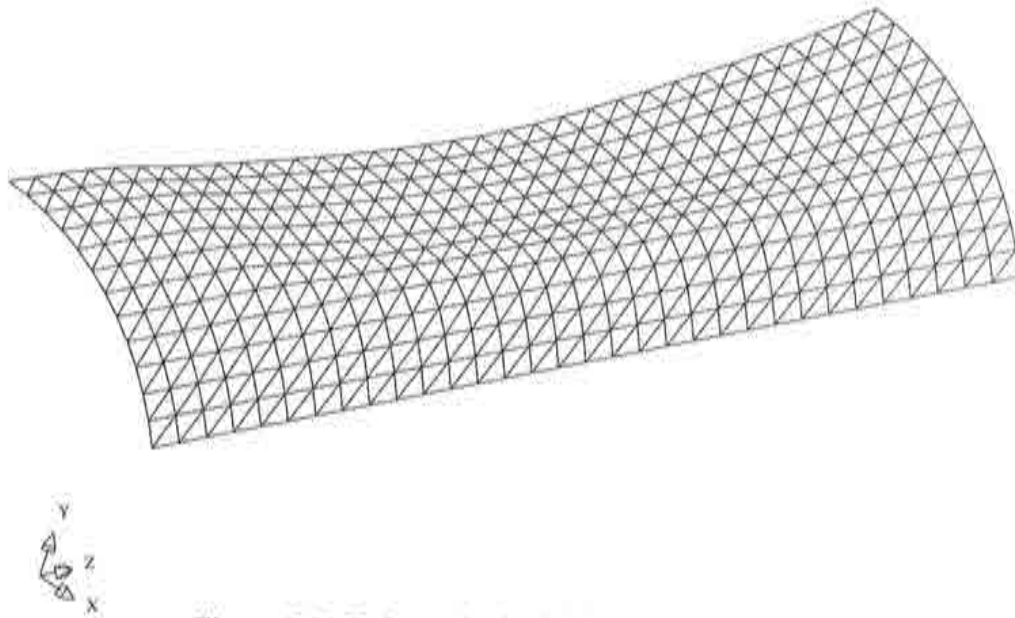


Figura 5.18 Deformada final del panel cilíndrico

### 5.2.3 Impacto entre dos tubos

En este ejemplo, se estudia la respuesta en desplazamiento de dos cilindros impactando uno contra otro. La geometría de los tubos antes del impacto se muestra en la Figura 5.19, y las propiedades del material se presentan en la Tabla 5.7:

Propiedades del material	
Módulo de elasticidad	200 GPa
Coefficiente de Poisson	0.30
Densidad	7840 $kg/m^3$
Tensión de fluencia	200 MPa
Módulo tangente	0

Tabla 5.7

En la Figura 5.20 puede verse la discretización de elementos finitos utilizada, la cual corresponde a dos mallas de 300 elementos triangulares con un total de 330 nodos (990 grados de libertad el caso del elemento *BST* y 1650 para el elemento *CST - DKT15*), considerando una discretización de cuatro capas a través del espesor en ambas formulaciones.

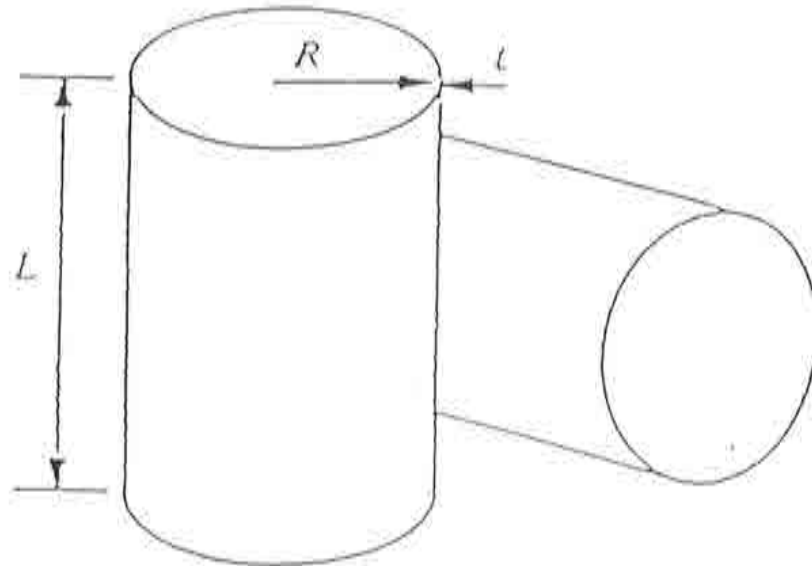


Figura 5.19 Impacto entre dos tubos. Geometría de los tubos  $L = 0.46$  m,  $R = 0.1$  m,  $t = 0.003$  m y  $V_0 = 30$  m/s

En la Figura 5.21 se presenta el desplazamiento experimentado por el nodo 171, situado diametralmente opuesto al nodo de contacto inicial entre los tubos, comparándose la respuesta obtenida con elementos  $CST - DKT15$ , con elementos de lámina cuadriláteros basados en la teoría de Simo<sup>[S-1],[S-2]</sup> e implementados en el código STAMPACK<sup>[S-4]</sup> y con la respuesta dada por Zhong<sup>[Z-1]</sup>. Finalmente en la Figura 5.22 se presenta la animación del proceso de choque entre ambos tubos.

De acuerdo con la Figura 5.21, se observa que transcurrido un tiempo de 5.5 ms a partir del impacto inicial los tubos comienzan a separarse (rebote), puesto que el desplazamiento para tiempos superiores a 5.5 ms es decreciente. Lo anterior queda de manifiesto en la Figura 5.22 en donde se presenta el proceso de animación del choque, observándose que en la configuración correspondiente a 8 ms se produce un despegue de las superficies de contacto superior e inferior del tubo horizontal. Es interesante destacar que en este caso el elemento de lámina  $CST - DKT15$  para la densidad de malla adoptada (ver Figura 5.20) no captura adecuadamente el efecto del rebote.

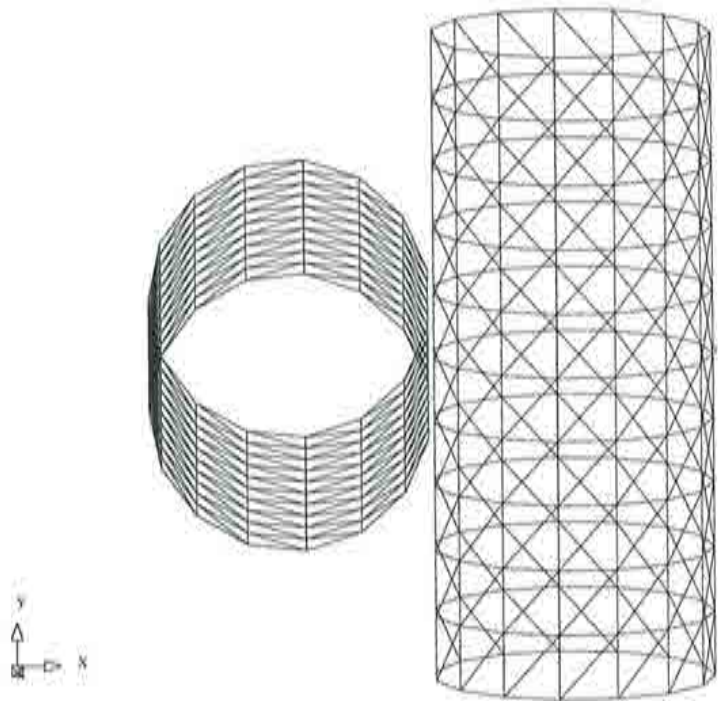


Figura 5.20 Geometría y discretización antes del impacto.

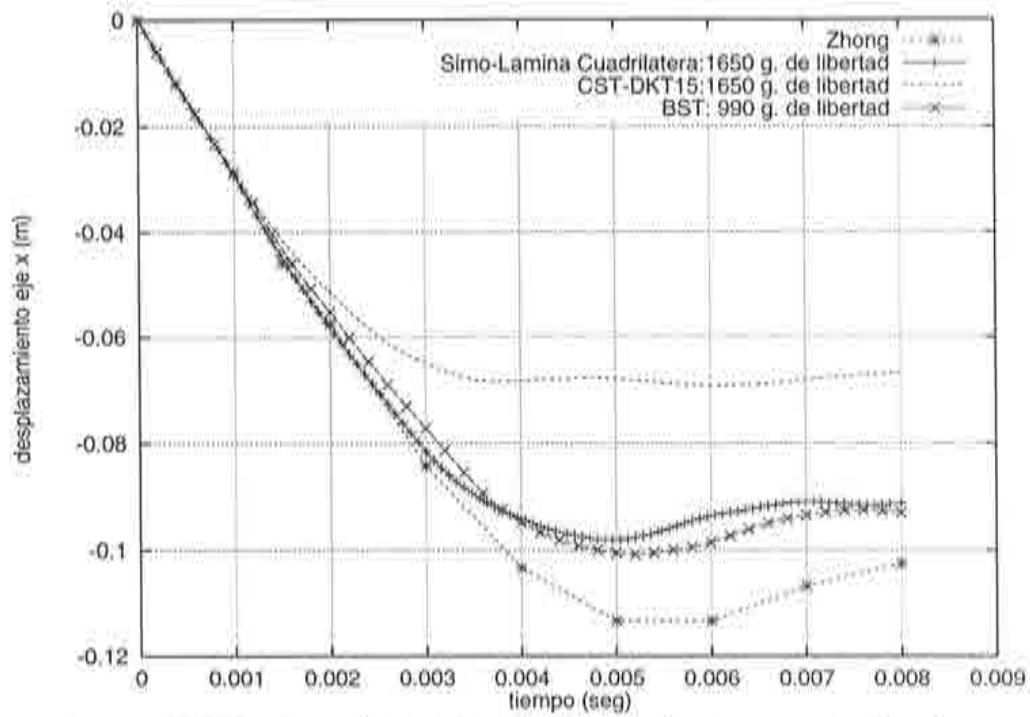


Figura 5.21 Desplazamiento del nodo diametralmente opuesto al nodo de contacto inicial



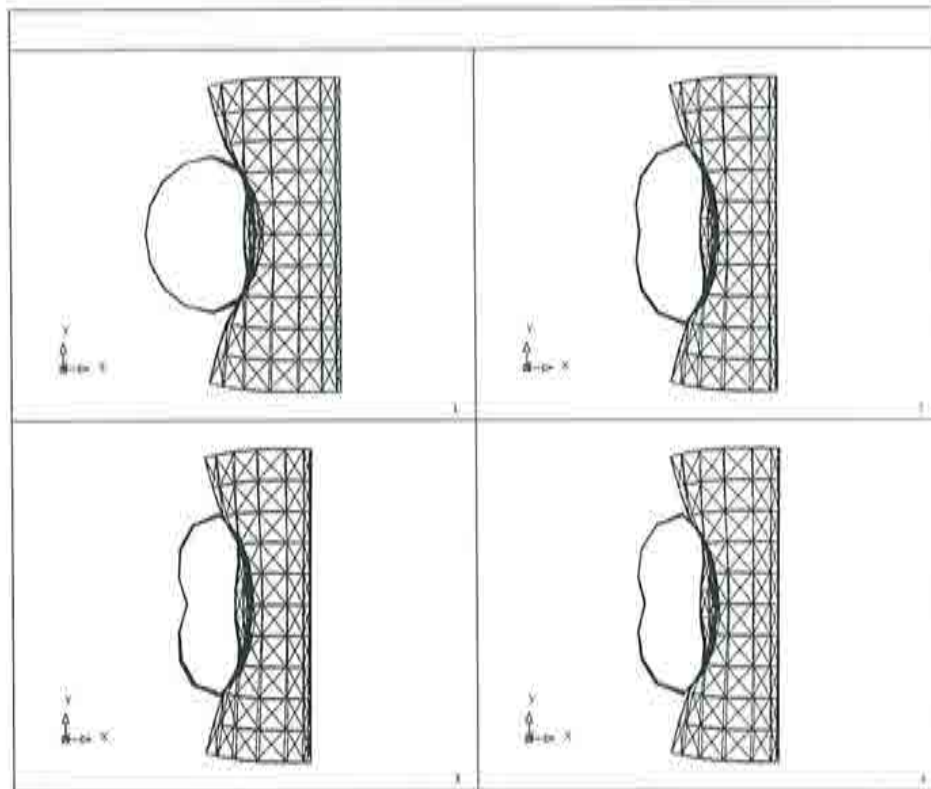


Figura 5.22 Configuraciones deformadas en  $t = 2, 4, 6$  y  $8$  ms.

### 5.3. CONCLUSIONES

En este capítulo se ha estudiado el comportamiento del nuevo elemento de lámina *BST*, en problemas dinámicos no lineales que ocurren a altas velocidades.

Los resultados obtenidos concuerdan muy bien con los disponibles en la literatura, lo que indica que el elemento tiene grandes posibilidades de utilización en situaciones más complejas de simulación numérica de problemas transitorios con grandes deformaciones elastoplásticas.

Desde el punto de vista de la convergencia de la solución numérica, podemos destacar que este nuevo elemento da iguales o mejores velocidades de convergencia como se demuestra en Figuras 5.13 y 5.15 (problema de panel cilíndrico) y Figura 5.21 (problema de impacto de tubos) que con respecto al elemento de lámina delgada *CST - DKT15*.

Cabe señalar que en los problemas estudiados en el presente trabajo, se ha encontrado (ver Figuras 5.6 y 5.12) que una discretización en el espesor de 4 capas, permite obtener buenos resultados a un bajo coste computacional.

## 5.4. REFERENCIAS

- [B-1] **Bathe, K.J., Ramm, E. and Wilson E.L.** -*Finite Element Formulation for Large Deformation Dynamic Analysis*, - Int. J. Num. Methods in Engng., Vol 9, pp. 353-386, 1975.
- [B-2] **Balmer, H.A. and Witmer, E.A.**, -*Theoretical experimental correlation of large dynamic and permanent deformation of impulsively loaded simple structures* - Air Force Flight Dynamic Lab. Rep. FDQ-TDR-64-108, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1964.
- [S-1] **Simo, J.C. and Fox, D.D.**, -*On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part I: Formulation and Optimal Parametrization* -Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg. Vol 72, pp. 267-304, 1989.
- [S-2] **Simo, J.C., Fox, D.D. and Rifai, M.S.**, -*On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part III: Computational Aspects of The Nonlinear Theory* -Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg. Vol 79, pp. 21-70, 1990.
- [S-3] **Stolarski, H., Belytschko, T. and Carpenter, N.**, -*A Simple Triangular Curved Shell element.*, -Eng. Comput., Vol 1, pp. 210-218, 1984.
- [S-4] **STAMPAK**, -*An Explicit Finite Element Program for Analysis of Sheet Stamping Problems. User's Manual, Version 1.0* -Technical Report N<sup>o</sup>um. IT-159, December 1994, CIMNE, Barcelona, España.
- [W-1] **WHAMS-3D** -*An explicit 3D finite element program* -KBS2 INC. Willow Springs, Illinois 60480.
- [Z-1] **Zhong, Z.H.**, -*Finite Element Procedures for Contact Impact Problems*, -Oxford University Press, Oxford, G.B., 1993.

## CAPÍTULO 6

# SIMULACIÓN NUMÉRICA DE PROCESOS DE EMBUTICIÓN DE CHAPAS

### 6.1. INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se investiga el comportamiento de la nueva formulación de lámina delgada *BST* y del modelo constitutivo hipoeelástico con superficie de fluencia ortótropa de Hill<sup>[H-2],[H-3]</sup>, definidos en los capítulos 4 y 3 respectivamente, en el contexto de problemas de embutición de chapas, utilizando la metodología de hidrocódigo que se presentó en el Capítulo 2.

El proceso real de embutición de una chapa tiene una duración del orden de las décimas de segundo, de modo que las velocidades asociadas son bajas en comparación al orden de las encontradas en problemas de impacto de estructuras y por lo tanto las fuerzas de inercia son despreciables, siendo el problema tratado en la mayoría de los casos como cuasiestático. Esto obliga a considerar parámetros del proceso adecuados (velocidad del punzón) para su correcta simulación numérica cuando se utiliza un esquema de solución del tipo dinámico<sup>[H-1],[M-1]</sup>.

Puesto que los procesos de embutición de chapas se realizan a velocidades bajas y a la vez presentan un comportamiento altamente no lineal, su solución numérica mediante un código explícito requerirá un gran número de pasos de tiempo. En la mayoría de los problemas que a continuación se presentan se hace uso de la condición de simetría para simplificar el modelo y limitar el consumo de tiempo de CPU. Se escogen asimismo los modelos apropiados para estudios paramétricos tanto del coeficiente de rozamiento  $f$  como del coeficiente de Lankford  $\bar{R}$ . A su vez el número de capas a través del espesor se ha limitado a cuatro en todos los problemas analizados. Como se demostró en el capítulo anterior esta elección resultó ser la más adecuada en problemas de fuerte carácter flexional. Si bien es cierto que muchos problemas de estampación presentan una combinación de esfuerzos membranales y flexionales, esta última es más importante en las zonas de la lámina con cocientes  $(\frac{R}{h}) \leq 20$ , (siendo  $R$  el radio de curvatura de las herramientas y  $h$  espesor de la lámina)<sup>[S-1]</sup> en donde los modelos basados sólo en comportamiento membranar no son suficientes para obtener una respuesta adecuada<sup>[B-1],[G-2],[L-1],[S-2]</sup>.



Los dos primeros problemas presentados corresponden a los test de embutición propuestos por los profesores J.K. Lee, R. Wagoner y E. Nakamachi<sup>[L-1]</sup>, tanto para el caso 2D en condición de deformación plana y punzón cilíndrico como en 3D con punzón esférico. El tercer problema corresponde al de embutición profunda en 3D de una chapa cuadrada propuesto en *NUMISHEET'93*<sup>[N-1]</sup>, problema que presenta un comportamiento anisótropo y para el cual se disponen de resultados experimentales y numéricos dados por otros investigadores<sup>[N-1]</sup>.

Finalmente se presentan dos problemas en 3D, propuestos en el contexto de *NUMISHEET'96*<sup>[N-2]</sup>. El primero de ellos corresponde al de embutición de una chapa rectangular con punzón esférico, en el cual se estudia la distribución de las deformaciones principales a lo largo de su contorno para distintas alturas de penetración del punzón considerando diferentes materiales constituyentes para la lámina. El segundo problema corresponde al problema de embutición profunda de un rail, para el cual se estudian los cambios de geometría antes y después de la recuperación elástica al igual que la distribución de deformaciones principales después de la recuperación elástica.

## 6.2. EJEMPLOS NUMÉRICOS

### 6.2.1 Test de estiramiento con punzón cilíndrico<sup>[L-1]</sup>

A continuación se presenta el problema propuesto por los profesores J.K. Lee, R. Wagoner y E. Nakamachi<sup>[L-1]</sup>, el cual corresponde al proceso de embutición de una chapa con punzón cilíndrico, en condiciones de deformación plana. En la Figura 6.1, se presenta la geometría de las herramientas utilizadas en este test, que junto con la información detallada en la Tabla 6.1 definen al problema. A continuación en la Figura 6.2 se muestra la discretización de elementos finitos empleada para la definición de las herramientas (punzón y matriz) y chapa.

El análisis consiste en estudiar la distribución de la deformación longitudinal  $\epsilon_1$ , cuando la lámina metálica es sometida a un estiramiento provocado por el avance del punzón según el eje  $Z$  positivo (ver Figura 6.2), considerando distintos coeficientes de rozamiento entre el punzón y la chapa,  $f = 0, 0.15, 0.30$ . La condición de estiramiento en este caso se impone restringiendo el desplazamiento de la chapa en la dirección radial (según el eje  $X$ ) en el área de apoyo con el molde.

Cabe señalar que para el caso con rozamiento cero, existe una solución analítica basada en la teoría de membrana<sup>[W-1]</sup>, no así en los restantes dos casos, es decir, para  $f = 0.15$  y  $0.30$ . En el presente análisis se consideró una discretización de 56 elementos del tipo *BST* para la lámina, en donde las



coordenadas iniciales según el eje  $X$  coinciden con las definidas para este test por Lee et al.<sup>[L-1]</sup>, ver la Figura 6.3.

En lo que sigue, el problema se estudiará considerando que la velocidad del punzón varía en forma armónica de acuerdo con la siguiente relación:

$$v(t) = v_{max} \text{sen}(\omega t) \quad (6.1)$$

donde  $v_{max}$  es la velocidad máxima,  $\omega$  es la frecuencia circular y  $t$  es el intervalo de tiempo de análisis, es decir, el tiempo que demora en recorrer la altura de penetración especificada. Tras ello el punzón parte y finaliza el análisis con velocidad nula  $t \in (0, \frac{\pi}{\omega})$ . La ley de movimientos para el punzón, se obtiene integrando la ecuación (6.1):

$$x(t) = \frac{v_{max}}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] \quad (6.2)$$

en donde, el valor máximo del desplazamiento se obtiene para el tiempo final  $t_f = \frac{\pi}{\omega}$ :

$$x_{max} = \frac{2v_{max}}{\omega} \quad (6.3)$$

considerando para el punzón un avance 40 mm, y que tiene una velocidad máxima de 10 m/s, de ecuación (6.3) se obtiene  $\omega = 500$  y  $t_f = \frac{\pi}{500} = 6.28$  ms.

Con respecto al valor de la velocidad máxima del punzón recomendada para la simulación numérica de procesos de embutición<sup>[H-1],[R-1]</sup>, esta varía entre 5 – 20 m/s. Velocidades mayores provocan que los efectos inerciales no sean despreciables dando origen a que el proceso de simulación numérica por ejemplo, no capture adecuadamente las zonas en donde se producen los valores máximos de las deformaciones<sup>[T-1]</sup> en la chapa.

En el presente ejemplo el comportamiento del material se considera isótropo. Por consiguiente el valor del coeficiente de Lankford a utilizar en la definición de la superficie de fluencia (ecuación 3.60) será unitario, recuperándose en este caso la superficie de fluencia de von Mises.

En las Figuras 6.4-6.9 se presenta la distribución de la deformación longitudinal  $\epsilon_1$  para los tres valores del coeficiente de rozamiento propuestos, medida en una configuración intermedia para un avance del punzón de 20 mm y en la configuración final para un avance del punzón de 40 mm. Los resultados se comparan con los valores obtenidos para este mismo problema por los códigos *NIKE2D* y *SUPER* (ver referencia [L-1]). Es interesante indicar que para este test existen más de 20 soluciones numéricas distintas, dadas por diferentes investigadores<sup>[L-1]</sup>.

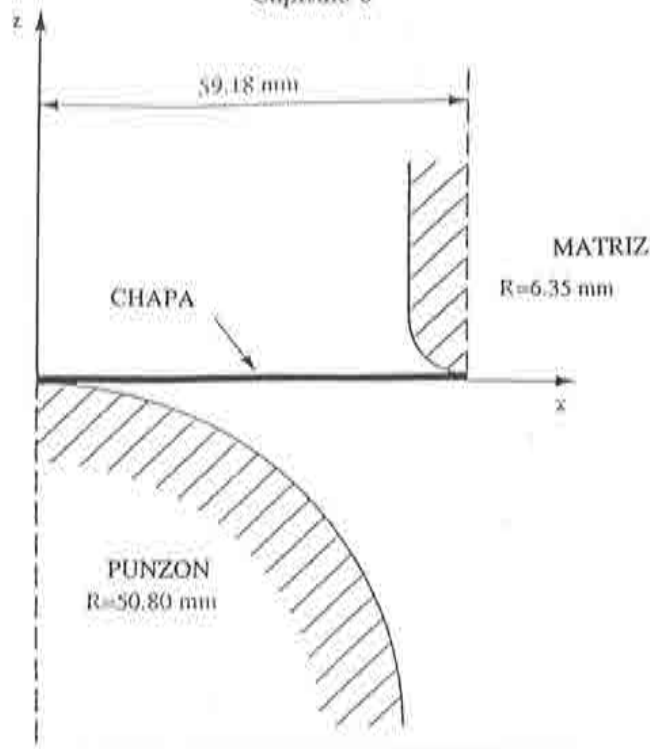


Figura 6.1 Test de simulación del proceso de conformado de una chapa. Geometría de las herramientas (punzón y matriz).

Propiedades del material	
Módulo de elasticidad	69 GPa
Coefficiente de Poisson	0.3
Densidad	2730 Kg/m <sup>3</sup>
Curva tensión-deformación uniaxial	$\bar{\sigma} = 589.00(0.0001 + \bar{\epsilon}_p)^{0.216}$
Características geométricas	
Dimensiones de la chapa	R=59.18 mm
Espesor de la chapa	t=1.0 mm
Dimensiones del punzón	R=50.8 mm
Parámetros del proceso	
Desplazamiento del punzón	20, 30 y 40 mm
Velocidad del punzón	10 sen (500 t) mm/ms
Tiempo de análisis	6.28 ms
Coefficiente de rozamiento	0.0, 0.15 y 0.30

Tabla 6.1

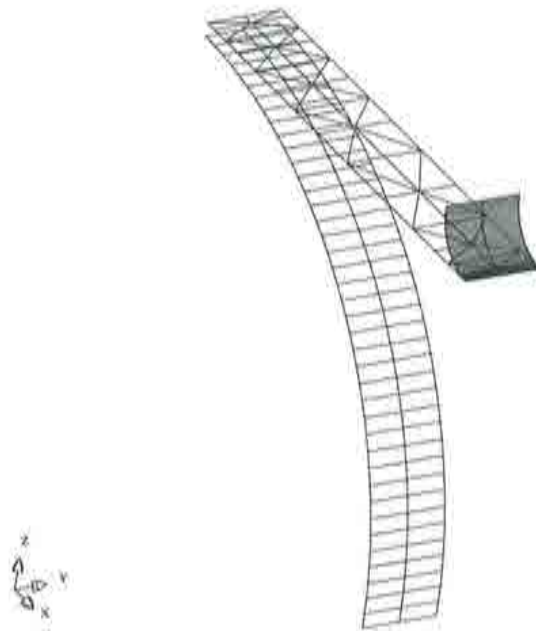


Figura 6.2 Discretización empleada para las herramientas (punzón y matriz) y malla de elementos finitos triangulares para la chapa.

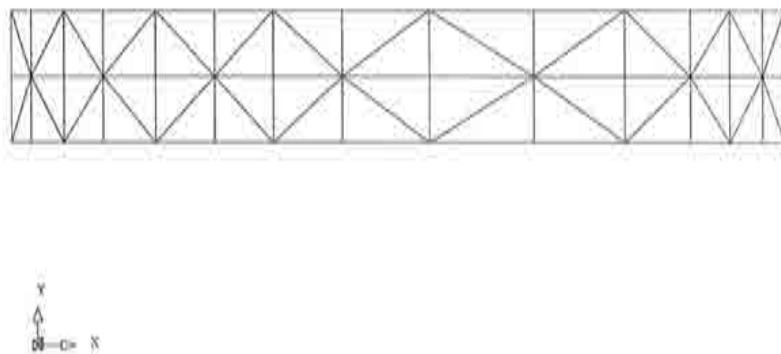


Figura 6.3 Malla utilizada en la discretización de la chapa analizada, conteniendo 56 elementos del tipo *BST*.

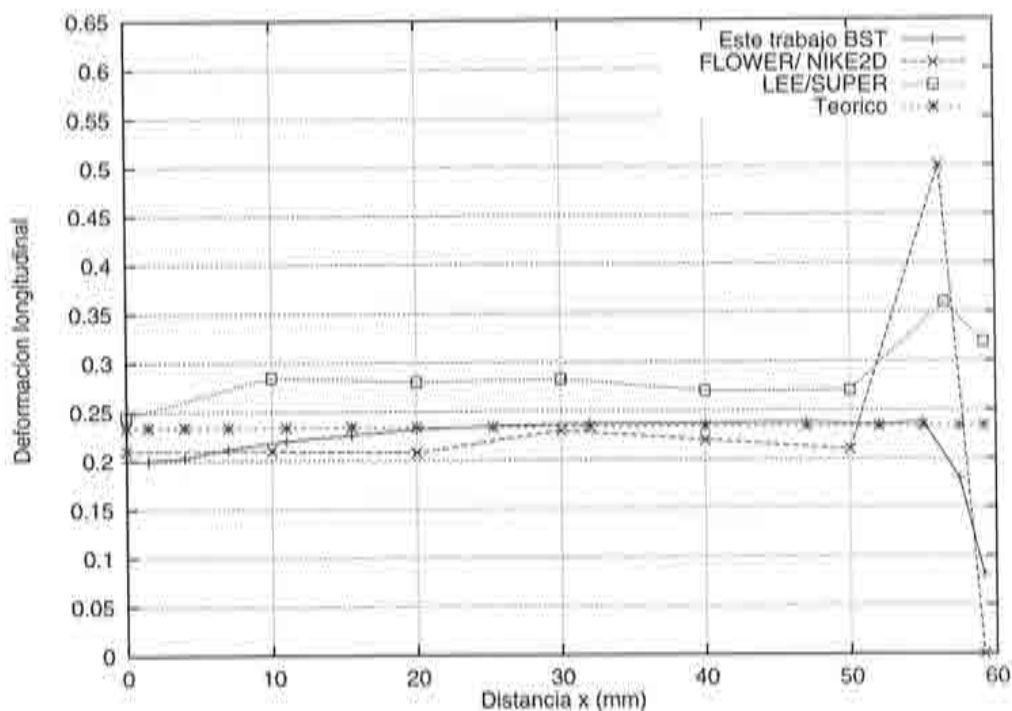


Figura 6.4 Deformación longitudinal para avance del punzón de 40 mm, coeficiente de rozamiento 0.0. Comparación con valores teóricos<sup>[W-1]</sup> y numéricos<sup>[L-1]</sup>.

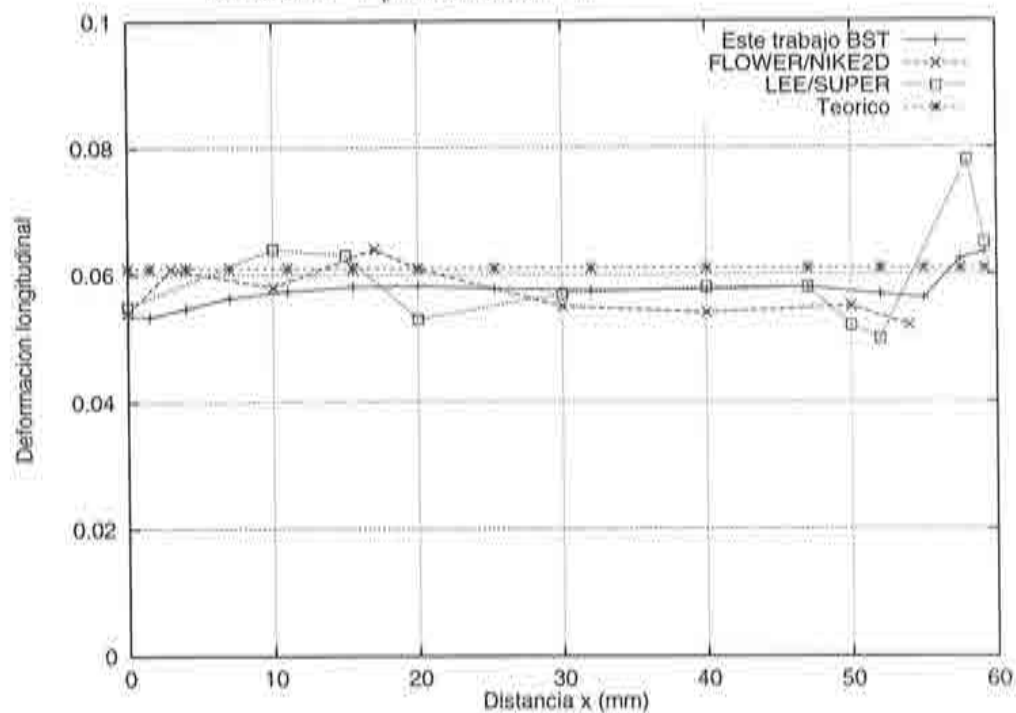


Figura 6.5 Deformación longitudinal para avance del punzón de 20 mm, coeficiente de rozamiento 0.0. Comparación con valores teóricos<sup>[W-1]</sup> y numéricos<sup>[L-1]</sup>.



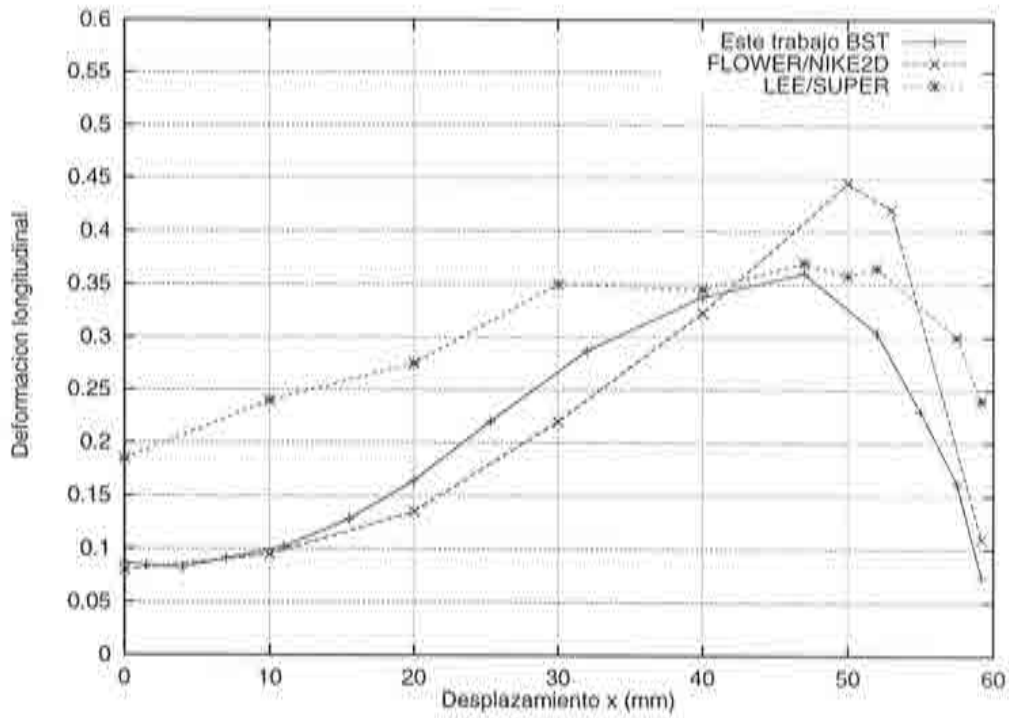


Figura 6.6 Deformación longitudinal para avance del punzón de 40 mm, coeficiente de rozamiento 0.15. Comparación con valores numéricos<sup>[L-1]</sup>.

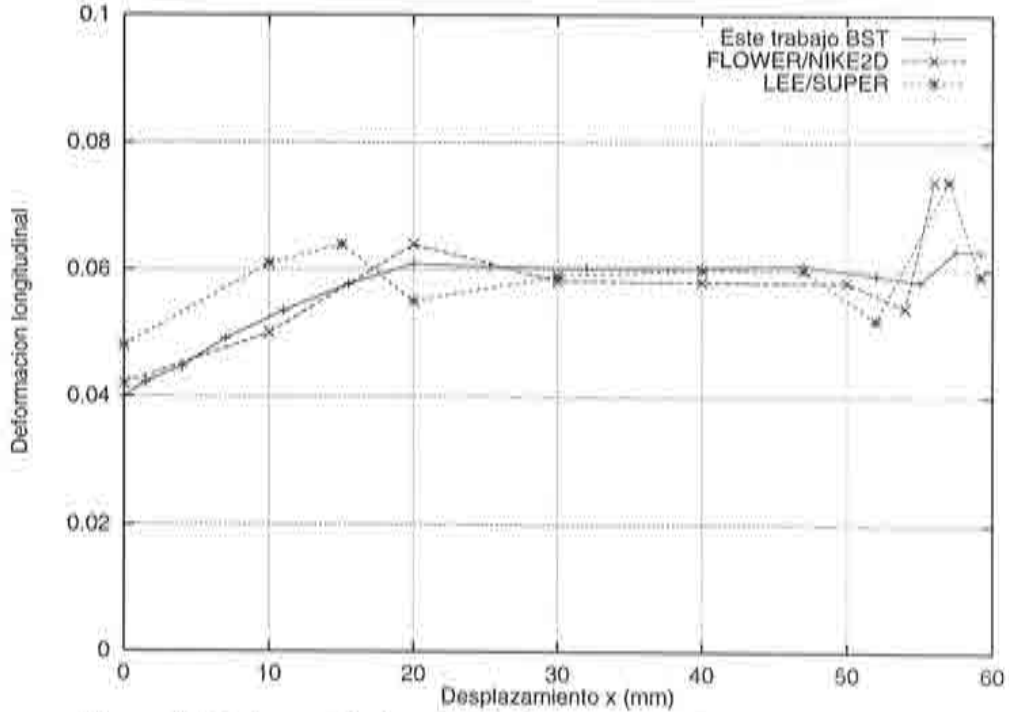


Figura 6.7 Deformación longitudinal para avance del punzón de 20 mm, coeficiente de rozamiento 0.15. Comparación con valores numéricos<sup>[L-1]</sup>.

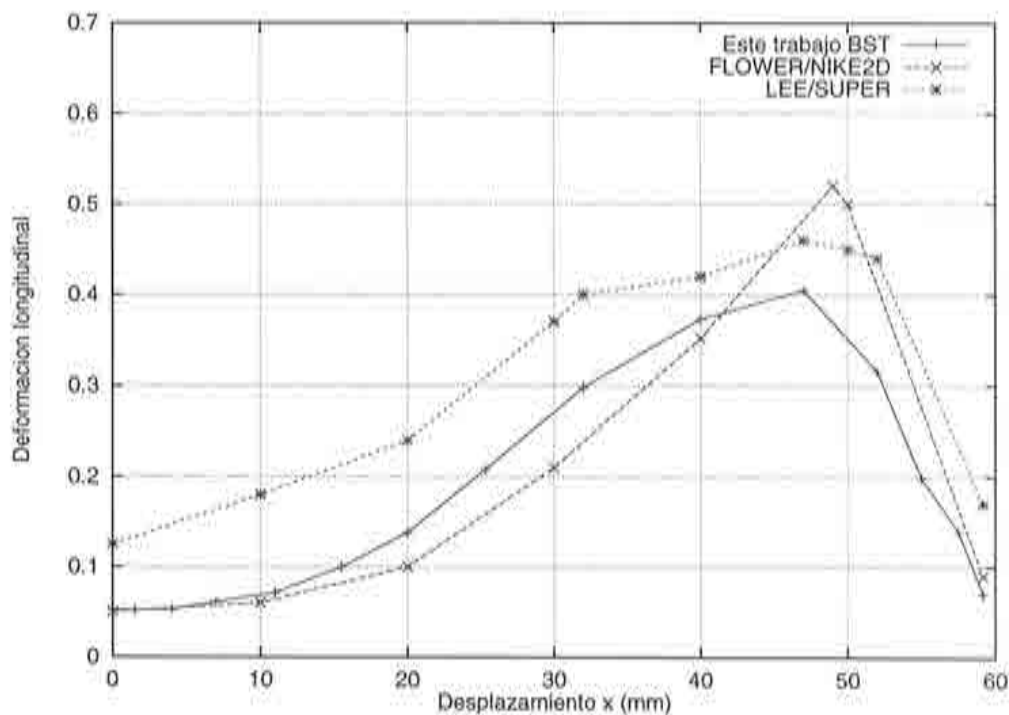


Figura 6.8 Deformación longitudinal para avance del punzón de 40 mm, coeficiente de rozamiento 0.30. Comparación con valores numéricos<sup>[L-1]</sup>.

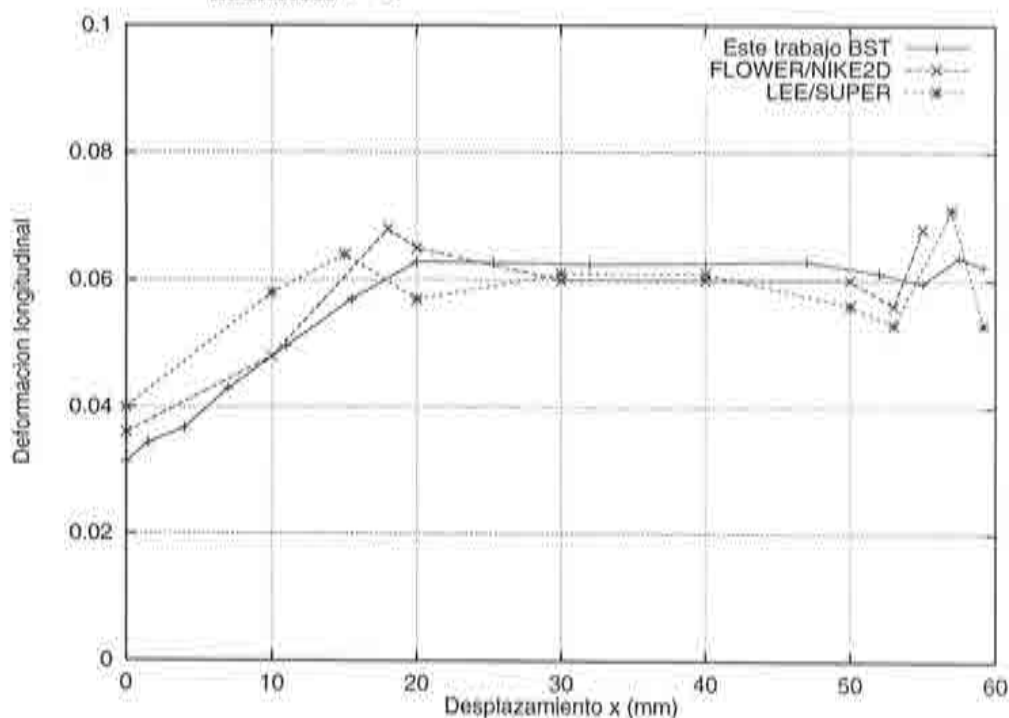


Figura 6.9 Deformación longitudinal para avance del punzón de 20 mm, coeficiente de rozamiento 0.30. Comparación con valores numéricos<sup>[L-1]</sup>.

De acuerdo con las Figuras 6.4 a 6.9, puede observarse que la respuesta obtenida para este test de estiramiento utilizando la nueva formulación de lámina delgada *BST*, presenta un buen comportamiento con respecto a la solución teórica<sup>[W-1]</sup> en el caso de rozamiento nulo y sigue el mismo comportamiento que la solución obtenida por otros investigadores<sup>[L-1]</sup> en los casos de rozamiento  $f = 0.15$  y  $0.30$ .

### 6.2.2 Test OSU: estiramiento de una chapa circular con punzón hemisférico<sup>[L-1]</sup>

Este problema consiste estudiar la embutición de una chapa circular, mediante un punzón hemisférico. La geometría de la matriz, el diámetro del punzón y los datos del material son idénticos a los del problema anterior, ver Figura 6.1 y Tabla 6.1. Analizándose tres casos diferentes de rozamiento entre la chapa-punzón, correspondientes a los coeficientes de fricción de  $f = 0, 0.15$  y  $0.30$ .

Los resultados obtenidos a través de la nueva formulación de lámina delgada *BST* son comparados con los valores dados por García Garino<sup>[G-1]</sup> y Agelet de Saracibar<sup>[A-1]</sup>, estudiándose para cada coeficiente de rozamiento la distribución de la deformación plástica efectiva en tres configuraciones diferentes, correspondientes a las penetraciones del punzón de 20, 30 y 40 mm.

En la Figura 6.10, se presenta la discretización de elementos finitos empleada para las herramientas (punzón y matriz) y chapa. En este caso, para la chapa se adopta una discretización de 184 elementos del tipo *BST*, idéntica a la propuesta para este test por Lee et al.<sup>[L-1]</sup> (ver la Figura 6.11).

En las Figuras 6.12 a 6.14 se presentan los perfiles de deformación plástica efectiva para cada uno de los coeficientes de rozamiento estudiados, medidos en tres configuraciones distintas. Puede observarse la excelente concordancia con los resultados obtenidos por García Garino<sup>[G-1]</sup> y Agelet de Saracibar<sup>[A-1]</sup>. A continuación en las Figuras 6.15 a 6.20 se presenta la distribución de la relación de espesores ( $\frac{h}{h_0}$ ), es decir, la razón entre el espesor final al espesor inicial obtenido a partir de la condición de incompresibilidad:

$$t_h^{(e)} t_A^{(e)} = o_h^{(e)} o_A^{(e)} \quad (6.2)$$

luego:

$$\frac{t_h^{(e)}}{o_h^{(e)}} = \frac{o_A^{(e)}}{t_A^{(e)}} \quad (6.3)$$

donde  $o_h^{(e)}$  y  $o_A^{(e)}$  denotan el espesor y el área inicial del elemento.

Del análisis de las Figuras 6.12-6.18, se puede concluir que el espesor de la chapa prácticamente permanece constante en la zona de la matriz para todos los

casos de rozamiento estudiados, también se observa que a medida que aumenta el coeficiente de rozamiento entre la chapa y el punzón los valores máximos de las deformaciones plásticas efectivas se van desplazando radialmente desde el centro de la chapa hacia la matriz, este efecto se debe a la aparición de fuerzas tangenciales en la interfase que producen que la chapa se vaya descargando paulatinamente en su zona central. También como era de esperarse en las zonas donde se concentran las mayores deformaciones plásticas efectivas se producen los mayores estiramientos, lo cual se verifica al analizar la distribución de la razón de espesores ( $\frac{h}{h_0}$ ) sobre la chapa.

Finalmente en la Figura 6.21 se presentan la configuración inicial y la final de la chapa, superpuestas a modo observar a escala real la deformada que adopta la chapa cuando el punzón alcanza la penetración deseada, en este caso  $H = 40$  mm.

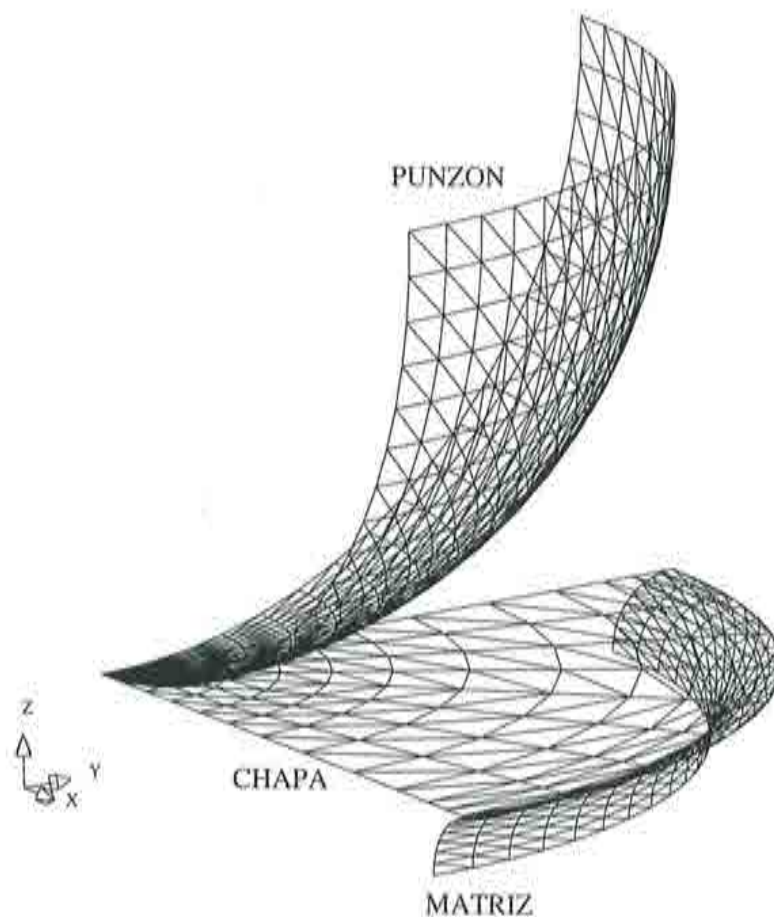


Figura 6.10 Discretización de elementos triangulares rígidos empleada para las herramientas (punzón y matriz) y malla de 184 elementos finitos triangulares del tipo *BST* para la chapa.



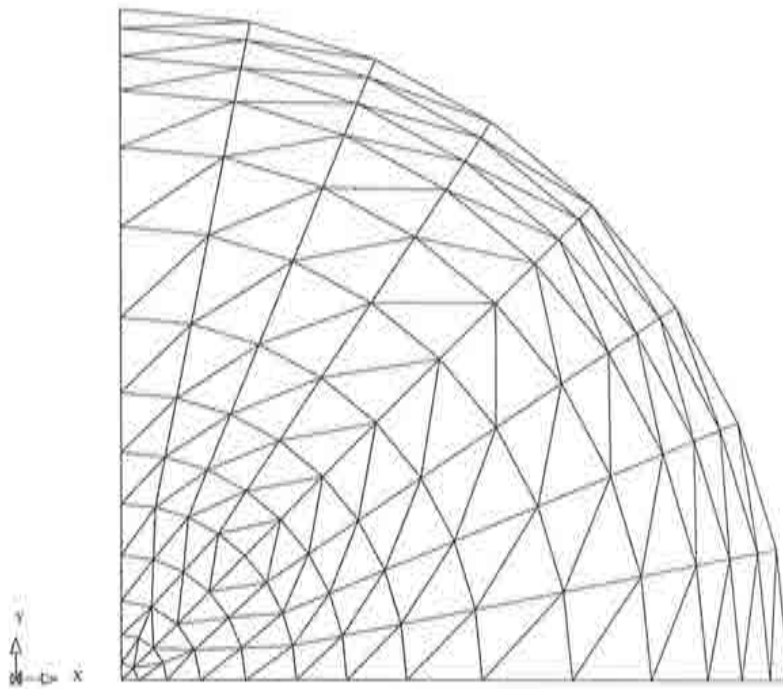


Figura 6.11 Discretización de la chapa: 184 elementos *BST*

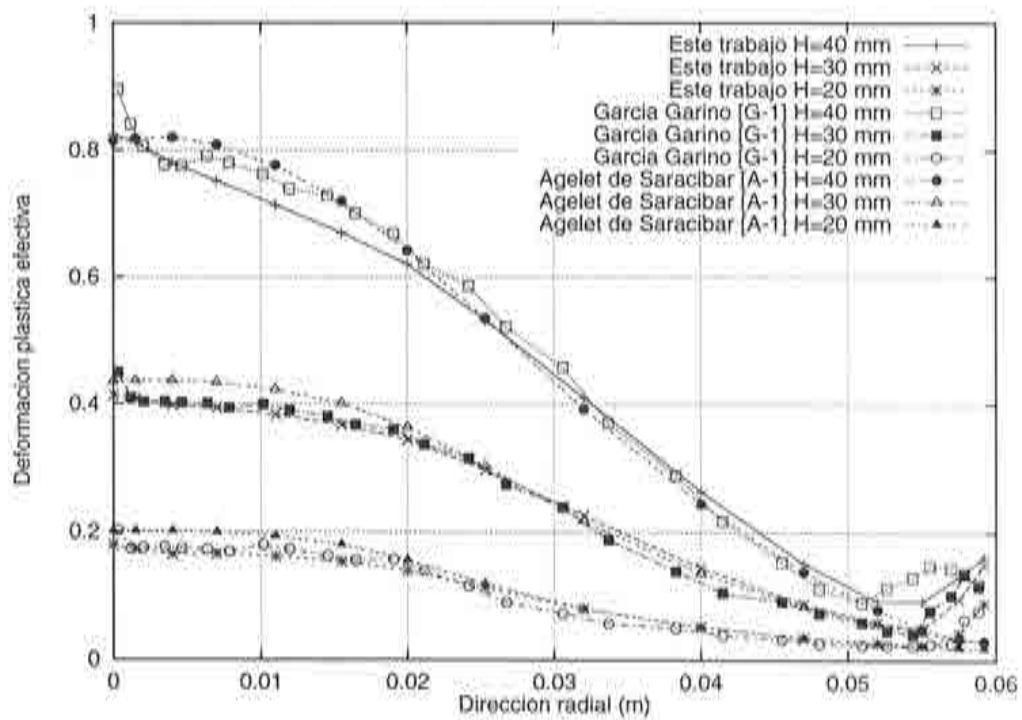


Figura 6.12 Perfiles de deformación plástica efectiva para distintas penetraciones del punzón  $H = 20, 30$  y  $40$  mm, coeficiente de rozamiento  $f = 0.0$

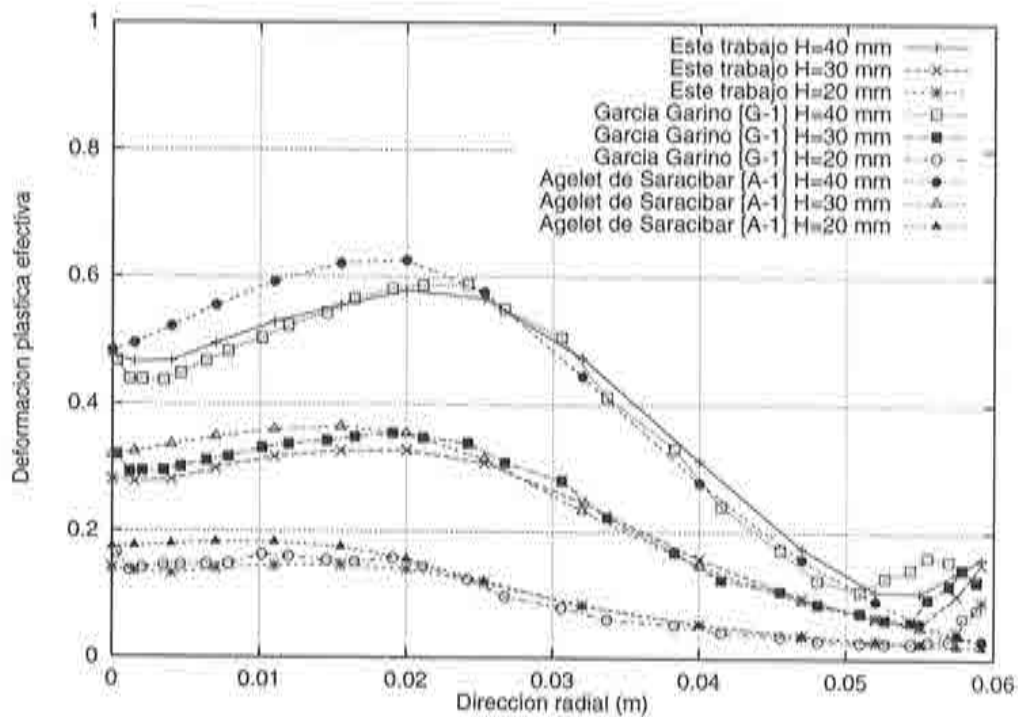


Figura 6.13 Perfis de deformación plástica efectiva para distintas penetraciones del punzón  $H = 20, 30$  y  $40$  mm, coeficiente de rozamiento  $f = 0.15$

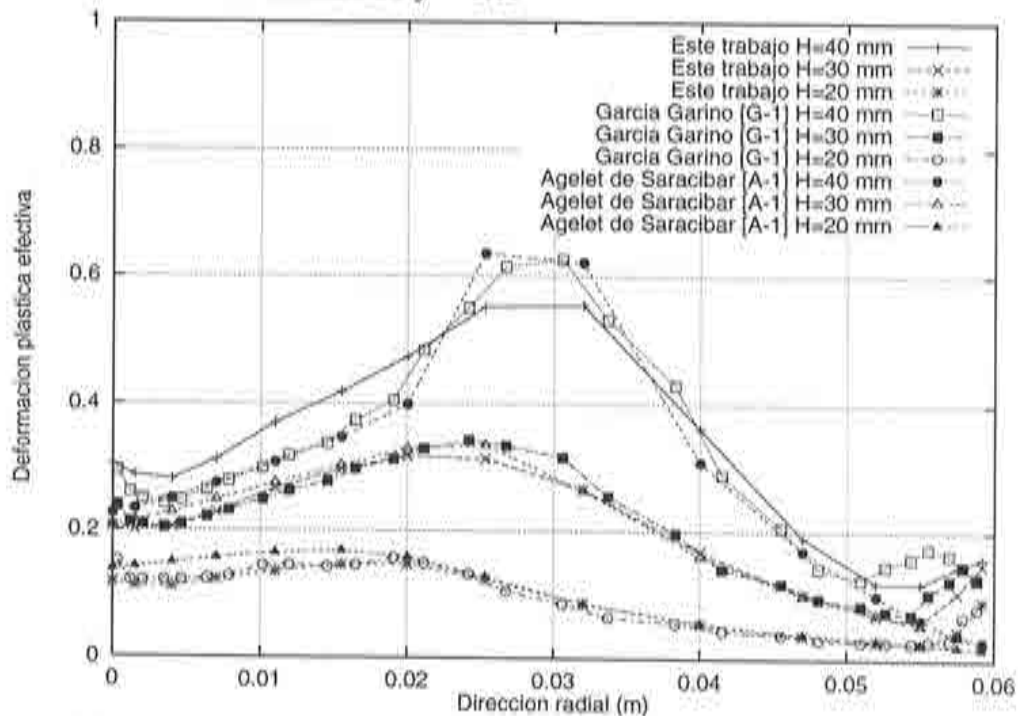


Figura 6.14 Perfis de deformación plástica efectiva para distintas penetraciones del punzón  $H = 20, 30$  y  $40$  mm, coeficiente de rozamiento  $f = 0.30$

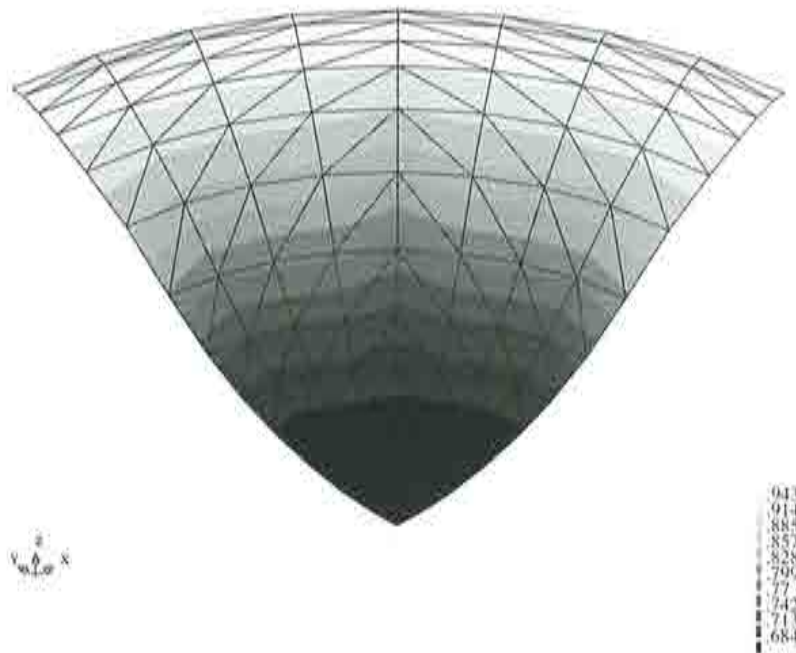


Figura 6.15 Distribución de la relación de espesores ( $\frac{h}{h_0}$ ), en la configuración correspondiente al desplazamiento del punzón de  $H = 30$  mm, para  $f = 0.0$

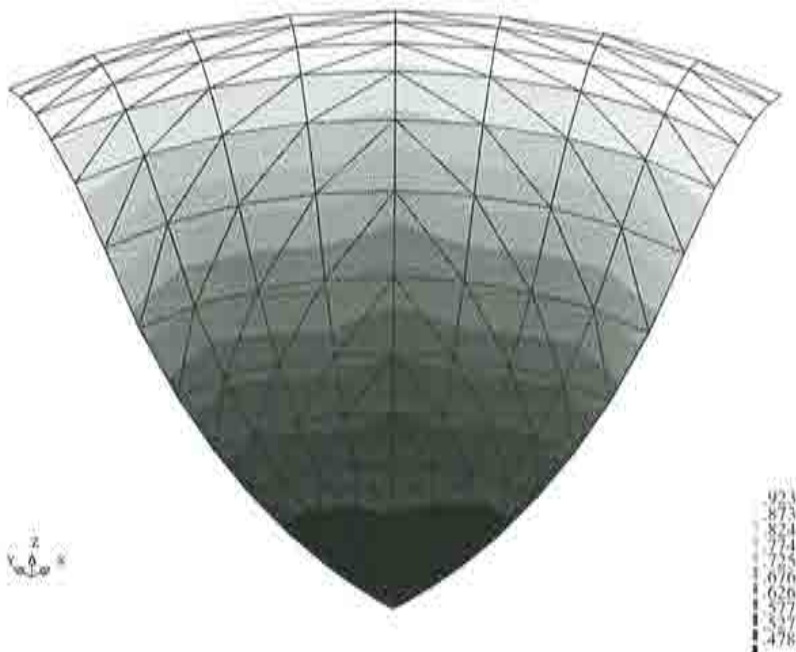


Figura 6.16 Distribución de la relación de espesores ( $\frac{h}{h_0}$ ), en la configuración correspondiente al desplazamiento del punzón de  $H = 40$  mm, para  $f = 0.0$

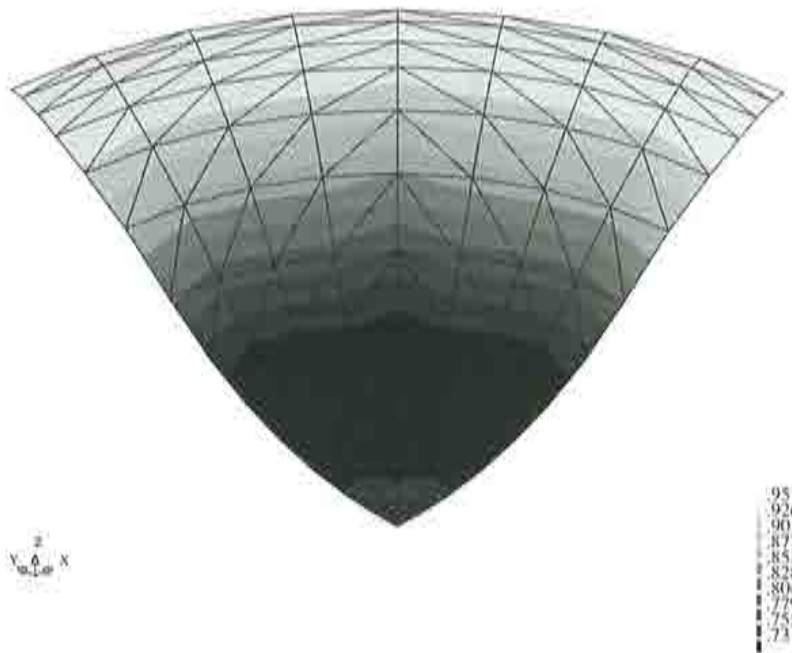


Figura 6.17 Distribución de la relación de espesores  $(\frac{h}{h_0})$ , en la configuración correspondiente al desplazamiento del punzón de  $H = 30$  mm, para  $f = 0.15$

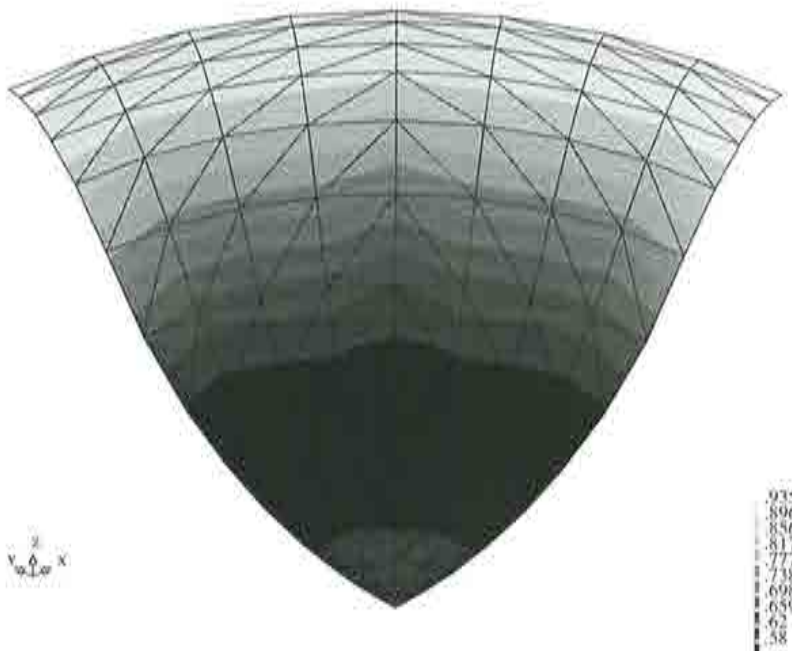


Figura 6.18 Distribución de la relación de espesores  $(\frac{h}{h_0})$ , en la configuración correspondiente al desplazamiento del punzón de  $H = 40$  mm, para  $f = 0.15$



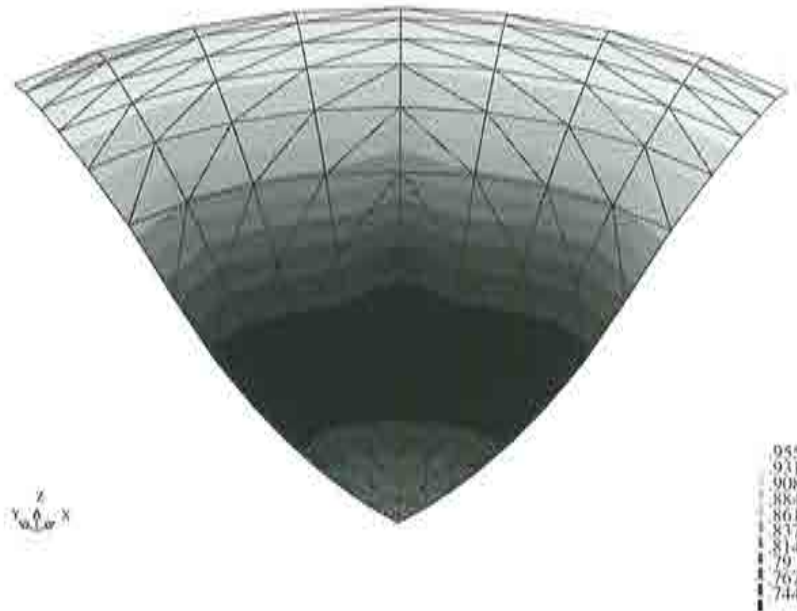


Figura 6.19 Distribución de la relación de espesores ( $\frac{h}{h_0}$ ), en la configuración correspondiente al desplazamiento del punzón de  $H = 30$  mm, para  $f = 0.30$

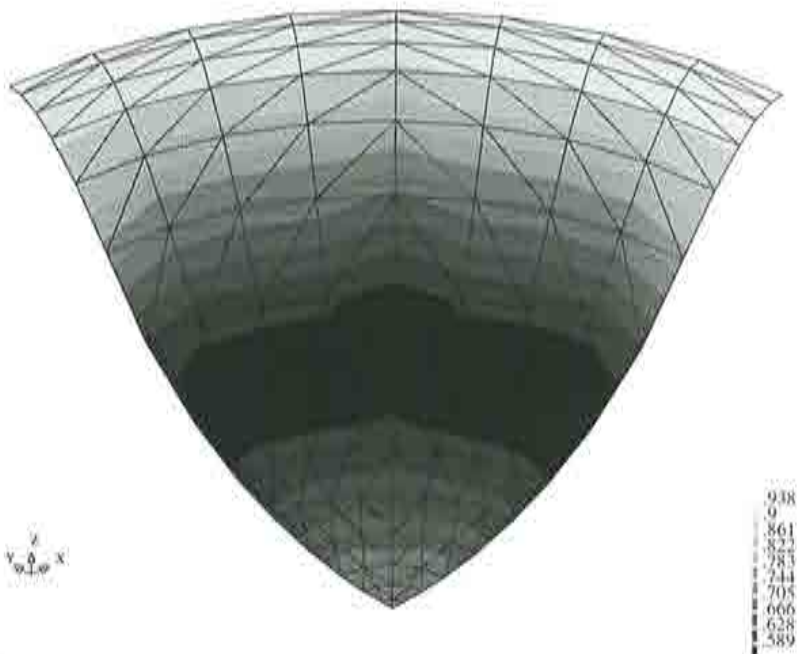


Figura 6.20 Distribución de la relación de espesores ( $\frac{h}{h_0}$ ), en la configuración correspondiente al desplazamiento del punzón de  $H = 40$  mm, para  $f = 0.30$

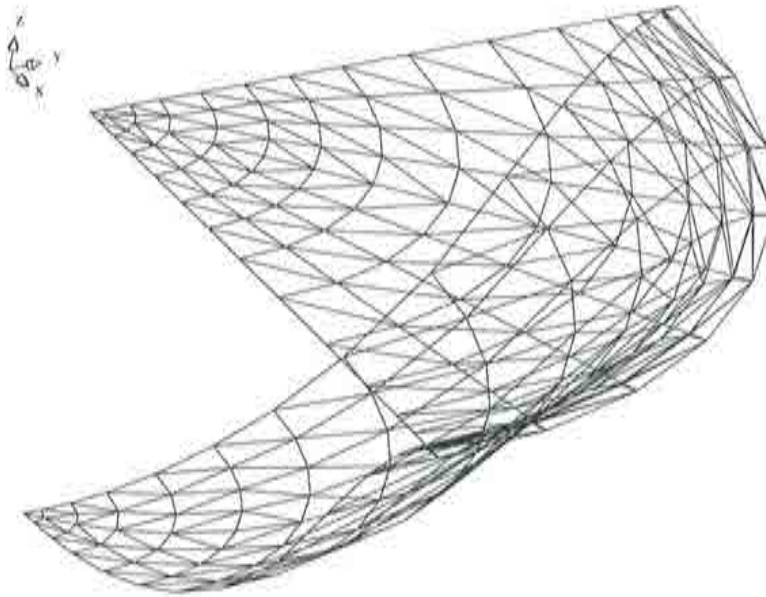


Figura 6.21 Configuración inicial de la chapa y la correspondiente a una penetración del punzón de  $H = 40$  mm

### 6.2.3 Embutición profunda de una chapa cuadrada<sup>[N-1]</sup>

A continuación se presenta el problema de simulación numérica del proceso de embutición profunda de una lámina anisótropa cuadrada. Este problema fue propuesto en el contexto de NUMISHEET'93<sup>[N-1]</sup>, y se detalla en la Figura 6.22. Se estudia el comportamiento de la chapa (distribución de deformaciones a través del espesor, deslizamientos contenidos en el plano de chapa, influencia de la anisotropía normal) cuando el punzón alcanza una altura de penetración de  $H = 40$  mm en el caso de considerar que el material constituyente de la chapa es acero y una altura de  $H = 15$  mm cuando la chapa es de aluminio.

En primer lugar se presenta el caso correspondiente al acero, en donde la superficie de fluencia se define por el primer criterio de Hill<sup>[H-2]</sup>, bajo las hipótesis de *anisotropía normal*. Las propiedades del acero utilizado y los parámetros del proceso se resumen en las Tablas 6.3 y 6.4.

En este caso, el valor de  $\bar{R}$  se obtiene a partir de la media de los valores de  $R$  definidos en tres direcciones contenidas en el plano de la lámina<sup>[N-1]</sup>.

Dirección	R
0°	1.79
45°	1.51
90°	2.27

Tabla 6.2

$$\bar{R} = \frac{(R_0 + 2R_{45} + R_{90})}{4} = 1.77 \quad (6.4)$$

Propiedades del material	
Módulo de elasticidad	206 GPa
Coefficiente de Poisson	0.3
Densidad	7800 Kg/m <sup>3</sup>
Coefficiente de Lankford- $\bar{R}$	1.77
Curva tensión-deformación uniaxial	$\bar{\sigma} = 565.32(0.007117 + \bar{\epsilon}_p)^{0.2589}$

Tabla 6.3

Características geométricas	
Dimensiones de la chapa	150x150 mm
Espesor de la chapa	0.78 mm
Dimensiones del punzón	70x70 mm
Parámetros del proceso	
Desplazamiento del punzón	40 mm
Velocidad del punzón	10 sen (500 t) mm/ms
Tiempo de análisis	6.28 ms
Coefficiente de rozamiento	0.144
Fuerza en los pisadores	19.6 KN

Tabla 6.4

En las Figuras 6.23 y 6.24 se presenta la discretización de elementos finitos utilizada en la descripción de las herramientas (punzón, matriz y pisadores) y chapa. En las Figuras 6.25 y 6.26 se grafican la distribución de la deformación logarítmica en el espesor a lo largo de las líneas  $O - A$  y  $O - B$ , comparadas con los resultados obtenidos por otros investigadores<sup>[N-1]</sup>.

A continuación en las Figuras 6.27 a 6.30 se grafican la distribución de las deformaciones principales  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  a lo largo de las líneas  $O - A$  y  $O - B$ , con sus respectivos valores de comparación. En las Figuras 6.31 y 6.32 se presentan respectivamente las distribuciones de deformación plástica efectiva y de la deformación logarítmica a través del espesor  $\epsilon_3 = \ln(\frac{h}{h_0})$ , para la altura final de penetración del punzón  $H = 40$  mm.

En las Figuras 6.34 y 6.35 se muestran las mallas original y deformada para al posición final del punzón, correspondiente a  $H = 40$  mm. Finalmente en la Tabla 6.5 se presentan los valores de deslizamiento horizontal y a lo largo de la diagonal, obtenidos en el presente análisis considerando la anisotropía normal de la chapa  $\bar{R} = 1.77$  y la nueva formulación de lámina delgada  $BST$  en las configuraciones correspondientes a las penetraciones del punzón de  $H = 15$  y  $40$  mm.

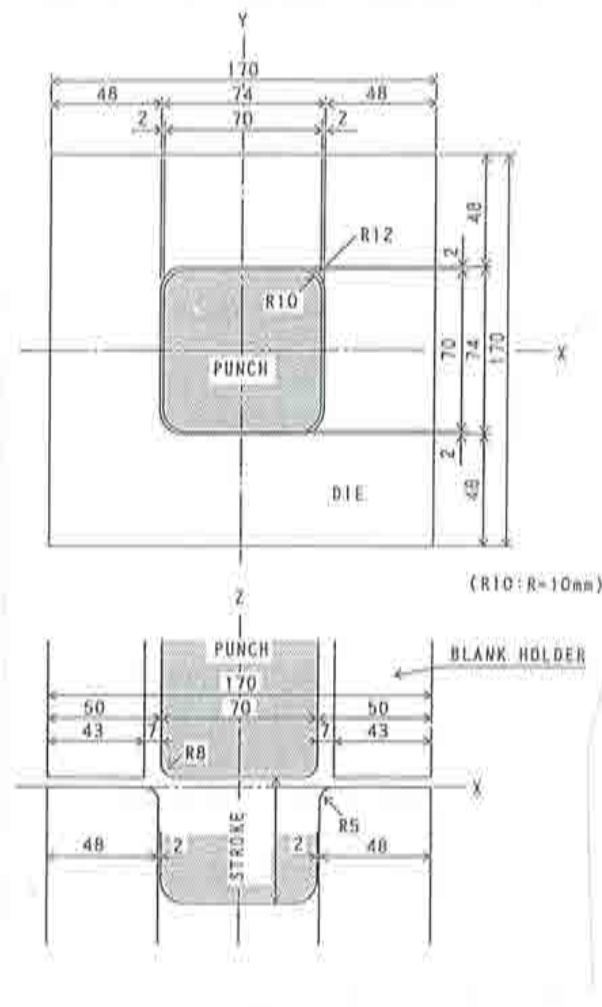


Figura 6.22 Ilustración esquemática de las herramientas utilizadas para el ensayo de embutición profunda de una chapa cuadrada



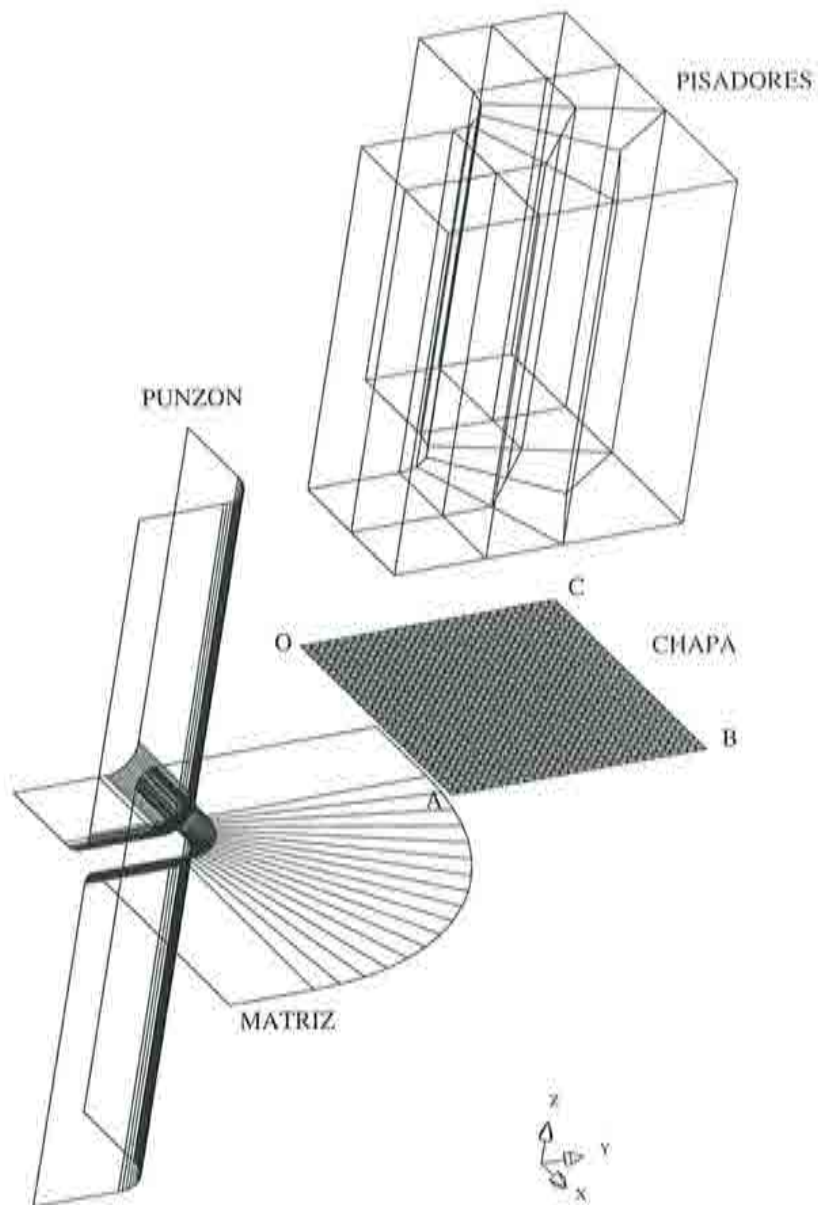


Figura 6.23 Discretización de elementos finitos de las herramientas y chapa. Punzón y molde elementos cuadriláteros rígidos, pisadores elementos de sólidos rígidos y chapa elementos del tipo *BST*.

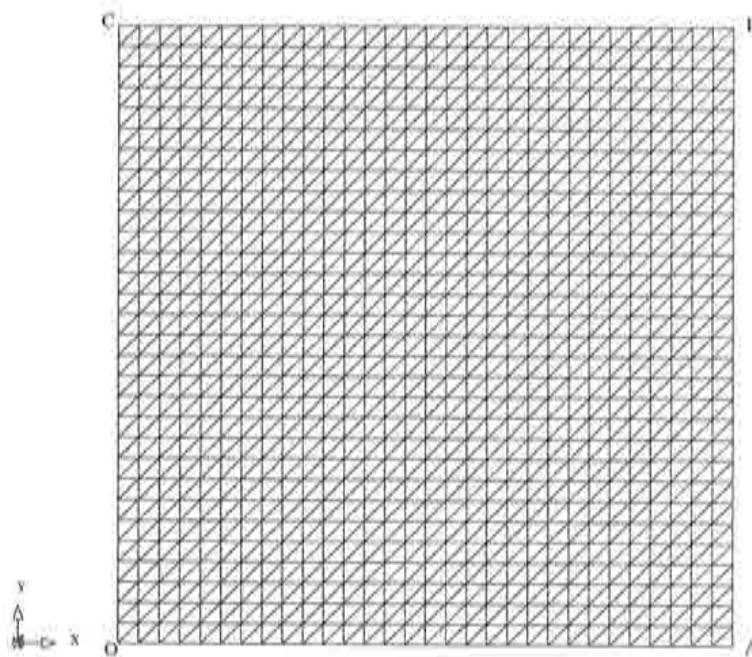


Figura 6.24 Discretización de la chapa: 1800 elementos *BST*

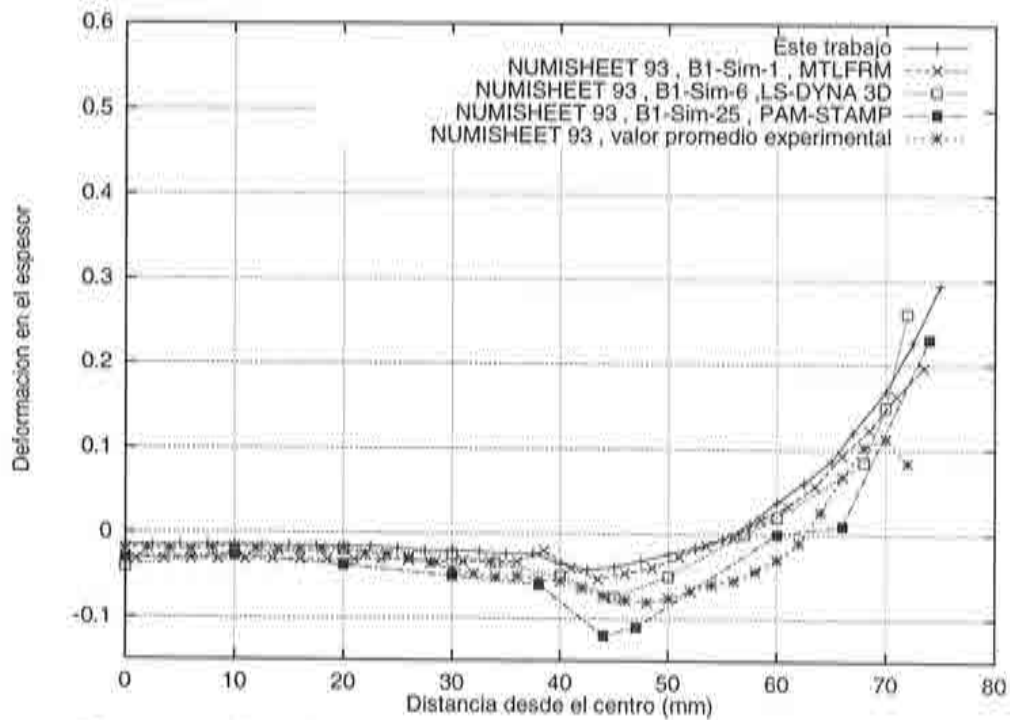


Figura 6.25 Distribución de la deformación logarítmica a través del espesor  $\epsilon_3 = \ln\left(\frac{h}{h_0}\right)$ , a lo largo de la línea  $O - A$

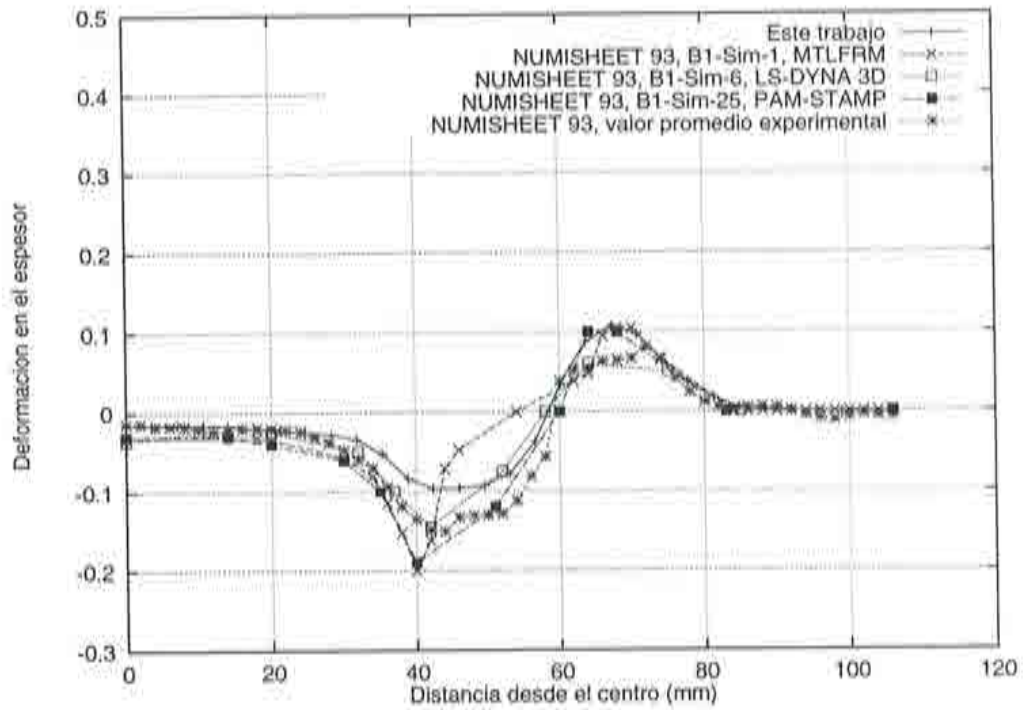


Figura 6.26 Distribución de la deformación logarítmica a través del espesor  $\epsilon_3 = \ln(\frac{h}{h_0})$ , a lo largo de la línea  $O - B$

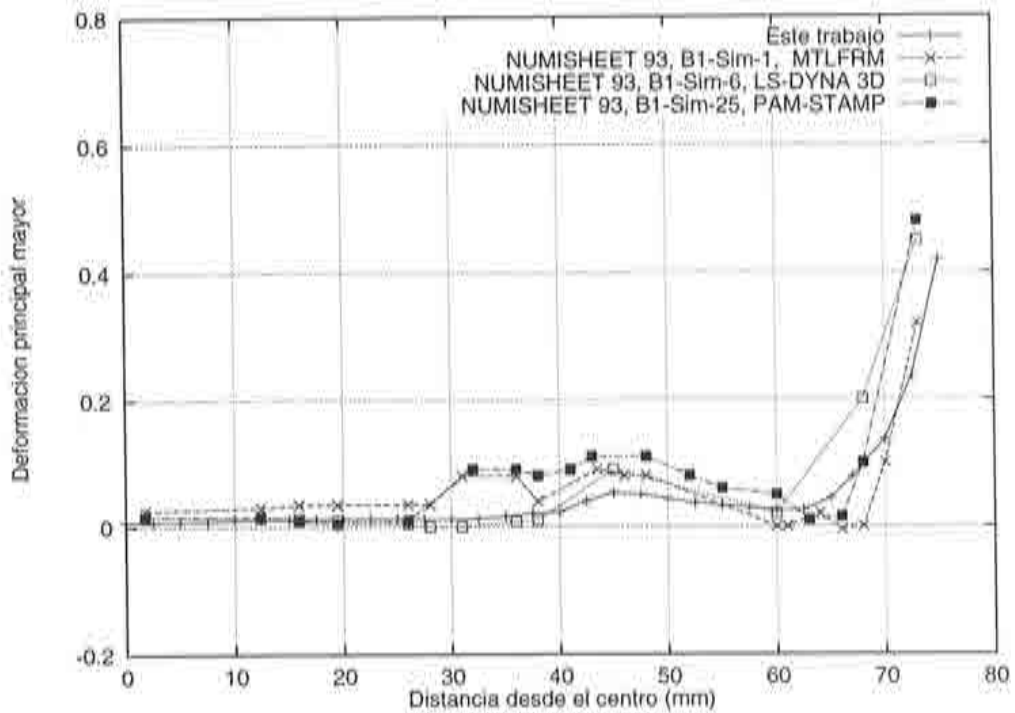


Figura 6.27 Distribución de la deformación principal mayor  $\epsilon_I$ , a lo largo de la línea  $O - A$

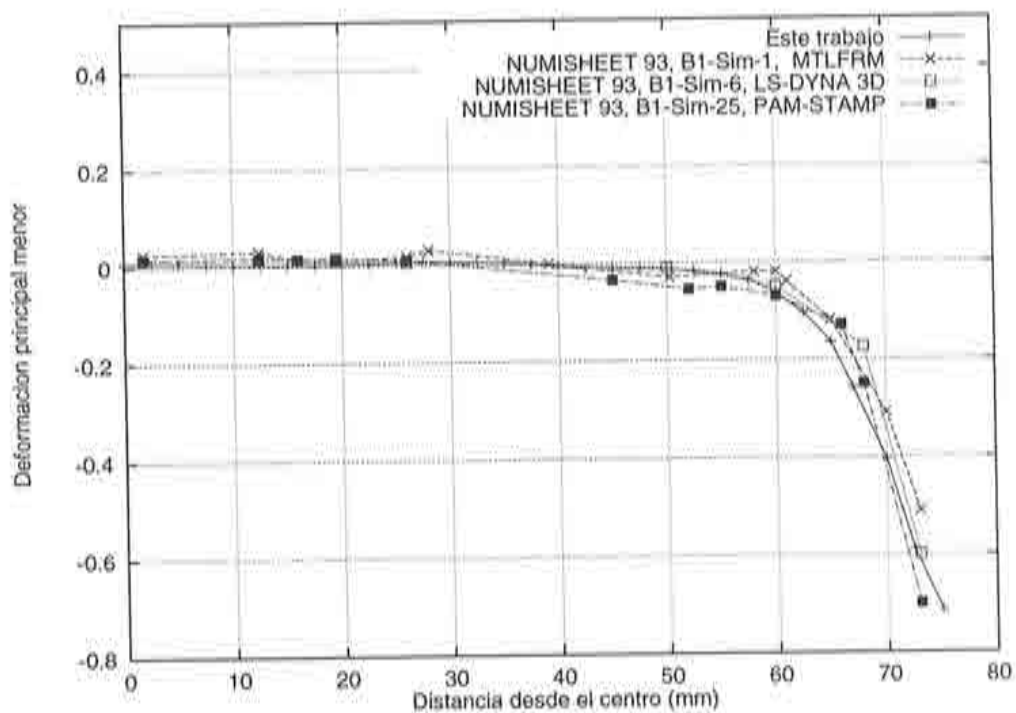


Figura 6.28 Distribución de la deformación principal menor  $\epsilon_2$ , a lo largo de la línea  $O-A$

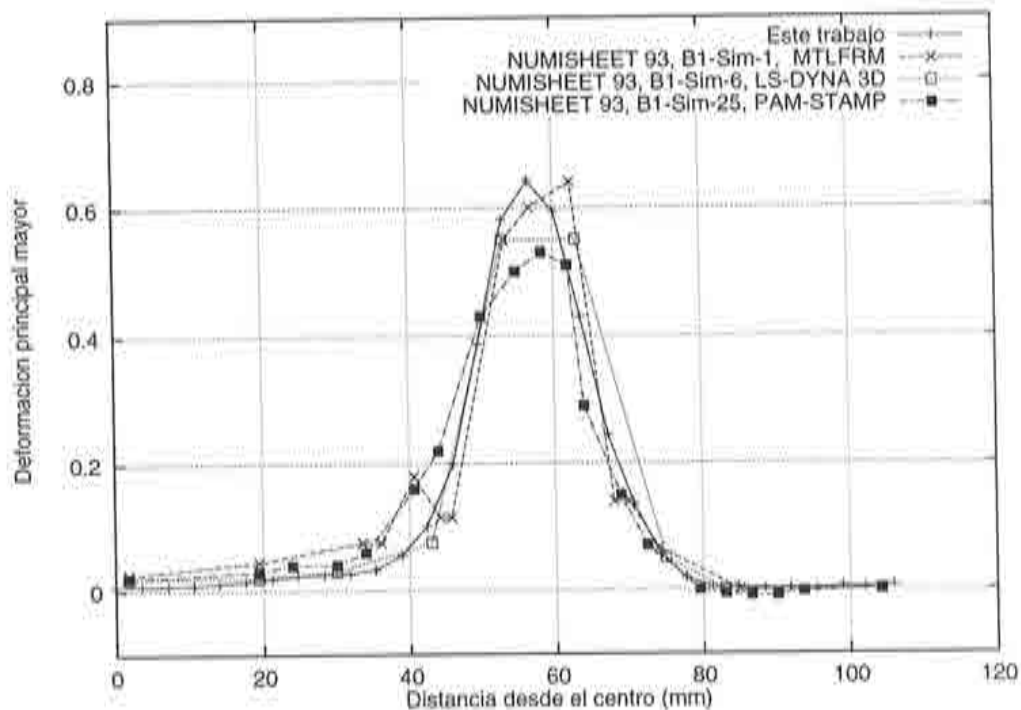


Figura 6.29 Distribución de la deformación principal mayor  $\epsilon_1$ , a lo largo de la línea  $O-B$



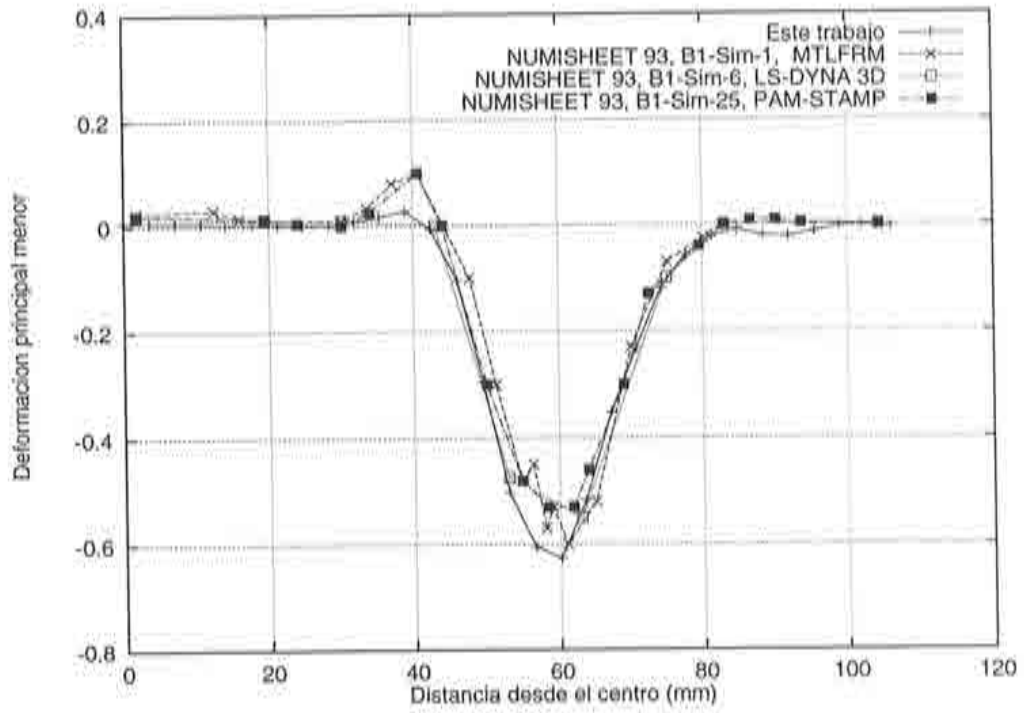


Figura 6.30 Distribución de la deformación principal menor  $\epsilon_2$ , a lo largo de la línea  $O - B$

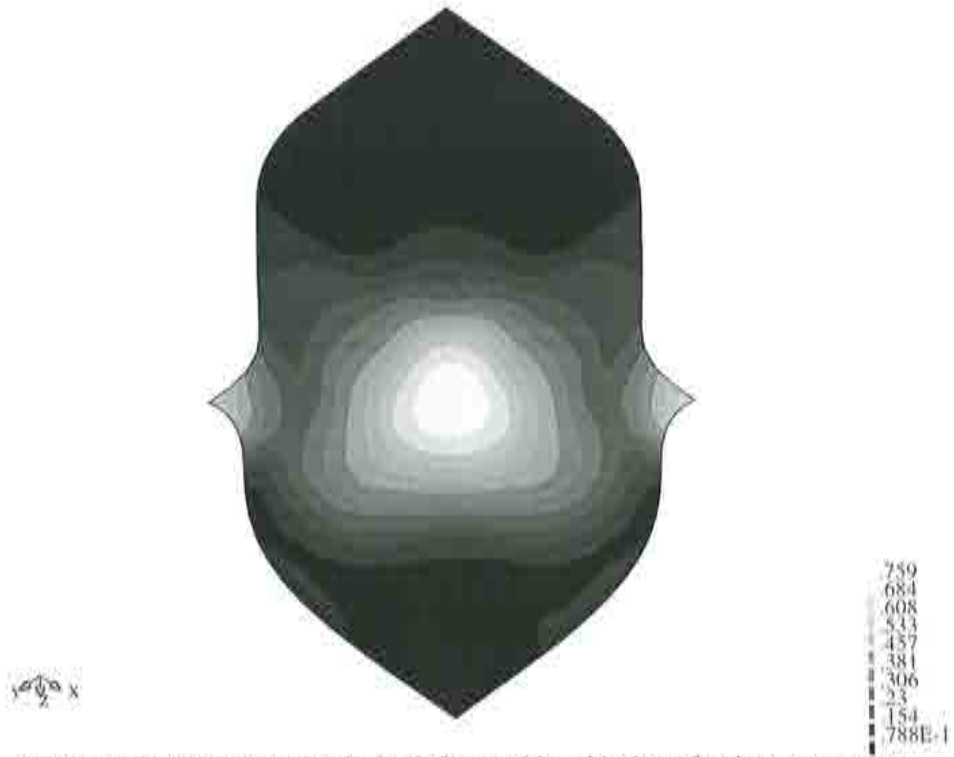


Figura 6.31 Distribución de la deformación plástica efectiva, para una penetración del punzón de  $H = 40$  mm

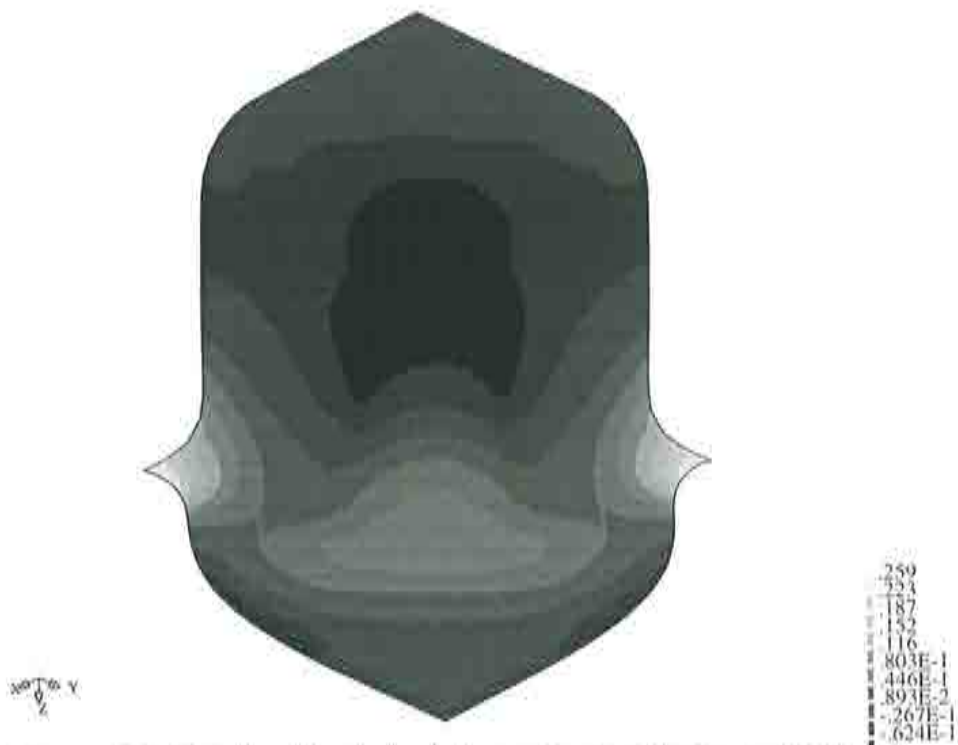


Figura 6.32 Distribución de la deformación logarítmica a través del espesor  $\epsilon_3 = \ln(\frac{h}{h_0})$ , para una penetración del punzón de  $H = 40$  mm

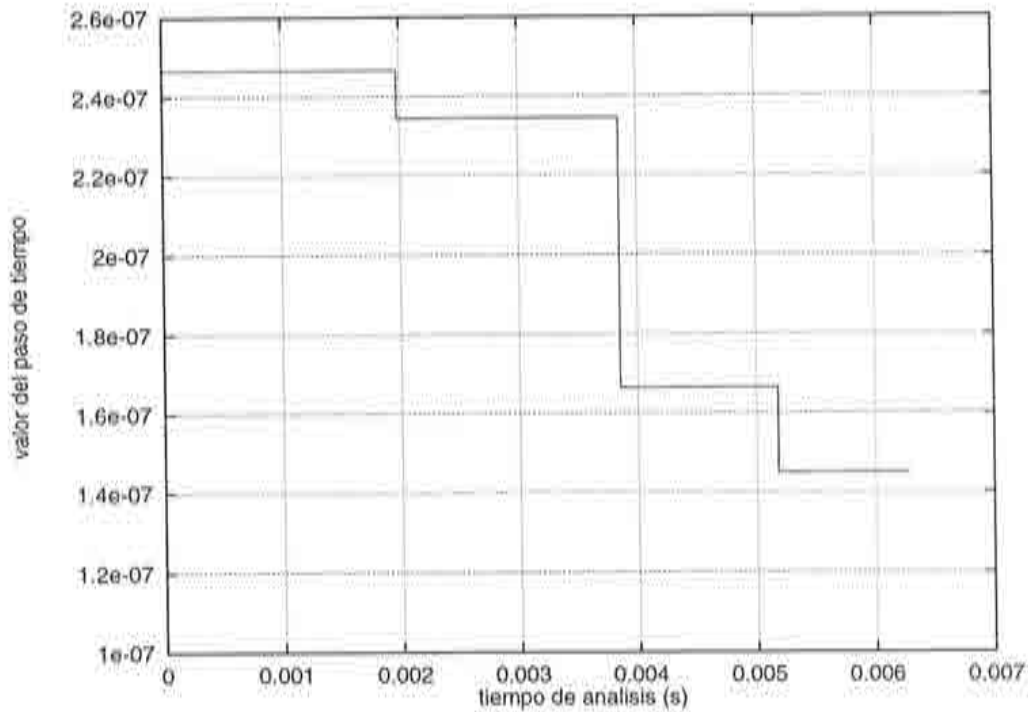


Figura 6.33 Variación del paso de tiempo  $\Delta t$  a lo largo del análisis,  $t_f = 6.28$  ms

Desliz. Acero	Este trabajo BST	Numérico B1-Sim-1 MTLFRM	Numérico B1-Sim-6 LS-DYNA3D	Numérico B1-Sim-25 PAM-STAMP	Experimental promedio
A-A'/15	6.42	6.40	7.16	5.30	6.17
B-B'/15	3.11	3.35	3.73	3.21	3.24
A-A'/40	30.0	28.90	30.03	26.97	27.96
B-B'/40	16.0	16.20	16.43	15.46	15.36

**Tabla 6.5** Comparación de valores de deslizamiento (ver Figura 6.34).

El presente análisis se realizó con un paso de tiempo variable, recalculado cada 8000 pasos (ver Figura 6.33) de acuerdo con el algoritmo de búsqueda del mayor autovalor del sistema discreto (ver capítulo 1, del presente trabajo). El proceso de simulación numérica necesitó de un total de 567 min de CPU para realizar 31612 pasos, funcionando sobre una estación de trabajo Power Challenge-IRIX Release 6.0.1.

De los resultados obtenidos, primero que nada debemos observar la buena respuesta que se obtiene para este complicado ejemplo de embutición profunda en 3D, la cual queda de manifiesto en las Figuras 6.25-6.30 y en la comparación con los valores de deslizamiento experimentales promedio y los numéricos obtenidos por otros investigadores<sup>[N-1]</sup> para penetraciones del punzón de 15 y 40 mm (ver la Tabla 6.5 y Figura 6.34) a lo largo de las líneas  $O-A$  y  $O-B$ .

Puesto que el problema presenta anisotropía, se procederá a estudiar la influencia en la respuesta al pasar de un comportamiento isotrópico  $\bar{R} = 1$  a uno anisótropo con  $\bar{R} = 1.77$ . En las Figuras 6.36 y 6.37, se grafica la influencia del coeficiente de Lankford en la distribución de la deformación logarítmica  $\epsilon_3$  a través del espesor. En las Figuras 6.38 y 6.40 se muestra la distribución final del espesor sobre la chapa, en función del valor del parámetro  $\bar{R}$ . Finalmente en las Figuras 6.41 y 6.42 se grafica la distribución de la deformación logarítmica a través del espesor  $\epsilon_3$ , considerando comportamiento isotrópico, anisótropo normal y los valores experimentales promedio<sup>[N-1]</sup>.

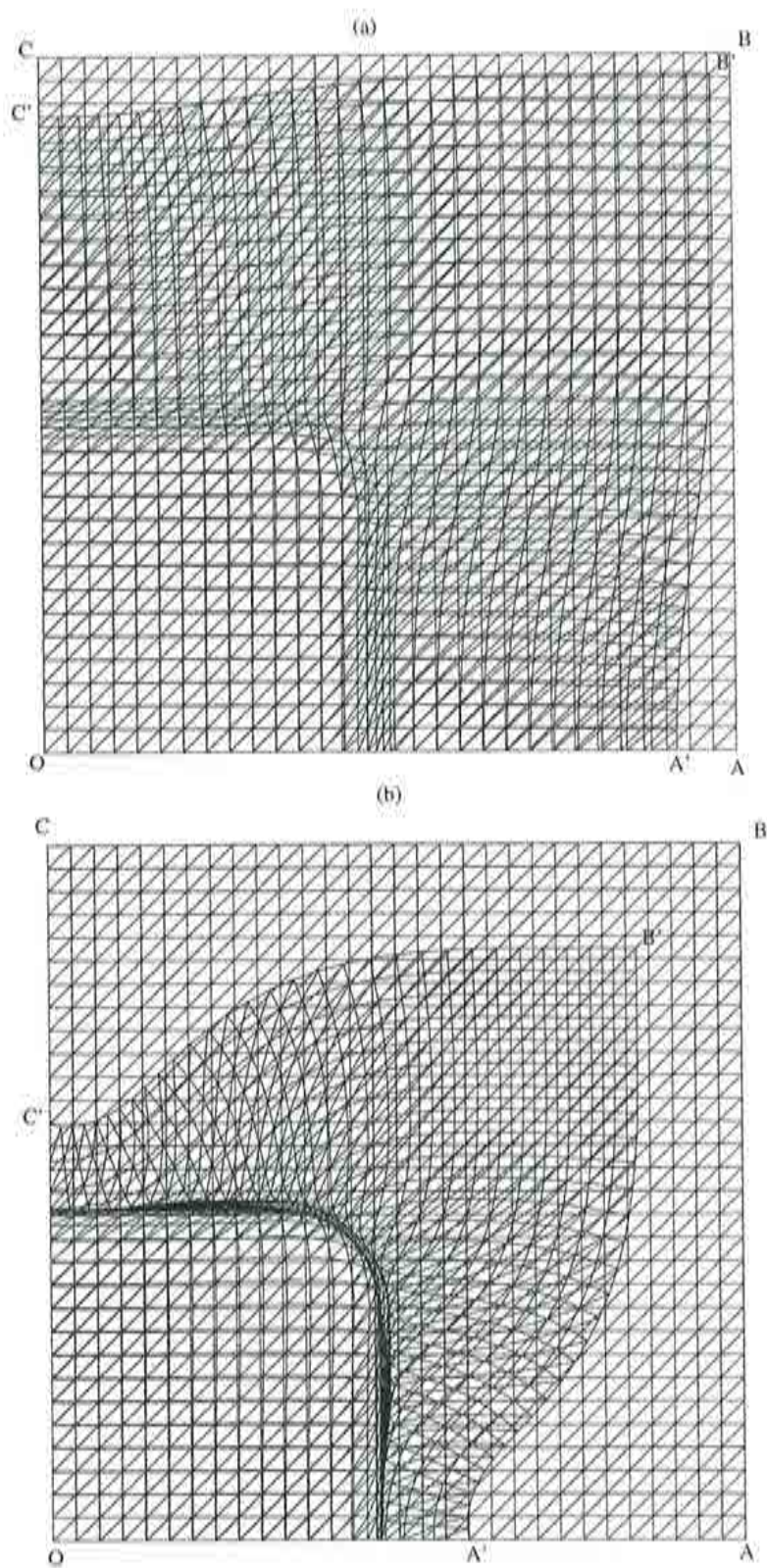


Figura 6.34 Malla original y deformada para una penetración del punzón de (a)  $H = 15$  mm y (b)  $H = 40$  mm.



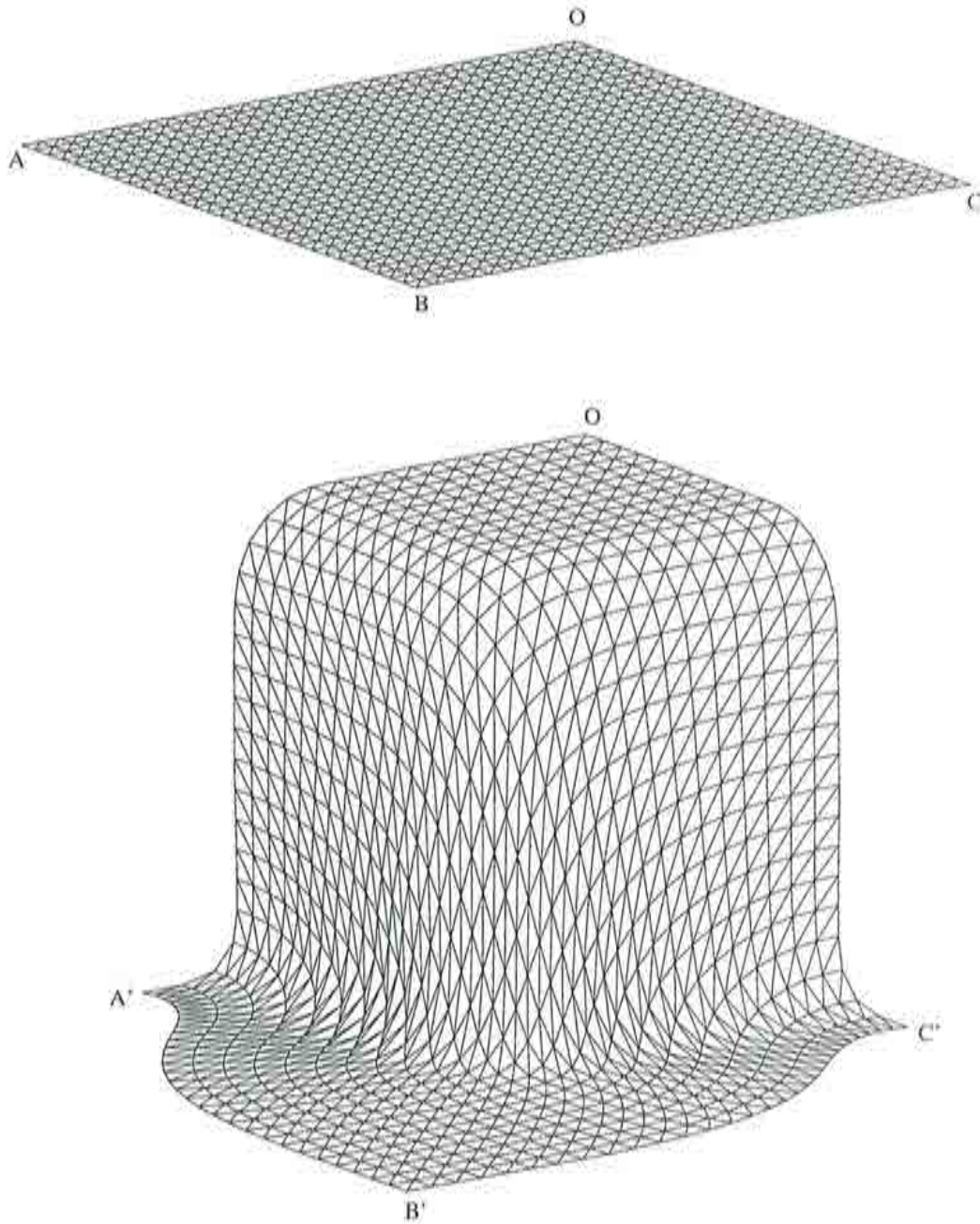


Figura 6.35 Malla original y deformada para una penetración del punzón de  $H = 40$  mm.

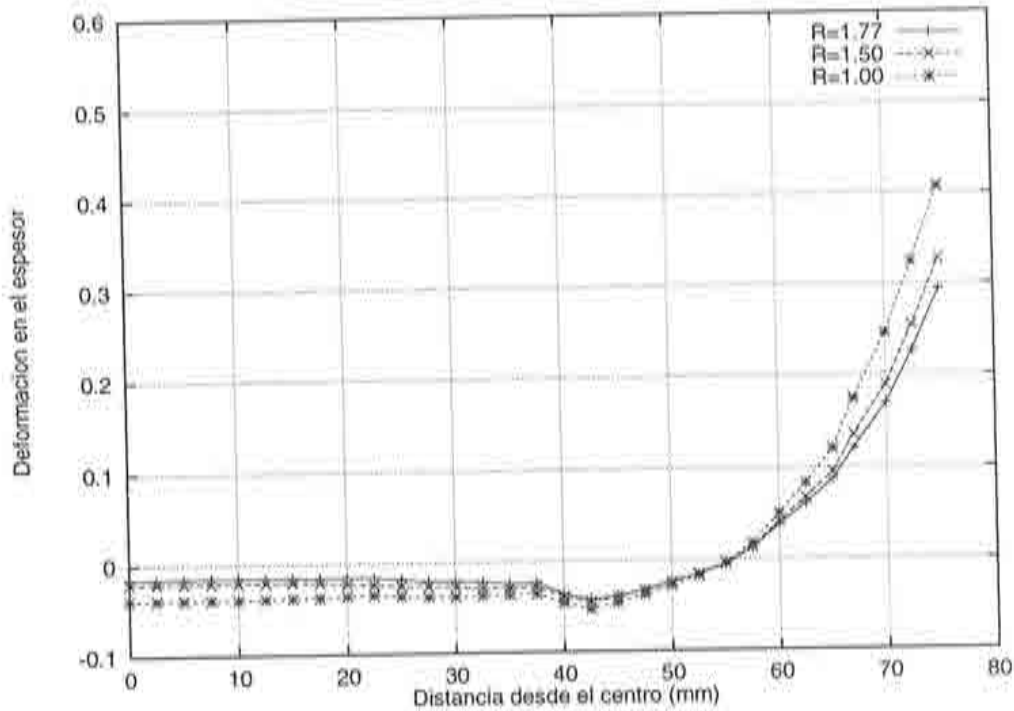


Figura 6.36 Influencia del coeficiente de Lankford  $\bar{R}$ , en la distribución de la deformación en el espesor  $\epsilon_3 = \ln\left(\frac{h}{h_0}\right)$  a lo largo de la línea O - A

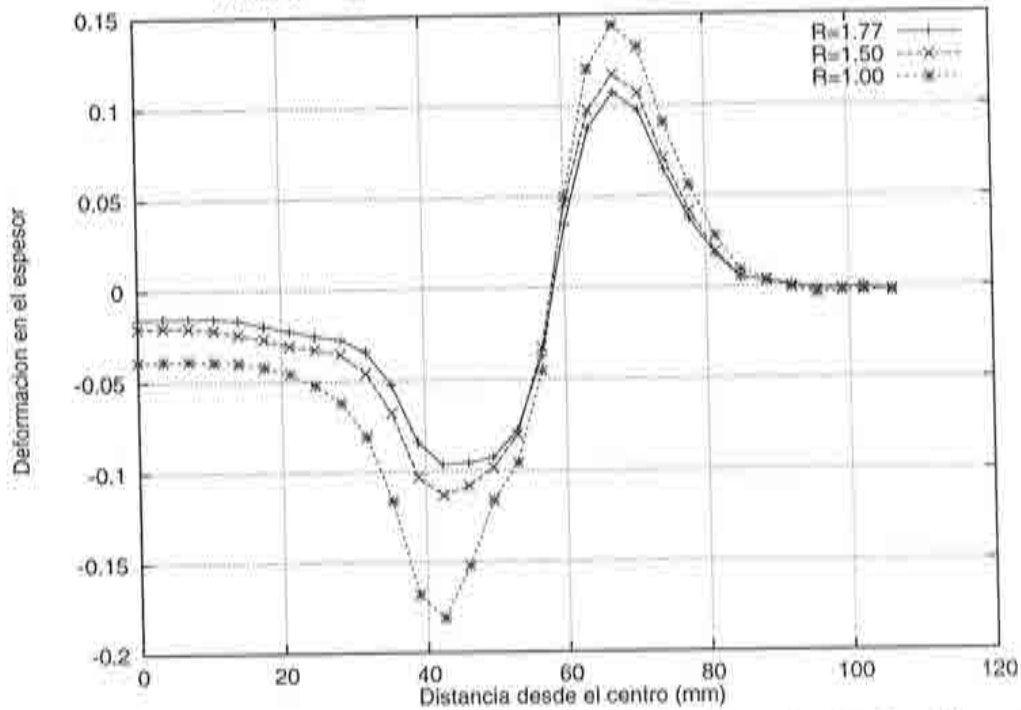


Figura 6.37 Influencia del coeficiente de Lankford  $\bar{R}$ , en la distribución de la deformación en el espesor  $\epsilon_3 = \ln\left(\frac{h}{h_0}\right)$  a lo largo de la línea O - B



Figura 6.38 Influencia de la anisotropía transversal sobre el espesor. Distribución del espesor final en la lámina para  $\bar{R}=1.00$ ,  $h_{max} = 1.17$  y  $h_{min} = 0.65$



Figura 6.39 Influencia de la anisotropía transversal sobre el espesor. Distribución del espesor final en la lámina para  $\bar{R}=1.50$ ,  $h_{max} = 1.08$  y  $h_{min} = 0.696$



Figura 6.40 Influencia de la anisotropía transversal sobre el espesor. Distribución del espesor final en la lámina para  $\bar{R}=1.77$ ,  $h_{max} = 1.05$  y  $h_{min} = 0.707$

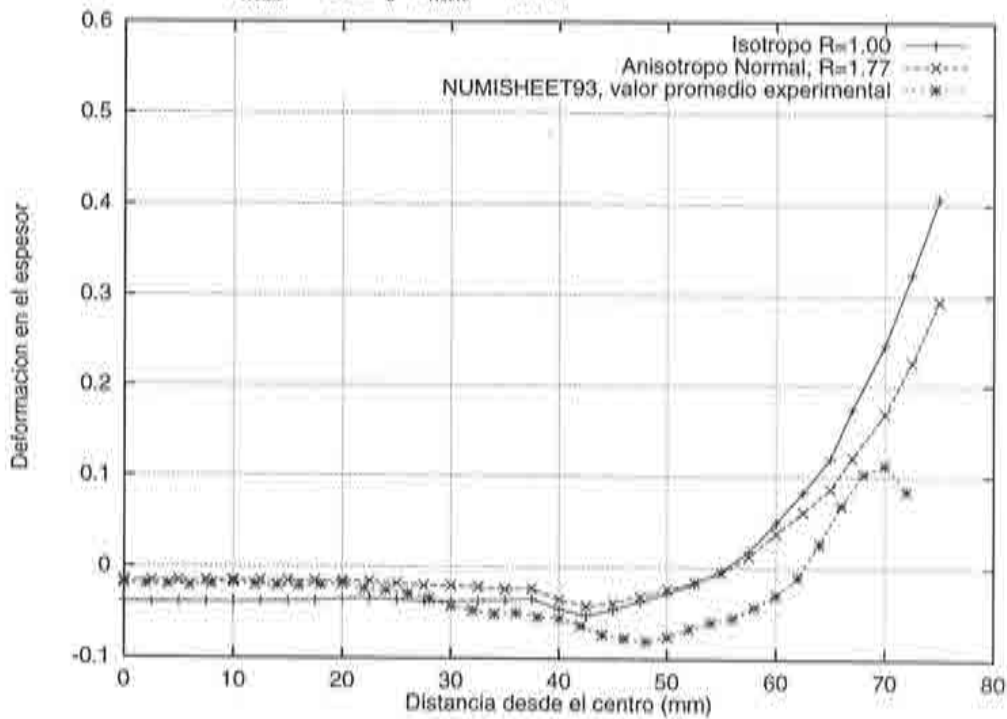


Figura 6.41 Influencia de la anisotropía transversal sobre el espesor. Comparación de la distribución de deformaciones a través del espesor, línea  $O - A$



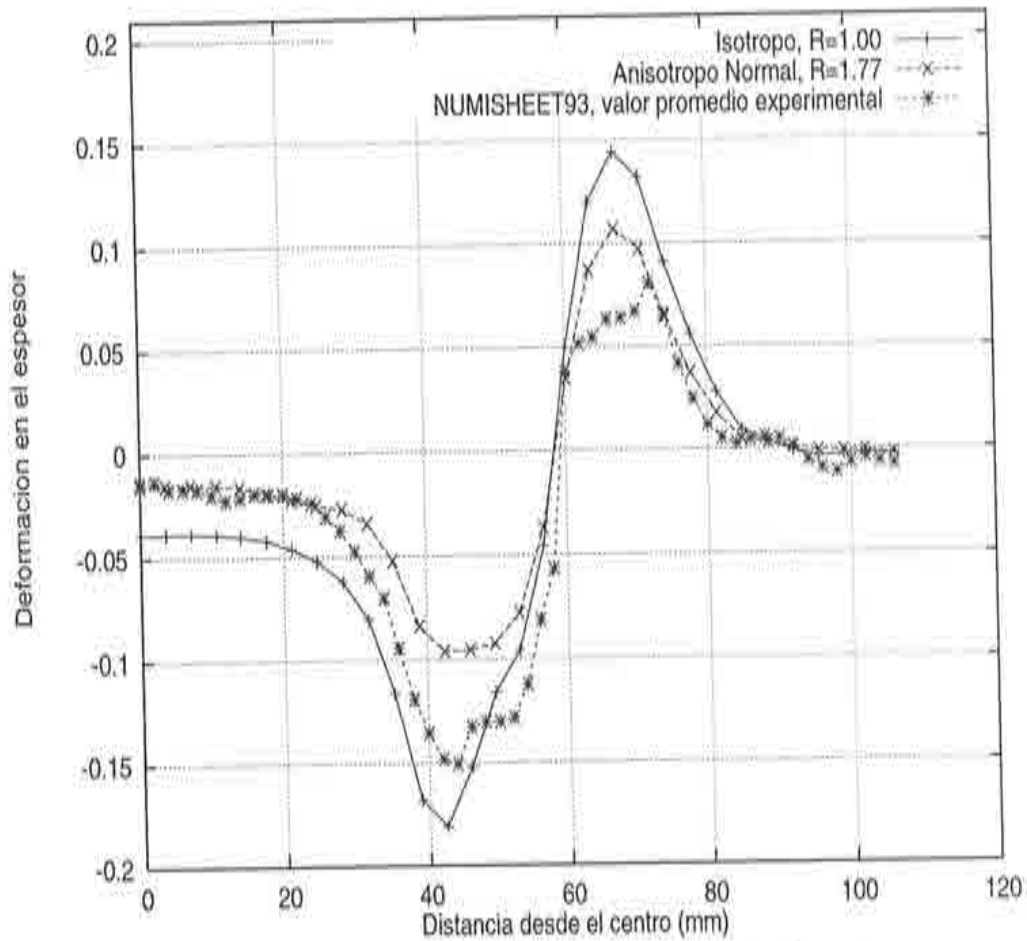


Figura 6.42 Influencia de la anisotropía transversal sobre el espesor. Comparación de la distribución de deformaciones a través del espesor, línea  $O - B$

La influencia de la anisotropía transversal sobre el comportamiento del material, de acuerdo con las Figuras 6.36 y 6.37, es que a medida que aumenta el valor de  $\bar{R}$  el material se hace más resistente en la dirección del espesor, esto nos indica que la capacidad de embutición de la chapa aumenta a medida que  $\bar{R}$  crece, puesto que las deformaciones a través del espesor disminuyen y por lo tanto la lámina tiene más capacidad de desarrollar deformaciones plásticas antes de llegar a la rotura, este comportamiento también queda de manifiesto en las Figuras 6.38, 6.39 y 6.40 en donde, los valores máximos tanto de estiramiento  $h_{min}$  como de engruesamiento  $h_{max}$  de la chapa son más bajos a medida que el valor de  $\bar{R}$  aumenta<sup>[B-2],[O-1]</sup>.

Las Gráficas 6.41 y 6.42 muestran la importancia de la anisotropía plástica sobre el comportamiento de la chapa. En donde el efecto de no considerar la anisotropía en los cálculos produce una distribución poco precisa de las deformaciones en comparación con los valores experimentales promedio.

A continuación se estudia el mismo problema considerando que el material constituyente es aluminio. En este caso la superficie de fluencia a utilizar será la definida por el criterio de Hill mejorado, debido al *comportamiento anómalo* que presenta la superficie de fluencia definida por el primer criterio de Hill<sup>[H-2]</sup>, para coeficientes de Lankford menores que uno (ver capítulo 3).

Al igual que en el caso del acero, el valor de  $\bar{R}$  se obtiene a partir de la media de los valores de  $R$  definidos en tres direcciones contenidas en el plano<sup>[N-1]</sup>.

Dirección	R
0°	0.71
45°	0.58
90°	0.70

Tabla 6.6

$$\bar{R} = \frac{(R_0 + 2R_{45} + R_{90})}{4} = 0.64 \quad (6.5)$$

el valor del exponente  $M$  de la superficie de fluencia de Hill 79, se obtiene a partir de la siguiente relación (ecuación 3.95):

$$M = \frac{\ln(\bar{R} + 1)}{\ln 2} + 1 = 1.70 \quad (6.6)$$

Las propiedades para el Aluminio y los parámetros del proceso se definen en la Tabla 6.7:

Propiedades del material	
Módulo de elasticidad	71 GPa
Coefficiente de Poisson	0.33
Densidad	2700 Kg/m <sup>3</sup>
Curva tensión-deformación	$\bar{\sigma} = 576.79(0.01658 + \bar{\epsilon}_p)^{0.3593}$
Características geométricas	
Dimensiones de la chapa	150x150 mm
Espesor de la chapa	0.81 mm
Dimensiones del punzón	70x70 mm

Tabla 6.7

Parámetros del proceso	
Desplazamiento del punzón	15 mm
Velocidad del punzón	10 sen (1340 t) mm/ms
Tiempo de análisis	2.35 ms
Coefficiente de rozamiento	0.162
Fuerza en los pisadores	19.6 KN

Tabla 6.8

El análisis se realizó en una estación de trabajo Silicon Graphics-Indigo R400, con un tiempo total de 474 min y 9770 pasos de tiempo variables.

En las Figuras 6.43 y 6.44 se grafica la distribución de la deformación logarítmica a través del espesor para una penetración del punzón de  $H = 15$  mm, la que se compara con los valores experimentales<sup>[N-1]</sup> y los valores numéricos dados por el código implícito ABAQUS (B1-Sim-27<sup>[N-1]</sup>). En la Figura 6.45 se muestra la superposición de las mallas original y deformada para  $H = 15$  mm, y en la Tabla 6.9 se presentan los valores de deslizamiento obtenidos. En la Figura 6.46 se muestra la distribución de la deformación logarítmica  $\epsilon_3$  a través del espesor.

Finalmente en la Figura 6.47 se grafican la deformación logarítmica a través del espesor a lo largo de la línea  $O - B$ , obtenida con el acero para  $H = 40$  mm y para el aluminio para  $H = 15$  mm.

De los resultados obtenidos para este ejemplo, podemos decir que la distribución de la deformación a través del espesor  $\epsilon_3$  en el aluminio se localiza más rápidamente que en el caso del acero, puesto que para penetraciones del punzón de  $H = 15$  mm se obtienen valores de deformación en el espesor mayores a los obtenidos con  $H = 40$  mm en el caso del acero, siendo mayor esta diferencia en la zona de esquina del punzón ver la Figura 6.46, dando origen a la rotura de la chapa para penetraciones superiores a 20 mm<sup>[N-3]</sup>.

Desliz. Alum	Este trabajo <i>BST</i>	Numérico B1-Sim-6 LS-DYNA3D	Numérico B1-Sim-27 ABAQUS	Experimental promedio
A-A'	5.02	5.76	6.58	5.35
B-B'	3.90	2.95	3.75	3.02

Tabla 6.9 Comparación de valores de deslizamiento,  $\bar{R} = 0.64$



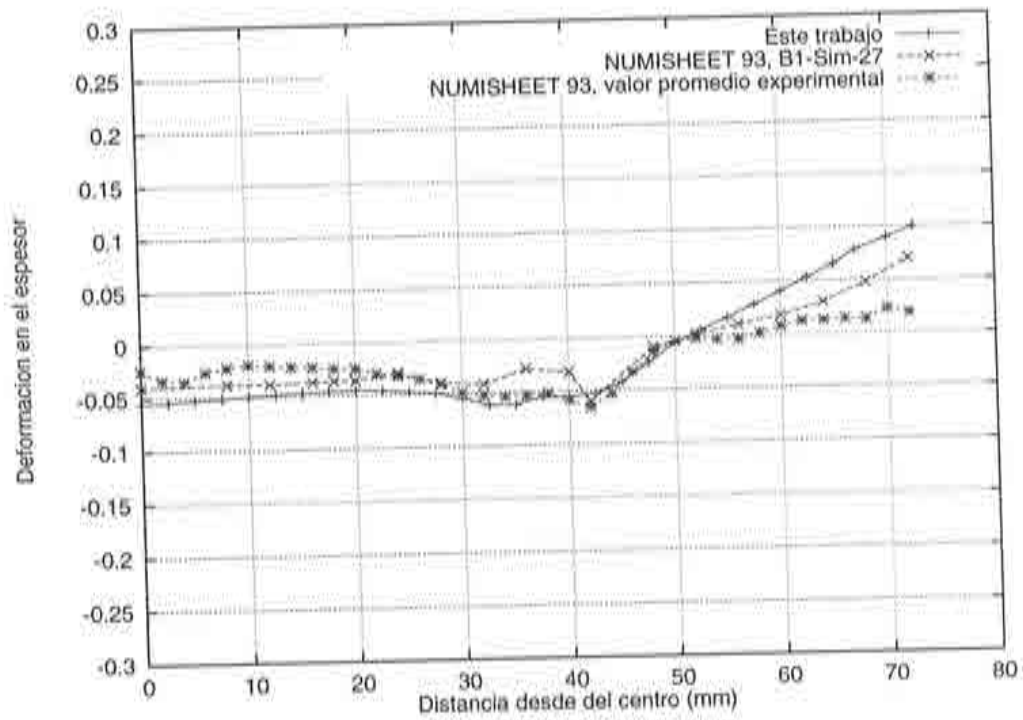


Figura 6.43 Distribución de la deformación logarítmica a través del espesor  $\epsilon_3 = \ln(h/h_0)$ , a lo largo de la línea O - A

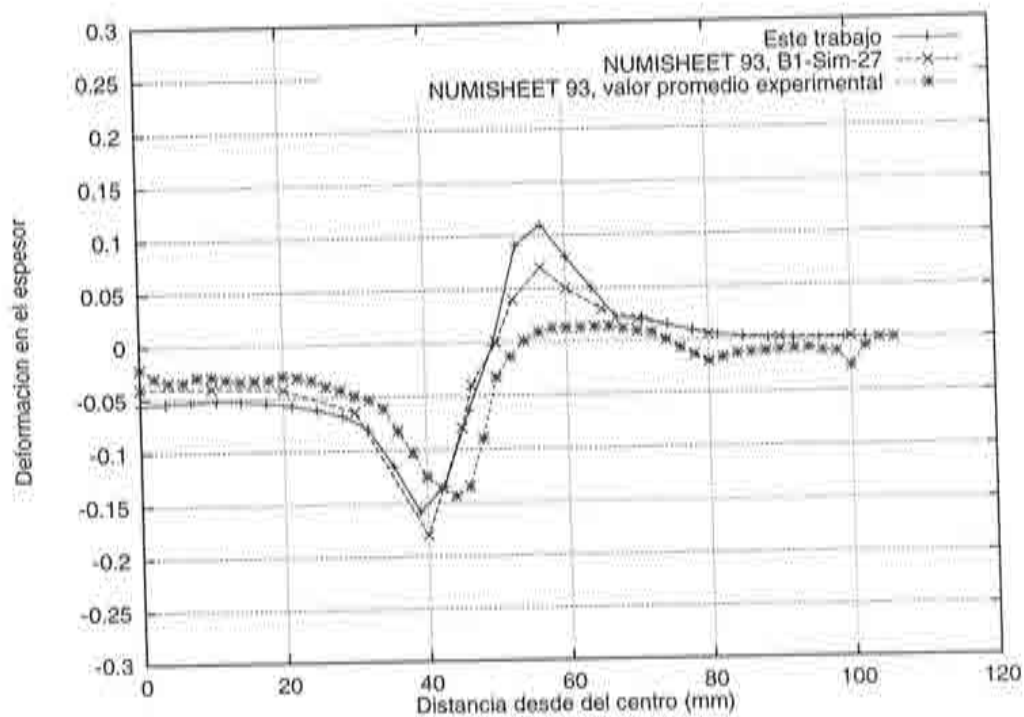


Figura 6.44 Distribución de la deformación logarítmica a través del espesor  $\epsilon_3 = \ln(h/h_0)$ , a lo largo de la línea O - B



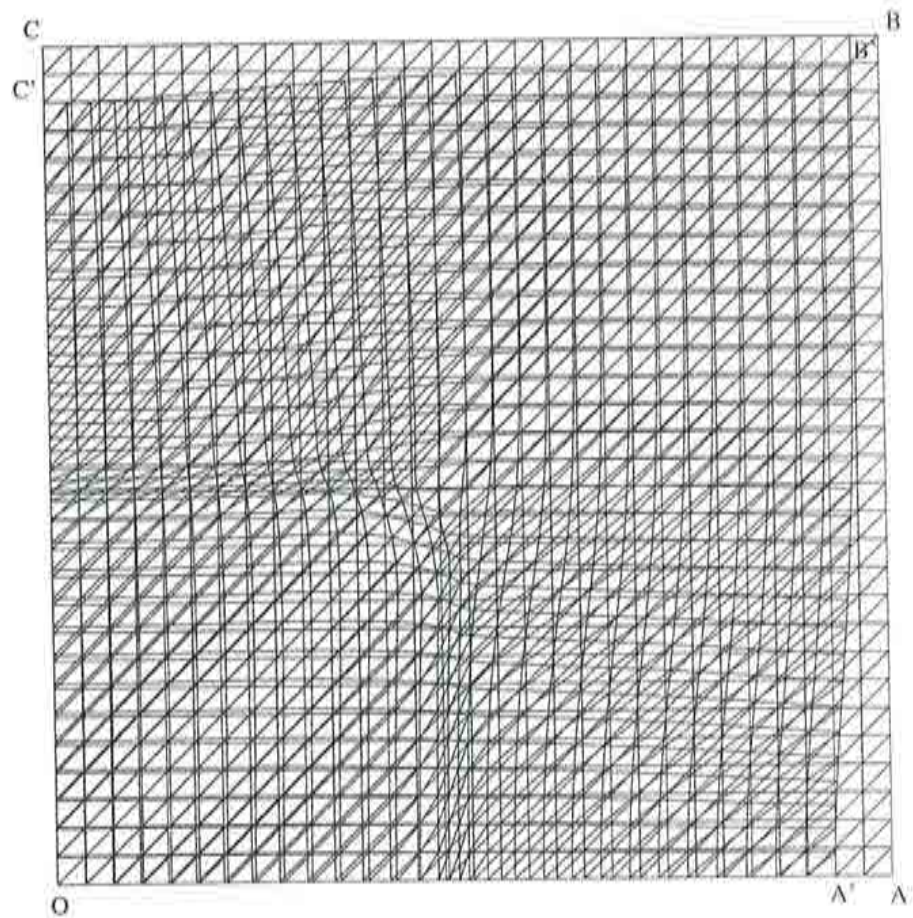


Figura 6.45 Malla original y deformada para una penetración del punzón de  $H = 15$  mm, Aluminio

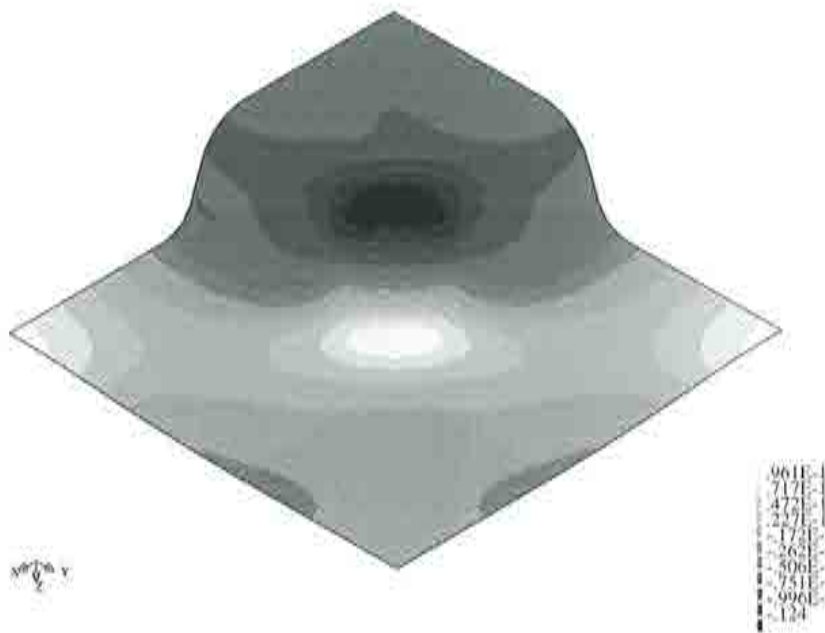


Figura 6.46 Distribución de la deformación logarítmica a través del espesor  $\epsilon_3 = \ln(\frac{h}{h_0})$  para  $H = 15$  mm, Aluminio

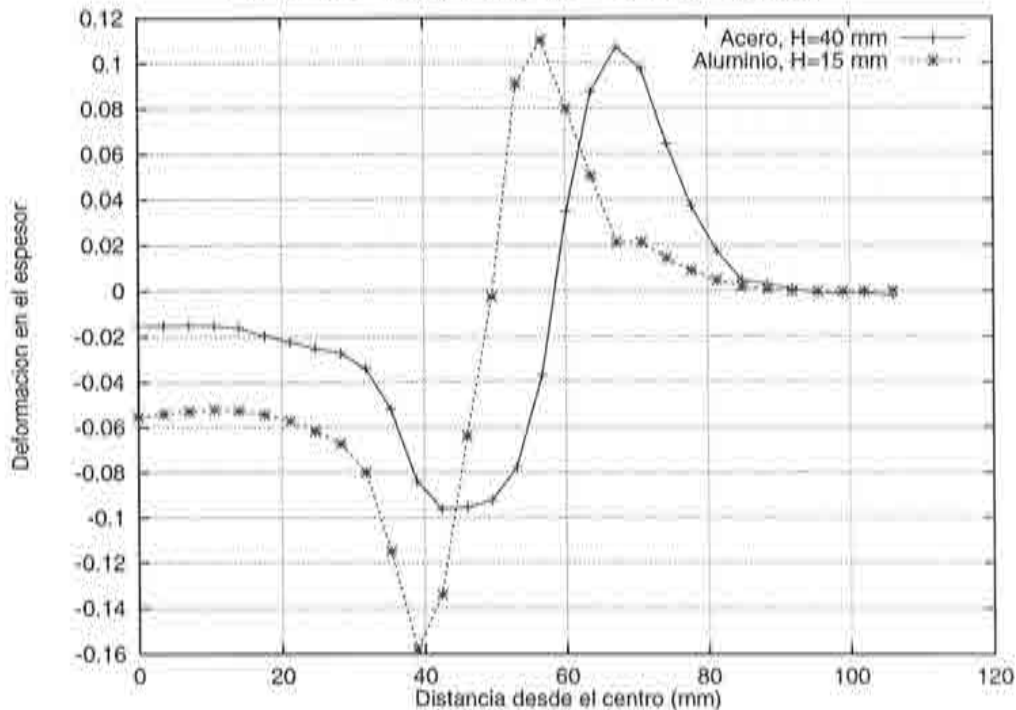


Figura 6.47 Comparación de la distribución de la deformación logarítmica a través del espesor  $\epsilon_3 = \ln(\frac{h}{h_0})$  a lo largo de la línea  $O - B$ , para Acero con  $H = 40$  mm y Aluminio con  $H = 15$  mm

### 6.2.4 Test LDH<sup>[C-1],[N-2]</sup>

A continuación se presenta el primer problema de embutición, propuesto en el contexto de NUMISHEET'96<sup>[N-2]</sup>. El cual corresponde al test *LDH* (Limiting Dome Height), en este test una chapa rectangular es restringida en un contorno mediante un freno, y un punzón hemisférico se desplaza hasta alcanzar una altura de  $H = 30$  mm. La geometría de las herramientas y las dimensiones de la chapa se presentan en la Figura 6.48. Se consideran tres materiales diferentes; acero templado (*IF*), acero de alta resistencia (*HS*) y aluminio (*AL*), estudiándose para cada uno de ellos la distribución final de deformaciones principales sobre la chapa. Las propiedades de los tres materiales se presentan en la Tabla 6.10. Los espesores asociados a cada uno de los tres materiales a analizar se presentan en la Tabla 6.11 y los parámetros del proceso se muestran en la Tabla 6.12.

En la Figura 6.49 se presenta la discretización de elementos finitos empleada, en donde tanto el punzón hemisférico y la matriz se han modelado con elementos triangulares rígidos, los pisadores se modelan con elementos de sólido rígidos y para la chapa se eligen 1800 elementos del tipo *BST*, ver la Figura 6.50.

<i>IF</i>	
Módulo de elasticidad	206 GPa
Coefficiente de Poisson	0.30
Densidad	7800 Kg/m <sup>3</sup>
Coefficiente de Lankford $\bar{R}$	1.82
Curva tensión-deformación uniaxial	$\bar{\sigma} = 526.00(0.00580 + \bar{\epsilon}_p)^{0.233}$
<i>HS</i>	
Módulo de elasticidad	206 GPa
Coefficiente de Poisson	0.30
Densidad	7800 Kg/m <sup>3</sup>
Coefficiente de Lankford $\bar{R}$	1.04
Curva tensión-deformación uniaxial	$\bar{\sigma} = 734.00(0.01350 + \bar{\epsilon}_p)^{0.156}$
<i>AL</i>	
Módulo de elasticidad	69 GPa
Coefficiente de Poisson	0.33
Densidad	2700 Kg/m <sup>3</sup>
Coefficiente de Lankford $\bar{R}$	0.64
Curva tensión-deformación uniaxial	$\bar{\sigma} = 488.00(0.00715 + \bar{\epsilon}_p)^{0.232}$

Tabla 6.10



Características geométricas de la chapa	
Dimensiones	180x100 mm
Espesor <i>IF</i>	1.00 mm
Espesor <i>HS</i>	0.92 mm
Espesor <i>AL</i>	0.92 mm

Tabla 6.11

Parámetros del proceso	
Desplazamiento del punzón	30 mm
Velocidad del punzón	10 sen(667 <i>t</i> ) mm/ms
Tiempo de análisis	4.71 ms
Coefficiente de rozamiento:	
<i>IF</i>	0.11
<i>HS</i>	0.11
<i>AL</i>	0.10
Fuerza en los pisadores	
<i>IF, HS y AL</i>	300.0 KN

Tabla 6.12

Es importante tener en cuenta que la geometría original de las herramientas (ver Figura 6.48) incorpora el freno el cual limita el flujo de metal a través de él, haciendo que la distribución final de las deformaciones en el espesor sea más uniforme previniendo la localización de las mismas<sup>[H-4]</sup>. El problema numérico asociado a este tipo geometrías en códigos explícitos, es el tamaño de los elementos requeridos en esta zona que condicionan el paso de tiempo crítico de toda la discretización, con el fin de evitar este problema muchos investigadores recurren al reemplazo del freno por una fuerza por unidad de longitud que produzca los mismos efectos restrictivos del flujo de material a través de él o consideran un coeficiente de rozamiento más elevado en la zona comprendida entre el freno y la parte bajo los pisadores para la lámina.

En el presente trabajo se ha adoptado la solución de aumentar el coeficiente de rozamiento entre los pisadores-chapa y matriz-chapa a modo de poder representar el comportamiento del freno de una forma aproximada. En las Figuras 6.51 a 6.56 se grafican la distribuciones de las deformaciones principales a lo largo de las líneas *O-A*, *O-B* y *B-C* para dos diferentes configuraciones del proceso de simulación numérica  $H = 20$  y  $H = 30$  mm considerando acero templado (*IF*). En las Figuras 6.57 y 6.58 se muestra la distribución de la relación de espesores ( $\frac{h}{h_0}$ ) y la distribución de la deformación plástica efectiva



para una penetración del punzón de  $H = 30$  mm, para acero templado (*IF*). A continuación en las Figuras 6.59 a 6.64 y 6.65 a 6.66 se presenta el mismo análisis considerando acero de alta resistencia (*HS*). En las Figuras 6.67 a 6.72 se presentan las curvas de distribución de deformaciones principales a lo largo de los contornos  $O - A$ ,  $O - B$  y  $B - C$  para dos diferentes alturas de penetración del punzón considerando como material constituyente aluminio (*AL*), y en las Figuras 6.73 y 6.74 se muestran la distribución de la relación de espesores y de la deformación plástica efectiva para una altura de penetración del punzón de  $H = 30$  mm.

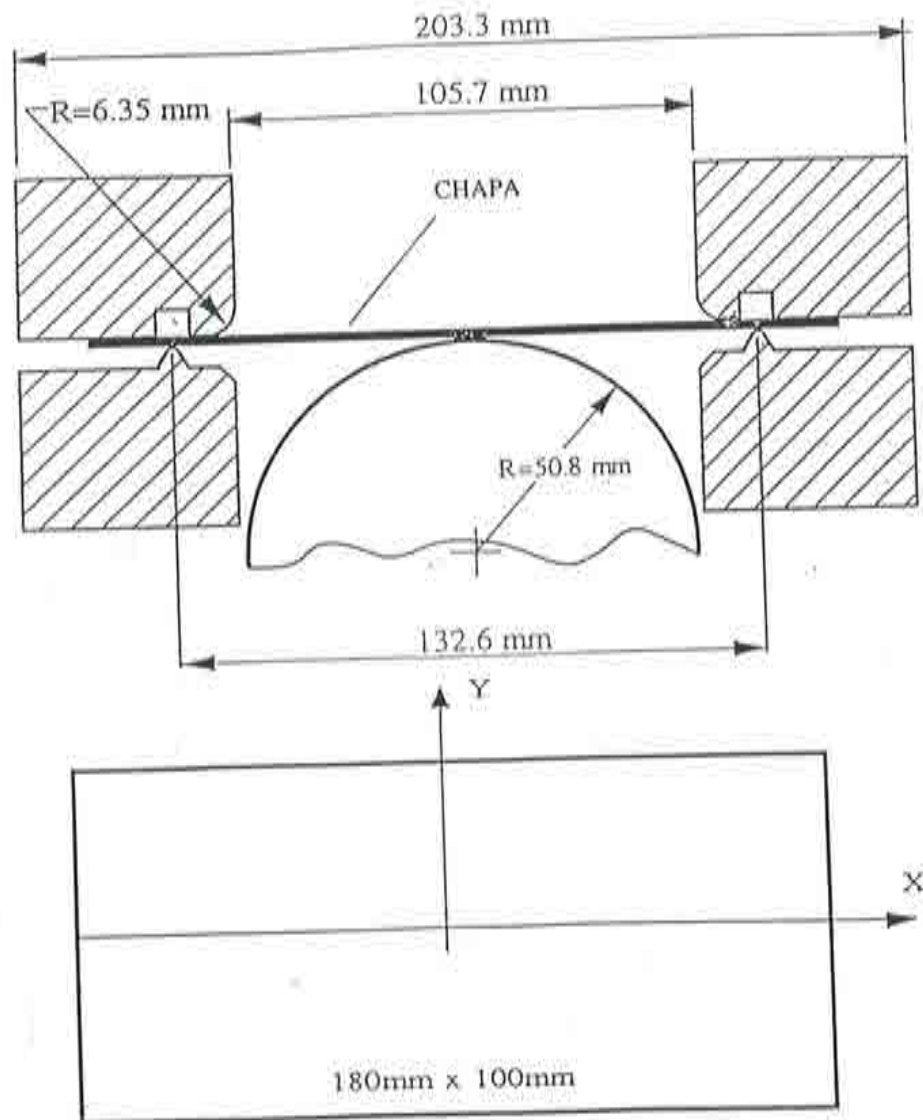


Figura 6.48 Geometría de las herramientas utilizadas y dimensiones de la chapa empleada.

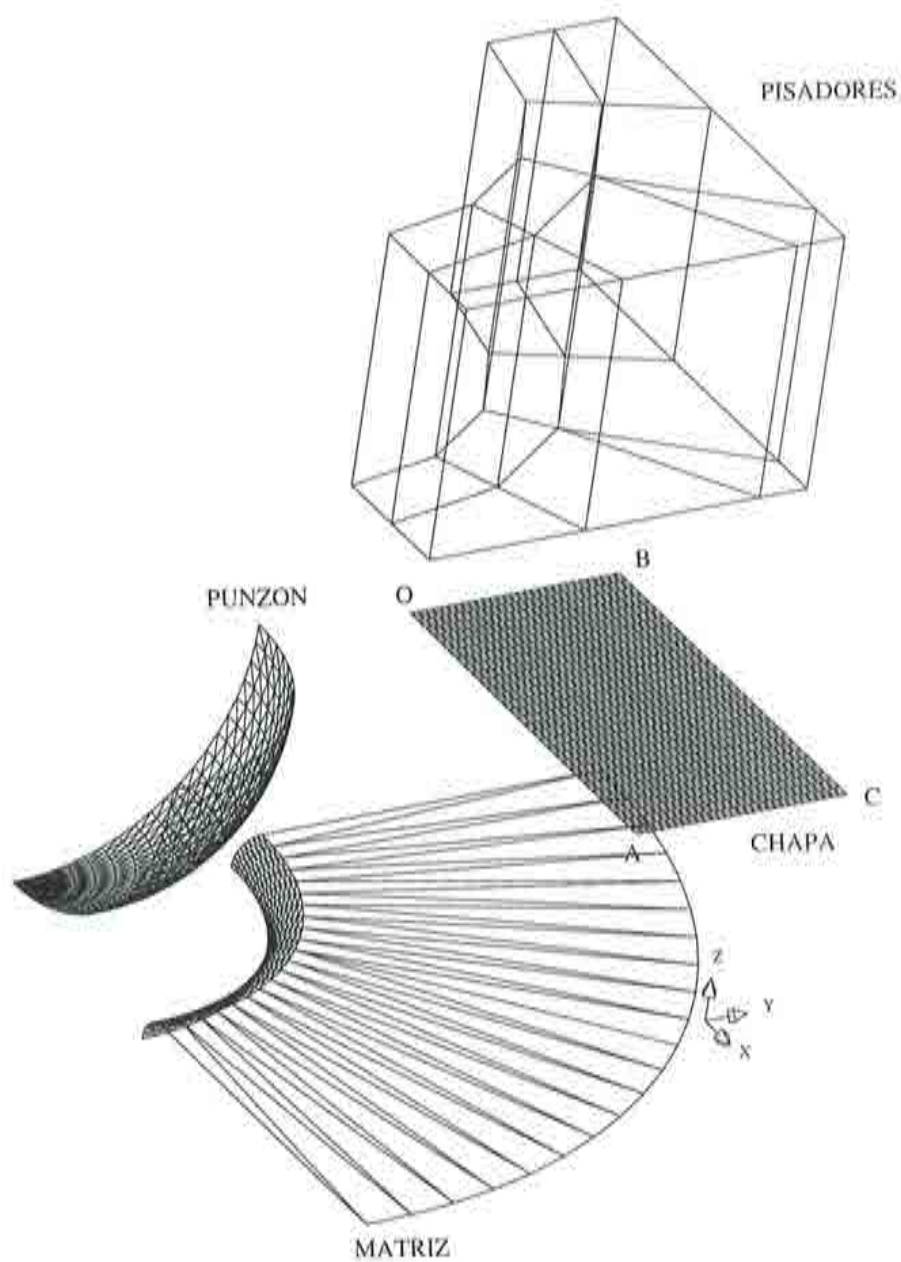


Figura 6.49 LDH: discretización de elementos finitos de las herramientas y chapa. Punzón y matriz elementos triangulares rígidos, pisadores elementos de sólidos rígidos y chapa elementos del tipo *BST*.

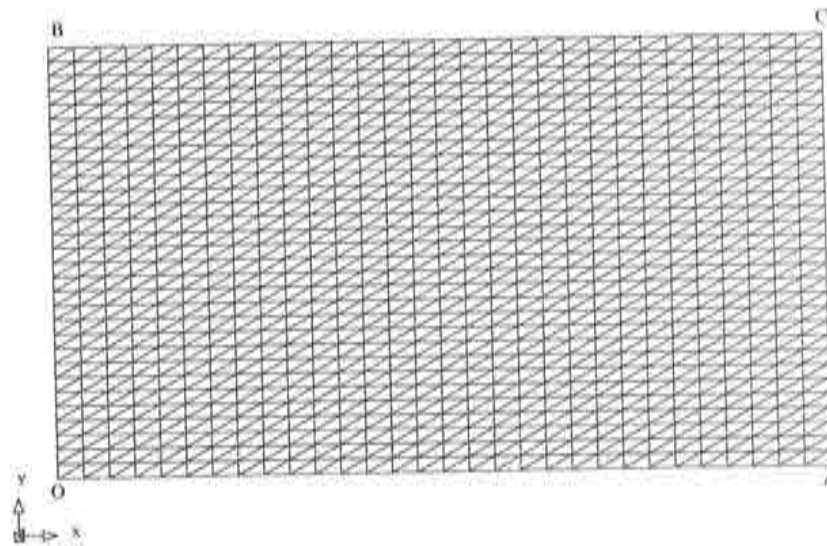


Figura 6.50 Discretización de la chapa: 1800 elementos del tipo *BST*.

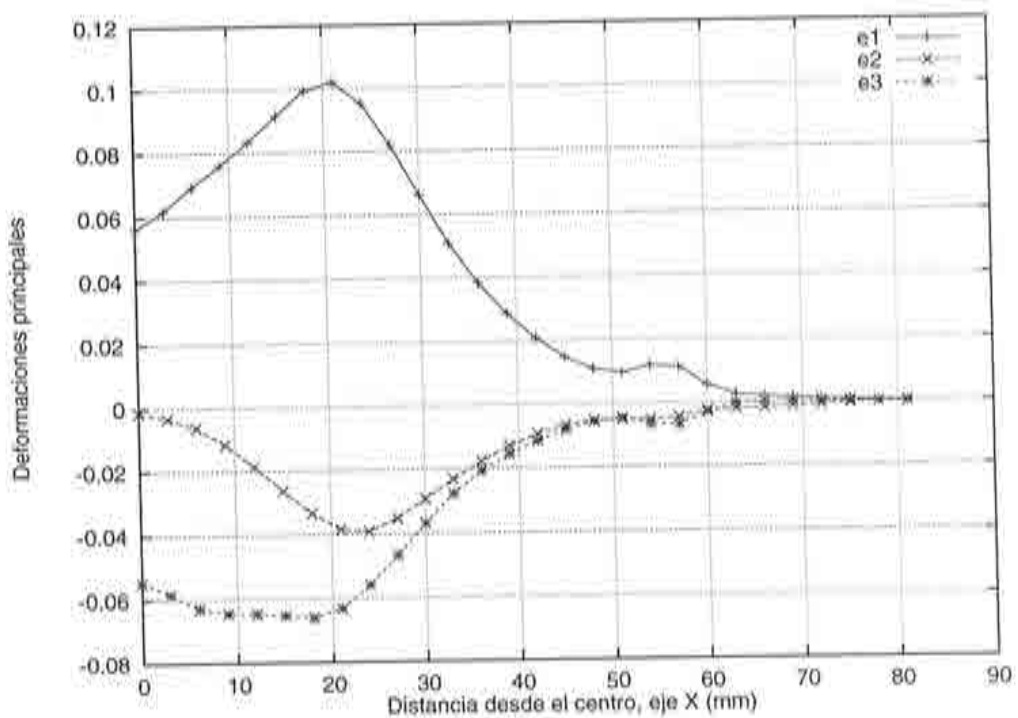


Figura 6.51 Deformaciones principales a lo largo de la línea  $O - A$ . Material acero (IF); altura de penetración del punzón  $H = 20$  mm.

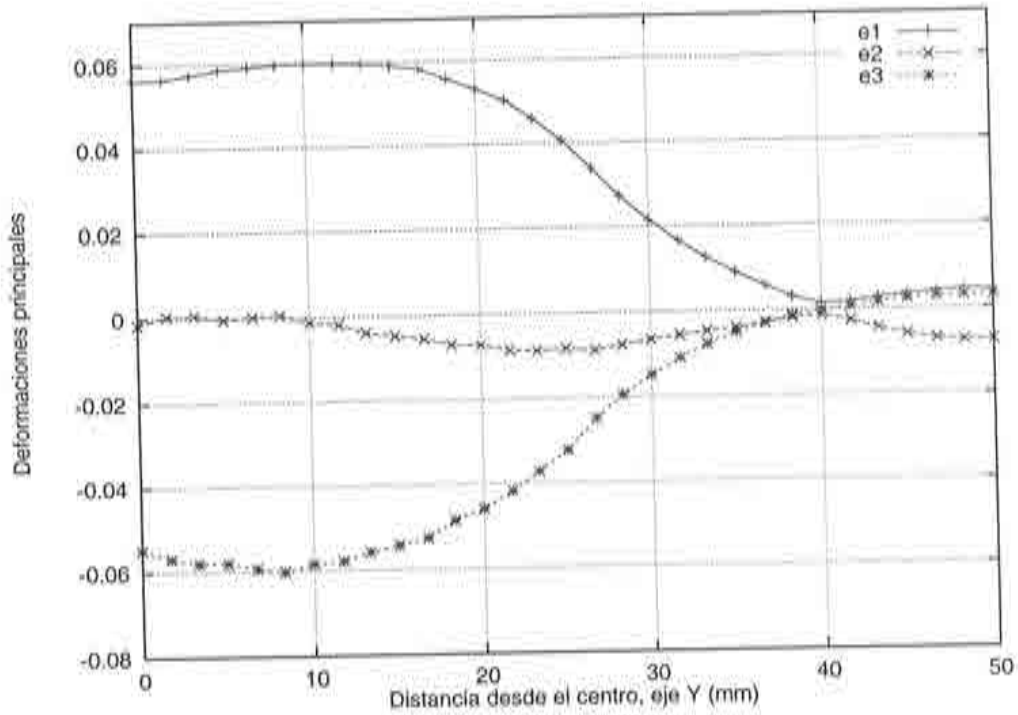


Figura 6.52 Deformaciones principales a lo largo de la línea  $O - B$ .  
Material acero (IF); altura de penetración del punzón  $H = 20$  mm.

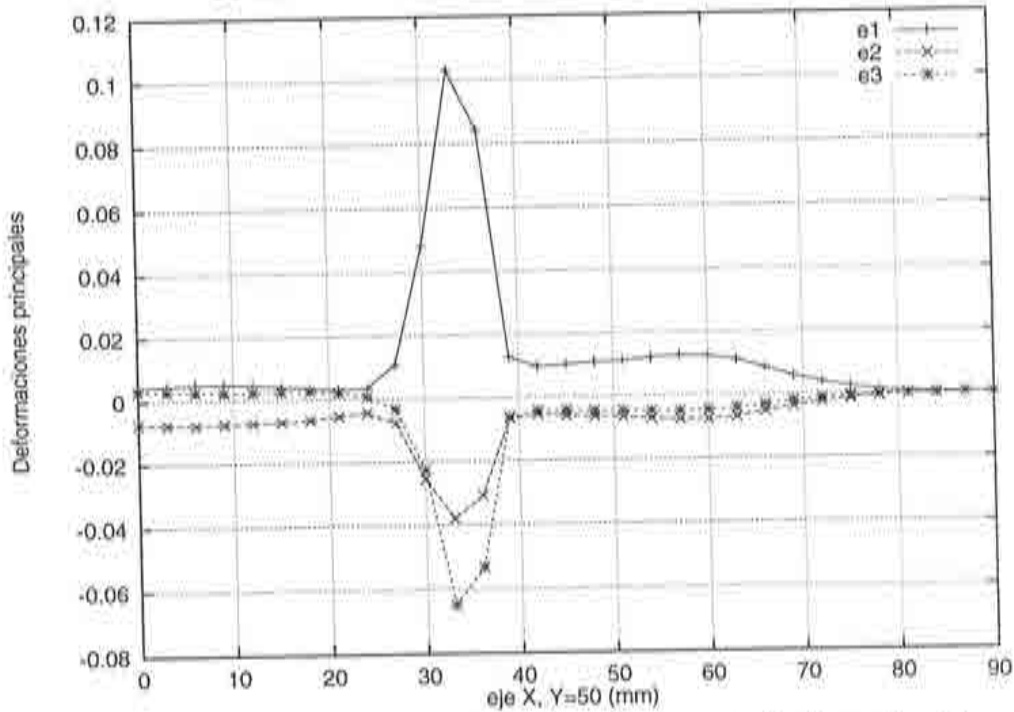


Figura 6.53 Deformaciones principales a lo largo de la línea  $B - C$ .  
Material acero (IF); altura de penetración del punzón  $H = 20$  mm.



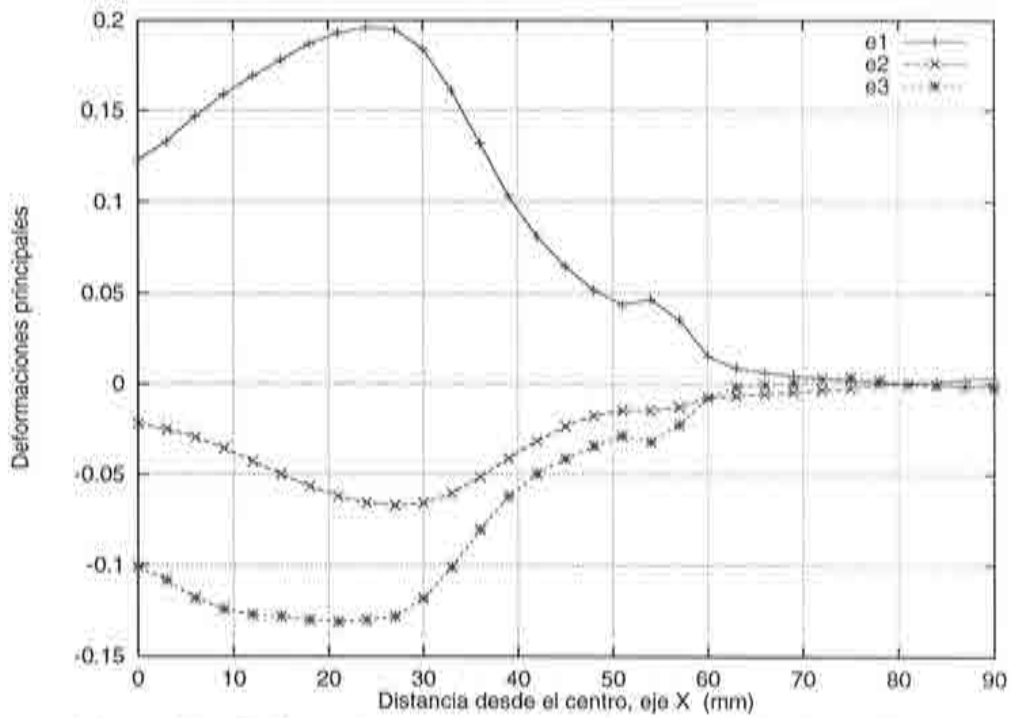


Figura 6.54 Deformaciones principales a lo largo de la línea  $O - A$ . Material acero (IF); altura de penetración del punzón  $H = 30$  mm.

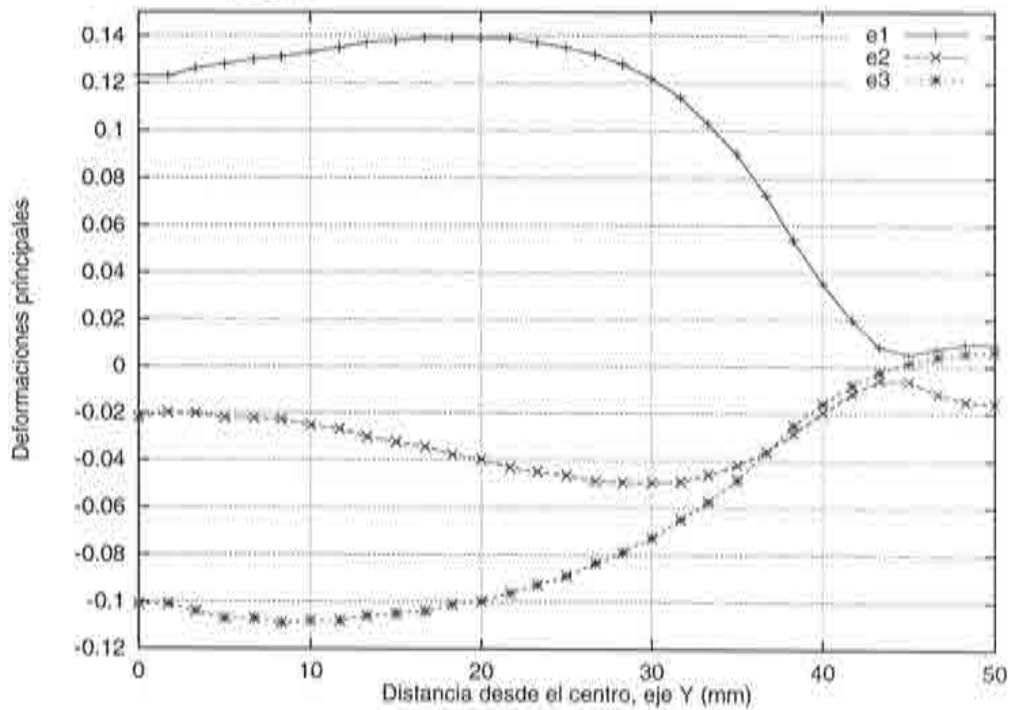


Figura 6.55 Deformaciones principales a lo largo de la línea  $O - B$ . Material acero (IF); altura de penetración del punzón  $H = 30$  mm.

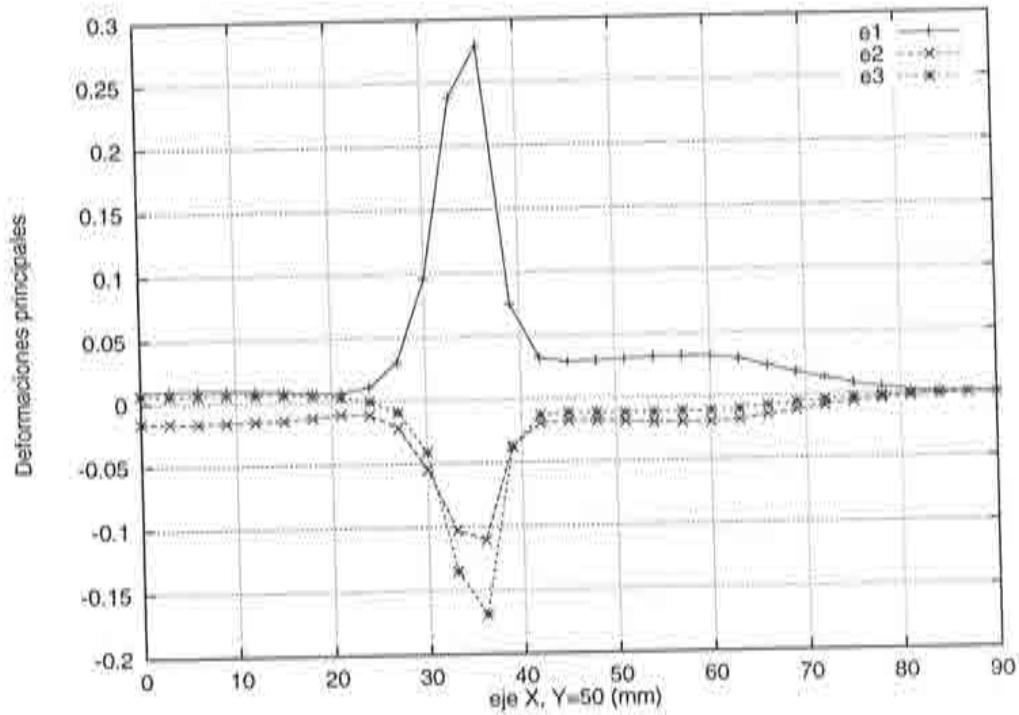


Figura 6.56 Deformaciones principales, a lo largo de la línea  $B - C$ . Material acero (IF); altura de penetración del punzón  $H = 30$  mm.

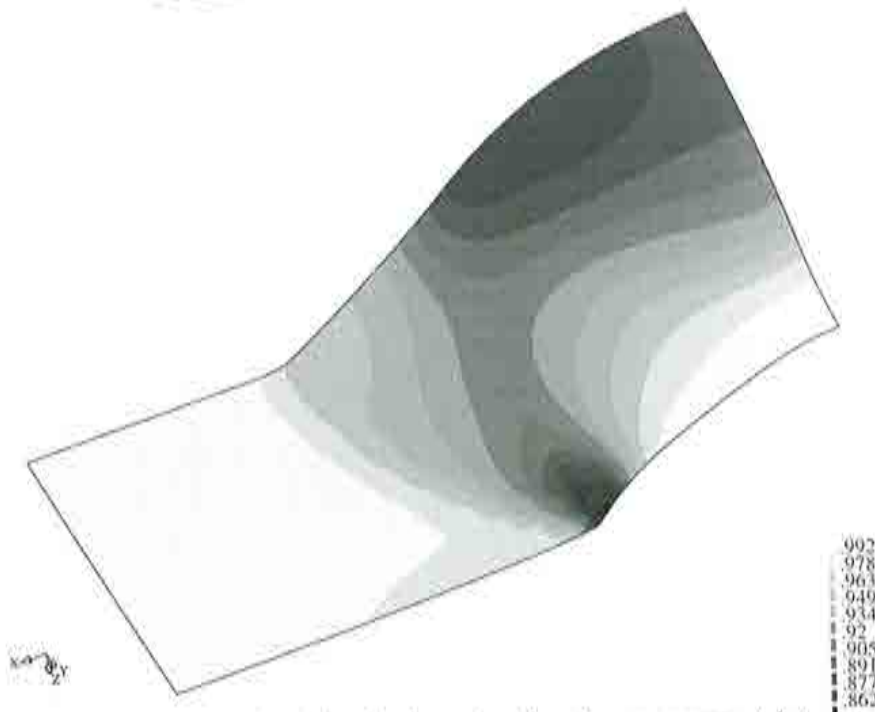


Figura 6.57 Distribución de la relación de espesores  $(\frac{t}{t_0})$ , en la configuración correspondiente al desplazamiento del punzón de  $H = 30$  mm, acero templado (IF)

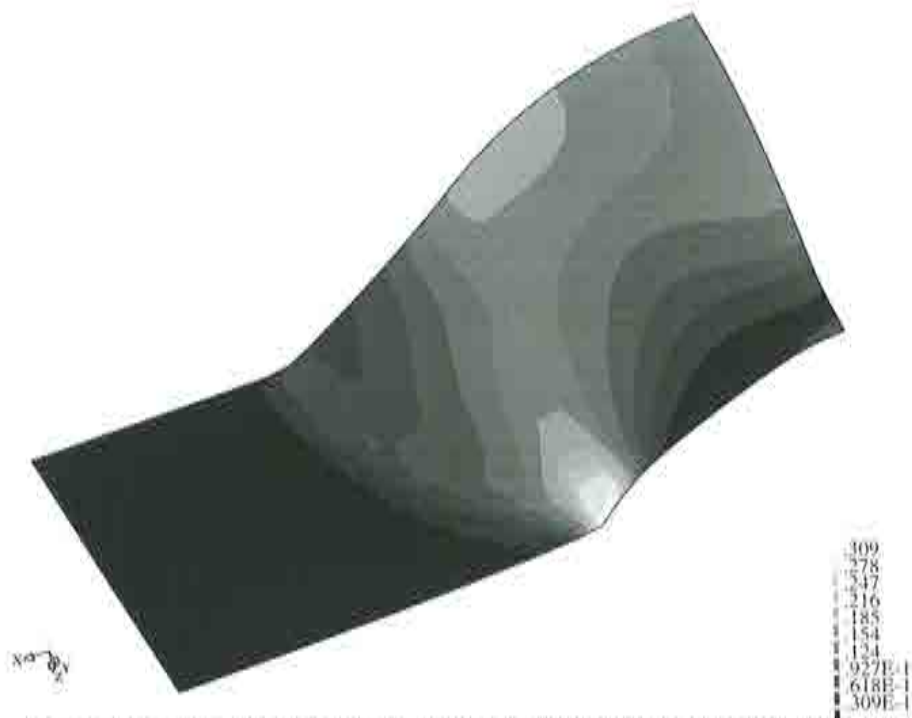


Figura 6.58 Distribución de la deformación plástica efectiva para una penetración del punzón de  $H = 30$  mm, acero templado (IF)

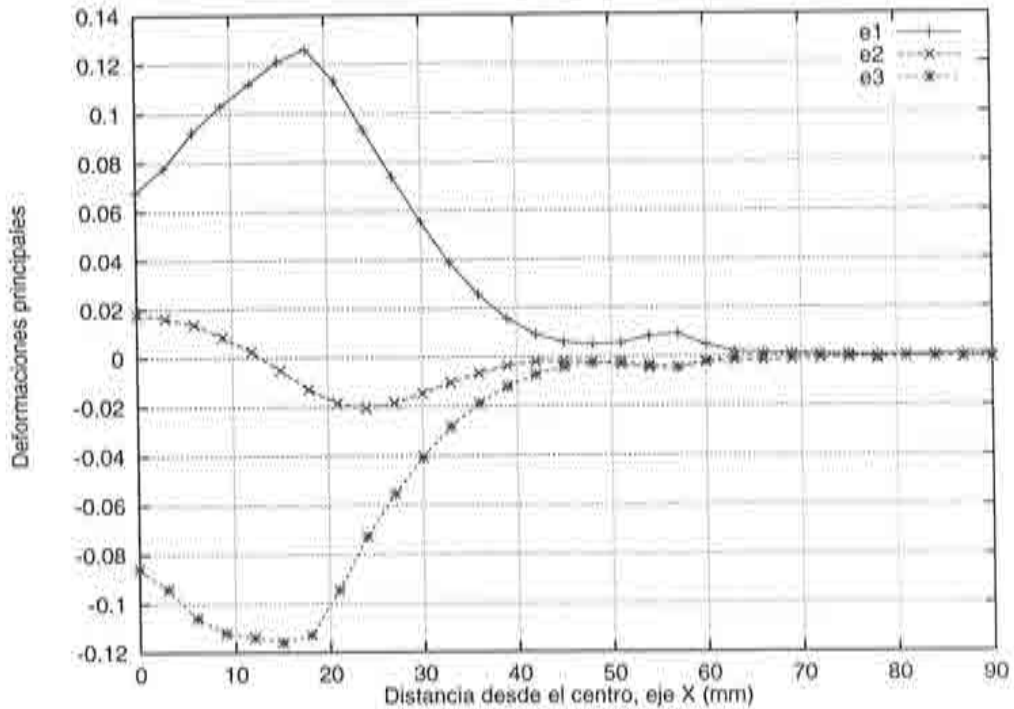


Figura 6.59 Deformaciones principales a lo largo de la línea  $O - A$ . Material acero (HS); altura de penetración del punzón  $H = 20$  mm.

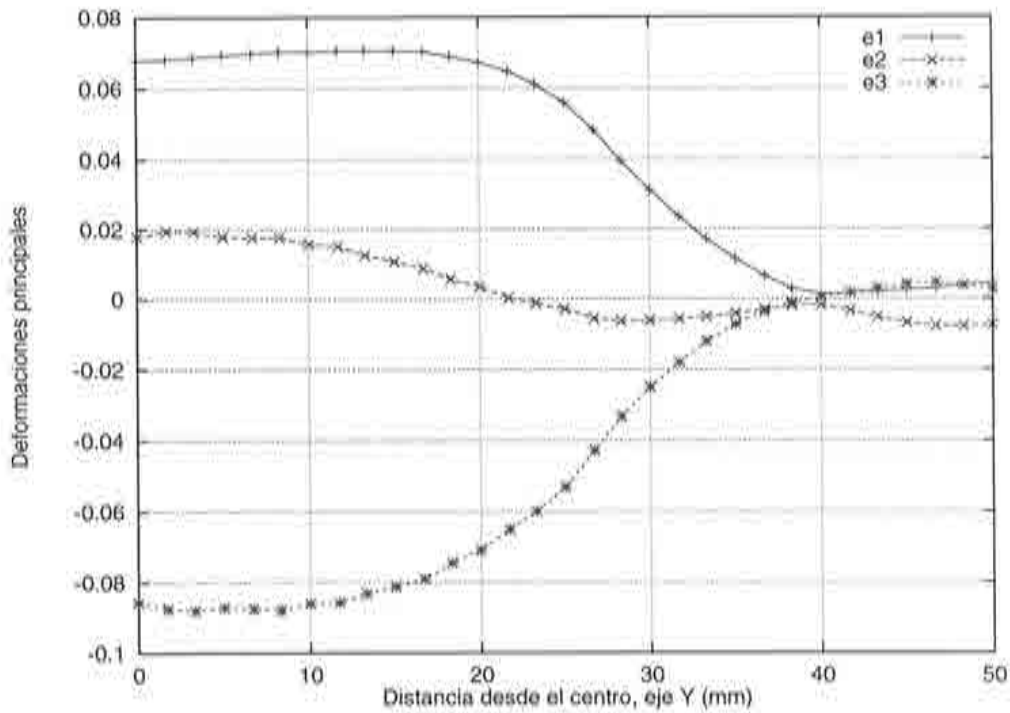


Figura 6.60 Deformaciones principales a lo largo de la línea  $O - B$ .  
Material acero (HS); altura de penetración del punzón  
 $H = 20$  mm.

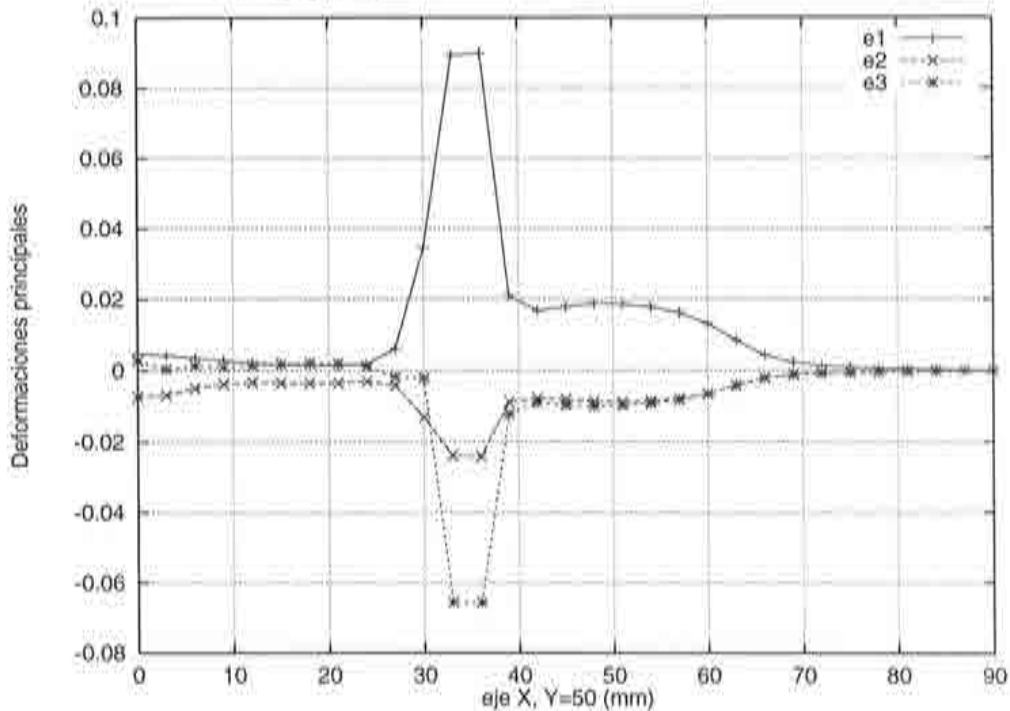


Figura 6.61 Deformaciones principales a lo largo de la línea  $B - C$ .  
Material acero (HS); altura de penetración del punzón  
 $H = 20$  mm.



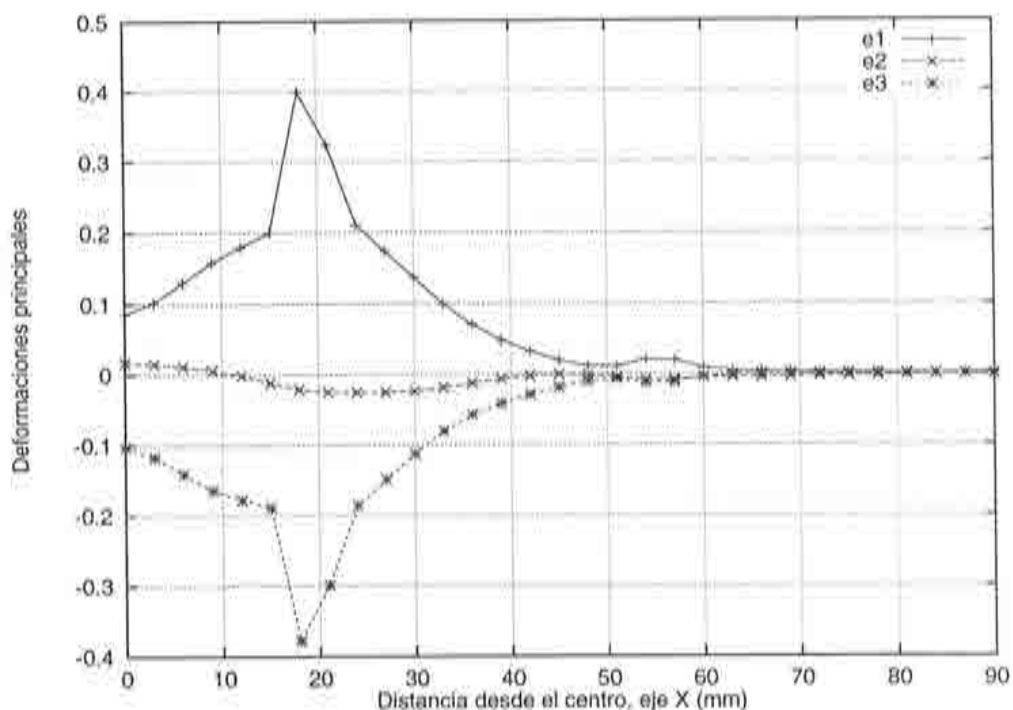


Figura 6.62 Deformaciones principales a lo largo de la línea  $O - A$ .  
Material acero (HS); altura de penetración del punzón  $H = 30$  mm.

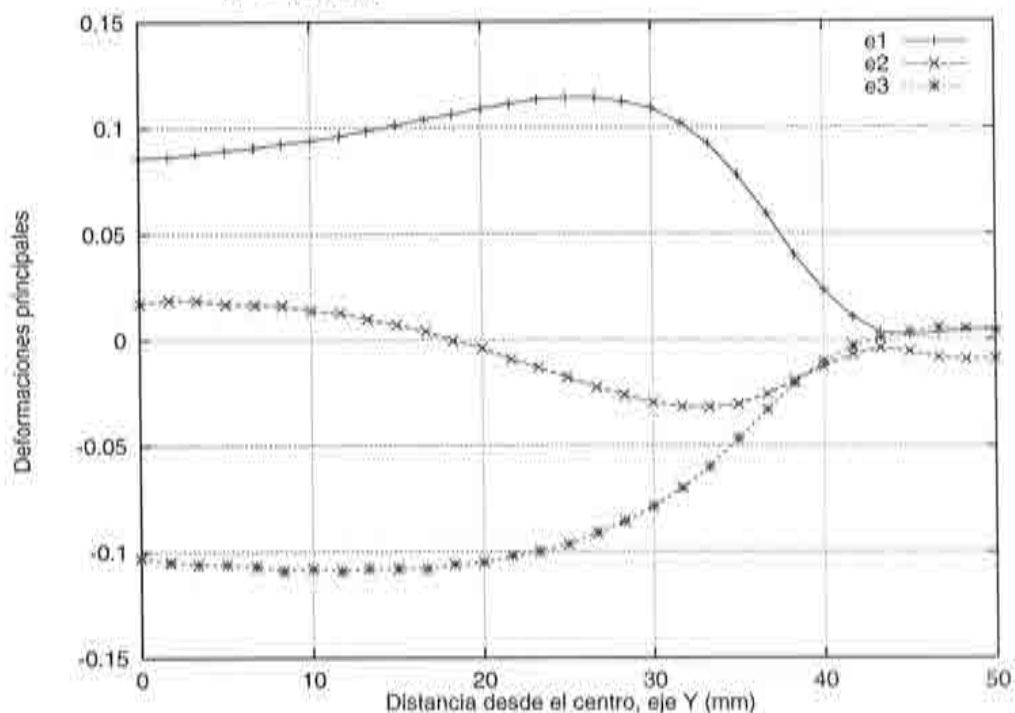


Figura 6.63 Deformaciones principales a lo largo de la línea  $O - B$ .  
Material acero (HS); altura de penetración del punzón  $H = 30$  mm.

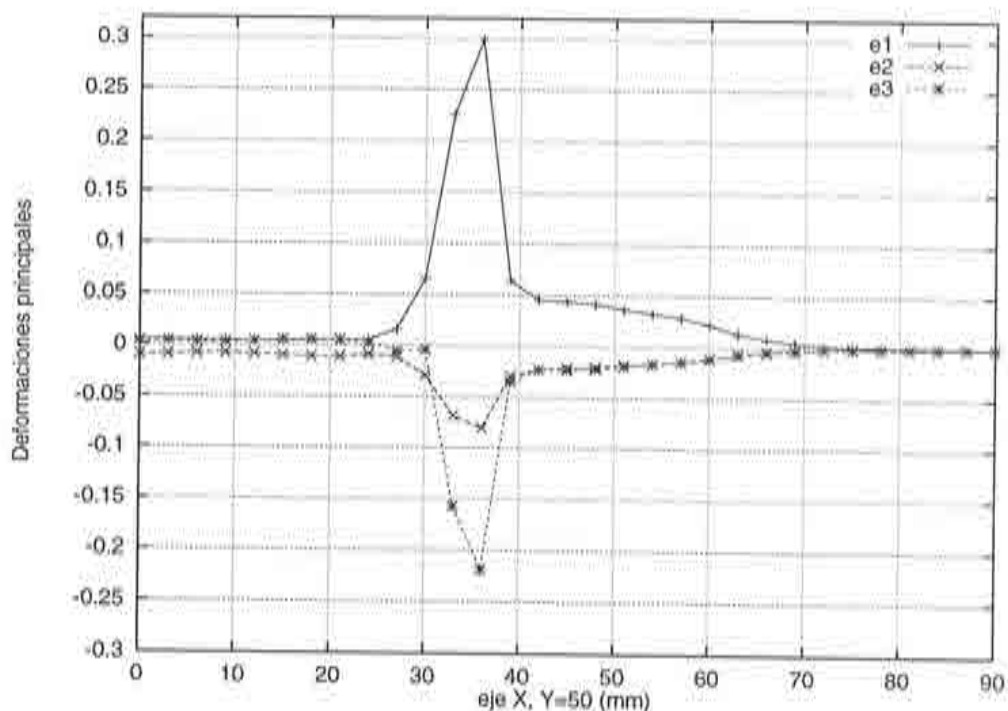


Figura 6.64 Deformaciones principales a lo largo de la línea *B - C*. Material acero (HS); altura de penetración del punzón  $H = 30$  mm.

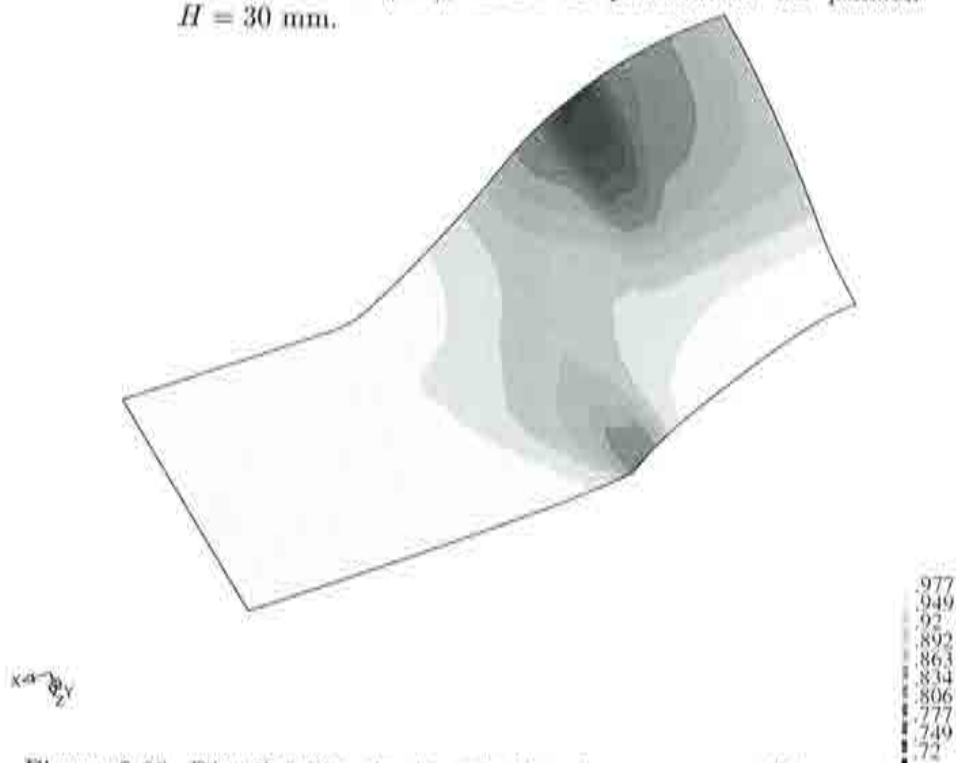


Figura 6.65 Distribución de la relación de espesores ( $\frac{h}{h_0}$ ), en la configuración correspondiente al desplazamiento del punzón de  $H = 30$  mm, acero de alta resistencia (HS)

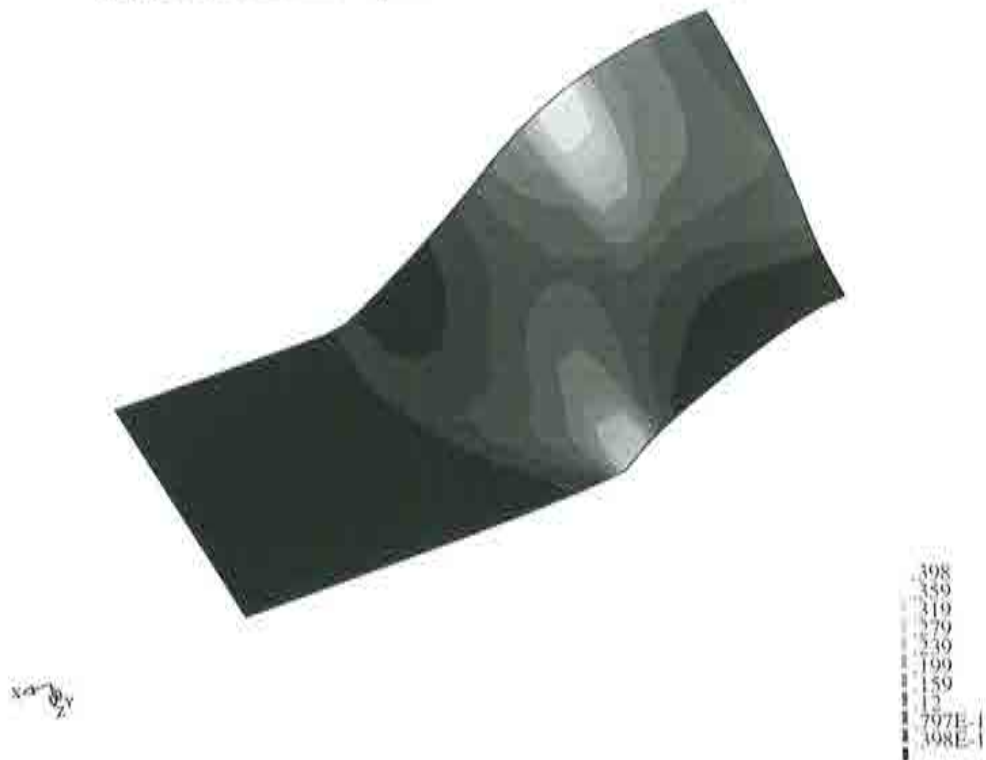


Figura 6.66 Distribución de la deformación plástica efectiva para una penetración del punzón de  $H = 30$  mm, acero de alta resistencia (HS)

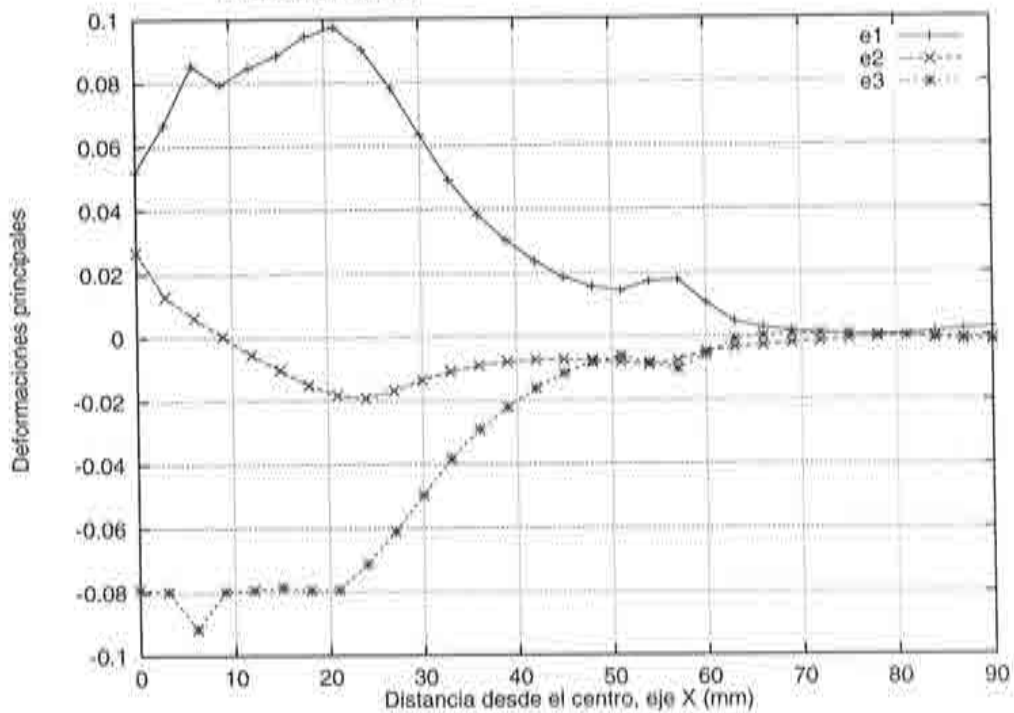


Figura 6.67 Deformaciones principales a lo largo de la línea  $O - A$ . Material aluminio (AL); altura de penetración del punzón  $H = 20$  mm.

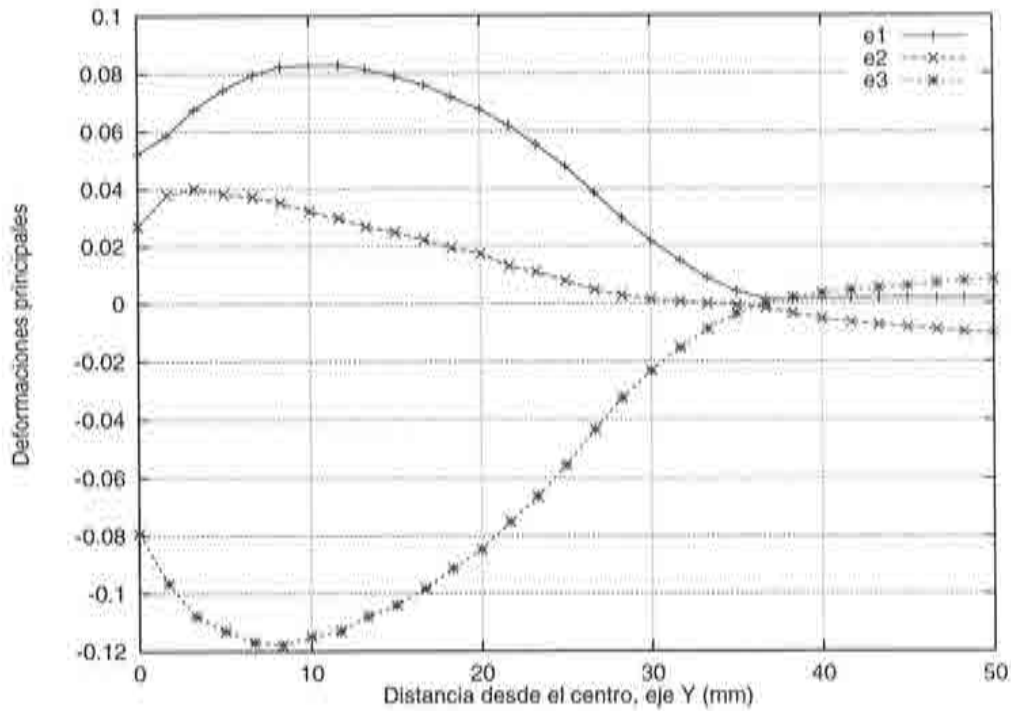


Figura 6.68 Deformaciones principales a lo largo de la línea  $O - B$ .  
Material aluminio (AL); altura de penetración del punzón  
 $H = 20$  mm.

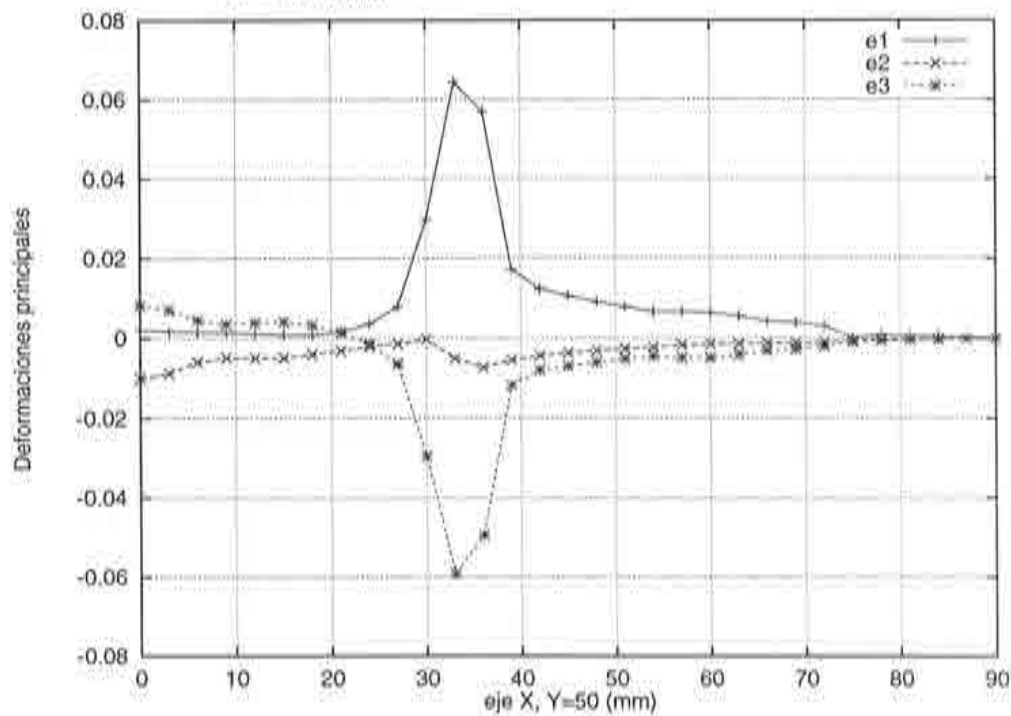


Figura 6.69 Deformaciones principales a lo largo de la línea  $B - C$ .  
Material aluminio (AL); altura de penetración del punzón  
 $H = 20$  mm.



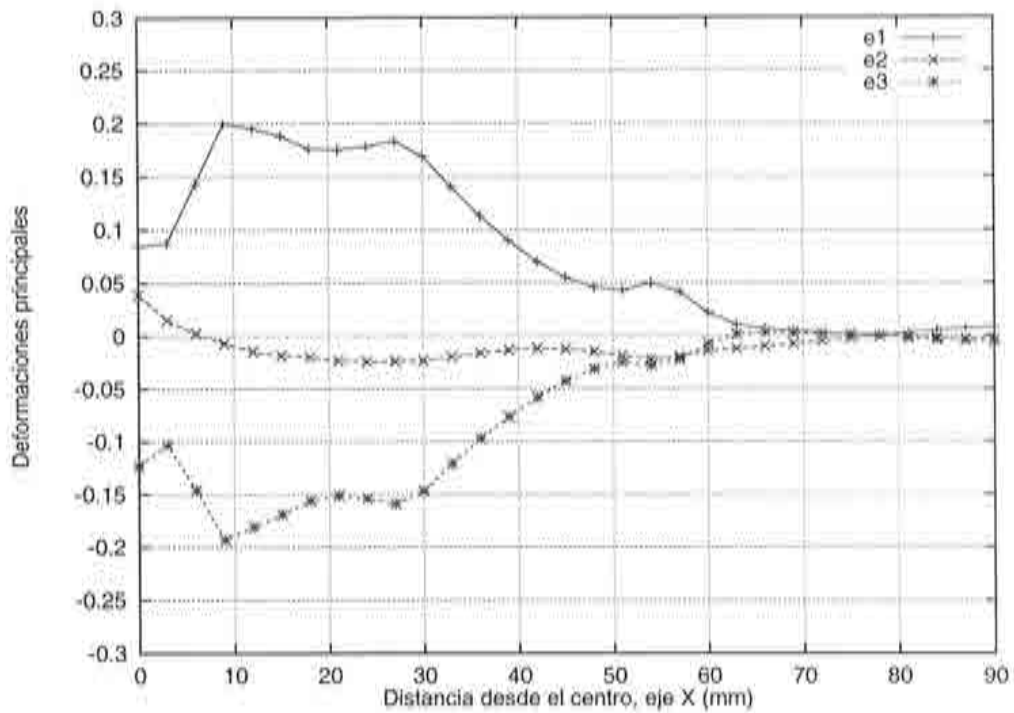


Figura 6.70 Deformaciones principales a lo largo de la línea  $O - A$ . Material aluminio (AL); altura de penetración del punzón  $H = 30$  mm.

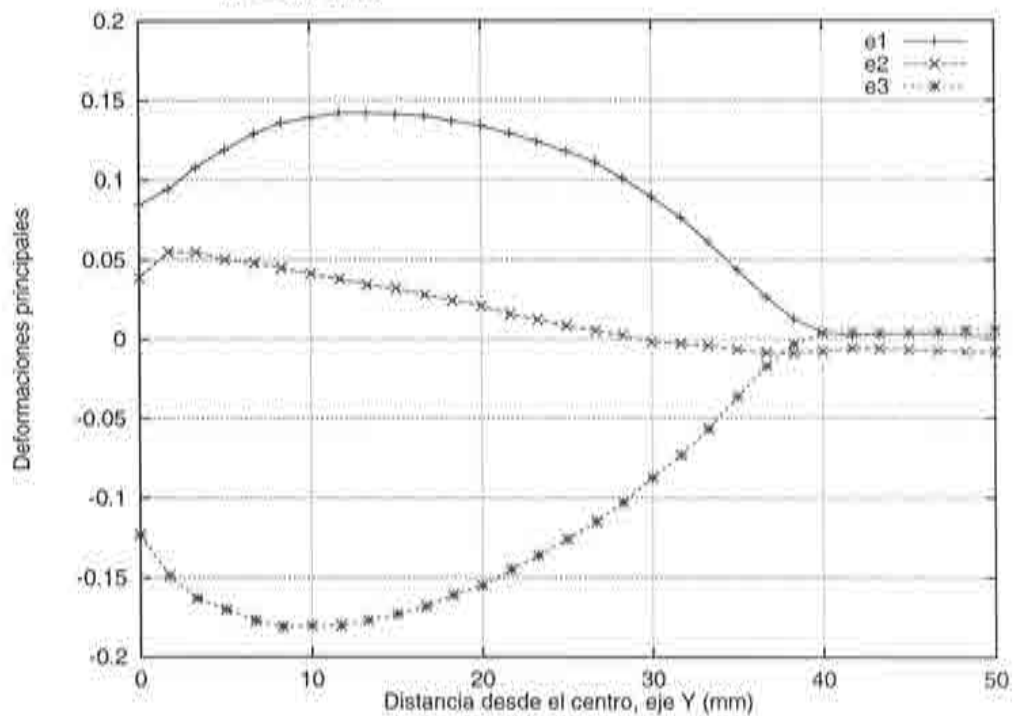


Figura 6.71 Deformaciones principales a lo largo de la línea  $O - B$ . Material aluminio (AL); altura de penetración del punzón  $H = 30$  mm.

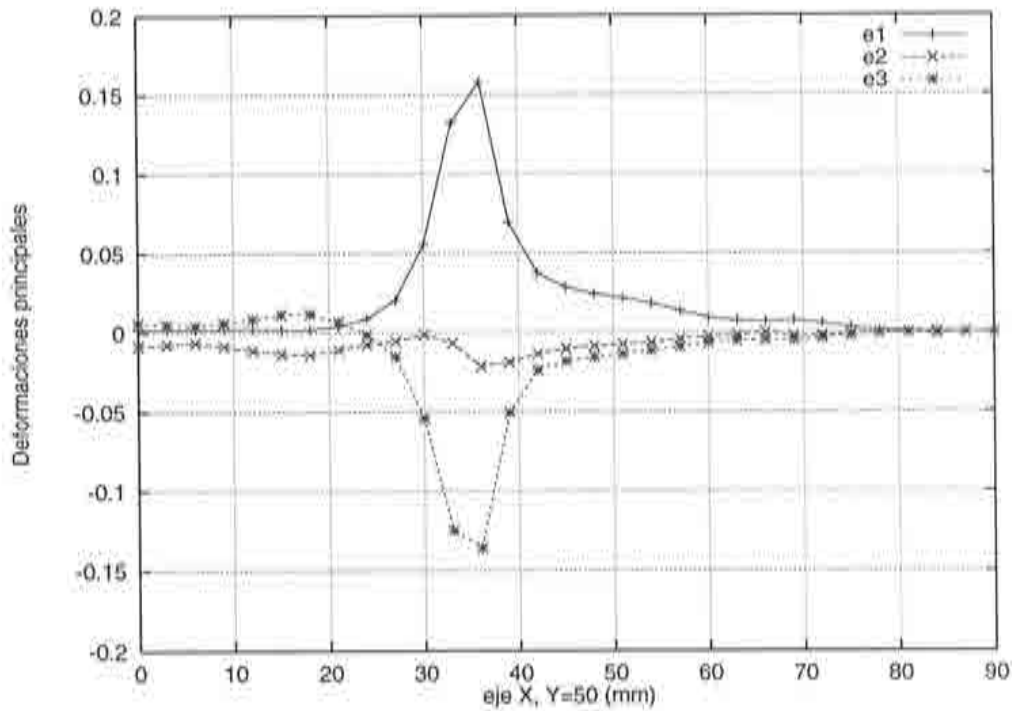


Figura 6.72 Deformaciones principales a lo largo de la línea  $B - C$ . Material aluminio (AL); altura de penetración del punzón  $H = 30$  mm.

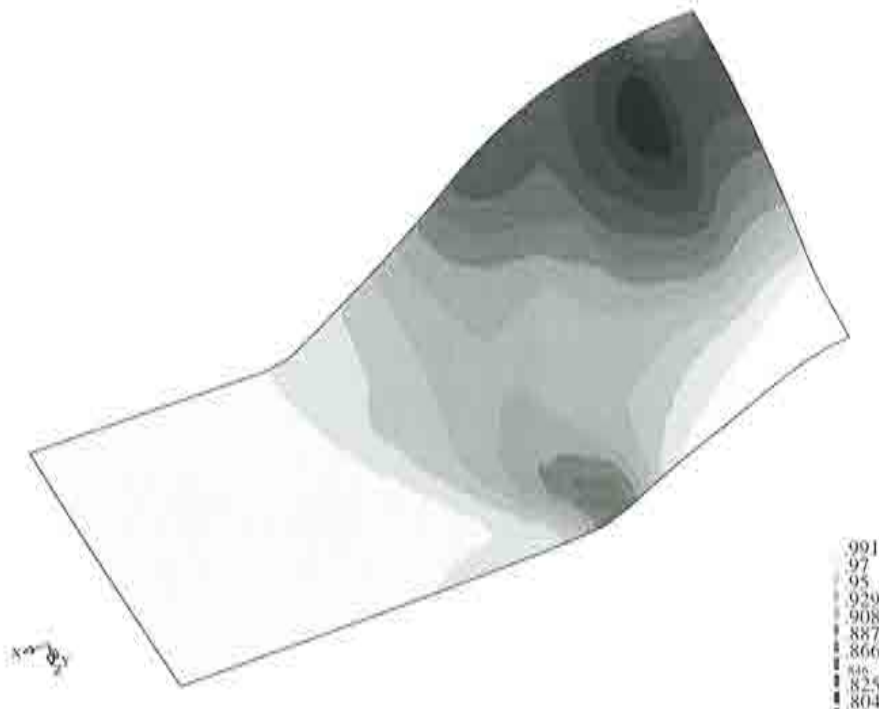


Figura 6.73 Distribución de la relación de espesores  $(\frac{h}{h_0})$ , en la configuración correspondiente al desplazamiento del punzón de  $H = 30$  mm, aluminio (AL)

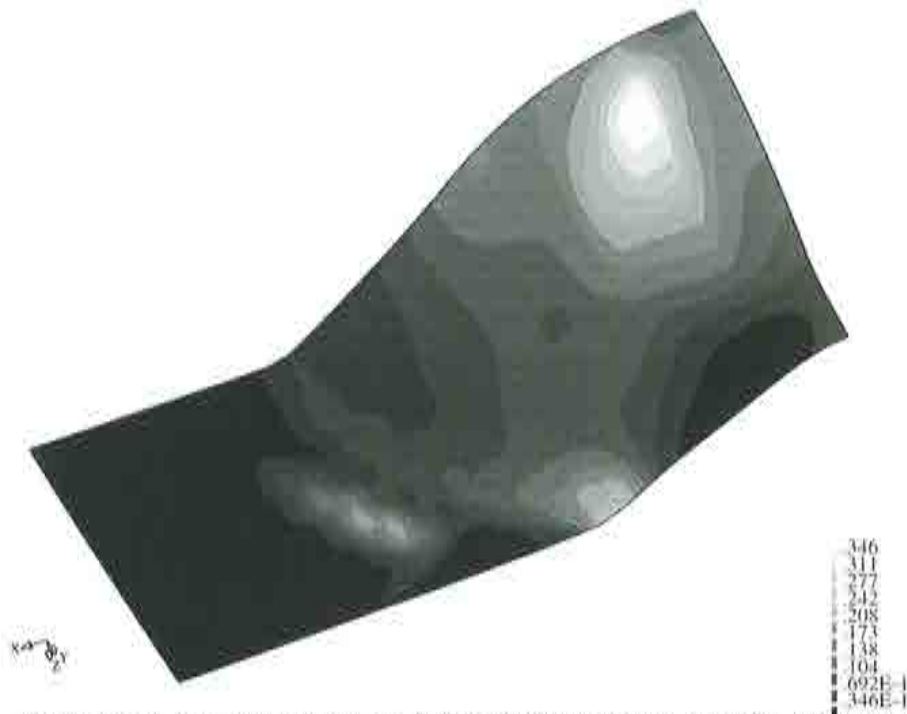


Figura 6.74 Distribución de la deformación plástica efectiva para una penetración del punzón de  $H = 30$  mm, aluminio (AL)

#### 6.2.4 Embutición profunda de un Rail<sup>[C-2],[N-2]</sup>

Finalmente se presenta la simulación numérica del problema número dos, propuesto en el contexto de NUMISHEET'96<sup>[N-2]</sup>. El cual consiste en estudiar la embutición profunda de un rail metálico de acero templado (*IF*), de iguales características mecánicas que las definidas en la Tabla 6.10 para el problema anterior. Adicionalmente se presenta el estudio de la recuperación elástica de la chapa, una vez que las herramientas son retiradas.

En la Tabla 6.13 se presentan los parámetros del proceso, considerados en la simulación numérica:

Parámetros del proceso	
Desplazamiento del punzón	37 mm
Velocidad del punzón	10 sen (540 t) mm/ms
Tiempo de análisis	5.82 ms
Coefficiente de rozamiento	0.11
Fuerza en los pisadores	10 kN

Tabla 6.13

En las Figuras 6.75, 6.76 y 6.78 se presenta la geometría de las herramientas utilizadas en la simulación numérica. En la Figura 6.78 se muestra la forma

de la lámina analizada, con su deformada para una penetración del punzón de  $H = 37$  mm. A continuación en la Figura 6.79 se presenta la discretización de elementos finitos utilizada para las herramientas (pisadores, punzón y matriz). En la Figura 6.78 se muestra la malla de elementos finitos utilizada en la modelación de la chapa, correspondiente a 12000 elementos del tipo *BST*. Tanto la discretización para las herramientas como para la chapa fue definida por los organizadores de NUMISHEET'96<sup>[N-2]</sup>.

En la Figura 6.81 se muestra la superposición de las mallas original y deformada en la configuración final. Los resultados de deslizamientos obtenidos, se presentan en la Tabla 6.14, para los diferentes puntos definidos por la Figura 6.78. En la Figuras 6.82 y 6.83 se muestran las distribuciones de la relación de espesores y de la deformación plástica efectiva para una penetración del punzón de  $H = 37$  mm.

Puntos	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)
A'	34.60	-5.88	0.00
B'	83.50	1.60	37.70
C'	136.00	9.83	0.00
D'	133.00	75.30	0.00
E'	183.00	161.00	0.00
F'	179.00	256.00	0.00
G'	130.00	248.00	37.90
H'	77.50	241.00	0.00
I'	80.80	175.00	0.00
J'	31.20	89.50	0.00

**Tabla 6.14** Deslizamientos para una penetración del punzón  $H = 37.0$  mm.



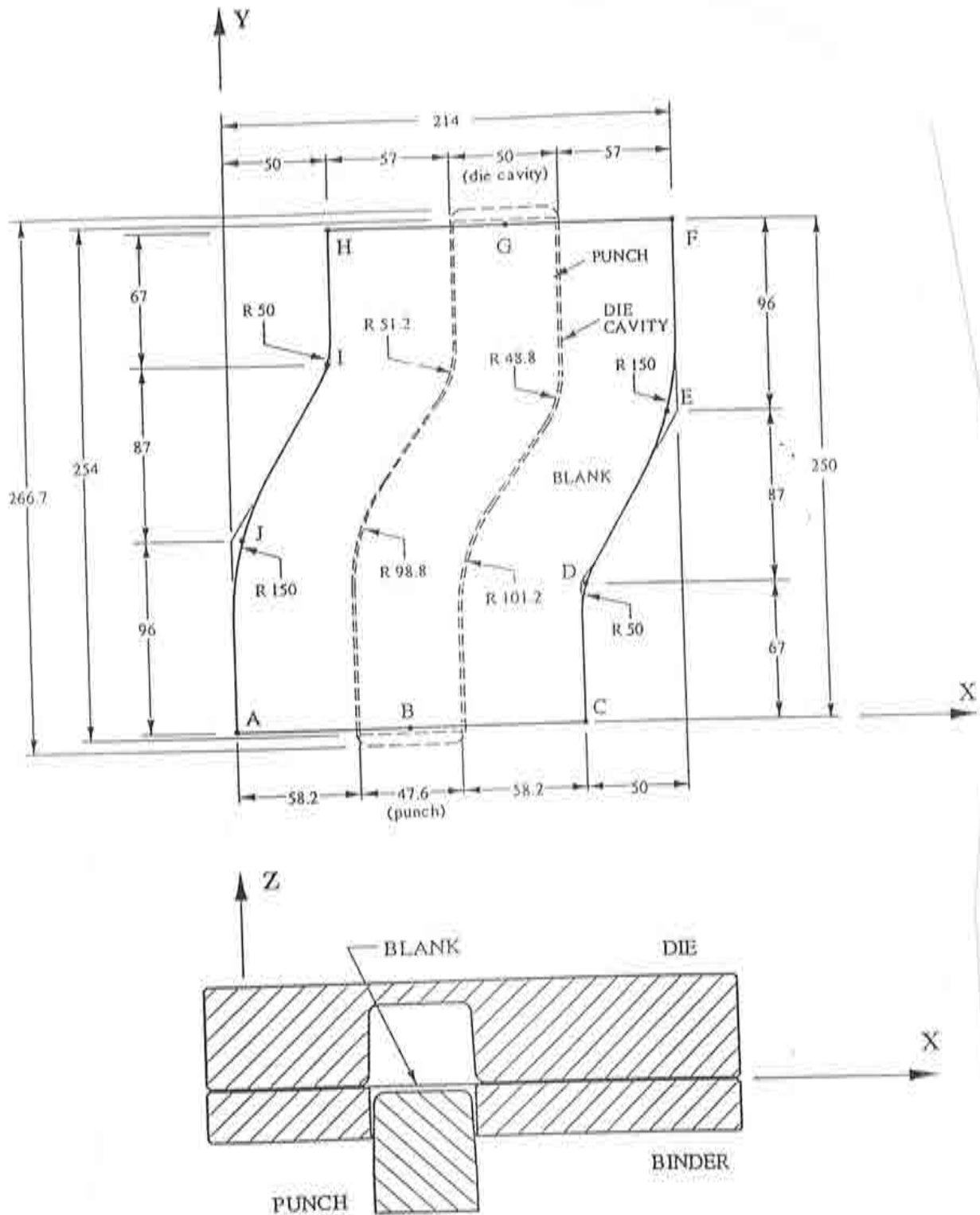


Figura 6.75 RAIL en S: Descripción geométrica de las herramientas utilizadas en el test de embutición de un Rail. Chapa y configuración inicial de las herramientas.

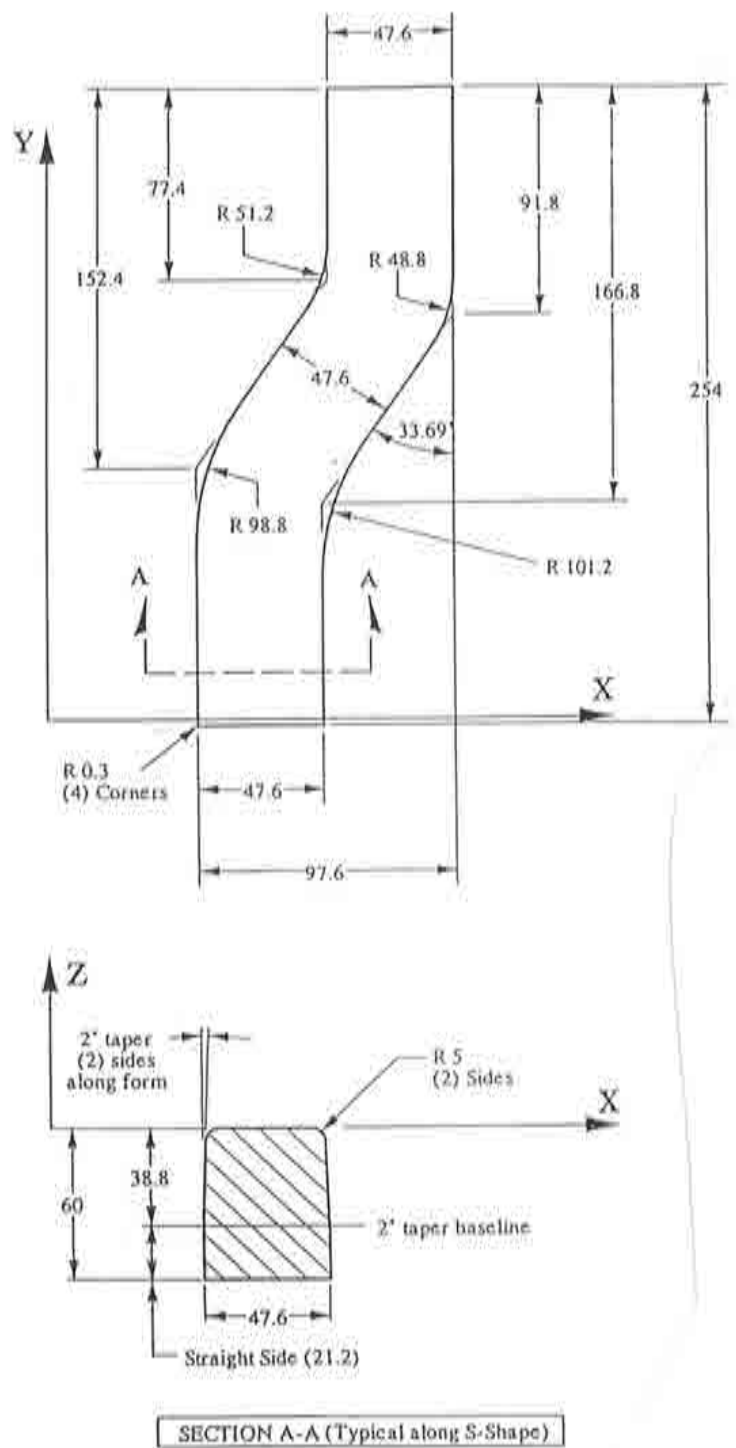


Figura 6.76 RAIL en S: Descripción geométrica de las herramientas utilizadas en el test de embutición de un Rail. Forma del punzón.

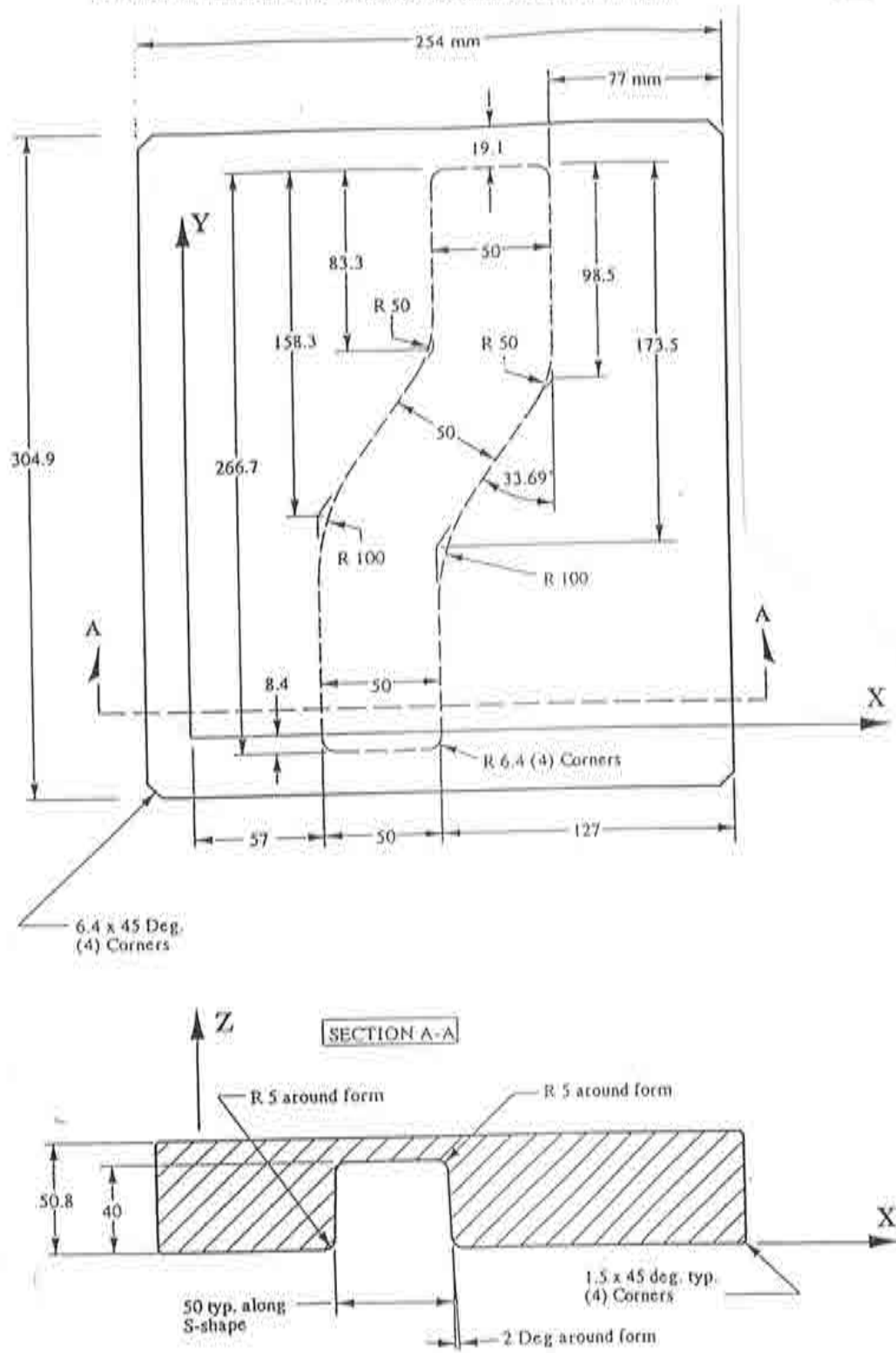


Figura 6.77 RAIL en S: Descripción geométrica de las herramientas utilizadas en el test de embutición de un Rail. Forma de la Matriz.

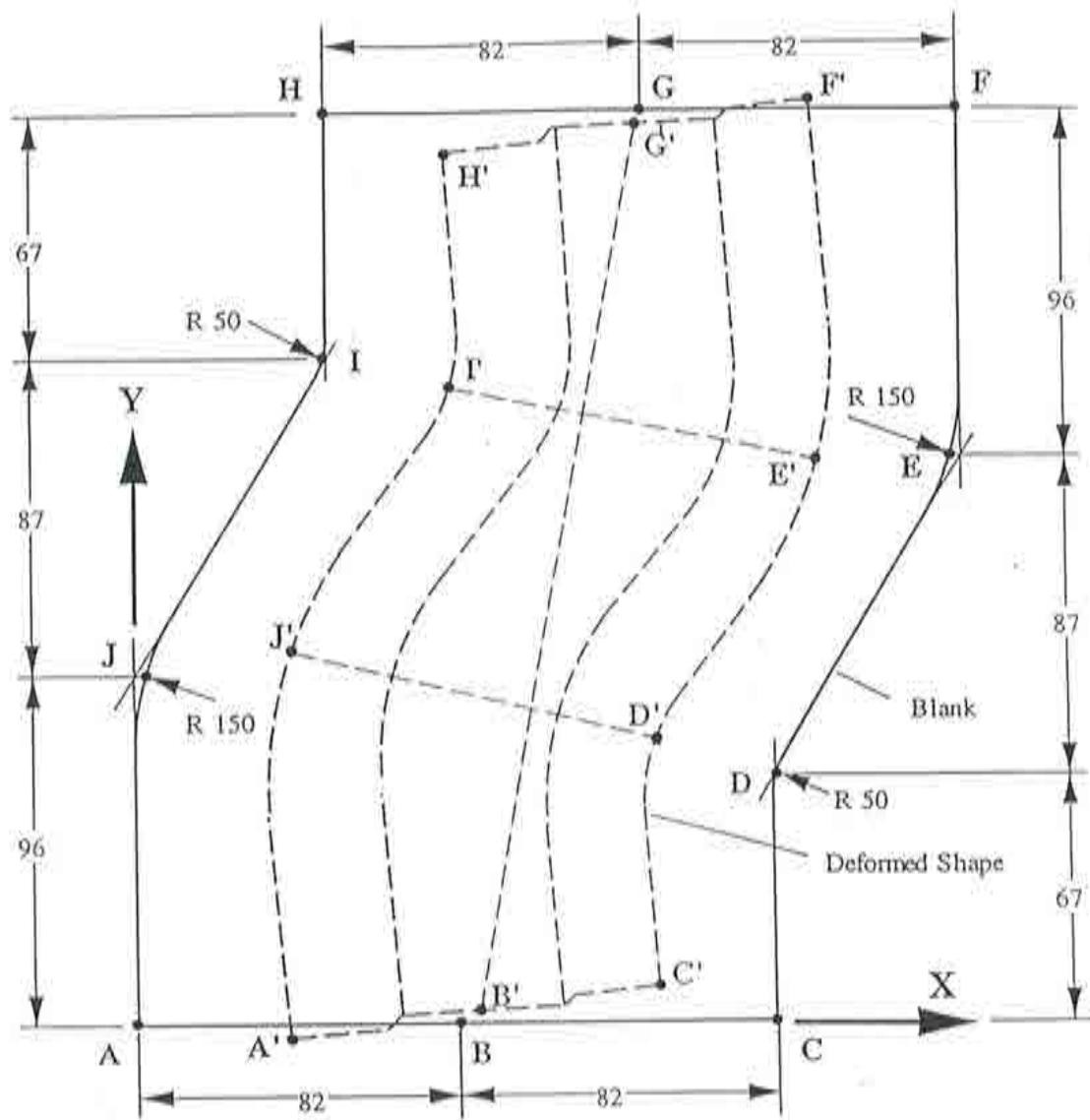


Figura 6.78 RAIL en S: Puntos de referencia antes y después de la embutición. Figura extraída de la referencia [N - 2].



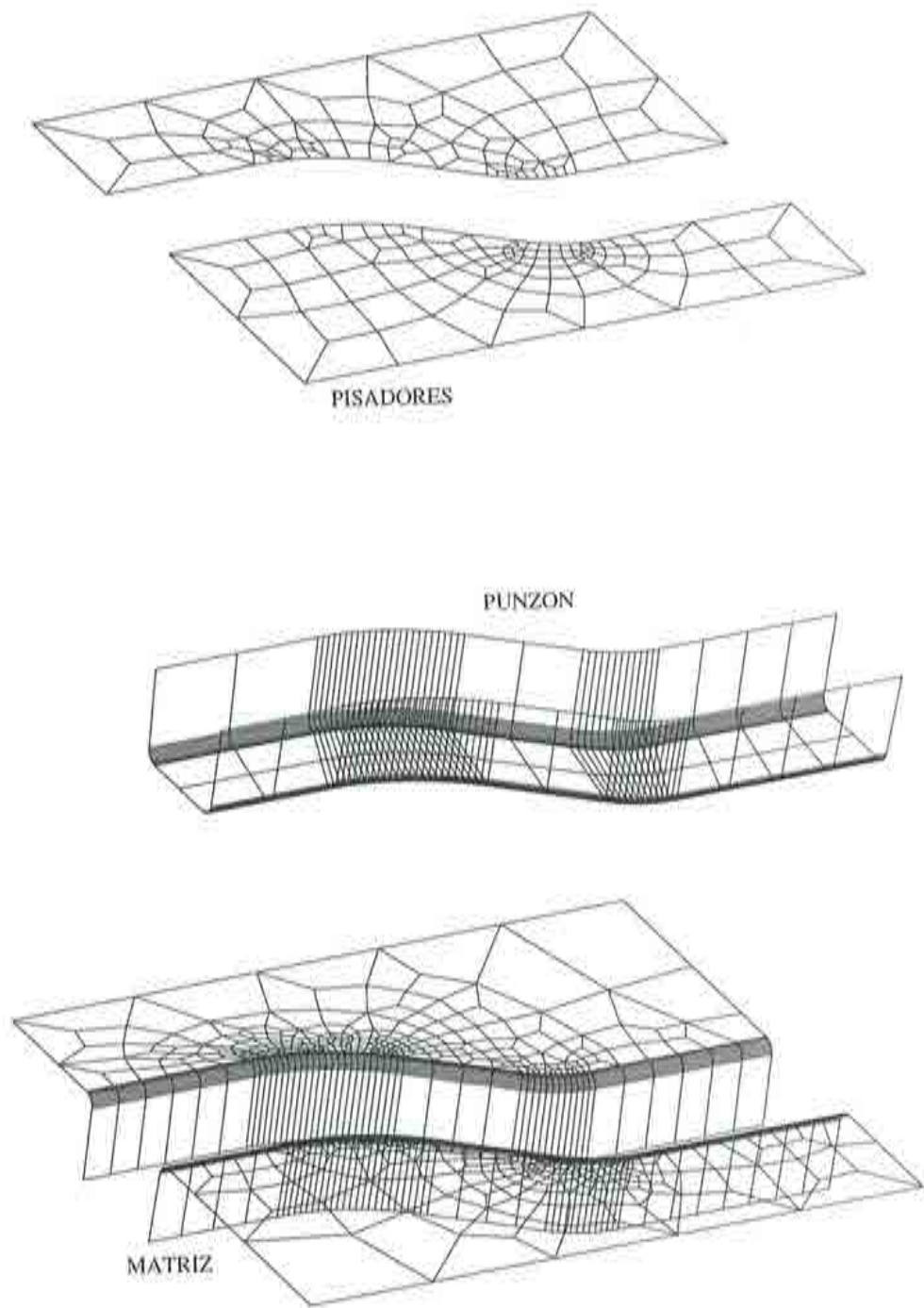


Figura 6.79 RAIL en S: Discretización de elementos finitos empleada. Punzón y matriz 2464 elementos cuadriláteros rígidos, pisadores 190 elementos de lámina cuadriláteros rígidos.

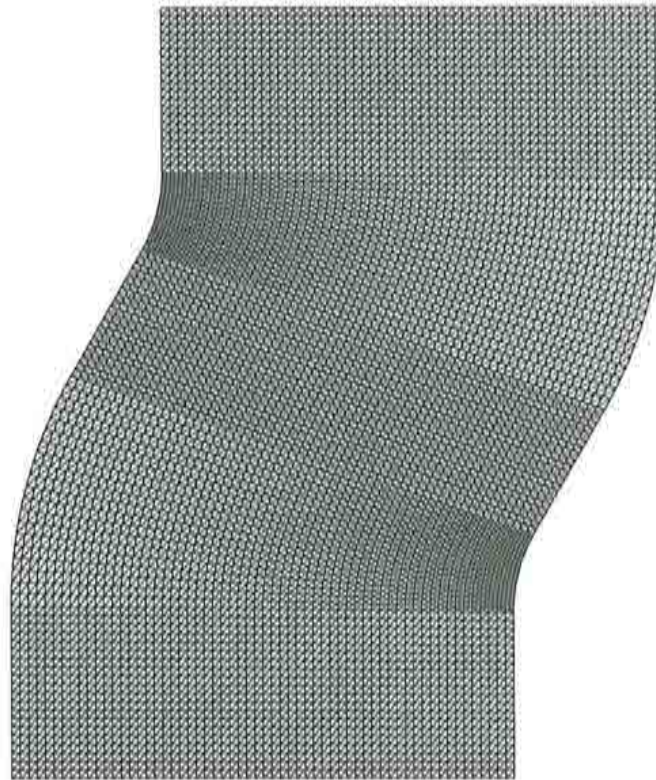


Figura 6.80 RAIL en S: Discretización de elementos finitos utilizada para la chapa: 12000 elementos triangulares planos del tipo *BST*

A continuación se presenta el análisis de la recuperación elástica (*springback*) de la chapa. El procedimiento a seguir se basa en el concepto de relajación dinámica en donde se introducen adecuados valores de amortiguamiento en cada nodo del modelo de elementos finitos (ver la Figura 6.80), hasta obtener una respuesta en desplazamientos estacionaria en todos los nodos.

El amortiguamiento para cada nodo de la estructura discretizada, se define por:

$$C_i = 2\alpha M_i \quad (6.7)$$

con:

$$\alpha = \frac{1}{t_r} \ln\left(\frac{100}{f_p}\right) \quad (6.8)$$

en donde,  $f_p$  es el cociente en porcentaje entre la amplitud de las vibraciones amortiguadas  $A$  con respecto a la amplitud con vibraciones libres  $A_0$ , después de un tiempo  $t_r$ . En el presente análisis se introdujeron dos valores diferentes de amortiguamiento, estudiándose en cada caso la respuesta en desplazamientos de los puntos  $A$  y  $G$  ver la Figura 6.78, hasta lograr que la respuesta de dichos puntos fuese estacionaria (ver las Gráficas 6.84 y 6.85).

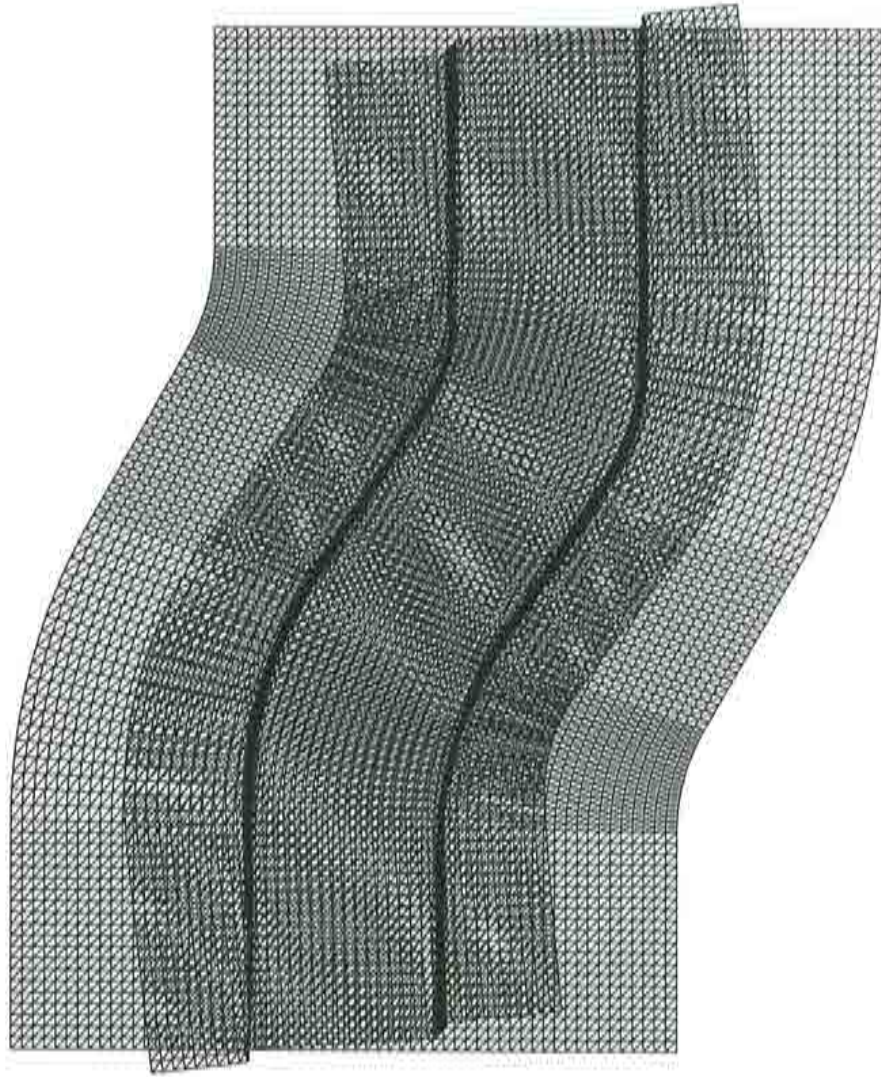


Figura 6.81 RAIL en S: Superposición de mallas original y deformada para una penetración del punzón de  $H = 37$  mm, acero templado (IF)



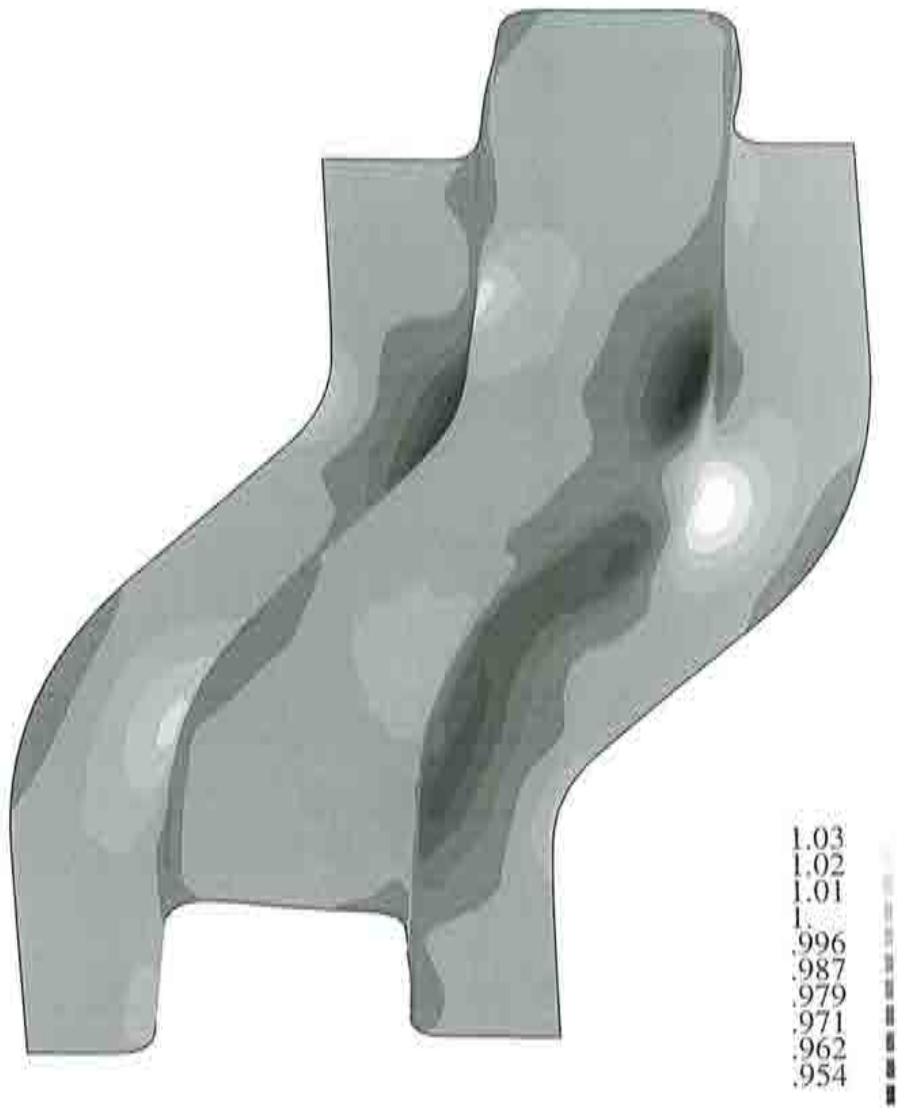


Figura 6.82 RAIL en S: Distribución de la relación de espesores  $(\frac{h}{h_0})_1$ , para una penetración del punzón de  $H = 37$  mm.



Figura 6.83 RAIL en S: Distribución de la deformación plástica efectiva, para una penetración del punzón de  $H = 37$  mm.

En la Tabla 6.15 se presentan los valores de deslizamiento, después de la recuperación elástica y en las Figuras 6.86 y 6.87 se muestran las secciones transversales correspondientes a las líneas  $J' - D'$  e  $I' - E'$  antes y después de la recuperación elástica. En las Tablas 6.16 y 6.17 se presentan las coordenadas finales de los nodos correspondientes a las líneas  $J' - D'$  e  $I' - E'$  respectivamente, al igual que las deformaciones principales a lo largo de estas líneas.

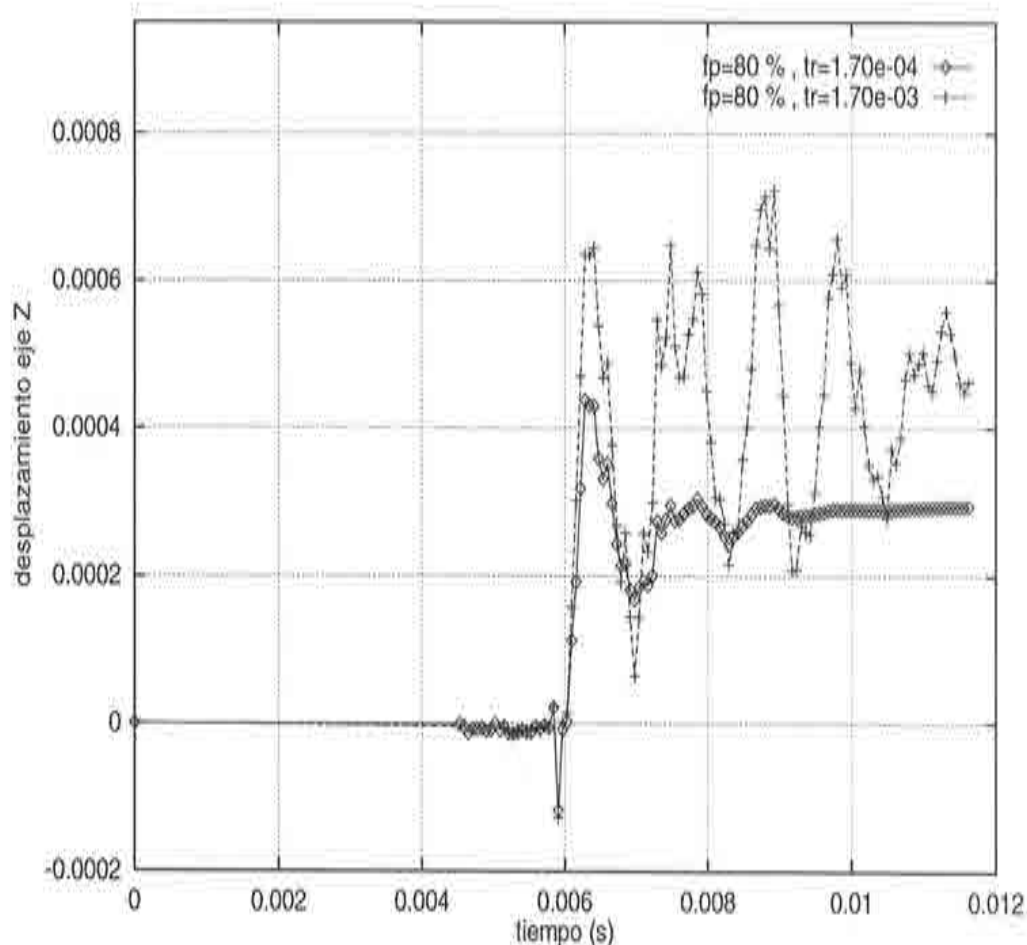


Figura 6.84 RAIL en S: Desplazamiento del punto  $A'$ , considerando distintos coeficientes de amortiguamiento.

El proceso de simulación numérica necesitó de un total de 5186 min de CPU para realizar 38780 pasos de tiempo en la etapa correspondiente al proceso de embutición y de 4320 min y 32300 pasos en la etapa de recuperación elástica, funcionando sobre una estación de trabajo Power Challenge-IRIX Release 6.0.1.

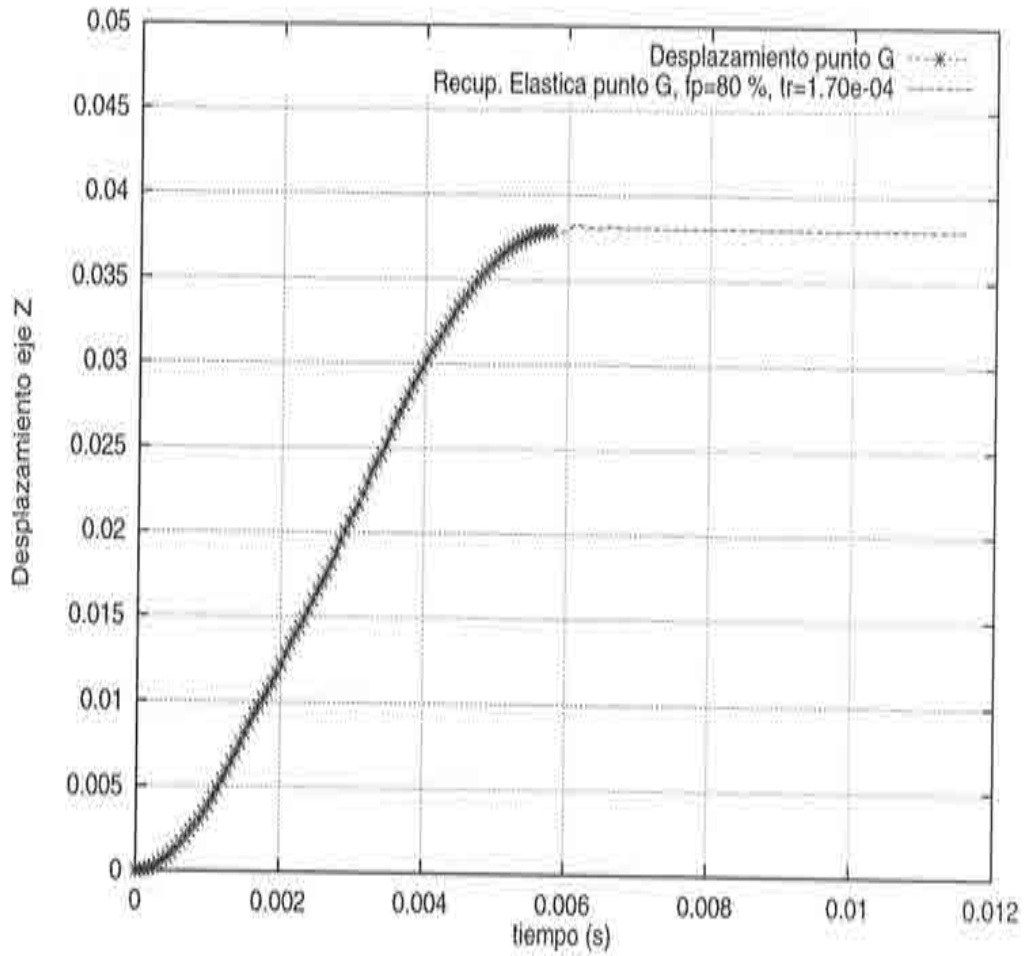


Figura 6.85 RAIL en S: Historia del desplazamiento del punto G',  
 $t = 0 - 5.82$  ms tiempo de embutición  $H = 37$  mm,  
 $t = 5.82 - 12$  ms tiempo de análisis de la recuperación elástica.

Puntos	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)
A'	34.20	-5.81	0.300
B'	83.50	1.54	37.90
C'	136.00	9.67	0.90
D'	134.00	75.20	0.60
E'	184.00	161.00	0.60
F'	179.00	256.00	0.22
G'	130.00	248.00	38.00
H'	77.20	241.00	0.80
I'	80.40	175.00	0.65
J'	31.80	89.60	0.70

Tabla 6.15 Valores de deslizamiento, después de la recuperación elástica.

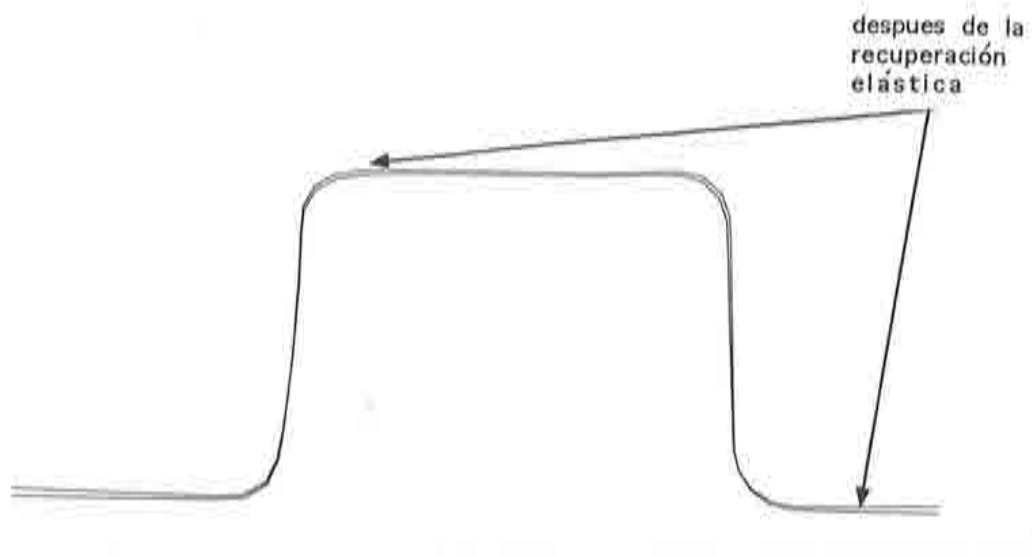


Figura 6.86 Sección transversal  $J' - D'$ , antes y después de la recuperación elástica.

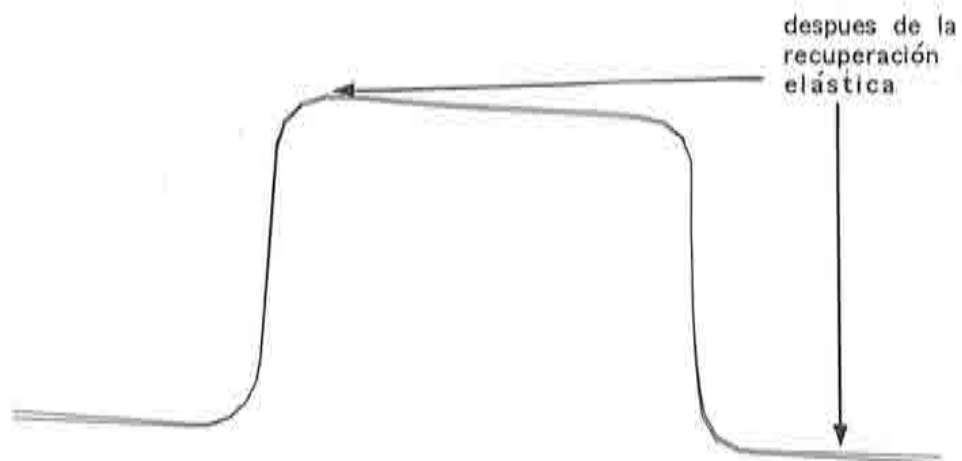


Figura 6.87 Sección transversal  $I' - E'$ , antes y después de la recuperación elástica.



x (mm)	y (mm)	z (mm)	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$
30.80	89.60	0.698	0.319E-1	-.194E-1
36.30	88.60	0.553	0.183E-1	-.125E-1
41.70	87.70	0.407	0.457E-2	-.625E-2
47.30	86.70	0.274	0.138E-1	-.238E-1
52.90	85.60	0.165	0.323E-1	-.511E-1
58.20	84.60	1.690	0.559E-1	-.778E-1
60.10	84.40	7.270	0.715E-1	-.815E-1
60.90	84.50	13.10	0.595E-1	-.710E-1
61.50	84.70	18.90	0.441E-1	-.499E-1
61.90	84.90	24.60	0.268E-1	-.231E-1
62.20	85.20	30.20	0.212E-1	-.367E-3
63.70	85.20	35.30	0.403E-1	-.115E-1
68.70	84.40	37.100	0.323E-1	-.130E-1
74.00	83.50	37.300	0.217E-1	-.996E-2
79.30	82.60	37.300	0.917E-2	-.394E-2
84.60	81.60	37.200	0.303E-2	-.349E-2
89.90	80.70	37.200	0.827E-2	-.127E-1
95.30	79.80	37.300	0.204E-1	-.265E-1
101.00	78.80	37.600	0.336E-1	-.393E-1
106.00	77.70	37.200	0.436E-1	-.543E-1
109.00	77.30	32.800	0.453E-1	-.502E-1
111.00	77.80	27.200	0.337E-1	-.191E-1
111.00	78.20	21.900	0.250E-1	-.296E-2
111.00	78.70	16.600	0.442E-1	-.197E-1
111.00	79.20	11.400	0.667E-1	-.402E-1
111.00	79.60	6.380	0.844E-1	-.507E-1
114.00	79.50	1.890	0.838E-1	-.523E-1
118.00	78.50	0.153	0.536E-1	-.341E-1
123.00	77.40	0.252	0.214E-1	-.139E-1
128.00	76.30	0.393	0.541E-2	-.814E-2

**Tabla 6.16** Posiciones deformadas y deformaciones principales a lo largo de la línea  $J'D'$ .

x (mm)	y (mm)	z (mm)	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$
80.40	175.00	0.654	0.270E-1	-.483E-1
85.70	174.00	0.486	0.103E-1	-.174E-1
91.00	173.00	0.345	0.121E-1	-.697E-2
96.20	172.00	0.227	0.392E-1	-.217E-1
101.00	171.00	0.198	0.688E-1	-.350E-1
105.00	171.00	2.890	0.939E-1	-.432E-1
107.00	171.00	7.710	0.848E-1	-.383E-1
107.00	171.00	12.900	0.647E-1	-.224E-1
108.00	171.00	18.100	0.438E-1	-.459E-2
108.00	171.00	23.500	0.307E-1	-.958E-3
108.00	172.00	29.100	0.485E-1	-.396E-1
109.00	172.00	34.700	0.558E-1	-.787E-1
113.00	171.00	37.800	0.488E-1	-.665E-1
119.00	170.00	37.800	0.293E-1	-.397E-1
124.00	169.00	37.500	0.165E-1	-.228E-1
130.00	168.00	37.400	0.891E-2	-.112E-1
135.00	168.00	37.300	0.576E-2	-.273E-2
140.00	167.00	37.300	0.130E-1	-.514E-2
146.00	166.00	37.200	0.254E-1	-.898E-2
151.00	165.00	36.600	0.409E-1	-.640E-2
154.00	165.00	32.600	0.471E-1	-.821E-2
155.00	165.00	27.100	0.398E-1	-.257E-1
155.00	164.00	21.400	0.528E-1	-.516E-1
155.00	165.00	15.600	0.643E-1	-.754E-1
156.00	164.00	9.740	0.740E-1	-.859E-1
157.00	164.00	3.840	0.673E-1	-.881E-1
161.00	164.00	0.222	0.403E-1	.651E-1
167.00	163.00	0.264	0.218E-1	-.358E-1
173.00	162.00	0.375	0.788E-2	-.116E-1
178.00	162.00	0.493	0.153E-1	-.106E-1

Tabla 6.17 Posiciones deformadas y deformaciones principales a lo largo de la línea  $I'E'$ .

### 6.3. CONCLUSIONES

En este capítulo se ha presentado la aplicación numérica de la nueva formulación de lámina delgada *BST* a problemas de embutición de chapa.

La calidad de los resultados obtenidos en las simulaciones realizadas, ya sea en situaciones de comportamiento del material isótropo, como anisótropo mediante la aplicación de la nueva formulación de lámina delgada *BST* y un modelo constitutivo hipoeelástico con superficie de fluencia definida por los criterios de Hill<sup>[H-2],[H-3]</sup>, pueden ser consideradas como muy buenas, tanto del punto de vista de los resultados experimentales como de los numéricos obtenidos por otros investigadores. Cabe señalar que solamente se han presentado las comparaciones numéricas con respecto a un grupo reducido de investigadores. El lector interesado puede consultar las referencias [L-1] y [N-2] en donde encontrará para los mismos problemas estudiados en el presente trabajo (test OSU<sup>[L-1]</sup>, embutición profunda de una chapa cuadrada<sup>[N-2]</sup>) un espectro más amplio de soluciones numéricas.

Desde el punto de vista del esquema de avance en el tiempo, es importante señalar que el paso de tiempo debe ser cuidadosamente estudiado para cada problema en particular, debido a la alta no linealidad que presentan este tipo de problemas. Los tiempos de ordenador requeridos pueden considerarse como buenos si se compararan con los obtenidos por otros investigadores en el contexto de códigos explícitos<sup>[R-1]</sup>.

Finalmente podemos concluir, que la nueva formulación de lámina delgada *BST* es capaz de simular correctamente todos los problemas estudiados y que la introducción de la anisotropía normal en los cálculos tiende a respuestas más cercanas a la experimental.

### 6.4. REFERENCIAS

- [A-1] **Agelet de Saracibar C.**, -*Análisis por el método de los elementos finitos de procesos de conformado de láminas metálicas*, -Tesis Doctoral, E.T.S. Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, Marzo de 1990.
- [B-1] **Batoz, J.L., Roelandt, J.M. and Pol, P.**, -*A membrane bending finite element model for sheet forming*, - Proc. of the 3rd International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes NUMIFORM'89, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, USA, Thompson E.G. et al.(eds), Balkema, Rotterdam, pp. 389-393, 1989.

- [B-2] **Batoz, J.L., Guo, Y.Q., Duroux, P. and Detraux, J.M.,** -*An efficient algorithm to estimate the large strains in deep drawing,* - Proc. of the 3rd International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes NUMIFORM'89, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, USA, Thompson E.G. et al.(eds), Balkema, Rotterdam, pp. 383-388, 1989.
- [C-1] **Cendoya, P., Oñate, E. and Rojek, J.,** -*Benchmark test: Limiting Dome Height simulation,* - 3rd International Conference Numerical Simulation of 3-D Sheet Metal Forming Processes, Dearborn, Michigan, USA, September 29- October 3, 1996.
- [C-2] **Cendoya, P., Oñate, E. and Rojek, J.,** -*Benchmark test: S-Rail,* - 3rd International Conference Numerical Simulation of 3-D Sheet Metal Forming Processes, Dearborn, Michigan, USA, September 29- October 3, 1996.
- [G-1] **Garcia, C.** -*Un modelo numérico para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones,* - Tesis Doctoral, E.T.S. Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, Junio 1993.
- [G-2] **Gelin, J.C. and Daniel, J.L.,** -*A finite element simulation of sheet metal forming processes using a general non-flat shell element,* - Proc. of the 3rd International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes NUMIFORM'89, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, USA, Thompson E.G. et al.(eds), Balkema, Rotterdam, pp. 425-430, 1989.
- [H-1] **Honecker, A. and Mattiasson, K.,** -*Finite element procedures for 3D sheet forming simulation,* - Proc. of the 3rd International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes NUMIFORM'89, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, USA, Thompson E.G. et al.(eds), Balkema, Rotterdam, pp. 457-463, 1989.
- [H-2] **Hill, R.,** -*A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals,* - Proc. Royal Soc. London, A193, pp.281. 1948.
- [H-3] **Hill, R.,** -*Theoretical Plasticity of Textured Aggregates,* - Proc. Camb. Phil. Soc. 85, pp.179, 1979.
- [H-4] **Huh, H. and Sik Han, S.,** -*Numerical simulation of rectangular cup drawing processes with drawbeads,* - Simulation of Materials Processing: Theory, Methods and Applications, Shen and Dawson (eds), Balkema, Rotterdam, ISBN 9054105534, pp. 723-728, 1995.
- [L-1] **Lee, J.K., Wagoner, R., and Nakamachi, E.,** -*A benchmark test for sheet metal forming analysis,* - Technical report, Ohio State University, 1990.



- [M-1] **Mattiasson, K., Bernspang, L., Samuelsson, A., Hamman, T., Schedin, E. and Melander A.,** -*Evaluation of dynamic approach using explicit integration in 3-D sheet forming simulation,* - Proc. of the 4th International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes NUMIFORM'92, Valbobe, France. Chenot, Wood and Zienkiewicz (eds), Balkema, Rotterdam, pp. 55-67, 1992.
- [N-1] **NUMISHEET'93,** -*2nd International Conference: Numerical Simulation of 3-D Sheet Metal Forming Processes- Verification of Simulation with Experiment-* Makinouchi, A., Nakamachi, E., Oñate, E. and Wagoner, R.H., Isehara, Japan, 31 August-2 September 1993.
- [N-2] **NUMISHEET'96,** -*3rd International Conference: Numerical Simulation of 3-D Sheet Metal Forming Processes,* - Dearborn, Michigan, USA, September 29- October 3, 1996.
- [N-3] **Nakamachi, E.,** -*Sheet forming process characterization by static-explicit anisotropic elastic-plastic finite element simulation,-* Proc. of the 2nd International Conference NUMISHEET'93 Numerical Simulation of 3-D Sheet Metal Forming Processes-Verification of Simulation with Experiment, Isehara, Japan, pp. 109-123, 1993.
- [O-1] **Ohwue, T., Yoshida, T. and Usuda, M.,** -*Influence of material properties and work process factors in sheet metal forming,* - Proc. of the 4th International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes NUMIFORM'92, Valbobe, France. Chenot, Wood and Zienkiewicz (eds), Balkema, Rotterdam, pp. 521-525, 1992.
- [R-1] **Rojek, J., García Garino, C., Oñate, E.,** -*Advanced Finite Element Models for Analysis of Industrial Sheet Forming Processes,* - In Recent Developments In Sheet Metal Forming Technology, 18th Biennial Congress, Lisbon, Portugal, 1994.
- [S-1] **Stoughton, T.B.,** -*Finite element modeling of 1008 AK sheet steel stretched over a rectangular punch with bending effects.* - In Wang and Tang, Computer Modeling of Sheet Metal Forming Process, The Metallurgical Society, p.143-159, 1985.
- [S-2] **Tang, S.C. and Chappuis, L.B.,** -*Analysis of sheet metal forming processes bby a general thin shell element,* - Proc. of the 3rd International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes NUMIFORM'89, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, USA, Thompson E.G. et al.(eds), Balkema, Rotterdam, pp. 507-514, 1989.
- [T-1] **Taylor, L., Cao, J., Karafillis, A.P., and Boyce, M.C.,** -*Numerical Simulations of Sheet Metal Forming,* - Proc. of the 2nd International Conference NUMISHEET'93 Numerical Simulation of 3-D Sheet Metal

Forming Processes-Verification of Simulation with Experiment, Ischura, Japan, pp. 161-171, 1993.

- [W-1] **Wenner**, -*Elementary Solutions and Process Sensitivities for Plane Strain Sheet Metal Forming*,- GMR-6989, May 1990 in A Benchmark Test for Sheet Forming Analysis, REPORT No. ERC/NSM-S-90-22, July 1990.

## CAPÍTULO 7

# CONCLUSIONES Y LINEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

### 7.1. CONCLUSIONES DE LA INVESTIGACIÓN

En el desarrollo del presente trabajo se ha extendido al análisis dinámico elastoplástico no lineal una nueva formulación de elementos finitos de lámina delgada, considerando un modelo constitutivo hipoeelástico anisotrópico. Para ello se han desarrollado en el transcurso de este trabajo herramientas computacionales que permiten abordar un amplio espectro de problemas que ocurren, ya sea a altas o a bajas velocidades.

El conjunto resultante de ecuaciones discretas de movimiento se resuelve mediante un esquema de integración temporal del tipo explícito, en donde la calidad de la respuesta numérica es condicionada por el tamaño del paso de tiempo que se elija. En la presente investigación esta dificultad ha sido evitada mediante el cálculo del paso de tiempo crítico a partir de la frecuencia máxima del sistema discreto, obteniéndose de esta forma un valor más cercano a la realidad al considerar en su cálculo las propiedades físicas y geométricas de la estructura en una determinada configuración. Este valor debe ir siendo recalculado cada un cierto número de pasos de tiempo dependiendo de las no linealidades que presente el problema.

En la solución numérica de los problemas abordados se ha utilizado un algoritmo del tipo predicción-corrección en el tratamiento de las tensiones de Cauchy, en donde en una primera fase se realiza una predicción elástica de las tensiones en la configuración intermedia y se procede a evaluar la condición de consistencia plástica en esta configuración para luego una vez corregidas las tensiones transportarlas a la configuración final, esquema que se conoce como *J1* (derivada Jaumann de dos pasos). En todos los problemas estudiados este esquema ha demostrado ser edecuado, no presentando problemas de objetividad incremental. Cabe señalar que debido a la naturaleza del tamaño de los incrementos de tiempo (condicionado por razones de estabilidad numérica) y

por tanto de los incrementos de desplazamientos, los problemas de objetividad incremental se satisfacen de forma natural.

Los resultados obtenidos mediante la nueva formulación de elementos triangulares de lámina delgada *BST* en problemas de dinámica no lineal, concuerdan muy bien con los obtenidos con la nueva formulación de lámina *CST-DKT15*, y con los resultados numéricos y experimentales obtenidos por otros investigadores en todos los problemas analizados, demostrándose que no sólo los valores de desplazamientos son más cercanos a los experimentales, sino que las velocidades de convergencia de la respuesta son más altas cuando se considera la nueva formulación de lámina delgada *BST*, con respecto a la formulación de lámina *CST-DKT15*.

En el contexto de los problemas de embutición de chapa, dada la naturaleza de los procesos de fabricación industrial el material constituyente de la lámina presenta un comportamiento anisótropo. La importancia de considerar este fenómeno en el proceso de simulación numérica ha llevado a muchos investigadores a proponer leyes de comportamiento del material que tomen en cuenta este efecto. En el presente trabajo se ha considerado la situación más simple de anisotropía, la que consiste en modelar el comportamiento del material como isótropo en su plano y anisótropo en la dirección normal a él, aproximación que en muchos casos se acerca al comportamiento real del material. Bajo esta hipótesis y considerando la nueva formulación de lámina delgada *BST*, se llevaron a cabo una serie de simulaciones de diferentes problemas de prueba propuestos en la literatura, en donde los resultados obtenidos ya sea de las deformaciones principales, deformaciones plásticas efectivas y deslizamientos concuerdan muy bien con los dados por otros investigadores.

El efecto de la anisotropía normal sobre el comportamiento estructural de la chapa es la de aumentar su formabilidad, es decir, a medida que el coeficiente de Lankford crece la pieza es capaz de desarrollar mayores valores de deformaciones plásticas antes de llegar a la rotura. El valor del coeficiente de Lankford es, por tanto, una medida de la resistencia de la pieza en la dirección transversal al plano.

Con relación a los algoritmos de corrección de las tensiones predictoras elásticas, se puede afirmar que en el caso de considerar la primera superficie de fluencia de Hill, la modificación introducida en la presente Tesis al algoritmo de retorno para estados de tensión plana, permite operar de una forma eficiente y precisa en la corrección de las tensiones para valores del coeficiente de Lankford mayores o iguales a uno. En caso de valores del coeficiente de Lankford menores que uno, el comportamiento *anómalo* presente en determinados metales obliga a considerar a la superficie definida por el caso (4) del criterio de Hill mejorado como superficie de fluencia, en donde por la naturaleza polinomial de grado  $M$  de la función resultante, se recurre a un algoritmo de retorno del tipo Backward-Euler estándar que conlleva un mayor esfuerzo computacional.



La mayor ventaja de la nueva formulación de lámina delgada *BST* junto con el modelo anisótropo válido para problemas de embutición de chapa que se ha presentado en este trabajo es la posibilidad de realizar simulaciones numéricas de problemas de embutición, comúnmente encontrados en la industria automovilística y aeronáutica a un coste razonable y con respuestas aceptables.

## 7.2. PRINCIPALES APORTACIONES DEL TRABAJO

Las contribuciones más importantes de esta investigación en el contexto teórico son las siguientes:

- ♣ Se ha extendido del nuevo elemento de lámina delgada *BST* al análisis dinámico elastoplástico no lineal de estructuras laminares.
- ♣ Se ha obtenido un criterio de estimación del tiempo crítico mediante la búsqueda del mayor autovalor del sistema discreto.
- ♣ Se han propuesto algoritmos de integración de la ecuación constitutiva, considerando comportamiento anisótropo normal para la primera superficie de fluencia cuadrática de Hill y la polinomial de grado  $M$  correspondiente al caso (4) del criterio de Hill mejorado.

Desde el punto de vista de la aplicaciones pueden mencionarse las siguientes aportaciones:

- ♣ Demostrar que un elemento con sólo variables nodales traslacionales puede ser utilizado para modelar situaciones con grandes deformaciones y comportamiento flexional, con mallas de densidades comparables a las utilizadas por otros elementos de lámina que incluyen rotaciones como variables nodales.
- ♣ Mostrar la importancia de considerar en los análisis las propiedades anisótropas de las piezas metálicas, en los procesos de simulación numérica de problemas de embutición.

## 7.3. LINEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

Tanto desde el punto de vista de la investigación teórica como de la aplicación práctica, existe un número importante de líneas de investigación futuras a considerar:

- ♣ Estudio de técnicas de remallado adaptable en las zonas donde se producen las mayores concentraciones de deformaciones.
- ♣ Estudio y extensión al análisis dinámico elastoplástico no lineal de nuevos elementos finitos de lámina triangulares o cuadriláteros con grados traslacionales de libertad como únicas variables nodales.
- ♣ Introducir los efectos del daño sobre la pieza al igual que los efectos térmicos.

- ♣ Extender los modelos de anisotropía de Hill a situaciones de anisotropía planar y comparar las respuestas con respecto a las obtenidas en esta Tesis y evaluar su coste computacional.
- ♣ Introducir nuevos modelos de anisotropía plástica como el criterio de Barlat o el de Chu.
- ♣ Introducir un esquema de implícito de solución para los efectos de análisis de la recuperación elástica de la pieza.