

UN ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE ELEMENTOS DE INTERPOLACIÓN MIXTA EN PROBLEMAS DE FLUJO COMPRESIBLE

FERNANDO QUINTANA

*División Mecánica Computacional
Centro Atómico Bariloche. CNEA. Argentina.*

RESUMEN

El presente trabajo estudia el comportamiento de una interpolación mixta por medio del método de elementos finitos para problemas de flujo compresible. El algoritmo utilizado es el de Taylor Galerkin, que ya ha sido estudiado por el autor para interpolaciones lineales¹¹ donde se ha podido observar un comportamiento oscilatorio en zonas de bajos números de Mach como por ejemplo la región del punto de impacto o de estancamiento. Este fenómeno ya ha sido observado por otros autores para el algoritmo de Lax-Wendroff de uno y dos pasos en diferencias finitas para el caso de coeficientes no constantes¹. De lo antes dicho es posible deducir que los análisis de estabilidad linealizados o suponiendo coeficientes constantes pueden fallar a la hora de predecir inestabilidades.

Este tipo de problemas ha sido observado ya en otras aplicaciones como es el caso de flujo incompresible, en los cuales es un hecho conocido que la interpolación del campo de velocidades debe hacerse con mayor número de grados de libertad que el campo de presiones si se esperan obtener resultados satisfactorios.

El resultado del estudio presentado en este trabajo es muy alentador como podrá apreciarse en los ejemplos numéricos aunque, como era de esperar, a costa de un incremento en el costo computacional de las soluciones obtenidas. Se hace una descripción del código utilizado, y de las técnicas de viscosidad artificial empleadas.

SUMMARY

The behaviour of a mixed interpolation technique using the finite element method for compressible flow problems is analyzed in the present paper. The algorithm used -Taylor Galerkin- has been already studied by the author for linear interpolations¹¹, where an oscillatory behaviour in regions of low Mach number (like the stagnation point) has been observed. This phenomenon has been reported by other researchers for the one and two-step Lax-Wendroff algorithm in finite differences with non constant coefficients¹. Then, the linearized (or constant coefficient) stability analysis can fail to predict instabilities.

The same kind of problems has been observed in other applications, like incompressible flow, where it is already known that the velocity field should be interpolated with a number of degrees of freedom greater than that used for the field of pressures if non oscillating results are expected.

The result of the study is encouraging as will be evident in the numerical examples, but as

Recibido: Septiembre 1993

expected there is an increment in the computational effort required. Finally the code used and the artificial viscosity techniques used are described.

A. INTERPOLACIÓN PROPUESTA. JUSTIFICACIÓN. ECUACIONES

A continuación se dan algunos detalles del tipo de interpolación propuesta para intentar resolver los problemas de inestabilidades en zonas de velocidades pequeñas.

Los elementos de interpolación mixta tienen unos requerimientos de continuidad menores para las funciones de forma². Sin embargo, en algunas circunstancias pueden dar resultados no convergentes. Las razones matemáticas que explican esta dificultad han sido discutidas por Babuška y Brezzi^{5,6,7}, quienes elaboraron un criterio -conocido como "BB condition"- que actualmente es tomado como referencia para numerosos trabajos. Sin embargo, es posible, en base a algunos razonamientos simples, identificar el origen de los problemas, y la forma de evitarlos.

Para preservar la simplicidad en la presentación se utilizarán las ecuaciones de Euler para el problema unidimensional.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho e \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{f}_i = \begin{Bmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + p \delta_{1i} \\ \rho u_i u_2 + p \delta_{2i} \\ (\rho e + p) u_i \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Particularizando para $i = 1$ y suponiendo estado estacionario, puede escribirse en base a las expresiones anteriores:[†]

$$\begin{cases} u \frac{d\rho}{dx} + \rho \frac{du}{dx} = 0 \\ \rho u \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

A continuación se escribe la expresión de residuos ponderados correspondiente a (4) y se reemplazan los valores de ρ y u por las correspondientes aproximaciones de elementos finitos.

$$\int_{\Omega} W^{\rho} \left[\frac{d\rho}{dx} u + \rho \frac{du}{dx} \right] d\Omega + \int_{\Omega} W^u \left[\rho u \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} \right] d\Omega = 0 \quad (5)$$

[†] Se han transformado las derivadas parciales en derivadas totales pues se estudia el estado estacionario.

$$\rho \simeq \hat{\rho} = \sum_{i=1}^{n_\rho} N_i^\rho \rho_i ; \quad u \simeq \hat{u} = \sum_{i=1}^{n_u} N_i^u u_i \quad (6)$$

Puede comprobarse entonces que una formulación de Galerkin, reemplazando las funciones de peso W^ρ por N^ρ y W^u por N^u se obtiene un sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_\rho \end{bmatrix} \quad (7)$$

Donde las submatrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$ están dadas por:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} N_i^u (\rho u) \frac{dN_j^u}{dx} d\Omega \quad (8)$$

$$C_{ij} = \int_{\Omega} N_i^u C \frac{dN_j^\rho}{dx} d\Omega \quad (9)$$

$$D_{ij} = \int_{\Omega} N_i^\rho \rho \frac{dN_j^u}{dx} d\Omega \quad (10)$$

$$E_{ij} = \int_{\Omega} N_i^\rho u \frac{dN_j^\rho}{dx} d\Omega \quad (11)$$

En las proximidades del punto de estancamiento, la velocidad tiende a cero localmente, con lo cual se advierte que la submatriz $\mathbf{E}$ se hace cero y el sistema (7) tiende a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_\rho \end{bmatrix} \quad (12)$$

Este sistema de ecuaciones puede analizarse considerando que en el caso $\mathbf{D} = \mathbf{C}^T$ el sistema es típico de muchas aproximaciones mixtas en los que u es la variable primaria y ρ es la restricción (equivalente a un multiplicador de Lagrange). Para obtener la solución puede despejarse $\mathbf{u}$ de la primera ecuación y sustituir en la segunda (siempre que $\mathbf{A}$ sea no singular):

$$(\mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}) \boldsymbol{\rho} = -\mathbf{f}_\rho + \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}_u \quad (13)$$

Para que la solución exista, y pueda calcularse $\boldsymbol{\rho}$, es necesario que la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}$ no sea singular (que tenga inversa). El rango de la matriz $\mathbf{B}$ tiene que ser n_ρ , y al mismo tiempo no puede ser mayor que el rango de $\mathbf{A}^{-1}$, que es n_u , por lo cual la primera condición (necesaria pero no suficiente) para la existencia de la solución es:

$$n_u \geq n_\rho \quad (14)$$

Un requisito adicional para la existencia de la solución resulta inmediato de la inspección de (13), y es:

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\rho} \neq \mathbf{0} ; \quad \forall \boldsymbol{\rho} \neq \mathbf{0} \quad (15)$$

Si éste no es el caso, la solución puede no ser única. Estos requisitos anteriores están implícitos en la condición de Babuška-Brezzi².

Si quisiera asegurarse la existencia de soluciones distintas de la trivial para $\mathbf{u}$, se llega a la misma condición (14). Para mostrar esto, se recurre a la forma penalizada de (12):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & -\mathbf{I}/\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_\rho \end{bmatrix}; \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (16)$$

Donde $\mathbf{I}$ representa la matriz identidad. Eliminando $\boldsymbol{\rho}$ (despejando $\boldsymbol{\rho}$ de la segunda ecuación y reemplazando en la primera), se obtiene:

$$(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{C} \mathbf{C}^T) \mathbf{u} = \mathbf{f}_u + \alpha \mathbf{C} \mathbf{f}_\rho \quad (17)$$

Como $\alpha \rightarrow 0$ la anterior resulta: $(\mathbf{C} \mathbf{C}^T) \mathbf{u} = \mathbf{C} \mathbf{f}_\rho$. Por tanto, para que las soluciones de $\mathbf{u}$ distintas de cero existan aún si $\mathbf{f}_\rho = 0$, la matriz $\mathbf{C} \mathbf{C}^T$ debe ser singular, lo cual ocurrirá siempre que se cumpla (14).

Verificación de la condición $n_u \geq n_\rho$

Esta prueba también suele llamarse en algunos libros *patch test* o *prueba de la parcela*. Según el teorema de Lax *consistencia + estabilidad = convergencia*. Utilizando un espacio de aproximación polinomial se asegura consistencia². Para investigar la estabilidad, si bien sería necesario probar la "*BB condition*", bastará en la mayoría de los casos con verificar la condición (14)². La prueba se realiza sobre una parcela mínima de elementos, dado que la misma efectuada sobre un único elemento resulta ser demasiado restrictiva y además las conclusiones que se pueden sacar de una prueba sobre un único elemento pueden conducir a interpretaciones incorrectas[†]. Se prescriben en el contorno todas las variables $\mathbf{u}$ y además se prescribe un valor de ρ en el dominio para resolver la indeterminación que resultaría de dejarla libre. A continuación se verifica que se cumpla (14) para los grados de libertad que no han sido restringidos.

Elemento T6/1 (Figura 1a)

En la Figura 1a se observa la parcela correspondiente. Se restringe $\mathbf{u}$ en los doce nodos del contorno y ρ en un nodo del interior del dominio. El recuento arroja $n_u = 14$, $n_\rho = 5$. Como $n_u > n_\rho$, el elemento T6/1 pasa la prueba.

Elemento T3/3 (Figura 1b)

En la Figura 1b se observa una parcela de estos simples elementos, donde la novedad es que la densidad se ha interpolado de manera constante (no hay discontinuidades entre elementos como en el elemento T6/1). Se especifica el valor de $\mathbf{u}$ en los seis nodos del contorno y ρ en un nodo del interior del dominio como en el caso anterior. La cuenta ahora resulta $n_u = 2$, $n_\rho = 6$. Como $n_u < n_\rho$, el elemento T3/3 falla la prueba y conducirá a oscilaciones indeseadas.

[†] En efecto, si se hace la prueba a los elementos en los que la densidad se aproxima con una función constante, fracasa, incluso para aquellos cuyo comportamiento es bueno.

Elemento T6/3(Figura 1c)

En la Figura 1c se observa el conjunto de seis elementos de interpolación cuadrática para las velocidades y lineal para la presión. Se ponen condiciones de contorno para $\mathbf{u}$ en los seis nodos de la frontera y para ρ se da un valor en un nodo interior como en los casos anteriores. Los valores para n_u y n_ρ resultan ahora: $n_u = 14$, $n_\rho = 6$. Como $n_u > n_\rho$, el elemento T6/3 pasa la prueba de la parcela.

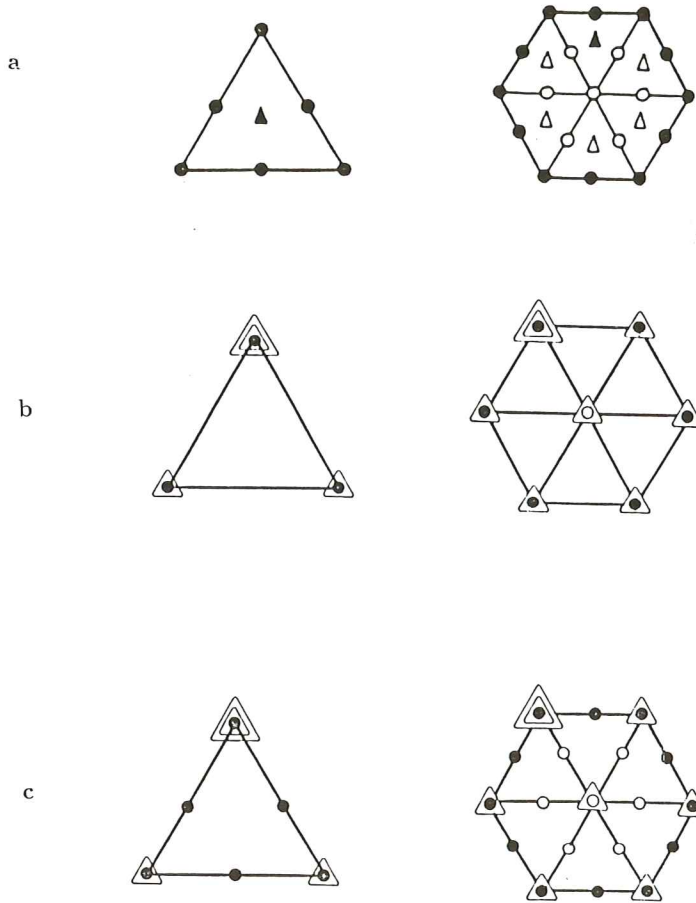


Figura 1 Parcela de elementos para el Patch Test. (a) Elemento T6/1. (b) Elemento T3/3. (c) Elemento T6/3.

B. DESCRIPCIÓN DEL CÓDIGO DRACO2D

En base a lo expuesto en el Apartado anterior, se ha escogido el elemento T6/3 de la Figura 1c. Las variables se interpolan de la siguiente forma: en los nodos esquina se interpolan las variables ρ , ρu , ρv , y ρe , mientras que en los nodos lado solo se interpolan las variables ρu y ρv .

La forma de los elementos se ha mantenido igual, es decir elementos triangulares de lados rectos. Esto es debido a que con la interpolación propuesta se intenta mejorar la aproximación de la densidad y la presión en las regiones próximas al punto de estancamiento pero no mejorar la calidad de la aproximación geométrica. Mantener los triángulos de lados rectos, permite además utilizar funciones de forma en coordenadas de área, ya que las funciones de forma cuadráticas pueden escribirse en función de productos de las funciones lineales y utilizar entonces fórmulas existentes de integración exacta. La integración numérica es evitada en este caso por el costo computacional que implica, dado que si se espera obtener un código eficiente para resolución de problemas de flujo compresible en dos dimensiones para llevarlo posteriormente a tres -donde el número de grados de libertad rápidamente llega a valores del orden de 10^5 o 10^6 - es necesario tener en cuenta los factores que pueden hacer que el código mantenga el costo computacional bajo propio de un algoritmo explícito.

El código DRACO2D permite usar una matriz de masas llena mediante un procedimiento iterativo presentado en el Apartado 5.2¹¹. Asimismo ofrece dos alternativas para la diagonalización (ver Apéndice 2 de la citada referencia.):

- a) Para los grados de libertad que se aproximan con seis nodos, se asigna $1/6$ de la *masa elemental*[†] a cada nodo.
- b) Se ponderan los elementos de la diagonal principal de manera que la sumatoria de *masas nodales* en un elemento sea la unidad.

En los casos de prueba presentados más adelante el primer procedimiento se mostró levemente mejor en cuanto a velocidad de convergencia.

B1. Integración

En los libros clásicos de elementos finitos² es posible encontrar las fórmulas que relacionan las funciones de forma lineales y cuadráticas expresadas en coordenadas de área. Designando con N_i a las funciones de forma de un elemento triangular lineal de tres nodos expresada en coordenadas locales y con L_i a las expresadas en función de coordenadas de área, se verifican las siguientes igualdades:

$$N_1 = L_1 \quad N_2 = L_2 \quad N_3 = L_3 \quad (18)$$

Las funciones de forma en coordenadas de área se obtienen como:

$$L_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Omega} \quad (19)$$

donde:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ b_1 &= y_2 - y_3 \\ c_1 &= x_3 - x_2 \end{aligned} \quad (20)$$

[†] Debe tenerse en cuenta, como se destaca en el apéndice B que el término "matriz de masas" tiene origen en el análisis de estructuras.

y Ω es el área elemental. En las (20) a_2 , a_3 , b_2 , b_3 , c_2 y c_3 se obtienen por permutación cíclica de los índices. Asimismo, las funciones de forma cuadráticas se pueden escribir -como es fácilmente comprobable- en función de las lineales[†]:

$$M_i = (2L_i - 1)L_i \quad (21)$$

para los nodos esquina, y para los situados sobre los lados:

$$\begin{aligned} M_4 &= 4L_1L_2 \\ M_5 &= 4L_2L_3 \\ M_6 &= 4L_3L_1 \end{aligned} \quad (22)$$

En la expresión anterior se han designado con M_i las funciones de forma para diferenciarlas de las lineales. Asimismo, para la correcta interpretación de (22) debe indicarse que se ha numerado cada elemento de manera que el nodo número 4 es el que está entre el nodo 1 y el 2, el 5 entre el nodo 2 y el 3, y el nodo 6 entre el nodo 3 y el 1.

Las fórmulas de integración exacta que se mencionaran anteriormente en este Apartado pueden consultarse en el Apartado 4.5.4¹¹.

B2. Viscosidad artificial

La viscosidad artificial del tipo Lapidus ha sido utilizada con éxito para elementos de interpolación lineal [11]. Se ha mantenido esta técnica para el elemento 6/3. En este Apartado se estudian algunos aspectos interesantes de la aplicación de la misma. En efecto: mientras para las variables ρ y ρe que se interpolan linealmente, es necesario hacer algunas modificaciones para las velocidades u y v que ahora se interpolan con funciones de forma cuadráticas.

Se efectúa un *suavizado* de la solución en cada paso temporal de acuerdo a la expresión:

$$\mathbf{u}_s^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1} + \Delta t \frac{\partial}{\partial x_l} \left[K^* \frac{\partial}{\partial x_l} \mathbf{u}^{n+1} \right] \quad (23)$$

donde:

$$K^* = C_K h_e^2 \left| \frac{\partial}{\partial x_l} (u_i l_i) \right| \quad (24)$$

y donde $\mathbf{u}_s$ indica el valor de $\mathbf{u}$ suavizado y las u_i son las componentes del vector velocidad $\mathbf{u}$. Del análisis de (24) se puede observar que como consecuencia de la variación cuadrática de las velocidades y de las derivadas, K^* resulta lineal, por lo cual no hay inconveniente en aproximarlos con las funciones de forma M_i . Se resuelve entonces en forma débil:

$$\int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial}{\partial x_l} \left[K^* \frac{\partial}{\partial x_l} \mathbf{u}^{n+1} \right] \mathbf{M}_i d\Omega =$$

[†] Ver Cap. 7 de la Ref 2

$$= \int_{\Omega} \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial x_l} \left(\mathbf{M}_i \frac{\partial}{\partial x_l} (K^* \mathbf{u}^{n+1}) \right) - \frac{\partial}{\partial x_l} (K^* \mathbf{u}^{n+1}) \frac{\partial \mathbf{M}_i}{\partial x_l} \right] d\Omega \quad (25)$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial}{\partial x_l} \left[K^* \frac{\partial}{\partial x_l} \mathbf{u}^{n+1} \right] \mathbf{M}_i d\Omega &= \Delta t \left[\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_l} (K^* \mathbf{u}^{n+1}) \frac{\partial \mathbf{M}_i}{\partial x_l} d\Omega + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma} \mathbf{M}_i \frac{\partial}{\partial x_l} (K^* \mathbf{u}^{n+1}) d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (26)$$

La integral $\int_{\Gamma} \mathbf{M}_i \frac{\partial}{\partial x_l} (K^* \mathbf{u}^{n+1}) d\Gamma$ se anula, dado que al efectuar la integración, la función M_i es nula excepto en los elementos que están conectados al nodo "i". En dichos elementos, se cancelan las contribuciones sobre los lados contiguos, y solo queda la integral sobre la frontera de este pequeño conjunto, que se anula porque sobre esos lados $\mathbf{M}_i$ es cero.

A continuación se reemplaza $\mathbf{u}$ por su aproximación por elementos finitos, con lo que la (26) queda:

$$- \sum_{NE} K_e^* \Delta t \int_{\Omega_e} \frac{\partial M_j}{\partial x_l} \mathbf{u}_j^{n+1} \frac{\partial M_i}{\partial x_l} d\Omega_e \quad (27)$$

siendo NE el número de elementos de la malla. Estas integrales se resuelven utilizando las igualdades (21) - (22) y las fórmulas de integración exacta (4.67) y (4.68).

B3. Mallas de elementos finitos

Dado que como se señalara en el Apartado B1, se utilizan mallas de elementos finitos de lados rectos, para los ejemplos presentados en este trabajo se ha desarrollado un programa (TRIANG6), que permite transformar cualquier malla de elementos triangulares lineales en otra idéntica de elementos triangulares de seis nodos.

Se ha preferido esto a utilizar generadores automáticos existentes de elementos de seis nodos dado que de esta forma es posible utilizar *cualquier* generador de mallas estructuradas o no.

El procedimiento que utiliza TRIANG6 para transformar una malla puede resumirse de la siguiente manera:

- Lectura de coordenadas de cada nodo y matriz de interconexiones nodales.
- Colocación de un nodo a la mitad de cada lado. Actualización de la matriz de coordenadas y conectividades nodales.
- Eliminación de los nodos repetidos (elementos contiguos).
- Renumeración.
- Actualización de matrices y escritura.

Para la generación de las mallas de elementos triangulares de tres nodos se han utilizado dos códigos: 2DUMG⁸ y ENREDO^{9,10}. El primero de ellos utiliza la técnica ya mencionada del método de avance frontal y no se darán aquí más detalles. El generador automático interactivo ENREDO usa la técnica de Delaunay. A continuación se da una breve descripción del código. Para ello se pueden distinguir las siguientes etapas:

1. *Discretización del contorno:* Se recorre el contorno especificado por el usuario colocando nodos a intervalos iguales al tamaño promedio de los elementos , el cual es función de espaciado nodal absoluto l_{abs} que se calcula según:

$$l_{abs} = l_{rel} \left(\frac{\int_{\Omega} \frac{4}{\sqrt{3}} l_{rel}^2 d\Omega}{NEL} \right)^{1/2} \quad (28)$$

donde l_{rel} es la función de espaciamiento nodal relativa (dato), Ω es el dominio de discretización y NEL es el número deseado de elementos (dato).

2. *Generación de nodos interiores:* La técnica de Delaunay requiere la generación en una primera etapa de una *nube* de puntos que con posterioridad formarán parte de la malla. Para ello ENREDO utiliza una estructura de cuadrados en árbol (*quad-tree structure*). Se comienza con un cuadrado que cubre todo el dominio y se lo subdivide hasta que cada cuadrado no contiene más que un nodo de borde. Luego, para cada cuadrado no completamente fuera del dominio, se calcula el "número promedio de nodos" n_p con la expresión:

$$n_p = \frac{1}{2} \frac{A_c}{\frac{\sqrt{3}}{4} l_{abs}^2(\mathbf{x})} \quad (29)$$

Siendo A_c el área del cuadrado. Si n_p resulta mayor que cuatro, se subdivide el cuadrado, repitiendo el proceso con los cuadrados *hijos*. Luego, cada cuadrado terminal es analizado y si está completamente dentro del dominio, los n_c nodos son generados de acuerdo a la Figura 2a

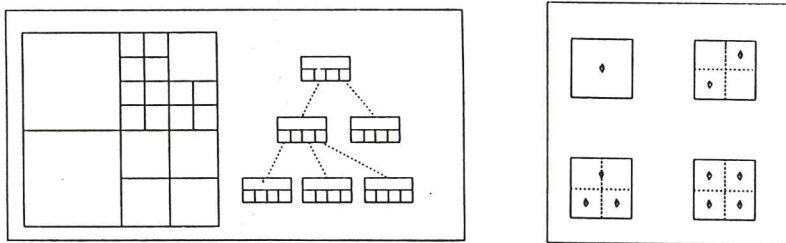


Figura 2a Colocación de los nodos en cuadrados terminales. (Gentileza de los autores de^{9y10})

3. *Generación de una malla englobante:* En esta sencilla etapa el código define una malla de base que tiene como único requisito contener totalmente el dominio a discretizar. Se toman típicamente dos elementos triangulares.
4. *Incorporación secuencial de los nodos:* Para esta etapa -la más costosa computacionalmente- se usa el algoritmo incremental de Watson[†] (Figura 2b).

[†] No se dan aquí más detalles. El lector interesado puede consultar las^{9y10} y la citadas en dichos artículos.

5. *Regeneración del contorno:* En general es posible que el algoritmo de Watson produzca una triangulación en la que algunos lados de elemento existentes en el contorno original ya no existen. El programa lleva un control y regenera dichos lados.
6. *Eliminación de elementos exteriores:* Es necesario eliminar una serie de elementos generados que no pertenecen al dominio original (Figura 2b). El método utilizado es dado un elemento en el exterior del dominio a discretizar, es eliminado y se eliminan todos los vecinos que no crucen el contorno dato.

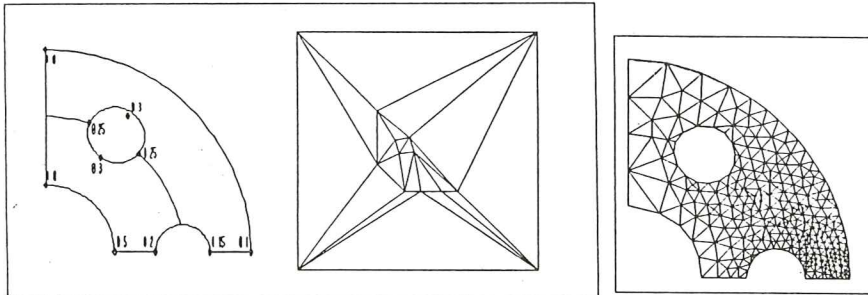


Figura 2b Incorporación de los nodos a la malla. (Gentileza de los autores de^{9y10})

7. *Mejora de la calidad:* Si bien la calidad de la discretización inicial es buena, el código realiza controles de calidad de elemento en forma iterativa. Estas operaciones son de dos tipos: a) *Mejora de la calidad de los triángulos*, donde lo que se trata de lograr es que los triángulos sean lo más equiláteros posibles. Esto se logra con los procedimientos ya comentados en el Capítulo 4 (cambio de diagonal, reposicionamiento de un nodo... etc), y b) *Mejora de la topología de la malla*, donde el objetivo es que a cada nodo concurran seis elementos (que es el número ideal)

B4. Ejemplos numéricos

Para probar el comportamiento del elemento de interpolación propuesto, se estudian a continuación dos casos donde la estabilidad en proximidades del punto de estancamiento no es buena en el caso de interpolación lineal:

Caso I: Ecuaciones de Euler

Se resuelve el flujo no viscoso bidimensional alrededor de un cilindro. El número de Mach en el infinito es 0.5 y el ángulo de ataque es 0° .

En la Figura 3 puede observarse la malla de elementos finitos de 2808 elementos y 2994 nodos (son triángulos de 6 nodos). La malla de partida es una malla de 1457 nodos (triángulos de 3 nodos). En la Figura 4a se representan las isoíneas de densidad (con más detalle en la zona del punto de parada en la Figura 4b donde se puede apreciar una ausencia total de oscilaciones en dicha región. Fué necesario emplear un paso de tiempo global y en 2000 pasos de tiempo la convergencia en la norma L_2 de los residuos fue de tres órdenes de magnitud.

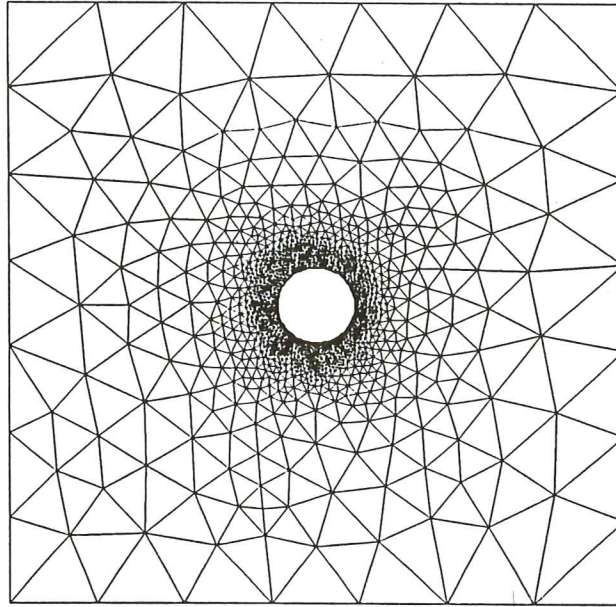


Figura 3a Malla de elementos finitos para los casos I y II del Apartado B4. Nro. de elementos: 2808. Nro de nodos= 2994

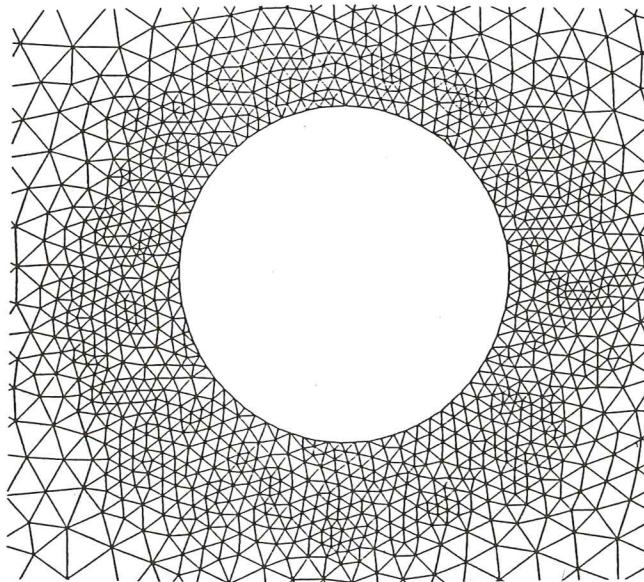


Figura 3b Detalle de la malla de elementos finitos para los casos I y II del Apartado B4.

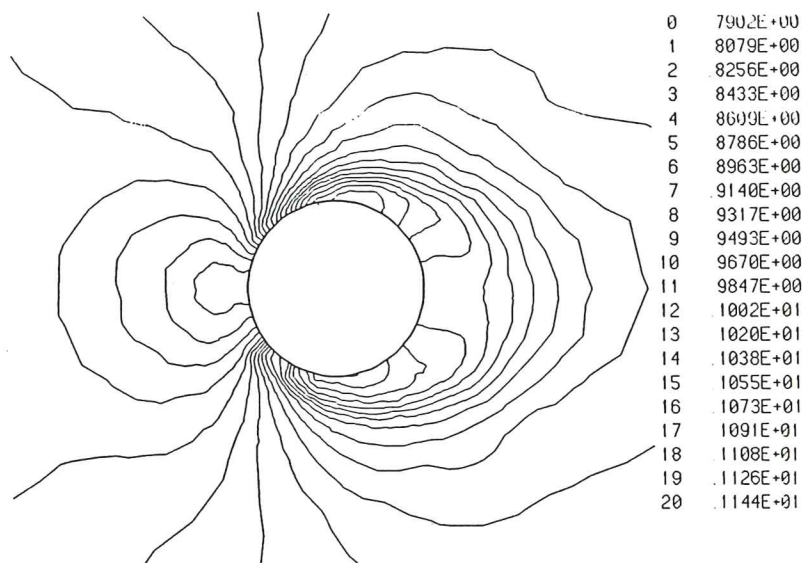


Figura 4a Isolíneas de densidad para el caso I del Apartado B4.

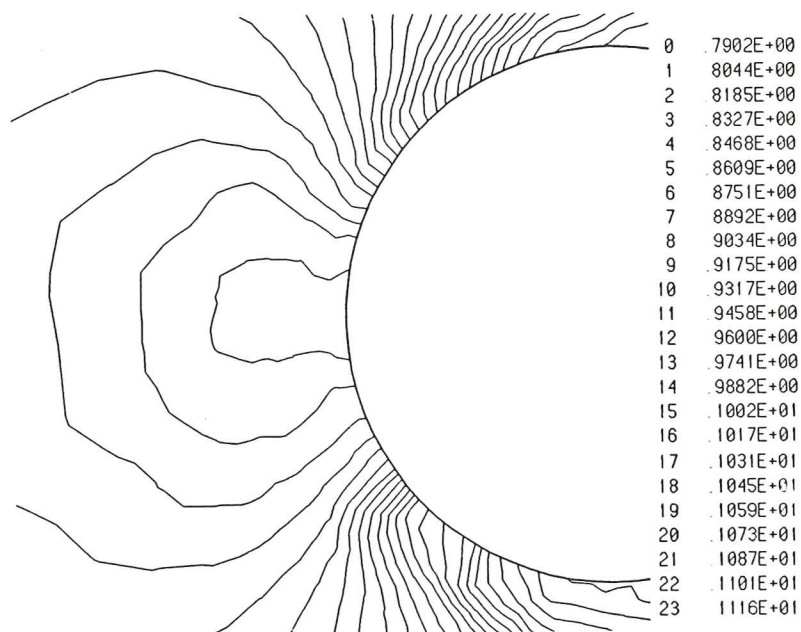


Figura 4b Detalle de las isolíneas de densidad para el caso I del Apartado B4.

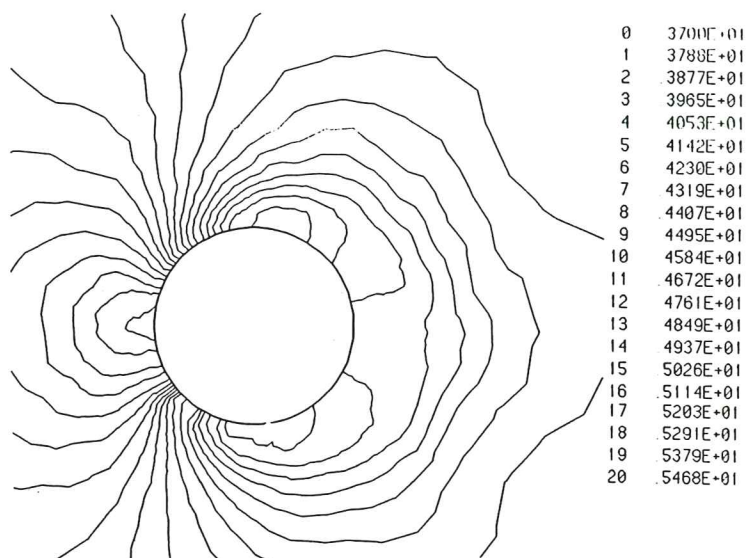


Figura 5a Isolíneas de presión para el caso I del Apartado B4.

Las Figuras 5a y b muestran las isolíneas de presión donde nuevamente se puede observar que no hay oscilaciones espúreas. Debe hacerse notar, sin embargo que algunas deficiencias en el contorno y en las líneas de nivel son debidas a defectos del post procesador utilizado.

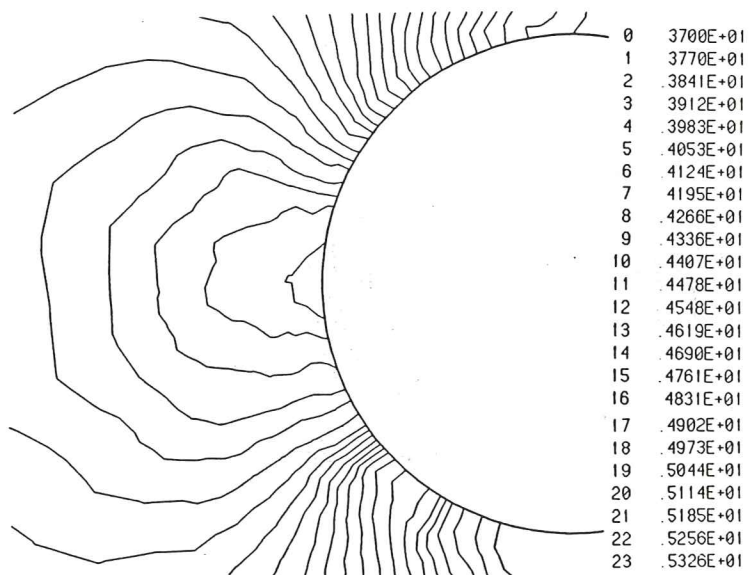


Figura 5b Detalle de las isolíneas de presión para el caso I del Apartado B4.

Se ha representado en la Figura 6a la variación de la densidad alrededor del cilindro y puede apreciarse la suavidad de la solución obtenida.

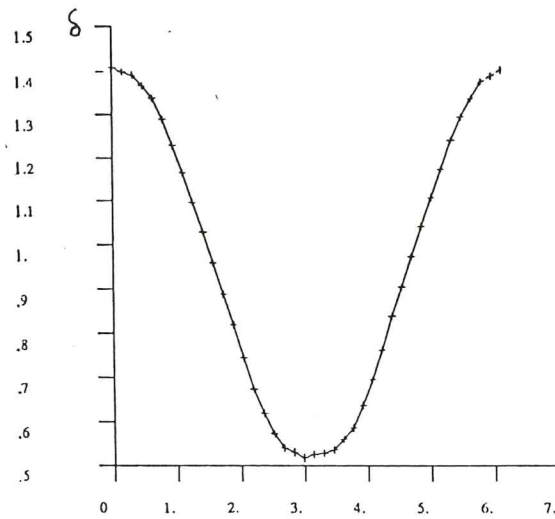


Figura 6a Variación de la densidad alrededor del cilindro para el caso I del Apartado B4.

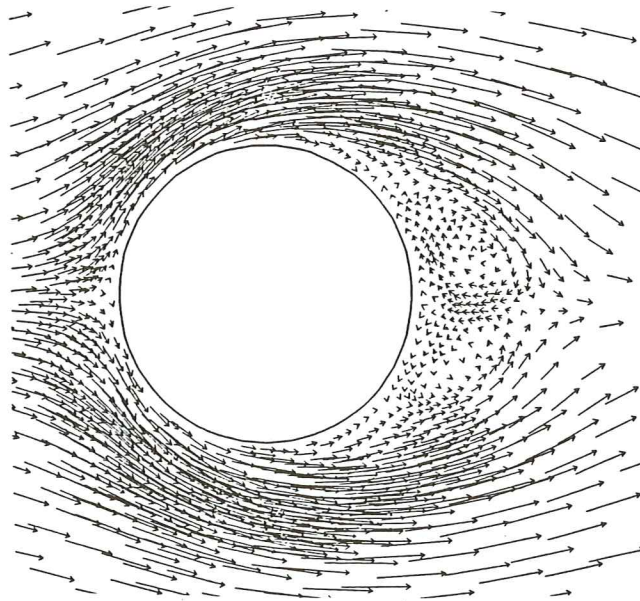


Figura 6b Campo de velocidades para el caso II del Apartado B4. (Navier-Stokes)

Caso II: Ecuaciones de Navier-Stokes

El problema resuelto en este caso es el flujo **viscoso** alrededor del mismo cilindro del ejemplo anterior. El número de Mach en el infinito es 0.4 y el número de Reynolds es $1.0 \cdot 10^6$. El número de Prandtl utilizado es 0.72. La temperatura es $273^\circ K$. Se utiliza en esta oportunidad la misma malla que en el caso anterior, la cual fue generada pensando tener un número de elementos adecuado en las regiones próximas al cilindro. En la Figura 6b puede verse el campo de velocidades. Aparecen los característicos vórtices en la parte trasera del cilindro que van evolucionando temporalmente y desprendiéndose en forma alternativa. Las líneas de igual número de Mach de la Figura 7a confirman este hecho (con más detalle en la Figura 7b). Por último las Figuras 8a y b muestran el comportamiento de las líneas de nivel de densidad.

Del análisis de los casos presentados en este Apartado puede concluirse que el tipo de interpolación propuesto da buenos resultados en las regiones de interés (proximidades del punto de parada). Sin embargo, debe decirse como aspecto a tener en cuenta que el costo por grado de libertad de este tipo de interpolación es mayor (ver Apartado siguiente). Asimismo, en todos los casos continúa siendo necesaria la viscosidad artificial para que las inestabilidades locales no atenten contra la estabilidad del algoritmo. Este hecho de alguna manera hace que no sea sustantiva la ventaja de este tipo de interpolación aunque es importante señalar que los resultados obtenidos son de indudable buena calidad.

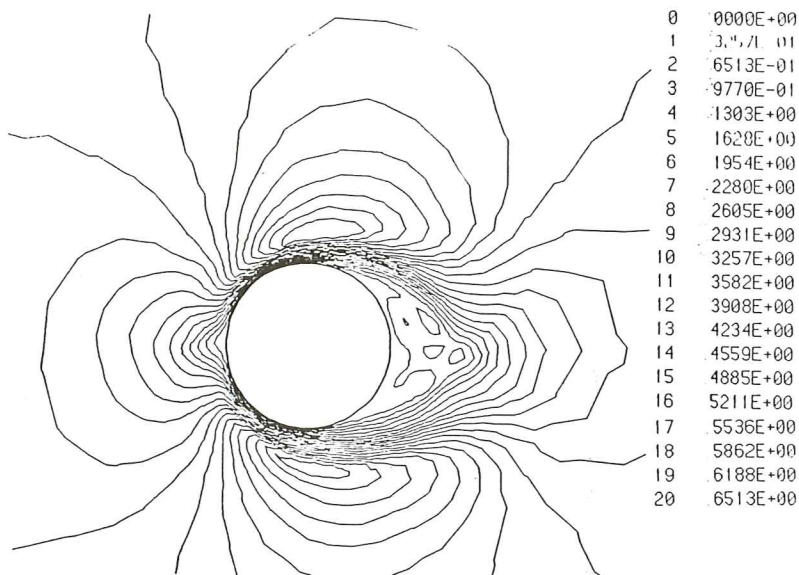


Figura 7a Isolíneas de Número de Mach para el caso II del Apartado B4. (Navier-Stokes)

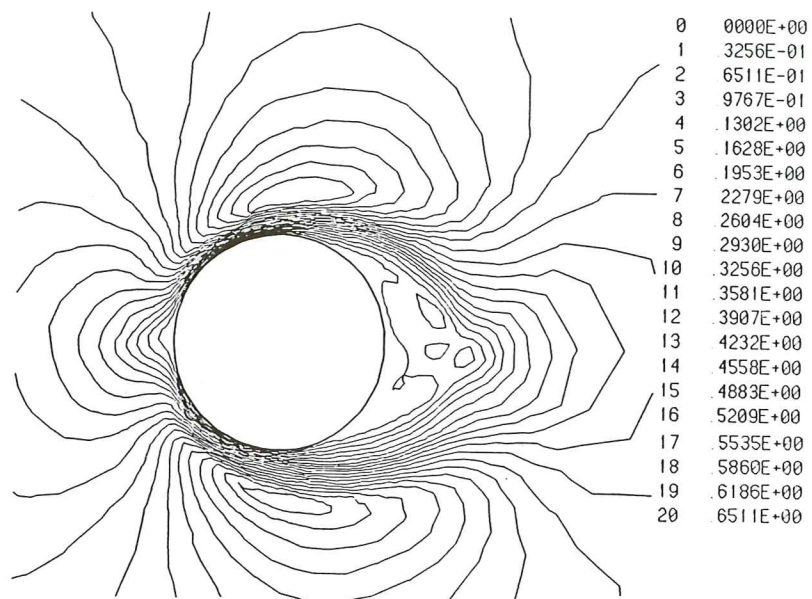


Figura 7b Detalle de las isolíneas de número de Mach para el caso II del Apartado B4.
(Navier-Stokes)

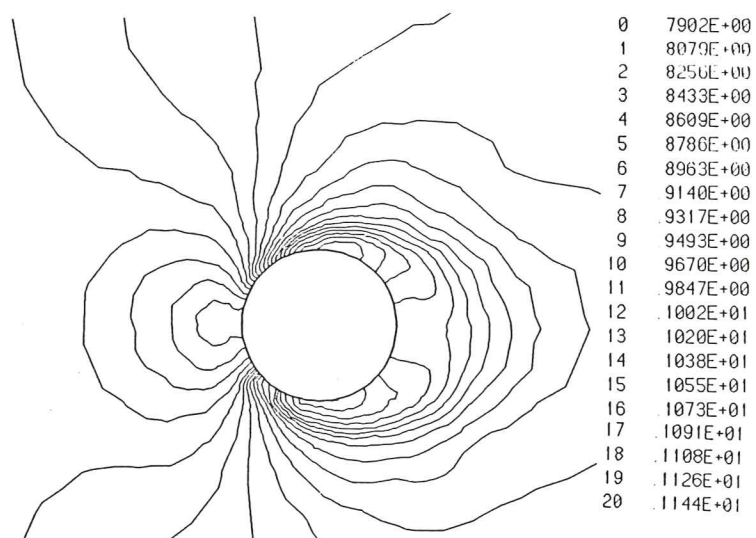


Figura 8a Isolíneas de densidad para el caso II del Apartado B4. (Navier-Stokes)

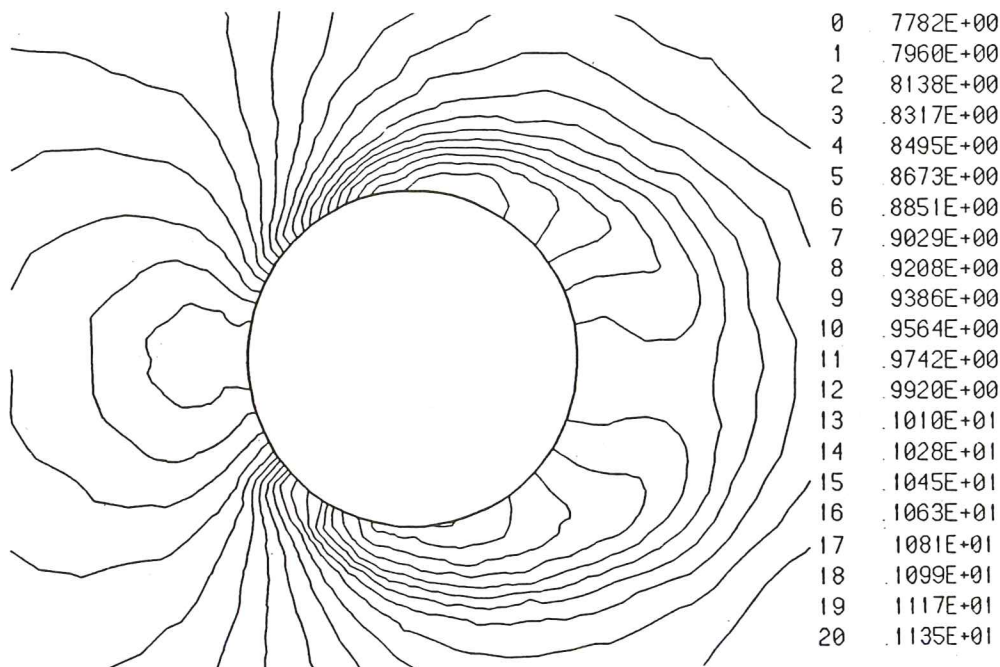


Figura 8b Detalle de las isolíneas de densidad para el caso II del Apartado B4. (Navier-Stokes)

B5. Comportamiento numérico

Los ejemplos del Apartado anterior fueron probados en diferentes ordenadores y los tiempos de *cpu* son un promedio de varias pruebas. En la siguiente tabla se resumen las características de cada uno y el resultado obtenido.

Si bien el código ha sido escrito en forma escalar, se han cuidado aspectos, como por ejemplo tener en cuenta el orden de acceso a los elementos de una matriz para evitar excesivo paginado en máquinas de memoria virtual. En el caso del ordenador vectorial Convex el programa se ha compilado con la opción de vectorización, es decir que en los lazos **do** que fuera posible ha vectorizado.

El ejemplo numérico sobre el que se han hecho las comparaciones es el perfil NACA12 en flujo subsónico ($M = 0.5$), resolviendo las ecuaciones de Euler y utilizando matriz de masas llena. La malla de elementos finitos tiene 3034 elementos y 1553 nodos. También se han hecho comparaciones con el código NASTG (Taylor-Galerkin de dos pasos con elementos triangulares lineales según se detallara en el Capítulo 4) y en todos los casos el código DRACO2D resulta entre un 25 y un 30% más lento lo cual se debe al mayor número de operaciones necesarias por grado de libertad.

Comportamiento comparativo del código DRACO2D		
Ordenador	Características	Tiempo de cpu (seg./g.l. nodo)
Convex C-120	1 procesador vectorial 121 Mb RAM Sist. op. ConvexOS-V9.0	$3.9 \cdot 10^{-4}$
SUN IPC	1 procesador escalar 8 Mb RAM Sist. op. SunOS-V	$3.5 \cdot 10^{-4}$
Vax 6000/420	1 procesador escalar 96 Mb RAM Sist. op. VAX/VMS-V5.5-1	$5.0 \cdot 10^{-4}$
Vax 11/780	1 procesador escalar 8 Mb RAM Sist. op. VAX/VMS-V4.7	$3.4 \cdot 10^{-3}$
IBM PC 486	33 Mhz 32 Mb RAM Sist. op. MS/DOS-V 5.0	$3.2 \cdot 10^{-4}$

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece a los profesores Eugenio Oñate y Juan Miquel Canet de la Universidad Politécnica de Cataluña por su asesoramiento durante la realización de la tesis doctoral^{10,11} de la cual se han extraído los resultados de este artículo. Se agradece también la ayuda prestada por el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería para la realizar este trabajo.

REFERENCIAS

1. P. Roache, *"Computational Fluid Dynamics"*, Hermosa Publishers, First edition 1972, New Mexico-USA, (1985).
2. O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, *"The Finite Element Method"*, Mc. Graw-Hill, Fourth edition, (1989).
3. O.C. Zienkiewicz, K. Morgan, *"Finite Elements and Approximation"*, John Wiley & Sons New York, (1983).
4. S.N. Atluri, R.H. Gallagher & O.C. Zienkiewicz, (editors) *"Hybrid and Mixed Finite Element Methods"*, John Wiley & Sons Ltd, (1983).
5. I. Babuška, "The finite element method with Lagrange multipliers", *Num. Math.*, Vol.20, pp. 179-192, (1973).
6. I. Babuška, "Error bounds for finite element methods", *Num. Math.*, Vol.16, pp. 322-333, (1971).

7. F. Brezzi, "On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from lagrangian multipliers", *RAIRO*, **8-R2**, pp. 129-151, (1974).
8. G. Bugada, "Utilización de técnicas de estimación de error y generación automática de mallas en procesos de optimización estructural", *Tesis Doctoral*, Escuela de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Catalunya, España (1990).
9. E.A. Dari, M.J. Vénere, "A Node placement Method for 2-D Automatic Mesh Generation", *Latin American Research*, Vol.**21**, pp. 275-282, (1991).
10. M.J. Vénere, E.A. Dari, "Análisis comparativo de algoritmos para obtener triangulaciones Delaunay". En *Mecánica Computacional*, Vol.**10**. compilado por S.R. Idelsohn. AMCA. Intec. Argentina, (1991).
11. F. Quintana, "Análisis de problemas de flujo compresible de advección dominante por el método de elementos finitos", *Tesis doctoral* Universidad Politécnica de Cataluña, Marzo (1993).
12. E. Oñate, F. Quintana, R. Codina y J. Miquel, "Finite element formulations for compressible and incompressible fluids", *Publicación de Investigación N.14*, **CIMNE**, Barcelona, (1991).