

# Aplicación de diversos métodos numéricos para el cálculo de la subsidencia unidimensional en un suelo saturado en el caso de Murcia

José Luis de Justo Alpañés y Narciso Jesús Vázquez Carretero

Depto Mecánica de Medios Continuos, Teoría de Estructuras e Ingeniería del Terreno

Escuela Técnica Superior de Arquitectura, Universidad de Sevilla

Avenida de Reina Mercedes 2, 41012 Sevilla, España

Tel.: 34-954-55 65 89, Fax: 34-954 55 69 65

e-mail: narciso@arqu4.us.es

## Resumen

El descenso experimentado por el nivel piezométrico en Murcia, durante la última sequía, ha ocasionado asentamientos en el subsuelo que han provocado daños de cierta envergadura, tanto por su dimensión como por su extensión. Se trata del primer caso de subsidencia producido en España. De otros estudios se deduce que el estudio de la subsidencia unidimensional es apropiado para describir el fenómeno.

En este artículo se presenta el cálculo de la subsidencia unidimensional para un acuitardo confinado por dos acuíferos, mediante soluciones explícitas, aproximaciones explícitas mediante diferencias finitas y a través del método de predictor-corrector, comprobándose la concordancia de los resultados entre ellas y con los datos reales. Se analizan las ventajas de cada uno de estos métodos y su ámbito de validez, llegándose a la conclusión de que el predictor-corrector es el que tiene un campo de aplicación más amplio.

## NUMERICAL METHODS FOR THE CALCULATION OF ONE-DIMENSIONAL SUBSIDENCE OF SATURATED SOIL IN THE CASE OF MURCIA

## Summary

The head drop produced during the last drought in Murcia has produced settlements in the soil where the buildings are established and has caused significant damage in size and extension. It is the first case of subsidence ever produced in Spain. Several authors have deduced that one-dimensional subsidence fits the measured subsidence data and is appropriated to describe the phenomenon.

This paper presents the calculation of one-dimensional subsidence for an aquitard confined by two aquifers with known changes in the head, through explicit solutions, approximations by finite differences and the predictor-corrector methods and checks the fitting of the calculated results and the real data. The advantages of the different methods are compared. The predictor-corrector is the one with a wider application.

## INTRODUCCIÓN

La subsidencia es un fenómeno que implica el asentamiento de la superficie terrestre en un área extensa debido al impacto de una gran variedad de actividades humanas<sup>27</sup>. Entre ellas destaca la extracción de agua del subsuelo.

La bajada del nivel piezométrico en el terreno reduce la presión intersticial del agua en los poros del suelo y, como consecuencia, aumenta la presión efectiva, que en un suelo saturado es igual a la presión total menos la presión del agua. En la zona situada por encima del nivel piezométrico el agua se encuentra a presión negativa, es decir, inferior a la atmosférica, y la presión efectiva no siempre obedece a la ley citada, pero la disminución de la presión del agua también produce una compresión; en cualquier caso, en arcillas plásticas, para succiones inferiores a 500 kPa, sigue siendo válido con frecuencia el principio de presión efectiva ( $\sigma' = \sigma - u$ )<sup>21</sup>. Esto da lugar a un proceso de consolidación del terreno que puede originar asientos considerables y, si afecta a una superficie extensa, a un descenso generalizado de todo el área.

Las zonas de mayor extensión y máximo asiento se han encontrado en California<sup>6</sup>. En el Valle de S. Joaquín se han extraído grandes cantidades de agua para resolver las necesidades de riego del área, lo que ha provocado una subsidencia hasta de 9 m. En el Valle de Santa Clara<sup>27</sup>, en 1973, una superficie de 13500 km<sup>2</sup> alcanzó una subsidencia mínima de 30 cm. En Japón la subsidencia ha desencadenado graves problemas medioambientales en zonas superpobladas. En Tokio viven dos millones de personas en una zona de 80 km<sup>2</sup> que ha descendido 2,30 m bajo el nivel del mar. En la llanura de Nobi los asientos se extienden hasta profundidades de más de 100 m. En algunos casos, las condiciones ambientales o artísticas de la zona hacen que una subsidencia de menor cuantía cobre más importancia, como es el caso de Venecia, donde la superficie ha descendido 8 cm en 16 años, pero hay que tener en cuenta que se encuentra a menos de 2 m sobre el nivel del mar. En el área de Galveston, en Texas, el valor del suelo se ha hundido a causa de la subsidencia provocada por la extracción de agua y el agua de la bahía está inundando la zona. Más casos de subsidencia provocados por la extracción de agua del terreno han ocurrido en Osaka, Niigata (Japón), Ravenna (Italia), Taipei (Taiwan), Ciudad de México (México), Bangkok (Tailandia), Londres (Inglaterra), Valle de Santa Clara, Arizona Sur Central, Las Vegas (E.E.U.U.).

En España, la bajada piezométrica del acuífero aluvial de la Vega Media del Segura tiene su origen en la sequía de la Cuenca<sup>4</sup>, que actúa en dos sentidos. Por un lado, se disminuye la alimentación por la infiltración de la lluvia y de los excedentes de riego debido a la menor disponibilidad de recursos. Por otro, se aumentan las extracciones de agua subterránea para suplir este déficit (0,94 m<sup>3</sup>/s, que corresponden a 29,60 hm<sup>3</sup>/año en el año hidrológico 1994-95) y que se distribuyen en pozos-sequía para el riego agrícola (22 hm<sup>3</sup>), pozos municipales para el riego de áreas verdes urbanas (0,60 hm<sup>3</sup>), drenajes de sótanos y aparcamientos (2 hm<sup>3</sup>), extracciones realizadas para las bombas de calor (2 hm<sup>3</sup>) y pozos de abastecimiento a la industria ubicada en la ciudad y su entorno (3 hm<sup>3</sup>). Todo ello ha llevado a un descenso del nivel piezométrico<sup>5,22</sup> en la ciudad de Murcia de 2,50 m en el trienio 82-84 y de hasta 10,80 m en el cuatrienio 92-95.

Los datos de subsidencia en Murcia dan valores superiores a 10 cm, lo que ha originado daños en edificios, urbanizaciones, instalaciones y obras públicas<sup>1,2</sup>. El efecto sobre las estructuras se debe principalmente a los asientos diferenciales, aunque también tengan repercusión los totales. Las conducciones de agua y saneamiento se rompen cuando un edificio pilotado no asienta y el terreno baja de 15 a 20 cm (Figura 1). Muchas estructuras pueden soportar asientos diferenciales de 5 a 10 cm sin daños serios, aunque el tipo de material influye enormemente. Las estructuras de madera pueden resistir asientos diferenciales bastante mayores que los edificios de fábrica de ladrillo o las estructuras de hormigón<sup>16,17</sup>.

En cuanto a la cimentación profunda, si el suelo asienta más que el pilote se origina el fenómeno del rozamiento negativo, que aumenta las cargas sobre el pilote y disminuye

su resistencia, siempre que los desplazamientos que se produzcan sean lo suficientemente grandes como para movilizarlo (un asiento de 2 cm puede ser suficiente). Por lo tanto, el rozamiento negativo aumenta las cargas de compresión que actúan sobre el pilote. El terreno tiende a colgarse del fuste, induciendo en éste unas tensiones producidas por un rozamiento de signo contrario al resistente.

El efecto que tiene el fenómeno sobre la distribución de tensiones, tanto en el fuste como en la punta del pilote, se traduce en un traspaso de la capacidad portante desde la parte más superficial del fuste hacia las más profundas y hacia la propia punta. Las compresiones así inducidas en un pilote van aumentando a medida que lo hace el desplazamiento relativo del terreno con respecto del pilote, hasta alcanzar unos valores máximos en cada sección, correspondientes al momento en que los movimientos del terreno alcanzan tal magnitud que se produce un deslizamiento entre el fuste y el terreno.

El rozamiento negativo inducido supondrá que el pilote se verá sometido a unas cargas que, junto con la carga exterior transmitida por la estructura, habrán de ser resistidas por el terreno de los estratos inferiores en que se apoye el pilote. Con ello, la capacidad resistente del pilote como cimiento se verá reducida, puesto que, por un lado, no se dispondrá del rozamiento positivo del fuste en la zona en que el terreno ha asentado más que el pilote y, por otro, las zonas más profundas del terreno habrán de resistir la carga exterior más la dada por el rozamiento negativo.



**Figura 1.** Asiento de pavimento en Murcia

## TOMA DE DATOS Y ZONIFICACIÓN

Los datos representativos de las distintas zonas del suelo de Murcia se han tomado de la bibliografía disponible<sup>23,28</sup>.

Se han procesado los datos de 106 sondeos, 15 penetraciones dinámicas y 7 penetraciones estáticas diseminados por la ciudad de Murcia para zonificar el territorio y, en función de sus características geotécnicas, analizar su comportamiento con respecto a la subsidencia<sup>20</sup>.

En este sentido, se ha informatizado toda la información disponible, vectorizándose el plano de Murcia con todos los sondeos y penetraciones situados, y se han trazado las curvas de nivel correspondientes a los siguientes parámetros del corte del terreno: profundidad del relleno, espesor de la capa de arcilla, muro de la misma, muro de la arena, profundidad del techo de la grava y fondo de la misma, con representaciones en tres dimensiones que dan una idea intuitiva de la distribución de los distintos estratos y la disposición del subsuelo. La Figura 2 muestra el corte medio del terreno de Murcia, con las siguientes capas:

- relleno de profundidad 2,19 m,
- arcilla, arcilla con capas de limo o arena, o limo arenoso, de espesor 12,36 m,
- arena, de 2,66 m de espesor,
- grava, que llega hasta una profundidad de más de 28 m.

Además de definir los valores medios representativos de los estratos del terreno según las distintas zonas y aplicarlos para analizar el comportamiento medio, también se propone realizar el estudio sobre los puntos del terreno que presenten el mayor espesor del estrato compresible (que dará un mayor efecto de la subsidencia), el estrato de arcilla más blanda (que se tomará como arcilla normalmente consolidada), y el de mayor descenso del nivel piezométrico (que identificaremos con un corte determinado del terreno).

Para el estudio de los casos más desfavorables en cuanto al asiento provocado por la subsidencia se han considerado principalmente los datos que se tienen de la resistencia a compresión simple  $q_u$ , el golpeo N del SPT, los ensayos de penetración de que se disponen y los ensayos edométricos (para los datos de la arcilla normalmente consolidada).

**Figura 2.** Corte medio del terreno en Murcia

Como resumen de los datos principales que se han tenido en cuenta a la hora de elegir los sondeos más desfavorables se presenta la siguiente tabla:

Sondeo	Potencia del estrato compresible (m)	$q_n$ (kPa)	$N$ (SPT)
S <sup>25</sup> (Abril, 1989)	29,50	76 235	6-13
S <sup>13</sup> (Mayo, 1987)	32	36 12 140-175	3 12-22 27-39
S <sup>16</sup> (Noviembre, 1987)	20	41	5-6
S <sup>18</sup> (Julio, 1988)	4	4	2-9
S <sup>46</sup> (Noviembre, 1991)	6	19-24	1
SR1	6,80 7,50	15 35	5 5 47
S1	1,90 0,70 7,25 0,25 1,75 0,45	47 21	11 20

**Tabla I.** Sondeos más desfavorables para el cálculo de la subsidencia en Murcia

La unidad hidrogeológica de las Vegas Media y Baja del Segura es el acuífero de la zona en la que se asienta la ciudad de Murcia. El Instituto Tecnológico Geominero de España (ITGE) ha medido sistemática y periódicamente sus niveles piezométricos desde 1972. El piezómetro con la serie temporal más larga y mejor situada con respecto a la ciudad de Murcia es el 2737-10179.

Para el análisis de los niveles piezométricos en la extensión ocupada por la ciudad se han estudiado los datos correspondientes a 58 pozos municipales, que reflejan la evolución piezométrica de los mismos desde enero del año 94 hasta enero del año 98.

De la observación de las variaciones del piezómetro 2737-10179 y de los pozos municipales<sup>32</sup> se puede deducir que el acuífero se mantiene constante a lo largo del período 75-98, a excepción de los descensos que corresponden a dos sequías, la de los años 1983-84 y la de los años 1992-95.

En el período entre el 75 y el 83 las oscilaciones no superaban el metro, el sistema acuífero se encontraba en equilibrio y el nivel piezométrico estaba dentro de los cuatro metros superficiales en la ciudad. El acuífero es muy transmisible y favorece la circulación de las aguas procedentes de la infiltración, sea de las lluvias o de los excedentes de riego. El río Segura y los azarbes lo drenaban en general. Además el agua salía por los escasos bombeos de los numerosos pozos y sondeos.

Entre enero del 83 y enero del 84 el nivel piezométrico desciende hasta 2,50 m debido a la sequía, lo que se recupera totalmente en julio del 85. Desde julio del 85 hasta julio del 92 tenemos un nuevo período de oscilaciones constantes y poco significativas.

En julio del 92 comienza una sequía que se prolonga hasta octubre del 95, en la que se reduce la alimentación media del acuífero de la Vega Media a un 16 % de la alimentación media anual del período normal. Además aumenta la explotación de aguas subterráneas mediante pozos para riego, para evitar el consumo de agua potable en los jardines del Ayuntamiento y para la utilización en la calefacción-refrigeración por bombas de calor agua-aire, y han proliferado los aparcamientos subterráneos que necesitan drenar el acuífero en su entorno, bombeándose importantes caudales de agua.

El sondeo más cercano al piezómetro de mayor descenso del nivel piezométrico, el P18 (Los Álamos), es el S1, sondeo del que se tienen los resultados de un ensayo edométrico realizado a una muestra a profundidad entre 4,10 y 4,80 m. El piezómetro P18 presenta un descenso del nivel de agua en el terreno de 10,80 m entre julio del 92 y septiembre del 95 y un ascenso de 7,60 m entre septiembre del 95 y octubre del 97. Entre octubre del 97 y enero del 98 baja 0,50 m. Las variaciones piezométricas del pozo P39, que es el más cercano al sondeo S'25, para el que se realizan los cálculos del presente artículo, se exponen en la Tabla II.

Tiempo	Ene-83	Ene-84	Jul-85	Jul-92	Sep-94	Jun-95
	Ene-84	Jul-85	Jul-92	Sep-94	Jun-95	Jul-95
$\Delta h$ (m)	-2,50	+2,50	0	-4	-3,80	+3,50

Tiempo	Jul-95	Sep-95	Oct-95	Ene-96	Oct-97	Nov-97
	Sep-95	Oct-95	Ene-96	Oct-97	Nov-97	Ene-98
$\Delta h$ (m)	0	-4,40	0	+6,40	-1	0

**Tabla II.** Variaciones del nivel piezométrico  $\Delta h$  en el pozo P39

## CÁLCULO DE LA SUBSIDENCIA PARA UN DESCENSO CONOCIDO DEL NIVEL PIEZOMÉTRICO

La subsidencia producida por la extracción de cantidades específicas de agua (en función del tiempo) de varios pozos en los que se conoce bien el perfil hidrológico (permeabilidad y compresibilidad de todas las formaciones geológicas, nivel piezométrico inicial, etc.) es un complejo problema tridimensional que puede tratarse, con una solución acoplada, usando la teoría de la consolidación tridimensional de Biot<sup>7,12,29,31</sup>. Sin embargo, la complejidad matemática y de cálculo de esta aproximación solamente estaría justificada si estuvieran disponibles los datos completos del suelo, lo que no es normal. Por esta razón se usa en su lugar la ecuación de difusión tridimensional y se asume que los desplazamientos son verticales<sup>7,8,9,11,12,24,29,30</sup>.

Todos los estudios encaminados a la predicción de la subsidencia idealizan el comportamiento del suelo a través de modelos físicos. Aunque las hipótesis simplificadoras que se toman dan resultados aproximados, la mayoría de ellos son aceptables para las propuestas prácticas. Un modelo apropiado para predecir la subsidencia terrestre es un instrumento de importancia en la evaluación a largo plazo del peligro de asientos excesivos y en la optimización del uso del agua del terreno, además de que nos sirve para chequear la efectividad de las medidas preventivas propuestas, reduciendo los costes y eliminando soluciones de peligrosidad potencial para el medio ambiente.

Del análisis de los distintos cortes tipo del suelo de la ciudad de Murcia, podemos establecer como modelo teórico para el cálculo de la subsidencia el de un estrato de arcilla confinado entre dos acuíferos sometidos a cambios conocidos en su nivel piezométrico (Figura 3). Los acuíferos son infinitamente permeables en relación con los acuitardos. Muchos autores<sup>12,13</sup> han simplificado el perfil hidrológico al considerarlo como una alternancia de acuitardos y acuíferos horizontales.

Si el coeficiente de permeabilidad de los acuíferos es de un orden de magnitud de una a dos veces mayor, se puede suponer que la filtración en los acuitardos es vertical y el

error que introduce tal simplificación es normalmente pequeño<sup>3,25,26</sup>. Cuando se mide el nivel piezométrico en los acuíferos, Helm<sup>14,15</sup> recomienda el cálculo de la subsidencia con un método unidimensional basado en la teoría de la consolidación de Terzaghi. Conviene señalar que, si se admite que los desplazamientos son sólo verticales, la formulación de Biot se reduce a la de Terzaghi<sup>8</sup>.

**Figura 3.** Niveles piezométricos en los límites de un acuitardo limitado por dos acuíferos

Se suponen las siguientes hipótesis:

1. El suelo es homogéneo.
2. El suelo está saturado.
3. Las deformaciones son directamente proporcionales a las presiones efectivas.
4. La compresibilidad de los sólidos es despreciable en relación a la compresibilidad del esqueleto del suelo y del agua.
5. Es aplicable el cálculo infinitesimal a un medio formado por partículas finitas.
6. La compresión es unidimensional.
7. La filtración es unidimensional.
8. Se puede aplicar la ley de Darcy.
9. El coeficiente de permeabilidad es una constante.
10. Las deformaciones son pequeñas.
11. La velocidad de los granos es de segundo orden en comparación con la velocidad del fluido.

Cuando el nivel piezométrico se introduce en el interior de la capa de arcilla, aparecen presiones intersticiales negativas. Si la succión es moderada, las hipótesis 2, 3 y 9 seguirán siendo válidas. Para succiones mayores estas hipótesis dejan de ser ciertas y hay que acudir a otro planteamiento que será presentado en un próximo artículo.

La situación inicial es de equilibrio y se suponen conocidos los valores de la altura piezométrica en los límites superior e inferior del estrato de arcilla que, respecto de un plano de comparación arbitrario, son

$$u = u(0, z) \quad (1)$$

$$h_0 = -z_0 + \frac{u(t, z_0)}{\gamma_w} \quad (2a)$$

$$h_N = -z_N + \frac{u(t, z_N)}{\gamma_w} \quad (2b)$$

Si la situación inicial es hidrostática

$$h_0(0) = h_N(0) = h \quad (3a)$$

$$u(0, z) = \gamma_w(h + z) \quad (3b)$$

El nivel piezométrico inicial se encuentra a una profundidad  $z_w$ . Si el plano de comparación está en la superficie del terreno

$$h = -z_w \quad (4)$$

$$u(0, z) = \gamma_w(z - z_w)$$

Conocemos también las modificaciones que se producen en los acuíferos confinantes

$$\Delta h_0(t) = \frac{\Delta u(t, z_0)}{\gamma_w} \quad (5a)$$

$$\Delta h_N(t) = \frac{\Delta u(t, z_N)}{\gamma_w} \quad (5b)$$

Si el descenso del nivel piezométrico es el mismo en el acuífero superior que en el inferior

$$\Delta h_0(t) = \Delta h_N(t) = \Delta h(t) \quad (6)$$

Si suponemos que el estrato de arcilla está saturado, admitiendo todas las hipótesis de la teoría de Terzaghi-Fröhlich, la ecuación de la consolidación primaria es<sup>18</sup>

$$c_v \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} = \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \quad (7)$$

Se supone que no hay cambio en las presiones totales. Las condiciones en los límites son

$$z = z_0 \quad u = u(0, z_0) + \gamma_w \Delta h_0(t) = \gamma_w [z_0 - z_w + \Delta h(t)] \quad (8)$$

$$z = z_N \quad u = u(0, z_N) + \gamma_w \Delta h_N(t) = \gamma_w [z_N - z_w + \Delta h(t)] \quad (9)$$

$$t = 0 \quad u = u(0, z) = \gamma_w (z - z_w) \quad z_0 \leq z \leq z_N \quad (10)$$

**Resolución por diferencias finitas. Formulación explícita**

Si se resuelve la ecuación diferencial (7) con las condiciones en los límites (8), (9) y (10) por diferencias finitas (Figura 4) y suponiendo que a partir de  $M, u(m, 0)$  y  $u(m, N)$  son constantes

$$u(m+1, n) = u(m, n) + \beta[u(m, n+1) - 2u(m, n) + u(m, n-1)] \quad (11)$$

con

$$\beta = \frac{c_v \Delta t}{\Delta z^2} \quad (12)$$

Para que haya convergencia ha de ser

$$0 < \beta \leq \frac{1}{2}$$

Si  $2H$  es el espesor del estrato de arcilla

$$N = \frac{2H}{\Delta z}$$

$$m = \frac{t}{\Delta t}$$

**Figura 4.** Esquema de diferencias finitas con anchos de mallas constantes

Vamos a considerar dos modelos distintos respecto del asiento. El primero se basa en suponer que la ley tensión-deformación es lineal, de acuerdo con las hipótesis enumeradas en el apartado anterior

$$\varepsilon(m, n) = \frac{\sigma'(m, n) - \sigma'(0, n)}{E_{oed}} = \frac{u(0, n) - u(m, n)}{E_{oed}}$$

El asiento en el tiempo  $t(t = m\Delta t)$  de un nodo  $n_1$ , respecto a la base del estrato, será

$$s(m, n_1) = \sum_{n=n_1}^N \frac{u(0, n) - u(m, n)}{E_{oed}} \Delta z_i \quad (13)$$

Si

$$1 \leq n \leq N - 1 \quad i = 1$$

Si

$$n = n_1 \quad \text{o} \quad n = N \quad i = 1/2$$

Cuando hay varios estratos con distinto  $E_{oed}$ , calculamos el asiento de cada estrato por separado, siendo  $N$  el límite inferior y  $n_1$  el superior.

**Figura 5.** Corte del terreno en el sondeo S'25

El segundo modelo, válido para suelos normalmente consolidados, consiste en admitir una ley logarítmica para la deformación

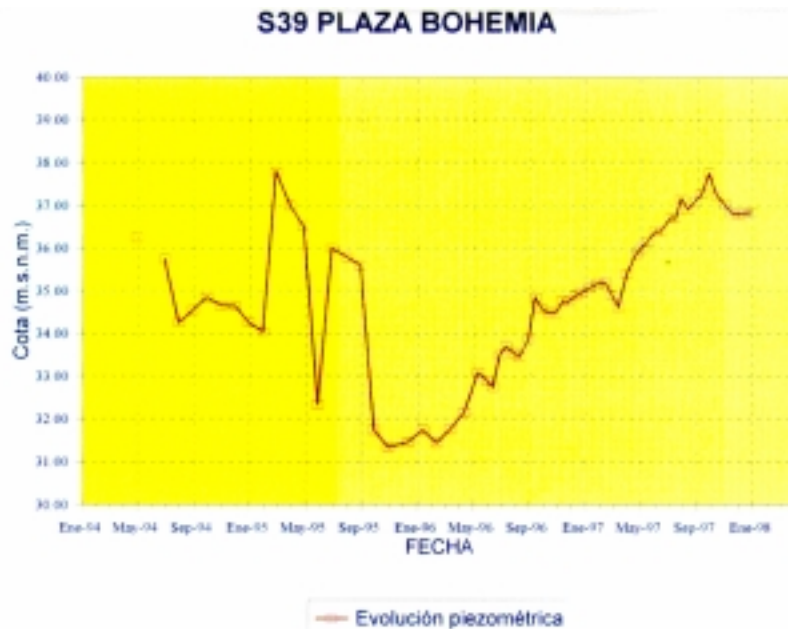
$$\varepsilon_l(m, n) = \frac{C_c}{1 + e_0} \log \frac{\sigma'}{\sigma'_0} = \frac{C_c}{1 + e_0} \log \frac{\sigma_0 - u(m, n)}{\sigma_0 - u(0, n)}$$

$$s_l(m, n_1) = \sum_{n=n_1}^N \varepsilon \Delta z' = \frac{C_c}{1 + e_0} \sum_{n=n_1}^N \log \frac{\sigma_0 - u(m, n)}{\sigma_0 - u(0, n)} \Delta z_i$$
(14)

para cada estrato.

En realidad ésta es la práctica común en Mecánica del Suelo, donde se admite la Teoría de Terzaghi para calcular las presiones intersticiales en exceso y la ley logarítmica para el cálculo de asientos. Una solución más rigurosa será publicada en un próximo artículo.

En el caso de Murcia sólo tenemos datos de variación de la altura piezométrica en el acuífero inferior. Se va a suponer que la altura piezométrica es la misma en las zonas superior e inferior del estrato de arcilla. Los cálculos se van a iniciar en el emplazamiento del sondeo S'25 (Figura 5) con las variaciones del nivel piezométrico que se producen en el pozo P39 (Figura 6). No se tienen datos de la presión de preconsolidación, aunque se sabe que la arcilla superior está ligeramente sobreconsolidada y la inferior está claramente sobreconsolidada.



**Figura 6.** Variaciones del nivel piezométrico en pozo P39

Los parámetros de cálculo se indican en la Tabla III. El módulo edométrico  $E_{oed}$  ya refleja esta sobreconsolidación, pero los cálculos con la ley logarítmica se han hecho suponiendo la arcilla normalmente consolidada para comprobar la influencia de diversos métodos numéricos en este tipo de arcillas; los asientos obtenidos con la ley logarítmica serán, pues, demasiado elevados. Conviene advertir que este emplazamiento no es, ni mucho menos, el que da la máxima subsidencia.

Se va a admitir, en primer lugar, un comportamiento elástico (reversible) del terreno.

Si llamamos  $u_{\min}$  la mínima presión del agua que se alcanza en el techo del estrato,  $s_{\max}$  al máximo asiento calculado por la expresión (13) y  $s_{l\max}$  al máximo calculado por la expresión (14), tenemos:

	Espesor relleno (m)	$z_w$ inicial (m)	$2H$ (m)	$\Delta z$ (m)	$\Delta t$ (meses)						
	0,50	-2,00	20,30	0,3625	0,5						
Estratos	Tipo	Espesor	$\gamma$ (kN/m <sup>3</sup> )	$e_0$	$c_v$ (m <sup>2</sup> /s)	$c_{vr}$ (m <sup>2</sup> /s)	$C_c$	$C_s$	$E_{oed}$ (kPa)	$E_{oedr}$ (kPa)	$\beta$
Arcilla limosa media	2'	14,50	21,40	0,76	$3,6 \times 10^{-8}$	$3,2 \times 10^{-7}$	0,156	0,018	7500	67000	0,36
Arcilla limosa muy firme	2'	5,80	21,40	0,76	$3,6 \times 10^{-8}$	$3,2 \times 10^{-7}$	0,156	0,018	22500	200000	0,36

**Tabla III.** Datos de entrada para el cálculo ( $m = 360$ ,  $n = 56$ )

	Valor	Tiempo
$u_{\min}$ (kPa)	-100,06	Oct-95 Ene-96
$s_{\max}$ (cm)	2,41	Sept-96 Dic-96
$s_{l\max}$ (cm)	10,64	Nov-96

**Tabla IV.** Resultados del cálculo por diferencias finitas; ( $m = 360$ ,  $n = 56$ )

Repitiendo el cálculo para  $\Delta z = 1,45$  m y  $\Delta t = 1$  mes,  $\beta$  pasa a un valor de 0,04 y los resultados se resumen en la Tabla V.

	Valor	Tiempo
$u_{\min}$ (kPa)	-100,06	Oct-95 Ene-96
$s_{\max}$ (cm)	2,46	Ago-96
$s_{l\max}$ (cm)	10,93	Jul-96

**Tabla V.** Resultados del cálculo por diferencias finitas; ( $m = 180$ ,  $n = 14$ )

En realidad, como es bien sabido, el comportamiento del terreno no es elástico. El ascenso del nivel piezométrico después de un período de descenso provoca un incremento de la presión intersticial, con lo que se origina un proceso de descarga y deben aumentar los parámetros  $c_v$  y  $E_{oed}$ , lo que lleva implícito un cambio de  $\beta$  por  $\beta_r$ . Si después vuelve a descender, se mantendrán los nuevos valores de  $c_v$  y  $E_{oed}$  ( $c_{vr}$  y  $E_{oedr}$ ) hasta que se llegue de nuevo al mínimo de presión alcanzado anteriormente.

Esto repercute tanto en el cálculo de las presiones como en el de los asientos. Debemos ir teniendo en cuenta para cada paso en el tiempo ( $m$ ), cuál es la menor presión que se ha obtenido en cada profundidad ( $n$ ), a la que llamaremos  $u_{\min}(m, n)$ .

Para las presiones, si  $u(m, n) \leq u_{\min}(m, n)$ , usamos el coeficiente de consolidación  $c_v = 3,6 \times 10^{-8}$  m<sup>2</sup>/s; si  $u(m, n) > u_{\min}(m, n)$ , usamos el coeficiente de consolidación en recarga  $c_{vr} = 3,2 \times 10^{-7}$  m<sup>2</sup>/s.

Para el asiento, cambiaremos el módulo edométrico  $E_{oed}$  por el módulo edométrico en recarga  $E_{oedr}$  en la expresión (13) y el índice de compresión  $C_c$  por el índice de hinchamiento

$C_s$  en la (14). Pero estas ecuaciones ya no serán válidas si no calculan el asiento de una forma incremental, con lo que para cada paso en el tiempo lo que calculamos es el incremento de asiento que se produce con respecto al paso anterior. Sumando todos los que llevamos hasta ese momento, podremos comprobar el asiento total que se produce en cada profundidad para un tiempo determinado. Con lo que quedan en la forma que se indica a continuación.

Para ley tensión-deformación lineal

$$\Delta s(m, n_1) = \sum_{n=n_1}^N \frac{u(m-1, n) - u(m, n)}{E_{oed}} \Delta z_i \quad (15)$$

Si  $1 \leq n \leq N - 1 \quad i = 1$

Si  $n = n_1 \quad \text{o} \quad n = N \quad i = 1/2$

y

$$\begin{aligned} E_{oed} &= E_{oed} \quad \text{si} \quad u(m, n) \leq u_{\min}(m, n) \\ E_{oed} &= E_{oedr} \quad \text{si} \quad u(m, n) > u_{\min}(m, n) \end{aligned} \quad (16)$$

$$s(m, n_1) = \sum_{m=0}^m \Delta s(m, n_1)$$

Para ley logarítmica

$$\Delta s_l(m, n_1) = \sum_{n=n_1}^N \varepsilon \Delta z' = \frac{C_c}{1 + e_0} \sum_{n=n_1}^N \log \frac{\sigma_0 - u(m, n)}{\sigma_0 - u(m-1, n)} \Delta z_i \quad (17)$$

con

$$\begin{aligned} C &= C_c \quad \text{si} \quad u(m, n) \leq u_{\min}(m, n) \\ C &= C_s \quad \text{si} \quad u(m, n) > u_{\min}(m, n) \end{aligned} \quad (18)$$

$$s_l(m, n_1) = \sum_{m=0}^m \Delta s(m, n_1)$$

Se ha repetido el cálculo por diferencias finitas con estas condiciones manteniendo  $\Delta z$  y  $\Delta t$  y considerando los valores de  $C_s$ ,  $E_{oedr}$  y  $c_{vr}$  de la Tabla III en los procesos de descarga y recarga, de donde resulta un coeficiente  $\beta_r$  de 0,39.

Si representamos en ordenadas la profundidad bajo el techo del estrato compresible y en abscisas la presión intersticial  $u$  en kPa para los meses en los que se producen quiebros en la ley de movimientos del nivel piezométrico en el techo y en la base del estrato, vemos en la Figura 7 cómo la ley se separa de la distribución hidrostática inicial en las profundidades próximas al techo y a la base del estrato.

Esto ocurre en enero del 84, para volver en julio del 85, cuando se recupera el descenso que se había producido en el nivel piezométrico, y se mantiene hasta julio del 92, en un período en el que el nivel piezométrico tiene un valor constante.

En julio del 92 el nivel piezométrico comienza a bajar de nuevo, y sigue en su descenso hasta junio del 95 con lo que las leyes vuelven a curvarse por arriba y por abajo. En un mes, de junio a julio del 95, se produce una subida del nivel piezométrico de 3,50 m y la ley se endereza pero aparece un nuevo punto de inflexión en torno a 18 m de profundidad. Tras dos meses en los que permanece constante, en un mes, de septiembre a octubre del 95, el nivel piezométrico desciende 4,40 m y la ley vuelve a curvarse, alcanzando el mínimo cuando se estabiliza este descenso con 3 meses de oscilación nula del nivel piezométrico, en enero del 96.

**Figura 7.** Presión intersticial en función de la profundidad en el estrato compresible, considerando la rigidización del terreno en descarga y recarga. Leyes correspondientes a los meses en los que se producen quiebros en la ley de movimientos del nivel piezométrico en la base y el techo del estrato

De enero del 96 a octubre del 97 se produce una subida de 6,40 m y la ley vuelve a una situación intermedia entre el mínimo y la situación hidrostática. Después el nivel piezométrico baja un metro y se mantiene constante hasta enero del 98, adquiriendo la ley la forma que se observa en la figura.

Para observar con más claridad los puntos más significativos descritos, en la Figura 8 se representan aisladas las leyes correspondientes a enero del 83 (inicial), octubre del 95 (cuando el nivel piezométrico llega al mínimo), enero del 96 (cuando se estabiliza este mínimo) y enero del 98 (final).

**Figura 8.** Presión intersticial en función de la profundidad en el estrato compresible, considerando la rigidización del terreno en descarga y recarga. Leyes correspondientes a enero del 83, octubre del 95, enero del 96 y enero del 98

Para los meses anteriores se ha dibujado la relación existente entre la profundidad y el asiento, calculado por las expresiones (15)-(18). En las Figuras 9 y 10 se observa que el asiento que se calcula por las expresiones (15) y (16) es del orden de 4 veces inferior al de las (17) y (18). Además puede comprobarse que en los 5 m superiores crece muchísimo en ambos casos, en ellos se produce un 85 % del total. En todas las leyes prácticamente se mantiene constante entre los 5 y los 15 m de profundidad. Los valores máximos se pueden leer en la Tabla VI.

**Figura 9.** Asiento en función de la profundidad bajo el techo del estrato compresible. Ley tensión-deformación lineal

**Figura 10.** Asiento en función de la profundidad bajo el techo del estrato compresible. Ley logarítmica

Podemos comparar los resultados obtenidos por los dos últimos cálculos comprobando que, cuando se usan valores distintos de  $E_{oed}$  y  $c_v$  para la descarga, el asiento final es mayor, por ser menor su recuperación cuando el nivel piezométrico deja de bajar.

	Valor	Tiempo
$u_{\min}$ (kPa)	-100,06	Oct-95 Ene-96
$s_{\max}$ (cm)	3,34	Ene-98
$s_{l\max}$ (cm)	13,66	Ene-98

**Tabla VI.** Resultados del cálculo por diferencias finitas; ( $m = 180$ ,  $n = 14$ ), usando  $E_{oedr}$  y  $c_{vr}$

En la Figura 11 se representa en abscisas el tiempo y en ordenadas la variación de la presión intersticial en el techo y la base del estrato compresible y el asiento calculado por las expresiones (15) y (16), en los dos casos, considerando distintos valores de  $E_{oed}$  y  $c_v$  para la descarga y sin considerarlos.

**Figura 11.** Asiento y presión intersticial en el techo del estrato compresible en función del tiempo, distinguiendo o no la recarga de la carga noval. Ley tensión-deformación lineal

En el primer tramo de descenso del nivel piezométrico, ambos asientos coinciden, para separarse cuando el nivel se recupera. El que se calcula distinguiendo la recarga de la descarga, prácticamente no baja del valor máximo, mientras que el otro se recupera en gran parte y sigue haciéndolo, aunque lentamente, durante el largo período en el que el nivel piezométrico se mantiene constante desde julio del 85 hasta julio del 92. En este mes vuelve a iniciarse un descenso y la respuesta del asiento es lógicamente más rápida en el que no se distinguen la recarga y la carga noval. Pero este descenso supera al inicial, con lo que las dos leyes de asiento casi se juntan en el período entre septiembre del 94 y junio del 95. Es en este mes, con un nuevo ascenso, cuando las dos leyes se separan definitivamente para no volver a coincidir más. Tras otros dos descensos y un ascenso, el nivel piezométrico acaba manteniéndose constante en los tres últimos meses, llegando a enero del 98, en el que el asiento que distingue carga y descarga alcanza el máximo y el que no las distingue ha bajado desde el máximo y se encuentra en una fase de recuperación.

En la Figura 12 se representa en abscisas el incremento de la presión intersticial en el techo y la base del estrato, cambiado de signo, y en ordenadas el asiento (expresiones (15)

y (16)), calculado distinguiendo la descarga y sin distinguirla. En ella puede observarse el distinto comportamiento del asiento calculado por las dos maneras para cada fase de movimiento del nivel piezométrico.

**Figura 12.** Incremento de la presión intersticial en el techo y la base del estrato compresible en función del asiento, distinguiendo o no la recarga de la carga noval

En la Tabla VII se ha hallado la media homónima ponderada según el espesor de cada estrato para  $E_{oed}$ .

Si hacemos los cálculos sin distinguir entre carga y descarga y con el valor medio de  $E_{oed}$  de la Tabla VII, con  $\Delta z = 0,725$  m y  $\Delta t = 1$  mes, el coeficiente  $\beta$  resulta de 0,18 y los valores máximos del asiento se exponen en la Tabla VIII.

Estrato	Espesor	$E_{oed}$
Superior	14,50 m	7500 kPa
Inferior	5,80 m	22500 kPa
Total	20,30 m	9265 kPa

**Tabla VII.** Espesor y  $E_{oed}$  de cada estrato

	Valor	Tiempo
$u_{\min}$ (kPa)	-100,06	Oct-95 Ene-96
$s_{\max}$ (cm)	2,89	Oct-96
$s_{l\max}$ (cm)	10,67	Oct-96 Nov-96

**Tabla VIII.** Resultados del cálculo por diferencias finitas; ( $m = 180$ ,  $n = 28$ )

Al usar un  $E_{oed}$  medio el dato que más varía es el del asiento calculado por la expresión (13), que resulta algo superior a los de otras discretizaciones, pero la variación es poco significativa y el asiento es del mismo orden de magnitud.

La formulación explícita presenta serios inconvenientes cuando, como sucede en el caso de Murcia, el proceso se prolonga en tiempos largos, pues para mantener  $\beta \leq 1/2$  puede ser necesario utilizar intervalos de tiempo excesivamente cortos.

### Soluciones explícitas

Se puede definir la presión intersticial en exceso con respecto a las condiciones iniciales  $u_{eo}$  como

$$u(z, t) = u_{eo}(z, t) + u(z, 0) \quad (19)$$

Si sustituimos en la ecuación (7), la presión en los poros puede obtenerse de

$$\frac{\partial^2 u_{eo}}{\partial T_v} = \frac{\partial^2 u_{eo}}{\partial Z^2} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} Z = 0 & \quad u_{eo} = \gamma_w \Delta h_0(T_v) \\ Z = 2 & \quad u_{eo} = \gamma_w \Delta h_N(T_v) \\ T_v = 0 & \quad u_{eo} = 0 \end{aligned}$$

donde  $T_v$  es el factor de tiempo y  $Z$  es la variable espacial adimensional

$$T_v = \frac{c_v t}{H^2} \quad (21)$$

$$Z = \frac{z - z_0}{H} \quad (22)$$

Como la ecuación (22) es lineal, es aplicable el principio de superposición y la solución para la presión intersticial en exceso en el caso general puede ser obtenida como la suma de las soluciones correspondientes a los cambios en  $h_0$  y en  $h_N$  respectivamente. La solución de la ecuación (20) con las condiciones en los límites situadas debajo ha sido encontrada por Justo y Vázquez<sup>19</sup>. Nos limitamos aquí a transcribir los resultados.

Al ser en el caso estudiado,  $\Delta h_0 = \Delta h_N = \Delta h$

$$u_{eo} = \gamma_w \left( \Delta h - 2 \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{\text{sen}(MZ)}{M} I(\Delta h) \right] \right) \quad (23)$$

$$M = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \quad (24)$$

donde

$$I(\Delta h) = \int_0^{T_v} e^{-M^2(T_v - T'_v)} \frac{d(\Delta h)}{dT'_v} dT'_v \quad (25)$$

$I(\Delta h)$  se obtiene por cálculo numérico

$$I(\Delta h) = \sum_{i=0}^{i_1} [e^{-M^2(T_v - T'_v)} \delta(\Delta h_i)] \quad (26)$$

donde

$$\delta(\Delta h_i) = \frac{\Delta h(i+1) - \Delta h(i-1)}{2}$$

$$\Delta h(-1) = 0$$

$$\Delta h(i_1 + 1) = \Delta h(i_1)$$

La deformación es

$$\varepsilon = -m_v u_{eo} \quad (27a)$$

con

$$m_v = \frac{1}{E_{eod}} \quad (27b)$$

y el asiento con respecto a la base del acuitardo:

$$s(Z) = H \int_0^Z \varepsilon dZ = -H m_v \int_0^Z u_{eo} dZ \quad (28a)$$

$$s(Z) = H m_v \gamma_w \left( 2 \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{1 - \cos(MZ)}{M^2} I(\Delta h) \right] - Z \Delta h \right) \quad (28b)$$

Estas series que aparecen en las expresiones que dan la presión intersticial en exceso y el asiento, convergen bastante rápidamente. Para el caso del asiento el número máximo de términos necesario para alcanzar una precisión de tres decimales en valores no dimensionales es de 43.

Se ha calculado el asiento usando las expresiones (28) y (26) con los datos del último cálculo, obteniéndose los mismos resultados con 16 y 46 términos. El asiento máximo se produce en el período entre septiembre y noviembre del 96 y es de 2,88 cm. Si usamos 7 términos el error es muy pequeño, siendo inexistente en los períodos en los que las variaciones del nivel piezométrico no son muy bruscas y se separa del orden de 0,10 mm de los cálculos anteriores en casi toda la tabla. La mayor diferencia se produce en octubre del 95 y es de

1 mm. No hay que olvidar que de septiembre a octubre del 95 el nivel piezométrico baja 4,40 m. Como referencia, en los meses en los que el asiento es máximo la diferencia es de 0,10 mm.

Si el nivel piezométrico varía linealmente desde cero hasta un valor constante final ( $\Delta h(T_v)$  de cero a  $\Delta h_f$ ) durante un intervalo de tiempo  $T_{vf}$ , cuando  $\Delta h_0 = \Delta h_N = \Delta h$ , la expresión explícita de la presión intersticial en exceso es

$$u_{eo} = \gamma_w \Delta h \left( 1 + \frac{1}{T_v} \left( 2 \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{\text{sen}(MZ)}{M^3} e^{-M^2 T_v} \right] - \frac{Z(2-Z)}{2} \right) \right) \quad \text{si } T_v \leq T_{vf} \quad (29a)$$

$$u_{eo} = \gamma_w \Delta h_f \left( 1 - \frac{2}{T_{vf}} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{\text{sen}(MZ)}{M^3} \left[ e^{-M^2(T_v - T_{vf})} - e^{-M^2 T_v} \right] \right) \right) \quad \text{si } T_v \geq T_{vf} \quad (29b)$$

Y para el asiento

$$s(Z) = 2Hm_v(-\gamma_w \Delta h) \left( \frac{Z}{2} + \frac{1}{T_v} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{1 - \cos(MZ)}{M^4} e^{-M^2 T_v} \right] - \frac{Z^2(3-Z)}{12} \right) \right) \quad (30a)$$

si  $T_v \leq T_{vf}$

$$s(Z) = 2Hm_v(-\gamma_w \Delta h) \left( \frac{Z}{2} - \frac{1}{T_{vf}} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{1 - \cos(MZ)}{M^4} \left[ e^{-M^2(T_v - T_{vf})} - e^{-M^2 T_v} \right] \right) \right) \quad (30b)$$

si  $T_v \leq T_{vf}$

En el período entre enero del 83 y enero del 84 se produce un descenso continuo del nivel piezométrico de 2,50 m. Para este intervalo se han aplicado las fórmulas anteriores con 16 y 46 términos en la serie y los resultados que se han obtenido son idénticos a los que teníamos con la fórmula general.

**Figura 13.** Asiento producido por cambios en la altura piezométrica. Cálculos por diferencias finitas y por las expresiones explícitas

En la Figura 13 se comparan los asientos en el techo del acuitardo que se obtienen, en mm, aplicando los últimos cálculos, por la resolución en diferencias finitas, con la ecuación explícita general de las expresiones (26) y (28) y con la expresión (30), válida para un descenso lineal del nivel piezométrico. Se representan, también, como referencia, las variaciones de altura piezométrica en el techo y la base del acuitardo.

La solución explícita presenta el inconveniente de que con ella no se pueden tener en cuenta variaciones de  $c_v$  en procesos de carga, descarga y recarga.

### Método del predictor-corrector

El método del predictor-corrector<sup>10</sup> se ha usado con éxito en la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para su aplicación al problema estudiado introducimos un nuevo paso intermedio para cada cálculo en el tiempo ( $m + 1/2$ ). La primera aproximación, con el predictor, nos determina los valores de la presión en las posiciones intermedias ( $m + 1/2$ ) a partir de los valores anteriores conocidos ( $m$ ), para las profundidades dadas. La segunda, con el corrector, determina los valores de la presión en las posiciones que buscamos ( $m + 1$ ) a partir de los valores intermedios ( $m + 1/2$ ) y de los valores anteriores conocidos ( $m$ ), para las profundidades citadas. Así, con el pequeño esfuerzo de duplicar el cálculo en cada paso, podemos conseguir un considerable aumento en la exactitud. Cuando la ecuación diferencial es lineal la solución es explícita, siendo implícita si no lo es.

Partiendo de la ecuación diferencial (7), podemos hacer las siguientes aproximaciones:

Para el predictor

$$\frac{u(m + \frac{1}{2}, n + 1) - 2u(m + \frac{1}{2}, n) + u(m + \frac{1}{2}, n - 1)}{\Delta z^2} = \frac{2}{c_v \Delta t} (u(m + \frac{1}{2}, n) - u(m, n)) \quad (31)$$

como  $\beta = \frac{c_v \Delta t}{\Delta z^2}$

$$\beta \left( u(m + \frac{1}{2}, n + 1) - 2u(m + \frac{1}{2}, n) + u(m + \frac{1}{2}, n - 1) \right) = 2(u(m + \frac{1}{2}, n) - u(m, n)) \quad (32)$$

que puede escribirse

$$\beta u(m + \frac{1}{2}, n - 1) - 2(1 + \beta)u(m + \frac{1}{2}, n) + \beta u(m + \frac{1}{2}, n + 1) = -2u(m, n) \quad (33)$$

que constituye un sistema de  $N - 1$  ecuaciones con  $N - 1$  incógnitas para cada paso en el tiempo, donde conocidos los valores  $u(m, n)$  se hallan los  $u(m + 1/2, n)$  y que se programa

$$\sum_{i=1}^{N-1} a(i, n)u(m + \frac{1}{2}, i) = b_n \quad (34)$$

$$a(n - 1, n) = \beta \text{ con } i \geq 1, \text{ es decir, } n \geq 2$$

$$a(n, n) = -2(1 + \beta)$$

$$a(n + 1, n) = \beta \text{ con } i \leq N - 1, \text{ es decir, } n \leq N - 2$$

$$a(i, n) = 0 \text{ cuando } i = 0, i < n - 1, i > n + 1, i = N$$

$$b_n = -2u(m, n) \text{ si } 1 < n < N - 1$$

$$b_1 = -2u(m, 1) - \beta u(m + \frac{1}{2}, 0)$$

$$b_{N-1} = -2u(m, N-1) - \beta u(m + \frac{1}{2}, N)$$

Para el corrector

$$\begin{aligned} & \frac{u(m+1, n+1) + u(m, n+1) - 2u(m+1, n) - 2u(m, n) + u(m+1, n-1) + u(m, n-1)}{\Delta z^2} = \\ & = \frac{2}{c_v \Delta t} (u(m+1, n) - u(m, n)) \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \beta (u(m+1, n+1) + u(m, n+1) - 2u(m+1, n) - 2u(m, n) + u(m+1, n-1) + u(m, n-1)) = \\ & = 2(u(m+1, n) - u(m, n)) \end{aligned} \quad (36)$$

que puede escribirse

$$\begin{aligned} & \beta u(m+1, n-1) - 2(1+\beta)u(m+1, n) + \beta u(m+1, n+1) = \\ & = -\beta(u(m, n+1) - 2u(m, n) + u(m, n-1)) - 2u(m, n) \end{aligned} \quad (37)$$

que constituye un sistema de  $N-1$  ecuaciones con  $N-1$  incógnitas para cada paso en el tiempo, donde conocidos los valores  $u(m, n)$  se hallan los  $u(m+1, n)$  y que se programa

$$\sum_{i=1}^{N-1} a(i, n)u(m+1, i) = b_n \quad (38)$$

$$a(n-1, n) = \beta \text{ con } i \geq 1, \text{ es decir, } n \geq 2$$

$$a(n, n) = -2(1+\beta)$$

$$a(n+1, n) = \beta \text{ con } i \leq N-1, \text{ es decir, } n \leq N-2$$

$$a(i, n) = 0 \text{ cuando } i = 0, i < n-1, i > n+1, i = N$$

$$b_n = -2u(m, n) - \beta(u(m, n+1) - 2u(m, n) + u(m, n-1)) \text{ si } 1 < n < N-1$$

$$b_1 = -2u(m, 1) - \beta(u(m, 2) - 2u(m, 1) + u(m, 0)) - \beta u(m+1, 0)$$

$$b_{N-1} = -2u(m, N-1) - \beta(u(m, N) - 2u(m, N-1) + u(m, N-2)) - \beta u(m+1, N)$$

En las expresiones (35) a (38) se observa que en el caso de suelo saturado y  $\beta$  constante, como es el que no distingue la recarga y que hemos considerado en los últimos cálculos, por diferencias finitas y con las series de las expresiones (26), (28) y (30), las ecuaciones que nos dan los valores del corrector no dependen de los resultados del predictor.

Pero, como hemos visto, el ascenso del nivel piezométrico después de un período de descenso provoca un cambio de  $\beta$  por  $\beta_r$ , pues usamos el coeficiente de consolidación en recarga  $c_{vr}$ . Si después vuelve a descender, se mantendrán los nuevos valores de  $c_{vr}$  y  $E_{oedr}$  hasta que se llegue de nuevo al mínimo de presión alcanzado anteriormente. Esto hace que  $\beta$  dependa de la presión y en las expresiones anteriores hay que cambiar  $\beta$  por  $\beta(u(m, n))$  en el predictor y por  $\beta(u(m+1/2, n))$  en el corrector. Es en este caso cuando en el corrector, para hallar los valores  $u(m+1, n)$  se necesita conocer, además de los valores  $u(m, n)$ , los  $u(m+1/2, n)$ , dando sentido al método.

Para comparar este método con los cálculos hechos con anterioridad, calculamos las presiones intersticiales por las expresiones (31) a (38) y el asiento por las (15)-(18), para el caso en que no se distingue la recarga y considerando un espesor único medio de la capa de arcilla, obteniendo valores máximos prácticamente idénticos a los que ya teníamos.

	Valor	Tiempo
$u_{\min}$ (kPa)	-100,06	Oct-95 Ene-96
$s_{\max}$ (cm)	2,89	Sep-96 Oct-96
$s_{l\max}$ (cm)	10,68	Oct-96

**Tabla IX.** Resultados del cálculo por el método de predictor-corrector; ( $m = 180$ ,  $n = 28$ )

El método del predictor-corrector tiene su campo de aplicación en ecuaciones diferenciales no lineales (por ejemplo, en suelos parcialmente saturados). En ecuaciones lineales, como la que nos ocupa, ec. (7), se puede alcanzar la precisión que se desee con tal de que  $\Delta z$  y  $\Delta t$  sean suficientemente pequeños<sup>10</sup>, pero no hay limitación en el valor de  $\beta$ , por lo que el sistema es mucho más flexible cuando el proceso se desarrolla en tiempos prolongados.

### Mallas de anchura variable

De las Figuras 7 y 8 se desprende que los cambios en las presiones intersticiales se producen en dos bandas del estrato compresible, la zona más superior y la más inferior. La diferencia en la zona central es mucho menor. Si pudiéramos realizar el cálculo variando los anchos de malla, es decir,  $\Delta z$  y  $\Delta t$  la malla sería más tupida donde los cambios son mayores y más grosera donde la diferencia es a priori menos acusada. Podemos considerar mallas de:

- $\Delta z$  variable
- $\Delta t$  variable

Teniendo en cuenta las distribuciones obtenidas de la presión del agua en función de la profundidad bajo el techo del estrato compresible, nos interesa tomar un  $\Delta z$  variable, mayor en las zonas superior e inferior y menor en la central.

Podemos reescribir las expresiones que se han aproximado con los esquemas de diferencias finitas o por el método de predictor-corrector, introduciendo distintos  $\Delta z$  a un lado y otro de cada nodo. Si suponemos que en las zonas de la malla que quedan a cada lado de un nodo tenemos dos  $\Delta z$  diferentes,  $\Delta z_1$  y  $\Delta z_2$ , (Figura 14), cambiaría la ecuación correspondiente al contacto de las zonas, es decir, en el nodo.

Para resolver la ecuación diferencial (7) con las condiciones en los límites (8), (9) y (10) por diferencias finitas, según la Figura 2, con  $\Delta z$  variable, necesitamos hallar la expresión de  $\partial^2 u(m, n) / \partial z^2$ .

$$\frac{\partial^2 u(m, n)}{\partial z^2} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}(m, n + \frac{1}{2}) - \frac{\partial u}{\partial z}(m, n - \frac{1}{2})}{\frac{\Delta z_1 + \Delta z_2}{2}} = \frac{\frac{u(m, n+1) - u(m, n)}{\Delta z_2} - \frac{u(m, n) - u(m, n-1)}{\Delta z_1}}{\frac{\Delta z_1 + \Delta z_2}{2}} \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2 u(m, n)}{\partial z^2} = \frac{2}{\Delta z_1 \Delta z_2 (\Delta z_1 + \Delta z_2)} (\Delta z_1 u(m, n+1) - (\Delta z_1 + \Delta z_2) u(m, n) + \Delta z_2 u(m, n-1)) \quad (40)$$

**Figura 14.** Esquema de diferencias finitas con  $\Delta z$  variable

Si llamamos

$$\Delta z = \frac{\Delta z_1 + \Delta z_2}{2} \quad \text{y} \quad r = \frac{\Delta z_2}{\Delta z_1} \quad (41)$$

Entonces

$$\frac{\partial^2 u(m, n)}{\partial z^2} = \frac{r+1}{2r\Delta z^2} (u(m, n+1) - (1+r)u(m, n) + ru(m, n-1)) \quad (42)$$

Si

$$\beta = \frac{c_v \Delta t}{\Delta z^2}$$

la ecuación (11) queda

$$u(m+1, n) = u(m, n) + \beta \frac{r+1}{2r} [u(m, n+1) - (1+r)u(m, n) + ru(m, n-1)] \quad (43)$$

Como puede observarse, si el ancho de malla  $\Delta z$  es constante,  $\Delta z_1 = \Delta z_2$  y coinciden las expresiones (11) y (43).

La disminución de  $\Delta z$  en las zonas superior e inferior obligaría a adoptar para una formulación explícita, un valor de  $\Delta t$  excesivamente corto, aumentando fuertemente el número de intervalos de cálculo. Por ello, en este caso es preferible utilizar el método del predictor-corrector.

En cuanto al método de predictor-corrector, si aproximamos la ecuación diferencial (7) con  $\Delta z$  variable, podemos llegar a las siguientes expresiones:

Para el predictor

$$\begin{aligned} & \frac{1+r}{2r\Delta z^2} [u(m+\frac{1}{2}, n+1) - (1+r)u(m+\frac{1}{2}, n) + ru(m+\frac{1}{2}, n-1)] = \\ & = \frac{2}{c_v\Delta t} (u(m+\frac{1}{2}, n) - u(m, n)) \end{aligned} \quad (44)$$

que, al igual que en la expresión (32), como  $\beta = \frac{c_v\Delta t}{\Delta z^2}$ , puede escribirse

$$\begin{aligned} & \frac{1+r}{2r}\beta(u(m, n))(u(m+\frac{1}{2}, n+1) - (1+r)u(m+\frac{1}{2}, n) + ru(m+\frac{1}{2}, n-1)) = \\ & = 2(u(m+\frac{1}{2}, n) - u(m, n)) \end{aligned} \quad (45)$$

y se transforma en

$$\begin{aligned} & \frac{1+r}{2}\beta(u(m, n))u(m+\frac{1}{2}, n-1) - (2 + \frac{(1+r)^2}{2r}\beta(u(m, n)))u(m+\frac{1}{2}, n) + \\ & + \frac{1+r}{2r}\beta(u(m, n))u(m+\frac{1}{2}, n+1) = -2u(m, n) \end{aligned} \quad (46)$$

que constituye un sistema de  $N-1$  ecuaciones con  $N-1$  incógnitas para cada paso en el tiempo, donde conocidos los valores  $u(m, n)$  se hallan los  $u(m+1/2, n)$  y que se programa

$$\sum_{i=1}^{N-1} a(i, n)u(m+\frac{1}{2}, i) = b_n \quad (47)$$

$$a(n-1, n) = \frac{1+r}{2}\beta(u(m, n)) \text{ con } i \geq 1, \text{ es decir, } n \geq 2$$

$$a(n, n) = -(2 + \frac{(1+r)^2}{2r}\beta(u(m, n)))$$

$$a(n+1, n) = \frac{1+r}{2r}\beta(u(m, n)) \text{ con } i \leq N-1, \text{ es decir, } n \leq N-2$$

$$a(i, n) = 0 \text{ cuando } i = 0, i < n-1, i > n+1, i = N$$

$$b_n = -2u(m, n) \text{ si } 1 < n < N-1$$

$$b_1 = -2u(m, 1) - \frac{1+r}{2}\beta(u(m, 1))(m+\frac{1}{2}, 0)$$

$$b_{N-1} = -2u(m, N-1) - \frac{1+r}{2r}\beta(u(m, N-1))u(m+\frac{1}{2}, N)$$

Para el corrector

$$\begin{aligned} & \frac{1+r}{2r} \frac{u(m+1, n+1) + u(m, n+1) - (1+r)(u(m+1, n) + u(m, n))}{\Delta z^2} + \\ & + \frac{r(u(m+1, n-1) + u(m, n-1))}{\Delta z^2} = \frac{2(u(m+1, n) - u(m, n))}{c_v\Delta t} \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1+r}{2r}\beta(u(m+\frac{1}{2}, n))(u(m+1, n+1) + u(m, n+1) - (1+r)(u(m+1, n) + \\ & + u(m, n)) + r(u(m+1, n-1) + u(m, n-1))) = 2(u(m+1, n) - u(m, n)) \end{aligned} \quad (49)$$

que puede escribirse

$$\begin{aligned}
& \frac{1+r}{2}\beta(u(m+\frac{1}{2},n))(u(m+1,n-1) - (2 + \frac{(1+r)^2}{2r}\beta(u(m+\frac{1}{2},n)))(u(m+1,n)+ \\
& \quad + \frac{1+r}{2r}\beta(u(m+\frac{1}{2},n))u(m+1,n+1)) = \tag{50} \\
& = -\frac{1+r}{2r}\beta(u(m+\frac{1}{2},n))(u(m,n+1) - (1+r)u(m,n) + ru(m,n-1)) - 2u(m,n)
\end{aligned}$$

que constituye un sistema de  $N - 1$  ecuaciones con  $N - 1$  incógnitas para cada paso en el tiempo, donde conocidos los valores  $u(m, n)$  y  $u(m + 1/2, n)$  se hallan los  $u(m + 1, n)$  y que se programa

$$\sum_{i=1}^{N-1} a(i, n)u(m+1, i) = b_n \tag{51}$$

$$a(n-1, n) = \frac{1+r}{2}\beta(u(m+\frac{1}{2},n)) \text{ con } i \geq 1, \text{ es decir, } n \geq 2$$

$$a(n, n) = -(2 + \frac{(1+r)^2}{2r}\beta(u(m+\frac{1}{2},n)))$$

$$a(n+1, n) = \frac{1+r}{2r}\beta(u(m+\frac{1}{2},n)) \text{ con } i \leq N-1, \text{ es decir, } n \leq N-2$$

$$a(i, n) = 0 \text{ cuando } i = 0, i < n-1, i > n+1, i = N$$

$$b_n = -2u(m, n) - \frac{1+r}{2r}\beta(u(m+\frac{1}{2},n))(u(m, n+1) - (1+r)u(m, n) + ru(m, n-1))$$

$$\text{si } 1 < n < N-1$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= -2u(m, 1) - \frac{1+r}{2r}\beta(u(m+\frac{1}{2},1))(u(m, 2) - (1+r)u(m, 1) + ru(m, 0)) - \\
& - \frac{1+r}{2}\beta(u(m+\frac{1}{2},1))(m+1, 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{N-1} &= -2u(m, N-1) - \frac{1+r}{2r}\beta(u(m+\frac{1}{2},N-1))(u(m, N) - (1+r)u(m, N-1) + \\
& + ru(m, N-2)) - \frac{1+r}{2r}\beta(u(m+\frac{1}{2},N-1))u(m+1, N)
\end{aligned}$$

Por supuesto, las expresiones (44) a (51) coinciden con las (31) a (38) cuando  $\Delta z_1 = \Delta z_2$ .

Podemos usar las ecuaciones anteriores para hallar las presiones intersticiales en el caso en que  $\Delta z_1 = 1,45$  m y  $\Delta z_2 = 0,725$  m, es decir, partiendo de una de las discretizaciones estudiadas, reduciendo  $\Delta z$  a la mitad en las zonas donde se producen los cambios más significativos de las presiones, y por lo tanto afinando más el cálculo en esos puntos.

$\Delta z_1 = 1,45$ m		$\Delta z_2 = 0,725$ m	
$\beta$	$\beta_r$	$\beta$	$\beta_r$
0,04	0,39	0,18	1,58

**Tabla X.** Valores de  $\beta$  ( $m = 180, n = 20, \Delta z$  variable), usando  $E_{oedr}$  y  $c_{vr}$

Aplicando las expresiones (15)-(18) para hallar los asientos, se obtienen resultados muy similares a los calculados para  $\Delta z = 1,45$  m, hecho con anterioridad (Tabla VI). Este cálculo no podría realizarse con estos supuestos por el método de diferencias finitas puesto que  $\beta > 0,50$ . Los valores máximos del asiento se reflejan en la Tabla XI.

	Valor	Tiempo
$u_{\min}$ (kPa)	-100,06	Oct-95 Ene-96
$s_{\max}$ (cm)	3,21	Ene-98
$s_{l\max}$ (cm)	13,48	Ene-98

**Tabla XI.** Resultados del cálculo por el método de predictor-corrector; ( $m = 180$ ,  $n = 20$ ,  $\Delta z$  variable), usando  $E_{oedr}$  y  $c_{vr}$

Si lo que interesa que varíe es el  $\Delta t$  se opera de la misma forma que con  $\Delta z$  variable, teniendo en cuenta el valor de  $\Delta t(m)$  que se tenga en cada caso y siendo

$$\Delta t(m) = t(m+1) - t(m) \quad (52)$$

## CONCLUSIONES

La solución explícita es la más exacta, pero sólo es aplicable cuando  $c_v$  es constante. Se puede demostrar, por desarrollo en serie, que el error relativo producido por la integración numérica es  $\Delta T^2/12 + \dots = 0(\Delta T^2)$ , por lo que decrece rápidamente cuando decrece  $\Delta T$ <sup>19</sup>. Con las ecuaciones (23), (28), (29) y (30) se puede encontrar la solución para cualquier tiempo y profundidad, sin que haya que pasar por los puntos intermedios, a lo que obliga la malla de diferencias finitas.

La formulación explícita en diferencias finitas permite considerar la variación que se produce en el coeficiente  $c_v$  en los períodos de descarga y recarga, lo cual da un asiento calculado mayor, porque la recuperación de los asientos en el tiempo de descarga es más pequeña (Figura 11). El inconveniente que tiene este método está en la necesidad de mantener  $\beta \leq 1/2$ , lo que obliga a emplear intervalos de tiempo excesivamente cortos cuando  $c_v$  es alto.

El método del predictor-corrector no tiene esta limitación y es, por tanto, mucho más flexible para utilizar, por ejemplo, mallas de anchura variable.

Cuando se cumplen todas las hipótesis en que se basa cada uno de los métodos, los resultados coinciden con gran exactitud, como muestra la Figura 13.

Aunque no se han realizado nivelaciones de precisión, sí se puede decir que los asientos calculados y observados son del mismo orden de magnitud.

En cualquier caso, las expresiones explícitas sólo son válidas para el caso del suelo saturado, mientras que por los otros dos métodos, el de diferencias finitas y el de predictor-corrector se pueden aproximar también las ecuaciones diferenciales que gobiernan el flujo transitorio unidimensional para estratos de arcilla con presiones del agua negativas.

## REFERENCIAS

- 1 J. L. Ballesteros Galante, “Informes sobre daños en edificios de Murcia”, ASEMAS, (1994).
- 2 J. L. Ballesteros Galante, “Informe sobre los efectos derivados del rebajamiento del nivel freático en el casco urbano de Murcia”, Centro de Asesoramiento Tecnológico, Colegio Oficial de Arquitectos de Murcia, (1995).
- 3 J. D. Bredehoeft y G. F. Pinder, “Digital analysis of areal flow in multiaquifer groundwater systems: a quasi three-dimensional mode”, *Water Resources Res.*, Vol. **6**, N° 3, pp. 883–888, (1970).
- 4 F. Cabezas Calvo-Rubio, “Consideración de los recursos hidrogeológicos y no convencionales en el plan hidrológico de la cuenca del Segura”, pp. 323–348.
- 5 Colegio Oficial de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, “Consideraciones acerca del descenso del nivel freático en Murcia”.
- 6 M. Y. Corapcioglu, “Land subsidence-a state-of-the-art review”, *Fundamentals of transport phenomena in porous media*, Nijhoff, Dordrecht, pp. 369–444, (1984).
- 7 M. Y. Corapcioglu y J. Bear, “Land subsidence, a regional mathematical model”, *Fundamentals of transport phenomena in porous media*, Nijhoff, Dordrecht, pp. 445–497, (1984).
- 8 M. Y. Corapcioglu y W. Brutsaert, “Viscoelastic aquifer model applied to subsidence due to pumping”, *Water Resources Res.*, Vol. **13**, N° 3, pp. 597–604, (1977).
- 9 P. De Simone y C. Viggiani, “Consolidation of a thick aquitard due to ground water withdrawal”, *Evaluation and Prediction of Subsidence*, ASCE, pp. 358–372, (1979).
- 10 J. Douglas y B. F. Jones, “On predictor-corrector methods for nonlinear parabolic differential equations”, *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, Vol. **11**, N° 1, pp. 195–204, (1963).
- 11 R. A. Freeze, “Three-dimensional, transient, saturated-unsaturated flow in a groundwater basin”, *Water Resources Res.*, Vol. **7**, N° 2, pp. 347–366, (1971).
- 12 G. Gambolati y R.A. Freeze, “Mathematical simulation of the subsidence of Venice. 1. Theory”, *Water Resources Res.*, Vol. **9**, N° 3, pp. 721–733, (1973).
- 13 G. Gambolati, P. Gatto y R.A. Freeze, “Mathematical simulation of the subsidence of Venice. 2. Results”, *Water Resources Res.*, Vol. **10**, N° 3, pp. 563–577, (1974).
- 14 D. C. Helm, “One-dimensional simulation of aquifer system compaction near Pixley, California. 1 Constant parameters”, *Water Resources Res.*, Vol. **11**, N° 3, pp. 465–478, (1975).
- 15 D. C. Helm, “Estimating parameters of compacting fine-grained interbeds within a confined aquifer system by a one-dimensional simulation of field observations”, *Proc. 2nd Int. Symp. Land Subsidence, Anaheim*, pp. 145–156, (1977).
- 16 A. Jaramillo Morilla, “Efectos del rebajamiento del nivel freático sobre las cimentaciones superficiales. Soluciones”, *Jornadas sobre la influencia del descenso del nivel freático sobre los edificios del casco urbano de Murcia*, (1996).
- 17 A. Jaramillo Morilla y J.L. Ballesteros Galante, “El Descenso del nivel freático en Murcia: Influencia sobre los edificios”, ASEMAS, (1997).
- 18 J.A. Jiménez Salas y J.L. Justo Alpañés, “Geotecnia y cimientos I. Propiedades de los suelos y de las rocas”, (1975).

- 19 J.L. Justo Alpañés y N. Vázquez, “Subsidencia en Murcia. I. Soluciones explícitas para el asiento unidimensional”, *Ingeniería Civil*, N° 115, pp. 63–77, (1999).
- 20 Laboratorio Regional de Control de Calidad en la Edificación, “Programa de actuación sobre patologías evidenciadas en las edificaciones de Murcia por aparición de problemas de suelo por descenso del nivel freático”, Consejería de Política Territorial y Obras Públicas de la Región de Murcia, (1995).
- 21 R.L. Lytton, “Foundations in expansive soils”, *Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, Mc Graw-Hill, N. Y., pp. 427–457, (1977).
- 22 F. Mañá, “Notas sobre las anomalías recientes que presentan algunos edificios de la ciudad de Murcia a tenor de la información suministrada por el Colegio de Arquitectos”, (1995)
- 23 Ministerio de Industria y Energía, Instituto Geológico y Minero de España, “Mapa geotécnico y de riesgos geológicos para ordenación urbana de Murcia”.
- 24 T.N. Narasimhan y P.A. Witherspoon, “Numerical model for land subsidence in shallow groundwater systems”, *Proc. 2nd Int. Symp. Land Subsidence*, Anaheim, pp. 133–144, (1977).
- 25 S.P. Neuman y P.A. Witherspoon, “Theory of flow in a confined two aquifer system”, *Water Resources Res.*, Vol. 5, N° 4, pp. 803–816, (1969a).
- 26 S.P. Neuman y P.A. Witherspoon, “Applicability of current theories of flow in leaky aquifers”, *Water Resources Res.*, Vol. 5, N° 4, pp. 817–829, (1969b).
- 27 J.F. Poland, “Land subsidence stopped by artesian-head recovery, Sta Clara Valley, California”, *Land Subsidence Symposium*, pp. 124–132, (1977).
- 28 A. Puche Muñoz y J. Blanco Gómez, “Estudio de las variaciones de los niveles freáticos en el subsuelo del casco urbano de Murcia. Consecuencias geotécnicas G-166”, Geotecnia y Proyectos, S. L., (1995).
- 29 N. M. Safai y G. F. Pinder, “Vertical and horizontal land deformation due to fluid withdrawal”, *Int. J. Num. An. Meth. Geomech.*, Vol. 4, pp. 131–142, (1980).
- 30 S.K. Saxena, “A review of the methods used in investigation of subsidence”, *Evaluation and Prediction of Subsidence, ASCE*, pp. 214–233, (1979).
- 31 B.A. Schrefler, R. W. Lewis y V.A. Norris, “A case study of the surface subsidence of the Polesine area”, *Int. J. Num. An. Meth. Geomech.*, Vol. 1, pp. 377–386, (1977).
- 32 M. Senent Alonso, “Informe hidrogeológico sobre los efectos de la sequía en los edificios de la ciudad de Murcia”, Universidad de Murcia, Instituto del Agua, (1995).

## FÉ DE ERRATAS

En la Figura 3, de la página 257, el eje de las  $z$  debe tener sentido positivo ascendente.

En la frase «El nivel piezométrico inicial se encuentra a una profundidad  $z_w$ », de la página 258, debe decir «El nivel piezométrico inicial se encuentra a una cota  $z_w$ ».

En las ecuaciones de dicha figura, (2a), (2b), (3b), (4), (8), (9) y (10) debe cambiarse el signo de  $z$ ,  $z_w$ ,  $z_0$  y  $z_N$ .

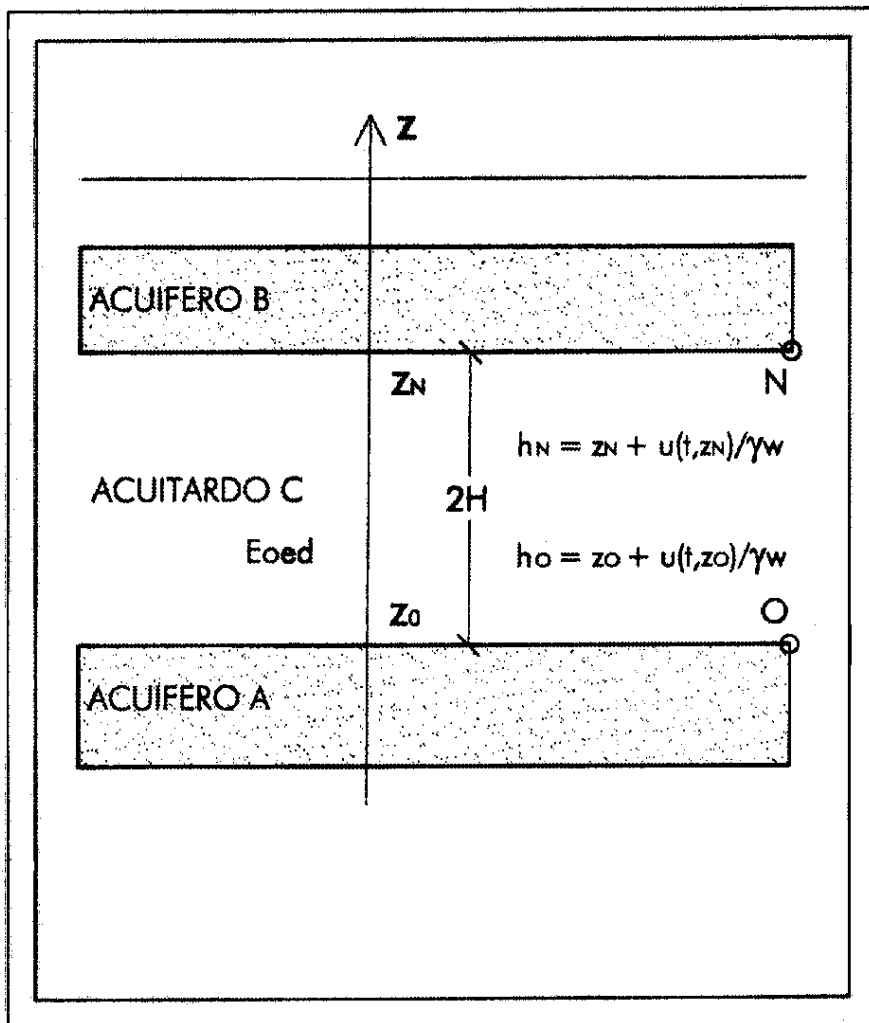


Figura 3. Niveles piezométricos en los límites de un acuitardo limitado por dos acuíferos