

Análisis de esfuerzos en dominios bidimensionales utilizando un modelo de daño no local y el método de los elementos de contorno

Miguel Cerrolaza y Ricardo García

Instituto de Materiales y Modelos Estructurales
Facultad de Ingeniería
Universidad Central de Venezuela
P.O. Box 50361
Caracas 1050A, Venezuela
Fax.: 58-2-605 3128, e-mail: mcerrola@reacciun.ve

Julio Flórez López

Facultad de Ingeniería
Universidad de Los Andes
Av. Tulio Febres Cordero
Mérida 5101, Venezuela
Tel./Fax: 58-74-402 869, e-mail: iflorez@ing.ula.ve

Resumen

En este artículo se propone una formulación basada en el método de los elementos de contorno para el análisis de esfuerzos en medios elásticos con daño. El daño es caracterizado empleando una clase particular de modelos no locales: los modelos de daño por cuadrícula (*grid-damage models*). Se propone un algoritmo para la resolución numérica del problema de frontera planteado. La formulación y el algoritmo fueron verificados mediante la resolución numérica de varios problemas bidimensionales. La metodología propuesta se caracteriza por su extrema simplicidad y su gran eficacia en la resolución del problema, proporcionando información confiable sobre los esfuerzos y deformaciones en modelos de ablandamiento por daño.

STRESS ANALYSIS IN TWO-DIMENSIONAL DOMAINS USING A NON-LOCAL DAMAGE MODEL AND THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

Summary

In this paper a formulation for the stress analysis in elasticity coupled to damage based on the boundary element method is proposed. Damage evolution is represented through a particular class of non-local damage model: the grid-damage model. An algorithm for the numerical resolution of the problem is also proposed. Both, formulation and algorithm, were verified by the numerical resolution of several two-dimensional problems. The methodology proposed in the paper has proven to be very simple and efficient, providing reliable information on the strains and stresses in damage-softening models.

Palabras clave

Elementos de contorno, teoría de daño continuo, modelos no locales

INTRODUCCIÓN

La teoría del daño continuo es una de las ramas de la mecánica que mayor atención ha recibido en los últimos años. Desde su inicio, marcado por el artículo de Kachanov en 1958¹, la teoría del daño continuo ha pasado por dos etapas bien definidas. En un principio la casi totalidad de los trabajos se refería a la generalización de la idea inicial (caso tridimensional, elastoplasticidad acoplada al daño, daño por fatiga, daño en materiales frágiles, teorías de daño anisótropo, etc.). A partir de finales de los años ochenta, la naturaleza de muchos de los artículos en el área cambió como consecuencia del fracaso de los análisis por elementos finitos empleando la teoría del daño continuo. La prioridad pasó a ser la interpretación de los problemas numéricos asociados a la teoría del daño continuo y sus posibles soluciones. “Localización” pasó a ser el término clave en los trabajos en el tema. Este concepto, el cual proviene de la elastoplasticidad con ablandamiento por deformación², se utiliza para designar la aparición de discontinuidades en los campos de deformación a partir de un cierto estado crítico. Matemáticamente, este fenómeno está asociado a la posible aparición de un número infinito de soluciones al problema en velocidades. Numéricamente, y cuando se emplea el método de los elementos finitos, la localización está asociada a la dependencia de la solución con respecto a la malla empleada. Con el objetivo de controlar o evitar la localización, un número significativo de técnicas de regularización ha sido propuesto³⁻⁸. Una de las primeras, y probablemente la más utilizada, consiste en el empleo de los denominados “modelos no locales”.

Este artículo propone una formulación para la resolución numérica de un tipo particular de modelos no locales: los modelos de daño por cuadrícula⁹ (*grid-damage models*), basada en el método de frontera.

El método de los elementos finitos ha sido usado con éxito en la resolución de problemas de estructuras que obedecen a esta clase de leyes de comportamiento¹⁰. Sin embargo, los análisis por elementos finitos empleando modelos de daño no locales requieren de modificaciones mayores de los programas convencionales. Adicionalmente, los algoritmos existentes hasta ahora no son muy eficientes y son particularmente costosos en términos de memoria del ordenador. Se demostrará que por el contrario, los programas basados en el método de frontera pueden ser adaptados con gran facilidad a este tipo de modelos y que la formulación resultante es simple y eficaz.

En el presente artículo se combinan los resultados presentados en las dos últimas referencias mencionadas^{9,10} con los algoritmos propuestos en un trabajo previo realizado por dos de los autores de este artículo¹¹. En este último se desarrolló un método de frontera para modelos de daño locales y no se consideró el caso no local. Los resultados propuestos en este artículo han sido también descritos en un artículo en lengua inglesa¹².

El presente trabajo está organizado de esta manera: en la siguiente sección del artículo se incluye una breve descripción de la teoría del daño continuo que no contiene material original. Este resumen está destinado a aquellos lectores interesados en el método de los elementos de frontera, pero que no son especialistas en teoría del daño continuo. A continuación se propone la formulación de elementos de frontera para modelos de daño por cuadrícula. Esta formulación es ilustrada mediante algunos ejemplos bidimensionales que se presentan en la última sección del artículo.

TEORÍA DEL DAÑO CONTINUO

Modelos locales

La teoría del daño continuo se basa en la introducción de una nueva variable interna: el daño, la cual caracteriza la densidad de microdefectos en un elemento de volumen. El daño

se define de la manera siguiente: sea A el área total de una de las caras del elemento orientada según su normal \vec{n} y sea A_d el área efectiva de todos sus microdefectos. El daño D_n en este elemento de volumen se define de la manera siguiente

$$D_n = \frac{A_d}{A} \quad (1)$$

Puede observarse que esta variable toma valores entre cero (elemento intacto) y uno (elemento completamente dañado). La hipótesis de daño isotrópico consiste en suponer que la densidad de microfisuras es la misma para cualquier orientación de la normal. En ese caso, el estado de daño puede ser caracterizado mediante un escalar $D_n \cong D \forall \vec{n}$.

El acoplamiento entre el daño y el comportamiento elástico del material puede ser realizado mediante el concepto del “esfuerzo efectivo” y la hipótesis de equivalencia en deformación¹³. El primero es similar al esfuerzo efectivo utilizado en la mecánica de medios porosos, el segundo consiste en suponer que el comportamiento de un material dañado puede obtenerse al sustituir en la ley de comportamiento del material intacto el esfuerzo de Cauchy convencional por el esfuerzo efectivo. Se obtiene de esta manera la siguiente ley de estado para un material elástico dañado

$$\sigma_{ij} = (1 - D)H_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2)$$

Donde H_{ijkl} es el tensor elástico convencional.

Para materiales frágiles, la ley de evolución del daño puede expresarse de la manera siguiente

$$D = g(Z) \quad \text{donde} \quad Z = \max(\varepsilon_{eq}) \quad (3)$$

donde g es una función monótonica creciente de la variable Z y esta última es igual al máximo valor, durante toda la historia de carga del elemento, de cierto invariante del tensor de deformaciones denominado “deformación equivalente” ε_{eq} . La elección del invariante determina por completo el modelo escogido.

Otra manera, completamente equivalente, de definir modelos de comportamiento de daño frágil consiste en utilizar funciones de daño similares a las funciones de fluencia plástica con endurecimiento isotrópico y leyes de evolución como las empleadas en la teoría de la plasticidad^{14,15}.

Puede observarse que en estos modelos, el daño depende únicamente de la historia de deformaciones del elemento de volumen en cuestión. Es por ello que estos modelos son denominados “modelos de daño locales”.

Localización en el caso unidimensional

Tal y como se mencionó en la introducción, los modelos de daño locales e independientes del tiempo conducen a soluciones que dependen de la malla al emplear el método de los elementos finitos. En esta sección, esta dependencia se ilustra utilizando un ejemplo uniaxial elemental.

Considérese un medio continuo uniaxial que ocupa el intervalo $[0,L]$ y que está sometido a las siguientes condiciones de contorno: $U(0, t) = 0$ y $U(L, t) = U^d(t)$, donde $U^d(t)$ es una función conocida positiva y monótonica del tiempo. Las fuerzas de volumen son iguales a cero. El material de esta estructura obedece la ley de comportamiento descrita en la sección precedente con $\varepsilon_{eq} = |\varepsilon|$ y $g(Z) = nZ$, donde n es una constante positiva. El sólido se discretiza utilizando dos elementos finitos con desplazamientos lineales y deformaciones constantes (Figura 1). Puede constatarse que en el caso considerado la solución de elementos finitos coincide con la solución exacta.

Figura 1. Medio continuo unidimensional y discretización por elementos finitos

Las ecuaciones de equilibrio establecen que el esfuerzo debe ser constante en el medio continuo considerado, y por lo tanto igual en ambos elementos. Esta ecuación de equilibrio puede ser representada gráficamente mediante una recta horizontal en una figura en la que las leyes de comportamiento de ambos elementos se representan simultáneamente tal y como se muestra en la Figura 2.

Figura 2. Leyes de comportamiento y ecuación de equilibrio en el problema con dos elementos finitos

Considérese un incremento del desplazamiento impuesto sobre el medio, de tal manera que la deformación unitaria del primer elemento corresponde a un punto de las gráficas esfuerzo-deformación de la Figura 2 que no ha alcanzado todavía el máximo de la curva. Puede constatarse entonces que sólo existe una solución que verifica simultáneamente la condición de equilibrio y las leyes de comportamiento de ambos elementos y que esta solución impone una deformación en el segundo elemento igual a la del primer elemento. En otras palabras, la única solución posible corresponde a un estado de deformación constante en el medio considerado.

Considérese ahora un incremento del desplazamiento impuesto tal que el punto representativo del estado del elemento 1 está justo después del máximo de la curva esfuerzo-deformación. Puede ahora comprobarse que existen dos soluciones que verifican la condición de equilibrio y las leyes de comportamiento. En la primera de ellas, las deformaciones en ambos elementos se mantienen iguales. En la segunda solución se produce una descarga elástica en el segundo elemento y una concentración del daño en el primero (el daño permanece constante en el segundo elemento). En la segunda solución aparece por lo tanto una discontinuidad en los campos de deformaciones y de daño. Esta solución es llamada “solución con localización”. Esta discontinuidad no debe ser confundida con las que aparecen en los análisis por elementos finitos. Estas últimas son debidas a los errores cometidos al aproximar un problema continuo por otro discreto y tienden a desaparecer al refinar la malla.

Recuérdese que en este problema elemental, las soluciones del problema con dos elementos finitos corresponden a soluciones exactas.

La gráfica fuerza contra desplazamiento correspondiente a cada una de las soluciones se muestra en la Figura 3. Puede constatarse que el colapso del sólido (daño igual a uno en al menos un elemento) ocurre para un desplazamiento igual a L/n para la solución homogénea y L_1/n para la solución con localización. Esta última es la solución más estable¹⁶, y por lo tanto la más significativa físicamente. Sin embargo, la longitud L_1 es una propiedad de la malla de elementos finitos. Se dice por lo tanto que la solución depende de la malla. También puede observarse que la longitud del primer elemento puede ser escogida arbitrariamente dentro del intervalo $(0, L)$. Existe por lo tanto un número infinito de soluciones posibles. Se dice en ese caso que el problema está “mal planteado”.

Figura 3. Fuerza en función del desplazamiento para el modelo de la Figura 1

El mismo tipo de dependencia de la solución con respecto a la malla de elementos finitos ha sido observado en problemas bidimensionales con modelos de daño locales^{10,17}. En el caso unidimensional la localización es posible cuando la deformación corresponde al máximo de la curva esfuerzo-deformación. En el caso general, “el máximo” puede ser definido de innumerables maneras y debe por lo tanto escogerse aquel que corresponde a la aparición de discontinuidades. El “máximo” correcto se denomina en la literatura “criterio de localización” y se obtiene al plantear el problema en velocidades. Este problema puede ser aproximado a un problema lineal que en un principio es elíptico. Al aumentar las deformaciones y el daño, se alcanza un punto crítico en el que el problema pierde localmente su elipticidad¹⁸. Puede entonces demostrarse, empleando resultados de la teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales^{19,20}, que a) la solución pierde regularidad, es decir son posibles soluciones con campos de velocidad de deformación discontinuos (soluciones con localización como las ilustradas en la sección precedente), b) el problema puede presentar un número infinito de soluciones linealmente independientes (el problema está mal planteado). En otras palabras, la pérdida de elipticidad del problema en velocidades lineal equivalente es el criterio de localización en el caso general. Puede observarse, en base a las observaciones anteriores, que los casos bi y tridimensionales son similares al ejemplo uniaxial de la sección precedente aunque técnicamente más complicados.

Modelos no locales

Es evidente que la dependencia con respecto a la malla observada en los problemas con modelos locales es inaceptable. Es por lo tanto necesario emplear algún tipo de procedimiento de regularización. En esta sección se describe brevemente una de las alternativas propuestas en la literatura: los modelos de daño no locales.

Estos modelos consisten en hacer depender el daño, no sólo de la historia de deformaciones en el punto considerado, sino también del estado de deformaciones en la zona alrededor del mismo. La versión no local del modelo descrito anteriormente puede ahora expresarse de la manera siguiente^{21,22}

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= (1 - D)H_{ijkl}\varepsilon_{kl} \\ D &= g(\bar{Z}) \quad \bar{Z} = \max(\bar{\varepsilon}_{eq})\end{aligned}\quad (4)$$

donde $\bar{\varepsilon}_{eq}$ representa un promedio de la deformación equivalente en los alrededores del punto considerado. La forma, como este promedio es calculado, define diferentes procesos de regularización. Por ejemplo, una posible expresión para este promedio es²¹

$$\bar{\varepsilon}_{eq} = \frac{1}{V_r(\vec{x})} \int \int \int_V \alpha(\vec{s} - \vec{x}) \varepsilon_{eq}(\vec{x}) dv(\vec{s}) \quad V_r(\vec{x}) \int \int \int_V \alpha(\vec{s} - \vec{x}) dv(\vec{s}) \quad (5)$$

donde α es una función de peso empírica, \vec{x} el vector posición del elemento de volumen considerado, \vec{s} el vector posición de un punto en los alrededores del elemento de volumen y V el volumen del sólido completo.

Puede constatar que sólo la manera como es calculada la variable Z diferencia a este modelo de la versión local. Con esta clase de modelos cualquier concentración de la deformación en un elemento de volumen tendrá una transferencia hacia los alrededores del punto considerado que impedirán la localización²¹. Este tipo de modelos¹⁰ parece conducir a campos de daño continuos para determinadas clases de la función α .

Modelos de daño por cuadrícula

Esta clase de modelos puede ser considerada como una variación, o tal vez como una clase particular, de los modelos no locales descritos en la sección precedente. Este procedimiento de regularización se inspira en la observación experimental de que en muchos materiales existe un volumen característico en el cual el daño es aproximadamente constante⁹.

En este modelo^{9,10}, el sólido es dividido en celdas de tamaño constante cuyas dimensiones son iguales a un cierto parámetro característico del material λ (Figura 4). El valor de λ no varía en el sólido y es obtenido experimentalmente⁹.

En este artículo, este conjunto de celdas será denominado “cuadrícula”. Se admite que en cada celda el valor del daño es constante y depende del promedio de la deformación equivalente del material en la celda. Matemáticamente el modelo puede expresarse de la manera siguiente

$$\sigma_{ij} = (1 - D)H_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (6a)$$

$$d(\vec{x}) = D^k \quad \text{si } \vec{x} \in V^k \quad (6b)$$

$$D^k = g(\bar{Z}^k) \quad \bar{Z}^k = \max(\bar{\varepsilon}_{eq}^k) \quad (6c)$$

donde V^k indica el dominio de la k -ésima celda de la cuadrícula sobre el sólido en consideración, \vec{x} es de nuevo el vector posición del punto considerado, D^k el daño en la celda y $\bar{\varepsilon}_{eq}^k$ su deformación equivalente que se calcula a partir de la siguiente expresión

$$\bar{\varepsilon}_{eq}^k = \frac{1}{V_k} \int \int \int_{V^k} \varepsilon_{eq}(\vec{s}) dv(\vec{s}) \quad (7)$$

Es importante subrayar que la distribución de celdas en el sólido, es decir la cuadrícula, es completamente independiente de la malla de elementos finitos, si este es el método numérico

empleado para la resolución del problema (Figura 4). La convergencia e independencia de la solución con respecto a la malla empleada al utilizar el método de los elementos finitos has sido demostrada¹⁰.

Los modelos de daño por cuadrícula son extremadamente simples y pueden constituir un instrumento efectivo para la resolución de problema de ingeniería.

Figura 4. Sólido dividido en celdas (cuadrícula) y malla de elementos finitos

MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA MODELOS DE DAÑO POR CUADRÍCULA

Formulación

Considérese un sólido de volumen V y contorno S . La normal exterior a esta superficie será llamada n_i . El contorno es dividido en dos zonas S_u y S_p . En la primera se imponen los desplazamientos conocidos u_i^d y en la segunda se conocen las tracciones p_i^d . Las fuerzas de volumen serán representadas por b_i . Todas estas acciones externas dependen del tiempo t . El material del sólido obedece a alguno de los modelos de daño descritos en la sección precedente. El problema, que será llamado “real”, consiste en el cálculo de los campos de desplazamientos, deformaciones, esfuerzos y daños para cada instante t . En el caso estático, las ecuaciones de equilibrio son

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{en } V \quad (8)$$

siguiendo el procedimiento tradicional del método de los elementos de contorno^{23,24,25}, la ecuación de equilibrio se transforma en la siguiente expresión variacional

$$\iiint_V (\sigma_{ij,j} + b_i) u_i^* dV = 0 \quad (9)$$

donde u_i^* corresponde a un campo de desplazamientos virtuales. El primer término de (9) puede ser integrado por partes y se obtiene

$$-\iiint_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* dV + \iint_S p_i u_i^* dS + \iiint_V b_i u_i^* dV = 0 \quad (10)$$

donde p_i representa las tracciones sobre la superficie S del problema real. Ahora, a diferencia del procedimiento tradicional, se toma un campo virtual que está relacionado con los esfuerzos virtuales por la ley de estado

$$\sigma_{ij}^* = (1 - D)H_{ijkl}\varepsilon_{kl}^* \quad (11)$$

donde D es el campo de daños del problema real. En otras palabras, el campo virtual es la solución de un problema elástico en el que el tensor de elasticidad H es modificado por el campo de daños del problema real. Las leyes de estado del problema real y virtual se introducen en (10) obteniéndose

$$-\iiint_V \varepsilon_{kl}\sigma_{kl}^*dV + \iint_S p_i u_i^* dS + \iiint_V b_i u_i^* dV = 0 \quad (12)$$

Siguiendo de nuevo el procedimiento convencional del método de los elementos de contorno, se integra por partes una segunda vez el primer término de (12).

$$\iiint_V \sigma_{kl,l}^* u_k dV - \iint_S p_k^* u_k dS + \iint_S p_i u_i^* dS + \iiint_V b_i u_i^* dV = 0 \quad (13)$$

donde p_k^* representa las tracciones sobre la superficie S del campo virtual. Sustituyendo la ecuación de equilibrio del problema virtual ($\sigma_{ij,j}^* = -b_i^*$, donde b_i^* son las fuerzas de volumen del problema virtual) en (13), se obtiene

$$\iiint_V b_i^* u_i dV = \iint_S (p_i u_i^* - p_k^* u_k) dS + \iiint_V b_i u_i^* dV \quad (14)$$

Se toma ahora un campo virtual que corresponde a la solución fundamental del problema, por lo que la primera integral de (14) puede ser escrita como

$$\iiint_V b_i^* u_i dV = c(\vec{x})_{ij} u_j(\vec{x}) e_j \quad (15)$$

donde \vec{x} representa la partícula del sólido donde se aplica la fuerza concentrada unitaria en la dirección del vector e_j . Los campos de desplazamiento, tracciones y esfuerzos virtuales pueden ser escritos ahora de la siguiente manera

$$u_i^*(\vec{y}) = U_{ij}(\vec{x}, \vec{y}, D) e_j; \quad p_i^*(\vec{y}) = P_{ij}(\vec{x}, \vec{y}, D) e_j; \quad \sigma_{ik}^*(\vec{y}) = \Sigma_{ikj}(\vec{x}, \vec{y}, D) e_j \quad (16)$$

donde $U_{ij}(\vec{x}, \vec{y}, D)$, $P_{ij}(\vec{x}, \vec{y}, D)$ y $\Sigma_{ikj}(\vec{x}, \vec{y}, D)$ representan los desplazamientos, tracciones y esfuerzos de una partícula \vec{y} debidos a la fuerza concentrada unitaria aplicada sobre la partícula \vec{x} en la dirección j . Todas estas funciones dependen del campo de daños del problema real debido a su uso en la ecuación (11). La ecuación (14) puede ser ahora escrita como

$$\begin{aligned} c(\vec{x})_{ij} u_j(\vec{x}) &= \iint_S (p_j(\vec{y}) U_{ij}^*(\vec{x}, \vec{y}, D) - P_{ik}^*(\vec{x}, \vec{y}, D) u_k(\vec{y})) dS(\vec{y}) + \\ &+ \iiint_V b_j(\vec{y}) U_{ij}^*(\vec{x}, \vec{y}, D) dV(\vec{y}) \end{aligned} \quad (17)$$

Soluciones fundamentales para modelos de daño por cuadrícula

La solución fundamental no es conocida en el caso general, cuando el campo de daños D puede variar de manera arbitraria. Sin embargo, para los modelos de daño por cuadrícula

y para una celda en particular, la solución fundamental tiene la misma forma general de las ecuaciones de Kelvin tradicionales, puesto que las propiedades elásticas y el daño son constantes en el interior de la celda. Basta por lo tanto con sustituir en éstas el módulo de elasticidad E por $(1 - D^k)E$. Por ejemplo, en el caso particular de un problema en deformaciones planas y elasticidad isótropa, las funciones empleadas en (16) tienen la siguiente expresión

$$\begin{aligned} U_{ij}^* &= \frac{-1}{8\pi(1 - D^k)(1 - \nu)Gr} [(3 - 4\nu)(\ln r)\delta_{ij} - r_{,i}r_{,j}] \\ P_{ij}^* &= \frac{-1}{4\pi(1 - \nu)r} \left\{ [(1 - 2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1 - 2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right\} \\ \Sigma_{jki}^* &= \frac{-1}{4\pi(1 - \nu)r} [(1 - 2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ki} - r_{,i}\delta_{jk}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \end{aligned} \quad (18)$$

donde $\vec{r} = \vec{y} - \vec{x}$ y r es el módulo de este vector.

La formulación de elementos de contorno descrita en la sección precedente debe ser usada como se indica a continuación. El sólido se divide en subregiones que coinciden con las celdas introducidas en la ley de comportamiento (Figura 5). La ecuación (17), cuando se aplica a la celda k , conduce a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} c(\vec{x})_{ij}u_j(\vec{x}) &= \int \int_{S^k} (p_j(\vec{y})U_{ij}^*(\vec{x}, \vec{y}, D^k) - P_{ij}^*(\vec{x}, \vec{y}, D^k)u_j(\vec{y}))dS(\vec{y}) + \\ &+ \int \int \int_{V^k} b_j(\vec{y})U_{ij}^*(\vec{x}, \vec{y}, D^k)dV(\vec{y}) \end{aligned} \quad (19)$$

para $\vec{x} \in V^k$, donde V^k es el dominio de la celda k y S^k su contorno. Las condiciones de contorno de cada celda o subregión se escriben de la manera siguiente. Sean V^k y V^l dos celdas adyacentes de contornos S^k y S^l , entonces

$$\begin{aligned} u_i^k(\vec{y}) &= u_i^l(\vec{y}) & p_i^k(\vec{y}) &= p_i^l(\vec{y}) & \text{si } \vec{y} \in S^k \cap S^l \\ u_i^k(\vec{y}) &= u_i^d & & & \text{si } \vec{y} \in S^k \cap S_u \\ p_i^k(\vec{y}) &= p_i^d & & & \text{si } \vec{y} \in S^k \cap S_\sigma \end{aligned} \quad (20)$$

La primera expresión de las ecuaciones (20) establece la continuidad de los desplazamientos y las tracciones entre las celdas. Las dos últimas ecuaciones corresponden a condiciones de contorno convencionales de la mecánica de medios continuos.

El conjunto compuesto por las ecuaciones (19) y (20) y las leyes de evolución del daño (6c) y (7) para cada una de las subregiones o celdas del sólido constituyen una formulación de elementos de contorno para modelos de daño por cuadrícula.

Aproximación numérica

Para la implementación numérica de la formulación propuesta en el apartado precedente debe procederse primero a la discretización espacial y temporal del problema planteado:

a) Discretización temporal de la ley de evolución de daño

El intervalo de tiempo $[0, T]$, durante el cual se desea analizar la estructura, se discretiza en n instantes $(0, \tau_1, \dots, \tau_p, \dots, T)$. Se emplea ahora un procedimiento paso a paso convencional en el cual el máximo valor de la historia de deformaciones equivalentes hasta un cierto instante τ_p no se busca durante el intervalo continuo $[0, \tau_p]$, sino únicamente entre los valores de la deformación equivalente en el conjunto discreto de instantes

$(0, \tau_1, \dots, \tau_p)$. Es decir, la ley de evolución del daño (6c) y (7) se aproxima de la manera siguiente

$$\begin{aligned} D^k(\tau_p) &= g(\bar{Z}^k(\tau_p)) \\ \bar{Z}^k(\tau_p) &= \max(\bar{\varepsilon}_{eq}^k) \cong \max((\bar{\varepsilon}_{eq}^k(0), \bar{\varepsilon}_{eq}^k(\tau_1), \dots, \bar{\varepsilon}_{eq}^k(\tau_p))) \end{aligned} \quad (21)$$

b) Discretización espacial del contorno de las celdas de la cuadrícula

El contorno de todas y cada una de las celdas se discretiza empleando elementos de frontera (Figura 5).

Figura 5. Malla de elementos de frontera

Se tiene por tanto para cada instante τ_p y para cada celda k la siguiente ecuación matricial

$$[A^k(D^k(\tau_p))]\{a^k(\tau_p)\} = [B^k(D^k(\tau_p))]\{b^k(\tau_p)\} \quad (22)$$

Las ecuaciones de compatibilidad y de equilibrio entre celdas (20) pueden ser tomadas en cuenta mediante un adecuado ensamblaje de las matrices $[A^k]$ y $[B^k]$ de cada celda en las matrices globales $[A]$ y $[B]$ empleando los algoritmos convencionales²⁴. Esto es posible ya que el problema en nada se diferencia al de un medio elástico estratificado, salvo que el tensor de elasticidad efectivo (el término $(1 - D^k)H_{ijkl}$) de cada celda no es a priori conocido. Se obtiene por lo tanto la siguiente ecuación matricial para cada instante τ_p

$$[A(D(\tau_p))]\{a(\tau_p)\} = [B(D(\tau_p))]\{b(\tau_p)\} \quad (23)$$

donde $D(\tau_p)$ representa el campo de daño de todo el sólido en el instante τ_p y las matrices $\{a(\tau_p)\}$ y $\{b(\tau_p)\}$ contienen las variables nodales de la cuadrícula en el mismo instante.

El sistema de ecuaciones no lineal compuesto por las ecuaciones (23), (6c) y (7) definen la aproximación numérica de la formulación propuesta en este artículo.

Algoritmo de resolución

El sistema de ecuaciones definido en el apartado anterior puede ser resuelto por cualquiera de los métodos convencionales. En las simulaciones numéricas que se presentan en la siguiente sección, y con el objetivo de modificar lo menos posible los programas convencionales empleados en la resolución de problemas elásticos, el problema con daño fue resuelto utilizando el algoritmo de iteración directa que se describe a continuación.

Supóngase conocido el estado del sólido en toda la historia previa al instante τ_p . El problema consiste en determinar el campo de desplazamientos $\vec{U}(\vec{x}, \tau_p)$ y de daño $D(\vec{x}, \tau_p)$ en ese instante. Para ello se procede de la siguiente manera:

- En el campo $D_0(\vec{x}, \tau_p)$ (daño en la iteración cero y el instante τ_p) se toma igual al daño del paso anterior $D_0(\vec{x}, \tau_p) = D(\vec{x}, \tau_{p-1})$.
- El campo de desplazamientos $\vec{U}_q(\vec{x}, \tau_p)$ (desplazamientos en la iteración q y el instante τ_p) se calcula mediante la resolución de la ecuación (23) usando como campo de daño el obtenido en la iteración $q - 1$.
- El campo $D_q(\vec{x}, \tau_p)$ (daño en la iteración q y el instante τ_p) se calcula empleando la ecuación (6c) y como campo de deformaciones equivalentes en el instante τ_p , el obtenido a partir de $\vec{U}_q(\vec{x}, \tau_p)$ empleando la relación (7).
- Se verifica la convergencia del proceso iterativo estableciendo por ejemplo diferencias máximas admisibles entre dos campos de desplazamientos y de daño consecutivos. Si el proceso no ha convergido todavía, se procede a una nueva iteración comenzando por el paso b).

EJEMPLOS NUMÉRICOS

Definición de la función de daño

Esta sección presenta y discute dos ejemplos numéricos que muestran la potencia y versatilidad del procedimiento propuesto en este trabajo. Se desarrolló un programa de ordenador basado en el algoritmo descrito en la sección precedente. El modelo propuesto por Mazars²⁶ fue adoptado y acoplado al esquema de celdas descrito anteriormente para ser utilizado por el programa. Se emplearon las siguientes expresiones para la ley de evolución del daño

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle \varepsilon_I \rangle^2 + \langle \varepsilon_{II} \rangle^2 + \langle \varepsilon_{III} \rangle^2} \quad g(Z) = \alpha_t F_t(Z) + \alpha_c F_c(Z) \quad (24)$$

donde

$$F_t(Z) = 1 - \frac{\varepsilon_0(1 - A_t)}{Z} - \frac{A_t}{\exp[B_t(Z - \varepsilon_0)]};$$

$$F_c(Z) = 1 - \frac{\varepsilon_0(1 - A_c)}{Z} - \frac{A_c}{\exp[B_c(Z - \varepsilon_0)]}$$

α_t , α_c , ε , A_t , A_c , B_t y B_c son constantes del material.

Las propiedades del material (concreto) usando en la simulación son las siguientes:

G_i	- módulo de corte inicial	= 13174,5 MPa
ν_i	- coeficiente de Poisson inicial	= 0,215
A_t	- parámetro para la ley de evolución de tracciones	= 0,7858
B_t	- parámetro para la ley de evolución del daño en tracción	= 8857,39
A_c	- parámetro para la ley de evolución del daño en compresión	= 1,0267
B_c	- parámetro para la ley de evolución del daño en compresión	= 230,71
εd_0	- umbral de deformación inicial del daño	= 0,0001129

Placa cuadrada sometida a desplazamientos verticales

El primer ejemplo discutido aquí es una placa cuadrada sometida a desplazamientos verticales en su lado derecho, mientras que el lado izquierdo se considera fijo. Los bordes superior e inferior están libres de tensiones. Una cuadrícula de 25 celdas fue definida de manera de calcular las deformaciones equivalentes en los 4 puntos internos de cada celda, es decir, la deformación equivalente fue calculada en 100 puntos internos de la placa. El usuario puede definir tantos puntos internos como se desee de manera de refinar los resultados. Cada celda fue discretizada en 4 elementos de contorno con interpolación lineal (2 nodos por elemento), proporcionando así un total de 60 elementos de contorno y 36 puntos nodales. La Figura 6 muestra la geometría y las condiciones de contorno de la placa, así como la posición de los puntos internos.

Figura 6. Placa cuadrada sometida a desplazamientos verticales: geometría, condiciones de contorno y puntos internos (4 elementos de contorno por celda)

El desplazamiento vertical impuesto en el lado derecho es igual a $d = -0,015$ cm, el cual se incrementa progresivamente con aumentos del 10 % hasta alcanzar su valor total.

Como es bien conocido, esta clase de problemas conduce a la formación de una banda diagonal de tracciones, la cual se desarrolla desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha y causa la degradación del material en consideración. Así los valores máximos del daño se esperan en estas dos esquinas. La Figura 7 ilustra la distribución de los valores del daño para un valor del 70 % del desplazamiento total, mientras que la Figura 8 muestra un mapa de deformaciones equivalentes obtenido por interpolación entre las celdas.

Nótese que los valores máximos del daño están localizados alrededor de las esquinas de la diagonal de tracción, tal y como se esperaba. La Figura 9 muestra los valores de daño obtenidos cuando el valor total del desplazamiento (100 %) es aplicado a la placa. Valores de daño hasta 0,7 fueron obtenidos antes de la falla del material.

Figura 7. Distribución del daño en placa cuadrada (4 elementos de contorno por celda):
70 % del desplazamiento total

Figura 8. Deformaciones equivalentes en placa cuadrada: 70 % del desplazamiento total (los
valores están multiplicados por $1,0E5$)

Figura 9. Distribución del daño en placa cuadrada (4 elementos de contorno por celda):
100 % del desplazamiento

Este simple ejemplo muestra que el método aquí propuesto es capaz de determinar las zonas críticas del dominio en estudio, basado en un modelo simple y eficiente de daño no local, como fue previamente discutido.

Varios números de puntos internos también usados de manera de evaluar como este número puede afectar los resultados. El análisis de los resultados numéricos indica que los valores del daño son esencialmente los mismos cuando se utilizan números mayores de puntos internos (9 ó 16 en cada celda).

También se realizaron análisis de sensibilidad de manera de asegurar la estabilidad del método, así como su independencia del número de elementos de contorno usado para discretizar el dominio. El mismo ejemplo anterior es ahora discretizado con dos mallas más refinadas de elementos de contorno. Estas mallas fueron definidas utilizando ahora 8 y 12 elementos de contorno lineales respectivamente para cada celda. Asimismo, fueron utilizados 4 puntos internos por celda, como se ilustra en la Figura 10.

Las Figuras 11 y 12 muestran los valores del daño obtenidos con la malla refinada de 8 elementos de contorno, al 70 % y al 100 % del desplazamiento impuesto, respectivamente. Nótese que los resultados son prácticamente los mismos que se obtuvieron con la malla de 4 elementos de contorno por celda, confirmando así que el algoritmo numérico es estable e independiente del grado de refinamiento de la malla de elementos de contorno.

Placa en L

Este ejemplo estudia el comportamiento de una placa en forma de “L” sometida a desplazamientos horizontales en su lado izquierdo, mientras que el lado derecho se considera fijo. Ahora, las 12 celdas se discretizaron con 4 elementos de contorno para cada una, siendo necesario definir 32 elementos de contorno y 21 puntos nodales, como muestra la Figura 13.

Figura 10. Placa cuadrada: geometría, condiciones de contorno y puntos internos (8 elementos de contorno por celda)

Figura 11. Distribución del daño en placa cuadrada (8 elementos de contorno por celda):
70 % del desplazamiento total

Figura 12. Distribución del daño en placa cuadrada (8 elementos de contorno por celda):
100 % del desplazamiento

Figura 13. Placa en L sometida a desplazamientos horizontales: geometría, condiciones de contorno y puntos internos

En este ejemplo se utilizaron 9 puntos internos en aquellas celdas cercanas al punto singular (esquina interna de la placa), ya que se espera que los valores máximos del daño se desarrollen en esa zona. En el resto de las celdas sólo se utilizaron 4 puntos internos. La Figura 14 muestra la distribución del daño obtenida bajo un 60 % del desplazamiento total, mostrando una clara concentración de altos valores de daño en zonas adyacentes al punto singular de la placa (punto de concentración de tensiones). La Figura 15 ilustra de nuevo el mapa de deformaciones equivalentes, obtenido por interpolación entre las celdas.

Figura 14. Distribución del daño en placa L: 60 % del desplazamiento total

Figura 15. Deformaciones equivalentes en placa en L: 60 % del desplazamiento total (los valores están multiplicados por $1,0E5$)

La Figura 16 contiene la distribución del daño en la placa en L, pero ahora bajo un 100 % del desplazamiento total. Nótese que los valores de daño obtenidos alcanzan el valor 0,8.

Figura 16. Distribución del daño en placa en L: 100 % del desplazamiento total

De nuevo, debe ser resaltado aquí que también fueron realizados análisis de sensibilidad, de manera de garantizar que los resultados son independientes del grado de refinamiento de la malla de elementos de contorno. Los valores de daño obtenidos con mallas más refinadas fueron básicamente los mismos al ser comparados con los obtenidos con la malla mostrada en la Figura 13. Las diferencias fueron menores del 5 %.

CONCLUSIONES

La necesidad del uso de procedimientos de regularización para la resolución de problemas empleando la teoría del daño continuo ha sido ampliamente demostrada en la literatura. Es por lo tanto claro que la implementación numérica de estos procedimientos en programas comerciales de análisis estructural es una prioridad si se quieren desarrollar aplicaciones industriales usando los conceptos de la teoría del daño continuo. Los modelos no locales constituyen uno de los procedimientos de regularización más importantes. Sin embargo, la implementación numérica de esta clase de modelos en programas de elementos finitos requiere modificaciones extensivas de los códigos existentes y el almacenamiento de una cantidad considerablemente mayor de datos con respecto a los modelos locales. Es importante subrayar que en el caso considerado es necesaria la definición de dos mallas independientes, una para la cuadrícula definida por la ley de comportamiento y otra para los elementos finitos. Hasta la fecha no se conoce ningún programa comercial de elementos finitos que haya incluido modelos no locales en su librería de materiales. No hay tampoco programas comerciales de elementos finitos que consideren la manipulación de dos mallas simultáneamente.

Por otra parte, a diferencia del caso de los elementos finitos, todos los programas comerciales de elementos de contorno consideran la posibilidad de medios estratificados con diferentes propiedades elásticas. La cuadrícula introducida por el modelo de daño puede ser considerada como un caso particular de este tipo de problemas. La implementación de este tipo de modelos en programas comerciales es por lo tanto mucho más simple.

Puede argumentarse que al ser necesario definir una cuadrícula se pierde la ventaja principal del método de contorno, la no discretización del dominio del sólido. Ello es inevitable, puesto que la cuadrícula no es una exigencia del método numérico, sino que es introducida para representar la naturaleza física del problema. En cualquier caso, cuando se usa el método de los elementos finitos es necesario manejar simultáneamente dos mallas

independientes, mientras que con el método de los elementos de contorno sólo una es necesaria.

En resumen, es evidente que para el caso particular considerado el método de los elementos de frontera presenta ventajas obvias sobre cualquier otro método numérico conocido.

AGRADECIMIENTOS

La redacción de este artículo se terminó, mientras el tercer autor (Julio Flórez López) era investigador invitado en la Universidad Politécnica de Madrid con beca del Ministerio de Educación y Cultura del Reino de España. Este autor desea agradecer la hospitalidad de los miembros del Departamento de Mecánica Estructural, ETSII y particularmente la de su Director, el Profesor Enrique Alarcón.

Este trabajo fue financiado por el CDCH de la Universidad Central de Venezuela, el CDCHT de la Universidad de Los Andes y el CONICIT de Venezuela.

REFERENCIAS

- 1 L.M. Kachanov, "On creep rupture time", *Izv. Akad. Nauk SSSR*, Vol. **8**, pp. 26–31, (1958).
- 2 J.R. Rice, J.W. Rudnicki, "A note on some features of the theory of localization of deformations", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. **16**, pp. 597–605, (1980).
- 3 G. Pijodier-Cabot y Z.P. Bažant, "Non-local damage theory", *J. Engng. Mech.*, Vol. **113**, pp. 1512–1533, (1987).
- 4 C. Saudiris y J. Mazars, "A multiscale approach to distributed damage and its usefulness for capturing structural size effects", in "*Strain localization and size effect due to cracking and damage*, France-US workshop, pp. 391–403, J. Mazars y Z.P. Bažant (Eds.), (1998).
- 5 T. Belytschko y D. Lasry, "Localization limiters and numerical strategies for strain-softening materials", in "*Strain localization and size effect due to cracking and damage*, France-US workshop, J. Mazars y Z.P. Bažant (Eds.), (1998).
- 6 R. De Borst, "Simulation of localization using Cosserat theory, *Proc. 2 Int. Conf. on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, N. Bicanic y H. Mang (Eds.), Pineridge Press, pp. 931–944, (1990).
- 7 R. Abeyaratne y J. Knowles, "On the driving traction acting on a surface of strain discontinuity in a continuum", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. **38**, 3, pp. 345–360, (1990).
- 8 R. Billardon y J. Flórez López, "On a damage-softening model with progressive localization", *II Pan American Congress of Applied Mechanics*, Valparaiso, Chile, (1991).
- 9 F.R. Hall y D.R. Hayhurst, "Modelling of grain size effects in creep crack growth using a non-local continuum damage approach", *Proc. R. Soc. London*, Vol. **A 433**, pp. 405–421, (1991).
- 10 J.H.P. de Vree, W.a. M. Brekelmans y M.A.J. van Gils, "Comparison on non-local approaches in continuum damage mechanics", *Comp. & Struct.*, Vol. **55**, 4, pp. 581–588, (1995).
- 11 M. Cerrolaza y R. García, "Boundary elements and damage mechanics to analyze excavations in rock mass", *Engng. Anal. Bound. Elem.*, (1997).
- 12 R. García, J. Flórez López y M. Cerrolaza, "A boundary element formulation for a class on non-local damage models"
- 13 J. Lamaitre, "*A course on damage mechanics*", Springer-Verlag, Berlin, (1992).

- 14 J. Marigo, "Etude numérique de l'endommagement", *Bull. DER Electricité de France*, Vol. **2**, pp. 27–48, (1982).
- 15 W.A.M. Brekelmans, P.J.G. Schreurs y J.H.P. de Vree, "Continuum damage mechanics for softening of brittle materials", *Acta Mech.*, Vol. **93**, pp. 133–143, (1992).
- 16 Z.P. Bažant y L. Cedolin, "*Stability of structures*", Oxford University Press, New York, (1991).
- 17 A. Benallal y R. Billardon, "Problèmes numériques liés au couplage d'un loi d'évolution de l'endommagement continu avec une loi de comportement élastoplastique", *Colloque CRECO grandes déformations et endommagement*, Aussois, France, (1985).
- 18 A. Benallal y R. Billardon y G. Geymonat, "Conditions de bifurcation à l'intérieur et aux frontières pour une classe de matériaux non-standards", *C.R. Acad. Sci. Paris II*, Vol. **308**, pp. 893–898, (1989).
- 19 J. Necas, "Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques", Masson, Paris, (1967).
- 20 J.T. Oden y J.N. Reddy, "An introduction to mathematical theory of finite elements", John Wiley & Sons Eds, New York, (1976).
- 21 G. Pijodier-Cabot y Z.P. Bažant, "Non-local damage theory", *J. Engng. Mech.*, Vol. **113**, pp. 1512-1533, (1987).
- 22 C. Saudiris y J. Mazars, "A multiscale approach to distributed damage and its usefulness for capturing structural size effects", in "*Strain localization and size effect due to cracking and damage*", France-US workshop, pp. 391-403, J. Mazars y Z.P. Bažant (Eds.), (1998).
- 23 C.A. Brebbia, J.C. Telles y L. Wrobel, "*Boundary element techniques: theory and applications in engineering*", Springer Verlag, Berlin, (1984).
- 24 S.L. Crouch y A.M. Starfield, *Boundary element methods in solid mechanics*, George Allen & Unwin Ltd., London, (1983).
- 25 J. Kane, *Boundary element analysis in engineering continuum mechanics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1994).
- 26 J. Mazars, "A model of unilateral elastic damageable material and its application to concrete", *Proc. Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete*, F.H. Wittmann, Elsevier, pp. 61-71, (1986).