

# UN MODELO VISCOPLASTICO DE ELEMENTOS FINITOS PARA CALCULAR EL ABOMBADO DEL ACERO COLADO EN CONTINUO

J.B. DALIN\*

y

J.L. CHENOT

*Centre de Mise en Forme des Matériaux,  
Ecole des Mines de Paris,  
(UA CNRS no. 854) France.*

y

*GRECO, Grandes Déformations et Endommagement,  
Sophia Antipolis, 06560 Valbonne, France.*

*\*En la actualidad, Prof. investigador invitado en  
el Centro Internacional de Métodos Numéricos  
en Ingeniería, Barcelona, España.*

## RESUMEN

El abombado del acero de la colada continua entre los rodillos de apoyo se calcula con un modelo viscoplastico de elementos finitos. Los dos modelos, el bidimensional y el tridimensional, están basados en la minimización del funcional asociada con el comportamiento de flujo de Norton-Hoff y usan la integración del flujo laminar para calcular el abombado. Se ha comprobado la influencia de los parámetros numéricos y del proceso en la magnitud del abombado calculado utilizando datos industriales. La comparación de los resultados obtenidos con medidas experimentales confirma la validez de la hipótesis del comportamiento viscoplastico.

## SUMMARY

The bulging of continuously cast steel between the support rolls has been computed using a viscoplastic finite element model. Both two-dimensional and three-dimensional models are based on the minimization of the functional associated to the Norton-Hoff's law and uses the streamlines integration to calculate the bulging. By using industrial data, the influence of both numerical parameters and process parameters on the extent of the calculated bulging values have been investigated. The comparison of our results with experimental measurements confirms the relevance of the hypothesis of viscoplastic behaviour.

Recibido: Julio 1988

## INTRODUCCION

En la colada continua de planchas, el abombado del lado ancho del producto, es el responsable de la deformación del casco próximo al frente de solidificación. Eso origina la formación de grietas<sup>1</sup> internas que son incompatibles con la calidad del acero colado.

El abombado es producido por la presión ferrostática en el casco solidificado entre los rodillos de apoyo (Figura 1). Esto depende de los parámetros del proceso (colada secundaria, velocidad de colada) y de la geometría de la máquina (desalineación de los rodillos de apoyo, flexión y enderezadora en una colada curva).

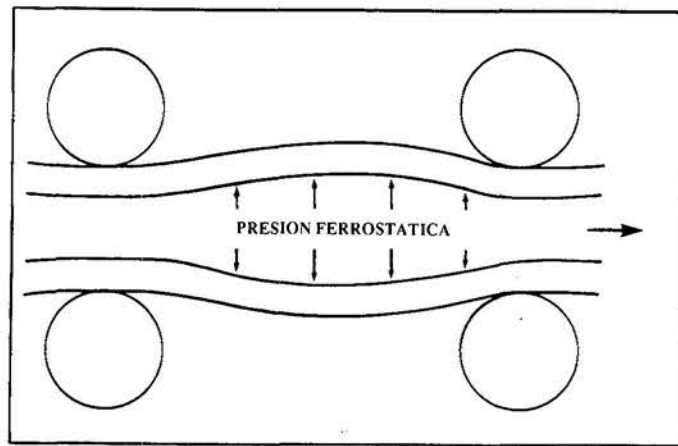


Figura 1. Abombado del casco<sup>8</sup>.

Debido a la dificultad técnica para medir el abombado experimentalmente, se han presentado modelos matemáticos en varios artículos. El primero de dichos modelos usa una teoría simple de flexión de viga para comportamientos elástico, elastoplástico, y viscoplástico con plancha estática<sup>3</sup> o en movimiento<sup>4</sup> entre dos rodillos de apoyo. Estos estudios demuestran que el flujo viscoplástico puede ser un factor muy importante para obtener un buen acuerdo entre los valores medidos<sup>5</sup> y los calculados. Un modelo más sofisticado usando el método de los elementos finitos (M.E.F.) se ha desarrollado para analizar la deformación de la sección longitudinal del casco solidificado en el plano medio de la placa<sup>6</sup>. El abombado producido por el flujo está calculado con una formulación de elementos finitos elastoplástica bidimensional, pero la dificultad de las condiciones de contorno, ocasiona inestabilidades<sup>7</sup> (abombado excesivo o divergencia del algoritmo). Más recientemente, estas dificultades parecen haber sido resueltas introduciendo un tratamiento particular del desplazamiento sobre el rodillo posterior en el modelo con dos rodillos<sup>8</sup>. Con todo, este procedimiento iterativo necesita muchos incrementos para mantener la estabilidad y la precisión<sup>9</sup>.

En este artículo, desarrollamos un nuevo método para calcular el abombado de la placa. Como se supone un flujo viscoso, se usa una formulación de elementos finitos viscoplástica para calcular el campo de velocidades estacionarias en el casco solidificado. Luego, la forma del lado libre del abombado entre dos rodillos de apoyo se

calcula con la integración del flujo laminar<sup>11</sup> a lo largo de la dirección de colada. Las dos etapas anteriores deben repetirse hasta que se obtenga la superficie libre estable. El procedimiento se ha estudiado para diversas configuraciones teniendo en cuenta la influencia de los parámetros numéricos tal como refinamiento de la malla, el efecto de las variaciones de los parámetros del proceso y comparándose el modelo bidimensional (CC2D) en estado de deformación plana y el modelo completo tridimensional (CC3D). Los resultados obtenidos son también comparativos con los que se deducen con la teoría simple de flexión de viga y con medidas experimentales.

## MODELO MATEMATICO

### Formulación mecánica

#### Geometría del casco solidificado

Con la aproximación de colada recta entre dos rodillos, se ha desarrollado un modelo mecánico para el flujo tridimensional en un cuarto del casco solidificado de la placa  $\Omega$  (Figura 2.a) debido a la simetría del problema. En el sistema cartesiano  $Oxyz$ ,  $Ox$  es la dirección opuesta a la colada. El primer plano de simetría  $Oxy$  representa el plano medio de la plancha en su parte estrecha mientras que el plano  $Oxz$  define la sección longitudinal en su parte ancha. Para planchas muy anchas suponemos que existe un estado de deformación plana en la sección media del ancho, lo que permite considerar el flujo bidimensional como una restricción del flujo tridimensional en el plano  $Oxz$  (Figura 2.b).

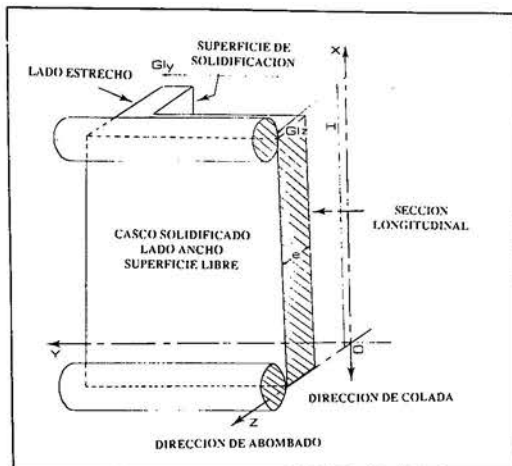


Figura 2.a. Geometría tridimensional de un cuarto del casco solidificado.

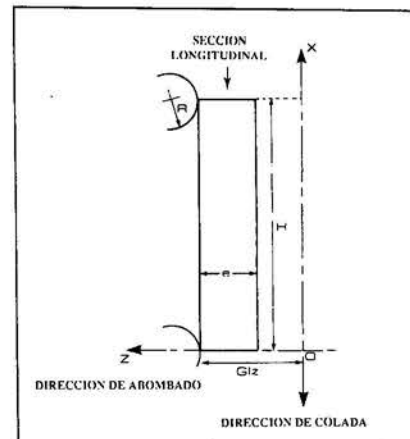


Figura 2.b. Geometría bidimensional de la sección longitudinal del casco solidificado.

Los dos modelos bidimensional (CC2D) y tridimensional (CC3D) se presentan en el caso de dos rodillos de apoyo dispuestos en el lado ancho de la plancha para contener

la extensión del abombado. Los resultados obtenidos son muy dependientes de los parámetros geométricos, como veremos más adelante.

### Condiciones de contorno

Suponemos que las velocidades de deformación son pequeñas ( $\approx 10^{-4} s^{-1}$ ) y que no hay disipación de calor debido a la deformación del casco. En dicho caso, el problema térmico se resuelve independientemente del problema mecánico del flujo. Como primera aproximación, la temperatura  $T$  está impuesta en cada punto de  $\Omega$ , variando linealmente desde la temperatura  $T_{solid}$  del frente solidificado  $\Gamma_p$  hasta la temperatura  $T_{surf}$  de la superficie externa  $\Gamma_L$ . Para obtener una descripción correcta del flujo, debemos imponer condiciones de contorno en la superficie de  $\Omega$  (Figuras 3.a y 3.b):

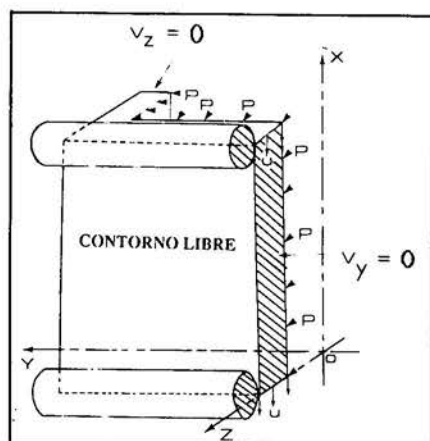


Figura 3.a. Condiciones de contorno aplicadas sobre el casco tridimensional.

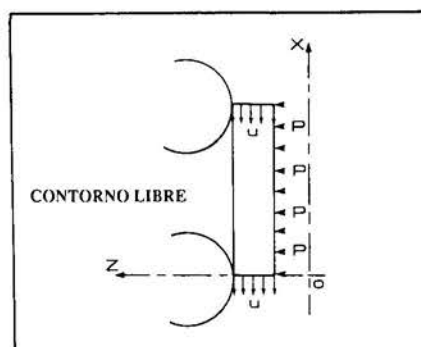


Figura 3.b. Condiciones simplificadas de contorno aplicadas sobre el casco tridimensional.

- El flujo a través de las secciones superior e inferior está prescrito para una velocidad de colada  $u$ . Como estas secciones quedan perpendiculares a la dirección de la colada  $Ox$ , la componente  $v_x$  de la velocidad  $\mathbf{v}$  debe ser igual a  $u$ . Las otras dos componentes  $v_y$  y  $v_z$  (solamente  $v_z$  en el caso bidimensional) pueden ser prescritas a cero o a otro valor arbitrario, o quedar libres ya que todas las condiciones conservan el flujo en las secciones extremas.
- Se supone que no hay desplazamiento entre la plancha y los rodillos. Eso significa que la componente normal  $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  es la prescrita a cero y que la componente tangencial es igual a  $u$  en cada punto de contacto.
- En la superficie interna  $\Gamma_p$ , y la superficie externa  $\Gamma_L$ , no hay condiciones impuestas. Desde el punto de vista de la formulación del flujo, son superficies libres cuyas deformaciones producen el abombado.
- $v_y = 0$  en el plano de simetría  $Oxz$  y  $v_z = 0$  en  $Oxy$  para el flujo tridimensional (Figura 3.a).

Con esas condiciones, la deformación mecánica de  $\Omega$  será la respuesta a la presión ferrostática  $P$  que se aplica en  $\Omega_p$ .

### El comportamiento del flujo viscoso

Para temperaturas altas, el acero tiene un comportamiento asimilable a un flujo viscoso<sup>12</sup>. Este aspecto puede ser comprobado mediante ensayos de tracción: para reproducir las condiciones efectivas de la colada continua, la probeta está sometida a un tratamiento térmico a 1300 °C antes de aplicar la tracción. Durante el ensayo, la velocidad de deformación se mantiene constante. La Figura 4 muestra los resultados obtenidos para un acero de norma 18 M5 (0.18% de C, 1.37% de Mn). El comportamiento del flujo se representa con la ley tridimensional de Norton-Hoff generalizada a un material dilatable:

$$s = 2K(T, \bar{\epsilon}_0) (\sqrt{3}\dot{\epsilon})^{m-1} \dot{\epsilon} \quad \text{en } \Omega \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \text{Tr } \dot{\epsilon} = 3\alpha \dot{T} \quad (2)$$

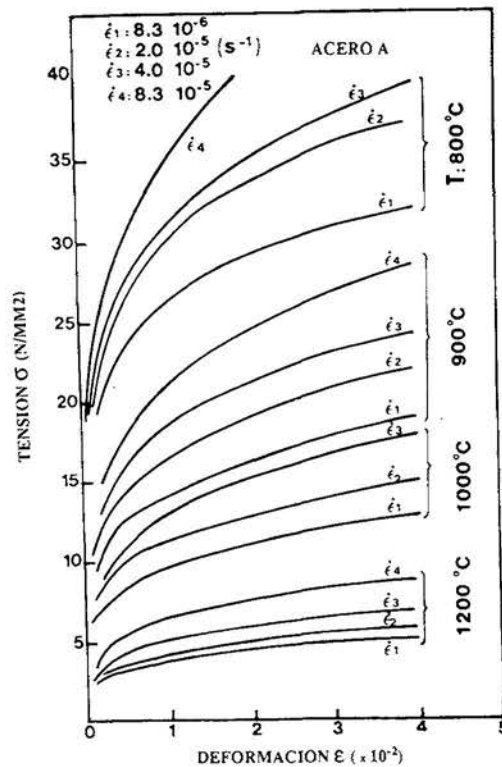


Figura 4. Curvas experimentales fuerza-deformación obtenidas con ensayos de tracción para el acero 18M5.

donde  $\mathbf{s}$  y  $\dot{\mathbf{e}}$  son los dos tensores desviadores del tensor de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  y del tensor de velocidad de deformación  $\dot{\mathbf{e}}$ ,  $\dot{\mathbf{e}} = \left(\frac{2}{3} \sum_{ij} \dot{e}_{ij} \dot{e}_{ij}\right)^{1/2}$ ,  $m$  es la sensibilidad a la velocidad de deformación,  $K$  es la consistencia que depende de la temperatura y de la deformación media  $\bar{\epsilon}_0$ ,  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación lineal y  $\dot{T}$  es la derivada temporal de  $T$ . Los índices  $i$  y  $j$  representan las tres direcciones del sistema cartesiano ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

### Equilibrio mecánico y condiciones de equilibrio en el contorno

Suponemos que hay un estado estacionario del flujo  $\mathbf{v}$  en  $\Omega$  sometido a la presión ferrostática. El estado de esfuerzo en  $\Omega$  equilibra las fuerzas de gravedad mientras que las fuerzas de inercia son despreciables:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (3)$$

donde  $\rho$  es la densidad del acero y  $\mathbf{g}$  es el vector de fuerzas de volumen.

Usando la descomposición:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \mathbf{s} \quad (4)$$

donde  $p$  es la presión hidrostática e  $\mathbf{I}$  es la matriz unidad, (3) se transforma en

$$-\operatorname{grad} p + \operatorname{div} \mathbf{s} + \rho \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (5)$$

Para completar (5), deben añadirse las condiciones de equilibrio en el contorno:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \dot{P} \quad \text{en } \Gamma_p \quad (6)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector normal a  $\Gamma_p$  y  $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  es el vector de tensiones,

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_p \quad (7)$$

donde  $\mathbf{t}$  es el vector tangente a  $\Gamma_p$ ,

$$\mathbf{T} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_L \quad (8)$$

Además de las condiciones de equilibrio en el contorno, se tienen las condiciones de contorno en velocidades descritas en un apartado anterior.

### Formulación variacional

Los principios variacionales<sup>15</sup> usados para materiales de Norton-Hoff, permiten una forma variacional equivalente al anterior problema mecánico, basada en la minimización del funcional:

$$F(\mathbf{v}) = \frac{1}{m+1} \int_{\Omega} K(T, \bar{\epsilon}_0) (\sqrt{3}\dot{\mathbf{e}})^{m+1} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Gamma_p} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad (9)$$

La condición de dilatación (2) se aplica con el método de penalización<sup>16,17</sup> con la adición del funcional:

$$\frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} K(T, \bar{\epsilon}_0) (\operatorname{div} \mathbf{v} - 3\alpha\dot{T})^2 d\Omega$$

donde el coeficiente  $\gamma$  es una constante grande ( $\simeq 10^7$ ). El problema de minimización es equivalente a hacer cero las derivadas,  $G(\mathbf{v})$  del funcional penalizado  $F_{\gamma}(\mathbf{v})$ :

$$\frac{\partial F_{\gamma}(\mathbf{v})}{\partial v_i} = G_i(\mathbf{v}) = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (10)$$

donde  $G(v)$  se denomina gradiente del funcional. Por otra parte, es posible demostrar la equivalencia entre esta formulación variacional y el principio de los trabajos virtuales<sup>17</sup> con

$$p = \gamma K(T, \bar{\epsilon}_0) (\operatorname{div} \mathbf{v} - 3\alpha\dot{T}) \quad \text{en } \Omega \quad (11)$$

donde la presión hidrostática  $p$  definida con (11), introduce una compresibilidad pequeña. Con el campo de velocidades  $\mathbf{v}$ , se calcula  $\dot{\epsilon}$  por:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{en } \Omega \quad (12)$$

usando para  $s$  la ecuación constitutiva (11) y para  $\sigma$  la ecuación de descomposición (4).

### Resolución numérica

El problema variacional anterior se resuelve con el método de los elementos finitos. Para el caso tridimensional, el casco sólido  $\Omega$  está discretizado con elementos de ocho nodos (Figura 5.a). El campo de velocidades se calcula con los valores  $\mathbf{V}_{\lambda}$  con la interpolación clásica en cada elemento:

$$\mathbf{v}(x) = \sum_{\lambda=1}^n N_{\lambda}(\xi) \mathbf{V}_{\lambda} \quad \text{en } \Omega \quad (13)$$

$$x = \sum_{\lambda=1}^n N_{\lambda}(\xi) \mathbf{X}_{\lambda} \quad \text{en } \Omega \quad (14)$$

donde  $N_{\lambda}$  son las funciones de forma calculadas en las coordenadas locales  $\xi \in [-1, 1]^3$ ,  $\mathbf{X}_{\lambda}$  es la discretización global de las coordenadas cartesianas y  $n$  es el número total de nodos de la malla.

El problema variacional discretizado puede escribirse como

$$\frac{\partial F_{\gamma}(\mathbf{v})}{\partial v_{i\lambda}} = G_{i\lambda}(\mathbf{v}) = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad \lambda = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

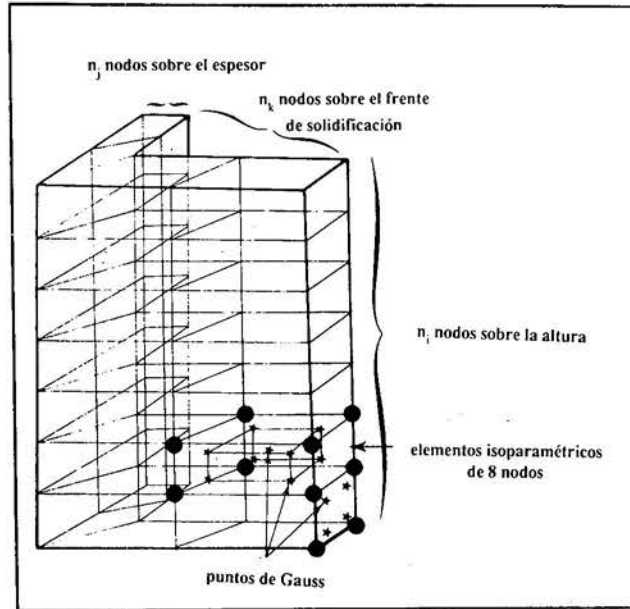


Figura 5.a. Malla tridimensional de elementos finitos del casco.

La solución numérica del sistema no lineal (15) con  $3n$  incógnitas se hace con el método iterativo de Newton-Raphson<sup>15</sup>. La secuencia  $(\mathbf{v}^0, \mathbf{v}^1, \dots)$  comienza con la solución del flujo de Newton ( $m = 1$ ). Después, en la iteración  $q + 1$ , el nuevo campo de velocidades se calcula por:

$$\mathbf{v}^{q+1} = \mathbf{v}^q + \Delta \mathbf{v}^q \quad (16)$$

y

$$\Delta \mathbf{v}^q = -H^{-1}(\mathbf{v}^q) G(\mathbf{v}^q) \quad (17)$$

donde  $H_{i\lambda j\mu} = \partial^2 F_\gamma(\mathbf{v}) / \partial v_{i\lambda} \partial v_{j\mu}$  son las componentes de la matriz Hessiana  $H$ . El Método de Newton-Raphson converge cuando  $\|\Delta \mathbf{v}^q\| / \|\mathbf{v}^q\| \leq 10^{-5}$  ( $\|\cdot\|$  representa la norma euclídea).

Para el caso bidimensional, la sección longitudinal del casco sólido está discretizada con elementos de cuatro nodos (Figura 5.b). La hipótesis del estado de deformación plana conduce a despreciar las componentes transversales del tensor de velocidad de deformación  $\dot{\epsilon}$  en la dirección  $Oy$ . Después, se utiliza el mismo procedimiento descrito arriba considerando únicamente las componentes  $x$  y  $z$ .

### Determinación del abombado

La segunda etapa de la resolución numérica consiste en deformar el dominio  $\Omega$  con la condición de superficie libre. Como el cálculo precedente de  $\mathbf{v}$  no incluye la determinación del abombado, las dos superficies  $\Gamma_L$  y  $\Gamma_p$  no son superficies de corriente y la condición

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (18)$$

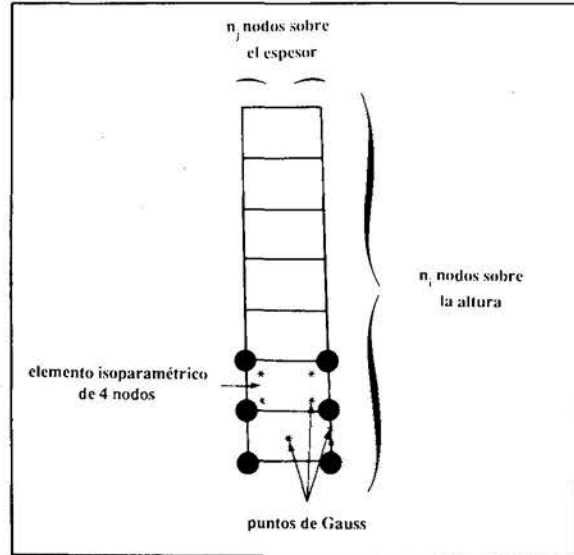


Figura 5.b. Malla bidimensional de elementos finitos de la sección longitudinal del casco.

no se cumple. Para obtener el abombado, utilizamos un método iterativo en que la resolución mecánica y la búsqueda de las superficies libres se hacen en cada iteración  $r$  como sigue:

- (a) Determinación del campo de velocidades estacionario  $\mathbf{v}^{(r)}$  en el dominio  $\Omega^{(r-1)}$  como se ha descrito anteriormente.
- (b) Integración de las líneas de corriente y desplazamientos de los nodos de la malla para obtener un nuevo dominio  $\Omega^{(r)}$ .

Para el flujo tridimensional, se supone que el abombado es más importante en el lado ancho y que éste puede obtenerse como una sucesión de problemas bidimensionales en cada plano paralelo a  $Oxz$ . La descripción que sigue, se refiere al flujo bidimensional en la sección media del ancho.

### Integración del flujo laminar

Diferentes métodos han sido desarrollados para buscar las superficies libres de un flujo laminar estacionario para problemas de extrusión<sup>11,20</sup>. La integración del flujo es el método más fácil ya que no añade más incógnitas al sistema no lineal. Como el primer rectángulo recibe la presión ferrostática  $P$ , las velocidades tienen una pequeña componente positiva  $v_z$  (Figura 6). Introduciendo el gráfico del flujo laminar,  $f(x) = z$ , la condición de estado estable (o condición de superficie libre (18)) puede escribirse como la ecuación diferencial del flujo:

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \frac{v_z}{v_x} \quad (19)$$

para cualquier  $x$  entre los rodillos. Cada línea se integra a partir de los nodos de entrada correspondientes a la abscisa  $x_0$  (Figura 6). La regla de Simpson se utiliza para integrar (19) en la iteración  $r$  como:

$$f^{(r)}(x_{n+1}) = f^r(x_n) + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{v_z}{v_x} \right)_n^{(r)} + \left( \frac{v_z}{v_x} \right)_{n+1}^{(r)} \right] (x_{n+1} - x_n) \quad (20)$$

donde  $v^{(r)}$  es el campo de velocidad calculado con el dominio precedente  $\Omega^{(r-1)}$  y  $n$  es el índice del nodo en la dirección de la colada.

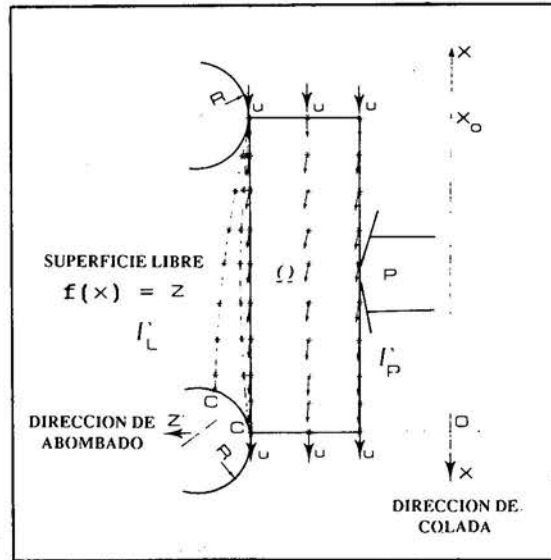


Figura 6. Deformación del casco tridimensional durante las iteraciones de superficie libre.

### Contacto sobre el rodillo de salida

El rodillo de salida se presenta como un obstáculo y obliga el paso tangencial del flujo. Comparando con el problema de la extrusión en que la extremidad de la superficie libre no está prescrita, ello equivale a introducir una nueva incógnita que es el punto de contacto  $C$  con el rodillo. Este punto debe satisfacer la ecuación:

$$r_c = f(x_c) - z_c = 0 \quad (21)$$

donde  $z_c$  es la ordenada sobre la circunferencia correspondiente a la abscisa  $x_c$  ( $z_c = R - \sqrt{R^2 - x_c^2}$ ) y  $f$  es la ecuación de la línea externa  $\Gamma_L$ . En la iteración  $r$ , se puede escribir:

$$r_c^{(r)} = f^{(r)}(x_c^{(r-1)}) - z_c^{(r-1)} \quad (22)$$

donde  $f^{(r)}$  se calcula a partir de (20). En la iteración anterior  $r-1$ , se cumplió asimismo

$$r_C^{(r-1)} = f^{(r-1)}(x_C^{(r-2)}) - z_C^{(r-2)} \quad (23)$$

La nueva abscisa se obtiene con el sencillo método de la secante:

$$x_C^{(r)} = x_C^{(r-1)} - r_C^{(r)}(x_C^{(r-1)} - x_C^{(r-2)}) / (r_C^{(r)} - r_C^{(r-1)}) \quad (24)$$

$C$  es el nodo antes del punto de salida (Figura 6). Por consiguiente, la velocidad de  $C$  se prescribe igual a la velocidad de la colada  $u$  ( $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  y  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} = u$ ). Cuando se obtiene la posición correcta de  $C$ , la presión  $P$  está equilibrada con esta condición de contorno sobre el rodillo de salida.

### Deformación del dominio y criterio de convergencia

Al final de cada iteración de superficie libre, las posiciones de los nodos cambian:

- las ordenadas de los nodos se mueven con la integración del flujo laminar.
- la abscisa de los nodos quedan iguales excepto para el nodo de contacto  $C$  y para todos los otros nodos de la penúltima sección antes de la salida. Eso evita una distorsión grande en el espesor del casco.

Este método es bueno porque la deformación de  $\Omega$  es pequeña (los valores del abombado oscilan entre un milímetro y algunos centímetros). Para una deformación más grande, puede usarse un método global en el que se satisfaga el problema mecánico y el problema de superficie libre<sup>20</sup>. El ciclo completo debe repetirse hasta que se obtienen las superficies libres. El criterio de convergencia se refiere a la norma cuadrática de  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  en los nodos  $\Gamma_L$  o en ambas variaciones de la posición de la superficie libre y del valor residual  $r_C$ . Generalmente, se obtiene la solución después de 8 iteraciones (Figura 7).

## RESULTADOS NUMERICOS Y DISCUSION

La geometría de la placa y los parámetros del proceso se muestran en la primera columna de la Tabla I, refiriéndose a la norma del acero 18M5 colado en Usinor Dunkerque en Francia. Las propiedades del acero (Tabla II, ley 4) se obtienen con ensayos de tracción<sup>13</sup> a temperaturas altas (Figura 4). Las medidas del abombado que se han hecho sobre la colada de Dunkerque, conducen a un valor medio de 1 mm.

### Resultados obtenidos con el modelo bidimensional (CC2D)

Como se dice en algunos artículos<sup>2,7</sup>, los valores del abombado calculado dependen del refinamiento de la malla. Demostramos también con CC2D que un mayor refinamiento de la malla sobre la altura, da un aumento de los valores numéricos del abombado (Figura 8). Este resultado puede interpretarse debido a que la rigidez de la malla disminuye cuando el número de nodos  $n_i$  aumenta. Por otra parte, en el caso de una deformación media  $\bar{\epsilon}_0$  mayor que 0.15%, hay una estabilización del abombado para  $n_i > 35$  nodos para mallas regulares. El mayor valor,  $\bar{\epsilon}_0 = 0.3\%$  conduce a la medida

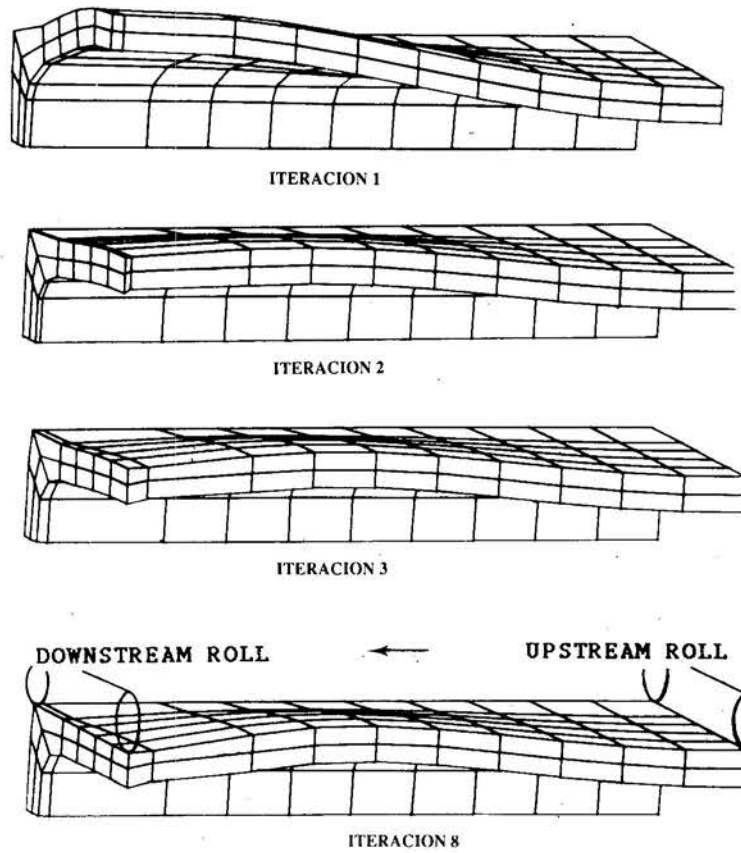


Figura 7. Deformación del casco tridimensional durante las iteraciones de superficie libre.

	Usinor Dunkerque <sup>11</sup>	Wunnenberg <sup>6</sup>
$H \times Gly \times Glz$ (m <sup>3</sup> )	0.54×0.75×0.125	0.43×0.65×0.1
$u$ (ms <sup>-1</sup> )	0.0143	0.0141
$P$ (MPa)	0.85	0.28
$R$ (cm)	24	20
$e$ (mm)	88	83
$T_{solid}$ (°K)	1330	1300
$T_{surf}$ (°K)	1620	1740

TABLA I. Parámetros de las coladas.

experimental de 1 mm. Para reducir el número anterior de nodos, hemos efectuado una contracción exponencial de la malla cerca del rodillo de salida donde se produce el contacto. Parece que la malla contractada de 25×3 nodos (con una contracción de 1.2)

Unidades	$P_a$	$P_a$	$^{\circ}\text{K}$	$\text{s}^{-1}$	$\text{s}^{-1}$
Ley 1 <sup>7</sup>	$s = 3.32 \times 10^5$	$\exp(7550/T)$	$(\sqrt{3}\dot{\epsilon})^{-0.333}$	$\dot{\epsilon}$	para $H = 0.43 \text{ m}$
Ley 1 <sup>7</sup>	$s = 4.90 \times 10^5$	$\exp(7550/T)$	$(\sqrt{3}\dot{\epsilon})^{-0.333}$	$\dot{\epsilon}$	para $H = 0.86 \text{ m}$
Ley 2 <sup>7</sup>	$s = 7.98 \times 10^5$	$\exp(10450/T)$	$(\sqrt{3}\dot{\epsilon})^{-0.776}$	$\dot{\epsilon}$	
Ley 3 <sup>7</sup>	$s = 8.24 \times 10^5$	$\exp(6390/T)$	$(\sqrt{3}\dot{\epsilon})^{-0.815}$	$\dot{\epsilon}$	
Ley 4 <sup>11</sup>	$s = 4.16 \times 10^5$	$\exp(7860/T)$	$\bar{\epsilon}_0^{0.182} (\sqrt{3}\dot{\epsilon})^{-0.859}$	$\dot{\epsilon}$	

TABLA II. Propiedades del acero para temperaturas altas.

conduce al mismo resultado que con mallas regulares de  $35 \times 3$  o  $50 \times 3$  nodos (Figura 9). Eso puede explicarse por la influencia del gran número de grados de libertad cerca del rodillo de salida donde el flujo está muy perturbado. La ventaja de la contracción de la malla es la velocidad del tiempo de cálculo ya que necesita menos nodos para obtener el mismo resultado. En el estudio siguiente, tendremos la malla con una contracción de 1.2 con 25 nodos y con  $\bar{\epsilon}_0 = 0.3\%$  como caso de referencia.

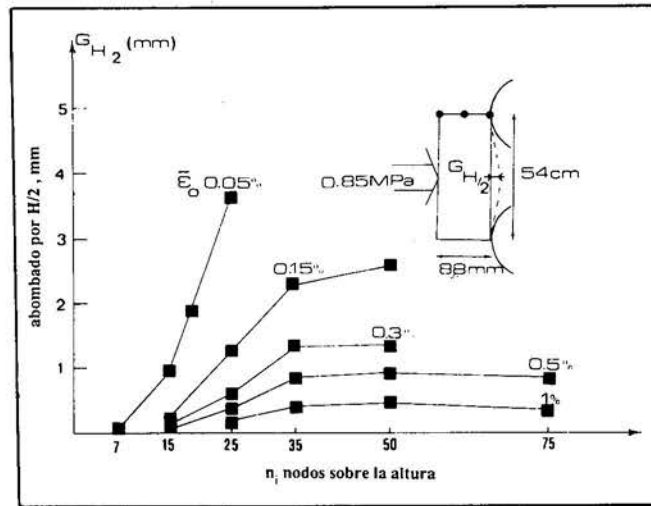


Figura 8. Aumento del abombado calculado con el modelo CC2D con mallas regulares haciendo crecer el número de nodos sobre la altura.

Un aumento del refinamiento de la malla en el espesor del casco, conduce a un valor más pequeño del abombado en el caso de que se prescriba  $v_z = 0$  en las secciones extremas (Figura 10, curva 1). La variación más importante entre  $n_j = 2$  y  $n_j = 3$  nodos en el espesor puede analizarse con un número más grande de nodos prescritos en las secciones extremas. La curva 2 de la Figura 10 muestra la influencia de la condición transversal de contorno ( $v_z$  es libre excepto por los nodos de contacto). Eso conduce a unos valores más pequeños y a una sensibilidad más pequeña con el refinamiento de

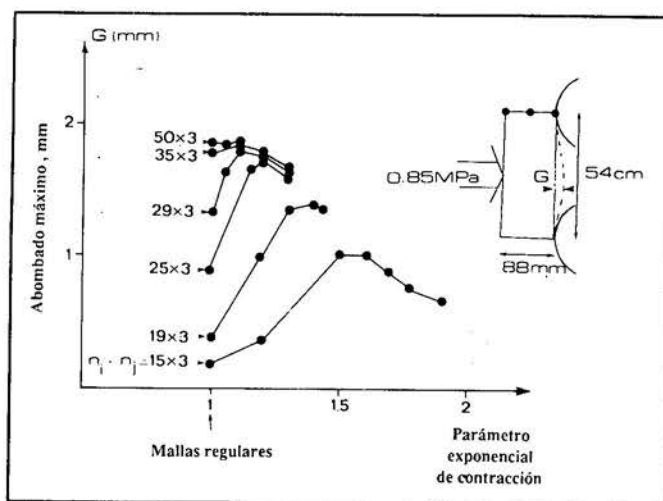


Figura 9. Aumento del abombado calculado con CC2D con mallas refinadas sobre la altura.

la malla. Las dos curvas 1 y 2 convergen al mismo valor del abombado de 1 mm. Se comprueba, por tanto, que las condiciones de contorno no son el factor principal en la sensibilidad del modelo numérico, como se supone en una parte anterior. Con los cálculos precedentes, el algoritmo converge en 8 iteraciones, cuando la variación de la posición de  $\Gamma_L$  y el valor relativo de  $r_c$  valen menos que  $10^{-4}$  (Figura 11).

**Nota:** La estabilidad numérica del algoritmo CC2D con el refinamiento de la malla, demuestra que el problema mecánico con superficies libres, tiene una solución estacionaria. La demostración matemática de la existencia y de la unicidad de esta solución para estos problemas no existe hasta la fecha.

### Influencia de los parámetros del proceso

Para resumir la influencia cuantitativa de los diferentes parámetros de la colada continua sobre el abombado máximo, algunos autores<sup>3,13</sup> proponen la ecuación analítica siguiente:

$$G = k(T) \frac{H^a p^b}{u^e K^d e^f} \quad (25)$$

donde  $k(T)$  depende solamente de la temperatura y  $a, b, c, d, f$  son exponentes que dependen de las propiedades del acero, como la sensibilidad a la velocidad de deformación  $m$ . Para el acero 18M5, el modelo CC2D conduce a (Figura 12)

$$G = k(T) \frac{H^{10.6} p^{4.7}}{u^{0.8} K^{4.7} e^{7.8}} \quad (26)$$

con pequeñas variaciones de los parámetros de colada alrededor de los datos numéricos y usando la malla óptima 25x3 nodos con 1.2 de contracción. Como se comprueba en la práctica, los dos parámetros más importantes para controlar el abombado, son la distancia entre dos rodillos  $H$  y el espesor del casco solidificado  $e$ , en acuerdo

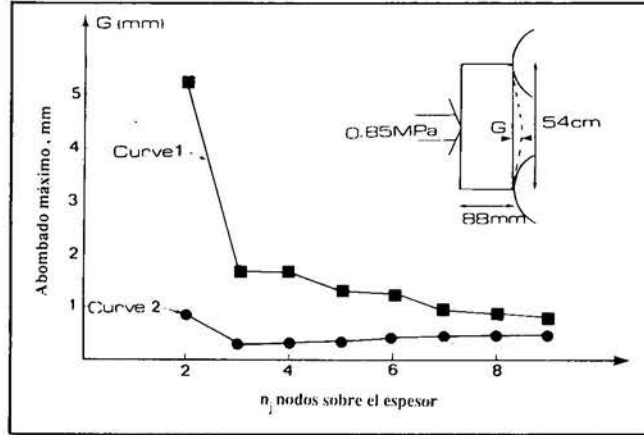


Figura 10. Aumento del abombado calculado con el modelo CC2D haciendo crecer el número de nodos en el espesor.  
 Curva 1:  $v_z = 0$  m/s impuesta sobre las secciones extremas.  
 Curva 2:  $v_z$  libre.

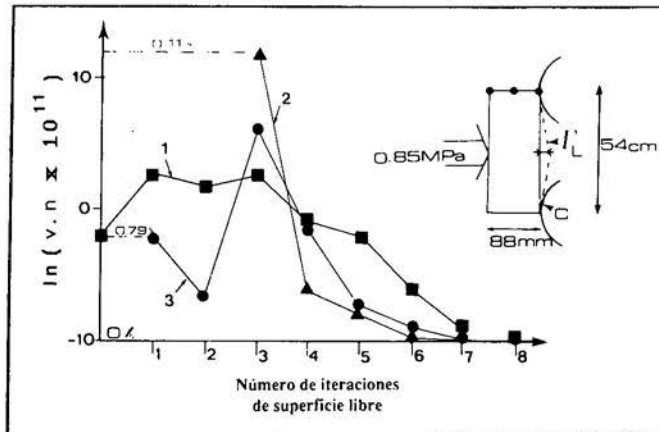


Figura 11. Convergencia del algoritmo CC2D.  
 Curva 1:  $\ln(\int_{\Gamma_L} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2 dl) \times 10^{11}$ .  
 Curva 2: Variación relativa de  $\Gamma_L$  entre las iteraciones de superficie libre,  
 $\left( \sum_{n=1}^{ni-1} \left[ \frac{z_n^{(r)} - z_n^{(r-1)}}{z_n^{(r)}} \right]^2 \right)^{1/2}$   
 Curva 3: Valor relativo de  $r_c, r_c/Glz$ .

con los valores exponenciales. Un aumento de la velocidad de colada  $u$  debe hacer bajar el abombado, pero, en la práctica, las condiciones de solidificación se modifican (disminución de espesor y temperatura de superficie más alta) haciendo subir la flexión del casco. No obstante, la tecnología de la colada con alta velocidad<sup>21</sup> permite estudiar tales configuraciones.

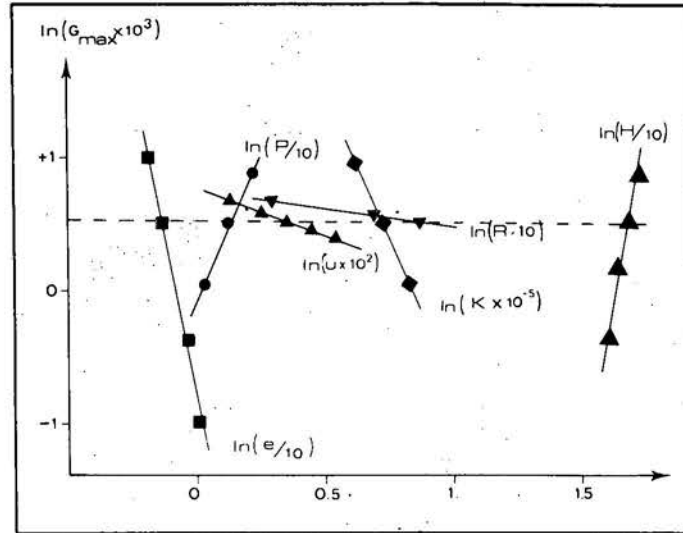


Figura 12. Influencia de los parámetros del proceso sobre el abombado.

### Comparación entre los dos modelos CC2D y CC3D

La Figura 13 demuestra la influencia del número de nodos sobre el ancho de la plancha (dos nodos sobre el lado estrecho y  $n_k - 2$  nodos sobre el lado ancho). Cuando  $n_k$  sube, los valores del abombado convergen a un valor más pequeño que este obtenido con CC2D, usando los mismos parámetros de proceso (Usinor Dunkerque en Tabla I). Esta tendencia se recuerda con las observaciones anteriores. Anchos más pequeños pueden estudiarse (Figura 13) con CC3D cuando se incumple la hipótesis de deformación plana (cuando el cociente entre el ancho de la placa y la distancia entre los rodillos de apoyo es más pequeña que 2 para la teoría elástica de flexión de viga). CC3D puede adaptarse para estudiar nuevas configuraciones como la colada de productos con sección cuadrada donde hay que calcular el abombado de todos los lados. Para un cálculo con CC3D con un VAX 750, el tiempo de cálculo es de 10 horas lo que no es tan grande de acuerdo con el modelo viscoplastico estacionario.

### Comparación entre los valores del abombado obtenidos con CC2D y otros valores publicados

En un estudio anterior<sup>4</sup>, se han comparado las medidas hechas sobre una colada piloto con la teoría de flexión de viga. Los parámetros de colada se presentan en la segunda columna de la Tabla I. Como se ha demostrado por Schwerdtfeger (ver Figura 14), el flujo viscoso primario con la ley 1 de la Tabla II da valores correctos del abombado con la distancia de los rodillos. Asimismo, se comprueba que el valor máximo de abombado aparece más cerca del rodillo de salida (Figura 15). Estas comparaciones confirman la validez de la hipótesis del comportamiento viscoplastico utilizado en diferentes artículos<sup>3,4,13</sup>.

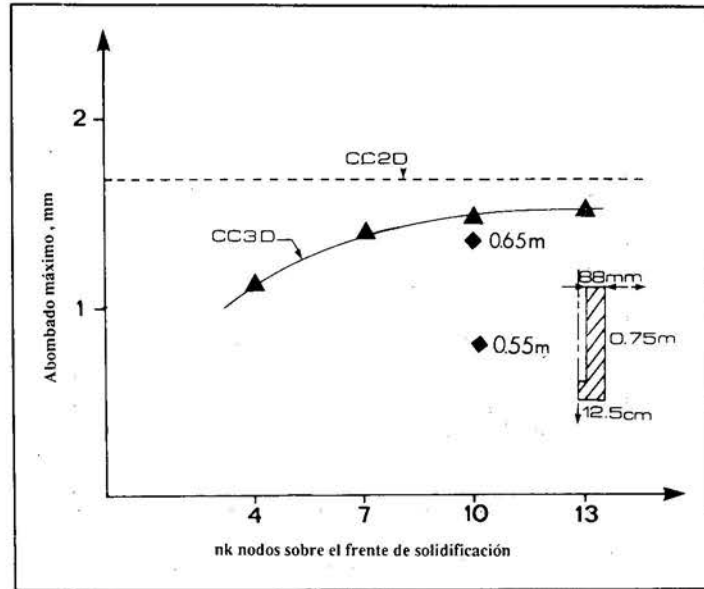


Figura 13. Aumento del abombado calculado con el modelo CC3D haciendo crecer el número de nodos sobre el lado ancho del casco.

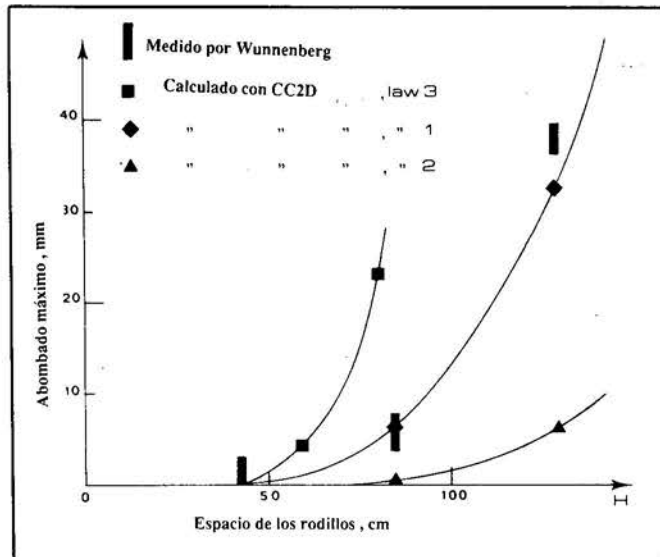


Figura 14. Comparación entre los valores experimentales del abombado y los resultados obtenidos con CC2D.

### CONCLUSIONES

En este estudio, hemos desarrollado dos modelos nuevos de elementos finitos viscoplásticos con superficies libres para calcular el abombado de la placa de acero entre dos rodillos de apoyo. Los ensayos numéricos prueban que los valores convergen

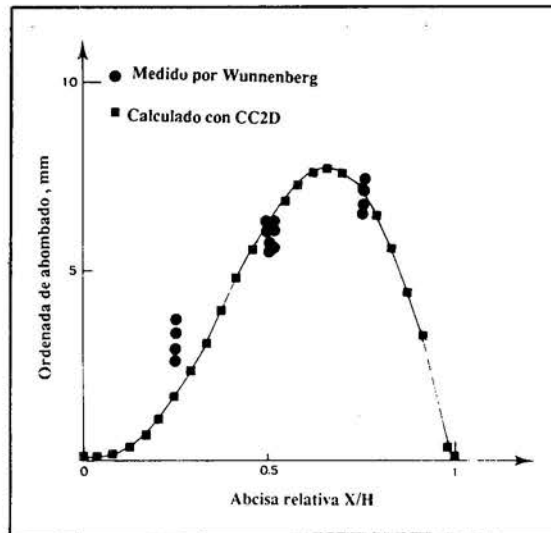


Figura 15. Forma del abombado calculado con CC2D y comparación con las medidas experimentales.

a un abombado estable cuando el refinamiento de la malla se incrementa en las tres direcciones. Usando datos industriales, hemos cuantificado la influencia de los parámetros del proceso sobre la extensión del abombado. El modelo CC3D sin la hipótesis de deformación plana generaliza el modelo CC2D para estudiar planchas más estrechas. La comparación con medidas experimentales confirma la hipótesis del comportamiento viscoplastico.

## NOMENCLATURA

$\Omega$	cuarto del casco solidificado de la placa
$Oxyz$	sistema cartesiano
$Ox$	dirección opuesta a la colada
$Oz$	dirección principal de abombado
$Oy$	dirección perpendicular a $Oxz$
$T$	temperatura en $\Omega$
$T_{solid}$	temperatura del frente solidificado
$T_{surf}$	temperatura de la superficie externa
$\dot{T}$	derivada temporal de $T$
$\mathbf{v}$	campo de velocidades en $\Omega$
$u$	velocidad de colada
$P$	presión ferrostática
$\Gamma_p$	superficie de solidificación
$\Gamma_L$	superficie externa libre
$\mathbf{n}$	vector normal a la superficie
$Gl_y$	ancho medio del lado mayor del casco
$Gl_z$	ancho medio del lado menor del casco

$H$	distancia entre dos rodillos de apoyo
$e$	espesor del casco solidificado
$R$	radio del rodillo de apoyo
$\sigma$	tensor de tensiones en $\Omega$
$s$	parte desviadora de $\sigma$
$p$	presión hidrostática en $\Omega$
$\dot{\epsilon}$	tensor de velocidades de deformación en $\Omega$
$\dot{\epsilon}$	parte desviadora de $\dot{\epsilon}$
$\dot{\bar{\epsilon}}$	$= \left( \frac{2}{3} \sum_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}$
$m$	sensibilidad a la velocidad de deformación
$\alpha$	coeficiente de dilatación lineal
$K$	consistencia en $\Omega$
$\bar{\epsilon}_0$	deformación media en $\Omega$
$\mathbf{g}$	vector de fuerzas de volumen
$\rho$	densidad del acero
$\mathbf{T}$	tensor de tensiones
$\mathbf{t}$	vector tangente a la superficie
$F(\mathbf{v})$	funcional penalizado
$\gamma$	coeficiente de penalización
$\mathbf{G}(\mathbf{v})$	vector gradiente del funcional
$\mathbf{H}(\mathbf{v})$	matriz Hessiana del funcional
$\mathbf{x}$	coordenadas cartesianas de un punto material en $\Omega$
$\xi$	coordenadas locales en el elemento de referencia
$\mathbf{V}_\lambda$	discretización del campo de velocidades
$\mathbf{X}_\lambda$	coordenadas nodales
$N_\lambda$	funciones de forma
$n_i$	número de nodos sobre la altura
$n_j$	número de nodos sobre el espesor
$n_k$	número de nodos sobre el frente solidificado
$n$	$= n_i \times n_j \times n_k$
$f(x) = z$	gráfico del flujo laminar
$x_0$	abscisa de los nodos de entrada
$C$	punto de contacto sobre el rodillo de salida
$r_C$	valor residual en $C$
$G$	valor del abombado

### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al "Institut de recherches de la sidérurgie Française" y la "Agence Française pour la Maitrise de l'Énergie", por el apoyo financiero para este estudio.

## REFERENCIAS

1. "Definitions and Causes of Continuous Casting Defects", *ISI Publication*, Vol. 106, (1987).
2. "Continuous Casting Processes", *Transaction ISIJ*, Vol. 25, pp. 686-706, (1985).
3. N.J. Canaghan y Ph. Cesselin, "Synthèse du 3ième Congrès International sur la Coulée Continue", *Revue de Métallurgie*, CIT, pp. 211-224, (1986).
4. A. Etienne, "Coulée et solidification de l'Acier", *Rapport final*, Convention CCE/CRM, 6210-50/2/201, (1977).
5. K. Miyazawa, "Computation of bulging of continuously cast slabs with simple bending theory", *Ironmaking and Steelmaking*, Vol. 2, pp. 68-74, (1979).
6. K. Wunnenberg, "Strangausbauchung zwischen Stützrollen beim Stranggiessen von Brammen", *Stahl u. Eisen*, Vol 98 (6), pp. 254-259, (1978).
7. A. Grill y K. Schwerdtfeger, "Finite Element Analysis of bulging produced by creep in continuously cast steel slabs", *Ironmaking and Steelmaking*, Vol. 3, pp. 131-135, (1979).
8. B. Barber, N.J. Hill y B.A. Lewis, "Calculation of bulging between support rolls during the continuous Casting of Steel", *International Conference on Numerical Methods in Thermal Problems*, Venecia, (1981).
9. B.A. Lewis, B. Barber y N.J. Hill, "Boundary condition difficulties encountered in the simulation of bulging during the Continuous Casting of Steel", *Appl. Math. Modelling*, Vol. 7, pp. 274-277, (1983).
10. B. Barber, B.A. Lewis y B.M. Leckenby, "Finite Element Analysis of strand deformation and strain distribution in solidifying shell during Continuous slab Casting", *Ironmaking and Steelmaking*, Vol. 12, no. 4. pp.171-175, (1985).
11. J.Y. Lamant, M. Larrecq, J.P. Birat, J.L. Hengsen, J.D. Weber y J.C. Dhuyvetter, "Study of slab bulging in a continuous caster", *Metals Society Conference*, Londres, (1985).
12. O.C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method in Engineering Science", Mc Graw-Hill, Londres, (1971).
13. R.I. Tanner, R.E. Nickell y R.W. Bilger, "Finite Element Methods for the solution of some incompressible non-newtonian fluid mechanics problems with free surfaces", *Comp. Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 6, pp. 155-174, (1975).
14. J.M. Ortega y W.C. Rheinbolt, "Iterative solution of non linear equations in several variables", Academic Press, Nueva York, (1970).
15. O.C. Zienkiewicz y P.N. Godbole, "Viscous incompressible flow with special reference to non newtonian (plastic) flow", *Finite Elements in Fluids*, Vol. 1, Cap. 2, J. Wiley & Sons, (1975).
16. T.R.J. Hughes, W.K. Liu y A. Brooks, "Finite Element Analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation", *Journal of Computational Physics*, Vol. 30, pp. 1-60, (1979).
17. O.C. Zienkiewicz y I.C. Cormeau, "Visco-plasticity - Plasticity and creep in elastic solids - An unified numerical solution approach", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, pp. 821-845.
18. A. Bern, J.L. Chenot, Y. Demay y J.P. Zolesio, "Numerical computation of the free boundary in non-newtonian stationary flows", *6th Conference in Finite Element Simulation of Flows*, pp. 385-389, Antibes, (1986).
19. "Approximate analysis of structures in the presence of moderately large deformation", *Quart. Appli. Math.*, Vol. 2 (1), pp. 49, (1954).
20. B. Rogberg, "An investigation on the hot ductility of steels by performing tensile tests on

- the formation of defects in Continuous Casting, Dpt of Casting of Metals, Royal Institute of Technology, Suppl. V, Stockholm, Sweden, (1982).
21. J. Mandel, Séminaire de plasticité et viscoplasticité, Ecole Polytechnique, (1972).