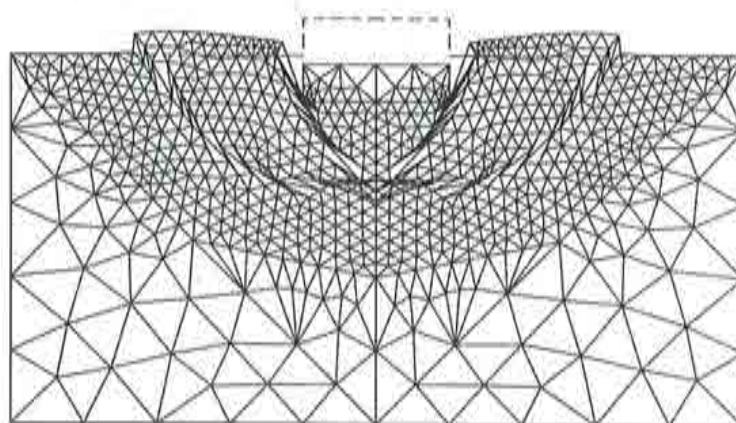


Localización de Deformaciones: Análisis y Simulación Numérica de Discontinuidades en Mecánica de Sólidos

O. Manzoli
X. Oliver
M. Cervera



Localización de Deformaciones: Análisis y Simulación Numérica de Discontinuidades en Mecánica de Sólidos

**O. Manzoli
X. Oliver
M. Cervera**

Monografía CIMNE Nº 44, Diciembre 1998

Edita:

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA
Edificio C1, Campus Norte UPC
Gran Capitán s/n
08034 Barcelona, España

Primera Edición, Diciembre 1998
© Los autores

ISBN: 84-89925-32-1
Depósito legal: B-4678-99

ÍNDICE

1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 INTRODUCCIÓN	1
1.2 ANTECEDENTES HISTÓRICOS	2
1.2.1 Teoría de la localización basada en la mecánica del continuo	2
1.2.2 Modelo teórico discreto de localización	4
1.2.3 Correlación entre las teorías continuas y discretas	5
1.2.4 Simulación de discontinuidad fuerte en el ámbito de la mecánica del continuo	6
1.3 OBJETIVOS	7
1.4 CONTENIDO DEL PRESENTE TRABAJO	9
2 DISCONTINUIDADES FUERTES EN PROBLEMAS UNIDIMENSIONALES	1
2.1 INTRODUCCIÓN	1
2.2 ECUACIONES DE GOBIERNO	2
2.3 ECUACIONES CONSTITUTIVAS DE ELASTO-PLASTICIDAD UNIDIMENSIONAL	3
2.3.1 Definiciones básicas	3
2.3.2 Condiciones de carga y descarga	5
2.3.3 Relación constitutiva incremental. Operador elasto-plástico tangente	5
2.4 CONDICIÓN DE LOCALIZACIÓN. ANÁLISIS DE BIFURCACIÓN DISCONTINUA	6
2.4.1 Cinemática y estática del problema	7
2.4.2 Análisis de bifurcación	8
2.5 EJEMPLO ILUSTRATIVO DE LOCALIZACIÓN UNIDIMENSIONAL	9
2.5.1 Descripción del problema	9

2.5.2	Dependencia de la solución con la malla de elementos finitos	11
2.6	ANÁLISIS DE DISCONTINUIDAD FUERTE	13
2.6.1	Cinemática	13
-	Cinemática de la discontinuidad débil	13
-	Cinemática de la discontinuidad fuerte	14
-	Cinemática representativa de la discontinuidad débil y fuerte	16
2.6.2	Análisis de soluciones exhibiendo discontinuidad fuerte	17
2.6.3	Interpretación física del módulo $\hat{H}$	20
2.7	RELACIÓN CONSTITUTIVA DISCRETA VERSUS CONTINUA EN LA APROXIMACIÓN DE LA DISCONTINUIDAD FUERTE	22
2.7.1	Aproximación de la discontinuidad fuerte vía relación constitutiva discreta	22
2.7.2	Aproximación de discontinuidad fuerte vía relación constitutiva de continuo	23
2.7.3	Unicidad de la solución obtenida a través de la aproximación de discontinuidad fuerte.	24
A.1	MODELOS BASADOS EN LA ENERGÍA CONSUMIDA. MODELOS DE FISURA DISTRIBUIDA	25
A.2	MODELOS DISCRETOS	26
3	SIMULACIÓN NUMÉRICA DE DISCONTINUIDADES FUERTES EN UNA DIMENSIÓN	1
3.1	INTRODUCCIÓN	1
3.2	REDEFINICIÓN DE LA DESCRIPCIÓN CINEMÁTICA	3
3.3	ECUACIONES DE GOBIERNO	7
3.4	FORMULACIÓN DÉBIL. MÉTODO DE LAS DEFORMACIONES MEJORADAS	10
3.5	APROXIMACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS	12
3.6	CONSTRUCCIÓN DEL CAMPO DE DEFORMACIÓN MEJORADA Y DEL ESPACIO DE SU VARIACIÓN	15
3.6.1	Campo de deformación mejorada	15

3.6.2	Espacio de las variaciones admisibles de la deformación mejorada (funciones de prueba)	18
3.7	ECUACIONES DEL M.E.F. BASADO EN DESPLAZAMIENTOS. FORMA LINEALIZADA	20
3.7.1	Solución del sistema de ecuaciones no lineal	23
-	Matriz tangente elemental	23
-	Integración de la deformación en el "tiempo"	24
-	Integración espacial vía cuadratura modificada	25
3.8	EJEMPLO NUMÉRICO REPRESENTATIVO	28
4	DISCONTINUIDADES FUERTES EN MEDIOS BIDIMENSIONALES	1
4.1	INTRODUCCIÓN	1
4.2	CINEMÁTICA DE MEDIOS DISCONTINUOS	3
4.2.1	Cinemática de discontinuidad débil	3
4.2.2	Cinemática de discontinuidad fuerte	5
4.2.3	Cinemática representativa de las discontinuidades débil y fuerte.	6
4.3	ECUACIONES DE GOBIERNO	7
4.4	ANÁLISIS DE DISCONTINUIDADES EN MEDIOS ELASTO-PLÁSTICOS	9
4.4.1	Ecuaciones constitutivas de la elasto-plasticidad	9
-	Relación constitutiva. Función de energía libre	9
-	Dominio elástico y criterio de fluencia	10
-	Ley de endurecimiento/ablandamiento	10
-	Regla de flujo	11
-	Condiciones de carga y descarga	11
-	Relación constitutiva incremental. Operador elasto-plástico tangente	13
4.4.2	Análisis de bifurcación discontinua. Condición de localización	14
4.4.3	Análisis de discontinuidad fuerte	18

4.4.4	Condición de discontinuidad fuerte	20
4.4.5	Ecuación constitutiva discreta o intrínseca	21
-	Algunos ejemplos en elasto-plasticidad bidimensional	22
4.4.6	Modelo de formación de discontinuidad fuerte en sólidos elasto-plásticos. Modelo de ancho de banda variable	26
-	Fase <i>pre-bifurcación</i> . Detección de la bifurcación discontinua	27
-	Fase <i>post-bifurcación</i> . Modelo de ancho de banda variable	29
4.4.7	Energía consumida en régimen de discontinuidad fuerte. Energía de fractura	34
4.5	ANÁLISIS DE DISCONTINUIDADES EN MEDIOS ELÁSTICOS DEGRADABLES	38
4.5.1	Formulación del modelo de daño continuo isótropo basado en deformaciones	38
-	Relación constitutiva secante. Función de energía libre	39
-	Evolución de la degradación definida en el espacio de tensiones efectivas	40
-	Evolución de la degradación definida en el espacio de tensiones	41
-	Regla de endurecimiento/ablandamiento	42
-	Formulación en tasa. Analogía con las ecuaciones constitutivas de elasto-plasticidad	44
-	Posibles criterios de degradación	48
4.5.2	Análisis de bifurcación discontinua. Condición de localización	49
4.5.3	Análisis de discontinuidad fuerte	51
4.5.4	Modelo de formación de discontinuidad fuerte en sólido elástico degradable. Modelo de ancho de banda variable	53
4.5.5	Energía consumida en régimen de discontinuidad fuerte. Energía de fractura.	53
B.1	INTRODUCCIÓN	57
B.2	ANÁLISIS DE BIFURCACIÓN DISCONTINUA	58

B.3	ANÁLISIS DE BIFURCACIÓN DISCONTINUA EN MEDIOS ELASTO-PLÁSTICOS	61
B.3.1	Resumen de las ecuaciones constitutivas	61
B.3.2	Análisis de bifurcación	63
B.3.3	Ángulo crítico y módulo de endurecimiento/ablandamiento crítico de bifurcación	66
B.3.4	Determinación analítica de H_{crit} y n_{crit} para problemas bidimensionales	66
-	Deformación plana	67
-	Tensión plana	70
5	SIMULACIÓN NUMÉRICA DE DISCONTINUIDADES FUERTES EN DOS DIMENSIONES	1
5.1	INTRODUCCIÓN	1
5.2	REDEFINICIÓN DE LA DESCRIPCIÓN CINEMÁTICA	2
5.3	ECUACIONES DE GOBIERNO	5
5.4	FORMA DÉBIL DE LAS ECUACIONES DE GOBIERNO	8
5.5	APROXIMACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS	9
5.5.1	Aproximación de la parte "regular" del campo de desplazamientos y de su variación admisible	9
5.5.2	Aproximación del campo de deformaciones mejoradas	14
5.5.3	Construcción del campo de variaciones admisibles de las deformaciones mejoradas	15
5.6	ECUACIONES DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS	18
5.7	INTEGRACIÓN TEMPORAL DE LAS DEFORMACIONES	19
5.8	INTEGRACIÓN ESPACIAL VÍA CUADRATURA MODIFICADA	20
5.9	ALGORITMO DE DETECCIÓN NUMÉRICA DE LA LÍNEA DE DISCONTINUIDAD	21
6	EJEMPLOS NUMÉRICOS I: MEDIOS ELASTO-PLÁSTICOS	1
6.1	INTRODUCCIÓN	1
6.2	TRACCIÓN Y/O COMPRESIÓN BIAxIAL	1

6.2.1	Descripción de problema	2
6.2.2	Regla de endurecimiento/ablandamiento	3
6.2.3	Modelo constitutivo elasto-plástico de Von Mises	4
-	Deformación plana	5
-	Tensión plana	12
6.2.4	Modelo constitutivo elasto-plástico de Ducker-Prager.	13
6.2.5	Modelo constitutivo elasto-plástico de Rankine asociado	16
6.2.6	Estudio de sensibilidad a la variación del parámetro k	18
6.2.7	Modelo de localización alternativo, mediante imposición de la bifurcación en la superficie límite de fallo	19
6.2.8	Efectos producidos al no considerarse la fase de transición	21
6.2.9	Estudio de la sensibilidad de la respuesta con respecto a la malla adoptada	23
6.3	APLICACIONES EN PROBLEMAS DE MECÁNICA DE SUELOS	29
6.3.1	Talud sometido a peso propio creciente	30
-	Talud vertical	31
-	Talud inclinado a 45°	32
6.3.2	Capa de suelo no drenado sometido a la presión ejercida por una zapata rígida	37
7	EJEMPLOS NUMÉRICOS II: MEDIOS ELÁSTICOS DEGRADABLES	1
7.1	INTRODUCCIÓN	1
7.2	MODELO ADOPTADO DE FORMACIÓN DE LA DISCONTINUIDAD FUERTE	1
7.2.1	Modelo de ancho de banda variable	2
7.2.2	Ley de ablandamiento	2
7.3	ENSAYO DE TRACCIÓN BIAxIAL	4
7.4	ENSAYOS DE FRACTURA DEL HORMIGÓN	7
7.4.1	Flexión de viga entallada sometida a fuerzas en tres puntos (<i>three point notched beam</i>)	8

7.4.2	Flexión de viga entallada sometida a fuerzas en cuatro puntos (<i>four point notched beam</i>)	10
8	CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN	1
8.1	RESUMEN DE LA INVESTIGACIÓN DESARROLLADA	1
8.2	CONCLUSIONES	3
8.3	PRINCIPALES APORTACIONES	5
8.4	FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN	6

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN

Debido a la necesidad de métodos de evaluación del grado de seguridad de sistemas estructurales en ingeniería, en las últimas décadas se ha producido un creciente interés por cuestiones experimentales, teóricas y computacionales asociadas al comportamiento de diversos materiales bajo acción de cargas extremas, especialmente en lo que se refiere a los mecanismos de degradación que pueden producir el colapso estructural.

El colapso de muchos materiales se produce frecuentemente como consecuencia de la formación de bandas de localización de deformaciones de ancho muy pequeño en comparación con las dimensiones estructurales del problema. Desde un punto de vista fenomenológico, la formación de dichas bandas de localización puede interpretarse como la concentración de defectos micro-estructurales, tales como descohesión, interconexión de micro-fisuras o micro-poros, deslizamientos de granos, etc., dependiendo del tipo del material. En materiales granulares, tales como arenas y otros tipos de suelos, las deformaciones se concentran en bandas de cizalladura (*shear bands*) cuyo ancho puede variar entre 10 a 20 veces la dimensión del grano. Las bandas de deslizamiento que se observan en los metales dúctiles son del orden de micrones y las macro-fisuras originadas a partir de la conjugación de micro-fisuras en materiales tales como hormigones, rocas o cerámicas, corresponden prácticamente a superficies de fallo.

Dada la complejidad intrínseca de los problemas de localización de deformaciones, sólo es posible realizar un estudio detallado de tales problemas mediante análisis numérico. A pesar de la gran cantidad de trabajos publicados en este tema en los últimos años y de las importantes contribuciones obtenidas en el ámbito de los modelos teóricos y numéricos para la simulación del comportamiento de diversos materiales, los avances conseguidos en el tema de localización son limitados en el momento presente. El presente trabajo se centra en el mencionado área de conocimiento, que constituye todavía un desafío en el contexto de la mecánica computacional.

1.2 ANTECEDENTES HISTÓRICOS

1.2.1 Teoría de la localización basada en la mecánica del continuo

La teoría clásica de la mecánica del continuo asocia el fenómeno de localización a la concentración de deformaciones inelásticas en bandas delimitadas por dos superficies paralelas a lo largo de las cuales se produce una discontinuidad en el campo de deformaciones (Rudnicki y Rice 1975; Rice 1976; Vardoulakis *et al.* 1978; Vardoulakis 1981). La formación de dichas superficies de discontinuidad, que se denominarán a lo largo de este trabajo superficies de *discontinuidad débil*, se debe a la pérdida de elipticidad local de las ecuaciones de equilibrio incrementales (bifurcación discontinua), caracterizada por la singularidad del *tensor de localización*. En el ámbito de la elasto-plasticidad clásica, local e independiente de la velocidad (*rate independent*), la singularidad del tensor de localización puede producirse al considerar régimen de ablandamiento de tensiones y/o reglas de fluencia no asociadas (Hill 1958; Rudnicki y Rice 1975; Hueckel y Maier 1977; Bigoni y Hueckel 1991, Ottosen y Runesson 1991).

Debido a que la teoría clásica de la mecánica del continuo no establece un límite para el valor del ancho de la banda de localización, salvo que exista alguna restricción cinemática adicional, la forma más estable de localización corresponde a la formación de bandas de ancho nulo (Bazant 1976; Ottosen 1986). Dentro del contexto de las aproximaciones numéricas por elementos finitos, las interpolaciones usuales de las variables del problema implican deformaciones continuas en el dominio del elemento. Dicha restricción cinemática impone que la superficie de discontinuidad débil sólo puede desarrollarse en las interfaces entre elementos y, por consiguiente, el dominio de un elemento corresponde a la mínima dimensión que el ancho de banda puede tener. Esta limitación impuesta por el modelo numérico (malla de elementos finitos) es la responsable de la fuerte dependencia respecto al tamaño y orientación de los elementos de la malla que se obtiene en predicciones numéricas de problemas de localización (Steinmann y Willam 1994). Con objeto de minimizar dichos efectos de dependencia, se han desarrollado algunas técnicas que buscan capturar la banda de localización mediante procesos de remallado adaptable (Ortiz y Quigley 1991; Zienkiewicz, Huang y Pastor 1995) o mediante enriquecimiento de las funciones interpoladoras elementales (Ortiz *et al.* 1987; Steinmann y Willam 1991).

Otro método muy empleado para obtener objetividad de la respuesta con respecto a la malla consiste en *regularizar* el medio continuo. La principal característica de dichos medios *regularizados* es la existencia de una *longitud intrínseca* que establece un límite para el valor del ancho de banda de localización (de Borst

et al. 1993). Una de las estrategias comúnmente empleadas con esta finalidad consiste en considerar el medio continuo no local, en el cual el comportamiento no lineal del material en un punto depende no sólo de la evolución de las deformaciones en dicho punto, sino también de la evolución de las deformaciones en los puntos vecinos. La formulación no local básica consiste en sustituir la relación local entre tensión y deformación por otra que relaciona la tensión en un punto con la deformación media dentro de un volumen de tamaño finito alrededor de dicho punto (Bazant, Belytschko y Chang 1984). Alternativamente, se puede considerar como variables no locales las variables internas irreversibles que gobiernan el comportamiento no lineal del material, tales como las deformaciones inelásticas o las variables de daño (Bazant y Lin 1988; Pijaudier-Cabot y Bazant 1987). Los modelos continuos de orden superior (*Higher-order continuum models*) consideran que el comportamiento de un punto viene gobernado por el tensor de deformaciones (o variables internas) en el punto y por sus sucesivos gradientes (Aifantis 1984; de Borst y Mühlhaus 1992; Pamin 1994), pudiendo considerarse como una aproximación de los modelos no locales. En el caso de medios elasto-plásticos de orden superior (de Borst y Mühlhaus 1992), la condición de fluencia en el espacio de tensiones viene definida en función del parámetro de endurecimiento α y también de su Laplaciano ($\phi(\sigma, \alpha, \nabla^2 \alpha) = 0$). En este caso, la formulación de elementos finitos se obtiene a partir de las formas débiles de las condiciones de equilibrio y consistencia plástica, interpolando tanto el multiplicador plástico como los desplazamientos mediante la misma discretización del dominio por elementos finitos. La regularización que se obtiene considerando el medio continuo micropolar de Cosserat (Cosserat 1909; Mühlhaus y Vadoulakis 1987; de Borst 1991, 1993; Steinmann y Willam 1991) puede interpretarse como un caso particular de regularización mediante el modelo continuo de orden superior. La introducción de la dependencia de la velocidad en el comportamiento no lineal del material también ha sido un recurso frecuentemente utilizado para regularizar el continuo (visco-plasticidad, Needleman 1988; Loret y Prevost 1990; Sluys y de Borst 1992).

Dichos métodos de regularización del continuo garantizan la convergencia de la respuesta con el refinamiento de la malla; sin embargo, presentan un alto coste computacional, dada la necesidad de emplear elementos de tamaño inferior al ancho de banda para capturar adecuadamente los elevados gradientes de deformaciones en la zona de localización, que en problemas prácticos, corresponde a una región de dimensiones muy pequeñas respecto a las dimensiones del problema. Con objeto de soslayar dicho inconveniente numérico, Belytschko *et al.* (1990) y Fish y Belytschko (1990) han propuesto una interpolación espectral basada en subdominios superpuestos a la malla de elementos finitos para reproducir los elevados gradientes de deformaciones dentro del dominio de los

elementos que contienen las regiones donde se produce la localización en medios visco-plásticos.

1.2.2 Modelo teórico discreto de localización

El modelo teórico discreto, muy empleado en el contexto de la mecánica de fractura no lineal, aborda el problema de localización de modo distinto. Desde un punto de vista macroscópico, la zona de localización se considera como una superficie de discontinuidad del campo de desplazamientos, que se denominará a lo largo de este trabajo superficie de *discontinuidad fuerte*. El comportamiento no lineal de la zona cercana al frente de formación de la fisura se simula mediante el modelo de fisura discreta cohesiva (Hillerborg *et al.* 1976; Hillerborg 1985; Planas y Elices 1992), en el cual se emplean *relaciones constitutivas discretas* entre tensiones y desplazamientos relativos entre los labios de la discontinuidad. Se considera en general que el comportamiento de la parte continua del sólido es elástico lineal y se utiliza un criterio de resistencia para detectar el inicio de la fisuración. En el caso de modo de apertura pura (Modo I), se establece un límite para la tensión principal máxima (criterio de Rankine) y la *relación constitutiva discreta* corresponde a una ley de reducción de la componente normal de la tensión en función de la apertura normal de la fisura. Dicha ley de reducción (o ablandamiento) se considera como una propiedad del material y se relaciona directamente con el concepto de *energía de fractura* (Hillerborg 1976; Planas y Elices 1992). Este hecho permite la simulación del llamado *efecto tamaño* (*size effect*, Bazant 1993) que se caracteriza por la disminución de la tensión nominal de rotura y de la ductilidad de la respuesta estructural en el régimen *post-crítico*, a medida que aumenta el tamaño de la muestra experimental.

Un modo de aproximar numéricamente los modelos discretos en el ámbito del Método de los Elementos Finitos (M.E.F.) consiste en considerar los labios de la discontinuidad como contornos adicionales del medio continuo. Puesto que en general la trayectoria de la discontinuidad no se conoce *a priori*, dicha aproximación exige sofisticadas técnicas de remallado con objeto de representar la discontinuidad que se forma a lo largo del análisis (Ingraffea y Saouma 1984; Bocca, Carpinteri y Valente 1990, 1991). Larsson y Runesson (1995) desarrollaron elementos de interfaz para analizar la propagación de la línea de discontinuidad. Se han propuesto también formulaciones de elementos finitos en las que se incorporan funciones de interpolación discontinuas capaces de describir la cinemática asociada a una discontinuidad en el interior del elemento, con objeto de evitar el elevado coste computacional asociado al proceso de remallado (Dvorkin *et al.* 1990; Dvorkin y Assanelli 1991; Lotfi y Shing 1994; Klisinski *et al.* 1991 y Ohlsson y Olofsson 1997).

1.2.3 Correlación entre las teorías continuas y discretas

La teoría de bandas de fisuración cohesiva (*crack band theory*), presentada por Bazant y Oh (1983), probablemente ha establecido por primera vez una correlación entre las teorías discreta y continua. En esta teoría se propone la utilización de una *relación constitutiva de continuo* (entre tensiones y deformaciones) para describir la degradación del material dentro de la zona donde se procesa la fisuración (*fracture process zone*). El ancho de banda de localización se considera una propiedad del material que, junto con el concepto de *energía de fractura*, definen la ley de ablandamiento de tensiones de la relación constitutiva del medio continuo. La ley de ablandamiento definida de este modo garantiza que la energía consumida en el proceso disipativo dentro de la banda es finita e igual a la energía que se consumiría utilizando el modelo teórico discreto. La conexión con este último modelo teórico queda aparente si se considera el caso límite en el cual el ancho de banda tiende a cero. En el contexto de M.E.F., se pueden incluir dentro de la teoría de bandas de fisuración las llamadas aproximaciones de fisuración distribuida o difusa (*smeared crack approach*) utilizadas por Willam *et al.* (1984), Cervera *et al.* (1987), Oliver *et al.* (1990), Oller (1988) y otros, en las que el ancho de banda, que define la ley de ablandamiento, se relaciona con el tamaño del elemento. En Oliver (1989) se deduce una expresión general para la definición de la llamada *longitud característica* del elemento, con objeto de estimar el ancho de la banda de localización en mallas irregulares. Dichas aproximaciones reducen substancialmente la dependencia del tamaño de los elementos utilizados en la malla, aunque, sin embargo, no son capaces de evitar la dependencia de la orientación o alineamiento de la malla (Oliver *et al.* 1990).

Con objeto de representar bandas de localización de ancho inferior al tamaño del elemento finito, una de las primeras aportaciones se debe a Pietruszczak y Mroz (1981), donde se considera que el comportamiento del material dentro de la banda de localización (de ancho constante) es rígido-plástico, mientras que el material fuera de la banda es elástico lineal. Las deformaciones plásticas que se desarrollan dentro de la banda se promedian en el dominio del elemento y, posteriormente, se añaden al campo de deformaciones elásticas. En Belytschko *et al.* (1988) se añade un campo de deformaciones discontinuo al campo de deformaciones del elemento para representar una banda de cizalladura de ancho constante y menor que el tamaño del elemento. El criterio de localización y la orientación de la banda se establecen mediante el análisis de bifurcación.

1.2.4 Simulación de discontinuidad fuerte en el ámbito de la mecánica del continuo

En el trabajo pionero de Simó, Oliver y Armero (1993) se demostró que, bajo ciertas hipótesis, el modelo teórico discreto puede interpretarse como el caso límite del modelo teórico continuo, cuando la banda de localización corresponde a un dominio de medida nula (superficie de *discontinuidad fuerte*). En dicha situación límite, las deformaciones en la banda adquieren un carácter distribucional (delta de Dirac) y, para que las ecuaciones del continuo elasto-plástico independiente del tiempo tengan sentido físico y matemático, las deformaciones plásticas, así como el inverso del módulo de ablandamiento, deben tener carácter distribucional. Para el caso unidimensional se demuestra que en la situación límite, la relación constitutiva del continuo elasto-plástico (entre tensión y deformación) da lugar a una relación discreta (entre tensión y salto) semejante a la que se emplea en los modelos discretos. Para la simulación numérica por elementos finitos, se indica el *método de deformaciones mejoradas* (*enhanced strain method*), propuesto por Simó y Rifai (1990) y Simó y Armero (1992), como la herramienta adecuada para representar el campo de deformaciones singulares en el dominio del elemento. En Simó y Oliver (1994) y Oliver (1996b) se presenta la formulación del método de elementos finitos para la representación de la discontinuidad fuerte en dos dimensiones. En Armero y Garikipati (1996) se presenta la extensión de la formulación para considerar deformaciones finitas en medios elasto-plásticos. Una de las principales ventajas de esta nueva clase de aproximación es que, incluso permaneciendo dentro del ámbito de la teoría continua, interpreta la localización como la concentración de deformaciones inelásticas en una zona de dimensión nula, sin que esto implique disipación nula. Como consecuencia, un único modelo constitutivo sirve tanto para describir el comportamiento de la parte continua del proceso de deformación como de la discontinua. Es importante resaltar que los modelos de fisuración cohesiva carecen de esta conexión entre los comportamientos en los regímenes continuo y discontinuo. Otro aspecto a resaltar en dicha clase de aproximación es que las formulaciones de elementos finitos desarrolladas permiten obtener importantes avances referentes a la independencia respecto de la malla utilizada, evidenciándose en los diversos trabajos desarrollados posteriormente tratando diferentes tópicos (Oliver 1995a, 1995b; Armero y Garikipati 1995; Oliver, Cervera y Manzoli 1997, 1998a, 1998b; Armero 1997; Larsson, Runesson y Akesson 1995; Larsson, Runesson y Sture 1996; Oliver y Pulido (1998) y otros).

Un resultado importante obtenido por Simó, Oliver y Armero (1993) es que la condición para la formación de la discontinuidad fuerte se asocia a la singularidad del tensor de localización correspondiente al módulo de ablandamiento nulo. Esto implica que la discontinuidad fuerte sólo es consistente con régimen de plasticidad

perfecta. Dicho resultado se ha obtenido también para medios con degradación elástica escalar (Oliver 1996a). Por tanto, se puede concluir que dicha clase de aproximación, tal como ha sido concebida originalmente, no aporta soluciones a situaciones más generales en que la bifurcación puede producirse en régimen de ablandamiento o, incluso, de endurecimiento (Ottosen y Runesson 1991).

1.3 OBJETIVOS

El objetivo principal del presente trabajo se puede resumir en extender la clase de aproximación de discontinuidad fuerte, originalmente propuesta por Simó, Oliver y Armero (1993), con objeto de contemplar la posibilidad del empleo de leyes de endurecimiento cualesquiera para representar el comportamiento del material. Además, se busca establecer el vínculo definitivo entre los modelos teóricos continuos, que consideran que la localización se asocia a la formación de superficies de *discontinuidad débil*, y la teoría discontinua, que asocia la localización con la formación de superficies de *discontinuidad fuerte*.

Para conseguir dichos objetivos, se supone que el proceso de localización comprende dos modos, continuo y discontinuo, pudiendo cada modo dominar en una determinada fase del proceso de colapso. Por ello, se introduce el concepto de *ancho de banda variable* para establecer la transición entre los modos de localización continuo y discontinuo. En líneas generales, el modelo de localización que se propone se basa en las siguientes hipótesis básicas:

- El comportamiento del material se describe mediante las ecuaciones constitutivas clásicas de medios continuos independientes de la velocidad de carga.
- El proceso de localización tiene lugar en un punto cuando se detecta la condición de localización, caracterizada por la singularidad del tensor de localización.
- En general el proceso de localización comienza en modo continuo, mediante la formación de una banda de localización de ancho finito comprendida entre dos superficies de *discontinuidad débil*. A partir del instante de localización, el proceso disipativo se limita al material del interior de la banda, mientras que los puntos de la vecindad, externos a la banda, experimentan descarga.
- A medida que crecen las deformaciones inelásticas en el interior de la banda, el ancho de banda disminuye gradualmente hasta colapsar en un dominio de medida nula (superficie de *discontinuidad fuerte*). El mecanismo de variación de la banda viene gobernado por principios energéticos, garantizando que la

energía consumida en la formación de la discontinuidad no sea nula.

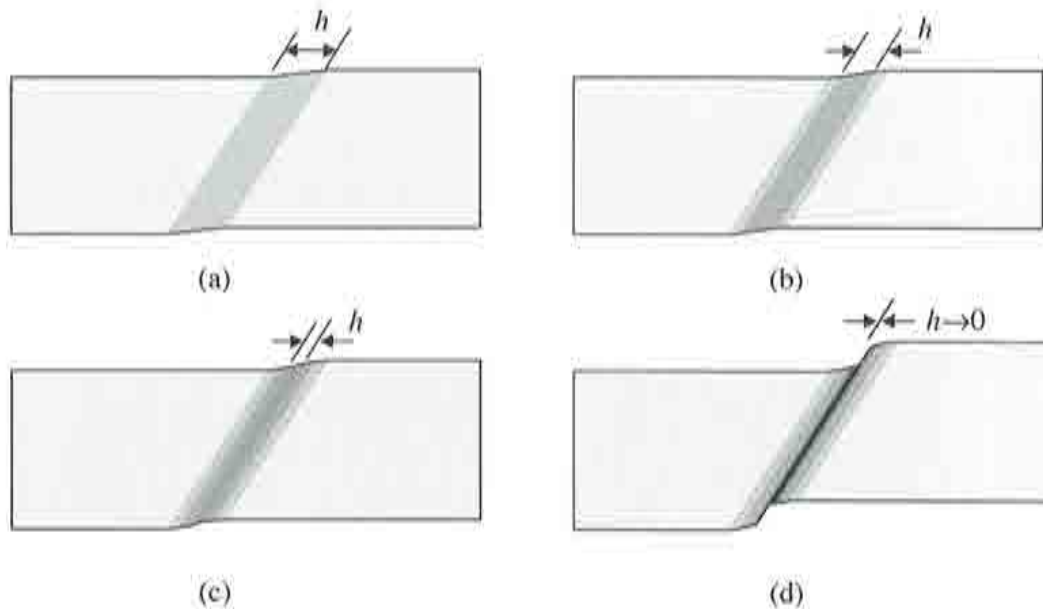


Figura 1.1 Modelo idealizado de formación de la discontinuidad fuerte; a) formación de la discontinuidad débil en el instante de bifurcación. b) y c) evolución del ancho de banda. d) discontinuidad fuerte.

La figura 1.1 ilustra el mecanismo de formación de la discontinuidad idealizado en un problema hipotético plano sometido a tracción simple. En este caso el proceso de localización se inicia mediante la formación de una banda de cizalladura (figura 1.1.a) que de modo gradual colapsa en una línea de discontinuidad fuerte (figura 1.1.d). Se han utilizado diferentes tonalidades para indicar los niveles de degradación del material durante el proceso de carga con objeto de ilustrar que el proceso disipativo sólo se produce en el interior de la banda que, en una fase avanzada del proceso de carga, corresponde a una línea de discontinuidad.

Para concretar el objetivo expuesto, se plantean los siguientes objetivos básicos parciales:

- Definición de la cinemática apropiada para representar la variación del ancho de banda de la localización.
- Análisis de bifurcación para los modelos constitutivos que se consideran en

el presente trabajo, con el propósito de detectar el instante de inicio de localización.

- Análisis de discontinuidad fuerte para establecer las condiciones consistentes con el régimen de discontinuidad fuerte y obtener información referida a la relación constitutiva discreta que emerge de la continua.
- Definición de un modelo de ancho de banda variable.
- Análisis termodinámico con objeto de establecer una correlación con los principios de la mecánica de fractura no lineal.
- Desarrollo del método de elementos finitos basado en el *método de las deformaciones mejoradas*, capaz de representar numéricamente el proceso de formación de la discontinuidad fuerte.
- Validación numérica de la aproximación propuesta.

La investigación desarrollada se ha centrado en deformaciones infinitesimales en medios elasto-plásticos y en medios con degradación elástica escalar.

1.4 CONTENIDO DEL PRESENTE TRABAJO

Para la materialización de los objetivos anteriormente mencionados, el presente trabajo se estructura en 8 capítulos.

El capítulo 2 introduce los aspectos básicos que intervienen en el problema de localización, utilizando la situación más sencilla correspondiente a medios unidimensionales elasto-plásticos independientes de la velocidad de carga. Se presentan, de forma resumida, las diferentes teorías de localización; se identifica la falta de unicidad de la solución localizada como responsable de las dificultades numéricas comúnmente encontradas, presentándose algunas técnicas empleadas corrientemente con el propósito de soslayar dichas dificultades. Luego se detalla la cinemática que se propone para la descripción del modelo de formación de la discontinuidad fuerte, procediéndose al análisis de bifurcación y de discontinuidad fuerte, del que se obtiene la correlación con la teoría discreta. Se demuestra que en régimen de discontinuidad fuerte la solución localizada es única y que la localización siempre se produce en régimen de discontinuidad fuerte y; por tanto, para problemas elasto-plásticos en una dimensión, se puede prescindir del modelo de variación de banda.

En el capítulo 3 se presenta la formulación del método de los elementos finitos para problemas unidimensionales basado en el *método de las deformaciones mejoradas*, exponiendo un ejemplo numérico donde se demuestra la capacidad

de la formulación para representar exactamente el comportamiento predicho por la teoría descrita en el capítulo 2, así como la completa independencia de la discretización del dominio espacial mediante elementos finitos.

En el capítulo 4 se extiende la teoría desarrollada en el capítulo 2 para casos bidimensionales en medios elasto-plásticos y con degradación elástica escalar. Mediante los análisis de bifurcación y de discontinuidad fuerte se demuestra que el modelo de variación de banda es fundamental en casos multidimensionales. Por ello, se propone un modelo de variación de banda en función de una variable interna tipo tensión. Se demuestra que en régimen de discontinuidad fuerte la relación constitutiva continua (entre tensiones y deformaciones) se transforma en una relación constitutiva del tipo discreta (entre tensiones y saltos) y se deducen las expresiones de las relaciones constitutivas discretas intrínsecas de algunos modelos constitutivos elasto-plásticos corrientes. Del análisis termodinámico de la energía consumida en la formación de la línea de discontinuidad, se obtiene la correlación con los principios de la mecánica de fractura no lineal.

En el capítulo 5 se generaliza la formulación de elementos finitos presentada en el capítulo 3 para contemplar la simulación de la formación de la discontinuidad fuerte en dos dimensiones, de acuerdo con la teoría propuesta en el capítulo 4.

En los capítulos 6 y 7 se presenta la validación del modelo teórico y de la aproximación numérica propuesta para simular el mecanismo de colapso de sistemas estructurales. El capítulo 6 se dedica a medios elasto-plásticos, centrando los estudios en la simulación de mecanismos de colapso en problemas geotécnicos. El capítulo 7 se centra en medios elásticos degradables, aplicándose, fundamentalmente, a problemas de fractura en hormigones.

Finalmente, en el capítulo 8 se presentan las conclusiones del estudio, se destacan las aportaciones originales y se sugieren futuras líneas de investigación.

Capítulo 2

DISCONTINUIDADES FUERTES EN PROBLEMAS UNIDIMENSIONALES

2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan los aspectos fundamentales involucrados en la formulación y aproximación numérica de la discontinuidad fuerte para problemas unidimensionales. El objetivo es, partiendo de la situación más sencilla, como es el caso unidimensional, introducir algunas consideraciones y conceptos básicos, así como plantear cuestiones que serán útiles para el entendimiento de la aproximación propuesta en el presente trabajo para contextos más generales. A pesar de que solamente se considera el modelo constitutivo elasto-plástico unidimensional, los aspectos teóricos presentados aquí son los mismos presentes en otros modelos locales e independientes de la velocidad (*rate independent*).

En los apartados 2.2 y 2.3 se describen las ecuaciones de gobierno y las ecuaciones constitutivas de medios elasto-plásticos unidimensionales. En el apartado 2.4, a través del *análisis de bifurcación discontinua*, se obtienen las condiciones necesarias para la aparición de la localización de deformaciones. En el apartado 2.5, mediante un ejemplo unidimensional ilustrativo, se muestra la falta de unicidad de la solución del problema de contorno en el régimen *post-bifurcación* y se asocia dicha falta de unicidad con la dependencia del tamaño de la malla de elementos finitos que se utiliza en la solución numérica del problema. En el apartado 2.6 se describen las cinemáticas de la discontinuidad débil y fuerte y se propone una cinemática alternativa y única para representar ambos tipos de discontinuidad. Posteriormente, a través del *análisis de discontinuidad fuerte*, se obtienen las condiciones necesarias para que el problema siga teniendo sentido físico y matemático en régimen de discontinuidad fuerte, y también se demuestra la conexión existente entre la *aproximación de discontinuidad fuerte* con las llamadas *aproximaciones discretas*. Bajo las condiciones consistentes con el régimen de discontinuidad fuerte, en el apartado 2.7, se proponen dos aproximaciones diferentes para describir la discontinuidad fuerte: vía relación constitutiva de continuo o vía relación constitutiva discreta. Además, se demuestra la unicidad de la solución localizada del problema ilustrativo

unidimensional. En el anexo A, se describen de forma resumida algunas estrategias alternativas comúnmente empleadas en la mecánica computacional para evitar la dependencia del tamaño de la malla de elementos finitos.

2.2 ECUACIONES DE GOBIERNO

En este apartado se presentan las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los sólidos bajo estados de carga estática o cuasi-estática (Malvern 1969).

Considérese el dominio unidimensional $\Omega \subset \mathbb{R}$ constituido por un material homogéneo y sea $u(x, t)$ el desplazamiento en un punto $x \in \Omega$ en el instante de tiempo t . El campo de deformaciones se escribe como

$$\boxed{\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}} \quad (2.1)$$

La formulación se restringe al caso cuasi-estático, donde los efectos inerciales se desprecian. En este caso, las tensiones deben satisfacer la ecuación de equilibrio local

$$\boxed{\frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} + f(x, t) = 0 \quad \text{en } \Omega} \quad (2.2)$$

donde $\sigma(x, t)$ representa el campo de tensiones y $f(x, t)$ representa las fuerzas volumétricas. Las condiciones de contorno del problema se especifican como

$$\boxed{\begin{array}{l} u = u^* \quad \text{en } \Gamma_u \\ \sigma = \sigma^* \quad \text{en } \Gamma_\sigma \end{array}} \quad (2.3)$$

donde $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$ y $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma$, y Γ representa el contorno compuesto por los dos extremos del dominio Ω .

Si se considera que la tensión es función del campo de deformaciones ε y, por consiguiente, de acuerdo con (2.1) es función del campo de desplazamientos u , entonces la ecuación diferencial (2.2) juntamente con las condiciones de contorno (2.3) definen el problema de valores de contorno, cuya única incógnita es el campo de desplazamientos $u(x, t)$.

En el próximo apartado se particulariza el problema, definiendo la tensión localmente en función de la deformación, a través del modelo constitutivo elasto-plástico.

2.3 ECUACIONES CONSTITUTIVAS DE ELASTO-PLASTICIDAD UNIDIMENSIONAL

Se describen a continuación las ecuaciones constitutivas de la elasto-plasticidad clásica local e independiente de la velocidad (*rate independent*) para problemas unidimensionales (Simó y Hughes).

2.3.1 Definiciones básicas

La relación incremental entre tensión y deformación puede escribirse de la forma

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = E\dot{\varepsilon}^e \quad (2.4)$$

donde ε^e y ε^p representan, respectivamente, la parte elástica y plástica de la deformación ε y E representa el módulo de elasticidad. El operador $(\bullet)$ indica la derivada de $(\bullet)$ con respecto al tiempo, es decir, $(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t}$ ¹. La parte plástica de la tasa de deformaciones, $\dot{\varepsilon}^p$, se define mediante la *regla de flujo*

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \bar{m} \quad (2.5)$$

donde $\bar{m}$ indica el sentido del *flujo plástico*, mientras que el *multiplicador plástico*, $\gamma \geq 0$, establece su magnitud.

El *dominio elástico*, donde no hay evolución de deformaciones plásticas, viene delimitado en el espacio de las tensiones por

$$\phi(\sigma, \mathbf{q}) < 0 \quad (2.6)$$

donde $\mathbf{q}$ representa el conjunto de variables internas que gobiernan la evolución del dominio elástico, delimitado por la *superficie de fluencia* que está formada por los puntos que cumplen la condición $\phi = 0$. Para el caso de endurecimiento isótropo, se define el *criterio de fluencia* de la forma

$$\phi(\sigma, q) = |\sigma| - \sigma_y + q \leq 0 \quad (2.7)$$

¹ En casos de problemas que no dependen del tiempo, la variable t indica un pseudo-tiempo relacionado al proceso de carga cuasi-estático. En este caso, se considera que las derivadas de un determinado campo respecto a t representan tasas de variación de dicho campo a lo largo del proceso de carga.

donde σ_y es la *tensión de fluencia* y $q \leq \sigma_y$ representa la *variable de endurecimiento/ablandamiento*, cuya evolución viene dada por

$$\dot{q} = -H(q) \dot{\alpha} \quad (2.8)$$

donde α es la *deformación plástica equivalente*, definida por

$$\dot{\alpha} = \gamma \bar{s} \quad (2.9)$$

y H es el *módulo de endurecimiento/ablandamiento*.

En general, se supone que $\bar{m}$ y $\bar{s}$ se obtienen de la función de potencial plástico, $\bar{\phi}(\sigma, q)$, haciendo

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \frac{\partial \bar{\phi}(\sigma, q)}{\partial \sigma} \\ \bar{s} &= \frac{\partial \bar{\phi}(\sigma, q)}{\partial q} \end{aligned}$$

En este capítulo se considera el caso particular de *plasticidad asociada* que se caracteriza por $\bar{\phi} = \phi$. Por tanto, a partir de la definición (2.7), se obtiene

$$\bar{m} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{si } \sigma > 0 \\ -1 & \text{si } \sigma < 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

y

$$\bar{s} = 1 \quad (2.11)$$

donde se concluye que

$$\boxed{\dot{\epsilon}^p = \gamma \text{sign}(\sigma)} \quad (2.12)$$

y

$$\dot{\alpha} = \gamma \quad (2.13)$$

Se clasifica el tipo de comportamiento elasto-plástico del material de acuerdo con el signo de H , o sea

$$\begin{cases} H > 0 & : \text{endurecimiento} \\ H = 0 & : \text{plasticidad perfecta} \\ H < 0 & : \text{ablandamiento} \end{cases}$$

2.3.2 Condiciones de carga y descarga

El comportamiento del material puede dejar de ser elástico cuando la trayectoria de tensión alcanza la superficie de fluencia. A partir de entonces, un eventual proceso de carga elasto-plástico se caracteriza por la evolución de la componente plástica de la deformación, que, según (2.5), implica $\gamma > 0$. A su vez, el comportamiento elástico o neutro se caracteriza por la no evolución de la deformación plástica, esto es, $\gamma = 0$.

Los comportamientos elástico y elasto-plástico, así como la naturaleza irreversible del flujo plástico, quedan completamente caracterizados por las *condiciones de carga-descarga de Kuhn-Tucker*

$$\gamma \geq 0 \quad \phi(\sigma, q) \leq 0 \quad \gamma \phi(\sigma, q) = 0 \quad (2.14)$$

conjuntamente con la *condición de persistencia*

$$\gamma \dot{\phi}(\sigma, q) = 0 \quad (2.15)$$

Dichas condiciones establecen que:

$$\begin{array}{ll} \phi < 0 & \implies \gamma = 0 \implies \dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} \quad (\text{elástico}) \\ \phi = 0 \left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi} < 0 \implies \gamma = 0 \implies \dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} \quad (\text{descarga elástica}) \\ \dot{\phi} = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} \gamma = 0 \implies \dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} \quad (\text{carga neutra}) \\ \gamma > 0 \implies \dot{\sigma} = E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \quad (\text{carga plástica}) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \quad (2.16)$$

2.3.3 Relación constitutiva incremental. Operador elasto-plástico tangente

En caso de carga plástica o neutra, la condición de persistencia, $\dot{\phi} = 0$, impuesta a (2.7) resulta

$$\boxed{\text{sign}(\sigma) \dot{\sigma} = -\dot{q} = \gamma H} \quad (2.17)$$

sustituyendo ahora la expresión del multiplicador plástico obtenido a través de (2.12) en la ecuación anterior, se tiene

$$\boxed{\dot{\sigma} = H \dot{\epsilon}^p} \quad (2.18)$$

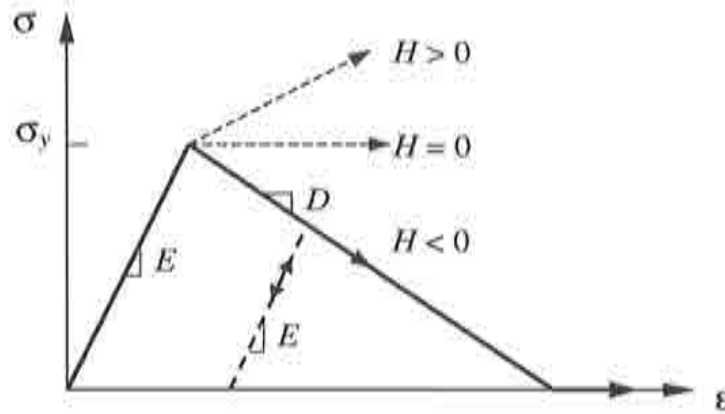


Figura 2.1 Curva tensión-desplazamiento típica del modelo constitutivo elasto-plástico 1D

Finalmente, reemplazando (2.18) en (2.4) se obtiene la relación en tasa entre tensiones y deformaciones para la situación de carga plástica,

$$\dot{\sigma} = \frac{E H}{E + H} \dot{\epsilon} = D \dot{\epsilon} \quad (2.19)$$

siendo $D = E H / (E + H)$ el *operador elasto-plástico tangente*.

En la figura 2.1 se muestra la curva de tensión versus deformación de un punto material, típica del modelo constitutivo presentado anteriormente. Nótese que en descarga desde cualquier punto el material se comporta elásticamente, siguiendo la relación constitutiva

$$\dot{\sigma} = E \dot{\epsilon}$$

2.4 CONDICIÓN DE LOCALIZACIÓN. ANÁLISIS DE BIFURCACIÓN DISCONTINUA

En este apartado se obtienen las condiciones para la aparición de la bifurcación discontinua, en la que el campo de deformaciones deja de ser continuo, mientras el campo de desplazamiento permanece continuo. Este tipo de discontinuidad es comúnmente referido como *discontinuidad débil*. Dicha forma de inestabilidad, presente en descripciones constitutivas continuas o macroscópicas (tensión versus deformación) de la deformación no elástica del material, ha sido utilizada como

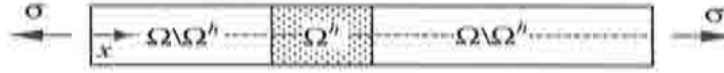


Figura 2.2 Ejemplo de localización unidimensional

hipótesis para explicar y caracterizar los cambios repentinos en el campo de deformación con la formación de bandas de deformación intensa, observados en diversos materiales (Nadai 1931; Hill 1958; Rudinicki y Rice 1975; Rice 1976; Ottosen y Runesson 1991; Ottosen, Runesson y Peric 1991).

Como se verá en los próximos capítulos, el análisis realizado en este apartado, a pesar de estar centrado en el modelo elasto-plástico unidimensional, es esencialmente el mismo que se aplica en modelos de elasto-plasticidad multidimensional o en modelos de daño continuo.

2.4.1 Cinemática y estática del problema

Considérese una barra cuyo eje se representa a través de un dominio unidimensional Ω homogéneo sometido a una carga monótona y proporcional. Se busca en qué momento del proceso de carga puede ocurrir bifurcación discontinua, tal que la tasa de deformación subsiguiente es discontinua a través de dos secciones transversales que confinan una banda de localización de deformación Ω^h (ver figura 2.2). En esta situación, la tasa de deformación en el interior de la banda de localización, $\dot{\epsilon}_{\Omega^h}$, se expresa de la forma

$$\dot{\epsilon}_{\Omega^h} = \dot{\epsilon} + \beta \quad (2.20)$$

donde $\dot{\epsilon}$ es la tasa de deformación en el exterior de la banda y β es el modo bifurcado de la tasa de deformación. Para que el cuerpo siga en equilibrio, la tasa de la tensión debe ser continua a través de los bordes de la banda de localización, es decir

$$\dot{\sigma}_{\Omega \setminus \Omega^h} - \dot{\sigma}_{\Omega^h} = 0 \quad (2.21)$$

donde $\dot{\sigma}_{\Omega \setminus \Omega^h}$ y $\dot{\sigma}_{\Omega^h}$ representan las tasas de tensiones dentro y fuera de la banda, respectivamente.

2.4.2 Análisis de bifurcación

Considérese que antes de la bifurcación la barra fluye plásticamente de manera uniforme con tensiones y deformaciones también uniformes. Suponiendo que el comportamiento constitutivo del material no depende de la velocidad, en la inminencia de la localización las tasas de las tensiones dentro y fuera de la banda se describen de la forma

$$\dot{\sigma}_{\alpha^h} = D_{\alpha^h} (\dot{\bar{\epsilon}} + \beta) \quad y \quad \dot{\sigma}_{\alpha \setminus \alpha^h} = D_{\alpha \setminus \alpha^h} \dot{\bar{\epsilon}} \quad (2.22)$$

donde D_{α^h} y $D_{\alpha \setminus \alpha^h}$ son los operadores constitutivos tangente dentro y fuera de la banda, respectivamente. La condición de equilibrio (2.21) impone entonces que

$$(D_{\alpha^h} - D_{\alpha \setminus \alpha^h}) \dot{\bar{\epsilon}} + D_{\alpha^h} \beta = 0 \quad (2.23)$$

Suponiendo que el mismo operador tangente D gobierna el comportamiento del material dentro y fuera de la banda (coincidiendo con el concepto de sólido lineal de comparación de Hill 1958), la expresión anterior se transforma en

$$D \beta = 0 \quad (2.24)$$

En el contexto de la teoría de plasticidad esta suposición corresponde a la bifurcación con carga plástica dentro y fuera de la banda. Sustituyendo la expresión del operador elasto-plástico tangente de la ecuación (2.19) en la ecuación (2.24), se obtiene

$$\frac{EH}{E+H} \beta = 0 \quad (2.25)$$

lo que quiere decir que la condición necesaria para la bifurcación del tipo plástico/plástico ($\beta \neq 0$ en (2.25)) es $H = 0$. En el anejo B (capítulo 4) se demuestra que valores negativos del módulo H hacen con que la bifurcación ocurra con descarga elástica fuera y carga plástica dentro de la banda (véase también Runesson *et al.* 1991). Por tanto, la condición necesaria para que se produzca la bifurcación con aparición de discontinuidad en el campo de (la tasa de) deformaciones es

$$\boxed{H \leq 0} \quad (2.26)$$

En el caso de ablandamiento, la bifurcación solamente puede ocurrir con descarga elástica fuera de la banda. Para el caso de plasticidad perfecta, la bifurcación puede ocurrir con carga plástica o comportamiento neutro fuera de la banda.

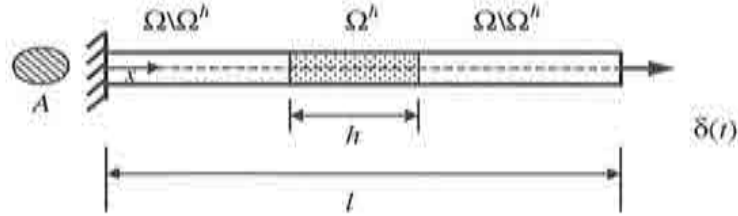


Figura 2.3 Ejemplo ilustrativo de localización unidimensional.

Observación 2.1 En ningún momento se ha especificado el ancho de la posible banda de localización y, en principio, éste puede tener cualquier valor. Por tanto, se puede concluir que dicho modelo constitutivo no introduce ninguna longitud intrínseca asociada a la dimensión del ancho de la banda. Este hecho es típico de los medios continuos clásicos locales e independientes de la velocidad (*rate independent*) (De Borst *et al.* 1993) y, como se verá en el próximo apartado, es el responsable de la falta de unicidad de la solución del problema de contorno.

2.5 EJEMPLO ILUSTRATIVO DE LOCALIZACIÓN UNIDIMENSIONAL

2.5.1 Descripción del problema

Considérese el ejemplo hipotético de la figura 2.3, donde una barra cuyo eje se representa por el dominio unidimensional $\Omega = [0, l]$ se somete a un desplazamiento creciente en su extremo $\delta(t)$. Suponiendo que la sección transversal es constante y que no hay fuerzas volumétricas, la condición de equilibrio (2.2) establece que el campo de tensiones $\sigma(x, t)$ es homogéneo en Ω . Considérese también que el comportamiento del material se describe por el modelo constitutivo elasto-plástico con ablandamiento, o sea, con $H < 0$.

Naturalmente, después de excederse la tensión de fluencia σ_y el material deja de presentar comportamiento elástico y una posible solución es que todos los puntos fluyan plásticamente de forma idéntica, manteniendo el campo de deformación, $\varepsilon(x, t)$, homogéneo en Ω . Como se vio en el apartado anterior, para el caso de ablandamiento, esta solución es inestable y cualquier perturbación puede dar

lugar a una solución localizada, donde solamente una parte del dominio fluye plásticamente, mientras las demás partes descargan elásticamente. En problemas reales, donde los campos de tensiones y deformaciones son raramente uniformes, la localización es inducida justamente por la falta de homogeneidad de dichos campos.

Para excluir la posibilidad de solución homogénea, considérese una reducción infinitesimal de la tensión de fluencia en una parte del dominio $\Omega^h \subset \Omega$ de la figura 2.3. Considerando que el campo de deformación en Ω^h sigue homogéneo en todo el proceso de carga, la única solución posible se caracteriza por carga plástica en Ω^h y descarga elástica en $\Omega \setminus \Omega^h$:

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{\Omega \setminus \Omega^h} = \frac{\dot{\sigma}}{E} & \text{(campo primario en descarga elástica)} \\ \dot{\epsilon}_{\Omega^h} = D^{-1} \dot{\sigma} = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{H} \right) \dot{\sigma} & \text{(campo bifurcado en carga plástica)} \end{cases}$$

válido para $t > t_B$, donde t_B es el instante de bifurcación, que, en este caso, coincide con el inicio del comportamiento elasto-plástico, y $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_{\Omega \setminus \Omega^h} = \dot{\sigma}_{\Omega^h}$.

La tasa del alargamiento total viene entonces dado por

$$\dot{\delta} = (l - h) \dot{\epsilon}_{\Omega \setminus \Omega^h} + h \dot{\epsilon}_{\Omega^h} = \dot{\sigma} \left(\frac{l}{E} + \frac{h}{H} \right) \quad \text{para } t > t_B$$

Obsérvese que en el desarrollo anterior se ha supuesto que el campo de deformaciones en Ω^h es homogéneo, incluso durante carga plástica.

Para instantes anteriores a la bifurcación, el comportamiento del material es elástico y el campo de (la tasa de) deformaciones es homogéneo en Ω . Por tanto, la tasa del alargamiento viene dado por

$$\dot{\delta} = \dot{\epsilon} l = \frac{\dot{\sigma}}{E} l \quad \text{para } t < t_B$$

Denotando por F la reacción en la extremidad donde se impone el desplazamiento y por A el área de la sección transversal, se puede concluir que

$$\dot{F} = \dot{\sigma} A \implies \begin{cases} \dot{F} = A \frac{E}{l} \dot{\delta} & \text{para } t < t_B \\ \dot{F} = A \frac{EH}{Hl + Eh} \dot{\delta} & \text{para } t > t_B \end{cases} \quad (2.27)$$

La figura 2.4.a muestra la multiplicidad de soluciones posibles generadas por (2.27), dependiendo de la relación $n = l/h$, entre la longitud del dominio Ω y el ancho de la banda de localización.

2.5.2 Dependencia de la solución con la malla de elementos finitos

En el contexto de M.E.F., la parte del dominio Ω^h , para la cual se considera un campo de deformación homogéneo, correspondería al dominio de uno de los elementos finitos utilizados en la discretización de Ω , puesto que las interpolaciones estándar del campo de desplazamientos establecen un campo de deformación continuo en el dominio de cada elemento, aunque posiblemente discontinuo en las interfaces entre elementos. Así, se puede concluir que el tamaño típico de la discretización utilizada en la aproximación numérica estándar por el M.E.F. establece la longitud mínima de la banda de localización. Considerándose una subdivisión del dominio Ω en elementos finitos de longitud h , $n = l/h$ indicaría el número de elementos utilizados en la discretización y, por tanto, la figura 2.4.a pone de manifiesto la dependencia de la respuesta con la malla de elementos finitos adoptada.

En los últimos tiempos se han propuesto diversas estrategias con el objetivo de evitar la dependencia del tamaño de la malla. Una de ellas, muy empleada en las llamadas aproximaciones de fisura distribuida (*smearred crack approach*), consiste en adoptar el módulo de ablandamiento proporcionalmente al tamaño del elemento, de manera de garantizar la correcta energía disipada (Bazant y Oh 1983; Willam *et al.* 1984; Cervera *et al.* 1987; Oliver *et al.* 1990; Oller 1988). Por otro lado, en los llamados *modelos de interfaz o discretos*, utilizados en la representación de la propagación de fracturas en hormigones o rocas (Hillerborg *et al.* 1976; Planas y Elices 1992), se interpreta la banda como una interfaz discontinua cuyo comportamiento se representa a través de *relaciones constitutivas discretas* entre tensiones y desplazamientos relativos entre sus labios. En el anexo A de este capítulo se presentan ambas aproximaciones de manera más detallada, y se las aplica al problema ilustrativo unidimensional estudiado en este apartado.

Obsérvese que los modelos discretos son consistentes con el planteamiento que considera que, después de la bifurcación, la forma de localización más estable y más aceptable físicamente corresponde a la formación de bandas de localización de ancho nulo ($h \rightarrow 0$) (Bazant 1976 y Ottosen 1986), es decir, superficies de discontinuidades en el campo de desplazamientos (*discontinuidades fuertes*). Nótese que en el ejemplo anterior se supuso que el campo de desplazamiento en la banda de localización Ω^h es homogéneo, sin embargo dicha restricción carece

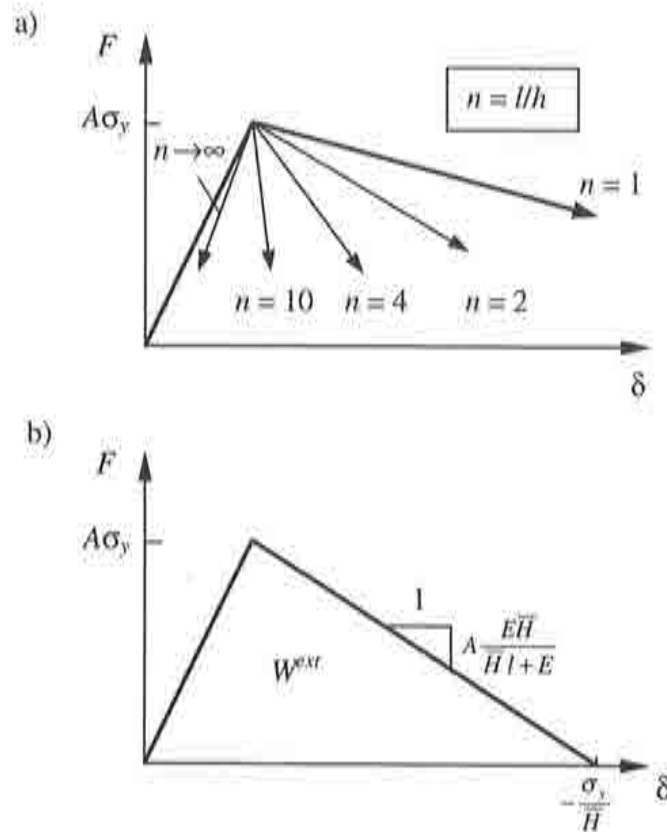


Figura 2.4 Solución del ejemplo de tracción uniaxial 1D: a) Dependencia de la anchura de la banda. b) Solución única de la discontinuidad fuerte.

de sentido físico. En realidad las soluciones obtenidas para cualquier valor da dimensión de Ω^h diferente de cero no es estable, puesto que la parte Ω^h , que fluye plásticamente con ablandamiento, a su vez es susceptible de bifurcación. Este hecho demuestra la tendencia natural de que la localización tenga lugar en un espacio de medida nula. El modelo numérico del problema por el M.E.F. estándar aproxima dicha solución, puesto que las deformaciones se concentran en el dominio de un elemento, que es la mínima dimensión establecida por la discretización.

Naturalmente, la localización en banda de dimensión nula genera deformaciones no acotadas, que, para casos de materiales elasto-plásticos con ablandamiento, dan lugar a la formación de superficies de discontinuidades sin disipación plástica (véase el caso de $n \rightarrow \infty$ en la figura 2.4.a), lo que no refleja el comportamiento

físico de los materiales (Bazant y Belytschko 1985). En los modelos discretos este inconveniente no existe ya que el concepto de deformación se abandona en la interfaz, donde el comportamiento del material pasa a representarse por relaciones constitutivas discretas (tensión versus desplazamiento) con ablandamiento de tensiones.

En el próximo apartado, a través del *análisis de discontinuidad fuerte* (Simó, Oliver y Armero 1993), se obtendrán las condiciones necesarias para que el comportamiento del material en el interior de una banda de localización de dimensión nula, al contrario de los modelos discretos, también puedan representarse a través de relaciones constitutivas continuas (tensión versus deformación), manteniendo el sentido físico y matemático del problema de contorno.

2.6 ANÁLISIS DE DISCONTINUIDAD FUERTE

2.6.1 Cinemática

Considérese nuevamente la barra de sección transversal A cuyo eje pertenece al dominio unidimensional $\Omega \subset \mathbb{R}$ formado por los puntos materiales x . Considérese también una superficie material S , correspondiente a la sección transversal situada en el punto $x_s \in \Omega$, que divide el dominio Ω en dos partes Ω^+ y Ω^- (véase la figura 2.5)

Se describen a continuación las cinemáticas de los posibles tipos de discontinuidad en los campos de desplazamientos y deformaciones (Oliver, Cervera y Manzoli 1998a, 1998b).

Cinemática de la discontinuidad débil

La discontinuidad débil se caracteriza por la presencia de discontinuidad en el campo de deformaciones mientras que el campo de desplazamientos es continuo. Claramente, dicha cinemática es consistente con la presencia de bandas de localización de longitud finita, como muestra la figura 2.5.a.

El campo de la tasa de desplazamientos localizado para este caso puede descomponerse de la forma (véase figura 2.5.a)

$$\dot{u}(x, t) = \dot{\bar{u}}(x, t) + [\![\dot{u}]\!](t) \mathcal{H}_{\Omega^h}(x) \quad (2.28)$$

donde $\bar{u}$ es la *parte regular del campo de desplazamientos*, $[[u]]$ es un campo de desplazamientos considerado uniforme en Ω y $\mathcal{H}_{\Omega^h}$ es la *función rampa*, tal que $\mathcal{H}_{\Omega^h} = 0 \ \forall x \in \Omega^-$, $\mathcal{H}_{\Omega^h} = 1 \ \forall x \in \Omega^+$ y varía linealmente entre 0 y 1 en la banda Ω^h , como muestra la figura 2.5.a. Nótese que en este caso $[[u]]$ representa la diferencia entre los desplazamientos en la superficies $\mathcal{S}^+$ y $\mathcal{S}^-$ que delimitan la banda Ω^h .

El campo de la tasa de deformaciones compatible con (2.28) viene dado por

$$\dot{\varepsilon}(x, t) = \frac{\partial \dot{u}(x, t)}{\partial x} = \dot{\bar{\varepsilon}}(x) + [[\dot{u}]](t) \frac{1}{h} \mu_{\Omega^h}(x) \quad (2.29)$$

donde $\bar{\varepsilon} = \partial \bar{u} / \partial x$ representa la *parte primaria o regular del campo de deformaciones* y $\mu_{\Omega^h} = \partial \mathcal{H}_{\Omega^h} / \partial x$ es la *función de colocación* puesta en Ω^h ($\mu_{\Omega^h} = 1 \ \forall x \in \Omega^h$ y $\mu_{\Omega^h} = 0 \ \forall x \in \Omega \setminus \Omega^h$).

Cinemática de la discontinuidad fuerte

En el caso de discontinuidad fuerte, se considera que el campo de desplazamientos es discontinuo en la superficie $\mathcal{S}$. Dicha cinemática se obtiene haciendo el ancho de la banda h tender a cero en la cinemática de discontinuidades débiles, descrita anteriormente. Así, la banda Ω^h colapsa en la superficie $\mathcal{S}$, denominada ahora superficie de discontinuidad (véase figura 2.5.b), y la cinemática correspondiente viene dada por

$$\dot{u}(x, t) = \dot{\bar{u}}(x, t) + [[\dot{u}]](t) \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(x) \quad (2.30)$$

y

$$\dot{\varepsilon}(x, t) = \frac{\partial \dot{u}(x, t)}{\partial x} = \dot{\bar{\varepsilon}}(x, t) + [[\dot{u}]](t) \delta_{\mathcal{S}}(x) \quad (2.31)$$

donde ahora $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\Omega^h}$ representa la *función escalón* en $\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = 0 \ \forall x \in \Omega^-$ y $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = 1 \ \forall x \in \Omega^+$ (véase figura 2.5.b) y $\delta_{\mathcal{S}} = \lim_{h \rightarrow 0} \mu_{\Omega^h} / h$ representa la *distribución de Dirac* situada en $\mathcal{S}$, que se caracteriza por

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{S}} &= 0 & \text{en } \Omega \setminus \mathcal{S} \\ \delta_{\mathcal{S}} &\rightarrow \infty & \text{en } \mathcal{S} \end{aligned} \quad (2.32)$$

siendo que

$$\int_{\Omega} \delta_{\mathcal{S}} \varphi \, dx = \varphi|_{x=\mathcal{S}} \quad \forall \varphi \in C^{\infty}(\Omega) \quad (2.33)$$

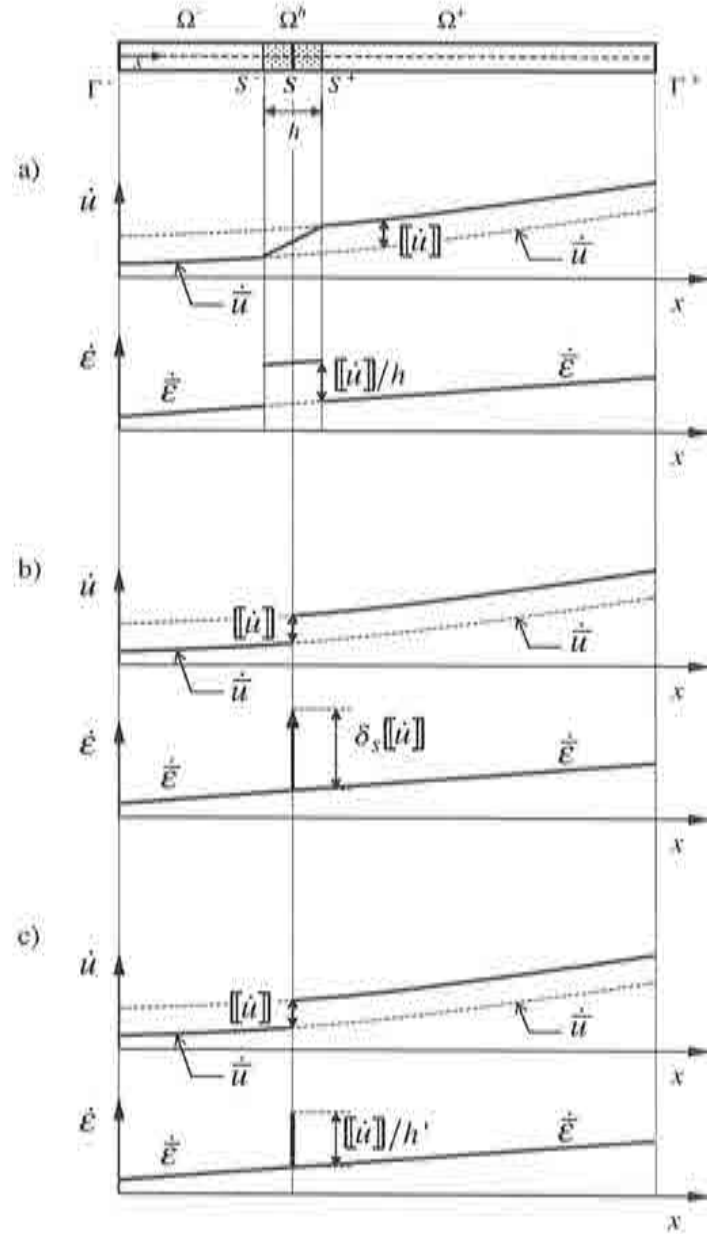


Figura 2.5 Cinemática: a) Discontinuidad débil. b) Discontinuidad fuerte. c) Cinemática regularizada de la discontinuidad fuerte.

Nótese que en este caso $\llbracket u \rrbracket$ representa el salto del campo de desplazamiento en S (véase la figura 2.5.b).

Observación 2.2 La presencia de la distribución de Dirac en (2.31) pone de manifiesto el carácter distribucional y no acotado del campo de deformaciones compatible con el campo de desplazamiento discontinuo (2.30).

Cinemática representativa de la discontinuidad débil y fuerte

A efectos de la formulación del modelo numérico que se hará más adelante, considérese la descripción cinemática alternativa descrita por

$$\dot{u}(x, t) = \dot{\bar{u}}(x, t) + \llbracket \dot{u} \rrbracket(t) \mathcal{H}_S(x) \quad (2.34)$$

y

$$\dot{\varepsilon}(x, t) = \dot{\bar{\varepsilon}}(x, t) + \llbracket \dot{u} \rrbracket(t) \frac{1}{h'(t)} \mu_S(x) \quad (2.35)$$

donde $\dot{\bar{\varepsilon}} = \partial \dot{\bar{u}} / \partial x$, μ_S es la *función de colocación* en S ($\mu_S = 1$ en S y $\mu_S = 0$ en $\Omega \setminus S$) y h' es el *ancho ficticio* de la banda de localización, que en principio, puede variar a lo largo del tiempo.

Como puede verificarse (véase la figura 2.5.c), dicha descripción cinemática se aproxima a la correspondiente a la discontinuidad débil cuando h es suficientemente pequeño comparado con el tamaño típico de Ω . En este caso, h' es una aproximación de h . Además, se puede considerar que dicha cinemática representa la forma regularizada de la correspondiente a la discontinuidad fuerte, puesto que, cuando $h' \rightarrow 0$, el campo de la tasa de deformaciones (2.35) degenera en (2.31) (véase la figuras 2.5.a, 2.5.b y 2.5.c).

Observación 2.3 Salvo cuando $h' \rightarrow 0$, el campo de deformación (2.35) no es compatible con el campo de desplazamiento descrito en (2.34), es decir, en general $\varepsilon \neq \partial u / \partial x$.

Observación 2.4 Aunque el campo de desplazamientos presenta una discontinuidad, en general el campo de deformaciones es acotado (salvo cuando $h' \rightarrow 0$).

Dada la versatilidad de esta descripción cinemática, en los siguientes apartados se la utilizará en la representación de la discontinuidad débil y fuerte, donde ésta última se obtiene haciendo tender h' a cero.

2.6.2 Análisis de soluciones exhibiendo discontinuidad fuerte

Primeramente se obtendrán las condiciones necesarias para la bifurcación con la aparición de la discontinuidad ($[\dot{u}] \neq 0$), considerando el campo de la tasa de deformaciones descrito por (2.35) para un problema unidimensional general, no necesariamente homogéneo antes de la bifurcación. Centrando el estudio en la vecindad de la superficie de discontinuidad $\mathcal{S}$, el campo de deformación (2.35) establece que

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} = \dot{\tilde{\varepsilon}} & \text{en } \Omega \setminus \mathcal{S} \\ \dot{\varepsilon}_{\mathcal{S}} = \dot{\tilde{\varepsilon}} + \beta & \text{en } \mathcal{S} \end{cases} \quad (2.36)$$

donde $\dot{\varepsilon}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$ y $\dot{\varepsilon}_{\mathcal{S}}$ representan las tasas de deformación en la vecindad de $\mathcal{S}$ y en $\mathcal{S}$, respectivamente; $\tilde{\varepsilon}$ es la parte regular del campo de deformaciones en el punto $x = x_{\mathcal{S}}$ y $\beta = [\dot{u}]/h'$.

La condición de equilibrio establece que

$$[\dot{\sigma}] = \dot{\sigma}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} - \dot{\sigma}_{\mathcal{S}} = 0 \quad \text{en } \mathcal{S} \quad \text{para } t \in [0, \infty] \quad (2.37)$$

siendo $\sigma_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$ y $\sigma_{\mathcal{S}}$ las tensiones en la vecindad de $\mathcal{S}$ y en $\mathcal{S}$, respectivamente.

Comparando (2.36) y (2.37) con (2.20) y (2.21), puede verificarse que las condiciones para la aparición de la discontinuidad se obtienen de forma similar a la utilizada en el análisis de bifurcación del apartado 2.4, con lo cual se concluye que la condición necesaria para que $[\dot{u}] \neq 0$ es

$$\boxed{H \in \mathcal{G}} \quad (2.38)$$

siendo $\mathcal{G}$ el conjunto definido por²

$$\boxed{\mathcal{G} = \{H \in \mathbb{R} \mid H \leq 0\}} \quad (2.39)$$

² A pesar de que se puede escribir directamente $H \leq 0$, el conjunto $\mathcal{G}$ ha sido construido para introducir el tipo de notación que se utilizará en el estudio de problemas multidimensionales del capítulo 5.

independientemente del valor de la variable h' . Como se mencionó en el apartado 2.4, $H < 0$ conduce a bifurcación con descarga elástica en $\Omega \setminus \mathcal{S}$ y carga plástica en $\mathcal{S}$.

Considerando el modelo constitutivo elasto-plástico del apartado 2.3, la tasa de la deformación puede descomponerse de la forma

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma \operatorname{sign}(\sigma) \quad (2.40)$$

De la identidad entre (2.40) y (2.35) resulta la siguiente ecuación de evolución de las deformaciones:

$$\dot{\varepsilon} = \underbrace{\dot{\bar{\varepsilon}}}_{\text{acotado}} + \underbrace{\llbracket \dot{u} \rrbracket \frac{1}{h'} \mu_s}_{\text{no acotado}} = \underbrace{\frac{\dot{\sigma}}{E}}_{\text{acotado}} + \gamma \operatorname{sign}(\sigma) \quad (2.41)$$

donde se indican los términos que son acotados en $\mathcal{S}$ y los que no lo son en la situación límite correspondiente a la discontinuidad fuerte, cuando $h' \rightarrow 0$ y $\llbracket \dot{u} \rrbracket \neq 0$. Obsérvese que la parte regular de la tasa de deformación, $\dot{\bar{\varepsilon}}$, es siempre acotada por definición y que la tasa de la tensión, $\dot{\sigma}$, debe también permanecer acotado para que el problema siga teniendo sentido físico.

Por tanto, en el régimen de discontinuidad fuerte, la ecuación (2.41) sólo tiene sentido físico y matemático si el término no acotado se corresponde con algún otro término no acotado de la ecuación. La única posibilidad es que el multiplicador plástico γ no sea acotado en $\mathcal{S}$, cuando $h' \rightarrow 0$. Una de las opciones posibles es suponer

$$\gamma = \frac{1}{h'} \mu_s \bar{\gamma} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 & \forall x \in \Omega \setminus \mathcal{S} \\ \gamma = \frac{1}{h'} \bar{\gamma} & \forall x \in \mathcal{S} \end{cases} \quad (2.42)$$

que establece que en $\Omega \setminus \mathcal{S}$ ocurre descarga elástica o carga neutra mientras que en $\mathcal{S}$ el material fluye plásticamente (véase la ecuación (2.16)). Teniendo en cuenta la expresión (2.8), se verifica que (2.42) conlleva a la siguiente estructura del módulo de endurecimiento en $\mathcal{S}$:

$$\boxed{H = -\frac{1}{\gamma} \dot{\gamma} = h' \left(-\frac{1}{\bar{\gamma}} \dot{\bar{\gamma}} \right) = h' \bar{H} \quad \forall x \in \mathcal{S}} \quad (2.43)$$

Observación 2.5 La ecuación (2.43) establece que cuando h' tiende a cero el módulo H también tiende a cero, lo que indica que el

régimen de discontinuidad fuerte sólo es consistente con el módulo de ablandamiento nulo.

Observación 2.6 Puesto que $H = 0$ pertenece al conjunto $\mathcal{G}$, definido en (2.39), la bifurcación siempre puede tener lugar bajo régimen de discontinuidad fuerte. Como se verá posteriormente, en general no ocurre lo mismo en casos multidimensionales. En situaciones en las que $\mathcal{G}$ no contiene el valor nulo, la bifurcación se da bajo el régimen de discontinuidad débil con $h' \neq 0$, y el régimen de discontinuidad fuerte ($h' \rightarrow 0$) sólo se alcanza en instantes posteriores a la bifurcación, estableciendo así un intervalo de transición entre la bifurcación y el inicio del régimen de discontinuidad fuerte (véase los capítulos 4 y 5).

Considerando las ecuaciones (2.42) y (2.43), la ecuación (2.41) se puede escribir de manera que la evolución de la deformación en $\mathcal{S}$ sea dada por

$$\dot{\varepsilon}_s = \underbrace{\dot{\varepsilon}}_{\text{acotado}} + \llbracket \dot{u} \rrbracket \frac{1}{h'} = \underbrace{\frac{\dot{\sigma}_s}{E}}_{\text{acotado}} + \frac{1}{h'} \frac{1}{\bar{H}} \dot{q} \text{sign}(\sigma_s) \quad \forall x \in \mathcal{S} \quad (2.44)$$

En régimen de discontinuidad fuerte (cuando $h \rightarrow 0$), los términos no acotados de la ecuación anterior deben igualarse, imponiendo que

$$\llbracket \dot{u} \rrbracket = -\frac{1}{\bar{H}} \dot{q} \text{sign}(\sigma_s) \quad (2.45)$$

Teniendo en cuenta (2.17), se puede escribir la relación anterior de la siguiente forma más sencilla

$$\boxed{\llbracket \dot{u} \rrbracket = \frac{1}{\bar{H}} \dot{\sigma}_s} \quad (2.46)$$

Observación 2.7 La ecuación (2.46) relaciona (la tasa de) el salto en el campo de desplazamiento con la (tasa de) la tensión, a través de la variable $\bar{H}$, que por esto se denominará *módulo de ablandamiento intrínseco o discreto* (Simó *et al.* 1993, Oliver 1996a) y será considerada una propiedad del material. Obsérvese, por tanto, la conexión existente entre la aproximación de discontinuidades fuertes y los modelos de fractura discreta (Hillerborg 1976, Planas y Elices

1992), donde el punto de arranque es la relación constitutiva discreta similar a la descrita en (2.46).

Observación 2.8 La relación constitutiva discreta (tensión versus salto) (2.46) se deduce de la relación constitutiva de continuo estándar (tensión versus deformación) de elasto-plasticidad 1D, al imponerse la cinemática correspondiente al régimen de discontinuidad fuerte. De esta manera, queda establecido el vínculo existente entre las relaciones constitutivas discretas y las continuas. Además, se demuestra que la discontinuidad fuerte es compatible con el modelo constitutivo continuo estándar independiente de la velocidad (*rate independent*), donde el concepto de deformación, aunque de carácter distribucional (delta de Dirac), sigue siendo válido para la descripción cinemática de la discontinuidad.

Resumiendo, el problema de contorno tiene sentido físico y matemático en régimen de discontinuidad fuerte si las deformaciones plásticas tienen carácter distribucional (delta de Dirac) y se concentran en la discontinuidad. Como consecuencia, el inverso del módulo de ablandamiento también debe tener carácter distribucional y la intensidad del salto se define en términos de la tensión y del módulo de ablandamiento intrínseco, a través de la relación constitutiva discreta (2.46), que se deduce de la relación continua de elasto-plasticidad.

El análisis de discontinuidad fuerte desarrollada anteriormente, así como sus resultados, ha sido presentado primeramente en Simó, Oliver y Armero (1993) y explorado posteriormente en diversos otros trabajos (Simó y Oliver 1994; Oliver 1995; Oliver 1996a, 1996b; Armero y Garikipati 1996; Oliver, Cervera y Manzoli 1998a, 1998b).

2.6.3 Interpretación física del módulo $\bar{H}$

De acuerdo con el *teorema de las fuerzas vivas*, para problemas cuasi-estáticos, donde la energía cinética puede ser despreciada, la potencia introducida al sistema por las fuerzas externas, $\mathcal{P}^{ext}$, debe ser igual a la *potencia tensional* de todo el sólido, $\mathcal{P}^{int}$ (Malvern 1969). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ el dominio que representa el eje de la barra cuyo área de la sección transversal en $x \in \Omega$ es $A(x)$, el teorema de las fuerzas vivas se expresa como

$$\mathcal{P}^{ext} = \mathcal{P}^{int} = \int_{\Omega} \sigma \dot{\varepsilon} A d\Omega \quad (2.47)$$

Considerando la descripción cinemática de discontinuidades fuertes dada en (2.31) y teniendo en cuenta la propiedad de la distribución de Dirac dada por (2.33), la expresión anterior puede escribirse de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{int} &= \int_{\Omega} \left(\sigma \dot{\varepsilon} + \sigma [\dot{u}] \delta_S \right) A d\Omega \\ &= \underbrace{\int_{\Omega \setminus S} \sigma \dot{\varepsilon} A d\Omega}_{\mathcal{P}_{\Omega \setminus S}^{int}} + \underbrace{\sigma_S [\dot{u}] A_S}_{\mathcal{P}_S^{int}} \end{aligned} \quad (2.48)$$

siendo A_S y σ_S el área de la sección transversal y la tensión, respectivamente, en S . El último término de (2.48) puede interpretarse como la parte de la potencia externa consumida en la formación del salto $[\dot{u}]$ en la discontinuidad S . Por tanto, la energía total consumida en la formación de la discontinuidad S durante el proceso de carga viene dada por

$$\mathcal{W}_S = \int_0^\infty \mathcal{P}_S^{int} dt = A_S \int_0^\infty \sigma_S [\dot{u}] dt$$

donde se puede identificar la energía consumida en la formación de la unidad de área fisurada, o sea, la energía de fractura G_f , como

$$G_f = \int_0^\infty \sigma_S [\dot{u}] dt \quad (2.49)$$

Como en régimen de discontinuidad fuerte la relación discreta (2.46) debe cumplirse, la expresión anterior se convierte en

$$G_f = \int_0^\infty \frac{1}{\dot{H}} \sigma_S \dot{\sigma}_S dt \quad (2.50)$$

Para el caso en que se considera $\hat{H}$ constante, la integración de la expresión anterior para el intervalo de tiempo comprendido entre el inicio del régimen de discontinuidad fuerte (cuando $\sigma_S = \sigma_y$) y el instante en que el material en S

pierde completamente su capacidad resistente ($\sigma_s = 0$), resulta

$$G_f = \frac{1}{\bar{H}} \int_{\sigma_y}^0 \sigma_s d\sigma_s = -\frac{\sigma_y^2}{2\bar{H}}$$

donde se concluye que

$$\boxed{\bar{H} = -\frac{\sigma_y^2}{2G_f} < 0} \quad (2.51)$$

o sea, el módulo de ablandamiento intrínseco se relaciona directamente con la tensión de fluencia y la energía de fractura, que, por definición, son propiedades físicas del material. Esta interpretación de $\bar{H}$ es exactamente la misma que se considera en los modelos discretos utilizados en la mecánica de fracturas (Hillerborg 1976).

2.7 RELACIÓN CONSTITUTIVA DISCRETA VERSUS CONTINUA EN LA APROXIMACIÓN DE LA DISCONTINUIDAD FUERTE

2.7.1 Aproximación de la discontinuidad fuerte vía relación constitutiva discreta

Una posible opción para la aproximación de discontinuidad fuerte consiste en, una vez detectada la condición de bifurcación, emplear la relación constitutiva discreta (tensión versus salto) (2.46) para describir el comportamiento de la discontinuidad, de manera similar a los modelos discretos referidos anteriormente (Armero y Garikipati 1995-1996; Armero 1997). Con respecto a esta aproximación, caben las siguientes observaciones:

Observación 2.9 Como se verá en el capítulo 4, obtener la forma explícita de la relación constitutiva discreta, que se desprende de la continua a través del análisis de discontinuidad fuerte, puede resultar una tarea muy difícil para algunos modelos constitutivos.

Observación 2.10 Como se mencionó anteriormente, el régimen de discontinuidad fuerte, para el cual la relación discreta es válida, puede no darse en el momento de la bifurcación, lo que exigiría una fase de transición en régimen de discontinuidad débil hasta la discontinuidad

fuerte. Este tema se estudiará con detalle en el capítulo 4.

2.7.2 Aproximación de discontinuidad fuerte vía relación constitutiva de continuo

La otra alternativa (presente en Oliver 1994; Simó y Oliver 1994 y Oliver, Cervera y Manzoli 1998a, 1998b) es utilizar siempre la relación constitutiva de continuo estándar (tensión versus deformación) para describir el comportamiento del material en todo el dominio. Al mismo tiempo, para representar el comportamiento *post-bifurcación* del sólido se debe considerar:

- la descripción cinemática definida por (2.34) y (2.35);
- el módulo de ablandamiento con la estructura supuesta en (2.43).

Naturalmente, no se hace necesario obtener la expresión explícita de la relación discreta, puesto que, cuando h' se hace muy pequeño comparado con el tamaño típico del dominio en análisis, la relación constitutiva discreta se impone, como mínimo, de forma aproximada (véase el apartado anterior). Sin embargo, como se verá a continuación, para el caso unidimensional estudiado, dicha aproximación resulta en el cumplimiento de la relación discreta (2.46) para cualquier valor de h' , siempre que el módulo de ablandamiento sea consistente con el valor supuesto de h' , de acuerdo con (2.43). Cabe destacar que dicha aproximación también es capaz de representar la transición del régimen de discontinuidad débil a discontinuidad fuerte cuando se haga necesario.

Considerando el campo de deformaciones descrito por (2.35), el estado de tensiones consistente con la estructura del multiplicador plástico supuesto en (2.42), corresponde a

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{\Omega \setminus S} = E \dot{\varepsilon}_{\Omega \setminus S} = E \dot{\varepsilon} & \text{en } \Omega \setminus S \text{ (elástico o neutro)} \\ \dot{\sigma}_S = E (\dot{\varepsilon}_S - \dot{\varepsilon}_S^p) = E (\dot{\varepsilon} + \llbracket \dot{u} \rrbracket \frac{1}{h'} - \frac{\dot{\sigma}}{H h'}) & \text{en } S \text{ (elasto-plástico)} \end{cases} \quad (2.52)$$

donde se consideraran las ecuaciones (2.18) y (2.43) en la definición de la componente plástica de la deformación $\dot{\varepsilon}_S^p$.

Imponiendo la condición de continuidad de las tensiones en S resulta

$$\llbracket \dot{\sigma} \rrbracket = \dot{\sigma}_{\Omega \setminus S} - \dot{\sigma}_S = 0 \Rightarrow \llbracket \dot{u} \rrbracket = \frac{1}{H} \dot{\sigma}_S \quad (2.53)$$

donde se concluye que, al imponerse la continuidad de tensiones en $\mathcal{S}$, la relación discreta se cumple independientemente del valor que se tome para h' .

Observación 2.11 Es importante destacar que el resultado anterior no es generalizable a casos multidimensionales. Como se verá en los capítulos 4 y 5, el valor $1/h'$ en general se interpreta como una variable de penalización, que impone el cumplimiento de la relación constitutiva discreta en la descripción del comportamiento del material de la discontinuidad, a medida que h' se hace pequeño comparado con el dominio analizado.

2.7.3 Unicidad de la solución obtenida a través de la aproximación de discontinuidad fuerte.

Finalmente, se obtiene la respuesta para el problema ilustrativo del apartado anterior, considerando la aproximación de discontinuidad fuerte.

Teniendo en cuenta que la parte continua $\Omega \setminus \mathcal{S}$ es siempre elástica y que la condición de equilibrio establece que $\sigma_{\Omega \setminus \mathcal{S}} = \sigma_{\mathcal{S}} = F/A$, la ecuación de compatibilidad considerando la superficie de discontinuidad $\mathcal{S}$ puesta en cualquier punto del dominio Ω resulta

$$\dot{\delta} = l \dot{\epsilon}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} + \llbracket \dot{u} \rrbracket = \begin{cases} \frac{\dot{F}}{A} \frac{l}{E} & \text{para } t < t_B \\ \frac{\dot{F}}{A} \left(\frac{l}{E} + \frac{1}{H} \right) - \frac{\sigma_y}{H} & \text{para } t > t_B \end{cases} \quad (2.54)$$

La solución anterior puede escribirse de la forma

$$\boxed{\begin{cases} \dot{F} = A \frac{E}{l} \dot{\delta} & \text{para } t < t_B \\ \dot{F} = A \frac{E H}{H l + E} \left(\dot{\delta} + \frac{\sigma_y}{H} \right) & \text{para } t > t_B \end{cases}} \quad (2.55)$$

Nótese que la solución (2.55) solamente depende de las constantes físicas (E , H y σ_y) y geométricas (A y l) del problema y por tanto, una vez definidas dichas constantes, la solución del problema es única, como se indica en la figura 4.b.

Anejo A

ALGUNOS TRATAMIENTOS ALTERNATIVOS A LA DEPENDENCIA DE LA SOLUCIÓN CON LA MALLA

En este anexo se describe de forma resumida las estrategias comúnmente empleadas en la mecánica computacional con el objeto de evitar la dependencia de la discretización en soluciones localizadas. También se las utiliza en el problema unidimensional ilustrativo del apartado 2.5.

A.1 MODELOS BASADOS EN LA ENERGÍA CONSUMIDA. MODELOS DE FISURA DISTRIBUIDA

Una de las formas de evitar la dependencia de la malla, es hacer el módulo de ablandamiento dependiente del tamaño del elemento, como propuesto por primera vez en Pietruszczak y Mróz (1981). Considerando que $H = \bar{H} h$, donde $\bar{H}$ es considerado una propiedad más del material, la solución (2.27) pasa a no incluir la dimensión h , y se puede escribir de la forma

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{F} = A \frac{E}{l} \dot{\delta} & \text{para } t < t_B \\ \dot{F} = A \frac{E \bar{H}}{\bar{H} t + E} \dot{\delta} & \text{para } t > t_B \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

La figura 2.4.b muestra la curva de carga versus desplazamiento obtenida por la solución (A.1). En los modelos de *fisura distribuida* (Bazant y Oh 1983, Willam *et al.* 1984, Cervera *et al.* 1987, Oliver *et al.* 1990, Oller 1988), se interpreta la banda de localización como la zona donde se confina el proceso de formación de la fisura. El parámetro $\bar{H}$ se relaciona entonces con la *energía de fractura* G_f , definida como la cantidad de energía consumida en la formación de la unidad de área fisurada. En el ejemplo que se estudia, la energía total consumida en el proceso de carga, con pérdida completa de la capacidad resistente de la pieza, corresponde a toda la energía mecánica introducida al sistema por las fuerzas

externas, $\mathcal{W}^{ext}$, cuantificada por el área bajo la curva fuerza versus desplazamiento de la figura 2.4.b, es decir,

$$\mathcal{W}^{ext} = -\frac{\sigma_y^2}{2 \bar{H}} A = G_f A$$

donde se obtiene

$$\boxed{\bar{H} = -\frac{\sigma_y^2}{2 G_f}} \quad (A.2)$$

Es importante destacar que dichos modelos son capaces de eliminar la dependencia de la respuesta con respecto a las dimensiones de los elementos finitos, lo que es suficiente para problemas unidimensionales. Sin embargo, en casos multidimensionales, el alineamiento de la malla es otro factor que en muchos casos interviene directamente en la respuesta. Por un lado, en la situación en que la dirección de la banda de localización no coincide con la de los lados de los elementos, la longitud del elemento que caracteriza el ancho de la banda no queda claramente definida ; en Oliver (1989) se propone una técnica para la identificación de la longitud característica de los elementos, en situaciones generales. Por otro lado, puesto que algunos elementos finitos presentan modos de deformaciones preferenciales, el ancho de la banda dependerá crucialmente de su orientación con respecto a los elementos finitos. Si los modos de deformación de la respuesta localizada no coinciden con los modos preferenciales de los elementos, la respuesta puede exhibir bloqueo de deformaciones, haciendo que la banda se extienda sobre varios elementos o incluso induciendo localización según direcciones erróneas, sugeridas por el alineamiento de la malla (Steinmann y Willam 1991). Para tratar el problema, los trabajos de Ortiz et al (1987) y Nacar *et al.* (1989) proponen un enriquecimiento de la cinemática del elemento a través de la introducción de modos de deformaciones incompatibles, contruidos a partir del análisis de bifurcación discontinua. Otra línea también explorada con la misma finalidad propone procesos de refinamiento adaptable de la malla tipo h , donde se busca captar la distribución de deformación localizada concentrando los elementos finitos en la zona de localización (Ortiz y Quigley 1990 y Zienkiewicz *et al.* 1995).

A.2 MODELOS DISCRETOS

En la suposición de que el campo de deformación no es homogéneo en Ω^h , la solución (2.27) (o (A.1)) no es estable, puesto que la parte Ω^h , que fluye

plásticamente con ablandamiento, es susceptible de bifurcación. Este hecho abre espacio al planteamiento que considera que la solución más estable y físicamente más aceptable debería ser la más localizada posible, que teóricamente correspondería a la situación límite en que el ancho de la banda tiende a cero, como se sugiere en Bazant (1976) y Ottosen (1986). Dicha situación conlleva la presencia de deformaciones infinitas en un espacio de dimensión nula desde el punto de vista macroscópico, asociadas a discontinuidad en el campo de desplazamientos, o sea, *discontinuidad fuerte*.

El modelo de *fisura discreta cohesiva*, propuesto primeramente por Hillerborg *et al.* (1976) para representar la formación de fractura en hormigón, es consistente con este tipo de comportamiento. En dicho modelo se considera que, en un proceso de carga monótono, una vez alcanzado el límite elástico, empieza a desarrollarse el proceso de formación de fractura en una banda de dimensión nula (superficie de fractura o de discontinuidad). Para describir el comportamiento no lineal del material en dicha zona, se abandona el concepto de deformación y se utiliza una relación constitutiva discreta, escrita en términos de tensiones y desplazamientos relativos en los labios de la superficie de discontinuidad. En otras palabras, se abandona la mecánica de medios continuos (macroscópica), sustituyéndola por los efectos en la escala macroscópica del comportamiento microscópico en el interior de la zona de localización, que se ve como una superficie de discontinuidad. Para el caso unidimensional, el comportamiento en la zona de localización, desde un punto macroscópico, se resume en

$$\sigma_S = \sigma_t + K ([u]) [u] \quad (\text{A.3})$$

donde σ_S es la tensión en la superficie de discontinuidad S (o sección transversal de discontinuidad para el caso 1D), σ_t es la tensión correspondiente al límite elástico del material, $[u]$ representa el desplazamiento relativo (salto) en S y $K([u]) < 0$ define el comportamiento de ablandamiento de la tensión y es normalmente relacionado con la energía de fractura G_f , a través de

$$G_f = \int \sigma_S d[u] \quad (\text{A.4})$$

que establece que la energía de fractura G_f es el área bajo la curva tensión versus salto, tal como muestra la figura 2.6.

Para el caso de ablandamiento lineal, o sea, para K constante en (A.3), la ecuación (A.4) establece que

$$K = \frac{\sigma_t^2}{2 G_f} \quad (\text{A.5})$$

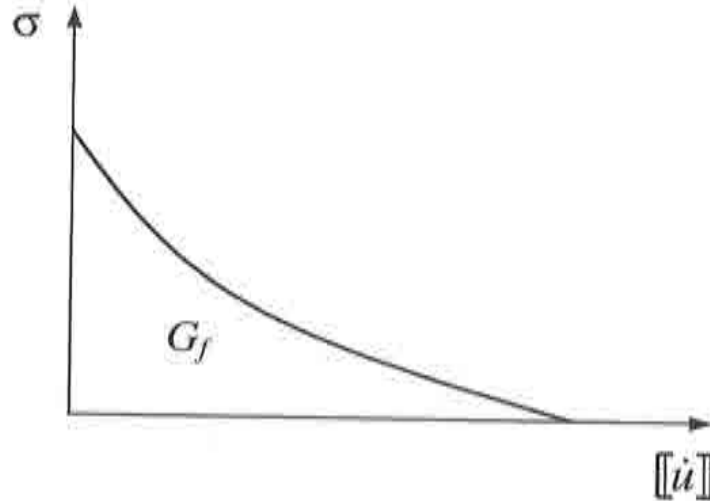


Figura 2.6 Relación constitutiva discreta

En el ejemplo unidimensional del apartado anterior, teniendo en cuenta que la parte continua $\Omega \setminus S$ es siempre elástica y que la condición de equilibrio establece que $\sigma_{\Omega \setminus S} = \sigma_S = F/A$, la ecuación de compatibilidad considerando la superficie de discontinuidad S puesta en cualquier punto del dominio Ω resulta

$$\delta = l \varepsilon_{\Omega \setminus S} + [[u]] = \begin{cases} \frac{E}{A} \frac{l}{E} & \text{para } t \leq t_t \\ \frac{E}{A} \left(\frac{l}{E} + \frac{1}{K} \right) - \frac{\sigma_t}{K} & \text{para } t \geq t_t \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

donde ahora t_t corresponde al instante en que la tensión alcanza el límite σ_t . La expresión anterior puede escribirse de la forma

$$\boxed{\begin{cases} F = A \frac{E}{l} \delta & \text{para } t \leq t_t \\ F = A \frac{EK}{Kl+E} \left(\delta + \frac{\sigma_t}{K} \right) & \text{para } t \geq t_t \end{cases}} \quad (\text{A.7})$$

Nótese que, permutando K por $\bar{H}$ y σ_y por σ_t , la solución anterior es exactamente la misma que se obtuvo utilizando el modelo de fisura distribuida, representada en la figura 2.4.b.

La formulación numérica de dichos modelos a través del M.E.F. normalmente se hace introduciendo la relación constitutiva discreta (A.3) en las interfaces entre los elementos finitos (Hillerborg *et al.* 1976; Ingraffea y Saouma 1985, Larsson y Runesson 1993, 1995). Naturalmente, la gran dificultad de dichas formulaciones, agravada en los casos multidimensionales, reside en la necesidad de que las interfaces entre los elementos coincidan con la superficie de discontinuidad, que en general es desconocida en el inicio del análisis. Este hecho impone la necesidad de técnicas de remallado especiales para ajustar las interfaces entre elementos a la discontinuidad que se forma a lo largo del análisis. La otra forma de resolver este inconveniente sin recurrir al costoso procedimiento de remallado, se hace a través de la incorporación de la discontinuidad en la formulación del elemento finito, mediante la utilización de funciones interpoladoras discontinuas para la representación del campo de desplazamientos, permitiendo así que el elemento sea capaz de reproducir los saltos de la eventual superficie de discontinuidad que atraviere su dominio. En este contexto se pueden mencionar los trabajos de Dvorkin *et al.* (1990), Dvorkin y Assanelli (1991), Lotfi y Shing (1994), Klisinski *et al.* (1991) y Ohlsson y Olofsson (1997).

Capítulo 3

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE DISCONTINUIDADES FUERTES EN UNA DIMENSIÓN

3.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se demostró que las relaciones constitutivas locales e independientes de la velocidad (*rate independent*) son susceptibles de bifurcación discontinua. Dicha forma de inestabilidad material se manifiesta a través de la localización de deformaciones no acotadas en un espacio de dimensión nula, o sea, superficies de discontinuidades del campo de desplazamientos. La formulación del método de elementos finitos estándar, al utilizar funciones interpoladoras continuas (polinómicas, en general), no es capaz de representar dicha cinemática singular y solamente genera aproximaciones de la solución discontinua, donde las deformaciones se localizan de forma difusa en el dominio del un elemento finito. Como consecuencia, se obtiene soluciones numéricas dependientes del tamaño de los elementos que se adoptan para la discretización del modelo numérico.

Unas de las estrategias más utilizadas para evitar la dependencia de la malla en la respuesta estructural del problema consiste en ajustar el módulo de ablandamiento del modelo constitutivo, asegurando que la energía consumida en la evolución de las deformaciones inelásticas (difundidas en el interior del elemento) sea la misma que se consumiría en la formación de una superficie de discontinuidad en el interior del elemento (Bazant y Oh 1983, Willam *et al.* 1984). Dicha estrategia funciona para problemas unidimensionales, sin embargo, para problemas multidimensionales la orientación de la malla es otro factor que interviene en la respuesta. Salvo cuando los lados de los elementos tienen la misma dirección de la superficie de discontinuidad, la localización puede dispersarse en una gran área, que puede corresponder a la dimensión de dos o más elementos, dependiendo de la tipología y de la orientación del elemento finito que se utiliza (Steinmann y Willam 1991, Oliver *et al.* 1990).

Otra posibilidad es representar la superficie de discontinuidad como contornos adicionales del problema, donde las condiciones de borde vienen dadas por la

relación constitutiva discreta entre tensión y desplazamiento relativo entre los labios de la discontinuidad, que, en este caso, coinciden con las interfaces de los elementos adyacentes a la discontinuidad (Ingraffea y Saouma 1985, Larsson y Runesson 1992, 1995). Este procedimiento presenta el gran inconveniente de necesitar que la posición de la discontinuidad coincida con las interfaces entre elementos.

En este capítulo se presenta una formulación de elementos finitos para casos unidimensionales capaz de representar la cinemática singular sin los inconvenientes descritos anteriormente. La idea de la formulación es añadir al campo de deformaciones "regulares" (continuas y compatibles) del elemento una componente mejorada (incompatible), que capture correctamente la cinemática correspondiente al régimen pos-bifurcación. Dicha formulación pertenece al contexto de los *métodos de deformaciones mejoradas*, propuesto primeramente por Simó y Rifai (1990). Una versión de dicha formulación para la representación numérica de la discontinuidad fuerte en casos unidimensionales se presentó por primera vez en Simó, Oliver y Armero (1993) y fue posteriormente extendida para casos multidimensionales en Oliver y Simó (1994). Su éxito en la representación de la discontinuidad fuerte ha sido comprobado en otros trabajos posteriores (Oliver 1994; Oliver 1996b; Oliver, Cervera y Manzoli 1998a, 1998b).

La formulación que se presenta aquí incluye en una misma estructura las dos maneras posibles de simular el comportamiento del material en régimen de discontinuidad fuerte:

- La primera se hace utilizando la *relación constitutiva discreta* (tensión versus desplazamiento) para describir el comportamiento de la discontinuidad. Dicha relación discreta se puede deducir de la *relación constitutiva de continuo*, mediante el análisis de discontinuidades fuertes (ver apartado 2.6). Se puede incluir en este contexto los trabajos de Armero y Garikipati (1995, 1996).

La otra posibilidad es considerar la relación discreta como otro dato del material, como se se hace en los *modelos de fisura discreta cohesiva* (Hillerborg 1976; Planas y Elices 1992). En este contexto, merece la pena mencionar las formulaciones de elementos finitos en la cuales se incorporan líneas de discontinuidad mediante la utilización de funciones interpoladoras discontinuas para el campo de desplazamientos (Dvorkin *et al.* 1990, Dvorkin y Assanelli 1991, Lotfi y Shing 1994, Klisinski *et al.* 1991 y Ohlsson y Olofsson 1997).

- La otra opción utiliza la misma ecuación constitutiva de continuo (tensión versus deformación) para describir el comportamiento de todo el dominio del problema, incluyendo la región de discontinuidad. La formulación que se presenta aquí contiene los ingredientes necesarios para la representación

numérica de la discontinuidad débil o fuerte y, por consiguiente, esta opción tiene la ventaja de posibilitar la representación del comportamiento del material en régimen pos-bifurcación, incluso cuando existe una *fase de transición* entre la discontinuidad débil y fuerte. Este hecho, a pesar de no traer ninguno beneficio en problemas unidimensionales (ver apartado 2.7), tiene gran importancia en casos multidimensionales, como se verá en los próximos capítulos.

En el apartado 3.2 la cinemática representativa de discontinuidad débil y fuerte, definida en el capítulo anterior, se descompone de manera adecuada para la aproximación numérica. En el apartado 3.3 se presentan las ecuaciones de gobierno que rigen el problema de valores de contorno de medios discontinuos, haciendo distinción entre las aproximaciones que utilizan relaciones constitutivas discretas y las que utilizan relaciones constitutivas continuas para representar el comportamiento de la interface de discontinuidad. En el apartado 3.4 se presenta la formulación débil de las ecuaciones de gobierno dentro del contexto de los *métodos de deformaciones mejoradas* (Simó y Rifai 1990). Posteriormente, en el apartado 3.5 se aproximan dichas ecuaciones débiles a través de método de los elementos finitos-M.E.F., definiendo la forma adecuada de las deformaciones mejoradas y del espacio de su variaciones admisibles. Además, se presentan algunos aspectos importantes para el algoritmo de solución del sistema no lineal de ecuaciones resultante. Finalmente, en el apartado 3.8 se presenta la simulación numérica de un ejemplo representativo unidimensional, donde se demuestra la completa independencia de la discretización utilizada para el modelo numérico. Además, se observa que el campo de desplazamiento resultante reproduce la respuesta discontinua exacta, independientemente de la discretización que se adopte.

3.2 REDEFINICIÓN DE LA DESCRIPCIÓN CINEMÁTICA

Como se mostró en el apartado 2.6, para la descripción cinemática de medios que presentan discontinuidades fuertes o débiles se adoptan las expresiones

$$\dot{u}(x, t) = \dot{\bar{u}}(x, t) + \llbracket \dot{u} \rrbracket(t) \mathcal{H}_S(x) \quad (3.1)$$

y

$$\dot{\varepsilon}(x, t) = \dot{\bar{\varepsilon}}(x, t) + \llbracket \dot{u} \rrbracket \frac{1}{h'(t)} \mu_S(x) \quad (3.2)$$

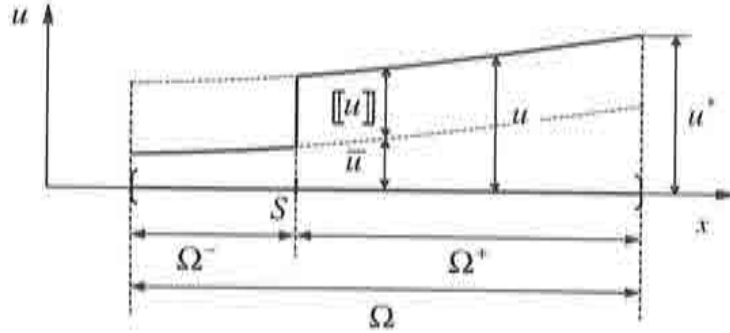


Figura 3.1 Descomposición del campo de desplazamiento discontinuo.

El campo de desplazamientos puede obtenerse directamente de la ecuación (3.1), resultando

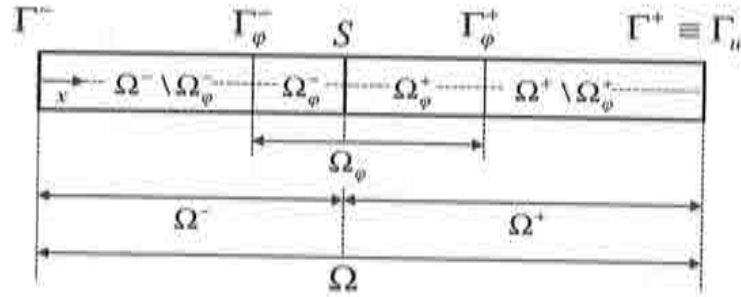
$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) + \llbracket u \rrbracket(t) \mathcal{H}_S(x) \quad (3.3)$$

Como puede verificarse, la condición de contorno esencial ($u = u^*$ en Γ_u) no se puede imponer directamente a ninguna de las partes $\bar{u}$ o $\llbracket u \rrbracket \mathcal{H}_S$ que componen el campo de desplazamiento u (ver figura 3.1). Además, a efectos de la aproximación numérica, es interesante contar con una descripción cinemática en que la parte no "regular" (que contiene $\llbracket u \rrbracket$) del desplazamiento se limite a una región del dominio alrededor de la discontinuidad S , de manera que se pueda utilizar la descripción cinemática estándar para el dominio restante (inclusive los bordes), cosa que no ocurre en la cinemática descrita anteriormente.

Para evitar dichos inconvenientes, considérese la región definida por el subdominio $\Omega^\varphi \subset \Omega$ alrededor de S ($S \subset \Omega^\varphi$), delimitada por los contornos arbitrarios $\Gamma_\varphi^+ \subset \Omega^+$ y $\Gamma_\varphi^- \subset \Omega^-$, donde Ω^+ y Ω^- son las dos partes en que S divide el dominio Ω ($\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$), como se muestra en la figura 3.2. Obsérvese que, como $\Omega^\varphi \subset \Omega$, el borde Γ_u , donde se impone la condición de contorno esencial, es exterior a la región Ω^φ ($\Gamma_u \cap \Omega^\varphi \in \{\emptyset, \Gamma_\varphi^+, \Gamma_\varphi^-\}$). Sea $\varphi(x)$ una función continua en Ω tal que

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(x) &= 0 & \forall x \in \Omega^- \setminus \Omega_\varphi^- \\ \varphi(x) &= 1 & \forall x \in \Omega^+ \setminus \Omega_\varphi^+ \end{aligned}} \quad (3.4)$$

donde $\Omega_\varphi^- = \Omega^- \cap \Omega_\varphi$ y $\Omega_\varphi^+ = \Omega^+ \cap \Omega_\varphi$ (ver figura 3.2). La componente $\bar{u}$ del campo de desplazamiento puede entonces descomponerse convenientemente de la

Figura 3.2 Definición del dominio Ω^φ

forma

$$\bar{u}(x, t) = \hat{u}(x, t) - \llbracket u \rrbracket(t) \varphi(x) \quad (3.5)$$

para la cual se considera $\hat{u}$ continua en Ω .

Reemplazando (3.5) en (3.3), el campo de desplazamiento queda descrito por

$$u(x, t) = \hat{u}(x, t) + \llbracket u \rrbracket(t) M_S(x) \quad (3.6)$$

con

$$M_S(x) = \mathcal{H}_S(x) - \varphi(x) \quad (3.7)$$

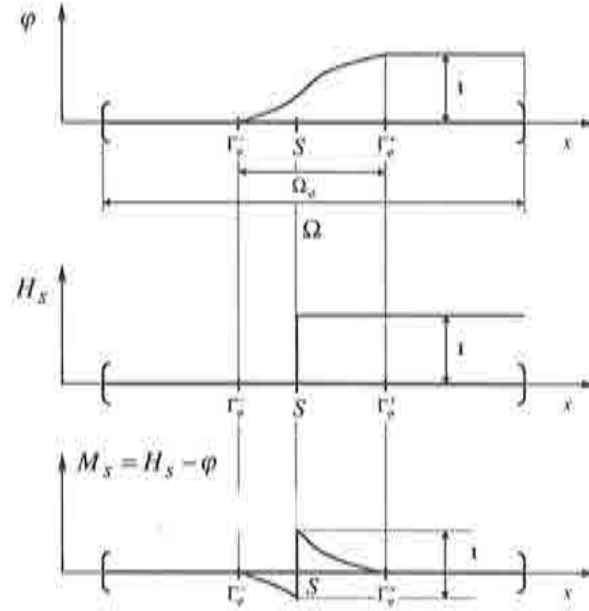
La figura 3.3 muestra la forma final de la función $M_S(x)$, que se obtiene combinando $\mathcal{H}_S(x)$ con $\varphi(x)$, y en la figura 3.4 se representan el campo de desplazamiento y cada una de las partes que le componen.

A su vez, la componente $\dot{\bar{\varepsilon}}$ se escribe como

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{\partial \dot{\bar{u}}}{\partial x} = \dot{\bar{\varepsilon}}(x, t) - \llbracket \dot{u} \rrbracket(t) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \quad (3.8)$$

siendo

$$\dot{\bar{\varepsilon}}(x, t) = \frac{\partial \dot{\hat{u}}(x, t)}{\partial x} \quad (3.9)$$

Figura 3.3 Construcción de la función $M_S(x)$

Reemplazando la expresión (3.8) en (3.2), se obtiene la expresión del campo tasa de deformaciones de la forma

$$\dot{\varepsilon}(x, t) = \dot{\hat{\varepsilon}}(x, t) + [\dot{u}](t) G_S(x, t) \quad (3.10)$$

donde

$$G_S(x, t) = \frac{1}{h'(t)} \mu_S(x) - \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \quad (3.11)$$

Obsérvese que el soporte de las funciones M_S y G_S es Ω^φ , es decir, $M_S = G_S = 0 \forall x \in \Omega \setminus \Omega^\varphi$. De esta manera, se concluye que

$$u(x, t) = \hat{u}(x, t) \quad \forall x \in \Omega \setminus \Omega^\varphi \quad (3.12)$$

y

$$\varepsilon(x, t) = \hat{\varepsilon}(x, t) \quad \forall x \in \Omega \setminus \Omega^\varphi \quad (3.13)$$

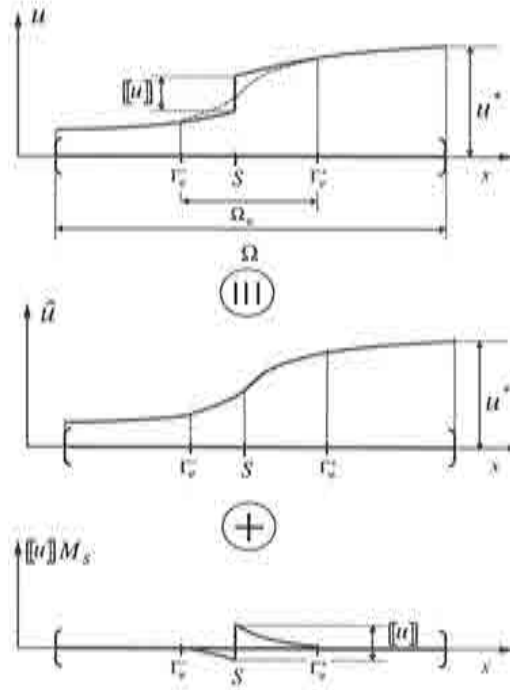


Figura 3.4 Composición del campo de desplazamientos discontinuo.

Como puede verificarse (ver figura 3.4), la condición de contorno esencial puede imponerse directamente al campo de desplazamientos "regular" $\hat{u}$, puesto que $u = \hat{u}$ en $\Gamma_u \in \Omega \setminus \Omega^\varphi$. Además, fuera de la región Ω^φ , la descripción cinemática es estándar, sin la presencia de términos involucrando $[[u]]$. Como se verá a continuación, esta característica adquiere relevancia en la aproximación numérica de medios discontinuos.

Observación 3.1 Las expresiones (3.6) y (3.10) son equivalentes a las (3.1) y (3.2), respectivamente. Por tanto, todos los estudios llevados a cabo en los apartados anteriores son válidos para la cinemática descrita por (3.6) y (3.10).

3.3 ECUACIONES DE GOBIERNO

Considerando la descripción cinemática propuesta en el apartado anterior, las ecuaciones de gobierno y las condiciones de contorno que definen el problema en

la parte continua son:

$$\begin{array}{lll}
 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + f = 0 & \text{en } \Omega \setminus \mathcal{S} & \text{(ecuación de equilibrio)} \\
 \left\{ \begin{array}{l} u = \hat{u} = u^* \\ \sigma = \sigma^* \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{en } \Gamma_u \\ \text{en } \Gamma_\sigma \end{array} & \text{(condiciones de contorno)} \\
 \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} [[u]] & \text{en } \Omega \setminus \mathcal{S} & \text{(relación deformación-} \\
 & & \text{desplazamiento)} \\
 \sigma = \Sigma^c(\varepsilon) & \text{en } \Omega \setminus \mathcal{S} & \text{(relación constitutiva} \\
 & & \text{continua)}
 \end{array} \tag{3.14}$$

donde $\Sigma^c(\cdot)$ representa la función constitutiva de continuo local, que puede depender de la historia de la deformación $\varepsilon(t)$ a lo largo del proceso de carga (ver apartado 2.3)³. La expresión (3.14)₃ se obtuvo a partir de la descripción del campo tasa de deformaciones (3.10) particularizado para $\Omega \setminus \mathcal{S}$.

A las ecuaciones de gobierno y condiciones de contorno presentadas anteriormente se añaden las siguientes condiciones que establecen el equilibrio en la discontinuidad :

$$\begin{array}{ll}
 \sigma_+ = \sigma_- & \text{en } \mathcal{S} \\
 \sigma_s = \sigma_+ \quad (\sigma_s = \sigma_-) & \text{en } \mathcal{S}
 \end{array} \tag{3.15}$$

donde σ_s es la tensión en $\mathcal{S}$ y σ_+ y σ_- se refieren al campo de tensiones en Ω^+ y Ω^- , respectivamente.

Observación 3.2 En la ausencia de discontinuidad (cuando $[[u]] = 0$) las ecuaciones anteriores son las mismas que gobiernan el problema en el contexto de la *Mecánica de Medios Continuos Clásica*.

Observación 3.3 Las ecuaciones de gobierno (3.14) sumadas a la ecuación (3.15)₁ constituyen las ecuaciones clásicas que definen el problema que exhibe discontinuidad (Malvern 1969). La ecuación adicional (3.15)₂ impone la compatibilidad estática de las tensiones en la interface $\mathcal{S}$, donde se desarrolla la discontinuidad, con las tensiones de su vecindad.

³ Suponiendo que existe la función de energía acumulada $W(\varepsilon)$, se tiene $\sigma = \Sigma(\varepsilon) = \partial W(\varepsilon) / \partial \varepsilon$.

Para que el problema quede completamente definido falta escribir las tensiones en $\mathcal{S}$ en términos del salto o de la deformación, de acuerdo con el tipo de aproximación que se elija para representar el comportamiento de la discontinuidad. Los dos tipos posibles de aproximación se describen a continuación:

- *Aproximación vía relación constitutiva discreta.*

En el caso de que se eligiese representar el comportamiento de la discontinuidad vía relación constitutiva discreta, se define la tensión directamente en términos del salto haciendo

$$\sigma_s = \Sigma^d(\llbracket u \rrbracket) \quad (3.16)$$

donde $\Sigma^d(\cdot)$ denota la función constitutiva discreta.

Dicha relación se puede considerar como otro dato del material, como se hace en los modelos de fractura discreta (Hillerborg 1976), o se puede obtener de la relación constitutiva de continuo, $\Sigma^c(\varepsilon)$, a través del análisis de discontinuidades fuertes, como se vio en el apartado 2.6. En este caso, la relación discreta que se desprende de la continua elasto-plástica es

$$\dot{\sigma}_s = H \llbracket \dot{u} \rrbracket$$

Observación 3.4 Las ecuaciones (3.14), (3.15) y (3.16) definen completamente el problema de valores de contorno, que se puede poner en términos de las incógnitas $\hat{u}$ y $\llbracket u \rrbracket$. Obsérvese que la descripción cinemática en la discontinuidad no se hace necesaria en este tipo de aproximación.

- *Aproximación vía relación constitutiva de continuo.*

La otra opción es seguir utilizando la relación constitutiva de continuo también para describir el comportamiento en $\mathcal{S}$, es decir

$$\sigma_s = \Sigma^c(\varepsilon_s) \quad \text{en } \mathcal{S} \quad (3.17)$$

De acuerdo con (3.10), la tasa de deformación en la discontinuidad se describe

como

$$\dot{\varepsilon}_s = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \left(\frac{1}{h'} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \llbracket \dot{u} \rrbracket \quad \text{en } S \quad (3.18)$$

Observación 3.5 En este tipo de aproximación, son necesarias las ecuaciones (3.14), (3.15), (3.17) y (3.18) para definir el problema. También aquí las incógnitas del problema pueden reducirse al campo "regular" de desplazamientos $\hat{u}$ y el salto $\llbracket u \rrbracket$.

Observación 3.6 Este tipo de aproximación tiene la ventaja de incluir en la misma estructura la aproximación de discontinuidad débil y fuerte, dependiendo del valor de la variable h' .

3.4 FORMULACIÓN DÉBIL. MÉTODO DE LAS DEFORMACIONES MEJORADAS

De la descripción del campo de la tasa de deformaciones (3.10) se concluye que el campo de deformaciones se divide de la siguiente manera⁴

$$\varepsilon = \underbrace{\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}}_{\text{compatible}} + \underbrace{\tilde{\varepsilon}}_{\text{mejorada}} \quad (3.19)$$

donde $\tilde{\varepsilon}$ se puede interpretar como la parte mejorada del campo de deformaciones, que se añade a la deformación estándar compatible para representar los modos de deformaciones de la discontinuidad. Dentro del contexto del M.E.F., dicha parte puede ser discontinua entre los elementos finitos y, además, puede que se derive de un campo de desplazamientos incompatible (*modo incompatible*).

Basándose en (3.19), se supone que la variación de deformación admisible tiene la forma

$$\gamma = \underbrace{\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x}}_{\text{compatible}} + \underbrace{\tilde{\gamma}}_{\text{mejorada}}, \quad \hat{\eta} \in \hat{\mathcal{V}} \quad \text{y} \quad \tilde{\gamma} \in \tilde{\mathcal{E}}_\gamma \quad (3.20)$$

⁴ Para el caso en que h' es constante, el campo de deformaciones que se obtiene integrando (3.10) se expresa por $\varepsilon = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + G_s[u]$, o sea, $\tilde{\varepsilon} = G_s[u]$

donde $\hat{\eta}$ y $\tilde{\gamma}$ denotan las variaciones del desplazamiento y de la deformación mejorada, respectivamente, mientras que $\hat{\mathcal{V}}$ y $\tilde{\mathcal{E}}_\gamma$ son sus correspondientes espacios admisibles. El espacio de variaciones cinemáticamente admisible de la parte "regular" del desplazamiento se define como

$$\hat{\mathcal{V}} := \{ \hat{\eta} \in C^0 \mid \hat{\eta}|_{\Gamma_\sigma} = 0 \} \quad (3.21)$$

En este contexto, el Método de Elementos Finitos que se propone se basa en las siguientes ecuaciones débiles (ver Simó y Oliver 1994):

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x} d\Omega = \int_{\Omega} f \hat{\eta} d\Omega + \sigma^* \hat{\eta}|_{\Gamma_\sigma} & \forall \hat{\eta} \in \hat{\mathcal{V}} \\ \int_{\Omega} \sigma \tilde{\gamma} d\Omega = 0 & \forall \tilde{\gamma} \in \tilde{\mathcal{E}}_\gamma \end{cases} \quad (3.22)$$

Como puede verificarse, la ecuación débil (3.22)₁ es la misma que se obtiene del principio de los trabajos virtuales clásico, mientras que la ecuación (3.22)₂ se justifica por la presencia adicional del modo de deformación mejorada.

Antes de proceder a la discretización de dominio por elementos finitos, se obtendrá la forma fuerte de la ecuación (3.22)₁.

Integrando por partes el primer miembro de (3.22)₁ y teniendo en cuenta la definición (3.21) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x} d\Omega &= \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \sigma \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x} d\Omega \\ &= - \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \hat{\eta} d\Omega + (\sigma_+ - \sigma_-) \hat{\eta}|_{\mathcal{S}} + (\sigma \hat{\eta})|_{\Gamma_\sigma} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Reemplazando la ecuación (3.23) en (3.22)₁, resulta

$$\int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} + f \right) \hat{\eta} d\Omega - (\sigma_+ - \sigma_-) \hat{\eta}|_{\mathcal{S}} - [(\sigma - \sigma^*) \hat{\eta}]|_{\Gamma_\sigma} = 0 \quad (3.24)$$

donde, se concluye que el principio variacional $(3.22)_1$, representa la forma débil de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + f &= 0 & \text{en } \Omega \setminus \mathcal{S} = \Omega^+ \cup \Omega^- \\ \sigma &= \sigma^* & \text{en } \Gamma_\sigma \\ \sigma_+ &= \sigma_- & \text{en } \mathcal{S} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Obsérvese que, si la condición de contorno esencial ($u = u^*$ en Γ_u), las relaciones constitutivas (ecuaciones $(3.14)_4$, (3.16) o (3.17)), y la compatibilidad de deformación (ecuaciones $(3.14)_3$ y (3.18)) se satisfacen *a priori*, solamente falta imponer la igualdad de las tensiones dentro y fuera de la discontinuidad (ecuación $(3.15)_2$) para que el problema quede completamente definido. Por tanto, la ecuación $(3.22)_2$ debe corresponder a la forma débil de la ecuación $(3.15)_2$, lo que se consigue mediante la elección apropiada del espacio $\tilde{\mathcal{E}}_\gamma$ (ver apartado 3.6).

Observación 3.7 En la ecuación (3.23) se sustituyó el dominio de integración Ω por $\Omega \setminus \mathcal{S}$. Esto se debe a que $\mathcal{S}$ tiene dimensión nula y, además, el núcleo de la integral sobre Ω no contiene términos no acotados en $\mathcal{S}$, ya que el campo de tensión σ y el la variación admisible del desplazamiento "regular" $\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}$ son acotados por definición.

3.5 APROXIMACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

Considérese la discretización del dominio Ω en n_{elem} elementos finitos, tal que $\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_{elem}} \Omega_e$, donde Ω_e representa el dominio de cada elemento. Utilizando la notación vectorial, el campo de desplazamiento "regular" se aproxima de la forma (Zienkiewicz y Taylor 1994):

$$\hat{u}(x, t) \cong \hat{u}^h(x, t) = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \hat{u}_e^h(x, t) \mathcal{X}_e(x) = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \mathbf{N}_e(x) \mathbf{a}_e(t) \mathcal{X}_e(x) \quad (3.26)$$

donde $\mathbf{N}_e(x)$ es el vector de las funciones de forma estándar del elemento, $\mathbf{a}_e(t)$ es el vector formado por los desplazamientos nodales del elemento y $\mathcal{X}_e(x)$ representa

la función característica o de colocación en Ω_e , definida como

$$\mathcal{X}_e(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in \Omega_e \\ 0 & \text{para } x \notin \Omega_e \end{cases} \quad (3.27)$$

Mediante (3.26), la aproximación del campo de deformaciones "regular" de un elemento se aproxima a través de

$$\tilde{\varepsilon}(x, t) \cong \tilde{\varepsilon}^h(x, t) = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \underbrace{\frac{\partial \tilde{u}_e^h(x, t)}{\partial x}}_{\varepsilon_e^h} \mathcal{X}_e(x) = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \mathbf{B}_e(x) \mathbf{a}_e(t) \mathcal{X}_e(x) \quad (3.28)$$

con $\mathbf{B}_e(x) = \partial \mathbf{N}_e(x) / \partial x$.

Considérese ahora que la aproximación de la parte mejorada de la deformación es discontinua entre elementos y tiene la forma

$$\tilde{\varepsilon}^h(x, t) = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \tilde{\varepsilon}_e^h(x, t) \mathcal{X}_e(x) \quad (3.29)$$

Sea $\hat{\mathcal{V}}^h$ la aproximación por elementos finitos del espacio $\hat{\mathcal{V}}$ de variaciones admisibles de los desplazamientos ($\hat{\mathcal{V}}^h \subset \hat{\mathcal{V}}$) y $\tilde{\mathcal{E}}_\gamma^h$ la aproximación por elementos finitos del espacio $\tilde{\mathcal{E}}_\gamma$ de las variaciones admisibles de las deformaciones mejoradas. La formulación variacional (3.22) para el problema discretizado por elementos finitos se convierte en el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \sigma^h \frac{\partial \hat{\eta}^h}{\partial x} d\Omega = f^{ext}(\hat{\eta}^h) & \hat{\eta}^h \in \hat{\mathcal{V}}^h \\ \int_{\Omega} \sigma^h \tilde{\gamma}^h d\Omega = 0 & \tilde{\gamma}^h \in \tilde{\mathcal{E}}_\gamma^h \end{cases} \quad (3.30)$$

con

$$f^{ext}(\hat{\eta}^h) = \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} f \hat{\eta}^h d\Omega + \sigma^* \hat{\eta}^h|_{\Gamma_\sigma} \quad (3.31)$$

Obsérvese que, según el razonamiento presente en la observación 3.7, la ecuación (3.30)₁ se pudo limitar al dominio $\Omega \setminus \mathcal{S}$. Sin embargo, no se puede hacer lo

mismo para la ecuación (3.30)₂, puesto que la variación $\tilde{\gamma}^h$ puede, en principio, tener componentes no acotadas en S .

Sea $\widehat{\mathcal{E}}_\gamma^h$ la aproximación por elementos finitos del espacio de las variaciones de deformaciones "regulares", definido por

$$\widehat{\mathcal{E}}_\gamma^h := \left\{ \tilde{\gamma}^h = \frac{\partial \hat{\eta}^h}{\partial x} \mid \hat{\eta}^h \in \widehat{\mathcal{V}}^h \right\} \quad (3.32)$$

Se garantiza que el sistema de ecuaciones (3.30) es no singular si se cumple la condición de estabilidad (Simó y Rifai 1990)

$$\boxed{\widehat{\mathcal{E}}_\gamma^h \cap \widehat{\mathcal{E}}_\gamma^h = \emptyset} \quad (3.33)$$

que garantiza que $\partial \hat{\eta}^h / \partial x \neq \tilde{\gamma}^h$ en el sistema de ecuaciones (3.30).

Suponiendo que la variación admisible de la deformación mejorada también puede ser discontinua entre elementos y tiene la forma

$$\boxed{\tilde{\gamma}^h(x, t) = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \tilde{\gamma}_e^h(x, t) \mathcal{X}_e(x)} \quad (3.34)$$

el sistema de ecuaciones (3.30) se transforma en

$$\boxed{\begin{cases} \int_{\Omega \setminus S} \sigma^h \frac{\partial \hat{\eta}^h}{\partial x} d\Omega = f^{ext}(\hat{\eta}^h) & \hat{\eta}^h \in \widehat{\mathcal{V}}^h \\ \int_{\Omega_e} \sigma^h \tilde{\gamma}_e^h d\Omega = 0 & \tilde{\gamma}_e^h \in \widehat{\mathcal{E}}_\gamma^h \quad (e = 1, 2, \dots, n_{elem}) \end{cases}} \quad (3.35)$$

3.6 CONSTRUCCIÓN DEL CAMPO DE DEFORMACIÓN MEJORADA Y DEL ESPACIO DE SU VARIACIÓN

3.6.1 Campo de deformación mejorada

La aproximación por elementos finitos del campo de la tasa de deformaciones, $\dot{\varepsilon}_e^h$, debe reflejar la descripción cinemática (3.10). Así, se define

$$\dot{\varepsilon}_e^h = \frac{\partial \hat{u}_e^h(x, t)}{\partial x} + G_e(x, t) [\dot{u}]_e^h(t) = \dot{\varepsilon}_e^h(x, t) + \dot{\varepsilon}_e^h(x, t) \quad (3.36)$$

donde $G_e(x, t)$ es la función $G_S(x, t)$ limitada al dominio del elemento finito ($G_e(x, t) = G_S(x, t) \chi(x)$) y $[\dot{u}]_e^h$ es la aproximación del campo $[\dot{u}]$ en Ω_e .

Dado el carácter arbitrario de la función $G_S(x, t)$, ésta se puede construir convenientemente de forma que su soporte, Ω_φ , coincida con el dominio del elemento que contiene la discontinuidad $\mathcal{S}$, es decir,

$$\Omega_\varphi := \Omega_e \quad \text{si} \quad \mathcal{S} \subset \Omega_e \quad (3.37)$$

De esta manera, se tiene

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_e(x) & \text{si } \Omega_e = \Omega_\varphi \\ 0 & \text{si } \Omega_e \in \Omega^- \setminus \Omega_\varphi^- \\ 1 & \text{si } \Omega_e \in \Omega^+ \setminus \Omega_\varphi^+ \end{cases} \quad (3.38)$$

siendo $\varphi_e(x)$ una función continua definida en Ω_e , que obedezca

$$\begin{cases} \varphi_e|_{\Gamma_\varphi^-} = 0 \\ \varphi_e|_{\Gamma_\varphi^+} = 1 \end{cases} \quad (3.39)$$

donde ahora Γ_φ^+ y Γ_φ^- coinciden con las extremidades del elemento que contiene la discontinuidad (ver figura 3.5). De esta forma, mediante la definición (3.11), se obtiene

$$G_S(x, t) = \frac{1}{h'(t)} \mu_S(x) - \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \begin{cases} G_e(x, t) & \text{si } \mathcal{S} \subset \Omega_e \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.40)$$

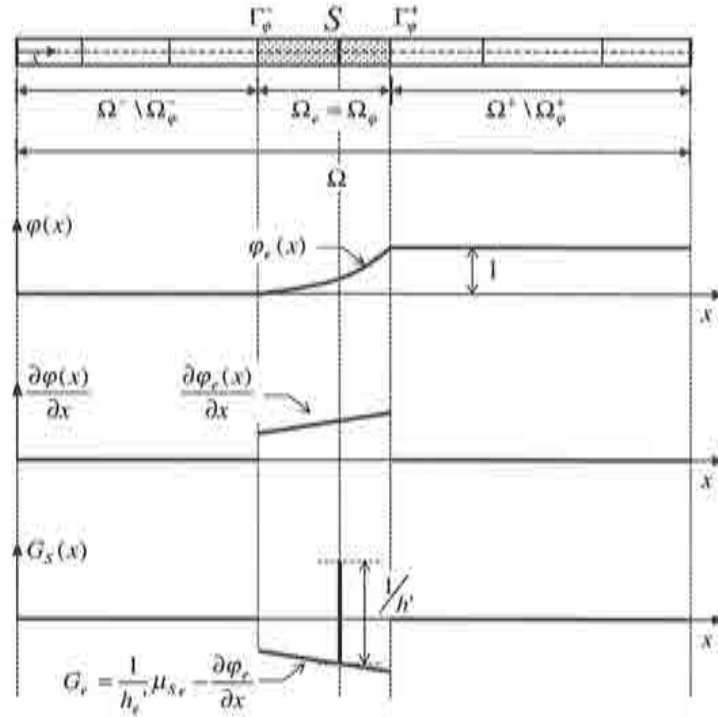


Figura 3.5 Definición de las funciones elementales φ_e y G_e .

con

$$G_e(x, t) = \frac{1}{h'_e(t)} \mu_{S_e}(x) - \frac{\partial \varphi_e(x)}{\partial x} \quad (3.41)$$

Por tanto, teniendo en cuenta la interpolación de la parte "regular" de la tasa de deformación de la ecuación (3.28) y la definición (3.40) en (3.36), las partes "regular" y mejorada del campo de la tasa de deformación quedan

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\epsilon}}_e^h(x, t) &= \mathbf{B}_e(x) \dot{\mathbf{a}}_e(t) && \text{(parte "regular")} \\ \dot{\tilde{\epsilon}}_e^h(x, t) &= G_e(x, t) \dot{\alpha}_e(t) && \text{(parte mejorada)} \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde el parámetro $\alpha_e(t)$ representa el salto en la discontinuidad del elemento e , $\llbracket u \rrbracket_e^h$.

3.6.2 Espacio de las variaciones admisibles de la deformación mejorada (funciones de prueba)

Para llevar a cabo la construcción del espacio $\tilde{\mathcal{E}}_\gamma^h$ de las variaciones admisibles de deformaciones mejoradas $\tilde{\gamma}_e^h$, se deben tener en cuenta los siguientes requisitos:

- (a) La ecuación débil (3.35)₂ debe establecer la igualdad de las tensiones dentro y fuera de la discontinuidad S ($\sigma_s = \sigma_+$);
- (b) La variación de la deformación en $\tilde{\mathcal{E}}_\gamma^h$ debe respetar las condiciones de consistencia y estabilidad de los métodos de deformaciones mejoradas (Simó y Rifai 1990), esto es

$\int_{\Omega_e} \tilde{\gamma}_e^h d\Omega_e = 0 \quad \text{para todo } \tilde{\gamma}_e^h \in \tilde{\mathcal{E}}_\gamma^h \quad (\text{consistencia})$	(3.43)
$\tilde{\mathcal{E}}_\gamma^h \cap \tilde{\mathcal{E}}_\gamma^h = \emptyset \quad (\text{estabilidad})$	

Basándose en la expresión de la deformación mejorada (3.42)₂, se propone que la variación de la deformación mejorada tenga la siguiente estructura

$$\boxed{\tilde{\gamma}_e^h = G_e^*(x) \tilde{\alpha}_e \quad \tilde{\alpha}_e \in \mathbb{R}} \quad (3.44)$$

Reemplazando (3.44) en (3.35)₂, se obtiene

$$\int_{\Omega_e} \sigma^h \tilde{\gamma}_e^h d\Omega_e = \tilde{\alpha}_e \int_{\Omega_e} \sigma^h G_e^*(x) d\Omega_e = 0 \quad \forall \tilde{\alpha}_e \in \mathbb{R} \quad (3.45)$$

que, por razones obvias, impone

$$\int_{\Omega_e} \sigma^h G_e^*(x) d\Omega_e = 0$$

Se estudian ahora dos posibles definiciones alternativas para la función $G_e^*(x)$:

- *Alternativa 1* (Oliver 1996.b):

$$\boxed{G_e^*(x) = \delta_{S_e} - (1 - \mu_{S_e}) \frac{1}{L_e}} \quad (3.46)$$

donde $L_e = m(\Omega_e) (= \int_{\Omega_e} d\Omega_e)$ representa la longitud del elemento, μ_{S_e} es la función de colocación en S_e y δ_{S_e} es la distribución de Dirac situada en la discontinuidad S_e del dominio Ω_e , tal que $\int_{\Omega_e} \sigma^h \delta_{S_e} d\Omega_e = \sigma_{S_e}^h$. Obsérvese que (3.46) satisface las condiciones de estabilidad y convergencia de la ecuación (3.43). Reemplazando (3.46) en (3.35), se obtiene

$$\int_{\Omega_e} \sigma^h G_e^* d\Omega_e = \sigma_{S_e}^h - \frac{1}{L_e} \int_{\Omega_e \setminus S_e} \sigma^h d\Omega_e = 0 \quad (3.47)$$

donde el último término es el valor medio de las tensiones en $\Omega_e \setminus S_e$.

Se verifica, por tanto, que (3.46) impone, de forma promediada, la condición de continuidad de tensiones (3.15)₂. Para el caso de elemento con interpolación lineal de desplazamientos "regulares", los campos de deformación y de tensión son uniformes en $\Omega_e \setminus S_e$ y, por consiguiente, la ecuación (3.46) impone la condición de continuidad de tensiones de forma exacta, independientemente de la posición de S_e en Ω_e .

- *Alternativa 2* :

$$\boxed{G_e^*(x) = \delta_{S_e} - \delta_{+e}} \quad (3.48)$$

donde δ_{+e} representa la distribución de Dirac puesta en el punto vecino de S_e perteneciente al dominio Ω_e^+ , tal que $\int_{\Omega_e} \sigma_e^h \delta_{+e} d\Omega_e = \sigma_{+e}^h$. Procediéndose de forma análoga a la *alternativa 1*, se concluye que la ecuación débil (3.35)₂, impone

$$\int_{\Omega_e} \sigma_e^h G_e^* d\Omega_e = \sigma_{S_e}^h - \sigma_{+e}^h = 0$$

es decir, se establece la continuidad de las tensiones puntualmente, independientemente del tipo de interpolación que se elija para el elemento. Además, se verifica que la ecuación (3.48) satisface las condiciones de estabilidad y convergencia de la ecuación (3.43).

Observación 3.10 Para el caso de elementos con interpolación lineal del campo de desplazamientos, las dos alternativas propuestas son equivalentes.

Observación 3.11 El espacio de deformaciones mejoradas, $\tilde{\mathcal{E}}_\varepsilon^h$, en general no coincide con el espacio de sus variaciones admisibles, $\tilde{\mathcal{E}}_\gamma^h$, estableciendo así una situación similar a la encontrada en las llamadas formulaciones del tipo Petrov-Galerkin (Mikhlin 1964, Zienkiewicz y Taylor 1994).

3.7 ECUACIONES DEL M.E.F. BASADO EN DESPLAZAMIENTOS. FORMA LINEALIZADA

Suponiendo que la variación del desplazamiento "regular", $\hat{\eta}^h$, pertenece al mismo espacio formado por el conjunto de las interpolaciones del desplazamiento "regular", $\hat{u}^h$, es decir,

$$\tilde{\mathcal{V}}^h := \left\{ \hat{\eta}^h \mid \hat{\eta}^h = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \mathbf{N}_e \beta_e \chi_e : \forall \beta_e \in \mathbb{R}^{n_n}, \text{ y } \hat{\eta}^h|_{\Gamma_u} = 0 \right\}$$

y que las variaciones admisibles $\tilde{\gamma}_e^h$ son de la forma propuesta en la ecuación (3.44), las ecuaciones débiles (3.35) se transforman en el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$\boxed{\tilde{\mathbf{f}}^{int} - \tilde{\mathbf{f}}^{ext} = \mathbf{0}} \quad (3.49)$$

siendo

$$\tilde{\mathbf{f}}^{int} = \underset{e=1}{\overset{n_{elem}}{A}} \left(\tilde{\mathbf{f}}_e^{int} \right) \quad \tilde{\mathbf{f}}^{ext} = \underset{e=1}{\overset{n_{elem}}{A}} \left(\tilde{\mathbf{f}}_e^{ext} \right) \quad (3.50)$$

donde $A(\cdot)$ denota el operador de ensamblaje y

$$\tilde{\mathbf{f}}_e^{int} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{f}_e^{int} \\ h_e \end{array} \right\} \quad \tilde{\mathbf{f}}_e^{ext} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{f}_e^{ext} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (3.51)$$

con

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{f}_e^{int} &= \int_{\Omega_e \setminus \mathcal{S}_e} \mathbf{B}_e^T \sigma^h d\Omega_e \\ h_e &= \int_{\Omega_e} G_e^* \sigma^h d\Omega_e \\ \mathbf{f}_e^{ext} &= \int_{\Omega_e \setminus \mathcal{S}_e} \mathbf{N}_e^T f d\Omega_e + (\mathbf{N}_e^T \sigma^*)|_{\Gamma_{\sigma_e}} \end{aligned}} \quad (3.52)$$

Para la solución del sistema de ecuaciones (3.49) usando el método de Newton Raphson, es interesante obtener la forma en tasa de las ecuaciones (3.52)₁ y (3.52)₂, es decir,

$$\dot{\mathbf{f}}_e^{int} = \int_{\Omega_e \setminus \mathcal{S}_e} \mathbf{B}_e^T \dot{\sigma}^h d\Omega_e \quad (3.53)$$

$$\dot{h}_e = \int_{\Omega_e} G_e^* \dot{\sigma}^h d\Omega_e \quad (3.54)$$

Obsérvese que la ecuación (3.53) solamente involucra tensiones en la parte exterior de la discontinuidad. Por tanto, las tensiones en (3.53) pueden expresarse a través de (ver ecuación (3.14))

$$\sigma^h = \Sigma^c(\varepsilon^h) \quad \text{en } \Omega_e \setminus \mathcal{S}_e$$

cuya forma en tasa es

$$\dot{\sigma}^h = D^c \dot{\varepsilon}^h \quad \text{en } \Omega_e \setminus \mathcal{S}_e \quad (3.55)$$

siendo D^c el *operador constitutivo tangente continuo* ($D^c = \frac{\partial \Sigma^c(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}$). Mediante las ecuaciones (3.42) y (3.41), la tasa de deformaciones en $\Omega_e \setminus \mathcal{S}_e$ se escribe como

$$\dot{\varepsilon}^h(x, t) = \mathbf{B}_e(x) \dot{\mathbf{a}}_e(t) - \frac{\partial \varphi_e(x)}{\partial x} \dot{\alpha}_e(t) \quad \text{en } \Omega_e \setminus \mathcal{S}_e \quad (3.56)$$

Reemplazando (3.56) en (3.55) y ésta en (3.53), se concluye que

$$\dot{\mathbf{f}}_e^{int} = \int_{\Omega_e \setminus \mathcal{S}_e} \left[\mathbf{B}_e^T D^c \mathbf{B}_e \quad -\mathbf{B}_e^T D^c \frac{\partial \varphi_e}{\partial x} \right] d\Omega_e \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{a}}_e \\ \dot{\alpha}_e \end{array} \right\} \quad (3.57)$$

Como la ecuación (3.54) involucra las tensiones en todo el dominio, su desarrollo dependerá del tipo de aproximación que se elija para representar el comportamiento en la discontinuidad $\mathcal{S}$. Seguidamente se analizan las dos aproximaciones posibles:

- *Aproximación vía relación constitutiva de continuo*

En este caso se adopta para todo el dominio la relación constitutiva de continuo, tal que (ver ecuación (3.55))

$$\dot{\sigma}^h = D^c \dot{\varepsilon}^h \quad \text{en } \Omega_e \quad (3.58)$$

Además, se considera que la tasa del desplazamiento se describe mediante la ecuación (3.42), esto es

$$\dot{\varepsilon}^h(x, t) = \mathbf{B}_e(x) \dot{\mathbf{a}}_e(t) + G_e(x, t) \dot{\alpha}_e(t) \quad \text{en } \Omega_e \quad (3.59)$$

Reemplazando (3.59) en (3.58) y ésta en (3.54), se obtiene

$$\boxed{h_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} G_e^* D^c \mathbf{B}_e & G_e^* D^c G_e \end{bmatrix} d\Omega_e \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}}_e \\ \dot{\alpha}_e \end{Bmatrix}} \quad (3.60)$$

• *Aproximación vía relación constitutiva discreta*

En este caso, las tasa de la tensión dentro y fuera de la discontinuidad vienen dadas por

$$\begin{cases} \dot{\sigma}^h = D^c \dot{\varepsilon}^h & \text{en } \Omega_e \setminus S_e \\ \dot{\sigma}^h = D^d \llbracket \dot{u} \rrbracket^h = D^d \dot{\alpha}_e & \text{en } S_e \end{cases} \quad (3.61)$$

donde D^d representa el *operador constitutivo tangente discreto* ($D^d = \partial \Sigma^d(\llbracket u \rrbracket) / \partial \llbracket u \rrbracket$).

Teniendo en cuenta que

$$\dot{\varepsilon}^h(x, t) = \mathbf{B}_e(x) \dot{\mathbf{a}}_e(t) - \frac{\partial \varphi_e(x)}{\partial x} \dot{\alpha}_e(t) \quad \text{en } \Omega_e \setminus S_e \quad (3.62)$$

la ecuación (3.54) se transforma finalmente en

$$\boxed{h_e = \left[\int_{\Omega_e \setminus S_e} G_e^* D^c \mathbf{B}_e d\Omega_e \quad D^d - \int_{\Omega_e \setminus S_e} G_e^* D^c \frac{\partial \varphi_e}{\partial x} d\Omega_e \right] \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}}_e \\ \dot{\alpha}_e \end{Bmatrix}} \quad (3.63)$$

3.7.1 Solución del sistema de ecuaciones no lineal

Matriz tangente elemental

Es interesante reunir las ecuaciones linealizadas (3.57), (3.60) (o (3.63)) en una única de la forma

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_e^{int} \\ \dot{h}_e \end{Bmatrix}}_{\dot{\mathbf{f}}_e^{int}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{aa} & \mathbf{K}_e^{a\alpha} \\ \mathbf{K}_e^{\alpha a} & \mathbf{K}_e^{\alpha\alpha} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_e} \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}}_e \\ \dot{\alpha}_e \end{Bmatrix}}_{\dot{\mathbf{a}}_e} \quad (3.64)$$

donde $\mathbf{K}_e$ representa la *matriz tangente elemental*. Las expresiones de las submatrices en las que sólo intervienen valores en $\Omega_e \setminus S_e$ son

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e^{aa} &= + \int_{\Omega_e \setminus S_e} \mathbf{B}_e^T D^c \mathbf{B}_e d\Omega_e \\ \mathbf{K}_e^{a\alpha} &= - \int_{\Omega_e \setminus S_e} \mathbf{B}_e^T D^c \frac{\partial \varphi_e}{\partial x} d\Omega_e \end{aligned} \quad (3.65)$$

Como se vió anteriormente, las expresiones de las otras submatrices dependen del tipo de aproximación que se elige para el comportamiento de la discontinuidad S , o sea

$$\begin{aligned} \text{Aproximación vía} & \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{K}_e^{aa} &= \int_{\Omega_e} G_e^* D^c \mathbf{B}_e d\Omega_e \\ \text{relación const. continua} & \quad \mathbf{K}_e^{a\alpha} = \int_{\Omega_e} G_e^* D^c G_e d\Omega_e \end{aligned} \right. \\ \text{Aproximación vía} & \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{K}_e^{aa} &= \int_{\Omega_e \setminus S_e} G_e^* D^c \mathbf{B}_e d\Omega_e \\ \text{relación const. discreta} & \quad \mathbf{K}_e^{a\alpha} = D^d - \int_{\Omega_e \setminus S_e} G_e^* D^c \frac{\partial \varphi_e}{\partial x} d\Omega_e \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Se puede escribir la forma linealizada del vector de fuerzas internas generalizado como

$$\dot{\tilde{\mathbf{f}}}^{int} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{f}}^{int}}{\partial \tilde{\mathbf{a}}} \dot{\tilde{\mathbf{a}}} = \mathbf{K} \dot{\tilde{\mathbf{a}}} \quad (3.67)$$

donde $\tilde{\mathbf{a}}$ representa el vector formado por las variables independientes del problema, o sea, desplazamientos nodales y los parámetros incompatibles α_e de los

elementos, y $\mathbf{K}$ es la matriz de rigidez global, construida a través del ensamblaje

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_{elem}} (\mathbf{K}_e) \quad (3.68)$$

Integración de la deformación en el "tiempo"

Como el campo de deformaciones no ha sido definido, su determinación debe resultar de la integración de su tasa de variación, definido por (ver ecuación (3.59))

$$\dot{\varepsilon}^h(x, t) = \mathbf{B}_e(x) \dot{\mathbf{a}}_e + \left[\frac{1}{h'_e(t)} \mu_{S_e}(x) - \frac{\partial \varphi_e(x)}{\partial x} \right] \dot{\alpha}_e \quad (3.69)$$

La variación de la deformación en el intervalo de tiempo Δt se obtiene integrando la expresión anterior, tal que

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon^h &= \int_t^{t+\Delta t} \dot{\varepsilon}^h dt \\ &= \mathbf{B}_e(x) \Delta \mathbf{a}_e - \frac{\partial \varphi_e(x)}{\partial x} \Delta \alpha_e + \mu_{S_e}(x) \int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{h'_e(t)} \dot{\alpha}_e dt \end{aligned} \quad (3.70)$$

donde $\Delta(\bullet)$ representa la variación de la variable $(\bullet)$ en el intervalo de "tiempo" Δt , es decir, $\Delta(\bullet) = (\bullet)^{t+\Delta t} - (\bullet)^t$. La integral del segundo miembro de la ecuación anterior, por presentar el término $\frac{1}{h'_e(t)}$ que, en principio, varía con el tiempo, no se puede calcular exactamente y, por esto, se recurre aquí a la aproximación mediante la regla generalizada del punto medio, de la cual se obtiene

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{1}{h'_e(t)} \dot{\alpha}_e dt = \frac{1}{h'_e{}^\beta} \Delta \alpha_e \quad (3.71)$$

con

$$h'_e{}^\beta = h'_e{}^t (1 - \beta) + h'_e{}^{t+\Delta t} \beta \quad \text{con } 0 \leq \beta \leq 1 \quad (3.72)$$

Si $\beta = 0$ se obtiene el algoritmo de integración de Euler hacia delante, que, por no involucrar la variable $h'_e{}^{t+\Delta t}$, es explícito. Sin embargo, como es sabido,

⁵ Cabe recordar que el término tiempo aquí representa un pseudo-tiempo, que se asocia al proceso de carga.

dicho algoritmo converge muy lentamente a la solución exacta a medida que se disminuye $\Delta\tau$, y además, puede ser inestable para valores largos de $\Delta\tau$. El valor $\beta = 1$ corresponde al algoritmo de Euler hacia atrás (implícito). En este trabajo se adoptará el valor $\beta = 0.5$, que resulta en un algoritmo que, a pesar de ser implícito, es incondicionalmente estable y converge cuadráticamente, lo que permite obtener buenas respuestas con pasos de tiempo grandes.

De esta manera, la deformación correspondiente al final de un intervalo de tiempo, resulta

$$\begin{aligned}\varepsilon^{h^{t+\Delta t}} &= \varepsilon^{h^t} + \Delta\varepsilon^h = \varepsilon^{h^t} + \mathbf{B}_e \Delta\mathbf{a}_e + \left[\frac{1}{h_e^{\mu\beta}} \mu_{\mathcal{S}_e} - \frac{\partial\varphi_e}{\partial x} \right] \Delta\alpha_e \\ &= \varepsilon^{h^t} + \mathbf{B}_e \Delta\mathbf{a}_e + G_e^\beta \Delta\alpha_e\end{aligned}\quad (3.73)$$

Integración espacial vía cuadratura modificada

Para minimizar los cambios que se deben efectuar en la formulación estándar de elementos finitos para incluir los efectos de las discontinuidad, se propone utilizarse el procedimiento numérico de integración estándar sobre el dominio del elemento, pero con la introducción de cambios en la regla de cuadratura.

En la formulación estándar de elementos finitos, la integración de un campo genérico $F(x)$ sobre el dominio Ω_e puede escribirse

$$\int_{\Omega_e} F(x) d\Omega_e = \sum_{i=1}^{n_{int}} F(\xi_i) w_i$$

donde ξ representa la coordenada espacial local y ξ_i , w_i corresponden a las coordenadas de los puntos y los pesos de integración, respectivamente, para una determinada regla de cuadratura (el jacobiano de la transformación entre las coordenadas x y ξ se considera incluido en w_i).

Suponiendo que la posición de la discontinuidad en el elemento es conocida *a priori*, se introduce un punto de integración adicional en dicha posición para representar el valor del campo $F(x)$ en la discontinuidad $\mathcal{S}_e$. Así, los puntos de integración regulares quedan asociados al valor del campo en $\Omega_e \setminus \mathcal{S}_e$ y, recordando

que la discontinuidad S tiene dimensión nula, puede escribirse

$$\boxed{\int_{\Omega_e \setminus S_e} F(x) d\Omega_e = \sum_{i=1}^{n_{int}} F(\xi_i) w_i} \quad (3.74)$$

Se concluye, por tanto, que las integraciones sobre el dominio $\Omega_e \setminus S_e$ que intervienen en las ecuaciones (3.52), (3.65) y (3.66) se efectúan de manera estándar, utilizando los puntos de integración regulares.

Queda por definir la regla integración que se utilizará en las integrales sobre Ω_e , que, como puede verificarse, son del tipo

$$\int_{\Omega_e} G_e^*(x) F(x) d\Omega_e = \begin{cases} \int_{\Omega_e} (\delta_{S_e} - \frac{1}{L_e}) F(x) d\Omega_e & \text{(alternativa 1)} \\ \int_{\Omega_e} (\delta_{S_e} - \delta_{+e}) F(x) d\Omega_e & \text{(alternativa 2)} \end{cases} \quad (3.75)$$

El problema adicional, por tanto, corresponde a la integración de la distribución delta de Dirac sobre Ω_e , que, por definición, debe cumplir

$$\int_{\Omega_e} \delta_{x_e} F(x) d\Omega_e = F(x_e) \quad \forall x_e \in \Omega_e \quad (3.76)$$

Sean ξ_x la coordenada local de un punto de integración X localizado en $x_e \in \Omega_e$, y w_x su correspondiente peso de integración. En el procedimiento numérico de integración, se considera que la distribución delta de Dirac y la función de colocación en X adquieren los siguientes valores en un punto de integración i :

$$\delta_{x_e}(\xi_i) = \tilde{\delta}_i^X = \begin{cases} \frac{1}{w_x} & i = X \\ 0 & i \neq X \end{cases} \quad \mu_{x_e}(\xi_i) = \tilde{\mu}_i^X = \begin{cases} 1 & i = X \\ 0 & i \neq X \end{cases} \quad (3.77)$$

Obsérvese que la ecuación (3.76) se cumple para la forma de la distribución supuesta en la ecuación (3.77), es decir,

$$\int_{\Omega_e} \delta_{x_e}(x) F(x) d\Omega_e = \sum_{i=1}^{n_{int}} \tilde{\delta}_i^X F(\xi_i) w_i = F(\xi_x) = F(x_e)$$

Considerando que el punto de integración adicional, ξ_0 , corresponde a la discontinuidad S_e y que w_0 representa su respectivo peso de integración, se puede escribir

$$\int_{\Omega_e} G_e^*(x) F(x) d\Omega_e = \sum_{i=0}^{n_{int}} G_e^*(\xi_i) F(\xi_i) \quad (3.78)$$

donde la definición de G_e^* dependerá de la alternativa que se adopte para la función $G_e^*(x)$:

- *Alternativa 1:* $G_e^*(x) = \delta_{S_e} - (1 - \mu_{S_e}) \frac{1}{L_e}$

En este caso se debe tener

$$G_e^*(\xi_i) = \delta_i^0 - \frac{1}{L_e} (1 - \mu_i^0) \quad (3.79)$$

Obsérvese que sustituyendo (3.79) en (3.78), se obtiene

$$\int_{\Omega_e} G_e^*(x) F(x) d\Omega_e = \underbrace{F(\xi_0)}_{\text{valor de } F \text{ en } S_e} - \frac{1}{L_e} \underbrace{\sum_{i=1}^{n_{int}} F(\xi_i) w_i}_{\int_{\Omega_e \setminus S_e} F(x) d\Omega_e} \quad (3.80)$$

- *Alternativa 2:* $G_e^*(x) = \delta_{S_e} - \delta_{X_+}$

Aquí, se hace

$$G_e^*(\xi_i) = \delta_i^0 - \delta_i^{X_+} \quad (3.81)$$

donde X_+ representa el punto de integración del dominio $\Omega_e \setminus S_e$, que se elige para representar la vecindad Ω_e^+ de S_e . Obsérvese que sustituyendo (3.81) en (3.78), resulta

$$\int_{\Omega_e} G_e^*(x) F(x) d\Omega_e = \underbrace{F(\xi_0)}_{\text{valor de } F \text{ en } S_e} - \underbrace{F(\xi_{X_+})}_{\text{valor de } F \text{ en } \Omega_e^+} \quad (3.82)$$

Observación 3.12 En los puntos de integración regulares ($i = 1, 2, \dots, n_{int}$) se debe utilizar la descripción cinemática y la relación constitutiva correspondiente a la parte exterior $\Omega_e \setminus S_e$ del dominio del elemento. Para el punto de integración adicional ($i = 0$) se

debe utilizar la descripción cinemática y la relación constitutiva que corresponde a la discontinuidad S_e .

Observación 3.13 La posición del punto de integración adicional en Ω_e puede escogerse convenientemente, de manera que coincida con la posición de uno de los puntos de integración regular. En este punto de integración "doble" se contrasta las distintas descripciones cinemáticas y comportamientos constitutivos, referentes a la parte exterior e interior de la discontinuidad.

3.8 EJEMPLO NUMÉRICO REPRESENTATIVO

Como ejemplo representativo de la aplicación de la aproximación numérica descrita anteriormente, se considera aquí la simulación numérica la barra de la figura 3.7, sometida a un desplazamiento δ creciente en una de las extremidades. Puesto que el problema es homogéneo, la posición de la superficies de discontinuidad S no está definida y, a efectos de la simulación numérica, se la considera localizada en la sección media de la barra. Se supone que el material sigue la ley constitutiva de elasto-plasticidad con ablandamiento lineal y se utiliza la *aproximación vía relación constitutiva de continuo* para describir el comportamiento en S . El modelo numérico se obtiene a través de la discretización del dominio de la barra en elementos finitos de igual tamaño con interpolación lineal de los desplazamientos "regulares" $\hat{u}$. Para la integración espacial en el dominio de cada elemento se ha utilizado un punto de integración para describir las variables de $\Omega \setminus S$ y otro para las variables de S . A fin de excitar el modo incompatible (salto) del elemento que contiene la discontinuidad S , se ha supuesto la tensión de fluencia, σ_y , del punto de integración correspondiente a $\Omega \setminus S$ del elemento ligeramente superior a la del punto de integración correspondiente a S . Se ha adoptado la función de forma estándar asociada a uno de los nodos del elemento para representar la función φ_e . Para el elemento finito con interpolación lineal de $\hat{u}$ adoptado, las dos alternativas propuestas para la función G_e^* (ecuaciones 3.46 y 3.48) coinciden.

Los parámetros que definen el problema son:

$$l = 10.0, A = 1.0, E = 100.0, \sigma_y = 1.0 \text{ y } \bar{H} = 2.5 \quad (3.83)$$

La figura 3.8.a muestra la curva de fuerza F versus desplazamiento δ de la extremidad de la barra, utilizando 1, 5 y 45 elementos finitos. En dicha figura se

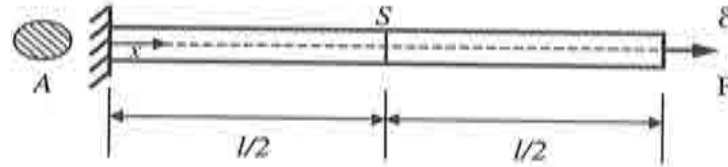


Figura 3.7 Ejemplo de tracción uniaxial 1D

puede comprobar la absoluta independencia de la discretización. Es importante remarcar también que la misma respuesta se obtiene para cualquier valor de la variable h' (ver apartado 2.7). La curva de la figura 3.8.b se refiere a la relación discreta entre el salto $[[u]]$ y la tensión σ , que se obtiene para las tres discretizaciones. Dicha relación resulta de la aproximación vía relación constitutiva de continuo y refleja exactamente la relación discreta $\dot{\sigma} = [[\dot{u}]] \bar{H}$, que se deduce del análisis de discontinuidad fuerte (ver apartado 2.6).

En la figura 3.9 se presentan los valores del desplazamiento, u , y de su parte "regular", $\hat{u}$, a lo largo de la barra (discretizada en 5 elementos) para algunos instantes del proceso de carga entre el inicio de fluencia ($\delta = 0.10$) y el relajamiento completo de las tensiones ($\delta = 0.40$). Es importante observar que, aunque el campo "regular" $\hat{u}$ varía de acuerdo con la discretización, el campo de desplazamiento u que se obtiene para este caso reproduce la respuesta exacta discontinua, independientemente del número de elementos del modelo numérico.

Finalmente, en la figura 3.10 se representan los valores de $\hat{u}$ a lo largo de la barra en el instante correspondiente al relajamiento total de las tensiones ($\delta = 0.40$) para las distintas discretizaciones. En ella se observa que la parte "regular" $\hat{u}$ tiende a igualarse al propio campo de desplazamiento discontinuo u con el refinamiento de la discretización.

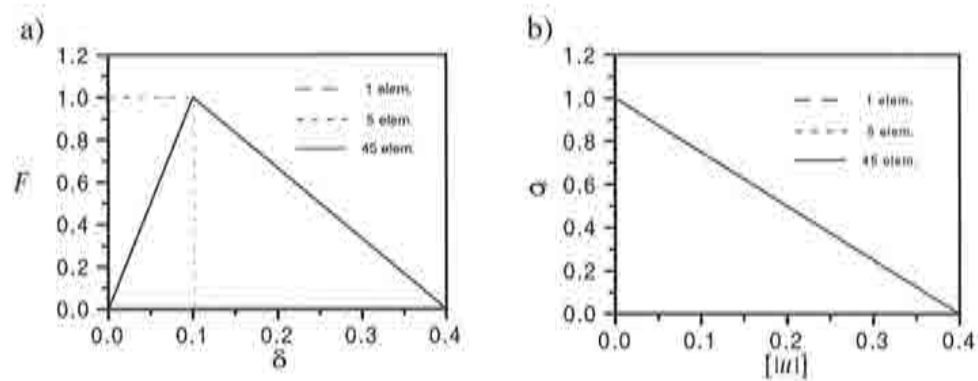


Figura 3.8 Solución numérica para diferentes discretizaciones. a) Curva fuerza versus desplazamiento. b) Relación discreta entre tensión y salto en S .

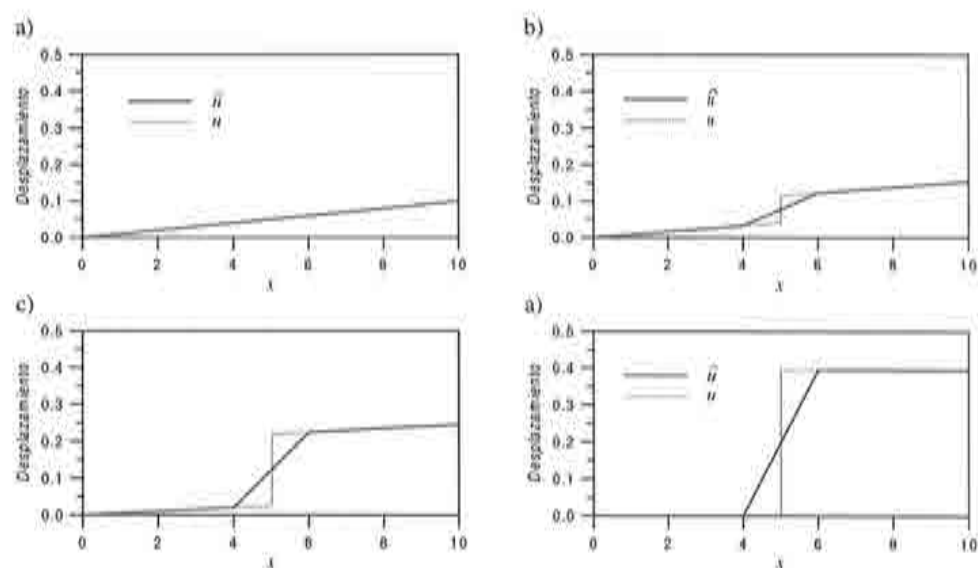


Figura 3.9 Desplazamientos u y $\hat{u}$ en algunos instantes del proceso de carga, obtenidos utilizando cinco elementos finitos.

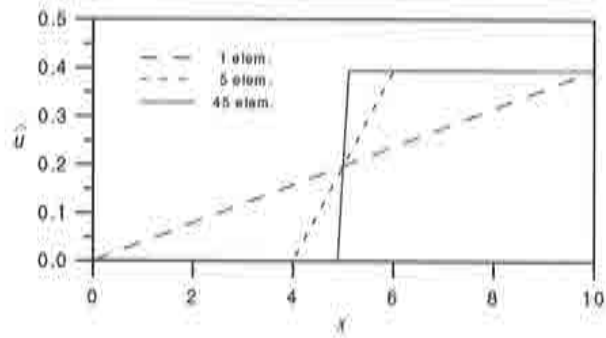


Figura 3.10 Desplazamiento regular $\hat{u}$ obtenido para diferentes discretizaciones cuando $\delta = 0.40$.

Capítulo 4

DISCONTINUIDADES FUERTES EN MEDIOS BIDIMENSIONALES

4.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 2 se ha demostrado que en problemas unidimensionales la *discontinuidad fuerte* (saltos en el campo del desplazamiento) es consistente con el régimen de ablandamiento en medios dotados de ecuaciones constitutivas inelásticas de tipo local e independientes de la velocidad (*rate-independent*). La discontinuidad fuerte se ha interpretado como la situación límite de la *discontinuidad débil* (salto en el campo de deformación) cuando el ancho de la banda de localización tiende a cero. Como consecuencia, la deformación en la banda adquiere un carácter distribucional (delta de Dirac) y, para que el problema tenga sentido físico y matemático, el inverso del *módulo de ablandamiento* también debe tener carácter distribucional. Además, se ha demostrado que en régimen de discontinuidad fuerte la relación constitutiva de continuo (tensión versus deformación) se transforma de forma natural en una relación constitutiva discreta intrínseca entre tensión y salto del desplazamiento en la discontinuidad, estableciendo así la conexión con los modelos de *fisura discreta cohesiva* (Hilleborg *et al.* 1976). Este hecho es el factor responsable de la unicidad de la solución del correspondiente problema de contorno. (Oliver, Cervera y Manzoli (1997)).

De una manera más general que en el análisis de discontinuidades fuertes presentado por primera vez en Simó, Oliver y Armero (1993), a partir de la interpretación de la discontinuidad fuerte como un caso límite de la débil, ha sido posible establecer la conexión que debe existir entre las condiciones para la formación de discontinuidad fuerte y las condiciones de localización (bifurcación discontinua), asociadas a la formación de la discontinuidad débil (Nadai 1931; Hill 1958; Rudinicki y Rice 1975; Rice 1976; Ottosen y Runesson 1991; Ottosen *et al.* 1991, entre otros). Para problemas unidimensionales se ha demostrado que las dos condiciones coinciden y, por tanto, la localización siempre puede tener lugar en régimen de discontinuidad fuerte. A pesar de esto, con el objeto de facilitar el entendimiento de la formulación general, en el capítulo 2 se han introducido los ingredientes necesarios para contemplar un posible *mecanismo*

de transición (modelo de ancho de banda variable) entre la bifurcación y el régimen de discontinuidad fuerte. Como se verá a continuación, dicho mecanismo de transición es indispensable para la formación de la discontinuidad fuerte en problemas multidimensionales, donde en general la bifurcación en forma de discontinuidad débil es precursora de la discontinuidad fuerte.

En este capítulo se extiende la formulación presentada en el capítulo 2 para la representación de discontinuidades fuertes en problemas bidimensionales. Los estudios se centran en las familias de modelos constitutivos elasto-plásticos (Simó y Hughes) y de degradación elástica escalar (Simó y Ju 1987; Oliver *et al.* 1990), locales e independientes de la velocidad.

En el apartado 4.2 se presentan las descripciones de los campos (tasas) de desplazamientos y deformaciones de medios bidimensionales discontinuos, distinguiendo las dos posibles formas de discontinuidades (débil y fuerte). Se propone también una cinemática alternativa para representar los dos tipos de discontinuidades en una estructura única, dependiendo de la variable h , que se asocia al ancho de banda de localización. En el apartado 5.3 se definen las ecuaciones que gobiernan el problema de medios discontinuos, considerando la cinemática representativa propuesta. En el apartado 4.4 se especializa el análisis de discontinuidades en medios elasto-plásticos. En este análisis se obtienen las condiciones para la bifurcación y para la formación de la discontinuidad fuerte. Además, a partir del análisis de discontinuidad fuerte, se demuestra que bajo este régimen, la relación constitutiva de continuo (tensión versus deformación) da lugar automáticamente a una relación constitutiva discreta entre el vector tracción y el salto en la discontinuidad, recuperando el concepto de *fisura discreta cohesiva* (Hilleborg *et al.* 1976). Considerando algunas condiciones especiales, se deducen las relaciones constitutivas discretas para algunos criterios de fluencia corrientes. Debido a que en general las condiciones de discontinuidad fuerte no se cumplen en el momento de la bifurcación, se pone en evidencia la necesidad de una fase de transición entre la bifurcación, que ocurre en régimen de discontinuidad débil ($h \neq 0$), y el inicio del régimen de discontinuidad fuerte ($h \rightarrow 0$). Por ello se propone un modelo de variación del ancho de banda en función de la variable interna tipo tensión, q , que es acotada a lo largo de proceso de carga. Finalmente, se demuestra la relación que existe entre el parámetro de ablandamiento intrínseco, que gobierna el comportamiento no lineal del material en régimen de discontinuidad fuerte, y la *energía de fractura*, G_f . El concepto de *energía de fractura* como propiedad del material proviene de la Mecánica de Fractura no Lineal (Hilleborg *et al.* 1976; Bazant y Oh 1983), y ha sido utilizado por varios autores para la obtención de soluciones independientes del tamaño de la malla de elementos finitos en el contexto de los llamados modelos de *fisura distribuida* (Willan *et al.* 1984, Cervera *et al.* 1987, Oliver *et al.* 1990, Oller

1988). Por último, en el apartado 4.5 se extiende la formulación a medios con degradación elástica escalar. En el anejo B se presenta una revisión de la teoría general de localización de las deformaciones y, de manera diferente a la presentada en Ottosen, Runesson y Peric (1991), se introduce un procedimiento alternativo para la obtención de la condición de bifurcación discontinua, sin recurrir al análisis de valores propios del tensor constitutivo tangente.

4.2 CINEMÁTICA DE MEDIOS DISCONTINUOS

Considérese el dominio bidimensional $\Omega \in \mathbb{R}^2$ formado por los puntos materiales $\mathbf{x}$, y una línea material $\mathcal{S}$ en Ω , con normal $\mathbf{n}$ (ver figura 4.1.a), denominada *línea de discontinuidad*. Sea un sistema de coordenadas ortogonal curvilíneo ξ y η , tal que $\mathcal{S}$ corresponde a la línea coordenada η ($\mathcal{S} := \{\mathbf{x}(\xi, \eta) \in \Omega ; \xi = 0\}$). Sea $\{\hat{\mathbf{e}}_\xi, \hat{\mathbf{e}}_\eta\}$ la base física (ortogonal) asociada a dicho sistema de coordenadas y $r_\xi(\xi, \eta)$ y $r_\eta(\xi, \eta)$ los factores de escala correspondientes, tales que $ds_\xi = r_\xi d\xi$ y $ds_\eta = r_\eta d\eta$, donde ds_ξ y ds_η son, respectivamente, los diferenciales de longitud de arco a lo largo de las líneas coordenadas ξ y η . Considérense también las líneas $\mathcal{S}^+$ y $\mathcal{S}^-$ coincidentes con las líneas de coordenadas $\xi = \xi^+$ y $\xi = \xi^-$, respectivamente, delimitando la *banda de discontinuidad*, $\Omega^h := \{\mathbf{x}(\xi, \eta) ; \xi \in [\xi^-, \xi^+]\}$. El ancho representativo de Ω^h , denominado *ancho de banda*, se considera como $h(\eta) = r_\xi(0, \eta)(\xi^+ - \xi^-)$. Por último, se definen los dominios Ω^+ y Ω^- como las regiones de $\Omega \setminus \Omega^h$ a las que apuntan los vectores $\mathbf{n}$ y $-\mathbf{n}$, respectivamente, de manera que $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Omega^h$ (ver figura 4.1.a).

4.2.1 Cinemática de discontinuidad débil

Considérese la descripción del campo tasa de desplazamientos en Ω de la forma

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{H}_{\Omega^h}(\xi, t) [\![\dot{\mathbf{u}}]\!](\eta, t) \quad (4.1)$$

donde $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ y $[\![\dot{\mathbf{u}}]\!](\eta, t)$ son campos de continuidad $\mathcal{C}^0$ en Ω . La función $\mathcal{H}_{\Omega^h}(\xi, t)$ representa la *función rampa*, también continua en Ω , definida de la forma

$$\mathcal{H}_{\Omega^h} = \begin{cases} 0 & \mathbf{x} \in \Omega^- (\xi \leq \xi^-) \\ 1 & \mathbf{x} \in \Omega^+ (\xi \geq \xi^+) \\ \frac{\xi - \xi^-}{\xi^+ - \xi^-} & \mathbf{x} \in \Omega^h (\xi^- < \xi < \xi^+) \end{cases} \quad (4.2)$$

La función $\mathcal{H}_{\Omega^h}$ presenta un salto unitario entre $\mathcal{S}^+$ y $\mathcal{S}^-$ sobre una misma línea coordenada ξ ($[\![\mathcal{H}_{\Omega^h}]\!] = \mathcal{H}_{\Omega^h}(\xi^+, \eta) - \mathcal{H}_{\Omega^h}(\xi^-, \eta) = 1 \ \forall \eta$). A partir de

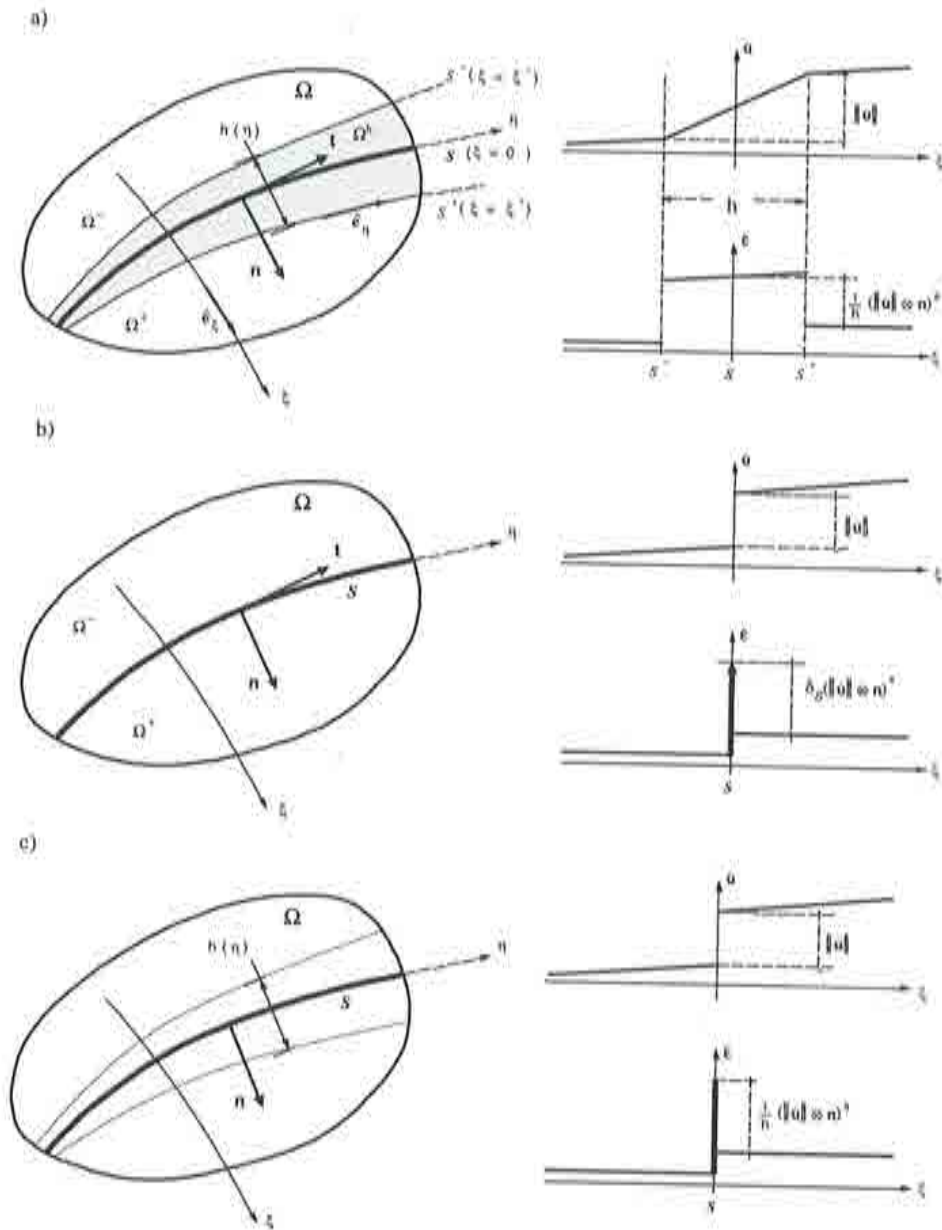


Figura 4.1 Cinemática: a) Cinemática de la discontinuidad débil. b) Cinemática de la discontinuidad fuerte. c) Cinemática regularizada de la discontinuidad fuerte.

la definición de $\mathcal{H}_{\Omega^h}$ en (4.2), su correspondiente gradiente se expresa de la forma

$$\begin{aligned}\nabla \mathcal{H}_{\Omega^h} &= \frac{1}{r_\xi} \frac{\partial \mathcal{H}_{\Omega^h}}{\partial \xi} \hat{\mathbf{e}}_\xi + \frac{1}{r_\eta} \frac{\partial \mathcal{H}_{\Omega^h}}{\partial \eta} \hat{\mathbf{e}}_\eta = \mu_{\Omega^h} \frac{1}{h_\xi} \hat{\mathbf{e}}_\xi \\ h_\xi(\xi, \eta) &= r_\xi(\xi, \eta) (\xi^+ - \xi^-) \\ h_\xi(0, \eta) &= r_\xi(0, \eta) (\xi^+ - \xi^-) = h(\eta)\end{aligned}\quad (4.3)$$

donde μ_{Ω^h} es la función de colocación definida en Ω^h ($\mu_{\Omega^h} = 1 \forall \mathbf{x} \in \Omega^h$ y $\mu_{\Omega^h} = 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega^h$). Teniendo en cuenta la ecuación (4.3), la tasa de deformaciones cinemáticamente compatibles con (4.1) viene dada por

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}} = \underbrace{\nabla^s \dot{\mathbf{u}} + \mathcal{H}_{\Omega^h} \nabla^s [\![\dot{\mathbf{u}}]\!] }_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \text{ (continuo)}} + \underbrace{\mu_{\Omega^h} \frac{1}{h_\xi} ([\![\dot{\mathbf{u}}]\!] \otimes \hat{\mathbf{e}}_\xi)^s}_{[\![\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]\!] \text{ (discontinuo)}} \quad (4.4)$$

donde $(\bullet)^s$ indica la parte simétrica de $(\bullet)$. El campo tasa de deformaciones (4.4) se obtiene como la suma de la parte $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t)$ y la parte discontinua $[\![\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]\!](\mathbf{x}, t)$, que presenta saltos en $\mathcal{S}^+$ y $\mathcal{S}^-$ (ver figura 4.1.a).

Observación 4.1 La *cinemática de discontinuidad débil*, definida por las ecuaciones (4.1) y (4.4), se caracteriza por presentar el campo (tasa) de deformaciones discontinuo, pero acotado, mientras que el campo (tasa) de desplazamientos es continuo.

4.2.2 Cinemática de discontinuidad fuerte

La discontinuidad fuerte se considera el caso límite de la discontinuidad débil, cuando la banda Ω^h se colapsa en una línea de discontinuidad $\mathcal{S}$ (ver figura 4.1.b), es decir, cuando $\mathcal{S}^+$ y $\mathcal{S}^-$ tienden a $\mathcal{S}$ simultáneamente (con cierto abuso de notación, $\xi^+ \rightarrow 0$, $\xi^- \rightarrow 0$, $h(\eta) \rightarrow 0$ y, por tanto $\Omega^h \rightarrow \mathcal{S}$, ver figura 4.1.a). En este caso, la función rampa (4.2) se transforma en la función escalón $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ ($\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega^-$ y $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = 1 \forall \mathbf{x} \in \Omega^+$) y el campo tasa de desplazamientos (4.1) se reescribe de la forma

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{H}_{\mathcal{S}} [\![\dot{\mathbf{u}}]\!](\mathbf{x}, t) \quad (4.5)$$

El campo tasa de deformaciones cinemáticamente compatible viene ahora dado por

$$\dot{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}} = \underbrace{\nabla^s \dot{\mathbf{u}} + \mathcal{H}_S \nabla^s [\![\dot{\mathbf{u}}]\!]}_{\dot{\epsilon} \text{ (acotado)}} + \underbrace{\delta_S ([\![\dot{\mathbf{u}}]\!] \otimes \mathbf{n})^s}_{[\![\dot{\epsilon}]\!] \text{ (no acotado)}} \quad (4.6)$$

donde δ_S es la *distribución delta de Dirac* de línea situada sobre S ($\int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \delta_S d\Omega = \int_S \varphi(\mathbf{x}) dS \quad \forall \varphi(\mathbf{x}) \in C^0(\Omega)$). Nótese que el campo (tasa) de deformaciones puede descomponerse en $\dot{\epsilon}$, que presenta, como máximo, una discontinuidad acotada, y la parte no acotada $\delta_S ([\![\dot{\mathbf{u}}]\!] \otimes \mathbf{n})^s$.

Observación 4.2 Al contrario que en el caso de la cinemática de discontinuidad débil, la cinemática de discontinuidad fuerte se caracteriza por la presencia de deformaciones no acotadas en la línea de discontinuidad S .

4.2.3 Cinemática representativa de las discontinuidades débil y fuerte.

Finalmente, considérese la cinemática descrita por las siguientes expresiones de las tasas de desplazamientos y deformaciones:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{H}_S [\![\dot{\mathbf{u}}]\!](\mathbf{x}, t) \quad (4.7)$$

$$\dot{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\nabla^s \dot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathcal{H}_S \nabla^s [\![\dot{\mathbf{u}}]\!]}_{\dot{\epsilon} \text{ (regular)}} + \underbrace{\mu_S \frac{1}{h(\eta)} ([\![\dot{\mathbf{u}}]\!] \otimes \mathbf{n})^s}_{[\![\dot{\epsilon}]\!] } \quad (4.8)$$

donde μ_S es la función de colocación situada sobre S ($\mu_S(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in S$, $\mu_S(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus S$).

Observación 4.3 Si $h(\eta) \neq 0$, la cinemática definida por las ecuaciones (4.7) y (4.8) puede considerarse como la cinemática *representativa* de la discontinuidad débil, descrita por las ecuaciones (4.1) y (4.4) (ver figura 4.1.c), siempre que:

- El campo $\dot{\mathbf{u}}$ en la ecuación (4.8) presenta un salto de valor $[\![\dot{\mathbf{u}}]\!]$ en la discontinuidad S , mientras que, en la ecuación (4.4), el salto se produce entre ambos lados S^+ y S^- de la banda Ω^h . Si el ancho de la banda $h(\eta)$ es pequeño comparado con la dimensión típica de Ω , el primero es representativo del segundo.

El término $\dot{\varepsilon}$ del campo tasa de deformaciones de la ecuación (4.8) se representa a través de la función escalón $\mathcal{H}_S$, mientras que en la ecuación (4.4) la misma parte se representa a través de la función rampa $\mathcal{H}_{\Omega^h}$. Por otro lado, la parte $[[\dot{\varepsilon}]]$ de las dos ecuaciones coincide en los puntos de S (nótese que $h_\varepsilon(0, \eta) = h(\eta)$, ver ecuación (4.3)₃, y que $\hat{e}_\varepsilon(0, \eta) = \mathbf{n}(\eta)$, ver figura 4.1.a). Por tanto, si $h(\eta)$ es relativamente pequeño en comparación con el tamaño típico de Ω , el campo tasa de deformaciones (4.8) es representativo de la descripción (4.4).

Observación 4.4 Cuando el ancho de banda $h(\eta)$ tiende a cero, la cinemática descrita por (4.7) y (4.8) tiende a la cinemática de discontinuidad fuerte (4.5) y (4.6). Nótese que cuando $h(\eta) \rightarrow 0$, entonces $\mu_S/h(\eta) \rightarrow \delta_S$.

Observación 4.5 Salvo cuando $h(\eta) \rightarrow 0$, el campo tasa de deformaciones (4.8) no es cinemáticamente compatible con el campo tasa de desplazamientos (4.7), es decir $\nabla^s \dot{\mathbf{u}} \neq \dot{\varepsilon}$, puesto que $\nabla \mathcal{H}_S = \delta_S \otimes \mathbf{n} \neq \frac{\mu_S}{h(\eta)} \otimes \mathbf{n}$.

4.3 ECUACIONES DE GOBIERNO

Considérese el contorno $\partial\Omega$ del dominio Ω cuya normal hacia fuera se representa por $\boldsymbol{\nu}$ (ver figura 4.2), y sean $\Gamma_u \subset \partial\Omega$ y $\Gamma_\sigma \subset \partial\Omega$ ($\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \partial\Omega$, $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$) las partes del dominio en las cuales se prescriben las condiciones de contorno esenciales y naturales, respectivamente. Las ecuaciones básicas de gobierno del problema de valores de contorno en medios que presentan discontinuidades se describen como:

$$\begin{array}{ll} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} & \text{en } \Omega \setminus S \quad (\text{ecuación de equilibrio}) \\ \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u} = \mathbf{u}^* & \text{en } \Gamma_u \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{t}^* & \text{en } \Gamma_\sigma \end{array} \right. & (\text{condiciones de contorno}) \end{array} \quad (4.9)$$

donde $\mathbf{f}$ representa las fuerzas volumétricas y $\mathbf{u}^*$ y $\mathbf{t}^*$ son los vectores de desplazamientos y tracciones prescritos en el contorno, respectivamente. Además, se deben añadir a las ecuaciones anteriores las condiciones de equilibrio en la discontinuidad, es decir

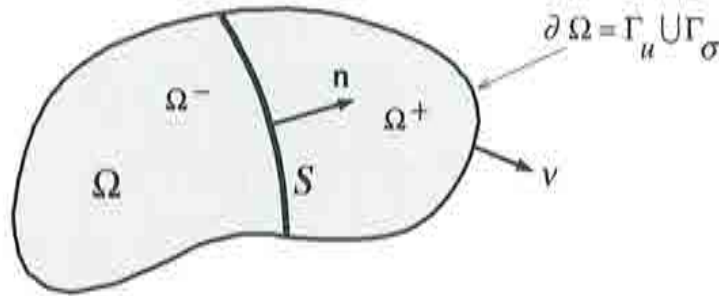


Figura 4.2 Problema de contorno

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_+ \cdot \mathbf{n} &= \sigma_- \cdot \mathbf{n} \\ \sigma_s \cdot \mathbf{n} &= \sigma_+ \cdot \mathbf{n} \quad (\sigma_s \cdot \mathbf{n} = \sigma_- \cdot \mathbf{n})\end{aligned}} \quad (4.10)$$

donde σ_s es la tensión en los puntos de $\mathcal{S}$, y σ_+ y σ_- son las tensiones en los puntos pertenecientes a las líneas $\mathcal{S}^+$ y $\mathcal{S}^-$, vecinas a $\mathcal{S}$,

$$\mathcal{S}^\pm := \left\{ \mathbf{x} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} [\mathbf{x}_S^\pm \mp \zeta \mathbf{n}(\mathbf{x}_S)] \mid \mathbf{x}_S \in \mathcal{S} \right\} \quad (4.11)$$

Para que el problema quede completamente definido falta establecer la relación entre deformaciones y desplazamientos y la relación constitutiva entre tensión y deformación en todo el dominio, incluso en la línea de discontinuidad $\mathcal{S}$. Así, utilizando la cinemática representativa de discontinuidades débiles y fuertes (ecuaciones (4.7) y (4.8)) y suponiendo que el comportamiento en todo el dominio se describe a través de la misma relación constitutiva de continuo local e independiente de la velocidad (*rate independent*), las tasas de tensiones se definen como

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\sigma}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} &= \mathbb{C} : \dot{\tilde{\epsilon}} && \text{en } \Omega \setminus \mathcal{S} \\ \dot{\sigma}_s &= \mathbb{C} : \left[\dot{\tilde{\epsilon}} + \frac{1}{h} ([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s \right] && \text{en } \mathcal{S}\end{aligned}} \quad (4.12)$$

donde $\dot{\tilde{\epsilon}} = \nabla^s \dot{\mathbf{u}} + \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \nabla^s [[\dot{\mathbf{u}}]]$ es la parte regular (acotada) de la tasa de deformaciones y $\mathbb{C}$ representa el tensor constitutivo tangente que, en general, depende del propio estado de tensión o deformación del punto y de las condiciones de carga y descarga del modelo constitutivo que se elige para representar el comportamiento del material.

4.4 ANÁLISIS DE DISCONTINUIDADES EN MEDIOS ELASTO-PLÁSTICOS

4.4.1 Ecuaciones constitutivas de la elasto-plasticidad

El modelo constitutivo de elasto-plasticidad clásico local e independiente de la velocidad se resume a través de las siguientes ecuaciones (Simó y Hughes):

Relación constitutiva. Función de energía libre

El tensor de tensiones σ en un punto se relaciona con el tensor de deformaciones ε mediante la siguiente ecuación

$$\sigma = \frac{\partial \Psi(\varepsilon^e)}{\partial \varepsilon^e} \quad (4.13)$$

donde ε^e representa la *parte elástica* del tensor de deformaciones, que puede descomponerse de la forma

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p} \quad (4.14)$$

siendo ε^p la *parte plástica* del tensor de deformaciones. La *función de energía libre* Ψ viene expresada por la forma cuadrática

$$\Psi(\varepsilon^e) = \frac{1}{2} \varepsilon^e : \mathbf{C}^e : \varepsilon^e \quad (4.15)$$

donde $\mathbf{C}^e$ es el *tensor constitutivo elástico* de cuarto orden, definido como

$$\boxed{\mathbf{C}^e = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I}} \quad (4.16)$$

donde $\mathbf{1}$ es el tensor identidad de rango dos, $\mathbf{I}$ es tensor identidad simétrico de rango cuatro, y λ, μ son las *constantes de Lamé*. El tensor $\mathbf{C}^e$ es definido positivo y presenta las simetrías:

$$C_{ijkl}^e = C_{klij}^e = C_{ijlk}^e = C_{jilk}^e \quad (4.17)$$

De las ecuaciones (4.13), (4.14) y (4.15) se obtiene la relación constitutiva

$$\sigma = \mathbf{C}^e : \varepsilon^e = \mathbf{C}^e : (\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (4.18)$$

cuya forma incremental se escribe de la forma

$$\dot{\sigma} = C^e : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \quad (4.19)$$

Dominio elástico y criterio de fluencia

El *dominio elástico*, en cuyo interior no hay evolución de deformaciones plásticas, está delimitado en el espacio de las tensiones por

$$\phi(\sigma, q) < 0 \quad (4.20)$$

donde q es el conjunto de variables internas tipo tensión que gobiernan la evolución del dominio elástico, delimitado por la *superficie de fluencia*, $\phi = 0$. Para el caso de endurecimiento isótropo, el *criterio de fluencia* puede describirse como

$$\phi(\sigma, q) = \hat{\phi}(\sigma) - \sigma_y + q \leq 0 \quad (4.21)$$

donde $\hat{\phi}$ es una función escalar de las tensiones, σ_y es la *tensión de fluencia uniaxial*, que se considera una propiedad del material, y q representa el *parámetro de endurecimiento/ablandamiento isótropo*. La función $\hat{\phi}$ define la forma de la superficie de fluencia en el espacio de tensiones mientras que q ($q \leq \sigma_y$) establece su tamaño.

Ley de endurecimiento/ablandamiento

La evolución del parámetro q , que define el tamaño del dominio elástico, viene expresado a través de la *ley de endurecimiento/ablandamiento*:

$$\dot{q} = -H(q) \dot{\alpha} \quad (4.22)$$

donde H representa el módulo de *endurecimiento/ablandamiento* y α es una variable interna tipo deformación, denominada *deformación plástica equivalente*.

Regla de flujo

El carácter irreversible del flujo plástico se refleja en la *regla de flujo*, que establece la forma de la evolución de las deformaciones ε^p y α , a través de

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\varepsilon}^p = \gamma \bar{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\sigma}, q) \\ \dot{\alpha} = \gamma \bar{s}(\boldsymbol{\sigma}, q) \end{cases}} \quad (4.23)$$

donde $\gamma \geq 0$ es el *multiplicador plástico*, que define la magnitud de la tasa de las deformaciones plásticas. El tensor $\bar{\mathbf{m}}$ indica la dirección del *flujo plástico* mientras que $\bar{s} \geq 0$ es un factor de escala entre los valores $\dot{\alpha}$ y γ . Normalmente se considera que $\bar{\mathbf{m}}$ y $\bar{s}$ derivan de una *función de potencial plástico* $\bar{\phi}$, de tal forma que

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\sigma}, q) = \frac{\partial \bar{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, q)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \bar{s}(\boldsymbol{\sigma}, q) = \frac{\partial \bar{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, q)}{\partial q} \end{cases} \quad (4.24)$$

El modelo elasto-plástico se denomina *asociado* cuando la función de fluencia y la función de potencial plástico coinciden, es decir, cuando

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, q) = \bar{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, q) \quad (4.25)$$

Condiciones de carga y descarga

Finalmente, el modelo queda completamente definido por las condiciones complementarias de Kuhn-Tucker y la condición de persistencia:

$$\boxed{\gamma \geq 0, \quad \phi(\boldsymbol{\sigma}, q) \leq 0, \quad \gamma \phi(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0} \quad (4.26)$$

y

$$\boxed{\gamma \dot{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0} \quad (4.27)$$

Dichas condiciones establecen las condiciones de carga plástica, descarga elástica o carga neutra, que se resumen a continuación:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi < 0 \\ \phi = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi} < 0 \\ \dot{\phi} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma = 0 \\ \gamma > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma} = \mathbf{C}^e : \dot{\epsilon} \\ \dot{\sigma} = \mathbf{C}^e : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(elástico)} \\ \text{(descarga elástica)} \\ \text{(carga neutra)} \\ \text{(carga plástica)} \end{array} \quad 1 \quad (4.28)$$

De acuerdo con (4.21) y (4.28), para el caso en que $\phi = 0$, la condición de persistencia plástica establece que

$$\dot{\phi} = \mathbf{m} : \dot{\sigma} + s \dot{q} \leq 0 \quad (4.29)$$

donde $s = \partial\phi/\partial q$ y $\mathbf{m} = \partial\phi/\partial\sigma$. El tensor $\mathbf{m}$ es normal a la superficie de fluencia en el espacio de tensiones.

A partir de las ecuaciones (4.19), (4.22) y (4.24), la expresión (4.29) resulta

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \mathbf{m} : \mathbf{C}^e : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) - s H \dot{\alpha} \\ &= \mathbf{m} : \dot{\sigma}^{trial} - \gamma [\mathbf{m} : \mathbf{C}^e : \bar{\mathbf{m}} + s H \bar{s}] \leq 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

con $\dot{\sigma}^{trial} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}^e : \dot{\epsilon}$.

Admitiendo que

$$\mathbf{m} : \mathbf{C}^e : \bar{\mathbf{m}} + s H \bar{s} > 0 \quad (4.31)$$

mediante la expresión (4.30), se puede concluir que, para $\phi = 0$, las condiciones de carga y descarga (4.28) pueden expresarse de manera equivalente como

$$\phi = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{m} : \dot{\sigma}^{trial} < 0 \Rightarrow \dot{\phi} < 0; \gamma = 0 \\ \mathbf{m} : \dot{\sigma}^{trial} = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = 0; \gamma = 0 \\ \mathbf{m} : \dot{\sigma}^{trial} > 0 \Rightarrow \dot{\phi} = 0; \gamma > 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(descarga elástica)} \\ \text{(carga neutra)} \\ \text{(carga plástica)} \end{array} \quad (4.32)$$

Relación constitutiva incremental. Operador elasto-plástico tangente

En caso de carga plástica, del cumplimiento de la condición de persistencia, $\phi = 0$, en la ecuación (4.30) resulta

$$\gamma = \frac{\mathbf{m} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{trial}}{\mathbf{m} : \mathbf{C}^e : \bar{\mathbf{m}} + s H \bar{s}} \quad (4.33)$$

Sustituyendo el valor del multiplicador plástico dado por (4.33) en la relación incremental (4.19), se obtiene el *tensor elasto-plástico tangente* $\mathbf{C}^{ep}$ de la forma

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) \quad (4.34)$$

$$= \mathbf{C}^e : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \gamma \bar{\mathbf{m}}) \quad (4.35)$$

$$= \left(\mathbf{C}^e - \frac{\mathbf{C}^e : \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{m} : \mathbf{C}^e}{\mathbf{m} : \mathbf{C}^e : \bar{\mathbf{m}} + s H \bar{s}} \right) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.36)$$

$$= \mathbf{C}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.37)$$

con

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C}^e - \frac{\mathbf{C}^e : \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{m} : \mathbf{C}^e}{\mathbf{m} : \mathbf{C}^e : \bar{\mathbf{m}} + s H \bar{s}} = \mathbf{C}^e - \mathbf{C}^p \quad (4.38)$$

En caso de descarga elástica o carga neutra ($\gamma = 0$), la relación incremental viene dada por $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$.

De forma generalizada puede entonces escribirse

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.39)$$

con

$$\mathbb{C} = \begin{cases} \mathbf{C}^e & (\text{descarga elástica}) \\ \mathbf{C}^{ep} & (\text{carga plástica}) \end{cases} \quad (4.40)$$

De la ecuación (4.36) se puede verificar que, en caso de carga neutra, se tiene $\mathbf{m} : \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = 0$ y, por tanto

$$\mathbf{C}^p : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = 0 \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{C}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.41)$$

4.4.2 Análisis de bifurcación discontinua. Condición de localización

El análisis de bifurcación busca las condiciones necesarias para la aparición de la discontinuidad en el campo (tasa) de deformaciones en medios elasto-plásticos. Mediante la cinemática supuesta para la representación de campos discontinuos (ecuaciones (4.7) y (4.8)), el problema puede formularse del siguiente modo: encontrar bajo qué condiciones los campos de tensiones y deformaciones, continuos en la vecindad de un punto $\mathcal{P}$ de $\mathcal{S}$ ($\sigma_{\Omega \setminus \mathcal{S}} = \sigma_{\mathcal{S}}$, $\epsilon_{\Omega \setminus \mathcal{S}} = \epsilon_{\mathcal{S}}$), bifurcan, resultando un campo tasa de deformaciones discontinuo de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} &= \dot{\bar{\epsilon}} \\ \dot{\epsilon}_{\mathcal{S}} &= \dot{\bar{\epsilon}} + (\beta \otimes \mathbf{n})^s\end{aligned}\quad (4.42)$$

donde $\beta = [\dot{\mathbf{u}}]/h$. El campo tasa de tensiones resultante debe cumplir la restricción impuesta por la condición de continuidad del vector tracción de la ecuación (4.10)₂, que, dado el carácter material de $\mathcal{S}$ ($\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$), se puede expresar de la siguiente forma incremental

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\sigma}_{\mathcal{S}} = \mathbf{n} \cdot \dot{\sigma}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \quad (4.43)$$

donde se ha sustituido la notación $\mathbf{n} \cdot \dot{\sigma}_+ (= \mathbf{n} \cdot \dot{\sigma}_-)$ por $\mathbf{n} \cdot \dot{\sigma}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$.

El problema así planteado, con la restricción cinemática (4.42) y la condición de continuidad del vector tracción (4.43), es el clásico problema considerado en el análisis de bifurcación discontinua, ampliamente estudiado en el contexto del análisis de estabilidad material de sólidos (Nadai, 1931; Hill, 1958; Rudinicki y Rice, 1975; Rice, 1976; Ottosen y Runesson, 1991; Ottosen, Runesson y Peric, 1991, entre otros).

En el anexo B de este capítulo se presenta un resumen de la teoría general de localización, donde se asocia la bifurcación discontinua con el inicio de localización, además de obtener las condiciones necesarias para la bifurcación ($\beta \neq \mathbf{0}$ o $[\dot{\mathbf{u}}] \neq \mathbf{0}$) para medios elasto-plásticos. De modo resumido, la condición de bifurcación discontinua o localización se corresponde con la pérdida de elipticidad local de las ecuaciones de equilibrio incrementales, lo cual se manifiesta mediante la singularidad del *tensor de localización elasto-plástico*, $\mathbf{Q}^{ep} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{ep} \cdot \mathbf{n}$, es decir

$$\det(\mathbf{Q}^{ep}) = 0 \quad (4.44)$$

Para un determinado estado de tensión $\{\sigma, q\}$, es decir, para un estado dado de las variables $\{\mathbf{m}(\sigma, q), \bar{\mathbf{m}}(\sigma, q), s(\sigma, q), \bar{s}(\sigma, q)\}$, el tensor de localización elasto-

plástico puede considerarse como una función de H y $\mathbf{n}$ (ver ecuación (4.38))

$$\mathbf{Q}^{ep}(H, \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{ep}(H) \cdot \mathbf{n} \quad (4.45)$$

y la condición de localización (4.44) se reescribe de la forma

$$\det[\mathbf{Q}^{ep}(H, \mathbf{n})] = 0 \quad (4.46)$$

De acuerdo con los análisis realizados en el anejo B, el análisis de bifurcación puede formularse de la siguiente manera : encontrar el máximo valor del módulo H y el correspondiente valor de $\mathbf{n}$, tal que el determinante de $\mathbf{Q}^{ep}$ sea nulo, esto es

$$H_{crit} = \max [H \in \mathcal{G}] \quad (4.47)$$

donde $\mathcal{G}$ es el conjunto constituido por los valores de H para los cuales la ecuación (4.46) tiene, por lo menos, una solución para $\mathbf{n}$

$$\mathcal{G} = \{H \in \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{n} \in \mathbb{R}^{n_{dim}} ; \|\mathbf{n}\| = 1 ; \det[\mathbf{Q}^{ep}(H, \mathbf{n})] = 0\} \quad (4.48)$$

donde n_{dim} es la dimensión del problema.

Si el conjunto $\mathcal{G}$ es no vacío, las direcciones $\mathbf{n}_{crit}$ que cumplen (4.46) para $H = H_{crit}$ se corresponden con las posibles orientaciones de la banda de localización

$$\mathbf{n}_{crit} \in \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{n_{dim}} ; \|\mathbf{n}\| = 1 ; \det[\mathbf{Q}^{ep}(H_{crit}, \mathbf{n})] = 0\} \quad (4.49)$$

La localización (bifurcación) puede tener lugar en el instante de la historia de deformación de un punto material en el cual el valor del módulo de endurecimiento se iguala a H_{crit} (en Ortiz *et al.* (1987) se propone un procedimiento numérico para detectar la singularidad de $\mathbf{Q}^{ep}$ y obtener el valor de $\mathbf{n}$ correspondiente).

La expresión analítica del módulo H que conduce a la singularidad del tensor $\mathbf{Q}^{ep}$ para una determinada dirección $\mathbf{n}$ viene dada por

$$H_n(\mathbf{n}) = \frac{1}{s\bar{s}} [\mathbf{a} : (\mathbf{Q}^e)^{-1} ; \mathbf{b} - \bar{\mathbf{m}} : \mathbf{C}^e : \mathbf{m}] \quad (4.50)$$

con

$$\mathbf{a} = \mathbf{m} : \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{n} \quad \mathbf{Q}^e = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{n} \quad \mathbf{b} = \bar{\mathbf{m}} : \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{n}$$

Rice (1976) obtuvo dicha expresión por primera vez mediante observación y, posteriormente, Ottosen y Runesson (1991) la dedujeron a través del análisis espectral de $\mathbf{Q}^{ep}$. En el anejo B se propone un procedimiento alternativo y simplificado para llegar a la misma expresión, sin la necesidad de recurrir al análisis de los valores propios del tensor de localización.

El valor de H_{crit} se obtiene resolviendo un problema de maximización de $H_B(\mathbf{n})$, bajo la restricción $\|\mathbf{n}\| = 1$. Ottosen y Runesson (1991) obtuvieron soluciones analíticas del problema de maximización para casos tridimensionales utilizando multiplicadores de Lagrange. Para casos bidimensionales el problema se simplifica mucho, transformándose en la maximización de una función escalar polinomial de segundo grado, bajo determinadas suposiciones adicionales (véase anejo B).

Con el objeto de particularizar la expresión (4.50) para problemas planos, con cierto abuso de notación, considérese la base ortonormal $\{\mathbf{n}, \mathbf{t}, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ donde $\mathbf{n}$ y $\mathbf{t}$ son vectores normal y tangencial a S en un punto $\mathcal{P} \in S$, respectivamente, y $\hat{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{n} \otimes \mathbf{t}$ es ortogonal al plano del problema. Sean m_{ij} y $\bar{m}_{ij}$ ($i, j \in \{n, t, 3\}$) las componentes de $\mathbf{m}$ y $\bar{\mathbf{m}}$ según dicha base. La expresión (4.50) se reescribe en términos de dichas componentes de la forma (ver anejo B)

$$H_n = \begin{cases} -\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{s\delta} [m_{tt} (\bar{m}_{tt} + \nu \bar{m}_{33}) + \bar{m}_{33} (\nu m_{tt} + m_{33})] & \text{(deformación plana)} \\ -E \frac{1}{s\delta} m_{tt} \bar{m}_{tt} & \text{(tensión plana)} \end{cases} \quad (4.51)$$

En el anejo B se obtienen soluciones analíticas de H_{crit} y $\mathbf{n}_{crit}$ para problemas planos, suponiendo que los tensores gradiente de la función de fluencia, $\mathbf{m}$, y gradiente de la función potencial, $\bar{\mathbf{m}}$, tienen las mismas direcciones principales, con dos de estas direcciones pertenecientes al plano del problema⁶. En la tabla 4.1 se presentan dichos resultados, donde m_i y $\bar{m}_i$ ($i \in \{1, 2, 3\}$, $m_1 > m_2$, $\bar{m}_1 > \bar{m}_2$) representan los valores principales de $\mathbf{m}$ y $\bar{\mathbf{m}}$, respectivamente, y θ_{crit} es el ángulo que $\mathbf{n}_{crit}$ forma con la primera dirección principal (caracterizada por el mayor valor propio). Obsérvese que en general la bifurcación puede tener lugar para dos valores del ángulo crítico.

⁶ Esta restricción se verifica para plasticidad asociada ($\mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}}$) y en las superficies de fluencia y potencial plástico continuamente utilizadas en análisis no lineal de sólidos.

Deformación plana	
$\sin^2 \theta_{crit}$	$\Xi \left(-\frac{1}{2} \frac{m_1 (\bar{m}_2 + \nu \bar{m}_3) + m_2 (\bar{m}_1 - 2 \bar{m}_2 - \nu \bar{m}_3) + \nu m_3 (\bar{m}_1 - \bar{m}_2)}{(m_1 - m_2)(\bar{m}_1 - \bar{m}_2)} \right)$
H_{crit}	$-\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{s \bar{s}} [m_{tt} (\bar{m}_{tt} + \nu \bar{m}_3) + \bar{m}_3 (\nu m_{tt} + m_3)]$
Tensión plana	
$\sin^2 \theta_{crit}$	$\Xi \left(-\frac{1}{2} \frac{m_2 (\bar{m}_1 - \bar{m}_2) + \bar{m}_2 (m_1 - m_2)}{(m_1 - m_2)(\bar{m}_1 - \bar{m}_2)} \right)$
H_{crit}	$-E \frac{1}{s \bar{s}} m_{tt} \bar{m}_{tt}$
$\Xi(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 0 \\ 1 & \text{si } a > 1 \\ a & \text{si } a \in [0, 1] \end{cases}$	
$m_{tt} = (m_1 - m_2) \sin^2 \theta_{crit} + m_2$ $\bar{m}_{tt} = (\bar{m}_1 - \bar{m}_2) \sin^2 \theta_{crit} + \bar{m}_2$	

Tabla 4.1 Resultados del análisis de bifurcación para medios elasto-plásticos bidimensionales.

4.4.3 Análisis de discontinuidad fuerte

Sustituyendo las ecuaciones (4.8) y (4.23)₁ en la relación incremental (4.19) se obtiene la siguiente ecuación de evolución de las deformaciones:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\text{acotado}} + \underbrace{\frac{\mu_S}{h} ([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s}_{\text{no acotado}} = \underbrace{(\mathbf{C}^e)^{-1} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}_{\text{acotado}} + \gamma \bar{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (4.52)$$

El problema se centra ahora en determinar las condiciones para las cuales la ecuación (4.52) tiene consistencia física y matemática en presencia de discontinuidades fuertes, es decir, cuando $h \rightarrow 0$ y $[\dot{\mathbf{u}}] \neq 0$.

Obsérvese que la parte regular de la deformación, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, es acotada por definición y que la tasa de tensión $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ debe permanecer acotada para que el problema siga teniendo sentido físico. Con objeto de que $[\dot{\mathbf{u}}]$ no se anule cuando h tiende a cero, el término no acotado $(\mu_S/h) ([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s$ debe corresponderse con otro término no acotado de la ecuación. De este modo, se concluye la necesidad de que el factor μ_S/h aparezca en el miembro derecho de la ecuación (4.52). El modo más sencillo de considerar este factor es suponer que el multiplicador plástico γ tiene la forma

$$\gamma = \mu_S \frac{1}{h} \bar{\gamma} \implies \begin{cases} \gamma = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus S \\ \gamma = \frac{1}{h} \bar{\gamma} & \forall \mathbf{x} \in S \end{cases} \quad (4.53)$$

que establece que en $\Omega \setminus S$ el material se comporta elásticamente o se encuentra en estado de carga neutra ($\gamma = 0$, ver ecuación (4.28)) mientras que en S se produce carga plástica. Sustituyendo (4.53) en la ecuación (4.22) y teniendo en cuenta la expresión (4.24)₂, se obtiene la siguiente estructura para el módulo de endurecimiento

$$H = -\frac{\dot{q}}{\dot{\alpha}} = -\frac{\dot{q}}{\bar{s} \bar{\gamma}} = h \underbrace{\left(-\frac{\dot{q}}{\bar{s} \bar{\gamma}} \right)}_{\bar{H}} = h \bar{H} \quad \forall \mathbf{x} \in S \quad (4.54)$$

donde

$$\bar{H} = -\frac{\dot{q}}{\bar{s} \bar{\gamma}} = -\frac{\dot{q}}{\dot{\alpha}} \quad (4.55)$$

se denominará *módulo de endurecimiento/ablandamiento intrínseco o discreto*⁷ (Simó, Oliver y Armero 1993; Oliver 1996a), se considera una propiedad del material.

⁷ En contraposición con el módulo de endurecimiento/ablandamiento "continuo" H .

Observación 4.6 De acuerdo con la estructura supuesta para el multiplicador plástico (ecuación (4.53)), en régimen de discontinuidad fuerte, sólo seguirán desarrollando deformaciones plásticas en un punto $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, mientras que en los puntos $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S}$, de la vecindad, el material se comporta elásticamente o se encuentra bajo régimen de carga neutra ($\gamma = 0$).

Observación 4.7 De la ecuación (4.54) se puede concluir que el régimen de discontinuidad fuerte sólo es consistente con valores nulos del *módulo de endurecimiento/ablandamiento continuo* H (cuando $h \rightarrow 0$ entonces $H \rightarrow 0$).

Considerando las expresiones (4.53) y (4.54), la ecuación (4.52) se reescribe, particularizada para los puntos $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, de la forma

$$\underbrace{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\text{acotado}} + \frac{1}{h}([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s = \underbrace{(\mathbf{C}^e)^{-1} : \boldsymbol{\sigma}}_{\text{acotado}} - \frac{1}{h} \frac{1}{\bar{H}} \frac{\dot{q}}{\bar{s}} \bar{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\sigma}_S) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \quad (4.56)$$

En régimen de discontinuidad fuerte, cuando $h \rightarrow 0$, los términos no acotados de la ecuación (4.56) deben corresponderse, es decir

$$([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s = -\frac{1}{\bar{H}} \frac{\dot{q}}{\bar{s}} \bar{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\sigma}_S) \quad (4.57)$$

o, simplemente

$$([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s = \frac{\dot{\bar{\alpha}}}{\bar{s}} \bar{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\sigma}_S) \quad (4.58)$$

Observación 4.8 La relación (4.57) puede considerarse como una restricción adicional, que se impone a medida que el factor h se hace pequeño comparado con la escala del problema. Por tanto, desde este punto de vista, el factor $1/h$ puede ser interpretado como un variable de penalización que impone el cumplimiento de la relación (4.57).

4.4.4 Condición de discontinuidad fuerte

La ecuación (4.57), que ha sido denominada *ecuación de discontinuidad fuerte* (Oliver, Cervera y Manzoli 1998a), establece la evolución del salto $[\dot{\mathbf{u}}]$ en régimen de discontinuidad fuerte. A continuación se particulariza dicha ecuación para los problema bidimensionales.

Considerando la base $\{\mathbf{n}, \mathbf{t}, \hat{\mathbf{e}}_3\}$, definida anteriormente, el salto de desplazamiento se escribe como $[\mathbf{u}] = [u_n] \mathbf{n} + [u_t] \mathbf{t}$, donde $[u_n]$ y $[u_t]$ son las componentes normal y tangencial del salto. Considérense las dos situaciones posibles:

- *Deformación plana*

La ecuación (4.57) se escribe de la forma

$$\begin{bmatrix} [\dot{u}_n] & \frac{1}{2}[\dot{u}_t] & 0 \\ \frac{1}{2}[\dot{u}_t] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\bar{H}} \frac{\dot{q}}{\bar{s}} \begin{bmatrix} \bar{m}_{nn} & \bar{m}_{nt} & 0 \\ \bar{m}_{nt} & \bar{m}_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{m}_{33} \end{bmatrix}_s \quad (4.59)$$

De la ecuación (4.59), se deduce que el régimen de discontinuidad fuerte solamente es consistente con

$$\boxed{\bar{m}_{nt_s} = 0} \quad ; \quad \boxed{\bar{m}_{33_s} = 0} \quad (4.60)$$

- *Tensión plana*

En este caso, la ecuación (4.57) se reescribe de la forma

$$\begin{bmatrix} [\dot{u}_n] & \frac{1}{2}[\dot{u}_t] \\ \frac{1}{2}[\dot{u}_t] & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\bar{H}} \frac{\dot{q}}{\bar{s}} \begin{bmatrix} \bar{m}_{nn} & \bar{m}_{nt} \\ \bar{m}_{nt} & \bar{m}_{tt} \end{bmatrix}_s \quad (4.61)$$

donde se concluye que en régimen de discontinuidad fuerte debe cumplirse

$$\boxed{\bar{m}_{nt_s} = 0} \quad (4.62)$$

Las condiciones consistentes con el régimen de discontinuidad fuerte (4.60) y (4.62), en general, no se verifican en la fase inicial de la fluencia plástica del material. Pueden incluso no verificarse en el instante de bifurcación.

Observación 4.9 Para que el material pueda bifurcar en *régimen de*

discontinuidad fuerte debe cumplirse, por un lado, la condición de bifurcación (4.44), que establece la condición para que $[\dot{\mathbf{u}}] \neq 0$ y, por otro lado, la condición de discontinuidad fuerte (4.60) o (4.62). Obsérvese que, sustituyendo las condiciones (4.60) y (4.62) en la expresión (4.51), se obtiene $H_B = 0$. Por tanto, el inicio del régimen de discontinuidad fuerte sólo coincide con la bifurcación si en dicho instante se tiene⁸ $H_B = H_{crit} = 0$. Si, por otro lado, la bifurcación se produce con $H_B = H_{crit} \neq 0$, el régimen de discontinuidad fuerte sólo puede aparecer posteriormente a la bifurcación, exigiendo, así, un mecanismo de transición entre el régimen de discontinuidad débil, iniciado con la bifurcación ($h \neq 0$), y el régimen de discontinuidad fuerte ($h \rightarrow 0$). En este caso, la bifurcación se interpreta como un mecanismo precursor de la discontinuidad fuerte.

4.4.5 Ecuación constitutiva discreta o intrínseca

Para el caso de carga plástica, la condición de persistencia (4.29) resulta en

$$\dot{\phi} = \mathbf{m} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{q} = 0 \implies \dot{q} = -\mathbf{m} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (4.63)$$

Sustituyendo (4.63) en (4.57), se obtiene

$$([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^S = \frac{1}{\dot{H}} \frac{1}{\bar{s}(\boldsymbol{\sigma}_s)} [\mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}_s) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_s)] \otimes \bar{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\sigma}_s) \quad (4.64)$$

La ecuación anterior, junto con la ecuación de continuidad del vector tracción (4.10)₂,

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}_{0 \setminus S} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \mathbf{n} \quad (4.65)$$

constituyen, para un determinado punto $\mathbf{x} \in S$, un sistema de nueve ecuaciones algebraicas no triviales, que establece, para el problema general en tres dimensiones, la dependencia implícita de las seis componentes de $\boldsymbol{\sigma}_S$ y las

⁸ Nótese la concordancia de este resultado con la estructura de H de la expresión (4.54), que establece que la discontinuidad fuerte solamente es consistente con $H = 0$ (ver observación 4.7).

tres componentes del salto $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ con el vector tracción $\mathbf{t}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_s &= \mathbb{F}[\mathbf{t}] \\ \llbracket \mathbf{u} \rrbracket &= \mathbb{I}[\mathbf{t}] \end{aligned} \quad (4.66)$$

Observación 4.10 La ecuación (4.66)₂ define la *relación constitutiva discreta intrínseca* (tracción versus salto) en la interfaz S . Obsérvese que dicha relación se deriva "naturalmente" de la *relación constitutiva de continuo* (tensión versus deformación) de elasto-plasticidad al imponerse la condición de discontinuidad fuerte. Por tanto, no es necesario obtener la forma explícita de dicha relación discreta ni utilizarla en el modelo numérico para simular discontinuidad fuerte. En consecuencia, tanto el comportamiento de la parte continua del sólido como el de la interfaz de discontinuidad pueden describirse a través de una única *relación constitutiva de continuo* (tensión versus deformación).

Algunos ejemplos en elasto-plasticidad bidimensional

En el caso de plasticidad asociada ($\bar{\mathbf{m}} = \partial_\sigma \phi = \mathbf{m}$ y $\bar{s} = \partial_q \phi = 1$), la ecuación de discontinuidad fuerte (4.64) se expresa en las componentes de la base $\{\mathbf{n}, \mathbf{t}, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ de la forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \llbracket \dot{u}_n \rrbracket & \frac{1}{2} \llbracket \dot{u}_t \rrbracket & 0 \\ \frac{1}{2} \llbracket \dot{u}_t \rrbracket & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{\bar{H}} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{nn} & \dot{\sigma}_{nt} & 0 \\ \dot{\sigma}_{nt} & \dot{\sigma}_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\sigma}_{33} \end{bmatrix}_s : \begin{bmatrix} m_{nn} & m_{nt} & 0 \\ m_{nt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_s \right\} \otimes \\ &\otimes \begin{bmatrix} m_{nn} & m_{nt} & 0 \\ m_{nt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_s \end{aligned} \quad (4.67)$$

donde se ha considerado la condición de discontinuidad fuerte $m_{tt} = m_{33} = 0$ (véase ecuación (4.60)). La condición de continuidad del vector tracción respecto a dicha base exige que

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\tau} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{nn} \\ \dot{\sigma}_{nt} \\ 0 \end{Bmatrix}_s = \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{nn} \\ \dot{\sigma}_{nt} \\ 0 \end{Bmatrix}_{\Omega \setminus S} \quad (4.68)$$

de donde se concluye que

$$\dot{\sigma}_{nnS} = \dot{\sigma}_{nn\Omega \setminus S} = \dot{\sigma} \quad (4.69)$$

$$\dot{\sigma}_{ntS} = \dot{\sigma}_{nt\Omega \setminus S} = \dot{\tau} \quad (4.70)$$

Sustituyendo (4.69) y (4.70) en (4.67) se obtienen fácilmente las siguientes relaciones en forma matricial:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \dot{u}_n \\ \dot{u}_t \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{\bar{H}} \begin{bmatrix} m_{nn}^2 & 2 m_{nt} m_{nn} \\ 2 m_{nt} m_{nn} & 4 m_{nt}^2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\tau} \end{bmatrix} \right\} \quad (4.71)$$

- **Ejemplo I:** Modelo elasto-plástico asociado de *Drucker-Prager* en deformación plana

Este modelo se caracteriza por las siguientes expresiones para la superficie de fluencia y el flujo plástico (Drucker y Prager 1952):

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{\sigma}, q) &= \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma})\| + \alpha_\varphi p(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_y + q = 0 \\ \mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}} &= \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\|\mathbf{S}\|} \mathbf{S} + \frac{\alpha_\varphi}{3} \mathbf{1} \end{aligned} \quad (4.72)$$

donde $\mathbf{1}$ es el tensor identidad de orden dos, $p = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})$ representa la tensión media y $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - p \mathbf{1}$ es la parte desviadora de $\boldsymbol{\sigma}$. La tensión de fluencia σ_y se considera como una función de la medida de cohesión del material, c_y , según la expresión

$$\sigma_y = \bar{\beta} c_y \quad (4.73)$$

Los valores de α_φ y $\bar{\beta}$ dependen del ángulo de rozamiento del material φ :

$$\alpha_\varphi = \frac{6 \sin(\varphi)}{3 - \sin(\varphi)} \quad \bar{\beta} = \frac{6 \cos(\varphi)}{3 - \sin(\varphi)} \quad (4.74)$$

Según la base $\{\mathbf{n}, \mathbf{t}, \hat{\mathbf{e}}_3\}$, el flujo plástico se describe de la forma

$$\mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\|\mathbf{S}\|} \begin{bmatrix} S_{nnS} & \tau & 0 \\ \tau & S_{ttS} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33S} \end{bmatrix} + \frac{\alpha_\varphi}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

Teniendo en cuenta las condiciones de discontinuidad fuerte,

$$m_{tt} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{1}{\|S\|}} S_{tt} + \frac{\alpha_\varphi}{3} = 0 \quad (4.76)$$

$$m_{33} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{1}{\|S\|}} S_{33} + \frac{\alpha_\varphi}{3} = 0 \quad (4.77)$$

el carácter desviador de S

$$Tr(S) = S_{nn} + S_{tt} + S_{33} = 0 \quad (4.78)$$

tras algunos desarrollos algebraicos se obtiene

$$m_{nn} = \bar{m}_{nn} = \alpha_\varphi \quad (4.79)$$

$$m_{nt} = \bar{m}_{nt} = \frac{1}{2} \sqrt{3 - \frac{4}{3} \alpha_\varphi^2} \quad (4.80)$$

Sustituyendo (4.79) y (4.80) en (4.71) se llega, finalmente, a la siguiente relación discreta en forma matricial:

$$\left\{ \begin{Bmatrix} \dot{u}_n \\ \dot{u}_t \end{Bmatrix} \right\} = \frac{1}{\hat{H}} \begin{bmatrix} \alpha_\varphi^2 & \alpha_\varphi \sqrt{3 - \frac{4}{3} \alpha_\varphi^2} \\ \alpha_\varphi \sqrt{3 - \frac{4}{3} \alpha_\varphi^2} & 3 - \frac{4}{3} \alpha_\varphi^2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\tau} \end{Bmatrix} \right\} \quad (4.81)$$

donde se concluye que la evolución de las componentes del salto cumple la relación

$$\frac{\|\dot{u}_n\|}{\|\dot{u}_t\|} = \frac{\alpha_\varphi}{\sqrt{3 - \frac{4}{3} \alpha_\varphi^2}} \quad (4.82)$$

- **Ejemplo 2:** Modelo elasto-plástico asociado de *Von Mises* en deformación plana.

Este modelo se obtiene particularizando el modelo de Drucker-Prager para un ángulo de rozamiento nulo ($\varphi = 0$). Así, la relación constitutiva discreta correspondiente se obtiene directamente de (4.81) haciendo $\alpha_\varphi = 0$ (ver ecuación

(4.74)₁):

$$\boxed{\begin{cases} \llbracket \dot{u}_n \rrbracket = 0 \\ \llbracket \dot{u}_t \rrbracket = \frac{3}{H} \dot{\gamma} \end{cases}} \quad (4.83)$$

• **Ejemplo 3:** Modelo elasto-plástico asociado de *Rankine*.

La superficie de fluencia y el flujo plástico se expresan del siguiente modo (Rankine 1857)

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{\sigma}, q) &= \sigma_1(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_y - q = 0 \\ \mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}} &= \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{p}}_1 \otimes \hat{\mathbf{p}}_1 \end{aligned} \quad (4.84)$$

donde σ_1 representa la máxima tensión principal en el plano del problema ($\sigma_1 > \sigma_2$) y $\hat{\mathbf{p}}_1$ es el vector unitario en la correspondiente dirección principal, que, a su vez, forma un ángulo θ con la dirección de $\mathbf{n}$ ($\hat{\mathbf{p}}_1 = \cos \theta \mathbf{n} + \sin \theta \mathbf{t}$). Respecto a la base $\{\mathbf{n}, \mathbf{t}, \hat{\mathbf{e}}_3\}$, el tensor de flujo plástico se reescribe de la forma

$$\mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}} = \hat{\mathbf{p}}_1 \otimes \hat{\mathbf{p}}_1 = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

De la condición de discontinuidad fuerte (4.60) ó (4.62) se obtiene

$$m_{tt} = \bar{m}_{tt} = \sin^2 \theta = 0 \implies \theta = 0$$

es decir, la dirección $\mathbf{n}$ coincide con la dirección principal $\hat{\mathbf{p}}_1$, de lo que se deduce que la línea de discontinuidad se desarrolla perpendicularmente a la tensión principal máxima. Sustituyendo $\theta = 0$ en la ecuación (4.85) y ésta en (?? o 4.71), se obtiene

$$\boxed{\begin{cases} \llbracket \dot{u}_n \rrbracket = \frac{1}{H} \dot{\sigma} \\ \llbracket \dot{u}_t \rrbracket = 0 \end{cases}} \quad (4.86)$$

donde se ha considerado la continuidad del vector tracción ($\sigma_{m_3} = \sigma_{1_3} = \sigma$).

Observación 4.11 Las ecuaciones (4.81), (4.83) y (4.86) constituyen algunos casos particulares de la relación discreta general (4.66)₂. Obsérvese que la ecuación (4.83) establece que, en régimen de discontinuidad fuerte, el modelo elasto-plástico de Von Mises genera

líneas de deslizamiento (*slip lines*, Lubliner 1990), puesto que sólo la componente tangencial $\llbracket u_t \rrbracket$ del salto puede desarrollarse ($\llbracket u_n \rrbracket = 0$). Por otro lado, la ecuación (4.86) establece que la superficie de fluencia de Rankine sólo permite modelar discontinuidades fuertes en Modo I (según la terminología de la Mecánica de Fractura), ya que la componente tangencial $\llbracket u_t \rrbracket$ es nula para este caso. A su vez, el modelo elasto-plástico de Drucker-Prager genera discontinuidades fuertes en modo mixto ($\llbracket u_n \rrbracket \neq 0$ y $\llbracket u_t \rrbracket \neq 0$, ver ecuación (4.81)), pudiendo asociarse la componente normal del salto al efecto de dilatación.

4.4.6 Modelo de formación de discontinuidad fuerte en sólidos elasto-plásticos. Modelo de ancho de banda variable

Como se detalló en el apartado 4.4.2, los modelos elasto-plásticos no asociados (o asociados con ablandamiento) son susceptibles de experimentar bifurcación discontinua, estableciendo el inicio de la localización de las deformaciones en régimen de discontinuidad débil o fuerte, dependiendo del estado de tensiones en el instante de la bifurcación. El comportamiento *post-bifurcación* se modela a través de la introducción o activación de una cinemática apropiada que describe la formación de la banda de localización, cuyo ancho de banda puede variar a lo largo del proceso de carga hasta alcanzar un valor muy pequeño, compatible con el régimen de discontinuidad fuerte. El comportamiento del material se divide, por tanto, en tres etapas diferenciadas durante el proceso de carga: a) estado elástico inicial, b) estado elasto-plástico anterior a la bifurcación discontinua, donde el sólido es continuo con deformaciones también continuas y c) estado elasto-plástico bifurcado, con presencia de discontinuidad fuerte o débil. Una vez definidas las funciones correspondientes a la superficie de fluencia y al potencial plástico, para modelar el comportamiento no lineal del material elasto-plástico se requiere:

- Fase *pre-bifurcación*:

- La ley de evolución de la superficie de fluencia (y del potencial plástico) del sólido elasto-plástico continuo con deformaciones también continuas;
- El procedimiento para detectar el instante de bifurcación discontinua y la correspondiente dirección de la banda de localización, que se mantiene fija después de la bifurcación (superficie material).

- Fase *post-bifurcación*:

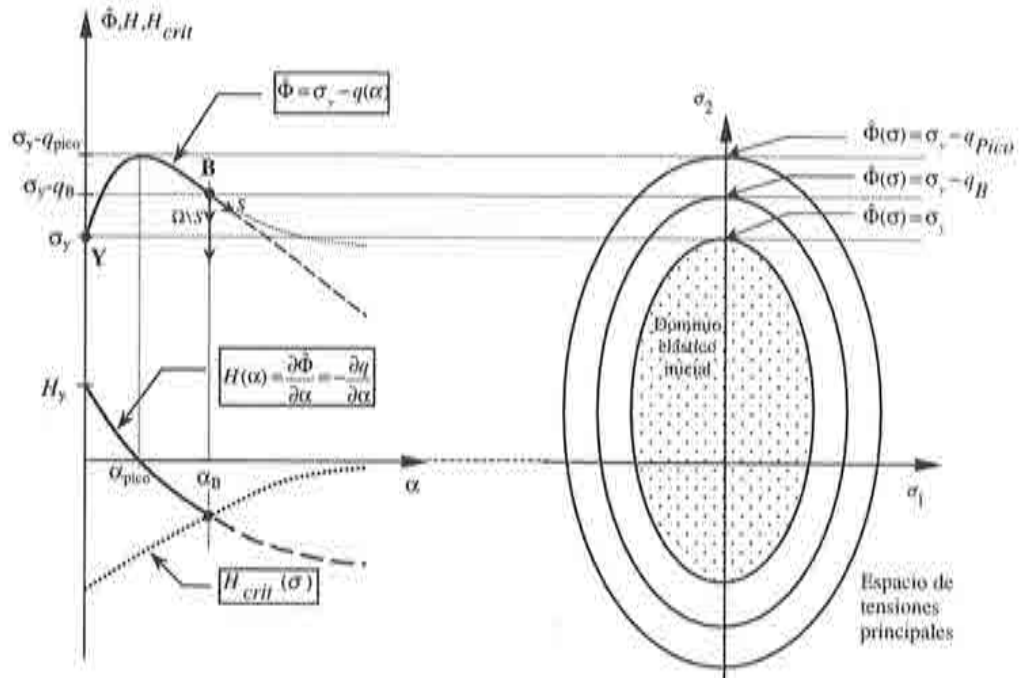


Figura 4.3 Ley de endurecimiento. Fase pre-bifurcación

- El ancho de banda inicial, correspondiente al instante de la bifurcación;
- La ley de variación del ancho de banda, que establezca la transición entre los regímenes de discontinuidad débil y fuerte, cuando sea necesario;
- La ley de evolución del *módulo de endurecimiento/ablandamiento continuo* H de manera consistente con la variación del ancho de banda (véase relación (4.54)).

Fase pre-bifurcación. Detección de la bifurcación discontinua

El comportamiento del sólido elasto-plástico continuo, con deformaciones también continuas, se define a través de la ley de evolución de la superficie de fluencia $\hat{\phi} = \sigma_y - q(\alpha)$, tal como se indica en la figura 4.3. Para la detección del punto de bifurcación discontinua, se compara el valor de $H_{crit}(\sigma(t))$, evaluado mediante las expresiones analíticas de la tabla 4.1, con el valor del módulo de ablandamiento de

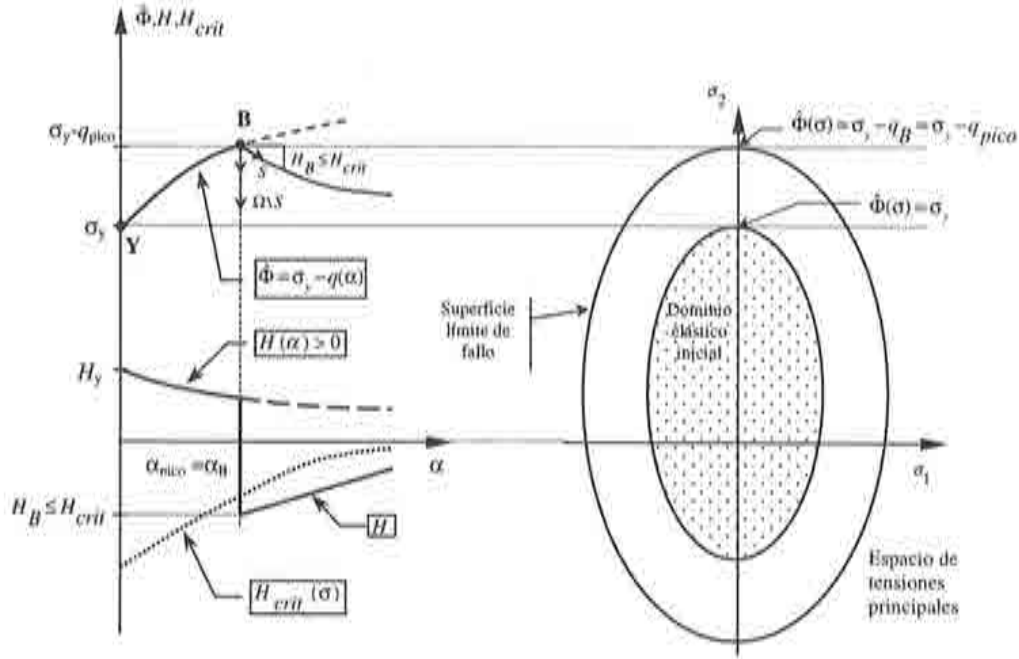


Figura 4.4 Ley de endurecimiento alternativa. Definición de la superficie límite de fallo.

la ley de endurecimiento elegida, $H = \partial \hat{\Phi} / \partial \alpha = -\partial q(\alpha) / \partial \alpha$, durante el proceso de carga. La bifurcación discontinua tiene lugar en el instante del proceso de carga ($t = t_B$; $\alpha = \alpha_B$) en el que se cumple la condición $H(\alpha) = H_{crit}(\sigma(t))$, tal como indica la figura 4.3. La dirección de la banda de localización correspondiente viene expresada por el valor $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{crit}(\sigma(t_B))$ que se obtiene de la tabla 4.1.

Por tanto, la ley de evolución de la superficie de fluencia en la fase *pre-bifurcación* se define a través de:

- La tensión de fluencia σ_y , que establece la dimensión inicial del dominio elástico en el campo de tensiones, donde no hay evolución de deformaciones plásticas;
- La ley de evolución de la variable q en función de la deformación plástica equivalente α (o la ley de evolución del *módulo de endurecimiento/ablandamiento continuo* H).

Obsérvese que el punto de la curva $\hat{\phi}$ versus α correspondiente al inicio de la localización (punto de bifurcación **B**) no está definido *a priori* (no es una propiedad del material) y depende de la historia del valor de comparación H_{crit} , que, a su vez, depende de la historia del estado de tensiones durante el proceso de carga.

Para el caso de plasticidad asociada, se podría considerar un comportamiento hipotético alternativo, definiendo el valor límite de $\alpha = \alpha_B$ para el cual se inicia el proceso de localización. Del análisis llevado a cabo en el anejo B se concluye que en el caso de plasticidad asociada, la bifurcación discontinua no puede tener lugar en la rama de endurecimiento ($H > 0$) de la curva $\hat{\phi}$ versus α . Por tanto, en este caso, se puede forzar que la bifurcación ocurra en el instante en que se alcanza el pico de la referida curva ($t = t_B = t_{pico}$), imponiendo una ley discontinua para $H(\alpha)$, tal que

$$H = \begin{cases} H(\alpha) > 0 & \text{para } \alpha < \alpha_{pico} \\ H_B \leq H_{crit}(\sigma) & \text{para } \alpha = \alpha_{pico} \end{cases} \quad (4.87)$$

Naturalmente, la orientación de la banda viene dada por $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{crit}(\sigma(t_B))$, calculada con el estado de tensiones del instante t_B en que el punto material alcanza la deformación plástica equivalente $\alpha = \alpha_{pico}$. En este modelo, además de la dimensión inicial de la superficie de fluencia y de la ley de evolución de q (con endurecimiento) de la fase pre-bifurcación, se hace necesario la definición del valor límite α_{pico} (o q_{pico}), que establece la *superficie límite de fallo*, es decir, la región del espacio de tensiones correspondiente al inicio del proceso de localización (véase figura 4.4). Este modelo alternativo de cierta forma recupera el concepto de superficie límite de fallo, empleado por Chen y Chen (1975, 1982) para modelar fractura en hormigones. Cabe destacar que a diferencia del modelo que se propone aquí, en el referido trabajo, una vez alcanzada la superficie límite de fallo, se impone una caída violenta de tensiones.

Fase post-bifurcación. Modelo de ancho de banda variable

Se supondrá aquí que, después de la bifurcación, la estructura del *módulo de endurecimiento/ablandamiento continuo* H viene dada de acuerdo con la expresión (4.54), es decir

$$\boxed{H = \bar{H} h} \quad (4.88)$$

donde se considera que $\bar{H} < 0$ es una propiedad del material. Así, una vez definida la ley de evolución de una de las variables (H ó h) la ley de variación de la otra queda automáticamente establecida. Es importante recordar que se ha llegado a

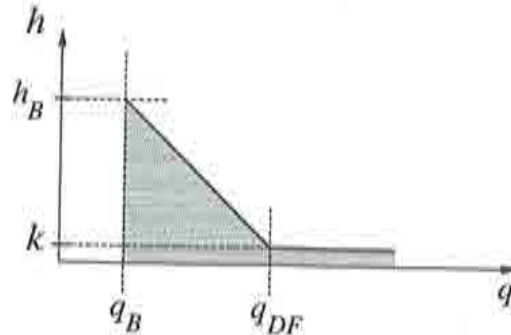


Figura 4.5 Modelo de variación de ancho de banda

dicha estructura del valor de H suponiendo que los puntos de la vecindad de la banda, $\Omega \setminus \mathcal{S}$, no desarrollan deformaciones plásticas después de la bifurcación, es decir, están bajo carga neutra o descarga elástica (véase observación 4.6).

Como se mencionó anteriormente (observación 4.9), el régimen de discontinuidad fuerte ($h \rightarrow 0$) solamente puede tener lugar inmediatamente después de la bifurcación cuando $H_B = H_{crit} = 0$, esto es, cuando la curva $\hat{\phi}$ versus α de la figura 4.3 tiene tangente horizontal en el punto de bifurcación. En los casos en que esto no ocurre, el ancho de banda h_B debe tener un valor finito mayor que cero en el instante de bifurcación, lo que exige una *fase de transición* entre la bifurcación, que ocurre en régimen de discontinuidad débil, y el inicio del régimen de discontinuidad fuerte. Por ello, se define una ley de variación de h , desde el valor $h_B \neq 0$ hasta el valor $h = k$ ($k \rightarrow 0$). Puesto que, como se ha mencionado anteriormente, el inverso de k desempeña el papel de parámetro de penalización, que impone las restricciones consistentes con la ecuación de discontinuidad fuerte (4.57), a efectos físicos basta con que k sea algunos ordenes de magnitud (2 -3 ordenes) inferior a la dimensión típica del problema.

A continuación se describe la propuesta de un *modelo de ancho de banda variable* para la fase de transición, que se utilizará a lo largo de este trabajo.

La ley de variación de la banda h se describe a través de una función continua monótona decreciente de la variable interna tipo tensión q , partiendo del valor $h = h_B$ en $q = q_B$ hasta alcanzar el valor $h = k$ en $q = q_{DF}$ (véase figura 4.5). Después de este punto, el ancho de la banda permanece constante hasta el final del proceso de carga. La elección de q como la variable que define el proceso de variación del ancho de banda es debida a que mantiene su carácter acotado durante todo el proceso de deformación.

Tomando como base la expresión (4.88), el valor inicial del ancho h_B se considera como

$$h_B = \left| \frac{H_B}{\bar{H}} \right| \quad (4.89)$$

donde H_B es el valor del módulo de endurecimiento en el instante de la bifurcación. A partir de la ecuación (4.88), la variación del módulo de endurecimiento puede escribirse como

$$H(\alpha) = H(q(\alpha)) = \bar{H} h(q(\alpha))$$

Teniendo en cuenta la ecuación (4.22), puede escribirse la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial q(\alpha)}{\partial \alpha} = -\bar{H} h(q(\alpha)) \quad \text{con} \quad q(\alpha_B) = q_B \quad (4.90)$$

de la cual, para una expresión dada de $h(q)$, puede obtenerse la ley de variación de q en función de la variable α . De esta manera, incluso en la fase *post-bifurcación*, la integración de la relación constitutiva de elasto-plasticidad se realiza utilizando un algoritmo estándar, pero con una ley de evolución de $q(\alpha)$ (o de $H(\alpha) = -\partial q(\alpha)/\partial \alpha$) apropiada.

Considérese, a manera de ejemplo, la siguiente variación *lineal* del ancho de banda h en función de q (véase figura 4.5):

$$h(q) = \begin{cases} (q - q_B) R + h_B & \text{para } q_B \leq q \leq q_{DF} \quad (\text{transición}) \\ k & \text{para } q > q_{DF} \quad (\text{disc. fuerte}) \end{cases} \quad (4.91)$$

donde

$$R = \frac{k - h_B}{q_{DF} - q_B} \quad (4.92)$$

Considerando $\bar{H}$ constante, resolviendo la ecuación diferencial (4.90) se obtiene la siguiente expresión de $q(\alpha)$:

$$q(\alpha) = \begin{cases} q_B + \frac{h_B}{R} (e^{-R \bar{H} (\alpha - \alpha_B)} - 1) & \text{para } \alpha_B \leq \alpha \leq \alpha_{DF} \quad (\text{transición}) \\ q_{DF} - k \bar{H} (\alpha - \alpha_{DF}) & \text{para } \alpha_{DF} < \alpha \leq \alpha_U \quad (\text{disc. fuerte}) \\ \sigma_y & \text{para } \alpha > \alpha_U \quad (\text{disc. fuerte}) \end{cases} \quad (4.93)$$

donde α_{DF} y α_U son los valores de la deformación plástica equivalente en los puntos correspondientes al inicio del régimen de discontinuidad fuerte (DF) y al

estado de relajación completa de las tensiones ($\mathbf{U}$) ($\phi = 0$), respectivamente:

$$\begin{aligned}\alpha_{DF} &= \alpha_B - \frac{1}{R\bar{H}} \ln\left(\frac{k}{h_B}\right) \\ \alpha_U &= \alpha_{DF} - \frac{\sigma_y - q_{DF}}{k\bar{H}}\end{aligned}\quad (4.94)$$

La expresión de $h(\alpha)$ viene ahora dada por

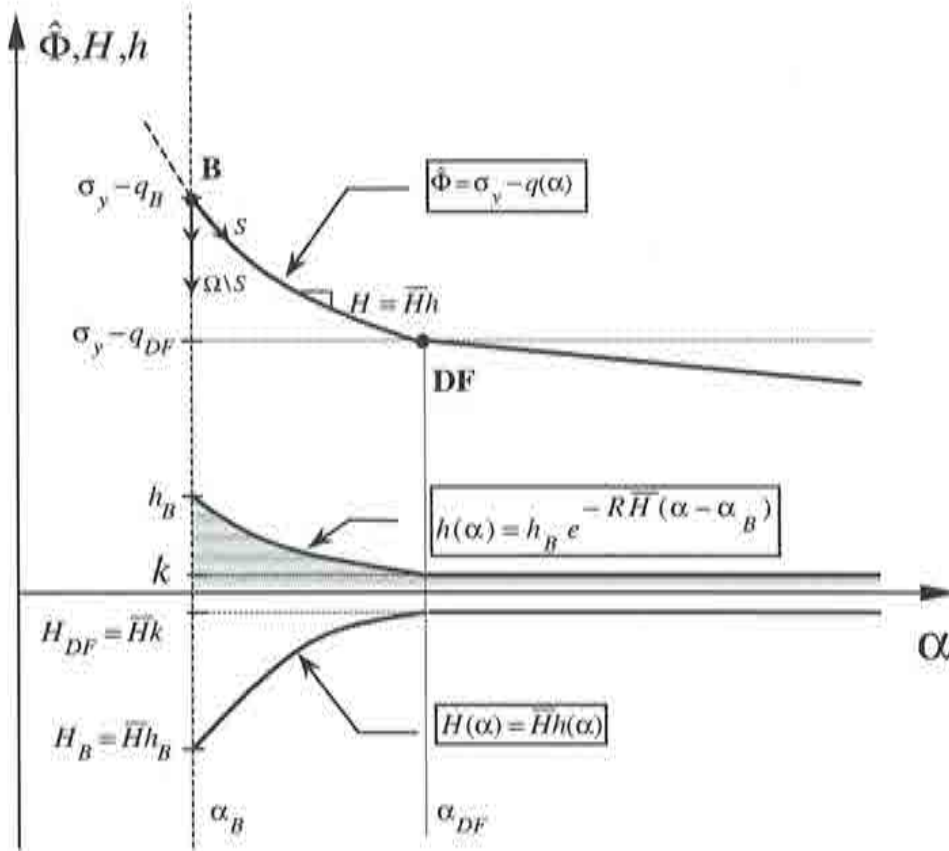


Figura 4.6 Evolución de las variables del problema en la fase *post-bifurcación*.

$$h(\alpha) = h(q(\alpha)) = \begin{cases} h_B e^{-R\bar{H}(\alpha - \alpha_B)} & \text{para } \alpha_B \leq \alpha \leq \alpha_{DF} \quad (\text{transición}) \\ k & \text{para } \alpha > \alpha_{DF} \quad (\text{disc. fuerte}) \end{cases} \quad (4.95)$$

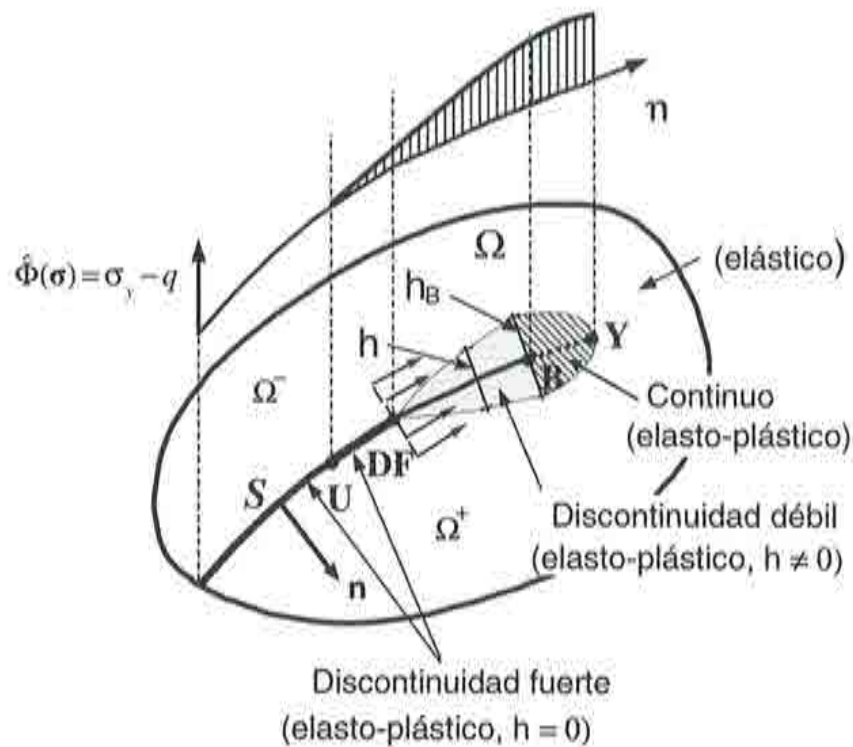


Figura 4.7 Modelo de propagación de la discontinuidad

La figura 4.6 muestra la evolución típica de las variables del problema en la fase *post-bifurcación*.

Suponiendo que los campos de tensiones y deformaciones son continuos a lo largo de S , el ancho de la banda también es continuo y, por consiguiente, el modelo propuesto para la variación del ancho de banda induce el siguiente esquema idealizado de propagación de la discontinuidad (véase figura 4.7): un frente de discontinuidad débil se propaga a lo largo de S , manteniendo un ancho comprendido entre $h = h_B$, en el punto material B (el punto donde el estado de tensión-deformación bifurca), y $h = 0$, en el punto material DF (el punto donde la discontinuidad débil se colapsa en discontinuidad fuerte). Los puntos materiales de S detrás de DF ya alcanzaron el régimen de discontinuidad fuerte y constituyen una línea de discontinuidad fuerte. En los puntos situados detrás de U no existen tensiones superficiales de interacción entre los labios de la discontinuidad, caracterizando la formación completa de la discontinuidad. Por tanto, la región no lineal comprendida entre los puntos B y U representa la zona donde se procesa la discontinuidad, que, en el contexto de la mecánica de

fractura no lineal, corresponde a la llamada zona de proceso de fisura (*fracture process zone*, Bazant y Oh 1983).

4.4.7 Energía consumida en régimen de discontinuidad fuerte. Energía de fractura

Para problemas cuasi-estáticos, donde la energía cinética puede despreciarse, según el *teorema de las fuerzas vivas*, la potencia introducida al sistema por las fuerzas externas, $\mathcal{P}^{ext}$, debe ser igual a la potencia tensional de todo el sólido, $\mathcal{P}^{int}$ (Malvern 1969), esto es

$$\mathcal{P}^{ext} = \mathcal{P}^{int} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega \quad (4.96)$$

donde Ω representa el dominio del análisis. Centrando el estudio para la situación correspondiente al régimen de discontinuidad fuerte ($h \rightarrow 0$), el campo de la tasa de deformaciones viene dado por (4.6) y, por tanto, la expresión anterior se reescribe de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{ext} &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \left[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta_S ([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s \right] d\Omega \\ &= \underbrace{\int_{\Omega \setminus S} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega}_{\mathcal{P}_{\Omega \setminus S}^{int}} + \underbrace{\int_S \boldsymbol{\sigma}_s : ([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s dS}_{\mathcal{P}_S^{int}} \end{aligned} \quad (4.97)$$

donde se indican la parte volumétrica, $\mathcal{P}_{\Omega \setminus S}^{int}$, y superficial, $\mathcal{P}_S^{int}$, de la potencia externa introducida. Se puede interpretar, por tanto, $\mathcal{P}_S^{int}$ como la parte de la potencia externa consumida en la formación del salto $[\dot{\mathbf{u}}]$ en la superficie de discontinuidad S . Así, la energía total consumida en la formación de la discontinuidad fuerte durante el proceso de carga viene dada por

$$\mathcal{W}_S = \int_{t_{DF}}^{\infty} \mathcal{P}_S^{int} dt \quad (4.98)$$

donde t_{DF} indica el instante del proceso de carga correspondiente al inicio del régimen de discontinuidad fuerte en el punto material. Sustituyendo el valor de $([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s$, que se obtiene de la ecuación de discontinuidad fuerte (4.58), en la

ecuación (4.97), se llega a la siguiente expresión

$$\mathcal{P}_s^{int} = \int_S \boldsymbol{\sigma}_s : ([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s dS = \int_S \frac{\dot{\alpha}}{s} \boldsymbol{\sigma}_s : \bar{\mathbf{m}} dS \quad (4.99)$$

Teniendo en cuenta la continuidad del vector tracción, $\boldsymbol{\sigma}_s \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_{n \setminus s} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}$, la expresión (4.99) se reescribe como

$$\boxed{\mathcal{P}_s^{int} = \int_S \mathbf{t} \cdot [\dot{\mathbf{u}}] dS = \int_S \frac{\dot{\alpha}}{s} \boldsymbol{\sigma}_s : \bar{\mathbf{m}} dS} \quad (4.100)$$

Se particulariza ahora el estudio para el caso en que se considera:

- (a) La función $\hat{\phi}(\boldsymbol{\sigma})$, que define la superficie de fluencia en la ecuación (4.21), es una función homogénea de grado uno de las tensiones. En este caso, mediante el teorema de Euler para funciones homogéneas, se tiene

$$\partial_\sigma \hat{\phi} : \boldsymbol{\sigma} = \hat{\phi}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (4.101)$$

- (b) Plasticidad asociada ($\bar{\mathbf{m}} = \partial_\sigma \hat{\phi} = \mathbf{m}$ y $\bar{s} = \partial_s \phi = 1$).

En estas condiciones⁹, para procesos de carga plástica ($\gamma \neq 0$), la ecuación (4.26) establece que $\phi = 0$ y por tanto, de las ecuaciones (4.21), (4.101) se concluye que

$$\begin{aligned} \sigma_y - q &= \hat{\phi} \\ &= \partial_\sigma \hat{\phi} : \boldsymbol{\sigma} \\ &= \mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (4.102)$$

Sustituyendo (4.102) en (4.100), se obtiene

$$\mathcal{P}_s^{int} = \int_S \mathbf{t} \cdot [\dot{\mathbf{u}}] dS = \int_S (\sigma_y - q) \frac{\dot{\alpha}}{s} dS \quad (4.103)$$

⁹ Estos requisitos se cumplen para las funciones de fluencia usuales, tales como Von-Mises, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, Rankine, etc.

Llevando ahora la expresión (4.103) a la ecuación (4.98), se llega a

$$\mathcal{W}_S = \int_S \underbrace{\left[\int_{t_{DF}}^{\infty} \mathbf{t} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket dt \right]}_{G_{DF}} dS = \int_S \underbrace{\left[\int_{\bar{\alpha}_{DF}}^{\infty} (\sigma_y - q) d\bar{\alpha} \right]}_{G_{DF}} dS \quad (4.104)$$

donde se identifican los núcleos de las integrales como una parte de la energía consumida en la formación de la unidad de área de superficie de discontinuidad, que, en el contexto de la mecánica de fractura no lineal (Hillerborg *et al.* 1976, Planas y Elices 1992), se refiere a la energía de fractura G_f . Debe hacerse notar que la energía G_f debe incluir la parte de la energía consumida en la fase de transición, G_T , entre la bifurcación y el inicio del régimen de discontinuidad fuerte (donde $\llbracket u \rrbracket \neq 0$), que no ha sido considerada en la integración (4.104). La figura 4.8 ilustra las partes de la energía G_f consumidas en la fase de transición y en régimen de discontinuidad fuerte.

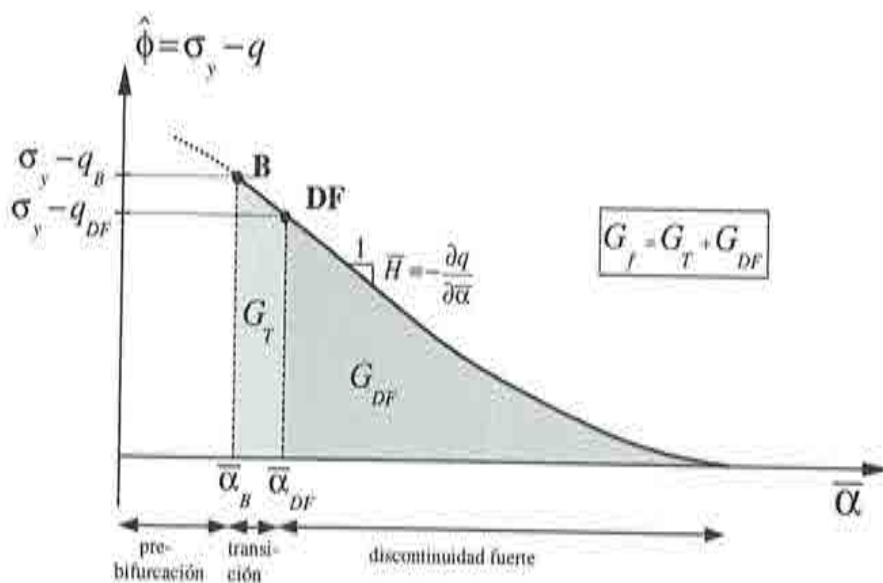


Figura 4.8 Energía de fractura consumida en el proceso de formación de la discontinuidad.

El proceso de carga completo en régimen de discontinuidad fuerte se caracteriza por la evolución de la variable interna q desde su valor en el inicio del régimen de discontinuidad fuerte, $q = q_{DF}$ (en $t = t_{DF}$) hasta alcanzar el valor $q = \sigma_y$ ($t \rightarrow \infty$), donde las tensiones están completamente relajadas (véase figura 4.5 o

4.6). De esta manera, teniendo en cuenta que $\dot{\alpha} = -\bar{H} \dot{q}$ (ver ecuación (4.55)) y considerando $\bar{H}$ constante a lo largo del proceso de carga, la expresión de la energía de fractura viene dada por

$$\begin{aligned} G_{DF} &= \int_{t_{DF}}^{\infty} \mathbf{t} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket dt \\ &= - \int_{q_{DF}}^{\sigma_y} (\sigma_y - q) \frac{1}{\bar{H}} dq \\ &= - \frac{\sigma_{DF}^2}{2 \bar{H}} \end{aligned} \quad (4.105)$$

donde $\sigma_{DF} = \sigma_y - q_{DF}$. El valor de la variable q_{DF} en el instante de inicio del régimen de discontinuidad fuerte depende en general de la historia de las deformaciones o tensiones (véase apartado 4.4.6).

En los casos en que la bifurcación ($\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \neq 0$) y el régimen de discontinuidad fuerte tienen lugar en el pico de la curva ϕ versus α ($\mathbf{B} = \mathbf{DF}$ en $\alpha = \alpha_{pico}$), el valor de G_{DF} representa la energía total consumida en la formación de la unidad de área de discontinuidad, es decir,

$$G_f = G_{DF} \quad (4.106)$$

En estas condiciones, de la ecuación (4.105) el módulo de endurecimiento intrínseco, $\bar{H}$, se escribe en función de las propiedades del material σ_y y G_f de la forma

$$\boxed{\bar{H} = - \frac{\sigma_{pico}^2}{2 G_f}} \quad (4.107)$$

donde $\sigma_{pico} = \sigma_y - q_{pico}$.

Observación 4.12 Para los casos de plasticidad que cumplen las condiciones a) y b), la expresión de la energía consumida por la relación discreta intrínseca $\mathbf{t}$ versus $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ (véase ecuación (4.105)) se puede calcular de forma cerrada, independientemente del proceso de carga posterior al inicio del régimen de discontinuidad fuerte; además, para llegar a dicha expresión no es necesario utilizar la forma explícita de la relación discreta intrínseca.

Observación 4.13 La existencia de la relación directa entre el módulo $\bar{H}$ y la energía de fractura G_f (ecuación (4.107)) se limita a los casos

que cumplen las condiciones a) y b) y, además, bifurcan en régimen de discontinuidad fuerte ($\mathbf{B} = \mathbf{DF}$).

Observación 4.14 Si la energía consumida entre la bifurcación $\mathbf{B}$ y la discontinuidad fuerte $\mathbf{DF}$ es pequeña y despreciable, entonces la energía consumida en la formación de la discontinuidad puede aproximarse a través de la relación (4.107) (ver figura 4.8). Nótese que la condición $\mathbf{B} \approx \mathbf{DF}$ establece que la región donde se procesa la fisura (*fracture process zone*) es pequeña comparada a la dimensión del problema (ver figura 4.7). Dicha condición, por tanto, determina un dominio o rango en el que la aproximación de discontinuidades fuertes presentada aquí coincide con la teoría clásica de la mecánica de fractura no lineal cohesiva (Hillerborg *et al.* 1976; Planas y Elices 1992) y en el que debería esperarse obtener resultados muy semejantes a los obtenidos con dichas teorías.

Observación 4.15 Se puede demostrar que en el modelo de plasticidad asociada con criterio de fluencia de Rankine se tiene $H_B = 0$ y, por tanto, $\mathbf{B} = \mathbf{DF}$, independientemente del estado de tensión en el momento de la bifurcación. Para los otros criterios de fluencia, la bifurcación con $H_B = 0$ sólo puede tener lugar para algunos estados particulares de tensión (Ottosen y Runesson, 1991).

4.5 ANÁLISIS DE DISCONTINUIDADES EN MEDIOS ELÁSTICOS DEGRADABLES

4.5.1 Formulación del modelo de daño continuo isótropo basado en deformaciones

La formación de macro-fisuras puede interpretarse como el resultado de la iniciación, crecimiento e interconexión de micro-fisuras y micro-poros. Los modelos basados en la *teoría de la mecánica de daño continuo* (Kachanov 1986; Simó y Ju 1987; Lemaitre y Chaboche 1988) consideran que el desarrollo de la degradación física del material es un proceso no lineal termodinámicamente irreversible y utilizan un conjunto de variables internas para modelar el proceso de degradación física local. En este trabajo se considera la familia de modelos de degradación elástica lineal isótropa (Oliver *et al.* 1990), que utiliza sólo una

variable de degradación escalar para representar el comportamiento no lineal del material. A continuación se presenta de manera resumida la formulación de dicha familia de modelos constitutivos en una estructura teórica basada en deformaciones (Simó y Ju 1987).

Relación constitutiva secante. Función de energía libre

El proceso de degradación escalar se caracteriza a través de la siguiente función de energía libre

$$\Psi(\varepsilon, d) = (1 - d) \Psi^0(\varepsilon) \quad (0 \leq d \leq 1) \quad (4.108)$$

donde d es la variable de degradación escalar, que varía desde cero (material virgen sin degradación) hasta 1 (material completamente degradado). La función Ψ^0 representa la energía elástica almacenada del material no degradado:

$$\Psi^0(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbf{C}^e : \varepsilon \quad (4.109)$$

donde $\mathbf{C}^e$ es el tensor constitutivo elástico.

La relación entre tensión y deformación viene dada por

$$\sigma = \frac{\partial \Psi(\varepsilon, d)}{\partial \varepsilon} = (1 - d) \mathbf{C}^e : \varepsilon \quad (4.110)$$

que se puede expresar de manera equivalente de la forma

$$\sigma = (1 - d) \sigma^e \quad (4.111)$$

donde

$$\sigma^e = \mathbf{C}^e : \varepsilon \quad (4.112)$$

es la *tensión efectiva*, cuyo concepto ha sido introducido a través de la *hipótesis de la deformación equivalente* (Lemaitre y Chaboche 1988): "La deformación asociada a un estado degradado sometido a tensiones aplicadas es equivalente a la deformación asociada a un estado no degradado sometido a la tensión efectiva".

Obsérvese que, puesto que σ^e depende unívocamente de ε , tanto σ^e como ε pueden tomarse como variable independiente del problema.

Evolución de la degradación definida en el espacio de tensiones efectivas

De manera similar a los modelos de plasticidad, para caracterizar la evolución de la variable de degradación d se establece un *criterio de degradación* que, en el espacio de tensiones efectivas, delimita la región en la que no hay evolución de la variable de degradación d

$$\boxed{f^e(\boldsymbol{\sigma}^e, r^e) = \hat{\tau}(\boldsymbol{\sigma}^e) - r^e \leq 0} \quad (4.113)$$

donde $\hat{\tau}(\bullet)$ representa una norma del tensor de tensiones que debe cumplir los requisitos usuales: ser siempre positiva y resultar cero para el tensor nulo ($\hat{\tau}(\mathbf{0}) = 0$). Obsérvese que, como $\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}$, la norma de las tensiones efectivas se asocia directamente a una norma de las deformaciones y, por tanto, se establece en paralelo un criterio de degradación en el espacio de deformaciones. El valor de r^e es el umbral de degradación en el espacio de tensiones efectivas. Mientras que la función $\hat{\tau}(\boldsymbol{\sigma}^e)$ especifica la forma de la *superficie límite de degradación* ($f^e(\boldsymbol{\sigma}^e, r^e) = 0$), el umbral r^e define su tamaño en el espacio de las tensiones efectivas. Se considera que el umbral de degradación inicial, r_0 , para el material intacto, antes de cualquier aplicación de carga, es una propiedad del material.

La evolución de la variable de daño, d , se define a través de la siguiente relación

$$\boxed{\dot{d} = \frac{(1-d)}{\hat{\tau}(\boldsymbol{\sigma}^e)} \gamma} \quad (4.114)$$

donde γ es el *parámetro de consistencia del daño* y $\hat{\tau}$ es la norma energética del tensor de tensiones, tal que

$$\boxed{\hat{\tau}(\boldsymbol{\sigma}^e) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^e : \mathbf{C}^{e-1} : \boldsymbol{\sigma}^e} = \sqrt{2 \Psi^0}} \quad (4.115)$$

Obsérvese que la norma $\hat{\tau}$ utilizada para definir el criterio de degradación (ecuación (4.113)) puede ser diferente de la norma energética $\bar{\tau}$.

Las condiciones de carga-descarga se definen de acuerdo con las relaciones de Kuhn-Tucker:

$$\boxed{\gamma \geq 0, \quad f^e(\boldsymbol{\sigma}^e, r^e) \leq 0, \quad \gamma f^e(\boldsymbol{\sigma}^e, r^e) = 0} \quad (4.116)$$

juntamente con la *condición de persistencia*:

$$\boxed{\gamma \dot{f}^e(\boldsymbol{\sigma}^e, r^e) = 0} \quad (4.117)$$

Teniendo en cuenta que $(1-d)/\bar{\tau}(\boldsymbol{\sigma}^e) \geq 0$ en la ecuación (4.114), las relaciones (4.116) y (4.117) establecen que

$$\left\{ \begin{array}{l} f^e < 0 \\ f^e = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \dot{f}^e < 0 \\ \dot{f}^e = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma = 0 \Rightarrow \dot{d} = 0 \text{ (no hay evolución del daño)} \\ \gamma = 0 \Rightarrow \dot{d} = 0 \text{ (descarga)} \\ \gamma = 0 \Rightarrow \dot{d} = 0 \text{ (carga neutra)} \\ \gamma > 0 \Rightarrow \dot{d} > 0 \text{ (carga)} \end{array} \right. \quad (4.118)$$

En el caso de carga ($\gamma > 0$), la condición de persistencia (4.117) implica

$$\dot{f}^e = 0 \Rightarrow \dot{\hat{\tau}}(\boldsymbol{\sigma}^e) = \dot{r}^e > 0 \quad (4.119)$$

Por tanto, el valor de r^e en el instante de tiempo t del proceso de carga viene dado por (Simó y Ju 1987)

$$\boxed{r_t^e = \max \left\{ r_0, \max_{s \in (-\infty, t)} \hat{\tau}_s(\boldsymbol{\sigma}^e) \right\}} \quad (4.120)$$

Obsérvese que, de acuerdo con (4.120), r^e depende unívocamente de la historia de las deformaciones a través de $\boldsymbol{\sigma}^e$.

Evolución de la degradación definida en el espacio de tensiones

Suponiendo que la norma $\hat{\tau}(\bullet)$ es una función escalar homogénea de primer grado, de acuerdo con la relación (4.111), se tiene

$$\hat{\tau}(\boldsymbol{\sigma}^e) = \hat{\tau}\left(\frac{1}{1-d}\boldsymbol{\sigma}\right) = \frac{1}{1-d}\hat{\tau}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (4.121)$$

Sustituyendo (4.121) en (4.113), se obtiene el criterio de degradación equivalente en el espacio de las tensiones

$$\boxed{f^\sigma(\boldsymbol{\sigma}, r^\sigma) = \hat{\tau}(\boldsymbol{\sigma}) - r^\sigma \leq 0} \quad (4.122)$$

donde r^σ es el *umbral del daño en el espacio de tensiones*, que viene dado por

$$\boxed{r^\sigma = (1 - d) r^\epsilon} \quad (4.123)$$

Teniendo en cuenta que la función $\bar{\tau}(\boldsymbol{\sigma})$ es homogénea de primer grado, la evolución del daño (4.115) puede escribirse de forma equivalente como:

$$\dot{d} = \frac{(1 - d)^2}{\bar{\tau}(\boldsymbol{\sigma})} \gamma \quad (4.124)$$

En el espacio de tensiones, las condiciones de carga-descarga pueden reescribirse de manera equivalente a través de las relaciones de Kuhn-Tucker

$$\boxed{\gamma \geq 0, \quad f^\sigma(\boldsymbol{\sigma}, r^\sigma) \leq 0, \quad \gamma f^\sigma(\boldsymbol{\sigma}, r^\sigma) = 0} \quad (4.125)$$

y la condición de persistencia

$$\boxed{\gamma \dot{f}^\sigma(\boldsymbol{\sigma}, r^\sigma) = 0} \quad (4.126)$$

Regla de endurecimiento/ablandamiento

La evolución de la variable de degradación queda completamente definida por la regla de endurecimiento/ablandamiento que establece la relación entre los umbrales r^ϵ y r^σ . Con este objetivo, se define el *parámetro de endurecimiento* de la forma

$$\boxed{\alpha = r^\epsilon - r^\sigma = d r^\epsilon} \quad (4.127)$$

De manera similar a los modelos elasto-plásticos, la regla de endurecimiento, que especifica la evolución de la superficie de daño en el espacio de tensiones, se define como

$$\boxed{\dot{r}^\sigma = H \dot{\alpha}} \quad (4.128)$$

donde H es el *módulo de endurecimiento/ablandamiento*. Sustituyendo la expresión (4.127) en (4.128), se obtiene la relación en tasa entre los umbrales

de los distintos espacios, esto es

$$\dot{r}^\sigma = \frac{H}{H+1} \dot{r}^\varepsilon = H' \dot{r}^\varepsilon \quad (4.129)$$

A partir de las expresiones (4.123), (4.127) y (4.128) se obtiene la expresión de la evolución de la variable de degradación

$$\dot{d} = \left(\frac{1}{1+H} - d \right) \frac{\dot{r}^\varepsilon}{r^\varepsilon} \quad (4.130)$$

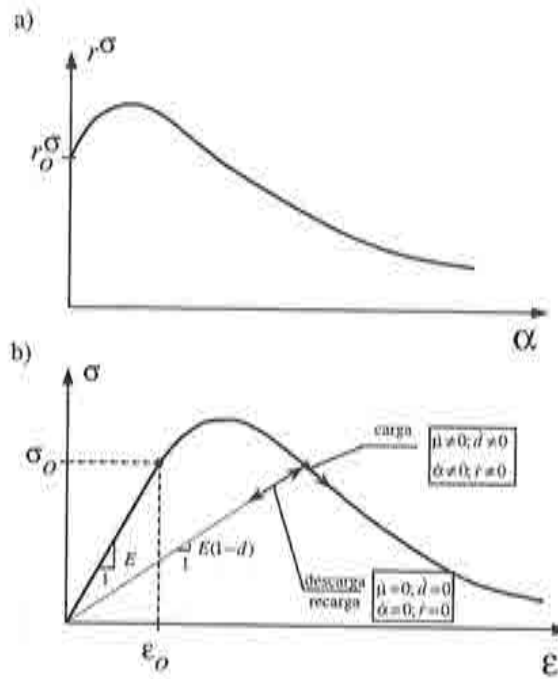


Figura 4.9 Evolución de las variables del modelo de degradación elástica: a) curva de endurecimiento/ablandamiento. b) curva tensión-deformación uniaxial.

La figura 4.9.a muestra un esquema ilustrativo de la regla de endurecimiento y en la figura 4.9.b se presenta la curva tensión versus deformación uniaxial típica del modelo elástico degradable.

Observación 4.16 De la ecuación (4.130) se concluye que la evolución de la variable de degradación se relaciona directamente con la evolución del umbral r^e que, a su vez, depende de manera explícita de la historia de las deformaciones (véase relación (4.120)).

Observación 4.17 Si se define la relación del tipo $r^g = F(r^e)$, a partir de la ecuación (4.123) se concluye que la variable de degradación se expresa en términos de r^e a través de la siguiente ecuación:

$$d = G(r^e) = 1 - \frac{F(r^e)}{r^e} \quad (4.131)$$

En este caso, el módulo de endurecimiento se expresa como (véase ecuación (4.129))

$$H = \frac{H'}{1 - H'} \quad \text{con} \quad H' = \frac{\partial F(r^e)}{\partial r^e} \quad (4.132)$$

Para que $d \in [0, 1]$ y $\dot{d} \geq 0$ la función $G(r)$ debe satisfacer las condiciones

$$\begin{cases} 0 \leq G(r) \leq 1 \\ \frac{\partial G(r)}{\partial r} \geq 0 \end{cases} \quad \forall r \in \mathbb{R}^+ \quad (4.133)$$

De las ecuaciones (4.128), (4.127) y (4.130) se puede obtener la siguiente expresión de la tasa de variación del parámetro de endurecimiento:

$$\dot{\alpha} = \frac{r^e}{1 - d(H + 1)} \dot{d} \quad (4.134)$$

Formulación en tasa. Analogía con las ecuaciones constitutivas de elasto-plasticidad

Diferenciando la relación constitutiva secante (4.110) se obtiene la relación constitutiva incremental:

$$\dot{\sigma} = (1 - d) C^e; \dot{\epsilon} - \dot{d} C^e; \epsilon$$

$$= (1 - d) \mathbf{C}^e : \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{d}{1-d} \boldsymbol{\varepsilon} \right) \quad (4.135)$$

La ecuación incremental (4.135) se puede escribir convenientemente de la siguiente manera (Carol *et al.* 1994):

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_s^d : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d) \quad (4.136)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_s^d &= (1 - d) \mathbf{C}^e \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d &= \frac{d}{1-d} \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.137)$$

donde $\mathbf{C}_s^d$ es el tensor constitutivo secante degradado y $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d$ es la parte degradada de la tasa de las deformaciones.

El valor de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d$ de la ecuación (4.137)₂, así como la tasa del parámetro de endurecimiento, $\dot{\alpha}$, de la ecuación (4.134), pueden expresarse como

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d = \gamma \bar{\mathbf{m}} \\ \dot{\alpha} = \gamma \bar{s} \end{cases} \quad (4.138)$$

con

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{m}} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\bar{\tau}(\boldsymbol{\sigma}^e)} \\ \bar{s} = \frac{1-d}{1-d(H+1)} \frac{\hat{\tau}(\boldsymbol{\sigma}^e)}{\bar{\tau}(\boldsymbol{\sigma}^e)} = \frac{1-d}{1-d(H+1)} \frac{\hat{\tau}(\boldsymbol{\sigma})}{\bar{\tau}(\boldsymbol{\sigma})} \end{cases} \quad (4.139)$$

Obsérvese que sustituyendo las ecuaciones (4.139) y el valor de γ (ecuación 4.114) en (4.138) y teniendo en cuenta que en caso de carga la condición de consistencia impone que $\hat{\tau}(\boldsymbol{\sigma}^e) = r^e$, se obtienen las expresiones de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d$ y $\dot{\alpha}$ de las ecuaciones (4.137)₂ y (4.134), respectivamente.

Las ecuaciones (4.136) y (4.138), junto con el criterio de degradación (4.122), las condiciones de carga-descarga (4.125) y la ley de endurecimiento (4.128), constituyen un conjunto de ecuaciones similar al grupo de ecuaciones que definen el modelo constitutivo de elasto-plasticidad presentado en el apartado 4.4.1. En la tabla 4.2 se establece la correspondencia entre los dos modelos constitutivos.

Elasto-plástico	Degradación elástica
$\mathbf{C}^e$	$\mathbf{C}_a^d = (1 - d) \mathbf{C}^e$
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d$
$\sigma_y - q$	r^σ
$\phi(\boldsymbol{\sigma})$	$f^\sigma(\boldsymbol{\sigma})$
$\hat{\phi}(\boldsymbol{\sigma})$	$\hat{\tau}(\boldsymbol{\sigma})$
$\bar{\phi}(\boldsymbol{\sigma})$	$\bar{\tau}(\boldsymbol{\sigma})$

Tabla 4.2 Correspondencia entre las variables del modelo elasto-plástico y del modelo de degradación elástica.

Una de las implicaciones de dicho resultado es la posibilidad de aplicar el concepto de asociatividad. Nótese que el valor de $\bar{\mathbf{m}}$ de la expresión (4.139)₁ se obtiene derivando la función de la norma energética, $\bar{\tau}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}^{e-1} : \boldsymbol{\sigma}}$, esto es

$$\bar{\mathbf{m}} = \frac{\partial \bar{\tau}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbf{C}^{e-1} : \boldsymbol{\sigma}}{\bar{\tau}(\boldsymbol{\sigma})} = \frac{(1-d) \boldsymbol{\varepsilon}}{\bar{\tau}(\boldsymbol{\sigma})} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\bar{\tau}(\boldsymbol{\sigma}^e)} \quad (4.140)$$

de donde se deduce que $\bar{\tau}(\boldsymbol{\sigma})$ desempeña el papel de función potencial de la que se deriva el tensor $\bar{\mathbf{m}}$.

Definiendo (véase ecuación (4.122))

$$\begin{cases} \mathbf{m} = \frac{\partial f^{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}, r^{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \hat{\tau}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ s = \frac{\partial f^{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}, r^{\sigma})}{\partial r^{\sigma}} = 1 \end{cases} \quad (4.141)$$

de manera análoga a los modelos elasto-plásticos, se considera que el modelo de degradación es asociado cuando $\mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\varepsilon} / \bar{\tau}(\boldsymbol{\sigma}^e)$, es decir, cuando se adopta $\hat{\tau}(\boldsymbol{\sigma}) = \bar{\tau}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}^{e-1} : \boldsymbol{\sigma}}$.

El tensor constitutivo tangente $\mathbf{C}_t^d$ se obtiene sustituyendo $\mathbf{C}^e$ por $\mathbf{C}_s^d = (1-d) \mathbf{C}^e$ en la expresión del tensor tangente elasto-plástico (4.38), resultando

$$\boxed{\mathbf{C}_t^d = \mathbf{C}_s^d - \frac{\mathbf{C}_s^d : \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{m} : \mathbf{C}_s^d}{\underbrace{\mathbf{m} : \mathbf{C}_s^d : \bar{\mathbf{m}} + H s \bar{s}}_{\mathbf{C}^d}} = (1-d) \left(\mathbf{C}^e - \frac{\mathbf{C}^e : \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{m} : \mathbf{C}^e}{\mathbf{m} : \mathbf{C}^e : \bar{\mathbf{m}} + H \frac{s \bar{s}}{1-d}} \right)} \quad (4.142)$$

Obsérvese que el operador tangente es simétrico si el modelo es asociado.

La relación constitutiva incremental se expresa, por tanto, como

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.143)$$

con

$$\mathbf{C} = \begin{cases} \mathbf{C}_s^d & (\text{descarga}) \\ \mathbf{C}_t^d & (\text{carga}) \end{cases} \quad (4.144)$$

Posibles criterios de degradación

Como se ha mencionado anteriormente, el criterio de degradación se define a través de la función $\hat{\tau}(\bullet)$ que determina una norma de las tensiones.

En el presente trabajo se utilizan las siguientes alternativas:

- *Modelo con igual degradación a tracción y a compresión (modelo asociado)*

En este modelo, la función $\hat{\tau}$ se define como la norma energética de las tensiones (Simó y Ju 1987):

$$\hat{\tau}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}^{\varepsilon^{-1}} : \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.145)$$

En el espacio de las tensiones efectivas se tiene

$$\hat{\tau}(\boldsymbol{\sigma}^e) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^e : \mathbf{C}^{\varepsilon^{-1}} : \boldsymbol{\sigma}^e} \quad (4.146)$$

Nótese que, utilizando la expresión (4.112), dicha norma puede reescribirse en términos de las deformaciones de la forma

$$\hat{\tau}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}} = \sqrt{2 \Psi_0(\boldsymbol{\varepsilon})} \quad (4.147)$$

Como las funciones $\hat{\tau}$ y $\bar{\tau}$ coinciden, el modelo es asociado, es decir

$$\mathbf{m} = \frac{\partial \hat{\tau}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\hat{\tau}(\boldsymbol{\sigma}^e)} = \bar{\mathbf{m}} \quad (4.148)$$

- *Modelo con degradación sólo a tracción (modelo no asociado)*

En los casos en que la resistencia a tracción es el factor determinante del comportamiento no lineal del material, se puede emplear un criterio de degradación sólo a tracción, expresado como (Oliver *et al.* 1990)

$$\hat{\tau}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^+ : \mathbf{C}^{\varepsilon^{-1}} : \boldsymbol{\sigma}^+} \quad (4.149)$$

o, en el espacio de las tensiones efectivas

$$\hat{\tau}(\boldsymbol{\sigma}^e) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon+} : \mathbf{C}^{\varepsilon^{-1}} : \boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon+}} \quad (4.150)$$

siendo

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_i \quad (4.151)$$

donde σ_i representa la tensión principal i , $\mathbf{p}_i$ es el vector unitario correspondiente a la respectiva dirección principal y $\langle \bullet \rangle$ es la función rampa, tal que $\langle \sigma_i \rangle = (|\sigma_i| + \sigma_i)/2$ ($\langle \sigma_i \rangle = \sigma_i$ si $\sigma_i > 0$ y $\langle \sigma_i \rangle = 0$ si $\sigma_i \leq 0$). De manera análoga se tiene

$$\boldsymbol{\sigma}^{\epsilon+} = \langle \boldsymbol{\sigma}^\epsilon \rangle = \sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i^\epsilon \rangle \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_i \quad (4.152)$$

- El modelo resultante es no asociado, expresándose el tensor normal a la superficie de degradación como

$$\mathbf{m} = \frac{\partial \bar{\tau}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \hat{\tau}(\boldsymbol{\sigma}^\epsilon)}{\partial \boldsymbol{\sigma}^\epsilon} \neq \bar{\mathbf{m}} \quad (4.153)$$

Nótese que la norma energética $\bar{\tau}$ coincide con $\hat{\tau}$ sólo en el cuadrante de los ejes positivos del espacio de las tensiones principales, es decir, cuando $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^+$ (o $\boldsymbol{\sigma}^\epsilon = \boldsymbol{\sigma}^{\epsilon+}$). En esta situación, el modelo es idéntico al modelo asociado descrito anteriormente.

4.5.2 Análisis de bifurcación discontinua. Condición de localización

Dada la analogía entre la formulación en tasa del modelo de degradación elástica y del elasto-plástico, los resultados del análisis de bifurcación obtenidos en el apartado 4.4.2 también son válidos aquí. De esta manera, según las ecuaciones (4.51), el valor del módulo de ablandamiento que conduce a la singularidad del tensor de localización $\mathbf{Q}^d = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_t^d \cdot \mathbf{n}$, para un determinado estado de tensiones o deformaciones, es

$$\frac{H_B}{(1-d)} = \begin{cases} -\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{s\bar{s}} [m_{tt} (\bar{m}_{tt} + \nu \bar{m}_{33}) + \bar{m}_{33} (\nu m_{tt} + m_{33})] & \text{(deformación plana)} \\ -E \frac{1}{s\bar{s}} m_{tt} \bar{m}_{tt} & \text{(tensión plana)} \end{cases} \quad (4.154)$$

donde m_{ij} y $\bar{m}_{ij}$ ($i, j = n, t, 3$) son las componentes de $\mathbf{m}$ y $\bar{\mathbf{m}}$ respecto a la base $\{\mathbf{n}, \mathbf{t}, \hat{\mathbf{e}}_3\}$.

Sustituyendo las expresiones de $\bar{\mathbf{m}}$, $\bar{s}$ y s de las ecuaciones (4.139) y (4.141)₂, respectivamente, en (4.154) y teniendo en cuenta que para el estado de deformación plana $\bar{m}_{33} = \varepsilon_{33} = 0$, se obtiene

$$H_B = \frac{(1-d) \hat{H}_B}{1-d \hat{H}_B} \quad (4.155)$$

donde

$$\hat{H}_B = -\frac{E}{F(\nu)} m_{tt} \bar{m}_{tt} \quad (4.156)$$

con

$$F(\nu) = \begin{cases} 1 - \nu^2 & \text{(deformación plana)} \\ 1 & \text{(tensión plana)} \end{cases} \quad (4.157)$$

De acuerdo con la ecuación (4.155), y teniendo en cuenta que $d \in [0, 1]$, se puede concluir que, para un determinado estado de deformaciones (o tensiones), el máximo valor de H_B corresponde al máximo valor de $\hat{H}_B$. De esta manera, el valor del módulo de endurecimiento crítico, H_{crit} , se obtiene para la dirección $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{crit}$ que conduce al máximo valor de $\hat{H}_B$ de la expresión (4.156). Suponiendo que $\mathbf{m}$ y $\bar{\mathbf{m}}$ tienen las mismas direcciones principales, con dos de estas direcciones pertenecientes al plano del problema, se puede deducir que (ver anexo B)

$$\boxed{\hat{H}_{crit} = -\frac{E}{F(\nu)} m_{tt_{crit}} \bar{m}_{tt_{crit}}} \quad (4.158)$$

donde

$$\begin{aligned} m_{tt_{crit}} &= (m_1 - m_2) \sin^2 \theta_{crit} + m_2 \\ \bar{m}_{tt_{crit}} &= (\bar{m}_1 - \bar{m}_2) \sin^2 \theta_{crit} + \bar{m}_2 \end{aligned} \quad (4.159)$$

$$\sin^2 \theta_{crit} = \begin{cases} a_{crit} & \text{si } 0 \leq a_{crit} \leq 1 \\ 1 & \text{si } a_{crit} > 1 \\ 0 & \text{si } a_{crit} < 0 \end{cases} \quad (4.160)$$

$$a_{crit} = -\frac{1}{2} \frac{m_2 (\bar{m}_1 - \bar{m}_2) + \bar{m}_2 (m_1 - m_2)}{(m_1 - m_2) (\bar{m}_1 - \bar{m}_2)} \quad (4.161)$$

donde m_i y $\bar{m}_i$ ($i = 1, 2$, $m_1 \geq m_2$, $\bar{m}_1 \geq \bar{m}_2$) son los valores principales de los tensores $\mathbf{m}$ y $\bar{\mathbf{m}}$ en el plano del problema, respectivamente, y θ_{crit} es el ángulo que el vector $\mathbf{n}_{crit}$ forma con la dirección principal asociada a m_1 o $\bar{m}_1$.

Finalmente, el valor del módulo de endurecimiento/ablandamiento crítico viene dado por

$$H_{crit} = \frac{(1-d) \hat{H}_{crit}}{1-d \hat{H}_{crit}} \quad (4.162)$$

Observación 4.18 Obsérvese que para el caso de un modelo asociado ($\mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}}$) el valor de H_{crit} de la expresión (4.162) es menor o igual a cero. Esto es, el modelo asociado sólo puede bifurcar en régimen de ablandamiento o de degradación perfecta ($H \leq 0$).

4.5.3 Análisis de discontinuidad fuerte

De manera análoga a la llevada a cabo en el análisis de discontinuidad fuerte para modelos elasto-plásticos (apartado 4.4.3), a partir de la descripción cinemática (4.8), de la relación constitutiva en tasa de la ecuación (4.136) y de las relaciones (4.138)₁ y (4.137)₁, se puede obtener la siguiente ecuación de evolución de las deformaciones:

$$\dot{\tilde{\epsilon}} + \frac{\mu_S}{h} (\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \otimes \mathbf{n})^s = \frac{\mathbf{C} e^{-1}}{1-d} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \gamma \bar{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (4.163)$$

Puesto que $\dot{\tilde{\epsilon}}$ es acotada y la tasa de las tensiones $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ también debe estar acotada, el régimen de discontinuidad fuerte (cuando $h \rightarrow 0$) sólo puede tener lugar si la variable γ deja de ser acotada en la discontinuidad¹⁰. Por ello, se supone que γ

¹⁰ Se considera aquí la situación en la cual $1/(1-d)$ es acotado en el inicio del régimen de discontinuidad fuerte.

presenta la siguiente estructura

$$\gamma = \mu_S \frac{\bar{\gamma}}{h} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S} \\ \gamma = \frac{1}{h} \bar{\gamma} & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \end{cases} \quad (4.164)$$

donde la variable $\bar{\gamma}$ es acotada. Nótese que (4.164) establece que no hay evolución de la variable de degradación en $\Omega \setminus \mathcal{S}$ ($\dot{\gamma} = \dot{d} = 0$). De la ecuación (4.138)₂, se tiene que

$$\dot{\alpha} = \bar{s} \gamma = \bar{s} \mu_S \frac{\bar{\gamma}}{h} = \mu_S \frac{\bar{\dot{\alpha}}}{h} \quad (4.165)$$

Sustituyendo (4.165) en (4.128) se obtiene la misma estructura del *módulo de endurecimiento/ablandamiento* que se considera en el modelo elasto-plástico, es decir

$$\boxed{H = \frac{\dot{\gamma}^\sigma}{\dot{\alpha}} = h \left(\frac{\dot{\gamma}^\sigma}{\dot{\alpha}} \right) = h \bar{H} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}} \quad (4.166)$$

donde

$$\bar{H} = \frac{\dot{\gamma}^\sigma}{\bar{\dot{\alpha}}} = \frac{\dot{\gamma}^\sigma}{\bar{s} \bar{\mu}} \quad (4.167)$$

es el *parámetro de endurecimiento/ablandamiento intrínseco o discreto*.

Debe hacerse notar que, de acuerdo con (4.166), el régimen de discontinuidad fuerte sólo puede tener lugar cuando el valor del módulo de ablandamiento continuo H es nulo ($h \rightarrow 0 \Rightarrow H \rightarrow 0$).

Para que los términos no acotados de la ecuación (4.163) se correspondan cuando el régimen de discontinuidad fuerte tiene lugar, el tensor $\bar{\mathbf{m}}$ debe tener la misma estructura del tensor $([\bar{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s$, lo que implica

$$\bar{m}_{tt} = 0 \quad (4.168)$$

donde $\bar{\mathbf{m}} = \varepsilon/\tau(\sigma^\varepsilon)$ (véase ecuación (4.139)₁). Nótese que la condición $\bar{m}_{33} = \varepsilon_{33} = 0$, que sólo interviene en deformación plana, se cumple automáticamente.

Por tanto, la *condición de discontinuidad fuerte* en tensión plana o en deformación plana se resume en

$$\boxed{\bar{m}_{tt} = \varepsilon_{tt} = 0} \quad (4.169)$$

Observación 4.19 La bifurcación sólo puede tener lugar en régimen de discontinuidad fuerte si la condición (4.169) se cumple en este

instante. Nótese que, de acuerdo con la expresión (4.154), la condición de discontinuidad fuerte (4.169) implica $H_B = H_{crit} = 0$, lo que quiere decir que la bifurcación con $H = 0$ es la condición necesaria para que el régimen de discontinuidad fuerte tenga lugar inmediatamente después de la bifurcación. En los casos en que esto no ocurre, es necesario establecer una *fase de transición* entre la bifurcación y el régimen de discontinuidad fuerte.

4.5.4 Modelo de formación de discontinuidad fuerte en sólido elástico degradable. Modelo de ancho de banda variable

Como se ha detallado anteriormente, las ecuaciones constitutivas en tasa de los modelos elasto-plásticos y de degradación elástica escalar son análogas. Este hecho permite que tanto el procedimiento de detección de la bifurcación en fase pre-bifurcación, como el mecanismo de transición entre la bifurcación y el régimen de discontinuidad fuerte (cuando es necesario) propuesto para los modelos elasto-plásticos (apartado 4.4.6) puedan emplearse también para modelos elásticos degradables.

En la figura 4.10.a se muestra la curva típica de la variación de la norma $\hat{\tau}^\sigma$ en función del parámetro de endurecimiento/ablandamiento α , donde se indican las diferentes fases del proceso de formación de la discontinuidad. La curva 4.10.b ilustra la variación típica del ancho de banda a lo largo de proceso de carga.

4.5.5 Energía consumida en régimen de discontinuidad fuerte. Energía de fractura.

En el apartado 4.4.7 se ha deducido que la parte de la energía de fractura en un punto $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ que se consume en régimen de discontinuidad fuerte viene dada por (véase ecuación (4.105))

$$\begin{aligned} G_{DF} &= \int_{t_{DF}}^{\infty} \boldsymbol{\sigma}_s : ([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s dt \\ &= \int_{t_{DF}}^{\infty} \mathbf{t} \cdot [\dot{\mathbf{u}}] dt \end{aligned} \quad (4.170)$$

donde t_{DF} es el instante de inicio del régimen de discontinuidad fuerte en $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$.

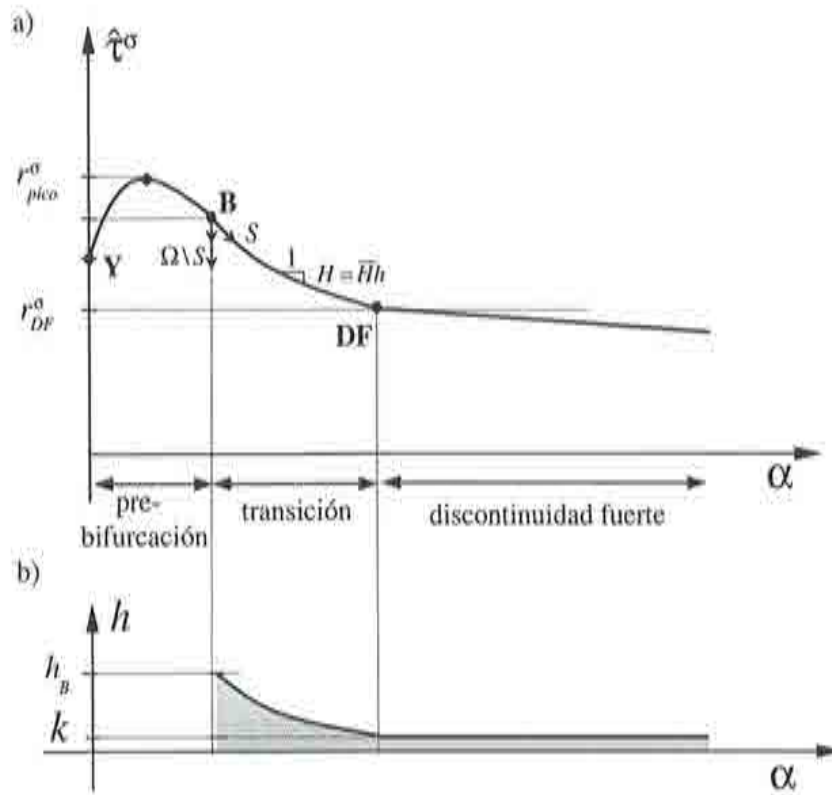


Figura 4.10 Modelo de ancho de banda variable.

Considérese el caso de *degradación asociada*, esto es

$$\hat{\tau}(\sigma) = \bar{\tau}(\sigma) = \sqrt{\sigma : C^{e-1} ; \sigma} \quad (4.171)$$

De acuerdo con el criterio de degradación (4.122) y la condición de carga-descarga (4.116), en caso de carga ($\gamma \neq 0$) se tiene

$$r^\sigma = \bar{r}(\sigma) = \sqrt{\sigma : C^{e-1} ; \sigma} \quad (4.172)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (4.114), (4.139)₂ y (4.110), tras algunos desarrollos algebraicos, la ecuación de evolución de las deformaciones (4.163) puede reescribirse como

$$\dot{\bar{\epsilon}} + \frac{\mu_s}{h} ([\dot{u}] \otimes n)^s = \frac{1}{1-d} C^{e-1} ; \dot{\sigma} + \frac{d}{(1-d)^2} (1-d) \epsilon$$

$$= \mathbf{C}^{e^{-1}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{d}{1-d} \mathbf{C}^{e^{-1}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d}{1-d} \right) \mathbf{C}^{e^{-1}} : \boldsymbol{\sigma} \quad (4.173)$$

Particularizando la ecuación (4.173) para un punto $\mathbf{x} \in S$, multiplicando los dos miembros de dicha ecuación por $\boldsymbol{\sigma}_s$ y teniendo en cuenta las ecuaciones (4.172), (4.127) y (4.121), se obtiene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_s : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{h} \boldsymbol{\sigma}_s : ([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s &= r^\sigma \dot{r}^\sigma + r^\sigma \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d}{1-d} r^\sigma \right) \\ &= r^\sigma \dot{r}^\sigma + r^\sigma \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (4.174)$$

Finalmente, sustituyendo la expresión (4.165) en (4.174), resulta

$$\boldsymbol{\sigma}_s : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \underbrace{\frac{1}{h} \boldsymbol{\sigma}_s : ([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s}_{\text{no acotado}} = r^\sigma \dot{r}^\sigma + \underbrace{r^\sigma \frac{1}{h} \dot{\alpha}}_{\text{no acotado}} \quad (4.175)$$

Como $\boldsymbol{\sigma}_s$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, r^σ , $\dot{r}^\sigma$ y $\dot{\alpha}$ son acotados, para que la ecuación (4.175) tenga sentido matemático en régimen de discontinuidad fuerte (cuando $[\dot{\mathbf{u}}] \neq 0$ y $h \rightarrow 0$), los términos no acotados de (4.175) deben corresponderse, esto es

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}_s : ([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s = r^\sigma \dot{\alpha}} \quad (4.176)$$

Reemplazando ahora la expresión (4.176) en (4.170) y teniendo en cuenta la ecuación (4.167), se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} G_{DF} &= \int_{t_{DF}}^{\infty} \mathbf{t} : [\dot{\mathbf{u}}] dt = \int_{t_{DF}}^{\infty} r^\sigma \dot{\alpha} dt \\ &= \int_{t_{DF}}^{\infty} r^\sigma \frac{\dot{r}^\sigma}{\dot{H}} dt = \int_{r_{DF}^\sigma}^{r_\infty^\sigma} \frac{r^\sigma}{\dot{H}} dr^\sigma \end{aligned} \quad (4.177)$$

donde r_{DF}^σ y $r_\infty^\sigma (= 0)$ representan los valores del umbral r^σ en el inicio del régimen de discontinuidad fuerte y en el final del proceso de carga, respectivamente. La figura 4.11 muestra las dos partes de la energía de fractura consumida en la formación de la discontinuidad, correspondientes a las fases de transición y de discontinuidad fuerte, como el área sobre la curva r^σ versus $\dot{\alpha}$.

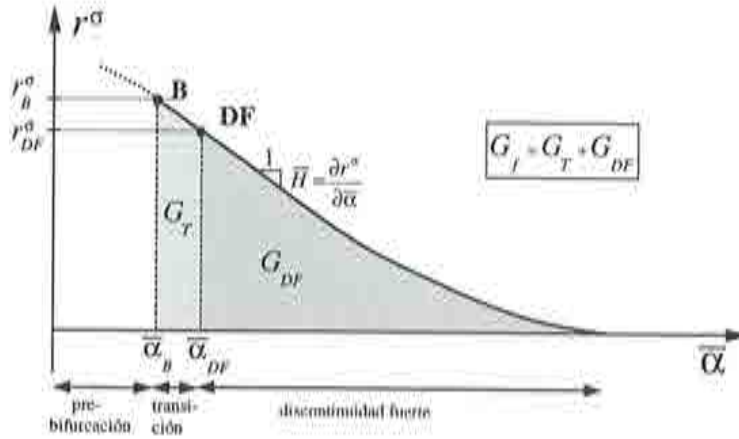


Figura 4.11 Energía de fractura consumida en el proceso de formación de la discontinuidad.

Para el caso en que $\bar{H}$ es constante, la expresión (4.177) resulta

$$G_{DF} = \int_{t_{DF}}^{\infty} \mathbf{t} \cdot [\dot{\mathbf{u}}] dt = -\frac{r_{DF}^{\sigma^2}}{2\bar{H}} \quad (4.178)$$

Para los casos en que la bifurcación ($[[u]] = 0$ y $[[\dot{u}]] \neq 0$) tiene lugar en el pico de la curva r^{σ} versus α de la figura 4.10.a ($H = H_b = 0$), el régimen de discontinuidad fuerte coincide con la bifurcación en este instante y, por consiguiente, la energía consumida G_{DF} corresponde a la energía total consumida en la formación de la discontinuidad, es decir

$$G_{DF} = G_f \quad (4.179)$$

En este caso, el *módulo de endurecimiento intrínseco* se relaciona directamente con la energía de fractura a través de la expresión

$$\bar{H} = -\frac{r_{pico}^{\sigma^2}}{2G_f} \quad (4.180)$$

Nótese la analogía entre el resultado (4.180) con la ecuación (4.107), obtenida para el modelo elasto-plástico asociado.

Anejo B

ANÁLISIS DE BIFURCACIÓN DISCONTINUA. CONDICIÓN DE LOCALIZACIÓN

B.1 INTRODUCCIÓN

En este anexo se presenta una revisión de la teoría general de localización de las deformaciones, en la que el fenómeno de localización se asocia a la pérdida de estabilidad material de medios cuya deformación inelástica se describe a través de relaciones constitutivas macroscópicas (Nadai, 1931; Hill, 1958; Rudinicki y Rice, 1975; Rice, 1976; Ottosen y Runesson, 1991; Ottosen, Runesson y Peric, 1991, entre otros). El estudio se centrará en la bifurcación discontinua según la hipótesis presente en Rice (1976) y Rudinicki y Rice (1975) en la cual se considera la formación de una banda de localización entre dos superficies de discontinuidad en el campo (tasa) de deformaciones, mientras el campo (tasa) de desplazamientos permanece continuo (*discontinuidad débil*). Como la discontinuidad en el campo (tasa) de desplazamientos (*discontinuidad fuerte*) se considera como el caso límite en que la banda de localización tiende a cero, la bifurcación discontinua se considera aquí como precursora de la discontinuidad fuerte.

En este anejo se propone un procedimiento alternativo y simplificado para la obtención de las condiciones de bifurcación discontinua, en el cual, de manera distinta a la propuesta por Ottosen y Runesson (1991) y Ottosen, Runesson y Peric (1991), no se hace necesario el análisis de los valores propios del *tensor de localización*.

El presente estudio se limita a casos de deformaciones infinitesimales y materiales cuyo comportamiento no depende de la velocidad (*rate independent*). Se obtienen resultados analíticos de las condiciones de bifurcación para medios elasto-plásticos en problemas bidimensionales. Para medios con degradación elástica escalar se demuestra que las ecuaciones constitutivas en forma de tasa (*rate*) se pueden

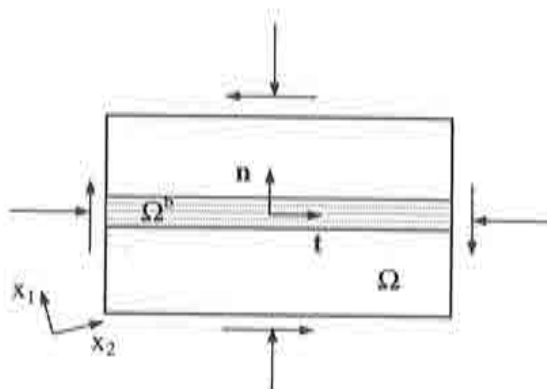


Figura 4.12 Banda de localización en un dominio multidimensional.

escribir de forma similar a las ecuaciones constitutivas de elasto-plasticidad y, por consiguiente, los resultados del análisis de bifurcación de las dos familias de modelos constitutivos son completamente análogos (véase apartado 4.5).

B.2 ANÁLISIS DE BIFURCACIÓN DISCONTINUA

De manera similar al estudio llevado a cabo en el Capítulo 1, donde se analizó el problema de bifurcación en casos unidimensionales, considérese un dominio homogéneo Ω deformado de manera también uniforme. Se busca conocer bajo qué condiciones la tasa del campo de deformaciones, $\dot{\epsilon}$, puede resultar no uniforme, variando con la posición a través de una banda plana $\Omega^b \in \Omega$ (delimitada por dos planos paralelos, véase figura 4.12) y permaneciendo uniforme en el exterior de dicha banda.

Considérese una base ortonormal $\{\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{p}\}$, donde $\mathbf{n}$ es la normal al plano de la banda, según la cual las coordenadas locales de un punto $\mathbf{x} \in \Omega$ son dadas por $\mathbf{x} = \{\bar{x}_n, \bar{x}_t, \bar{x}_p\}$. Puesto que el campo $\dot{\mathbf{u}}$ permanece continuo, las derivadas de $\dot{\mathbf{u}}$ según las direcciones $\bar{x}_t$ y $\bar{x}_p$, paralelas al plano de la banda, deben permanecer uniformes. Por tanto, la no uniformidad del campo del gradiente de la tasa de desplazamientos está sometida a la siguiente restricción cinemática

$$\Delta \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right) = \beta_i(\bar{x}_n) n_j \quad (i, j) = 1, 2, 3 \quad (\text{B.1})$$

donde $\Delta(\bullet)$ representa la diferencia entre el valor del campo $(\bullet)$ en un punto de Ω^b con respecto al campo uniforme del exterior de la banda; $\dot{u}_i$ y n_i son las componentes de $\dot{\mathbf{u}}$ y $\mathbf{n}$, respectivamente, y β_i son funciones de $\bar{x}_n$. Como resultado, la discontinuidad del campo de la tasa de deformaciones debe cumplir

$$\begin{aligned}\Delta(\dot{\epsilon}_{ij}) &= \Delta\left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j}\right)^s = (\beta_i n_j)^s \\ &= \frac{1}{2}(\beta_i n_j + \beta_j n_i)\end{aligned}\quad (\text{B.2})$$

dicha restricción se conoce como *condición de compatibilidad cinemática de Maxwell*.

Por otra parte, la condición de equilibrio en la inminencia de la bifurcación establece que el vector tracción debe ser continuo dentro y fuera de la banda, es decir

$$\Delta(\dot{\sigma}_{ij}) n_j = 0 \quad (\text{B.3})$$

La tasa de tensiones puede expresarse en términos de la tasa de deformaciones, a través de la relación constitutiva que se elige. Así, la localización de deformaciones puede ocurrir en un punto cuando existe un vector $\beta \neq 0$, tal que las relaciones (B.2) y (B.3) se cumplen. En notación tensorial, por tanto, la bifurcación discontinua implica

$$\boxed{\begin{cases} \Delta(\dot{\epsilon}) = (\beta \otimes \mathbf{n})^s & (\text{restricción cinemática}) \\ \Delta(\dot{\sigma}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & (\text{equilibrio}) \end{cases}} \quad (\text{B.4})$$

Observación 4.20 Sustituyendo β por $\frac{1}{h}[[\dot{\mathbf{u}}]]$ en (B.4), se verifica que la restricción cinemática es la misma que se obtiene partiendo de la cinemática representativa adoptada para representar la discontinuidad débil o fuerte (ver ecuaciones (4.42) y (4.43)).

Suponiendo que el comportamiento del material no depende de la velocidad, la relación en tasa entre la tensión y la deformación se describe de la forma

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C} : \dot{\epsilon} \quad (\text{B.5})$$

donde $\mathbf{C}$ representa el tensor constitutivo tangente de cuarto orden. El análisis de bifurcación puede tener lugar en dos escenarios distintos, dependiendo del comportamiento dentro y fuera de la banda. Suponiendo que el mismo tensor

tangente gobierna el comportamiento de los materiales de dentro y de fuera de la banda - coincidiendo con el concepto de sólido de comparación lineal de Hill (1958) - mediante (B.4)₁ y (B.5), la diferencia entre las tasas de tensiones dentro y fuera de la banda viene dada por

$$\begin{aligned}\Delta(\dot{\sigma}) &= \mathbf{C} : \Delta(\dot{\epsilon}) \\ &= \mathbf{C} : (\beta \otimes \mathbf{n})^s\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

Sustituyendo (B.6) en la condición de equilibrio (B.4)₂ y teniendo en cuenta la simetría de los tensores $\dot{\sigma}$ y $(\beta \otimes \mathbf{n})^s$, se obtiene

$$\Delta(\dot{\sigma}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{n} : \mathbf{C} : \mathbf{n}) \cdot \beta = 0 \quad (\text{B.7})$$

es decir

$$\boxed{\mathbf{Q}(\mathbf{n}) \cdot \beta = 0} \quad (\text{B.8})$$

donde $\mathbf{Q}$ representa el *tensor de localización*, definido como

$$\boxed{\mathbf{Q}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}} \quad (\text{B.9})$$

Obsérvese que solamente existe solución no trivial ($\beta \neq 0$) del sistema (B.8) si el determinante del $\mathbf{Q}$ es nulo. Por tanto, la localización puede tener lugar si existe solución para la dirección $\mathbf{n}$ de la normal al plano de la banda, tal que

$$\boxed{\det(\mathbf{Q}(\mathbf{n})) = 0} \quad (\text{B.10})$$

La singularidad del tensor $\mathbf{Q}$ corresponde a la pérdida de elipticidad local de las ecuaciones de equilibrio incrementales (Rice 1976) y, por esto, la expresión $\det(\mathbf{Q}) > 0$ se conoce como *condición de elipticidad*. En la teoría infinitesimal de propagación de ondas planas (Hadamard 1903; Thomas 1961; Hill 1962; Mandel 1966), el tensor $\mathbf{Q}$ se conoce como *tensor acústico tangencial*, $\mathbf{n}$ es la dirección de propagación y los valores propios de $\mathbf{Q}$ corresponden a las velocidades de propagación de las ondas. En este contexto, la condición de singularidad (B.10) implica la existencia de ondas estacionarias. Cabe destacar que la singularidad del tensor de localización es una condición necesaria, pero no suficiente, para la bifurcación, ya que las condiciones de borde pueden inhibir el proceso de localización.

El otro escenario posible en el cual la bifurcación puede tener lugar corresponde a comportamientos distintos dentro y fuera de la banda. Sea $\dot{\bar{\epsilon}}$ el campo de la tasa de deformaciones homogéneo de la parte exterior de la banda, la diferencia entre las tasa de tensiones dentro y fuera de la banda viene dada por

$$\Delta(\dot{\sigma}) = C_{int} : \left[\dot{\bar{\epsilon}} + \Delta(\dot{\epsilon}) \right] - C_{ext} : \dot{\bar{\epsilon}} \quad (B.11)$$

$$= C_{int} : \left[\dot{\bar{\epsilon}} + (\beta \otimes n)^S \right] - C_{ext} : \dot{\bar{\epsilon}} \quad (B.12)$$

donde C_{int} y C_{ext} representan los tensores constitutivos tangentes del material interno y externo de la banda, respectivamente. La condición de equilibrio (B.4)₂ requiere entonces que se cumpla

$$\Delta(\dot{\sigma}) \cdot n = (n : C_{int} : n) \cdot \beta + (C_{int} - C_{ext}) : \dot{\bar{\epsilon}} = 0 \quad (B.13)$$

es decir, la condición de localización en este caso es

$$\boxed{Q_{int} \cdot \beta = -\Delta(C) : \dot{\bar{\epsilon}}} \quad (B.14)$$

donde $Q_{int} = n : C_{int} : n$.

B.3 ANÁLISIS DE BIFURCACIÓN DISCONTINUA EN MEDIOS ELASTO-PLÁSTICOS

B.3.1 Resumen de las ecuaciones constitutivas

A continuación se presenta un resumen de las ecuaciones constitutivas de elasto-plasticidad, que serán necesarias para el análisis de bifurcación.

- *Relación incremental:*

De las ecuaciones (4.19) y (4.23)₁ se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= C^e : [\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p] \\ &= C^e : [\dot{\epsilon} - \gamma \bar{m}] \end{aligned} \quad (B.15)$$

- *Tensor constitutivo tangente:*

La relación incremental entre tensión y deformación se describe de la forma (ver ecuaciones (4.40) y (4.38))

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

donde

$$\mathbb{C} = \begin{cases} \mathbb{C}^e & \text{(descarga elástica)} \\ \mathbb{C}^{ep} & \text{(carga plástica)} \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

con

$$\mathbb{C}^{ep} = \mathbb{C}^e - \mathbb{C}^p \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbb{C}^p = \frac{\mathbb{C}^e : \bar{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{m} : \mathbb{C}^e}{\mathbf{m} : \mathbb{C}^e : \bar{\mathbf{m}} + s H \bar{s}} \quad (\text{B.18})$$

- *Condiciones de carga y descarga:*

Una forma de escribir las condiciones de carga y descarga es (ver ecuación (4.32))

$$\phi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{m} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{trial} > 0 \Rightarrow \dot{\phi} = 0; \gamma > 0 & \text{(carga plástica)} \\ \mathbf{m} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{trial} = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = 0; \gamma = 0 & \text{(carga neutra)} \\ \mathbf{m} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{trial} < 0 \Rightarrow \dot{\phi} < 0; \gamma = 0 & \text{(descarga elástica)} \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

donde

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{trial} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{B.20})$$

- *Condición de consistencia plástica:*

De las ecuaciones (4.29), (4.22) y (4.23)₂ se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \mathbf{m} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + s \dot{\gamma} \\ &= \mathbf{m} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - s H \bar{s} \gamma \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

En caso de carga plástica, de acuerdo con (B.19) y (B.21) se obtiene la siguiente relación

$$\dot{\phi} = 0 \Rightarrow \mathbf{m} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = s H \bar{s} \gamma \quad (\text{B.22})$$

B.3.2 Análisis de bifurcación

De acuerdo con (B.16), en medios elasto-plásticos el tensor constitutivo tangente siempre admite dos valores posibles, dependiendo del estado de carga o descarga del material. Suponiendo que la bifurcación ocurre con carga plástica en el interior de la banda ($\mathbf{C}_{int} = \mathbf{C}^{ep}$) y descarga elástica o carga neutra en el exterior ($\mathbf{C}_{ext} = \mathbf{C}^e$), la condición de localización (B.14) para esta situación se reescribe de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{ep} \cdot \boldsymbol{\beta} &= -(\mathbf{C}^{ep} - \mathbf{C}^e) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ &= \mathbf{C}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Obsérvese que en caso de carga neutra el producto $\mathbf{C}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0$ (vecindad de la ecuación (4.41)) y la condición (B.23) es la misma que se obtienen considerando carga plástica dentro y fuera de la banda, es decir,

$$\mathbf{Q}^{ep} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0 \quad (\text{B.24})$$

En otras palabras, la carga neutra puede interpretarse como la frontera entre carga plástica y descarga elástica. Por consiguiente, el análisis de bifurcación puede efectuarse de manera generalizada considerando comportamientos diferentes dentro y fuera de la banda. Las condiciones que llevan a soluciones no triviales en (B.24), es decir, la singularidad del tensor de localización elasto-plástico, $\mathbf{Q}^{ep}$, son las mismas que se obtienen de (B.23), considerando carga neutra fuera de la banda. En este trabajo se hará uso de esta propiedad para introducir una manera alternativa del análisis de bifurcación que, además de evitar la necesidad de recurrir al análisis de los valores propios del tensor $\mathbf{Q}^{ep}$, como se propone en Ottosen y Runesson (1991) y Runesson *et al.*(1991), expresa de forma única las condiciones de bifurcación en los distintos escenarios para las condiciones de carga-descarga.

Si se considera que la bifurcación ocurre con carga plástica en el interior de la banda ($\gamma \neq 0$) y descarga elástica o carga neutra ($\gamma = 0$) en el exterior, de acuerdo con (B.15) y (B.4)₁, las tasas de tensiones se escriben de la forma

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{int} = \mathbf{C}^e : \left[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \underbrace{(\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^n}_{\Delta(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})} - \underbrace{\gamma \dot{\mathbf{m}}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \right] & (\text{elasto-plástico}) \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ext} = \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} & (\text{elástico}) \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

De acuerdo con (B.19) y (B.25), la condición de descarga elástica o carga neutra en el exterior de la banda implica

$$\mathbf{m} : \mathbf{C}^e : \dot{\tilde{\epsilon}} = \mathbf{m} : \dot{\sigma}_{ext} \leq 0 \quad (\text{B.26})$$

donde la igualdad corresponde a la condición de carga neutra y la desigualdad corresponde a la condición de descarga elástica.

Mediante (B.25), la diferencia de las tasas de las tensiones se expresa de la forma

$$\begin{aligned} \Delta(\dot{\sigma}) &= \dot{\sigma}_{int} - \dot{\sigma}_{ext} \\ &= \mathbf{C}^e : [\dot{\tilde{\epsilon}} + (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^s - \gamma \bar{\mathbf{m}}] - \mathbf{C}^e : \dot{\tilde{\epsilon}} \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

donde se concluye que

$$\Delta(\dot{\sigma}) = \mathbf{C}^e : [(\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^s - \gamma \bar{\mathbf{m}}] \quad (\text{B.28})$$

esto es

$$\dot{\sigma}_{ext} = \dot{\sigma}_{int} - \mathbf{C}^e : [(\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^s - \gamma \bar{\mathbf{m}}] \quad (\text{B.29})$$

Sustituyendo la expresión (B.28) en (B.4)₂ y teniendo en cuenta la simetrías del tensor $\mathbf{C}^e$, la condición de equilibrio se reescribe de la forma

$$\boxed{\mathbf{Q}^e \cdot \boldsymbol{\beta} - \gamma \bar{\mathbf{m}} : \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{n} = 0} \quad (\text{B.30})$$

donde $\mathbf{Q}^e = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{n}$ es el tensor acústico *elástico* que es definido positivo para cualquier $\mathbf{n}$, puesto que $\mathbf{C}^e$ es definido positivo (Bigoni y Hueckel 1991).

Sustituyendo la expresión (B.29) en la condición de descarga elástica o carga neutra (B.26), y teniendo en cuenta que $\dot{\sigma}_{int} : \mathbf{m} = s H \bar{s} \gamma$ (ver ecuación (B.22)), se obtiene

$$\boxed{s H \bar{s} \gamma - \mathbf{C}^e : [(\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{n})^s - \gamma \bar{\mathbf{m}}] : \mathbf{m} \leq 0} \quad (\text{B.31})$$

De (B.30) se puede fácilmente llegar a la expresión de $\boldsymbol{\beta}$ de la forma

$$\boldsymbol{\beta} = \gamma (\mathbf{Q}^e)^{-1} \bar{\mathbf{m}} : \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{n} \quad (\text{B.32})$$

Sustituyendo esta expresión de β en (B.31), se obtiene finalmente la expresión de la condición de localización:

$$H \leq \frac{1}{s \bar{s}} [\mathbf{a} : (\mathbf{Q}^e)^{-1} : \mathbf{b} - \bar{\mathbf{m}} : \mathbf{C}^e : \mathbf{m}] \quad (\text{B.33})$$

con

$$\mathbf{a} = \mathbf{m} : \mathbf{C}^e : \mathbf{n} \quad \mathbf{Q}^e = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{n} \quad \mathbf{b} = \bar{\mathbf{m}} : \mathbf{C}^e : \mathbf{n} \quad (\text{B.34})$$

Observación 4.21 La igualdad en la expresión (B.33) corresponde a la condición de bifurcación bajo carga neutra fuera de la banda, que, como se demostró anteriormente, coincide con la condición de singularidad del tensor acústico elasto-plástico (condición de bifurcación bajo carga dentro y fuera de la banda). Este resultado ha sido obtenido primeramente por Rice (1976) por observación y posteriormente por Runesson *et al.* (1991) imponiendo valor nulo para el menor valor propio del tensor acústico elasto-plástico.

Observación 4.22 La desigualdad en (B.33) corresponde a la situación de bifurcación con descarga elástica fuera de la banda. Por tanto, los valores de H menores que el módulo correspondiente a la singularidad del tensor acústico implican necesariamente descarga elástica fuera de la banda.

Observación 4.23 Es importante recordar que para la obtención de las condiciones de carga y descarga utilizadas en este análisis se ha supuesto que $H > - (1/s \bar{s}) \bar{\mathbf{m}} : \mathbf{C}^e : \mathbf{m}$ (ver ecuación (4.31)) y, por tanto, la condición de localización se escribe de forma más completa como

$$- \frac{1}{s \bar{s}} \bar{\mathbf{m}} : \mathbf{C}^e : \mathbf{m} < H \leq \frac{1}{s \bar{s}} [\mathbf{a} : (\mathbf{Q}^e)^{-1} : \mathbf{b} - \bar{\mathbf{m}} : \mathbf{C}^e : \mathbf{m}] \quad (\text{B.35})$$

B.3.3 Ángulo crítico y módulo de endurecimiento/ablandamiento crítico de bifurcación

Sea H_B el valor del módulo H que conduce a la singularidad del tensor de localización, es decir, que cumple la condición de igualdad en (B.33). Como se puede verificar, el valor de H_B es función del estado de tensiones $\{\sigma, q\}$, a través de las variables $\mathbf{m}(\sigma, q)$, $\bar{\mathbf{m}}(\sigma, q)$, $s(\sigma, q)$, $\bar{s}(\sigma, q)$ y de la orientación $\mathbf{n}$, vía las variables $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{Q}^e$. El problema que se plantea es encontrar el valor crítico H_{crit} , definido como el máximo valor de H_B con respecto a la variación de $\mathbf{n}$ para un determinado estado de tensiones. De esta manera, se puede asegurar que para valores de H superiores a H_{crit} , el material sigue estable (no bifurca). La localización puede ocurrir en el instante de la historia de deformaciones de un punto en que $H = H_{crit}$. Lo que hay que resolver, por tanto, es el problema de maximización de la forma

$$H_{crit} = \max [H_B(\mathbf{n})] \quad (\text{B.36})$$

sujeta a la restricción

$$\mathbf{n} \in \mathcal{B} = \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{n_{dim}} \mid \|\boldsymbol{\eta}\| = 1\} \quad (\text{B.37})$$

Los valores de las orientaciones compatibles con H_{crit} vienen dadas por

$$\mathbf{n}_{crit} \in \{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{B} \mid H_B(\boldsymbol{\eta}) = H_{crit}\} \quad (\text{B.38})$$

Este problema de maximización con restricción ha sido resuelto analíticamente por Ottosen y Runesson (1991) para problemas tridimensionales usando multiplicadores de Lagrange. En el presente trabajo se presentan soluciones analíticas para problema bidimensionales para casos particulares que simplifican mucho el problema de maximización.

B.3.4 Determinación analítica de H_{crit} y $\mathbf{n}_{crit}$ para problemas bidimensionales

Considérese la base ortonormal $\{\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{p}\}$ definida anteriormente, donde los vectores normal $\mathbf{n}$ y tangencial $\mathbf{t}$ a la banda pertenecen al plano del problema mientras que $\mathbf{p} = \mathbf{n} \times \mathbf{t}$ es ortogonal a este plano. Según dicha base, se puede

escribir

$$\Delta(\dot{\epsilon}) = (\beta \otimes \mathbf{n})^s = \begin{bmatrix} \beta_n & \frac{1}{2}\beta_t & 0 \\ \frac{1}{2}\beta_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.39})$$

donde β_n y β_t representan las componentes del vector β según las direcciones $\mathbf{n}$ y $\mathbf{t}$, respectivamente. Los diferentes modos de bifurcación se asocian directamente con los valores de dichas componentes. De manera análoga a la nomenclatura usual de la teoría de la Mecánica de Fractura, la bifurcación se puede clasificar como:

- Modo I ($\beta_n \neq 0$ y $\beta_t = 0$): En este caso el material de la banda se estira o acorta según la dirección normal $\mathbf{n}$ ($\beta \parallel \mathbf{n}$). En caso de estiramiento, este modo se interpreta como modo de colapso por separación, comúnmente observado en materiales frágiles.
- Modo II: ($\beta_n = 0$ y $\beta_t \neq 0$): El material de la banda se deforma en estado de cortante pura ($\beta \perp \mathbf{n}$), que se asocia a la formación de bandas de cizalladura, normalmente observados en metales.
- Modo mixto ($\beta_n \neq 0$ y $\beta_t \neq 0$): Corresponde a situación intermedia entre los dos extremos referidos anteriormente. En caso de geo-materiales, el modo mixto se asocia a bandas de cizalladura con dilatancia.

Deformación plana

En deformación plana, los demás tensores involucrados en la expresión (B.33) se expresan según la base $\{\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{p}\}$ de la forma

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_{nn} & m_{nt} & 0 \\ m_{nt} & m_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & m_{pp} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \bar{m}_{nn} & \bar{m}_{nt} & 0 \\ \bar{m}_{tn} & \bar{m}_{tt} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{m}_{pp} \end{bmatrix} \quad (\text{B.40})$$

Finalmente, el tensor elástico tiene el mismo formato del tensor para problemas tridimensionales, es decir

$$\mathbf{C}^e = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mu \mathbf{I} \quad (\text{B.41})$$

con

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{1+\nu}$$

donde E es el módulo de Young y ν es el coeficiente de Poisson.

Sustituyendo las expresiones (B.39), (B.40) y (B.41) en las relaciones (B.32) y (B.33) se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned} \beta_n &= \gamma \left[\bar{m}_{nn} + (\bar{m}_{nt} + \bar{m}_{pp}) \frac{\nu}{1-\nu} \right] \\ \beta_t &= 2\gamma \bar{m}_{nt} \end{aligned}} \quad (\text{B.42})$$

y

$$\boxed{H \leq H_B} \quad (\text{B.43})$$

con

$$\boxed{H_B = -\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{s\bar{s}} [m_{tt} (\bar{m}_{tt} + \nu \bar{m}_{pp}) + \bar{m}_{tt} (\nu m_{tt} + m_{pp})]} \quad (\text{B.44})$$

El problema de maximización de H_B se simplifica mucho si se supone que $\mathbf{m}$ y $\bar{\mathbf{m}}$ tienen las mismas direcciones principales y que dos de estas direcciones pertenecen al plano del problema. Considérese la base ortonormal $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ donde dos vectores $\hat{\mathbf{e}}_1$ y $\hat{\mathbf{e}}_2$ corresponden a las direcciones principales de $\mathbf{m}$ y $\bar{\mathbf{m}}$ en el plano del problema y $\hat{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{p}$ corresponde a la dirección principal ortogonal a dicho plano. Sean m_i y $\bar{m}_i$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) los valores principales de $\mathbf{m}$ y $\bar{\mathbf{m}}$. Los vectores del plano de dicha base se numeran de manera que $m_1 > m_2$ y $\bar{m}_1 > \bar{m}_2$. Sea θ el ángulo de inclinación de $\mathbf{n}$ con respecto a la dirección principal $\hat{\mathbf{e}}_1$, tal que $\mathbf{n} = \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_2$, las componentes de los tensores $\mathbf{m}$ y $\bar{\mathbf{m}}$ pueden expresarse de la forma

$$\begin{aligned} m_{tt} &= (m_1 - m_2) \sin^2 \theta + m_2 \\ \bar{m}_{tt} &= (\bar{m}_1 - \bar{m}_2) \sin^2 \theta + \bar{m}_2 \\ m_{pp} &= m_3 \\ \bar{m}_{pp} &= \bar{m}_3 \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

Sustituyendo las expresiones (B.45) en (B.44), la expresión de H_B resultante es un polinomio de segundo grado en función de $\sin^2 \theta$. Por tanto, el problema ahora

es encontrar el máximo valor del polinomio bajo la restricción $0 \leq \sin^2 \theta \leq 1$. Haciendo el cambio de variable $a = \sin^2 \theta$, se obtiene

$$\frac{\partial H_n(a)}{\partial a} = 0 \Rightarrow$$

$$a_{crit} = -\frac{1}{2} \frac{m_1 (\bar{m}_2 + \nu \bar{m}_3) + m_2 (\bar{m}_1 - 2 \bar{m}_2 - \nu \bar{m}_3) + \nu m_3 (\bar{m}_1 - \bar{m}_2)}{(m_1 - m_2) (\bar{m}_1 - \bar{m}_2)} \quad (\text{B.46})$$

y

$$\frac{\partial^2 H_n(a)}{\partial a^2} = -2 (m_1 - m_2) (\bar{m}_1 - \bar{m}_2) \leq 0 \quad (\text{B.47})$$

Por tanto, los valores críticos del ángulo y del módulo de endurecimiento vienen dados por

$$\sin^2 \theta_{crit} = \begin{cases} a_{crit} & \text{si } 0 \leq a_{crit} \leq 1 \\ 1 & \text{si } a_{crit} > 1 \\ 0 & \text{si } a_{crit} < 0 \end{cases} \quad (\text{B.48})$$

y

$$H_{crit} = H_n(\sin^2 \theta_{crit}) \quad (\text{B.49})$$

Los modos de bifurcación asociados a θ_{crit} se obtienen directamente de las expresiones (B.42).

Observación 4.24 Para plasticidad asociada ($\mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}}$), y teniendo en cuenta que $0 \leq \nu \leq 0.5$, de la expresión (B.44) se puede demostrar que $H_n \leq 0$ y, por tanto, $H_{crit} \leq 0$. Es decir, en plasticidad asociada, sólo puede haber bifurcación en régimen de ablandamiento o plasticidad perfecta. Sin embargo, en plasticidad no asociada, el material es susceptible de bifurcación incluso en régimen de endurecimiento (Rudinick y Rice 1975; Maier and Hueckel 1979; Ottosen y Runesson (1991)).

Tensión plana

En tensión plana, las componentes de los tensores correspondientes a la dirección fuera del plano no intervienen en el problema. Así, según la base $\{\mathbf{n}, \mathbf{t}\}$, los tensores se describen por

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_{nn} & m_{nt} \\ m_{nt} & m_{tt} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \bar{m}_{nn} & \bar{m}_{nt} \\ \bar{m}_{nt} & \bar{m}_{tt} \end{bmatrix} \quad (\text{B.50})$$

El tensor elástico viene dado por

$$\mathbf{C}^e = \frac{E}{1-\nu^2} [\nu \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + (1-\nu) \mathbf{I}] \quad (\text{B.51})$$

Sustituyendo (B.39), (B.50) y (B.51) en (B.32) y (B.33), se obtienen

$$\boxed{\begin{aligned} \beta_n &= \gamma (\bar{m}_{nn} + \nu \bar{m}_{tt}) \\ \beta_t &= 2\gamma \bar{m}_{nt} \end{aligned}} \quad (\text{B.52})$$

y

$$\boxed{H \leq H_n = -E \frac{1}{s \bar{s}} m_{nt} \bar{m}_{nt}} \quad (\text{B.53})$$

Los valores críticos de la orientación de la normal $\mathbf{n}$ y del parámetro de endurecimiento se obtienen bajo las mismas suposiciones y a través de un procedimiento análogo al utilizado para el estado de deformación plana. Así, se tiene

$$\boxed{a_{crit} = -\frac{1}{2} \frac{m_2 (\bar{m}_1 - \bar{m}_2) + \bar{m}_2 (m_1 - m_2)}{(m_1 - m_2) (\bar{m}_1 - \bar{m}_2)}} \quad (\text{B.54})$$

$$\boxed{\sin^2 \theta_{crit} = \begin{cases} a_{crit} & \text{si } 0 \leq a_{crit} \leq 1 \\ 1 & \text{si } a_{crit} > 1 \\ 0 & \text{si } a_{crit} < 0 \end{cases}} \quad (\text{B.55})$$

$$\boxed{H_{crit} = H_n (\sin^2 \theta_{crit})} \quad (\text{B.56})$$

Los modos de bifurcación asociados a θ_{crit} se obtienen directamente de las expresiones (B.52).

Observación 4.25 De (B.53) se puede concluir también que en caso de plasticidad asociada, $m_{tt} = \bar{m}_{tt}$, la bifurcación sólo puede tener lugar en régimen de ablandamiento o plasticidad perfecta ($H_{crit} \leq 0$).

Capítulo 5

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE DISCONTINUIDADES FUERTES EN DOS DIMENSIONES

5.1 INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se extiende la aproximación por el método de los elementos finitos presentada en el capítulo 3 a problemas bidimensionales. La aproximación que se presenta, que podría incluirse en la familia de los *métodos de deformaciones mejoradas* (Simó y Rifai 1990), consiste en añadir al campo de deformaciones del elemento regular una componente mejorada para representar los efectos proporcionados por una banda de localización de ancho muy inferior al tamaño típico del problema o, como situación límite, una línea de discontinuidad en el campo de desplazamientos (*discontinuidad fuerte*).

Se generaliza la aproximación de elementos finitos presentada en Simó y Oliver (1994) y Oliver (1996.b), originalmente propuesta para representar discontinuidades fuertes en elementos triangulares lineales mejorados, incorporando las siguientes características a la aproximación:

- (a) capacidad de representar el *mecanismo de transición* entre la discontinuidad débil y fuerte, de acuerdo con el modelo de ancho de banda variable propuesto en el capítulo 4.
- (b) posibilidad de utilizar cualquier tipo de elemento finito estándar (sea triangular o cuadrilateral) como elemento base de la aproximación numérica.

Mediante la cinemática propuesta en el capítulo 4, se pueden incluir en una única estructura la aproximación por elemento finitos del modelo de formación de la discontinuidad fuerte *vía relación constitutiva de continuo* (tensión versus deformación), detallado en el capítulo 4, y los llamados *modelos de fisura discreta cohesiva*, que utilizan directamente una *relación constitutiva discreta* (tracción versus desplazamiento) para representar el comportamiento de la interfaz de

discontinuidad (Hillerborg 1976). Sin embargo, el elemento finito aquí presentado está basado en la aproximación correspondiente al primer caso.

En el apartado 5.2, mediante un simple cambio de variables, se reescribe la cinemática representativa de discontinuidades débiles y fuertes, propuesta en el capítulo 4, de modo apropiado para la aproximación numérica. En el apartado 5.3 se presentan las ecuaciones de gobierno que rigen el problema de sólidos discontinuos para los dos tipos de aproximaciones posibles, de acuerdo con la relación constitutiva (continua o discreta) que se utiliza para describir el comportamiento de la interfaz de discontinuidad. En el apartado 5.4 se expone la forma débil de las ecuaciones de equilibrio de sólidos discontinuos, propuesta por Simó y Oliver (1994), dentro del contexto de los *métodos de deformaciones mejoradas* (Simó y Rifai 1990). En el apartado 5.5 se definen las aproximaciones por elementos finitos de los campos de desplazamientos y de deformaciones "regulares" y mejoradas, así como de sus variaciones admisibles, que desempeñan el papel de funciones de prueba de las ecuaciones débiles. La construcción del término mejorado del campo de deformaciones tiene como objetivo la representación correcta de la cinemática propuesta, mientras que la construcción del campo de sus variaciones admisibles pretende obtener la forma débil de la condición de equilibrio en la interfaz de discontinuidad (continuidad del vector tracción). En el apartado 5.6 se presentan las ecuaciones del M.E.F. que se deducen de las ecuaciones débiles y de las aproximaciones de los campos de las variables del problema, para los dos tipos posibles de aproximación (vía relación constitutiva discreta o continua). En el apartado 5.7 se propone un procedimiento para la integración en el "tiempo" del término del campo de deformaciones en el cual interviene la variable $h(t)$, que especifica el ancho de banda a lo largo del tiempo t del proceso de carga. En el apartado 5.8 se detalla el procedimiento para la integración espacial de las variables del problema, mediante un esquema de cuadratura específica. Finalmente, se presenta el procedimiento que se utiliza en este trabajo para detectar la posición de la línea de discontinuidad que se forma a lo largo del proceso de carga.

5.2 REDEFINICIÓN DE LA DESCRIPCIÓN CINEMÁTICA

Sea Ω el dominio ocupado por los puntos materiales $\mathbf{x}$ del cuerpo y $\partial\Omega$ el contorno de dicho dominio, que se descompone en las partes Γ_σ y Γ_u ($\partial\Omega = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$, $\Gamma_\sigma \cap \Gamma_u = \emptyset$) donde se prescriben las tracciones y los desplazamientos, respectivamente (figura 5.1). Sea $\mathcal{S}$ la línea de discontinuidad que divide el dominio Ω en dos partes, Ω^+ y Ω^- , cuya normal $\mathbf{n}$ apunta a Ω^+ , y sea η y ξ

un sistema de coordenadas ortogonal curvilíneo, tal que $\mathcal{S}$ corresponde a la línea coordenada $\xi = 0$ ($\mathcal{S} := \{\mathbf{x}(\xi, \eta) \in \Omega ; \xi = 0\}$).

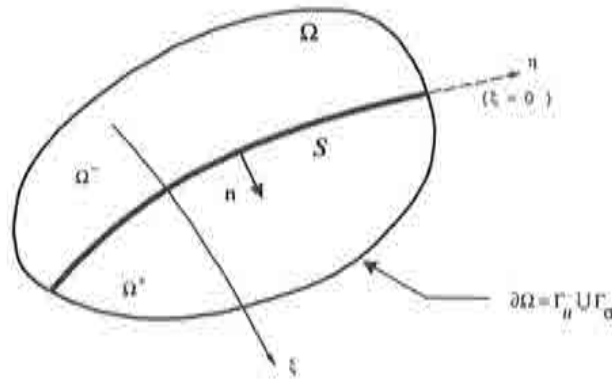


Figura 5.1 Definición del dominio bidimensional discontinuo.

En el capítulo 4 se ha propuesto la siguiente cinemática para representar un problema que involucra discontinuidades débiles y fuertes:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket(\mathbf{x}, t) \quad (5.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \mu_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \frac{1}{h(\mathbf{x}, t)} (\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{x}))^s \quad (5.2)$$

donde $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \nabla^s \dot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \nabla^s \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket$.

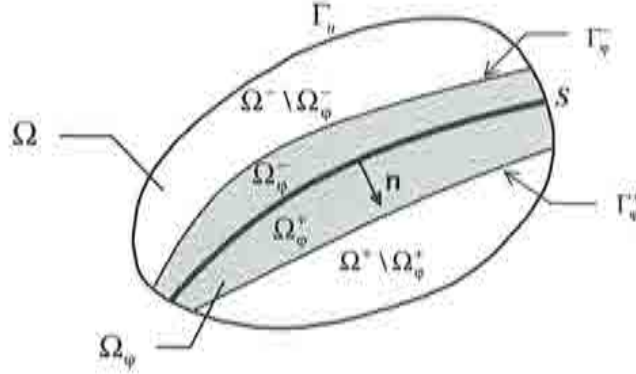
Considérese ahora una función continua $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ definida como

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}) \quad (5.3)$$

donde $\varphi(\mathbf{x})$ es una función continua en Ω , que satisface las condiciones

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{x}) = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \setminus \Omega_{\varphi}^- \\ \varphi(\mathbf{x}) = 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \setminus \Omega_{\varphi}^+ \end{cases} \quad (5.4)$$

siendo Ω_{φ} un subdominio arbitrario de Ω ($\Omega_{\varphi} \subset \Omega$) que contiene la línea de discontinuidad $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S} \subset \Omega_{\varphi}$), como se ilustra en la figura 5.2. Sustituyendo (5.3)

Figura 5.2 Definición del dominio Ω_φ .

en las ecuaciones (5.1) y (5.2), la cinemática del problema se reescribe de manera equivalente como

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) + \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket(\mathbf{x}, t) M_S(\mathbf{x}) \quad (5.5)$$

con

$$M_S(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_S(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) \quad (5.6)$$

y

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{x}, t) + (\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{G}_S(\mathbf{x}, t))^s \quad (5.7)$$

con

$$\mathbf{G}_S(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{h(\mathbf{x}, t)} \mu_S(\mathbf{x}) \mathbf{n} - \nabla \varphi(\mathbf{x}) \quad (5.8)$$

donde la parte "regular" (siempre acotada) de la tasa de deformaciones se expresa como $\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \nabla^s \dot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathcal{M}_S \nabla^s \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket$.

Observación 5.1 Nótese que el soporte de las funciones $M_S(\mathbf{x})$ y $\mathbf{G}_S(\mathbf{x})$ es Ω_φ , esto es,

$$\left. \begin{array}{l} M_S(\mathbf{x}) = 0 \\ \mathbf{G}_S(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_\varphi \quad (5.9)$$

lo que implica que la cinemática de los puntos externos al subdominio Ω_φ se representan solamente a través de las partes "regulares" de los campos de desplazamientos y deformaciones, es decir

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{array} \right\} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_\varphi \quad (5.10)$$

Nótese también que, suponiendo que el contorno Γ_u es externo a Ω_φ ($\Gamma_u \cap \Omega_\varphi = \emptyset$), la condición de contorno esencial puede imponerse directamente sobre la componente "regular" $\hat{\mathbf{u}}$ del desplazamiento, es decir

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^* \quad \text{en } \Gamma_u \quad (5.11)$$

lo que es de gran utilidad en la aproximación numérica del problema.

5.3 ECUACIONES DE GOBIERNO

Las ecuaciones de gobierno y las condiciones de contorno que rigen el problema se resumen del siguiente modo:

$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}$	en $\Omega \setminus S$	(ecuación de equilibrio)	(5.12)
$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^* \\ \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}^* \end{array} \right.$	en Γ_u en Γ_σ	(condiciones de contorno)	
$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u}$	en $\Omega \setminus S$	(relación deformación-desplazamiento)	
$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^c(\boldsymbol{\varepsilon})$	en $\Omega \setminus S$	(relación constitutiva continua)	

donde $\mathbf{f}$ representa las fuerzas volumétricas, $\boldsymbol{\nu}$ es el vector unitario normal (hacia afuera) al contorno Γ de Ω y la función $\boldsymbol{\Sigma}^c$ representa, de manera generalizada, el comportamiento constitutivo del material. Se considera que la función $\boldsymbol{\Sigma}^c$ depende localmente de las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ y de la historia de las deformaciones a lo largo del proceso de carga. Las ecuaciones de gobierno y condiciones de contorno anteriores deben ser complementadas por las siguientes condiciones de equilibrio en la interfaz S :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{t}_+ = \mathbf{t}_- \\ \mathbf{t}_s = \mathbf{t}_+ \quad (\mathbf{t}_s = \mathbf{t}_-) \end{array}} \quad (5.13)$$

donde $\mathbf{t}_+ = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_+$ y $\mathbf{t}_- = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_-$ representan, respectivamente, los vectores tracción calculados en los puntos materiales de las líneas S^+ y S^- vecinas de S ,

$$S^+ := \left\{ \mathbf{x} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} [\mathbf{x}_S + \zeta \mathbf{n}(\mathbf{x}_S)] \mid \mathbf{x}_S \in S \right\} \quad (5.14)$$

y $\mathbf{t}_s = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_s$ representa el vector tracción calculado en los puntos materiales de S .

El comportamiento del material en la discontinuidad S se puede simular según dos tipos de aproximaciones:

- *Aproximación vía relación constitutiva discreta.*

En este caso el comportamiento de la discontinuidad se define a través de la relación constitutiva discreta, que relaciona el vector tracción directamente con el salto

$$\boxed{\mathbf{t}_s = \boldsymbol{\Sigma}^d(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket)} \quad (5.15)$$

donde $\boldsymbol{\Sigma}^d$ representa, de modo generalizado, la función constitutiva discreta, que puede depender de la historia de evolución de $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ a lo largo del proceso de carga.

La principal característica de dicha aproximación es que el ancho de banda no desempeña ningún papel.

En los modelos que consideran el fenómeno de localización como una pérdida de estabilidad material de las ecuaciones constitutivas macroscópicas (bifurcación), la ecuación discreta del tipo (5.15), que puede obtenerse del análisis de discontinuidad fuerte (ver apartado 4.4.5), sólo es válida en el referido régimen. Para estos modelos, la aproximación vía ecuación constitutiva discreta debe limitarse, por tanto, a las situaciones particulares en las que se puede asegurar que el inicio del régimen de discontinuidad fuerte coincide con la bifurcación. En este contexto se incluyen las aproximaciones presentadas por Armero y Garikipati (1995, 1996). En Armero (1997) se define directamente una ley de evolución de los modos de la discontinuidad a través de una relación constitutiva del tipo de la ecuación (5.15).

Por otro lado, en los *modelos de fisura discreta cohesiva*, una vez detectado la condición de inicio de la fisuración, el comportamiento constitutivo de la interfaz se describe a través de una ley de evolución de la fisura como la descrita en la ecuación (5.15) (Hillerborg 1976, Planas y Elices 1992) que, a diferencia del caso anterior, es independiente de la ecuación constitutiva utilizada para describir la parte continua.

Las aproximaciones basadas en la mejora del campo de desplazamientos para representar los efectos de la discontinuidad utilizan necesariamente la relación constitutiva del tipo (5.15) (Dvorkin *et al.* 1990, Dvorkin y Assanelli 1991, Lotfi y Shing 1994, Klisinski *et al.* 1991 y Ohlsson y Olofsson 1997).

- *Aproximación vía relación constitutiva de continuo.*

Este tipo de aproximación, que se utilizará a lo largo de este trabajo, se emplea en las aproximaciones de los modelos que consideran el fenómeno de localización como consecuencia de la pérdida de estabilidad de las ecuaciones constitutivas macroscópicas que describen el comportamiento no lineal del material.

En este caso se utiliza la relación constitutiva de continuo (tensión versus deformación) también para describir el comportamiento en $\mathcal{S}$, es decir

$$\boxed{\mathbf{t}_s = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Sigma}^c(\boldsymbol{\varepsilon}_s) \quad \text{en } \mathcal{S}} \quad (5.16)$$

En este contexto se incluyen tanto las aproximaciones que consideran sólo la situación límite de discontinuidad fuerte (Simó *et al.* (1993), Simó y Oliver (1994), Oliver (1996), Larsson y Runesson (1996), Larsson *et al.* (1996)), como las aproximaciones que tienen en cuenta sólo la presencia de discontinuidad débil, en las cuales el ancho de banda $h \neq 0$ se supone como una constante adicional del problema (Belytschko *et al.* (1988)).

De acuerdo con (5.7), la evolución de la deformación en la discontinuidad se expresa de la forma

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \left[\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \otimes \left(\frac{1}{h} \mathbf{n} - \nabla \varphi \right) \right]^s} \quad (5.17)$$

Nótese que este tipo de aproximación permite representar el comportamiento del material después de la bifurcación tanto en régimen de discontinuidad débil como fuerte, dependiendo del valor de la variable h . Cabe recordar que la relación (5.16) degenera en una ecuación discreta del tipo de la ecuación (5.15) en régimen de discontinuidad fuerte (cuando $h \rightarrow 0$, ver apartado 4.4.5).

5.4 FORMA DÉBIL DE LAS ECUACIONES DE GOBIERNO

De acuerdo con la ecuación (5.7), el campo de deformaciones se descompone de la forma

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\nabla^s \hat{\mathbf{u}}}_{\text{compatible}} + \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\text{mejorada}}} \quad (5.18)$$

donde el último término de la ecuación puede interpretarse como la parte mejorada (Simó y Rifai 1990) que se añade a la deformación "regular" (compatible), con el objeto de representar los efectos de la discontinuidad en la cinemática del problema. La interpolación a través de elementos finitos del término mejorado no necesita ser continua entre elementos, pudiendo incluso derivarse de un campo de desplazamiento incompatible (no conforme).

De manera análoga, el campo de las variaciones admisibles de las deformaciones (funciones de prueba) se puede expresar como

$$\boxed{\boldsymbol{\gamma} = \underbrace{\nabla^s \hat{\boldsymbol{\eta}}}_{\text{compatible}} + \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}}_{\text{mejorada}}, \quad \hat{\boldsymbol{\eta}} \in \hat{\mathcal{V}} \quad \text{y} \quad \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \in \tilde{\mathcal{E}}_\gamma} \quad (5.19)$$

donde $\hat{\mathcal{V}}$ y $\tilde{\mathcal{E}}_\gamma$ representan los espacios de las variaciones admisibles de $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ y $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$, respectivamente.

Se utiliza las siguientes ecuaciones en forma débil dentro del contexto del método de los elementos finitos (Simó y Oliver 1994; Oliver 1996.b):

$$\boxed{\begin{cases} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \hat{\boldsymbol{\eta}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_s} \mathbf{t}^* \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}} \, d\Gamma & \forall \hat{\boldsymbol{\eta}} \in \hat{\mathcal{V}} \\ \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \, d\Omega = 0 & \forall \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \in \tilde{\mathcal{E}}_\gamma \end{cases}} \quad (5.20)$$

La ecuación (5.20)₁ corresponde a la forma débil usual de las ecuaciones de equilibrio del sólido que, además de imponer (5.12)₁, también impone de forma débil la condición de equilibrio en la línea $\mathcal{S}$ (ecuación (5.13)₁). Las funciones de prueba $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ deben construirse de manera tal que la ecuación (5.20)₂ corresponda a la forma débil de la condición (5.13)₂, que relaciona los vectores tracción en $\mathcal{S}$

con los de su vecindad S^+ . El resto de ecuaciones de gobierno (las condiciones de contorno $(5.12)_2$, ecuaciones geométricas $(5.12)_3$ y las relaciones constitutivas $(5.12)_4$ y/o (5.15)) se consideran impuestas *a priori*.

5.5 APROXIMACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

5.5.1 Aproximación de la parte "regular" del campo de desplazamientos y de su variación admisible

Considérese la discretización del dominio Ω en n_{elem} elementos finitos, tal que $\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_{elem}} \Omega_e$, donde Ω_e representa el dominio de cada elemento. Utilizando la notación vectorial, el campo de desplazamiento "regular" se aproxima de la forma (Zienkiewicz y Taylor 1994):

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \cong \hat{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \hat{\mathbf{u}}_e^h(\mathbf{x}, t) \mathcal{X}_e(\mathbf{x}) \quad (5.21)$$

donde $\mathcal{X}_e(\mathbf{x})$ representa la función característica o de colocación en Ω_e ,

$$\mathcal{X}_e(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{para } \mathbf{x} \in \Omega_e \\ 0 & \text{para } \mathbf{x} \notin \Omega_e \end{cases} \quad (5.22)$$

y

$$\hat{\mathbf{u}}_e^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_e(\mathbf{x}) \mathbf{a}_e(t) \quad (5.23)$$

donde $\mathbf{N}_e(\mathbf{x})$ es la matriz de funciones de forma estándar (conformes) del elemento y $\mathbf{a}_e$ representa el vector de desplazamientos nodales. Utilizando el mismo espacio tanto para la aproximación de los desplazamientos como para de sus variaciones admisibles, se tiene

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}) \cong \hat{\boldsymbol{\eta}}^h(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \hat{\boldsymbol{\eta}}_e^h(\mathbf{x}) \mathcal{X}_e(\mathbf{x}) \quad (5.24)$$

con

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_e^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_e(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{a}}_e \quad \hat{\mathbf{a}}_e \in \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}} \times n_{\text{nodos}}^e} \mid \hat{\boldsymbol{\eta}}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \ \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \right\} \quad (5.25)$$

donde n_{nodos}^e es el número de nodos del elemento y n_{dim} representa la dimensión del problema.

De esta manera, en notación vectorial, se tiene

$$\nabla^s \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \cong \nabla^s \hat{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \mathbf{B}_e(\mathbf{x}) \mathbf{a}_e(t) \mathcal{X}_e(\mathbf{x}) \quad (5.26)$$

y

$$\nabla^s \hat{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}) \cong \nabla^s \hat{\boldsymbol{\eta}}^h(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{n_{\text{elem}}} \mathbf{B}_e(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{a}}_e \mathcal{X}_e(\mathbf{x}) \quad (5.27)$$

donde $\mathbf{B}_e(\mathbf{x})$ es la matriz de deformación estándar (Zienkiewicz y Taylor 1994).

Antes de aproximar el campo de deformaciones mejoradas $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ de la ecuación (5.18) es necesario establecer la aproximación del campo de desplazamientos $[\mathbf{u}]$ y definir la tipología de la función $\varphi(\mathbf{x})$, de modo consistente con la discretización por elementos finitos adoptada en el dominio.

En el presente trabajo, la aproximación del campo de desplazamientos $[\mathbf{u}]$ se considera constante en cada elemento (Oliver 1996.b), esto es

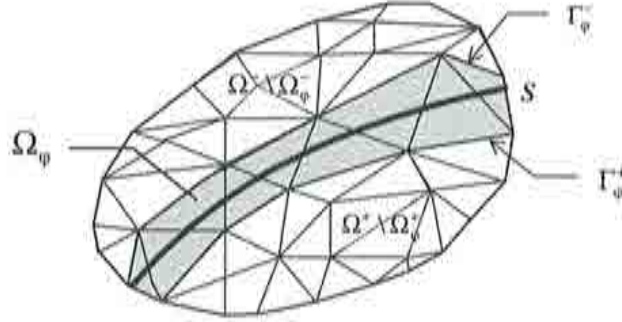
$$[\mathbf{u}](\mathbf{x}, t) \cong [\mathbf{u}]^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{e=1}^{n_{\text{elem}}} [\mathbf{u}]_e^h(\mathbf{x}, t) \mathcal{X}_e(\mathbf{x}) \quad (5.28)$$

con

$$[\mathbf{u}]_e^h(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\alpha}_e \quad (5.29)$$

donde $\boldsymbol{\alpha}_e$ representa las componentes del salto del campo de desplazamiento correspondiente al elemento e .

La función $\varphi(\mathbf{x})$ puede elegirse convenientemente mediante el algoritmo descrito en el apartado 5.9, de manera que Ω_φ esté constituido por los elementos que contienen la línea de discontinuidad S , como se indica en la figura 5.3. Dicha función $\varphi(\mathbf{x})$ puede considerarse a su vez como la composición de las funciones

Figura 5.3 Definición de Ω_φ en el dominio discretizado.

$\varphi_e(\mathbf{x})$, definidas en el dominio de cada elemento:

$$\boxed{\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \varphi_e(\mathbf{x}) \mathcal{X}_e(\mathbf{x})} \quad (5.30)$$

Las funciones elementales φ_e pueden construirse, por ejemplo, utilizando las propias funciones de forma estándar (conformes) del elemento, N_e^i ($i = 1, \dots, n_{nodos}^e$), haciendo

$$\varphi_e(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{nodos}^e} N_e^i(\mathbf{x}) b_i \quad (5.31)$$

donde b_i son constantes nodales, tales que

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{en } \Omega^- \setminus \Omega_\varphi^- \\ 1 & \text{en } \Omega^+ \setminus \Omega_\varphi^+ \end{cases} \quad (5.32)$$

cumpliendo así la condición (5.4). Nótese que la función $\varphi(\mathbf{x})$ construida de esta manera es continua entre elementos. Para elementos cuadráticos o de orden superior puede tomarse cualquier valor de la constante b_i para el nodo intermedio que eventualmente pertenezca al interior del dominio Ω_φ .

La aproximación del campo de desplazamientos de un elemento, por tanto, viene expresada como

$$\mathbf{u}_e^h = \underbrace{\mathbf{N}_e \mathbf{a}_e}_{\text{compatible}} + (\mathcal{H}_{S_e} - \varphi_e) \boldsymbol{\alpha}_e = \mathbf{N}_e \mathbf{a}_e + M_{S_e} \boldsymbol{\alpha}_e \quad (5.33)$$

En la figura 5.4.b se presenta la función lineal $\varphi_e(\mathbf{x})$ que se puede construir para los elementos triangulares (lineales o de orden superior) y las figuras 5.4.c y 5.4.d muestran las funciones discontinuas $\mathcal{H}_{S_e}(\mathbf{x})$ y $M_{S_e}(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_{S_e}(\mathbf{x}) - \varphi_e(\mathbf{x})$ que se obtienen cuando la línea de discontinuidad $\mathcal{S}$, dentro de cada elemento, se aproxima por un segmento de recta, S_e , que divide el elemento en los dos subdominios Ω_e^+ y Ω_e^- (ver figura 5.4.a). La figura 5.5 muestra la función

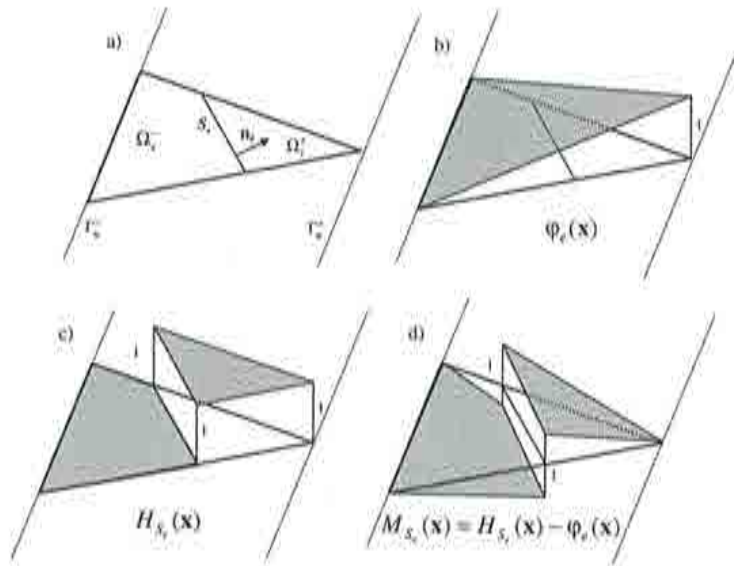


Figura 5.4 Construcción de la función $M_{S_e}(\mathbf{x})$ para elementos triangulares.

bilineal $\varphi_e(\mathbf{x})$, que se puede construir para elementos cuadrilaterales (bilineales o de orden superior) y las respectivas funciones $\mathcal{H}_{S_e}(\mathbf{x})$ y $M_{S_e}(\mathbf{x})$, considerando los dos modos en los que la línea de discontinuidad $\mathcal{S}_e$ pueda atravesar el elemento.

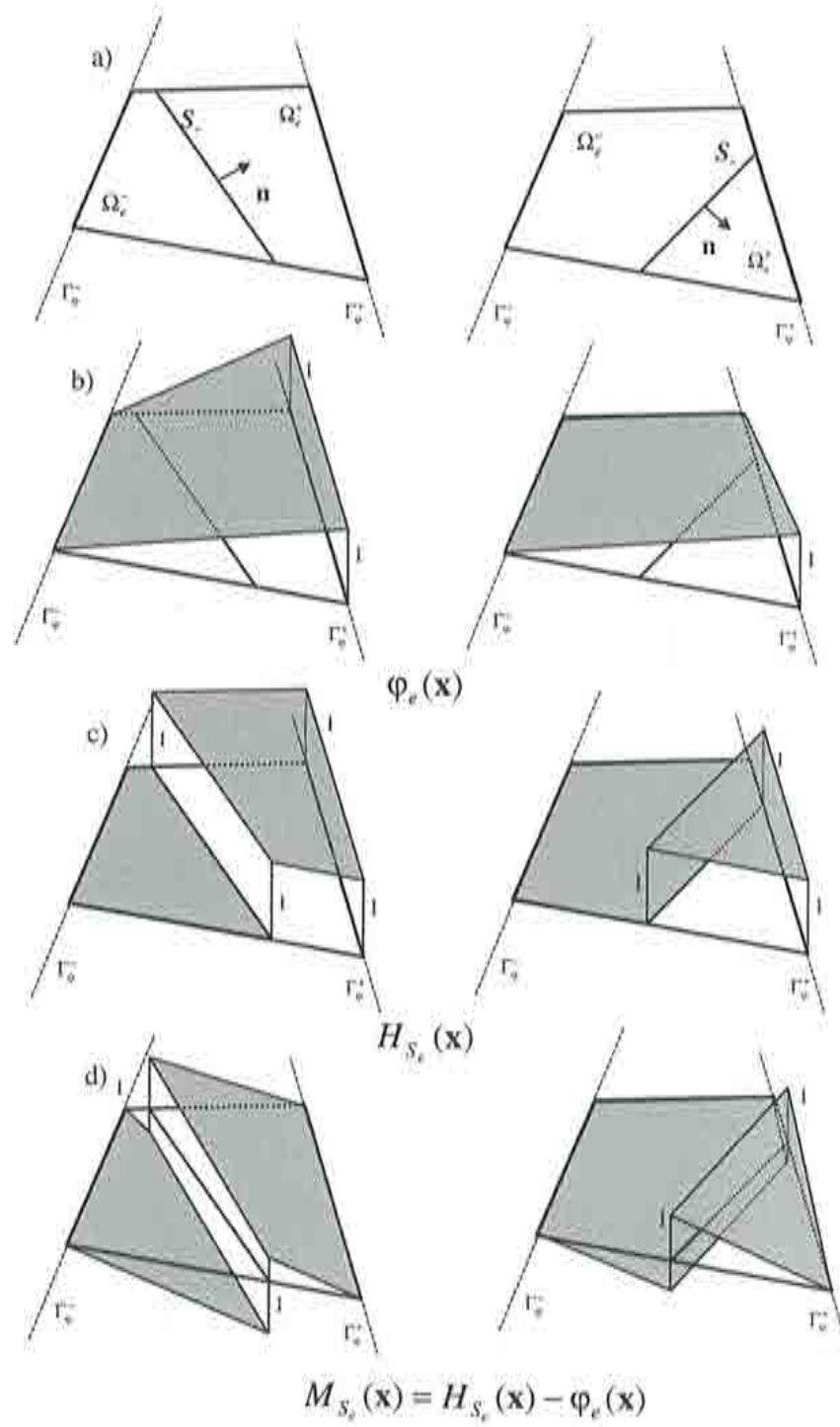


Figura 5.5 Construcción de la función $M_{S_e}(\mathbf{x})$ para elementos cuadriláteros.

5.5.2 Aproximación del campo de deformaciones mejoradas

Tomando como base la expresión del campo de la tasa de las deformaciones (5.7), se propone una aproximación discontinua entre elementos del término mejorado de dicho campo que, en notación vectorial ($\varepsilon = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\}^T$), tiene la forma:

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) \cong \dot{\tilde{\varepsilon}}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \tilde{\varepsilon}_e^h(\mathbf{x}, t) \mathcal{X}_e(\mathbf{x}) \quad (5.34)$$

con

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}_e^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{G}_e(\mathbf{x}, t) \dot{\boldsymbol{\alpha}}_e(t) \quad (5.35)$$

donde

$$\mathbf{G}_e(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{h_e(t)} \mu_{S_e}(\mathbf{x}) [\mathbf{n}]_e(\mathbf{x}) - [\nabla \varphi]_e(\mathbf{x}) \quad (5.36)$$

con

$$[\mathbf{n}]_e = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \quad [\nabla \varphi]_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_e}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_e}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_e}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

En las ecuaciones (5.37), los valores n_x y n_y representan las componentes del vector $\mathbf{n}_e$, normal a la línea S_e ($\mathbf{n}_e = \{n_x, n_y\}$). Por definición, dicho vector debe orientarse hacia Ω_e^+ .

Nótese que en la ecuación (5.36) se ha considerado constante el ancho de banda, h_e , en cada elemento. Para los elementos que no contienen la línea de discontinuidad S se tiene $\mu_{S_e} = 0$ y $\nabla \varphi_e = 0$ ($\varphi_e = 0$ o $\varphi_e = 1$), lo que conduce a $\mathbf{G}_e = \mathbf{0}$ y, por consiguiente, a $\dot{\tilde{\varepsilon}}_e^h = \mathbf{0}$.

La aproximación de la tasa de deformaciones en un elemento se expresa entonces como

$$\dot{\varepsilon}_e^h = \underbrace{\mathbf{B}_e \dot{\mathbf{a}}_e}_{\text{compatible}} + \underbrace{\left(\frac{1}{h_e(t)} \mu_{S_e} [\mathbf{n}]_e - [\nabla \varphi]_e \right) \dot{\boldsymbol{\alpha}}_e}_{\text{mejorada}} = \mathbf{B}_e \dot{\mathbf{a}}_e + \mathbf{G}_e \dot{\boldsymbol{\alpha}}_e \quad (5.38)$$

5.5.3 Construcción del campo de variaciones admisibles de las deformaciones mejoradas

Considérese la siguiente aproximación de las variaciones admisibles del campo de las deformaciones mejoradas, también discontinua entre elementos:

$$\tilde{\gamma}(\mathbf{x}) \cong \tilde{\gamma}^h(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \tilde{\gamma}_e^h(\mathbf{x}) \mathcal{X}_e(\mathbf{x}) \quad (5.39)$$

con

$$\tilde{\gamma}_e^h(\mathbf{x}) = \underbrace{g_e^*(\mathbf{x}) [\mathbf{n}]_e(\mathbf{x})}_{\mathbf{G}_e^*(\mathbf{x})} \tilde{\alpha}_e = \mathbf{G}_e^*(\mathbf{x}) \tilde{\alpha}_e \quad \tilde{\alpha}_e \in \mathbb{R}^2 \quad (5.40)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.39) y (5.40) en la expresión vectorial de la ecuación en forma débil (5.20)₂ se obtiene

$$\int_{\Omega_e} [\mathbf{G}_e^* \tilde{\alpha}_e]^T \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega = 0 \quad \forall \tilde{\alpha}_e \in \mathbb{R}^2 \quad (e = 1, 2, \dots, n_{elem}) \quad (5.41)$$

estableciendo que

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{G}_e^{*T} \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega = \int_{\Omega_e} g_e^* \mathbf{t}^h d\Omega = 0 \quad (e = 1, 2, \dots, n_{elem}) \quad (5.42)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}^h = \{\sigma_{xx}^h, \sigma_{yy}^h, \tau_{xy}^h\}^T$ representa la aproximación de las tensiones en notación vectorial y $\mathbf{t}^h = [\mathbf{n}]_e^T \boldsymbol{\sigma}^h$ representa la correspondiente aproximación del vector tracción $\mathbf{n}_e \cdot \boldsymbol{\sigma}$.

Como la ecuación (5.42) debe corresponder a la forma débil de la condición de continuidad de tracciones (5.13)₂, pueden considerarse dos alternativas para la función $g_e^*(\mathbf{x})$:

- *Alternativa 1* (Oliver 1996,b):

$$g_e^{*(1)}(x) = \frac{\delta_{S_e}}{l_{S_e}} - (1 - \mu_{S_e}) \frac{1}{A_e} \quad (5.43)$$

donde $A_e = m(\Omega_e)$ ($= \int_{\Omega_e} d\Omega_e$) representa el área del elemento, $l_{S_e} = m(S_e)$ ($= \int_{S_e} dS_e$) representa la longitud de la línea de discontinuidad S_e en el elemento, μ_{S_e} es la función de colocación en S_e ($\mu_{S_e} = 1 \forall \mathbf{x} \in S_e$ y $\mu_{S_e} = 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega_e \setminus S_e$) y δ_{S_e} es la distribución de Dirac situada en la línea de discontinuidad S_e del dominio Ω_e , tal que $\int_{\Omega_e} \mathbf{t}^h \delta_{S_e} d\Omega_e = \int_{S_e} \mathbf{t}^h dS_e$. Reemplazando (5.43) en (5.42), se obtiene

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{G}_e^{*(1)} \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega_e = \int_{\Omega_e} g_e^{*(1)} \mathbf{t}^h d\Omega = \frac{1}{l_{S_e}} \int_{S_e} \mathbf{t}^h dS_e - \frac{1}{A_e} \int_{\Omega_e \setminus S_e} \mathbf{t}^h d\Omega_e = 0 \quad (5.44)$$

donde los dos últimos términos corresponden a los valores medios de $\mathbf{t}^h$ en S_e y en $\Omega_e \setminus S_e$, respectivamente. Por tanto, dicha ecuación corresponde a la forma promediada (una forma débil) de la condición de continuidad del vector tracción de la ecuación (5.13)₂.

• *Alternativa 2:*

$$\boxed{g_e^{*(2)}(x) = \frac{\delta_{S_e}}{l_{S_e}} - \frac{\delta_{+e}}{l_{S_e}}} \quad (5.45)$$

donde, con cierto abuso de notación, δ_{+e} representa la distribución de Dirac situada en la línea S_e^+ perteneciente al dominio Ω_e^+ (véase ecuación (5.14)), tal que $\int_{\Omega_e} \mathbf{t}^h \delta_{+e} d\Omega_e = \int_{S_e^+} \mathbf{t}_+^h dS_e^+$. Reemplazando (5.45) en (5.42), se concluye que

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{G}_e^{*(2)} \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega_e = \int_{\Omega_e} g_e^{*(2)} \mathbf{t}^h d\Omega = \frac{1}{l_{S_e}} \left(\int_{S_e} \mathbf{t}_S^h dS_e - \int_{S_e^+} \mathbf{t}_+^h dS_e^+ \right) = 0 \quad (5.46)$$

es decir, se establece la continuidad de $\mathbf{t}^h$ de forma promediada sobre la línea S_e .

Observación 5.2 Para el caso del elemento triangular con interpolación lineal de desplazamientos "regulares", los campos de deformaciones y de tensiones son uniformes en $\Omega_e \setminus S_e$ y, por consiguiente, las dos alternativas son equivalentes.

Observación 5.3 Las dos alternativas satisfacen los requisitos que garantizan la estabilidad y consistencia de los métodos de defor-

maciones mejoradas (Simó y Rifai 1990):

$$\begin{cases} \int_{\Omega_e} \tilde{\gamma}^h d\Omega_e = 0 & \forall \tilde{\gamma}_e^h \in \tilde{\mathcal{E}}_\gamma^h \quad (\text{consistencia}) \\ \tilde{\mathcal{E}}_\gamma^h \cap \tilde{\mathcal{E}}_\gamma^h = \emptyset & (\text{estabilidad}) \end{cases} \quad (5.47)$$

donde $\tilde{\mathcal{E}}_\gamma^h$ representa el espacio de variación admisible de las deformaciones "regulares" $\nabla^s \hat{\eta}$ (con $\hat{\eta} \in \hat{\mathcal{V}}$) y $\tilde{\mathcal{E}}_\gamma^h$ el de las deformaciones mejoradas $\tilde{\gamma}^h$.

Observación 5.4 En general $\mathbf{G}_e^* \neq \mathbf{G}_e$, es decir, el espacio generado por las deformaciones mejoradas $\tilde{\gamma}^h$ y por su variación admisible $\tilde{\gamma}^h$ son distintos, constituyendo así una formulación del método de elementos finitos del tipo Petrov-Galerkin (Mikhlin 1964, Zienkiewicz y Taylor 1994). Obsérvese que el equivalente a $\mathbf{G}_e^{*(1)} = \mathbf{G}_e$ se obtiene sólo en las ocasiones en las cuales $[\nabla \varphi]_e = [\mathbf{n}]_e l_e / A_e$. Para los elementos triangulares lineales, dicha igualdad corresponde a la situación en que la línea de discontinuidad es paralela a unos de los lados del elemento.

Observación 5.5 Algunas aproximaciones por elementos finitos de discontinuidades fuertes (Armero 1997; Larsson y Runesson 1996; Larsson *et al.* 1996) utilizan formulaciones del tipo Galerkin (simétricas) con $G_e = \mathbf{G}_e^{*(1)} = g_e^{*(1)} [\mathbf{n}]_e$ para el enriquecimiento del campo de deformaciones del elemento triangular lineal (con deformaciones constantes). En este caso puede demostrarse que la aproximación de elementos finitos resultante proviene de la formulación variacional de tres campos, en la cual el campo de tensiones se desacopla del resto, a través de la imposición de ortogonalidad entre los espacios formados por las aproximaciones por elementos finitos de las tensiones y de las deformaciones mejoradas (Simó y Rifai 1990). A pesar de las ventajas computacionales que se pueden obtener de este tipo de aproximación por el hecho de generar matrices de rigidez simétricas, en general el campo de deformaciones mejorado que se deduce no es capaz de representar de manera aceptable los efectos de la discontinuidad en el interior del elemento (Jirásek 1998).

5.6 ECUACIONES DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

De acuerdo con las aproximaciones presentadas en el apartado anterior, las ecuaciones en forma débil (5.20) generan el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e \setminus S_e} \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega_e = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \mathbf{f}_e^{ext} \\ \int_{\Omega_e} \mathbf{G}_e^{*T} \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega_e = \mathbf{0} \quad (e = 1, 2, \dots, n_{elem}) \end{array} \right. \quad (5.48)$$

donde $\sum_{e=1}^{n_{elem}}$ representa el operador de ensamblaje y

$$\mathbf{f}_e^{ext} = \int_{\Omega_e \setminus S_e} \mathbf{N}_e^T \mathbf{f} d\Omega_e + \int_{\Gamma_{e\sigma}} \mathbf{N}_e^T \mathbf{t}^* d\Gamma_e \quad (5.49)$$

Puesto que las tensiones $\boldsymbol{\sigma}^h$ están acotadas por definición y las matrices estándar $\mathbf{N}_e$ y $\mathbf{B}_e$ no contienen términos no acotados en la línea S_e , las integrales de dominio de (5.20)₁ pueden limitarse al dominio $\Omega_e \setminus S_e$, tal como se ha hecho en (5.48)₁.

El sistema de ecuaciones discretas (5.48) se expresa de forma más compacta como

$$\boxed{\tilde{\mathbf{f}}^{int} - \tilde{\mathbf{f}}^{ext} = \mathbf{0}} \quad (5.50)$$

siendo

$$\tilde{\mathbf{f}}^{int} = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \left(\tilde{\mathbf{f}}_e^{int} \right) \quad \tilde{\mathbf{f}}^{ext} = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \left(\tilde{\mathbf{f}}_e^{ext} \right) \quad (5.51)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{f}}_e^{int} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{f}_e^{int} \\ \mathbf{h}_e \end{array} \right\} \quad \tilde{\mathbf{f}}_e^{ext} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{f}_e^{ext} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (5.52)$$

con

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{f}_e^{int} = \int_{\Omega_e \setminus S_e} \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega_e \\ \mathbf{h}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{G}_e^{*T} \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega_e \end{array}} \quad (5.53)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones no lineales (5.50) mediante el método de Newton-Raphson es importante obtener la expresión en tasa de las fuerzas

internas $\tilde{\mathbf{f}}_e^{int}$. Procediendo de modo análogo al apartado 3.7, se obtiene

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_e^{int} \\ \dot{\mathbf{h}}_e \end{Bmatrix}}_{\dot{\mathbf{f}}^{int}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{aa} & \mathbf{K}_e^{a\alpha} \\ \mathbf{K}_e^{\alpha a} & \mathbf{K}_e^{\alpha\alpha} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_e} \underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}}_e \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_e \end{Bmatrix}}_{\dot{\mathbf{a}}} \quad (5.54)$$

donde $\mathbf{K}_e$ es la contribución elemental de la matriz tangente global, cuyas componentes se expresan como

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e^{aa} &= + \int_{\Omega_e \setminus S_a} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}^c \mathbf{B}_e d\Omega_e \\ \mathbf{K}_e^{a\alpha} &= - \int_{\Omega_e \setminus S_a} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}^c \mathbf{G}_e d\Omega_e \\ \mathbf{K}_e^{\alpha a} &= + \int_{\Omega_e} \mathbf{G}_e^{*T} \mathbf{D}^c \mathbf{B}_e d\Omega_e \\ \mathbf{K}_e^{\alpha\alpha} &= + \int_{\Omega_e} \mathbf{G}_e^{*T} \mathbf{D}^c \mathbf{G}_e d\Omega_e \end{aligned} \quad (5.55)$$

siendo $\mathbf{D}^c = \partial \boldsymbol{\Sigma}^c(\boldsymbol{\varepsilon}) / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$ la matriz constitutiva tangente, tal que (ver (5.12)₄)

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^c \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.56)$$

5.7 INTEGRACIÓN TEMPORAL DE LAS DEFORMACIONES

En el proceso incremental e iterativo de resolución del sistema no lineal (5.50) han de obtenerse las deformaciones producidas por una variación de las variables nodales del problema. Sean $\Delta \mathbf{a}_e = \mathbf{a}_e^{t+\Delta t} - \mathbf{a}_e^t$ y $\Delta \boldsymbol{\alpha}_e = \boldsymbol{\alpha}_e^{t+\Delta t} - \boldsymbol{\alpha}_e^t$ las variaciones de los desplazamientos nodales y saltos de un elemento finito producidas entre los instantes t y $t + \Delta t$ del proceso de carga. Utilizando la regla generalizada del punto medio para integrar la componente del campo tasa de deformaciones (5.38) en la cual interviene $h_e(t)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_e^{h_e^{t+\Delta t}} &= \boldsymbol{\varepsilon}_e^{h_e^t} + \mathbf{B}_e \Delta \mathbf{a}_e + \left(\mu_{S_a} \frac{1}{h_e^\beta} [\mathbf{n}]_e - [\nabla \varphi]_e \right) \Delta \boldsymbol{\alpha}_e \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}_e^{h_e^t} + \mathbf{B}_e \Delta \mathbf{a}_e + \mathbf{G}_e^\beta \Delta \boldsymbol{\alpha}_e \end{aligned} \quad (5.57)$$

con

$$h_e^\beta = h_e^t(1 - \beta) + h_e^{t+\Delta t} \beta \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad (5.58)$$

donde $h_e^{t+\Delta t}$ y h_e^t representan los valores del ancho de banda del elemento e en los instantes $t + \Delta t$ y t , respectivamente. En el presente trabajo se adopta un esquema de integración implícito con $\beta = 0.5$.

5.8 INTEGRACIÓN ESPACIAL VÍA CUADRATURA MODIFICADA

Las integraciones espaciales que intervienen en la construcción de la matriz tangente y de los vectores de fuerzas internas y externas (ecuaciones (5.49), (5.53), (5.55)) se evalúan utilizando un procedimiento numérico especial, formulado a partir de la introducción de pequeños cambios en la regla de cuadratura correspondiente al elemento estándar de partida.

El hecho de que la línea de discontinuidad S sea un dominio de medida nula permite que las integraciones sobre los dominios $\Omega_e \setminus S_e$ puedan calcularse utilizando la regla de cuadratura estándar usual:

$$\int_{\Omega_e \setminus S_e} F(\mathbf{x}) d\Omega_e = \sum_{i=1}^{n_{int}} F(\xi_i) w_i \quad (5.59)$$

donde ξ_i representan las coordenadas locales de los puntos de integración, w_i sus respectivos pesos de integración y n_{int} el número de puntos de integración.

Con el objeto de no introducir modificaciones sustanciales en el algoritmo estándar del método de los elementos finitos, las integraciones sobre la línea de discontinuidad S_e (o S_e^+) se calculan empleando un único punto de integración, supuestamente situado sobre S_e (o S_e^+), independientemente del tipo de interpolación que se utilice para las variables del problema. De esta manera, para representar la evolución de las variables en la discontinuidad S_e basta añadir un punto de integración adicional a la regla de cuadratura estándar. Así, los puntos de integración regulares ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n_{int}$) corresponden al dominio $\Omega_e \setminus S_e$, mientras que el punto adicional ξ_0 corresponde a la línea de discontinuidad S_e .

Como la posición de los puntos de integración se define al inicio del análisis numérico y, en general, la posición de la línea S_e no se conoce *a priori*, se introduce el punto de integración adicional en la misma posición del punto de integración "regular" ξ_1 que corresponde al centro geométrico del elemento. En este punto de integración "doble" ($\xi_1 = \xi_0$) se evaluarán las variables correspondientes a $S_e^+ \in \Omega_e \setminus S_e$ y S_e (véase figura 5.6).

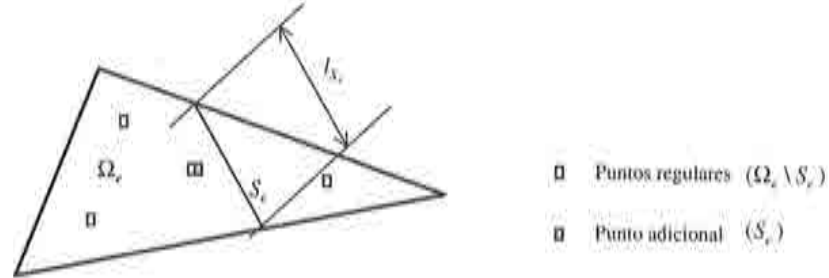


Figura 5.6 Regla de integración numérica modificada.

De esta manera, la integral sobre el dominio completo del elemento se calcula como

$$\int_{\Omega_e} F(\mathbf{x}) d\Omega_e = \sum_{i=0}^{n_{int}} F(\xi_i) w_i \quad (5.60)$$

Para evaluar las integrales en las cuales intervienen las distribuciones delta de Dirac δ_{S_e} y δ_{+e} y la función de colocación μ_{S_e} se utiliza el esquema de integración numérico (5.59) o (5.60), tomando los siguientes valores en cada punto de integración i :

$$\delta_{S_e}(\xi_i) = \delta_i^0 = \begin{cases} \frac{l_{S_e}}{w_0} & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases} \quad \delta_{+e}(\xi_i) = \delta_i^1 = \begin{cases} \frac{l_{S_e}}{w_1} & i = 1 \\ 0 & i \neq 1 \end{cases} \quad (5.61)$$

$$\mu_{S_e}(\xi_i) = \bar{\mu}_i^0 = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases} \quad (5.62)$$

5.9 ALGORITMO DE DETECCIÓN NUMÉRICA DE LA LÍNEA DE DISCONTINUIDAD

En los desarrollos anteriores se ha supuesto que la posición de la línea de discontinuidad era conocida al inicio del análisis, sin embargo esto sólo es cierto en

casos muy particulares y, en general, su determinación constituye otra incógnita del problema.

A efectos de la aproximación numérica no es necesario detectar la posición exacta de la línea de discontinuidad, sino identificar cuales son los nodos pertenecientes a los dominios $\Omega^- \setminus \Omega_\varphi^-$ y $\Omega^+ \setminus \Omega_\varphi^+$ para la construcción de la función $\varphi(\mathbf{x})$ (ver ecuaciones (5.30), (5.31) y (5.32)). Nótese que para esta finalidad no se exige la posición exacta de $\mathcal{S}$ en el dominio de los elemento que contienen la discontinuidad (ver figura 5.7)

En el presente trabajo se propone un método para la detección de la línea de discontinuidad que se forma a lo largo del proceso de carga, basado en las siguientes consideraciones:

- La línea de discontinuidad $\mathcal{S}$ se compone de segmentos de discontinuidad $\mathcal{S}_e$ definidos en el dominio de cada elemento atravesado por $\mathcal{S}$.
- A lo largo del proceso de carga la dirección normal a la discontinuidad de cada elemento, $\mathbf{n}_e$, se evalúa mediante la expresión del ángulo crítico, θ_{crit} , que se obtiene del análisis de bifurcación. Para esta evaluación se utiliza el estado de tensión-deformación del punto de integración adicional ($\xi = \xi_0$), asociado a $\mathcal{S}_e$ (ver apartado 5.8).
- Una vez alcanzada la condición de bifurcación en el punto de integración adicional del elemento, el segmento de la discontinuidad $\mathcal{S}_e$ se considera consolidado y la orientación $\mathbf{n}_e$ en dicho elemento se mantiene fija. En un procedimiento incremental e iterativo, sólo se considera que la discontinuidad está consolidada si el estado de tensión-deformación convergido ha alcanzado la condición de bifurcación.
- La posición de $\mathcal{S}_e$ en el dominio de cada elemento debe mantener $\mathcal{S}$ continua a través de los lados de elementos adyacentes.

A partir de estas consideraciones se propone el siguiente procedimiento para la construcción de la línea de discontinuidad $\mathcal{S}$:

- (i) En primer lugar se realiza un análisis preliminar con el objetivo de identificar el primer elemento que "bifurca" durante el proceso de carga (elemento E_1), en el cual se coloca la "semilla" de la línea de discontinuidad que se propagará según se indica en el paso (ii). Dicho elemento se caracteriza por ser el primer elemento cuyo estado de tensiones-deformaciones convergido alcanza la condición $f = (H - H_{crit})/|\bar{H}| = 0$. La dirección de la discontinuidad se define en función del valor de n_{crit1} , que se obtiene del análisis de bifurcación.

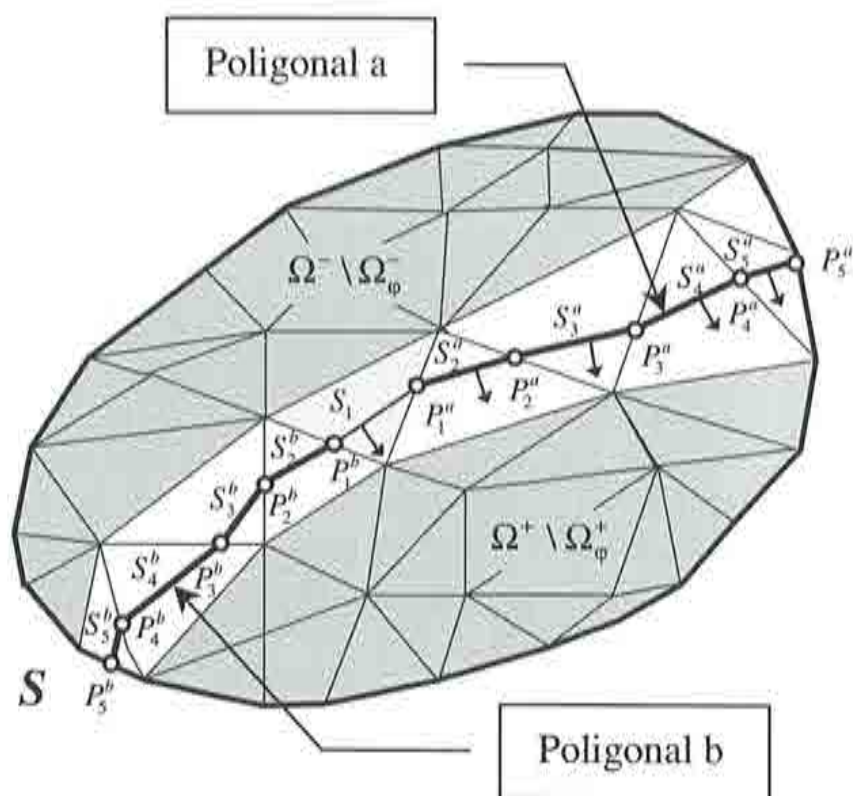


Figura 5.7 Algoritmo de propagación de la línea de discontinuidad S .

Si el referido análisis genera dos valores posibles de n_{crit} ¹¹, se elige la dirección cuyos modos de bifurcación se ajustan más a las líneas de iso-desplazamientos en el instante de la bifurcación.

Una vez identificado el elemento E_1 , en los sucesivos pasos de "tiempo" del análisis, se procede a la propagación y consolidación de la línea de discontinuidad como sigue:

- (ii) A partir del elemento E_1 y su correspondiente línea de discontinuidad S_1 , el resto de la línea de discontinuidad S se obtiene a través de la construcción de dos poligonales a y b , como muestra la figura 5.7. Cada poligonal se construye

¹¹ Nótese que las expresiones de la tabla 4.1 pueden conducir a dos valores posibles de la dirección crítica.

a partir de un procedimiento secuencial, que consiste en determinar la posición del vértice $P_{i+1}^{a/b}$ del segmento $S_i^{a/b}$ cuya normal viene dada por la orientación $\mathbf{n}_i^{a/b}$ correspondiente al elemento $E_i^{a/b}$ ($i = 2, 3, \dots$), como ilustra la figura 5.7. El procedimiento comienza con el elemento $E_2^{a/b}$ y termina cuando se alcanza el contorno del dominio. Si un elemento $E_i^{a/b}$ presenta dos valores posibles para la dirección crítica, se adopta la que se aproxima más a la dirección del elemento $E_{i-1}^{a/b}$ que le antecede.

Observación 5.6 El algoritmo de propagación se realiza en cada iteración de cada paso de "tiempo" del análisis. Sólo se recalcula la dirección $\mathbf{n}_e$ para los elementos que no han alcanzado la condición de bifurcación.

Capítulo 6

EJEMPLOS NUMÉRICOS I: MEDIOS ELASTO-PLÁSTICOS

6.1 INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se presenta el análisis numérico de diversos problemas de localización en medios elasto-plásticos mediante la aproximación de discontinuidades fuertes, expuesta en los capítulos 4 y 5. El objetivo principal es verificar la capacidad de dicha aproximación para predecir la respuesta de sistemas estructurales sometidos a situaciones de carga severas, en los cuales el fenómeno de localización es el factor responsable del colapso estructural. Se han tratado fundamentalmente los aspectos relacionados con:

- La capacidad de la formulación del método de elementos finitos, detallada en el capítulo 5, para reproducir el mecanismo de formación de la discontinuidad fuerte que se ha propuesto en el capítulo 4.
- La independencia de los resultados respecto de la malla de elementos finitos que se adopta para discretizar el problema.
- La capacidad de la aproximación para predecir el mecanismo de colapso en problemas que presentan campos de tensiones y de deformaciones no uniformes.

6.2 TRACCIÓN Y/O COMPRESIÓN BIAXIAL

Se ha adoptado el ensayo de tracción/compresión biaxial para ilustrar la capacidad de la aproximación numérica propuesta (capítulo 5) para reproducir el comportamiento predicho por la teoría de discontinuidades fuertes, expuesta en el capítulo 4.

En estos ejemplos se analiza el comportamiento de una probeta rectangular sometida a restricciones correspondientes a los estados de tensión plana y de

deformación plana, bajo diferentes estados de carga y considerando también diversos criterios de fluencia en los modelos constitutivos.

6.2.1 Descripción de problema

La figura 6.1.a ilustra las características geométricas, cargas y algunas propiedades del material del problema analizado. En la figura 6.1.b. se muestran las componentes positivas del salto según los ejes de referencia locales, orientados de acuerdo con la línea de discontinuidad S .

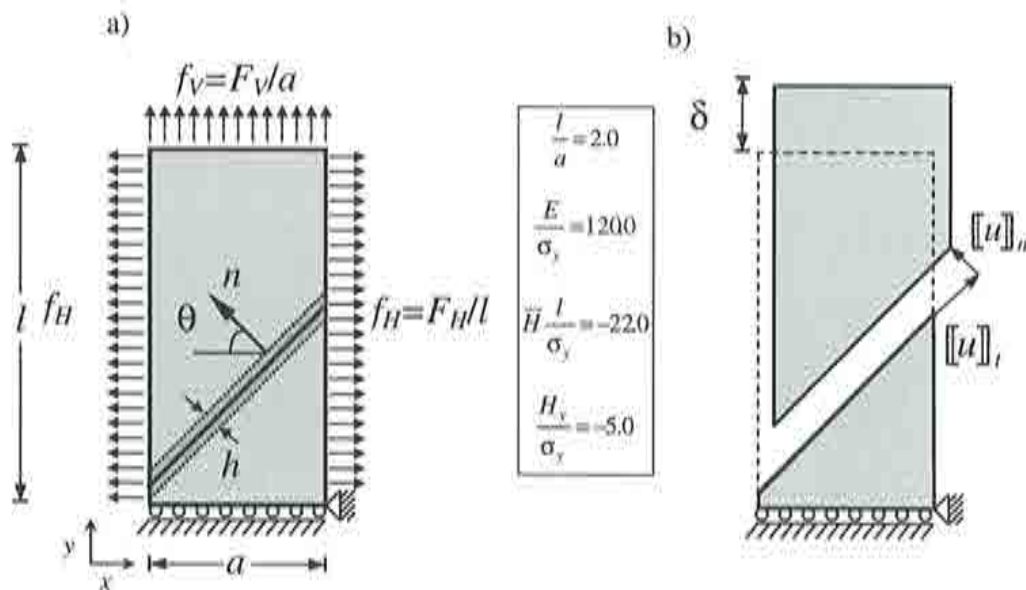


Figura 6.1 Ensayo de tracción/compresión biaxial.

Debido a que los campos de deformaciones y de tensiones son uniformes (problema homogéneo), la posición de la discontinuidad no está definida y, por esto, se selecciona el punto situado en la zona inferior de la izquierda de la probeta como punto de partida de la línea de discontinuidad (véase figura 6.1.a).

Con el objeto de mantener la proporción entre las cargas impuestas f_V/f_H a lo largo del proceso de carga, ha sido necesario utilizar el método de control de desplazamientos propuesto por Crisfield (1981), controlando la componente vertical del desplazamiento, δ , del punto superior derecho de la probeta (ver figura 6.1.b).

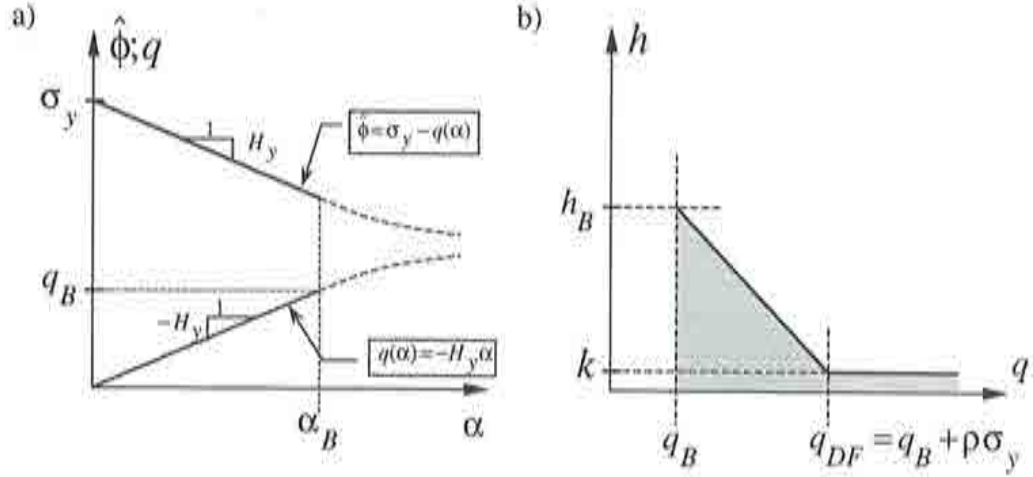


Figura 6.2 Regla de endurecimiento y ley de variación del ancho de banda.

En el análisis numérico de todos los casos se ha utilizado una malla no estructurada de elementos finitos triangulares de 6 nodos mejorados con un modo discontinuo interno.

6.2.2 Regla de endurecimiento/ablandamiento

Se ha empleado una ley de ablandamiento lineal para describir el comportamiento del material en el régimen *pre-bifurcación*, como se indica en la figura 6.2.a. La regla de endurecimiento/ablandamiento en la fase *post-bifurcación* viene establecida por el modelo de variación del ancho de banda, que se ilustra en la figura 6.2.b (véase apartado 4.4.6). De acuerdo con dichas definiciones, la ley de variación de la variable q en términos de la deformación plástica equivalente α puede expresarse como

$$q(\alpha) = \begin{cases} -H_y \alpha & \text{para } 0 \leq \alpha \leq \alpha_B \quad (\text{pre-bifurcación}) \\ q_B + \frac{h_B}{R} (e^{-R\hat{H}(\alpha-\alpha_B)} - 1) & \text{para } \alpha_B \leq \alpha \leq \alpha_{DF} \quad (\text{transición}) \\ q_B + \rho\sigma_y - k\bar{H}(\alpha - \alpha_{DF}) & \text{para } \alpha_{DF} < \alpha \leq \alpha_U \quad (\text{disc. fuerte}) \\ \sigma_y & \text{para } \alpha > \alpha_U \quad (\text{disc. fuerte}) \end{cases} \quad (6.1)$$

donde

$$R = \frac{k - h_B}{\rho \sigma_y}$$

$$\alpha_{Dr} = \alpha_B - \frac{1}{R \bar{H}} \ln \left(\frac{k}{h_B} \right) \quad \alpha_U = \alpha_{Dr} - \frac{(1 - \rho) \sigma_y - q_B}{k \bar{H}}$$

Los valores de H_y , σ_y , $\bar{H}$, k y ρ se consideran datos del problema, mientras que los valores de las variables α_B , q_B y h_B se obtienen del análisis de bifurcación y, por tanto, dependen de la historia de carga. En los ejemplos que siguen, salvo cuando se indique lo contrario, se ha adoptado $k = 10^{-3}l$ y $\rho = 0.1$. Los valores de los demás datos que intervienen en el problema se indican en la figura 6.1.

El ancho de banda inicial, en el instante de bifurcación, se define como

$$h_B = \frac{H_{crit}}{\bar{H}} \quad (6.2)$$

Puesto que la bifurcación sólo tiene lugar cuando $H_y \leq H_{crit}$, se puede concluir que los parámetros elegidos para el modelo establecen la siguiente limitación para el valor del ancho de banda:

$$k \leq h \leq h_B \leq \frac{H_y}{\bar{H}} \quad (6.3)$$

6.2.3 Modelo constitutivo elasto-plástico de Von Mises

En este caso, el criterio de fluencia y el flujo plástico se expresan como

$$\begin{aligned} \phi &= \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{S}\| - \sigma_y + q(\alpha) = 0 \\ \mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}} &= \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\|\mathbf{S}\|} \mathbf{S} \\ s = \bar{s} &= \frac{\partial \phi}{\partial q} = 1 \end{aligned} \quad (6.4)$$

donde S es el término desviador del tensor de tensiones σ y σ_y es la tensión de fluencia del material.

Deformación plana

Se analiza ahora la situación de carga a tracción uniaxial ($f_V/f_H = 1/0$) para diferentes valores del coeficiente de Poisson ν .

En la figura 6.3 se muestra la evolución de diversas variables del problema. Todas las curvas de dicha figura, exceptuando la 6.3.f, corresponden a un coeficiente $\nu = 0$.

Los puntos indicados por **Y**, **B** y **DF** representan, respectivamente, el *inicio del régimen elasto-plástico* (cuando la trayectoria de las tensiones alcanza la superficie de fluencia por primera vez), el *punto de bifurcación* y el *inicio del régimen de discontinuidad fuerte*.

La figura 6.3.a muestra la evolución del ancho de banda, h , en función del desplazamiento vertical δ en un determinado elemento que contiene la línea de discontinuidad, pudiéndose apreciar la fase de transición entre el *régimen de discontinuidad débil* ($h = h_n$), iniciado en el *punto de bifurcación* **B**, y el inicio del *régimen de discontinuidad fuerte*, punto **DF**, donde h alcanza el valor $k = 10^{-3}l$.

La figura 6.3.b ilustra la variación de las componentes verticales de las tensiones en la interfaz, σ_{yyS} , y en el exterior de la misma, $\sigma_{yy\Omega \setminus S}$. En dicha figura se muestran también las evoluciones de la componente normal, S_{nnS} , y de la componente fuera del plano del problema, S_{33S} , del tensor desviador en la interfaz. Debe hacerse notar que las *condiciones de discontinuidad fuerte* $\bar{m}_{nnS} = S_{nnS} = 0$ y $\bar{m}_{33S} = S_{33S} = 0$, deducidas en el apartado 4.4.3, no se cumplen en **B**, pero se inducen de forma automática en el inicio del *régimen de discontinuidad fuerte* (punto **DF**).

En la figura 6.3.c se puede apreciar la evolución de las componentes verticales de las deformaciones, ε_{yyS} y $\varepsilon_{yy\Omega \setminus S}$. Obsérvese que antes de la bifurcación **B**, las deformaciones permanecen continuas. Después de la bifurcación, la deformación en la interfaz ε_{yyS} continúa creciendo, debido a la evolución de la parte plástica de las deformaciones en S (proceso de carga elasto-plástica). Mientras tanto, la deformación $\varepsilon_{yy\Omega \setminus S}$ en el dominio restante, $\Omega \setminus S$, decrece elásticamente. La deformación remanente $\varepsilon_{yy\Omega \setminus S}$, que se aprecia en el final del proceso de carga, corresponde a la deformación plástica producida en $\Omega \setminus S$ durante el régimen de ablandamiento plástico continuo (entre los puntos **Y** y **B** de la figura).

En la figura 6.3.d se muestra la evolución de las componentes normal, $[[u_n]]$, y tangencial, $[[u_t]]$, del salto. Nótese que durante el *régimen de transición* (rama **B – DF**) se produce una pequeña evolución de la componente normal del salto ($[[\dot{u}_n]] \neq 0$). Sin embargo, tras alcanzarse el régimen de discontinuidad fuerte (punto **DF**), dicha evolución cesa y se obtiene un comportamiento típico de una línea de deslizamiento (*slip-line*), como predice el análisis de discontinuidad fuerte (apartado 4.4.3).

En la figura 6.3.e se puede apreciar el procedimiento empleado para detectar el punto de bifurcación **B** durante el proceso de carga, mostrándose la evolución del módulo de endurecimiento/ablandamiento crítico, H_{crit} , que se obtiene del análisis de bifurcación (tabla 4.1). En dicha figura se presenta también la evolución del módulo de ablandamiento continuo, $H = \partial q / \partial \alpha$, que proviene de la ley de endurecimiento que se establece como propiedad del material (ecuación (6.1)). En el punto de inicio de fluencia plástica, **Y**, el valor de H es superior al valor de H_{crit} y, por tanto, el cuerpo puede continuar deformándose inelásticamente sin bifurcar y sin presentar discontinuidades en el campo de deformaciones. Conforme se desarrollan las deformaciones plásticas en el sólido continuo, el valor de H_{crit} aumenta hasta que se produce la intersección de las dos curvas en el punto **B**, donde la condición de bifurcación $H \leq H_{crit}$ se cumple por primera vez (nótese los valores negativos de H_{crit} en la figura 6.3.e). A partir de entonces, la evolución de H viene definida por el modelo de ancho de banda variable elegido para representar la fase de transición.

Finalmente, en la figura 6.3.f se exponen las curvas fuerza-desplazamiento para los valores límites del coeficiente de Poisson ($\nu = 0$ y $\nu = 0.5$). Para el caso particular de $\nu = 0.5$, el inicio de fluencia, la bifurcación y el régimen de discontinuidad fuerte se producen simultáneamente (**Y** $\equiv$ **B** $\equiv$ **DF**). Después de este punto, la curva presenta una rama descendiente lineal, reflejando la relación constitutiva discreta lineal, tal como predice el análisis de discontinuidad fuerte (apartado 4.4.3). Para $\nu = 0$, se aprecia la forma lineal de la relación discreta en la curva solamente después de que se alcanza el régimen de discontinuidad fuerte **DF**.

En la figura 6.4.a se muestra la malla de elementos finitos utilizada en el análisis numérico y la línea de discontinuidad recta $\mathcal{S}$ que se forma en el instante de bifurcación. La orientación de la línea $\mathcal{S}$ queda definida a través de la expresión de θ_{crit} de la tabla 4.1, evaluada a partir del estado de tensiones en el instante de bifurcación. En la figura 6.4.b se aprecia la configuración deformada (ampliada) en el final del proceso de carga, cuando las tensiones están completamente relajadas¹². Nótese que la deformación resultante corresponde aproximadamente

¹² En el *post-proceso* presentado, sólo se visualiza la parte regular u de los desplazamientos, no representándose la parte discontinua, correspondiente a los modos incompatibles referidos en el capítulo 5.

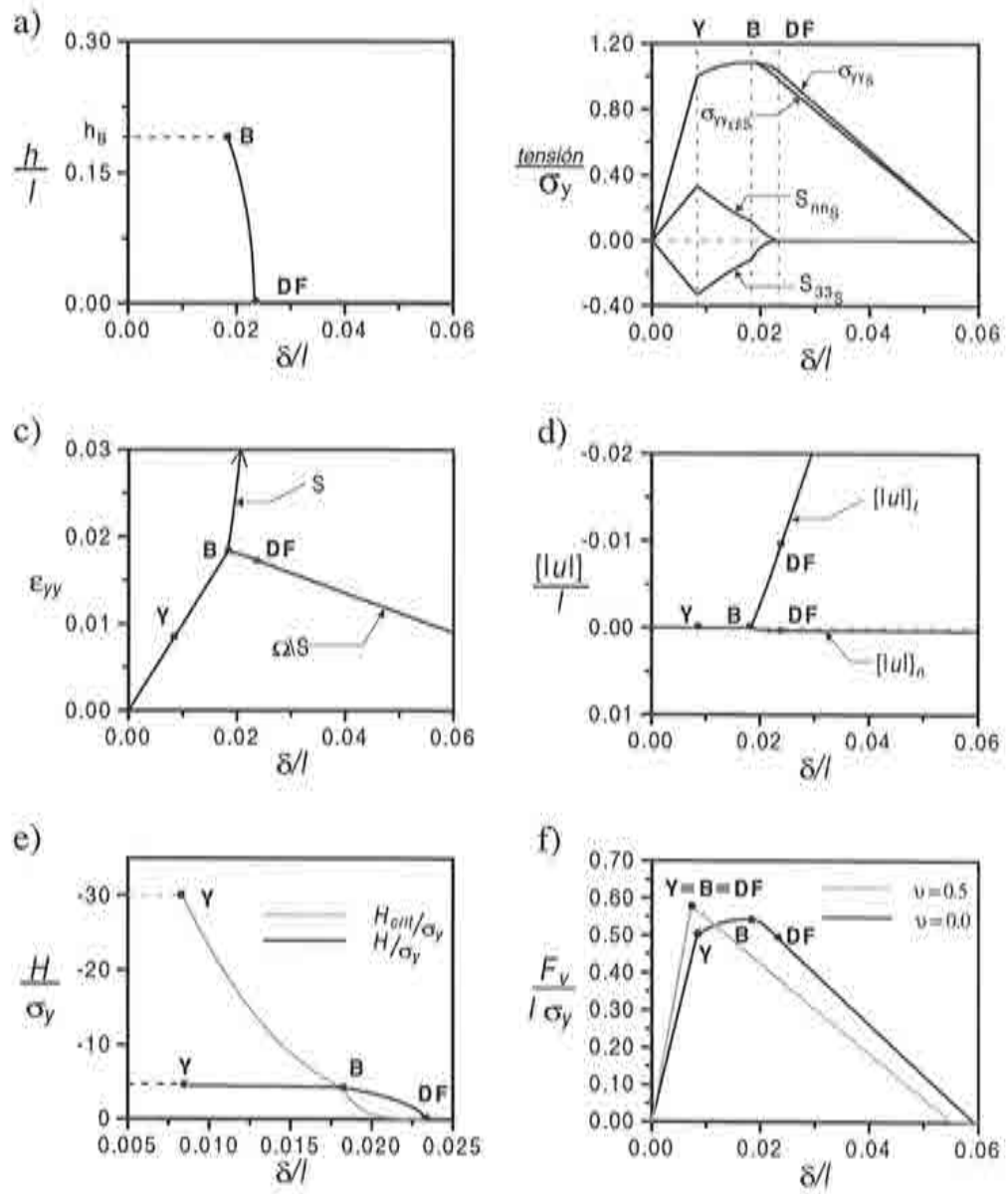


Figura 6.3 Evolución de la variables del problema de tracción uniaxial considerando deformación plana y criterio de fluencia de Von Mises.

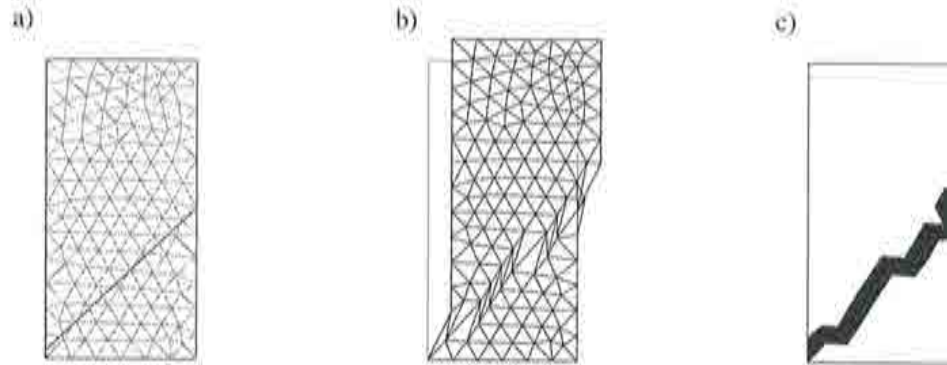


Figura 6.4 Resultados del ensayo de tracción simple (deformación plana; Von Mises; $\nu = 0$).

a un movimiento relativo de sólido rígido (deslizamiento) entre las partes inferior y superior de la probeta a través de la línea de discontinuidad S . La figura 6.4.c muestra los contornos de iso-desplazamiento en el instante final de proceso de carga. Nótese que, prácticamente, toda la deformación se concentra en los elementos que contienen la discontinuidad.

Para complementar el estudio de este caso, la figura 6.5 muestra la trayectoria de las tensiones dentro y fuera de la discontinuidad, σ_s y $\sigma_{n\setminus s}$, en el plano octaédrico (desviador) del espacio de tensiones, representándose:

- La superficie de fluencia, que para el caso de Von Mises es una circunferencia de radio $\sigma_y - q$. En caso de ablandamiento ($\dot{q} = -H_y \dot{\alpha} > 0$), la superficie mantiene su geometría pero disminuye su dimensión (radio) con la evolución de las deformaciones plásticas α .
- La línea donde el estado de tensiones verifica la condición de discontinuidad fuerte $\bar{m}_{33} = S_{33} = 0$ y, por tanto, $H_{crit} = 0$. Dicha línea corresponde al plano meridiano cuya intersección con el plano octaédrico corresponde al eje horizontal que pasa por el origen O .
- La región donde el estado de tensiones se corresponde con un valor de $H_y \leq H_{crit}$, esto es, el lugar donde la bifurcación puede ocurrir en caso de fluencia plástica. Dicha región está representada por zona sombreada de la figura 6.5.

El proceso de carga comienza con tensiones nulas en el origen O . A partir de este punto, las tensiones crecen elásticamente hasta alcanzar la superficie inicial de

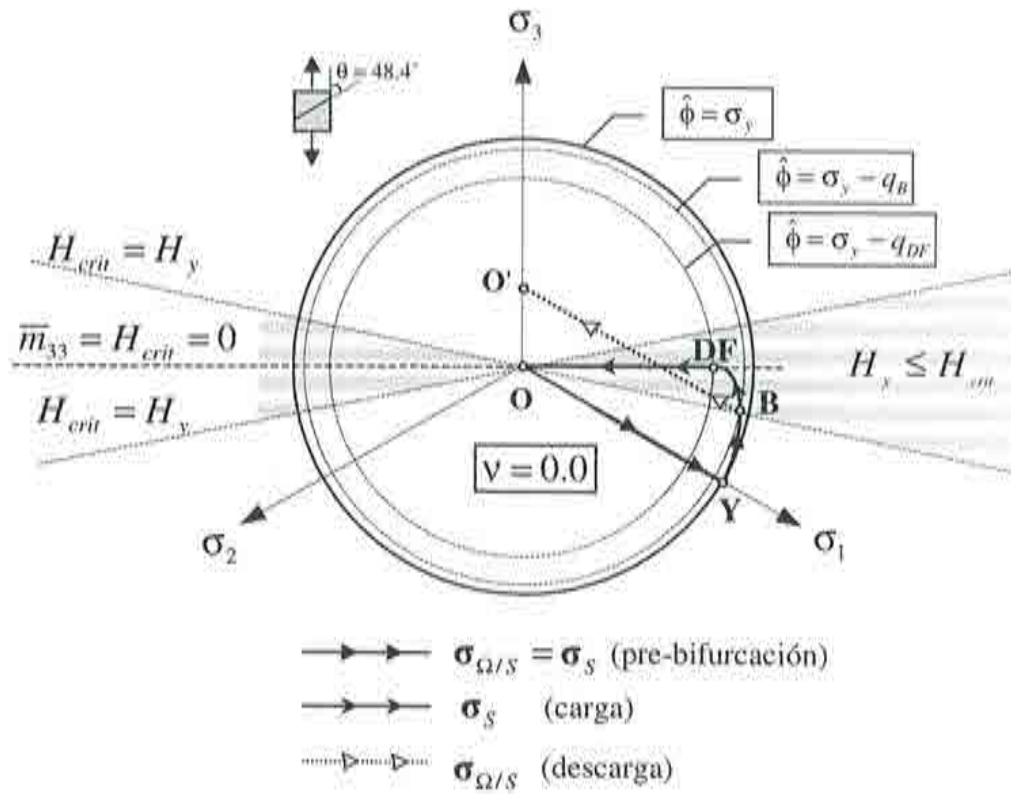


Figura 6.5 Trayectoria de tensiones en el plano octaédrico de tensiones (tracción iniaxial; tensión plana; Von Mises; $\nu = 0$)

fluencia en el punto **Y**. Como en este caso el punto de fluencia está fuera de la zona sombreada, el proceso de carga se desarrolla en régimen de ablandamiento plástico con las tensiones y deformaciones continuas. Nótese que a partir de entonces la superficie de fluencia disminuye, restringiendo el estado de tensiones a una región cada vez menor. Cuando la trayectoria de las tensiones alcanza el límite de la zona sombreada (punto **B**), la condición de bifurcación se verifica y a partir de entonces las tensiones dentro y fuera de la discontinuidad S siguen trayectoria distintas. El estado de tensiones $\sigma_{\Omega/S}$ sigue la trayectoria lineal **B-O'** en régimen de descarga elástica, mientras que σ_s sigue la trayectoria indicada por la línea continua en régimen elasto-plástico. Nótese que, puesto que el punto de bifurcación **B** no pertenece al eje horizontal $\bar{m}_{33} = 0$, la condición de discontinuidad fuerte no se verifica en este instante y se inicia la fase de transición, caracterizada por la

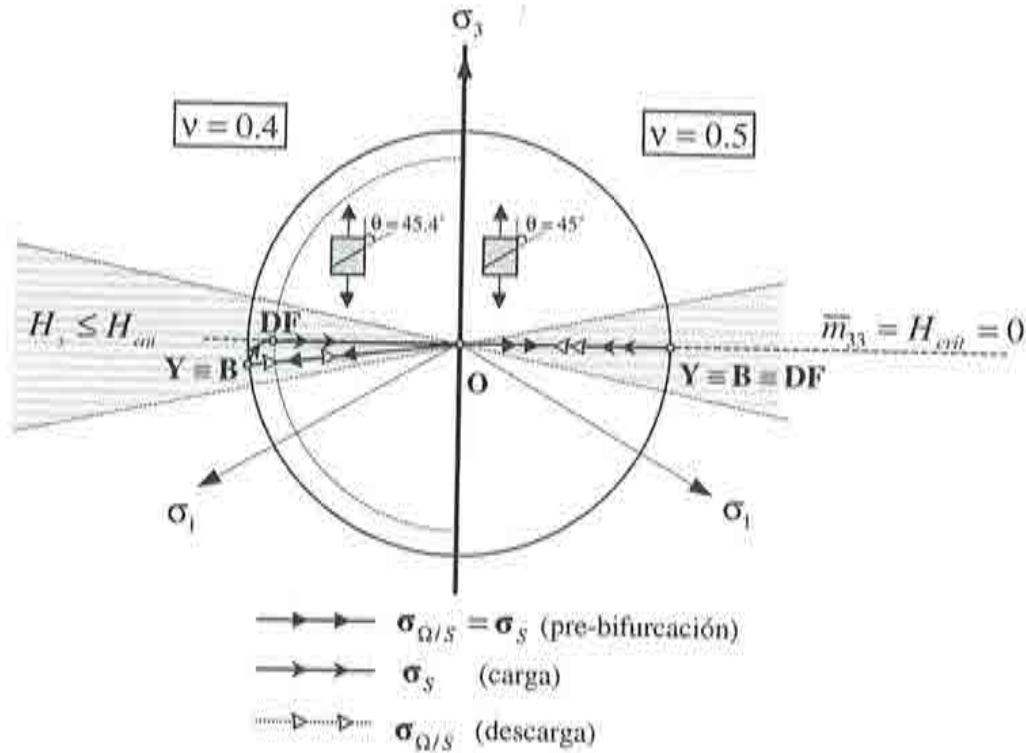


Figura 6.6 Trayectoria de tensiones en el plano octaédrico de tensiones (tracción uniaxial; deformación plana; Von Mises).

variación del ancho de banda. La imposición del ancho de banda cada vez menor provoca el cumplimiento de las condiciones de discontinuidad fuerte, forzando la aproximación de las tensiones en $\mathcal{S}$ al eje horizontal. Cuando se alcanza el régimen de discontinuidad fuerte **DF** ($h = k$), las tensiones en la discontinuidad se mantienen en el eje horizontal, hasta relajarse en el origen O . Las tensiones en $\Omega \setminus \mathcal{S}$ no se relaja completamente al final del proceso de carga (punto O') debido a la existencia de tensiones no nulas en la dirección fuera del plano del problema. Cabe destacar que dicho estado tensional cumple las condiciones de equilibrio en el plano del problema y, además, se encuentra dentro del dominio elástico, puesto que después de la bifurcación la superficie de fluencia para los puntos de $\Omega \setminus \mathcal{S}$ se mantiene congelada con $\hat{\phi} = \sigma_H - q_B$.

La figura 6.6 ilustra las trayectorias de las tensiones que se obtienen para los valores del coeficiente de Poisson $\nu = 0.4$ y $\nu = 0.5$. La principal diferencia con respecto al caso anterior ($\nu = 0$) es que para $\nu = 0.4$ la trayectoria de tensiones

alcanza la superficie de fluencia (punto **Y**) dentro de la zona sombreada y, por tanto, la bifurcación se produce en dicho instante en régimen de discontinuidad débil, puesto que dicho punto no pertenece al eje horizontal. Por otro lado, para $\nu = 0.5$, la trayectoria de tensiones alcanza la superficie de fluencia en el punto que pertenece al eje horizontal. Como dicho estado de tensiones verifica las condiciones de bifurcación y de discontinuidad fuerte simultáneamente, la bifurcación tiene lugar en régimen de discontinuidad fuerte cuando se alcanza el límite elástico ($\mathbf{Y} \equiv \mathbf{B} \equiv \mathbf{DF}$). Obsérvese que, en este caso, a pesar de que las deformaciones son distintas, las tensiones dentro y fuera de la interfaz permanecen continuas a lo largo de todo el proceso de carga. Es importante destacar que la misma trayectoria de tensiones que se obtuvo para el caso de tracción simple para $\nu = 0.5$ se obtendría para el caso de sollicitación a corte ($\sigma_2 = -\sigma_1$; $f_V/f_H = 1/-1$) para cualquier valor de ν .

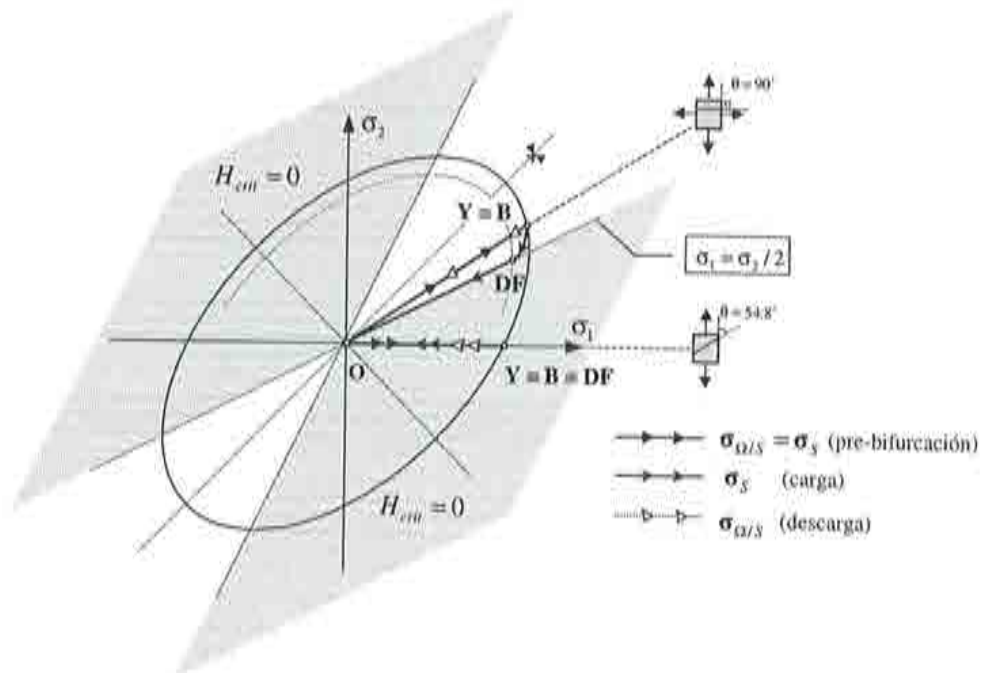


Figura 6.7 Trayectorias de tensiones en el plano $\sigma_1 - \sigma_2$ del espacio de tensiones principales (Tensión plana; Von Mises).

Tensión plana

Se analiza a continuación el mismo ejemplo bajo la restricción correspondiente al estado de tensión plana ($\sigma_{33} = 0$). La figura 6.7 ilustra la trayectoria de los estados de tensiones en el plano $\sigma_1 - \sigma_2$ ($\sigma_{33} = 0$) para diferentes situaciones de carga. La zona sombreada ahora representa la región donde se cumple la condición de discontinuidad fuerte y, consecuentemente, $H_{crit} = 0$. Nótese que, para este caso, las condiciones de bifurcación y de discontinuidad fuerte son menos restrictivas que en el caso de deformación plana. Como resultado, cualquier historia de carga cuya trayectoria de tensiones toca la superficie de fluencia en la zona sombreada produce bifurcación en régimen de discontinuidad fuerte ($Y \equiv B \equiv DF$).

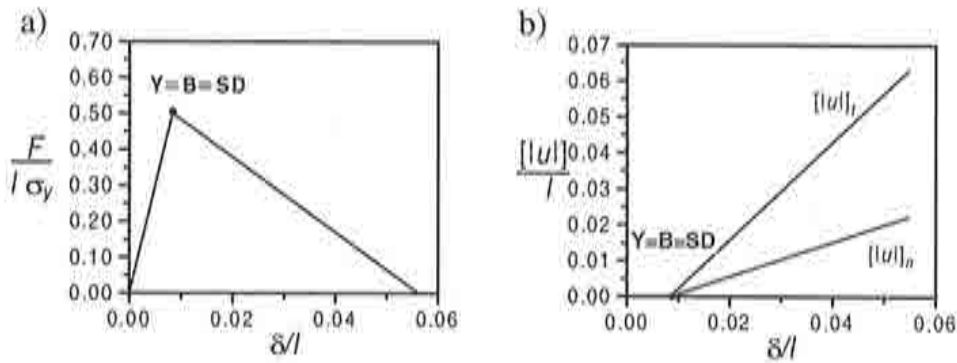


Figura 6.8 Evolución de las variables del problema (tracción uniaxial; tensión plana; Von Mises).

La figura 6.8 muestra la curva fuerza-desplazamiento y la evolución de los saltos para el caso de tracción simple ($\sigma_1 \geq 0, \sigma_2 = \sigma_{33} = 0; f_H/f_V = 1/0$) y $\nu = 0$. Nótese que, en este caso, de modo diferente al obtenido para deformación plana, la evolución de las componentes del salto reproducen una separación en modo mixto ($[u_t] \neq 0; [u_n] \neq 0$).

En la figura 6.9 se ilustra la posición de la línea de discontinuidad, la configuración deformada y los contornos de iso-desplazamiento al final del proceso de carga. En la figura 6.9.b se puede observar que la discontinuidad entre las dos partes de la probeta separadas por la línea S presenta una componente normal importante. En la figura 6.9.c se observa que en el final del proceso de carga toda la deformación se concentra en los elementos que contienen la línea de discontinuidad.

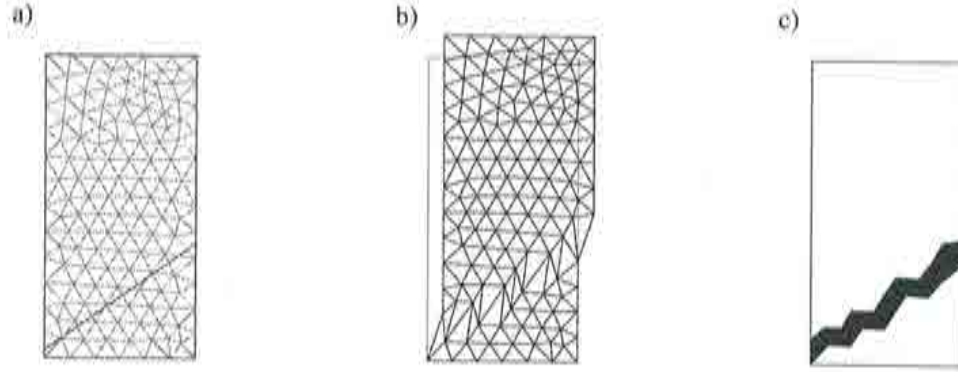


Figura 6.9. Resultados del ensayo de tracción biaxial (tensión plana; Von Mises).

6.2.4 Modelo constitutivo elasto-plástico de Ducker-Prager.

La función de fluencia y la regla de flujo que definen el modelo constitutivo elasto-plástico de Ducker-Prager no asociado se expresan como (Drucker y Prager 1952):

$$\begin{aligned} \phi &= \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{S}\| + \alpha_{\varphi} p - \sigma_y + q = 0 \\ \bar{\mathbf{m}} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\|\mathbf{S}\|} \mathbf{S} + \frac{\alpha_{\varphi}}{3} \mathbf{1} \\ s &= \bar{s} = \frac{\partial \phi}{\partial q} = 1 \end{aligned} \quad (6.5)$$

donde $\mathbf{1}$ es el tensor identidad de orden dos, $p = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})$ representa la tensión media y $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - p \mathbf{1}$ es el término desviador de $\boldsymbol{\sigma}$. Los parámetros que definen la función de fluencia pueden expresarse en función de la *cohesión*, c_y , y del *ángulo de rozamiento*, φ , del material:¹³

$$\alpha_{\varphi} = \frac{6 \sin(\varphi)}{3 - \sin(\varphi)} \quad \sigma_y = \beta_{\varphi} c_y \quad \beta_{\varphi} = \frac{6 \cos(\varphi)}{3 - \sin(\varphi)} \quad (6.6)$$

¹³ En el espacio de tensiones principales de Westergaard, dichas relaciones describen un cono que circunscribe la pirámide de Mohr-Coulomb.

El flujo plástico se define en función del parámetro α_ψ que depende del ángulo de dilatación ψ mediante la relación

$$\alpha_\psi = \frac{6 \sin(\psi)}{3 - \sin(\psi)} \quad (6.7)$$

En caso de plasticidad asociada se tiene $\varphi = \psi$ ($\alpha_\varphi = \alpha_\psi$) y, por consiguiente,

$$\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{m} = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\|\mathbf{S}\|} \mathbf{S} + \frac{\alpha_\varphi}{3} \mathbf{1} \quad (6.8)$$

Los resultados que se presentan a continuación se han obtenido para el estado de deformación plana y plasticidad asociada con $\alpha_\psi = \alpha_\varphi = 0.5$ ($\psi = \varphi = 13.34^\circ$) y $\nu = 0.2$.

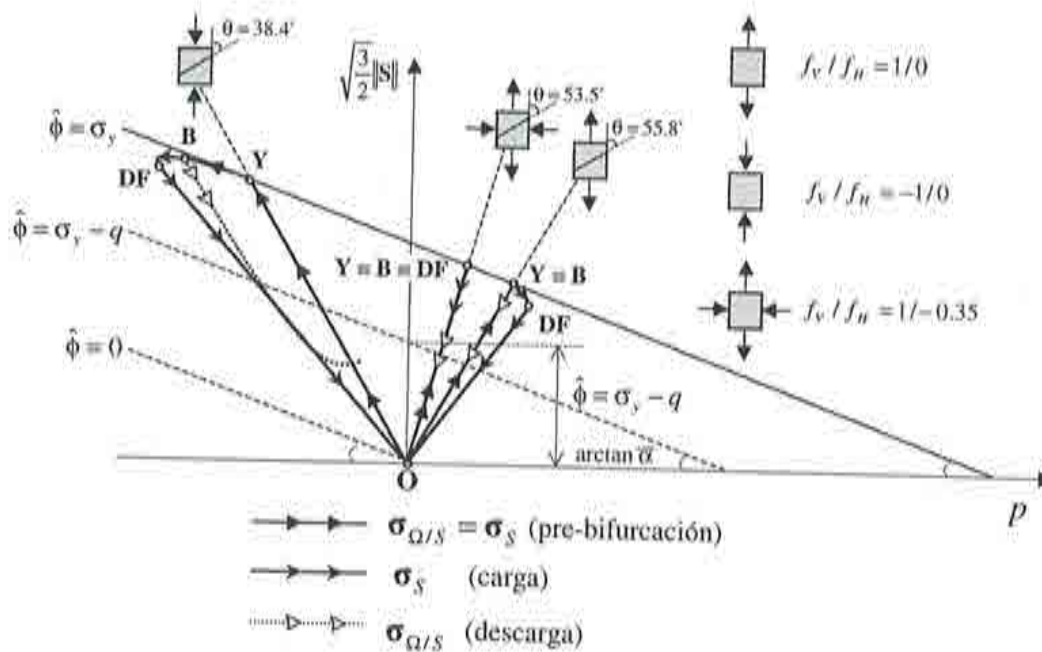


Figura 6.10 Trayectoria de tensiones (deformación plana; Drucker-Prager).

La figura 6.10 muestra las trayectorias de tensiones en el plano cuyos ejes de coordenadas se asocian a los invariantes del tensor de tensiones $\sqrt{3/2} \|\mathbf{S}\|$ ($= \sqrt{3} J_2$) y p ($= I_1/3$) para diferentes situaciones de carga. Nótese que para el caso

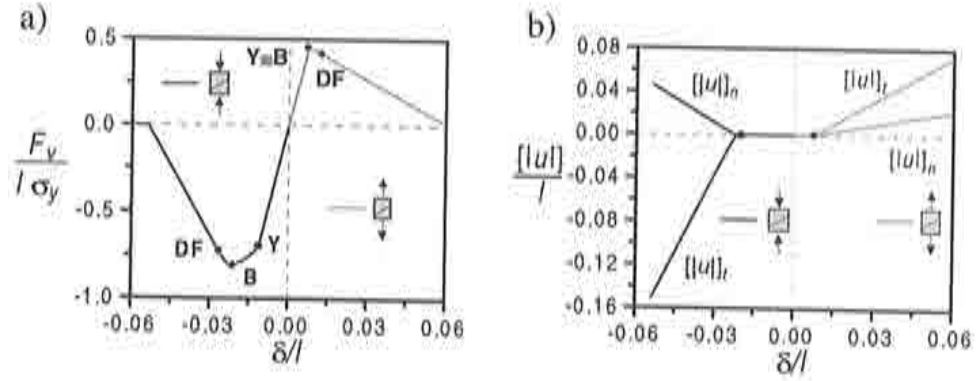


Figura 6.11 Evolución de las variables del problema (tracción y compresión simple; deformación plana; Drucker-Prager).

de tracción simple, la bifurcación ocurre en régimen de discontinuidad débil en el instante en que la trayectoria de tensiones alcanza la superficie de fluencia inicial ($Y \equiv B$). Para el caso de compresión simple, la bifurcación ocurre en régimen de discontinuidad débil después de haber desarrollado deformaciones plásticas en régimen de ablandamiento y en el caso particular de tracción biaxial con la relación $f_V/f_H = 1/-0.35$ la bifurcación ocurre en régimen de discontinuidad fuerte en el instante en que la trayectoria de tensiones alcanza la superficie de fluencia inicial ($Y \equiv B \equiv DF$).

La figura 6.11 muestra la evolución de las variables del problema para las situaciones de carga correspondientes a tracción ($f_V/f_H = 1/0$) y compresión ($f_V/f_H = -1/0$) simple. En la figura 6.11.b se observa que para las dos situaciones de carga se obtienen valores positivos de la componente normal del salto $[[u_n]]$ (separación, véase figura 6.1.b). Este hecho refleja el efecto de dilatación que caracteriza el comportamiento no lineal de este modelo constitutivo. Nótese que, en régimen de discontinuidad fuerte, la evolución de las componentes del salto reproduce la relación constitutiva discreta obtenida del análisis de discontinuidad fuerte (véase apartado 4.4.5), que establece la siguiente relación¹⁴

$$\left| \frac{[[\dot{u}_n]]}{[[\dot{u}_t]]} \right| = \frac{\alpha_\varphi}{\sqrt{3 - \frac{4}{3} \alpha_\varphi^2}} = 0.306 \quad (6.9)$$

¹⁴ En este caso se ha tomado la relación en valor absoluto puesto que la convención de valores positivos de las componentes del salto indicado en la figura 6.1.b no corresponde a la empleada en el apartado ??.

Finalmente, la figura 6.12 muestra la deformación de la probeta sometida a tracción al final del proceso de carga.

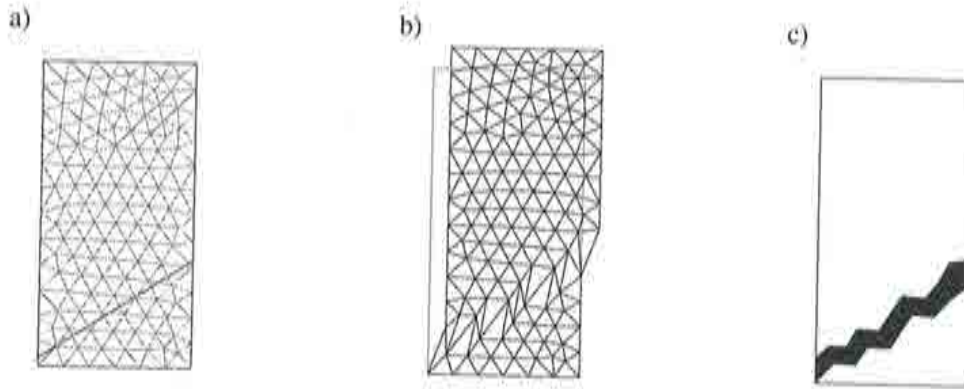


Figura 6.12 Resultados del ensayo de tracción simple (deformación plana; Drucker-Prager)

6.2.5 Modelo constitutivo elasto-plástico de Rankine asociado

La función de fluencia y la regla de flujo plástico que definen el modelo elasto-plástico de Rankine asociado se expresan como (Rankine 1857)

$$\begin{aligned}
 \phi &= \sigma_1 - \sigma_y - q = 0 \\
 \mathbf{m} &= \bar{\mathbf{m}} = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{p}}_1 \otimes \hat{\mathbf{p}}_1 \\
 s &= \bar{s} = \frac{\partial \phi}{\partial q} = 1
 \end{aligned}
 \tag{6.10}$$

donde σ_1 representa la máxima tensión principal en el plano del problema ($\sigma_1 > \sigma_2$) y $\hat{\mathbf{p}}_1$ es el vector unitario en la dirección principal de máxima tensión. De acuerdo con los análisis realizados en el apartado 4.4.5, la condición de discontinuidad fuerte se cumple en cualquier punto del espacio de tensiones principales. Por tanto, la bifurcación se produce siempre en régimen de discontinuidad fuerte en el instante que la trayectoria de tensiones (cualquiera) alcanza la superficie de fluencia ($\mathbf{Y} \equiv \mathbf{B} \equiv \mathbf{DF}$). La figura 6.13 ilustra esta particularidad del modelo constitutivo.

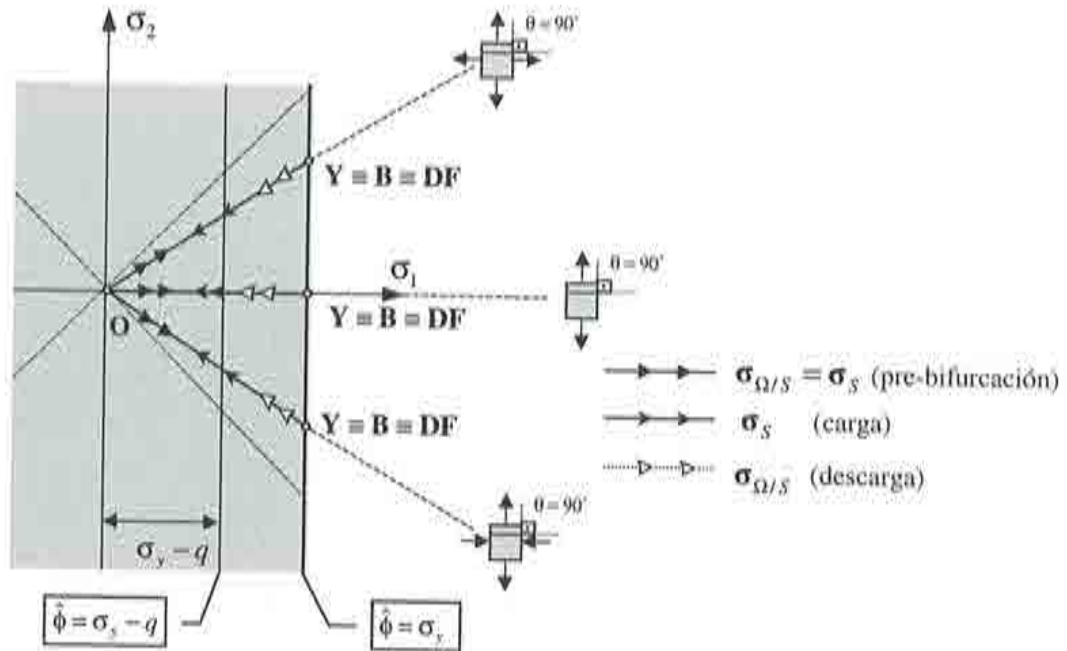


Figura 6.13 Trayectoria de tensiones en el plano $\sigma_1 - \sigma_2$ del espacio de tensiones principales (tensión plana; Rankine).

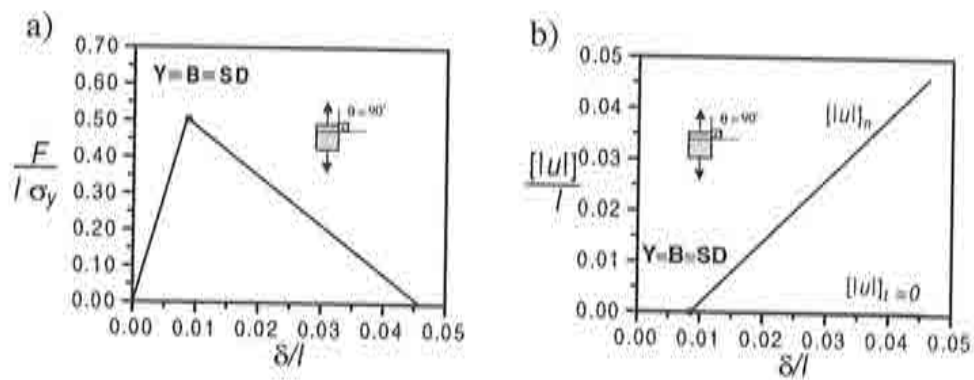


Figura 6.14 Evolución de las variables del problema (tracción simple; tensión plana; Rankine).

En la figura 6.14 se presenta la curva fuerza-desplazamiento y la evolución del salto para el caso de tracción simple ($f_V/f_H = 1/0$) con $\nu = 0.0$. Nótese que la bifurcación tiene lugar en régimen de discontinuidad fuerte cuando se alcanza el límite elástico. Además, se observa que sólo la componente normal del salto evoluciona mientras la componente transversal se mantiene nula en todo el proceso de carga (modo I).

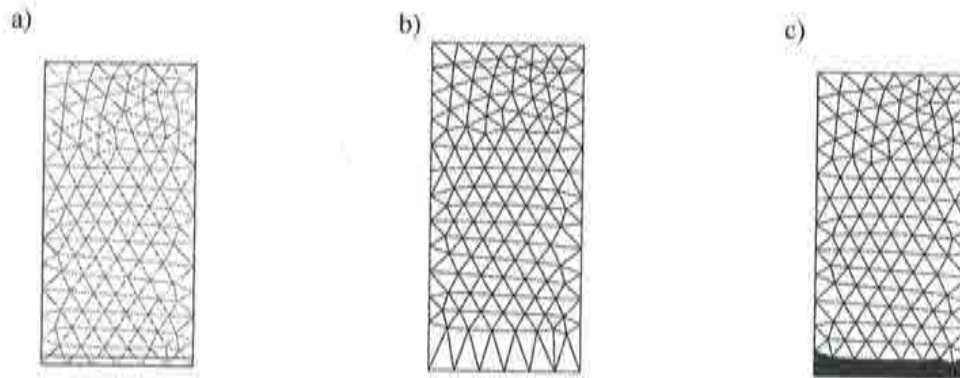


Figura 6.15 Resultados del ensayo de tracción simple (tensión plana; Rankine).

En la figura 6.15.a se puede apreciar que la línea de discontinuidad que se forma es ortogonal a la dirección principal de máxima tensión. La configuración deformada de la figura 6.15.b y los contornos de iso-desplazamiento en el final del proceso de carga, presentados en la figura 6.15.c, ponen de manifiesto el movimiento relativo de sólido rígido de separación entre las dos partes de la probeta divididas por la línea de discontinuidad.

6.2.6 Estudio de sensibilidad a la variación del parámetro k

En la figura 6.16 se muestran las trayectorias de tensiones en el plano octaédrico que se obtienen para distintos valores del parámetro k , considerando tracción uniaxial ($f_V/f_H = 1/0$), deformación plana y modelo constitutivo de Von Mises asociado.

De acuerdo con el estudio de discontinuidad fuerte, el inverso de k desempeña un papel de parámetro de penalización que impone el cumplimiento de las condiciones de discontinuidad fuerte. Nótese en la figura 6.16 que, conforme k disminuye, la trayectoria del estado de tensiones se aproxima gradualmente al

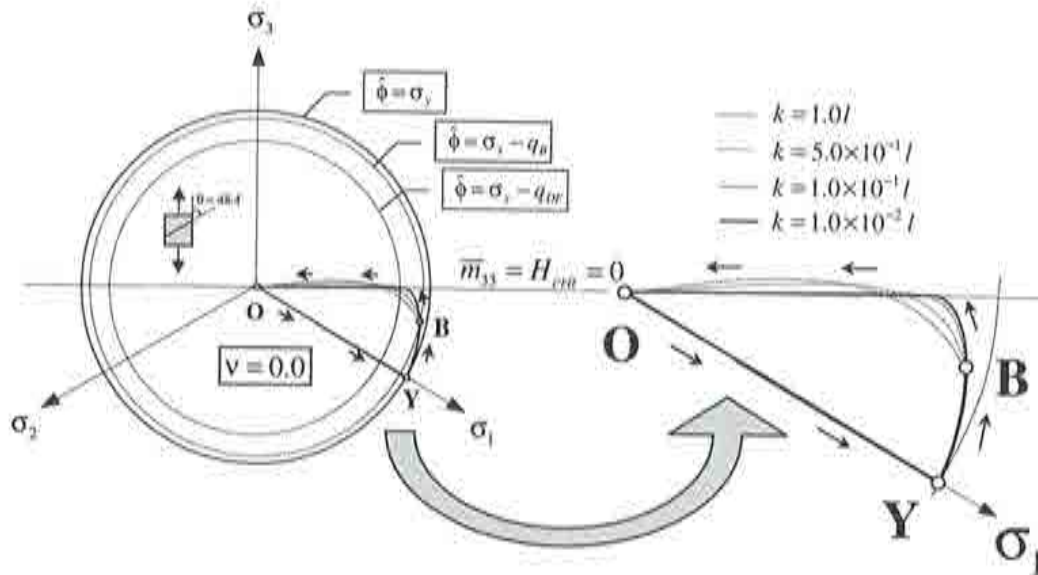


Figura 6.16 Trayectorias de tensiones en el plano octaédrico de tensiones para diversos valores de k (deformación plana; Von Mises; $\nu = 0$).

eje horizontal, que representa la región de los puntos que verifican la condición de discontinuidad fuerte. Nótese también que las sucesivas trayectorias convergen a una configuración muy próxima a la que se ha obtenido para $k = 10^{-2}l$. Así, se puede concluir que el valor de $k = 10^{-2}l$ es suficiente para imponer las condiciones consistentes con el régimen de discontinuidad fuerte.

6.2.7 Modelo de localización alternativo, mediante imposición de la bifurcación en la superficie límite de fallo

Considérese ahora el modelo alternativo para describir la formación de la localización, que se caracteriza por (ver apartado 4.4.6): a) El comportamiento del material se describe mediante un modelo constitutivo elasto-plástico asociado, b) El material desarrolla deformaciones plásticas en régimen de endurecimiento hasta que las tensiones alcanzan la superficie límite de fallo, c) a partir de entonces se induce la localización, imponiendo que el comportamiento elasto-plástico del material del interior de la banda de localización obedezca una ley de ablandamiento definida en función del modelo de ancho de banda variable y del módulo de endurecimiento crítico, $H = H_{crit}$, evaluado con el estado tensional

en el instante en que la trayectoria de tensiones alcanza la superficie límite de fallo, d) el comportamiento elasto-plástico del material externo a la banda de localización se describe mediante la ley de endurecimiento original durante todo el proceso de carga.

Observación 6.1 Nótese que, en principio, después de que la trayectoria de las tensiones alcanza la superficie límite de fallo, se considera la existencia de comportamientos distintos dentro y de fuera de la banda de localización (ablandamiento dentro y endurecimiento fuera). Sin embargo, de acuerdo con el análisis de bifurcación, la imposición de $H = H_{crit}$ en el interior de la banda para inducir la bifurcación implica descarga elástica fuera de la banda. Por tanto, salvo que existan cambios importantes en el estado tensional, una vez que las tensiones alcanzan la superficie límite de fallo, la ley de endurecimiento del material externo a la banda no interviene en el problema y, por consiguiente, el proceso de carga transcurre como si hubiera sólo una ley de endurecimiento/ablandamiento que describe los comportamientos dentro y fuera de la discontinuidad.

Se analiza a continuación el comportamiento de la probeta de la figura 6.1, sometida a tracción uniaxial ($f_V/f_H = 1/0$) en estado de deformación plana, considerando el modelo elasto-plástico de Von Mises y el referido modelo de localización alternativo. Considérese que la ley de endurecimiento en la fase *pre-bifurcación* es lineal, con un módulo de endurecimiento constante $H_y > 0$. La ley de endurecimiento en la fase *post-bifurcación* para los puntos externos a la banda es la misma empleada en la fase *pre-bifurcación*, mientras que para los puntos del interior de la banda la ley de endurecimiento se define de acuerdo con las ecuaciones (6.1). Además de la consideración de $H_y > 0$, la diferencia con respecto al modelo de localización empleado anteriormente es el hecho de que los valores de q_B y de α_B ya no dependen de la historia de tensiones-deformaciones, sino que son datos del problema que definen la posición de la superficie límite de fallo en el espacio de tensiones.

En el ejemplo que sigue, se considera

$$\begin{aligned} H_y &= \frac{E}{3} \\ q_B &= -0.15 \sigma_y \end{aligned} \quad (6.11)$$

de donde se obtiene $\alpha_B = -q_B/H_y = 0.45 \sigma_y/E$. Los demás datos del problema son los mismos indicados en la figura 6.1.

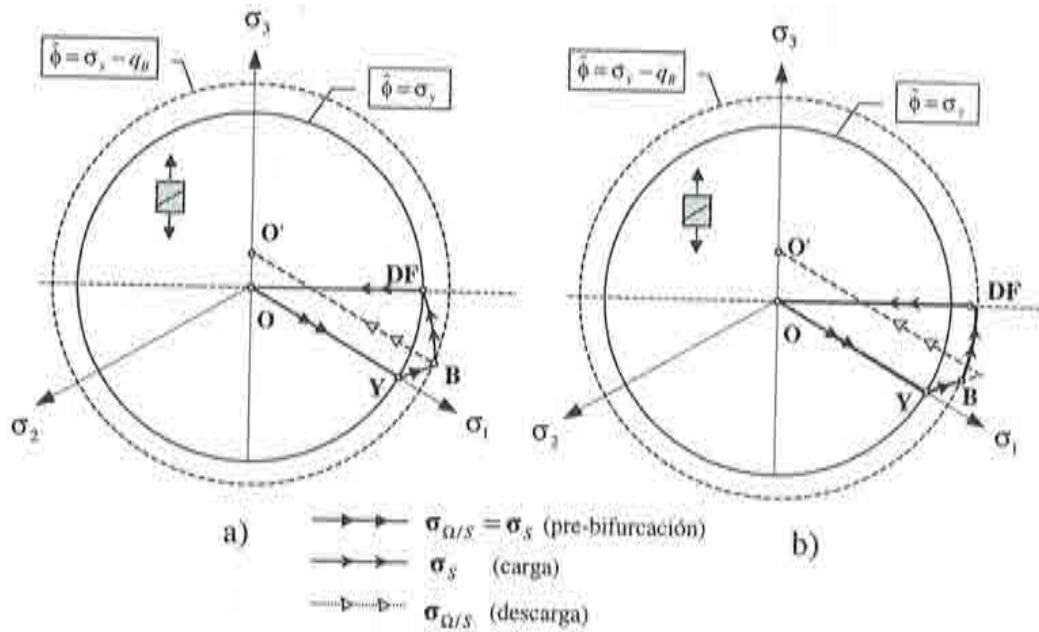


Figura 6.17 Trayectoria de tensiones en el plano octaédrico para el modelo de localización alternativo: a) con fase de transición, b) sin fase de transición.

La figura 6.17.a muestra la trayectoria de las tensiones en el plano octaédrico de tensiones principales. Nótese que tras alcanzar el límite del dominio elástico inicial, la trayectoria de tensiones avanza en régimen de endurecimiento hasta alcanzar la superficie límite de fallo. A partir de entonces, el estado de tensiones bifurca con descarga elástica en $\Omega \setminus S$ y carga plástica (en régimen de ablandamiento) en S .

En la figura 6.18 se indica con línea continua la curva fuerza *versus* desplazamiento que se obtiene en este caso, donde se pueden distinguir claramente las diferentes fases del proceso de carga.

6.2.8 Efectos producidos al no considerarse la fase de transición

Aprovechando el ejemplo numérico analizado en el apartado 6.2.7, se estudian ahora los efectos que se obtienen al desconsiderar la fase de transición, imponiendo el régimen de discontinuidad fuerte justo en el instante de la bifurcación, independientemente del estado de tensiones. Este tipo de aproximación

corresponde a adoptar $\rho = 0$ ($h_u = k$) en el modelo de ancho de banda variable que se muestra en la figura 6.2.b.

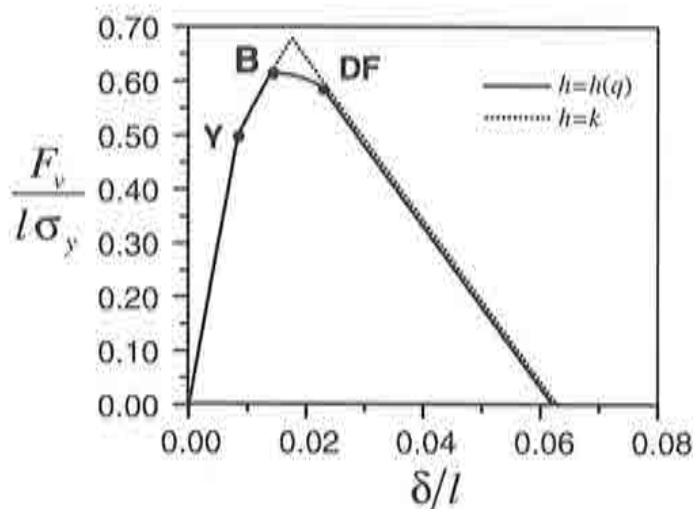


Figura 6.18 Curva fuerza *versus* desplazamiento para el modelo de localización alternativo.

En la figura 6.17.b se puede apreciar la trayectoria de las tensiones en el espacio de tensiones octaédricas, donde se observa que tras la bifurcación, no sólo el interior de la banda, sino también el exterior de la banda de localización experimentan carga plástica. Nótese que fuera de la banda la carga plástica ocurre en régimen de endurecimiento, hasta que el estado de tensiones del interior de la banda verifica las condiciones de discontinuidad fuerte (alcanza el eje horizontal de la figura 6.17.b). Después de esto, se produce descarga elástica fuera de la banda hasta el final del proceso de carga. La existencia de una rama de carga plástica fuera de la banda se debe a que tras la bifurcación se impone para los puntos del interior de la banda $H = \bar{H}k \neq H_{crit}$ y, por tanto, no se verifica la condición de descarga elástica en $\Omega \setminus \mathcal{S}$.

En la figura 6.18 se indica con línea discontinua la curva fuerza *versus* desplazamiento que se obtiene con dicha aproximación. Nótese que, comparando con la aproximación que considera la fase de transición ($h = h(q)$), se produce una elevación importante del pico de la curva.

En este caso, el modelo consideraría "materiales distintos" dentro y fuera de la banda de localización (las leyes de endurecimiento serían distintas en $\mathcal{S}$ y en $\Omega \setminus \mathcal{S}$) y podría hablarse de un *modelo de dos materiales* para capturar la localización. Sólo en el caso particular de que la condición de discontinuidad fuerte se cumpliera

en el instante en que se produce la bifurcación, dicho modelo de dos materiales degeneraría en el modelo descrito en el apartado 6.2.7.

6.2.9 Estudio de la sensibilidad de la respuesta con respecto a la malla adoptada

Con el objeto de demostrar la objetividad de la respuesta respecto a la malla de elementos finitos, se presenta a continuación el análisis de la probeta sometida a tracción simple utilizando diversos tipos de discretización por elemento finitos.

En todos los casos se ha utilizado el modelo elasto-plástico de Von Mises asociado para representar el comportamiento del material. Los resultados expuestos en las figuras 6.19, 6.20, 6.21 y 6.22 corresponden al estado de deformación plana, mientras que la figura 6.23 se refiere al estado de tensión plana. En los ejemplos se ha considerado $\nu = 0$.

Las figuras que siguen ilustran los resultados en el final del proceso de carga, obtenidos utilizando mallas estructuradas y no estructuradas con diferentes orientaciones y tamaños de elementos. Para los elementos finitos triangulares se ha utilizado interpolación cuadrática de los desplazamientos regulares mientras que para los cuadriláteros se ha utilizado interpolación bilineal de dichos desplazamientos.

Nótese que en todos los casos los elementos son capaces de representar exactamente los modos de desplazamiento relativo en la línea de discontinuidad. En la malla más fina el campo de desplazamientos regulares se aproxima más al propio campo de desplazamientos y, por consiguiente, se puede observar con más nitidez que el modo de desplazamiento relativo en la discontinuidad es el típico de una línea de deslizamiento. Cabe destacar que, a pesar de que los campos de desplazamientos regulares (que se aprecian en el *post-proceso*) son distintos, los campos de desplazamientos totales que se obtienen en todos los casos coinciden exactamente. Este hecho es el motivo por lo cual se han obtenido curvas fuerza-desplazamiento idénticas a la representada en la figura 6.3.f para todas las mallas utilizadas.

En la figura 6.23 se puede apreciar también la completa independencia de los resultados con la malla de elementos finitos para el caso de tensión plana. Las curvas fuerza-desplazamiento obtenidas para todas las discretizaciones coinciden con la presentada en la figura 6.8.a.

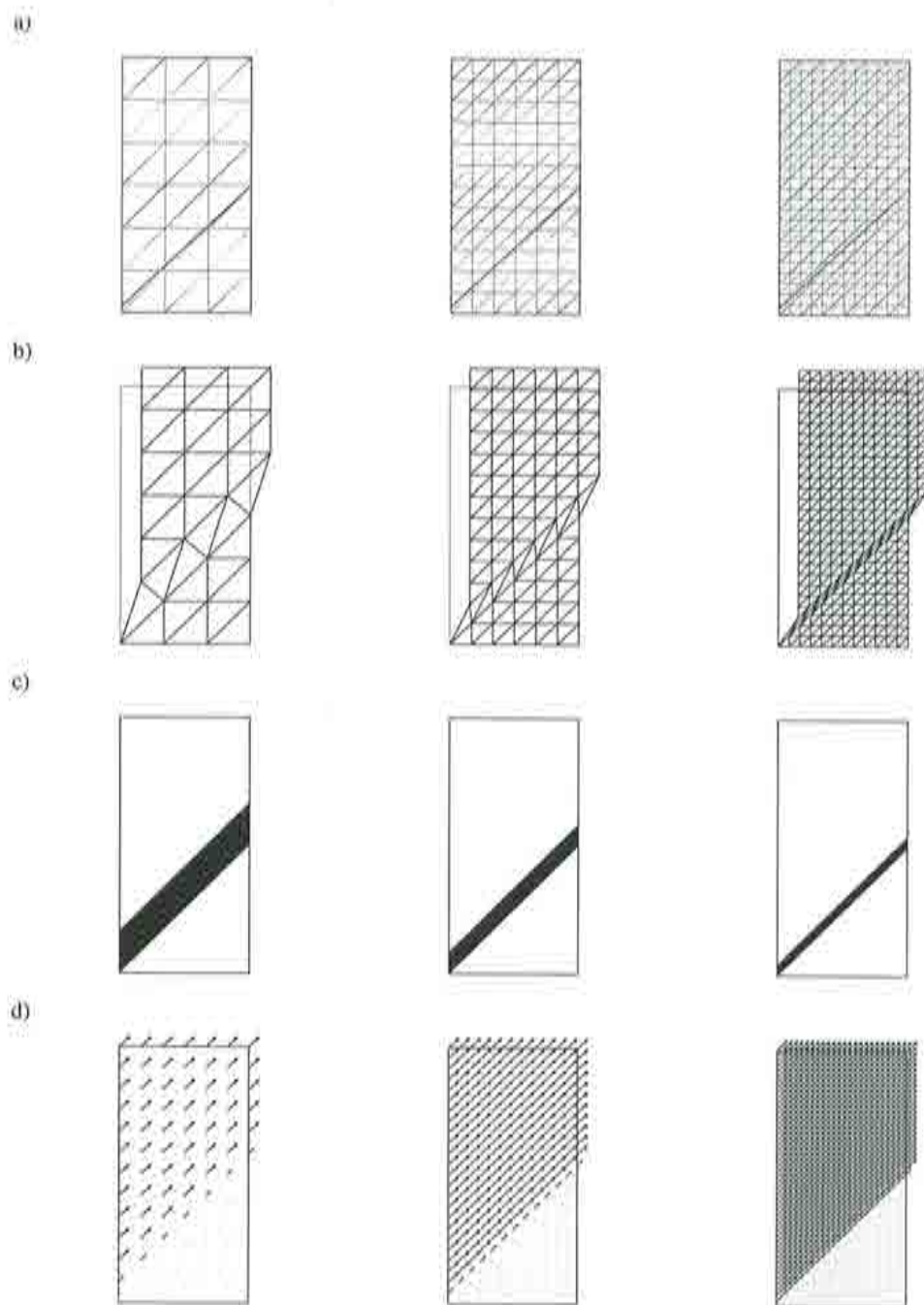


Figura 6.19 Resultados del problema de tracción simple en la fase final del proceso de carga (deformación plana; Von Mises; $\nu = 0$): a) malla y línea de discontinuidad, b) malla deformada, c) contornos de iso-desplazamiento y d) vectores de desplazamientos nodales.

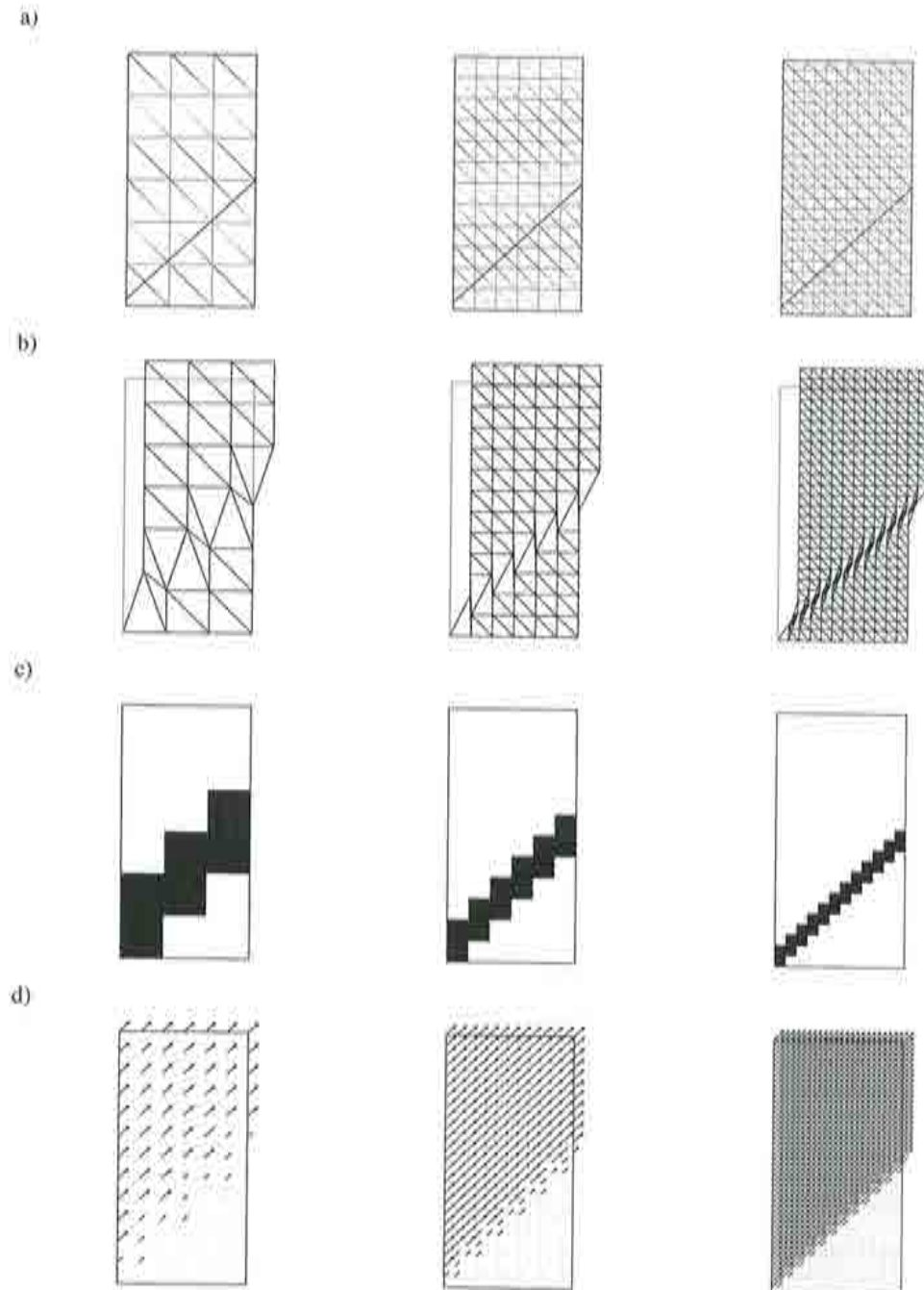


Figura 6.20 Resultados del problema de tracción simple en la fase final del proceso de carga (deformación plana; Von Mises; $\nu = 0$): a) malla y línea de discontinuidad, b) malla deformada, c) contornos de iso-desplazamiento y d) vectores de desplazamientos nodales.

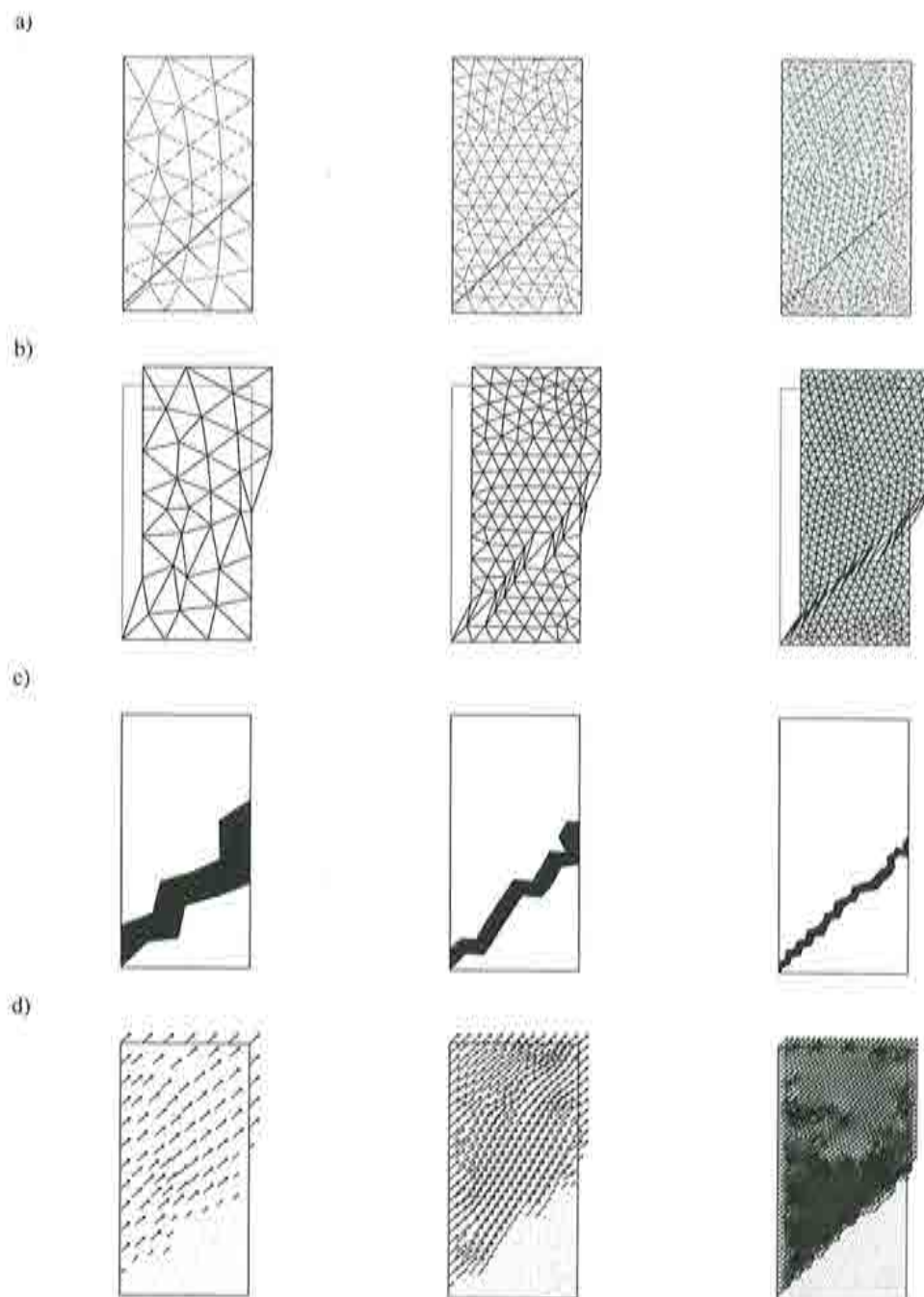


Figura 6.21 Resultados del problema de tracción simple en la fase final del proceso de carga (deformación plana; Von Mises; $\nu = 0$): a) malla y línea de discontinuidad, b) malla deformada, c) contornos de iso-desplazamiento y d) vectores de desplazamientos nodales.

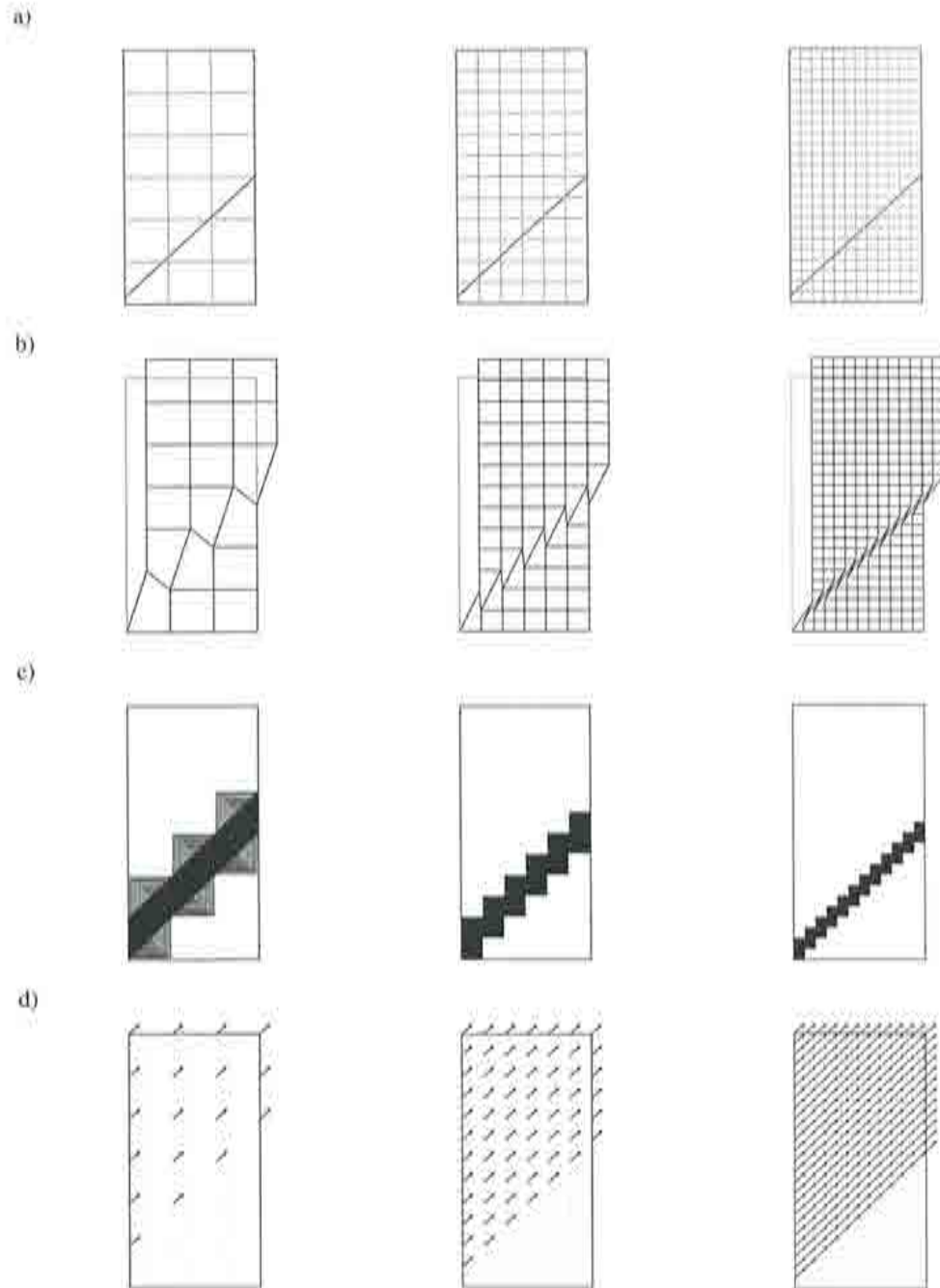


Figura 6.22 Resultados del problema de tracción simple en la fase final del proceso de carga (deformación plana; Von Mises; $\nu = 0$): a) malla y línea de discontinuidad, b) malla deformada, c) contornos de iso-desplazamiento y d) vectores de desplazamientos nodales.

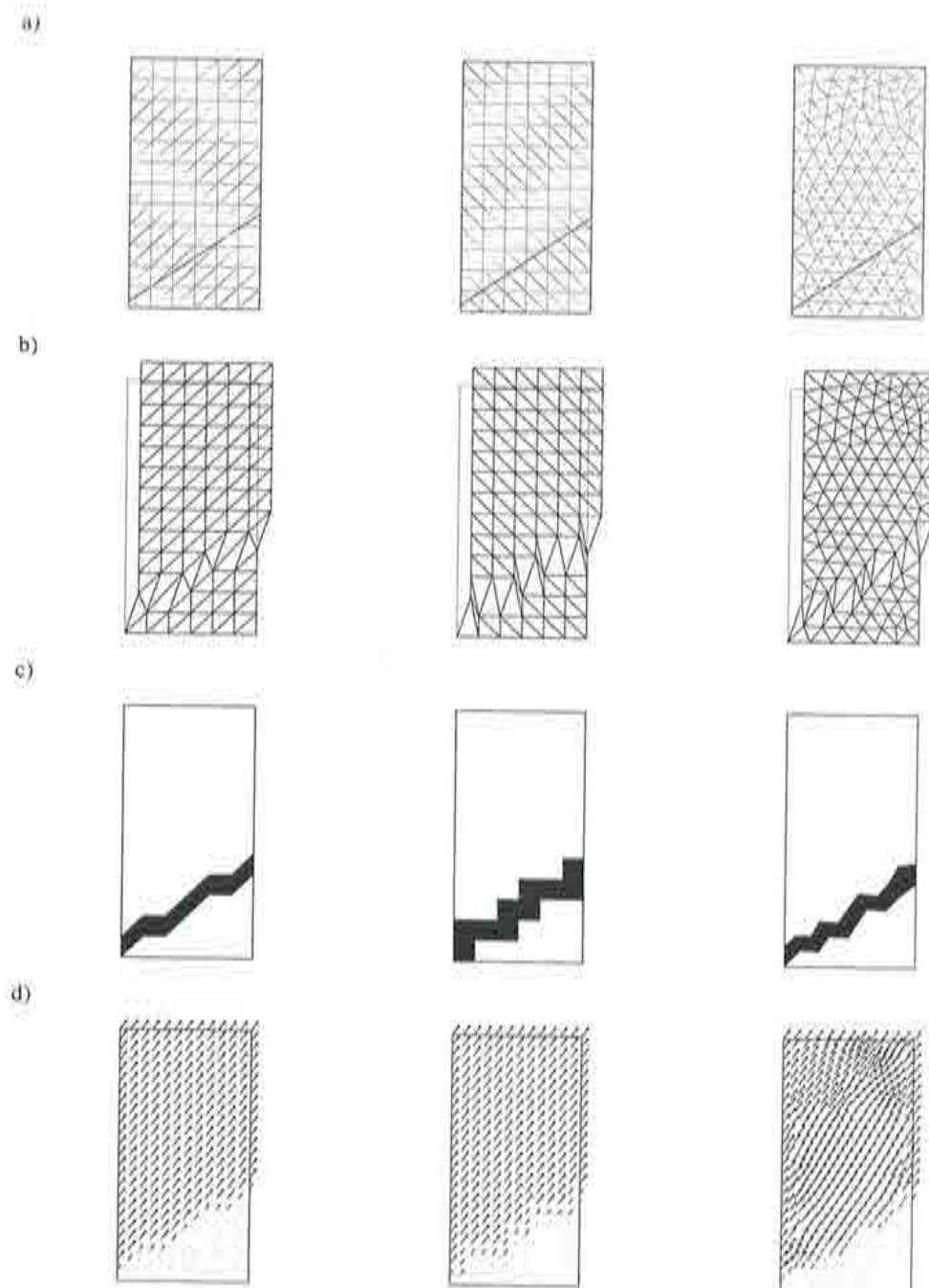


Figura 6.23 Resultados del problema de tracción simple en la fase final del proceso de carga (tensión plana; Von Mises; $\nu = 0$): a) malla y línea de discontinuidad, b) malla deformada, c) contornos de iso-desplazamiento y d) vectores de desplazamientos nodales.

6.3 APLICACIONES EN PROBLEMAS DE MECÁNICA DE SUELOS

En los últimos años, la teoría de plasticidad ha sido extensamente empleada en el análisis computacional de problemas geotécnicos, dada su capacidad de describir adecuadamente las características fundamentales del comportamiento de suelos y rocas. La cantidad de publicaciones relacionada con esta área es muy vasta, encontrado en Gens y Potts (1988) una revisión de los modelos de estado crítico (*critical state models*), comúnmente utilizados en este contexto.

El objetivo de este apartado es examinar la capacidad de la aproximación de discontinuidad fuerte para simular el fenómeno de localización de deformaciones en bandas de cizalladura, comúnmente observados en problemas de mecánica de suelos. A pesar de que la complejidad del comportamiento de dichos materiales exige modelos constitutivos más elaborados, en los ejemplos que se analizan a continuación se han utilizado modelos relativamente sencillos, centrando los estudios en la capacidad de la aproximación para predecir el mecanismo de colapso en situaciones en las que los campos de tensiones y de deformaciones no son uniformes. Se han considerado modelos asociados con ley de endurecimiento/ablandamiento isótropo. Para simular el comportamiento incompresible en estados no drenados se ha empleado la superficie de fluencia de Von Mises (ecuaciones (6.4)) y para modelar el comportamiento de materiales dependientes de la presión y que exhiben variación volumétrica inelástica inducida por cizalladura (dilatancia) se ha empleado una superficie de fluencia inspirada en la superficie de Drucker-Prager (Drucker y Prager 1952).

Con objeto de evitar los problemas numéricos provocados por la discontinuidad de la superficie de fluencia de Drucker-Prager en el vértice, se ha utilizado una forma regularizada de dicha superficie, que se muestra en la figura 6.24. Las ecuaciones que rigen dicho modelo elasto-plástico son:

$$\begin{aligned}
 \phi &= \frac{1}{(1-A^2)} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \|\hat{\mathbf{S}}\| + \alpha_\varphi p \right) - \sigma_y + q = 0 \\
 \mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}} &= \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\|\hat{\mathbf{S}}\|} \mathbf{S} + \frac{1}{3(1-A^2)} \left(\alpha_\varphi + \frac{A^2 \alpha_\varphi^2 p}{\sqrt{\frac{3}{2}} \|\hat{\mathbf{S}}\|} \right) \mathbf{1} \\
 s = \bar{s} &= \frac{\partial \phi}{\partial q} = 1
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

donde

$$\|\hat{\mathbf{S}}\| = \sqrt{(1-A^2) \|\mathbf{S}\|^2 + \frac{2}{3} A^2 \alpha_\varphi^2 p^2} \tag{6.13}$$

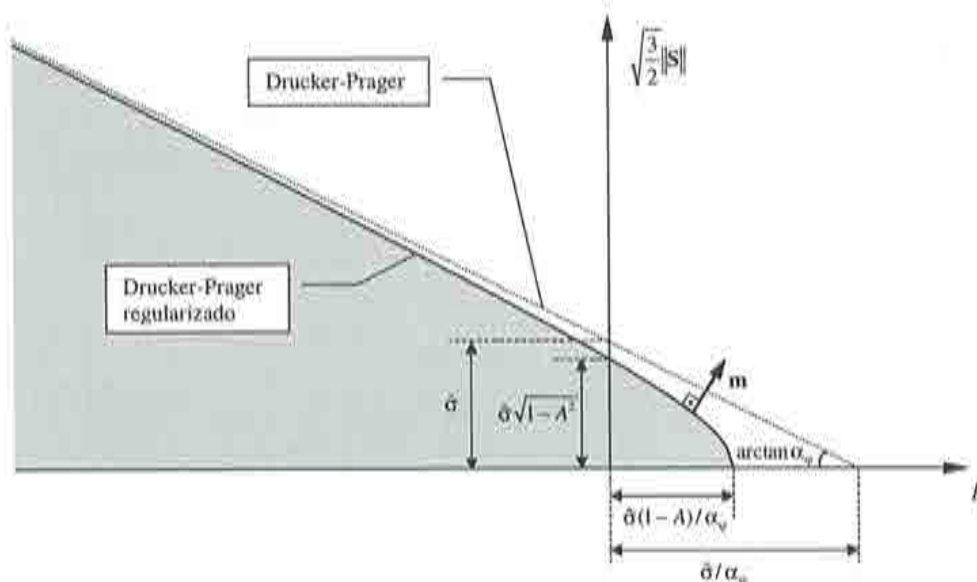


Figura 6.24 Superficie de fluencia de Drucker-Prager regularizada.

y A desempeña el papel de parámetro de regularización, tal que $A = 0$ corresponde al modelo de Drucker-Prager asociado (ver ecuaciones (6.5)). Nótese que para la superficie de fluencia (y de potencial plástico) regularizada la dilatación adquiere valores elevados en el eje de tensiones medias p positivas¹⁵. En el contexto de las discontinuidades fuertes, este hecho corresponde a modos de discontinuidad en los cuales predomina de la componente normal del salto.

6.3.1 Talud sometido a peso propio creciente

En la figura 6.25 se indican la geometría y las condiciones de contorno de los taludes con inclinación de 90° y 45° que se analizan a continuación. Se ha considerado la condición de deformación plana y se ha elegido el desplazamiento vertical δ del punto A como parámetro de control del proceso de carga,

Las constantes del material se adoptaron con base al trabajo de Ortiz *et al.* (1987): Módulo de Young $E = 200 \text{ MPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$, peso específico del material $\rho = 10 \text{ KN/m}^3$. En dicha referencia el comportamiento no lineal del material se describe mediante el modelo elasto-plástico de Drucker-

¹⁵ La componente según la dirección del eje de tensiones medias, p , del vector normal a la superficie, $\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{m} = \partial\phi/\partial\boldsymbol{\sigma}$, adquiere valores elevados respecto a la componente según el eje desviador.

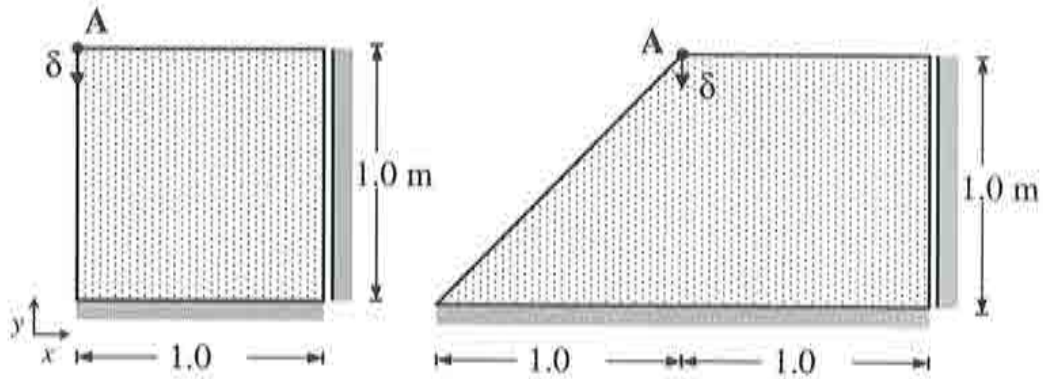


Figura 6.25 Geometría y condiciones de contorno de los taludes inclinados a 45° y 90° .

Prager no asociado con ángulo de rozamiento $\varphi = 20^\circ$ ($\alpha_\varphi = 0.77$), ángulo de dilatación $\psi = 10^\circ$ ($\alpha_\psi = 0.37$) y cohesión $c_y = 2000 \text{ Pa}$ ($\sigma_y = 4242 \text{ Pa}$) (ecuaciones (6.5)). Los resultados presentados aquí se obtuvieron utilizando la forma regularizada del modelo de Drucker-Prager asociado (ecuaciones (6.12)) con $\alpha_\varphi = 0.5$, $\sigma_y = 4200 \text{ Pa}$ y $A = 0.5$. Se ha adoptado el módulo de endurecimiento/ablandamiento intrínseco $\bar{H} = -22 \text{ MPa/m}$.

Se ha considerado el modelo de localización del apartado 6.2.7, tomando una superficie de fallo coincidente con la superficie de fluencia inicial ($q_B = 0$).

Estos dos casos han sido analizados por Pamin (1994) empleando un modelo elasto-plástico no local (*gradiente-dependent plasticity*) con los mismos datos del material utilizado por Ortiz *et al.* (1987), lo que hace difícil la comparación de los resultados con los obtenidos aquí.

Talud vertical

El problema se ha modelado utilizando diferentes mallas de elementos finitos triangulares con interpolación cuadrática de los desplazamientos regulares (figura 6.26). Las mallas estructuradas con los elementos orientados de dos modos distintos (mallas A y B) contienen 576 elementos finitos, mientras que la malla no estructurada (malla C) está formada por 1276 elementos.

En la figura 6.27 se pueden apreciar las líneas de discontinuidad que se forman para las distintas mallas. Nótese que con las tres mallas se obtienen líneas de discontinuidad prácticamente idénticas, con forma aproximada a un arco de circunferencia. La figura 6.28 muestra la evolución del factor de carga respecto al desplazamiento vertical δ obtenido con las diferentes mallas. Se puede observar

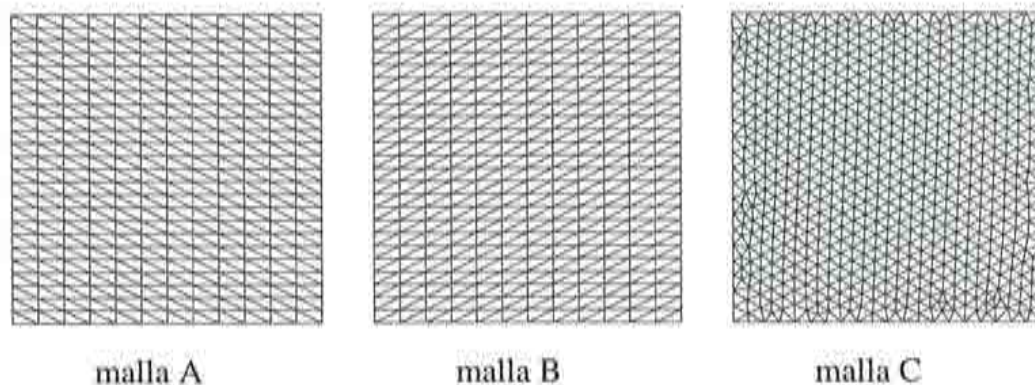


Figura 6.26 Diferentes discretizaciones del talud vertical.

que la rama descendiente es casi lineal, reflejando la ley constitutiva intrínseca que se obtiene al suponer un *módulo de ablandamiento intrínseco* $\bar{H}$ constante. Dichas curvas ponen de manifiesto la práctica independencia de la respuesta estructural con respecto al tipo de malla utilizada. En las figuras 6.29 y 6.30.a se puede apreciar la coincidencia de la configuración deformada (amplificada) de las tres mallas en el instante en que el desplazamiento δ alcanza el valor de 0.1 mm . En la figura 6.30.a se puede verificar con más nitidez el efecto de la dilatación que se obtiene con el modelo constitutivo adoptado. Nótese que la componente normal del salto (separación) tiene el mismo orden de magnitud que el de la componente transversal (deslizamiento). Los contornos de iso-desplazamiento presentados en la figura 6.30.b evidencian que prácticamente toda la deformación se concentra en los elementos que contienen la línea de discontinuidad y que el mecanismo de colapso resultante corresponde a un movimiento de sólido rígido relativo entre las dos partes del cuerpo divididas por la línea de discontinuidad.

Finalmente, en la figura 6.31 se presentan los contornos de iso-desplazamiento de la malla C en diferentes instantes, donde se puede observar la progresión de la línea de discontinuidad a lo largo del proceso de carga. La discontinuidad parte del extremo inferior izquierdo cuando $\delta = 0.013\text{ mm}$ y alcanza la faz superior en el instante en que $\delta = 0.034\text{ mm}$.

Talud inclinado a 45°

La figura 6.32.a exhibe la malla utilizada para modelar el problema (594 elementos finitos triangulares con interpolación cuadrática de desplazamientos regulares).

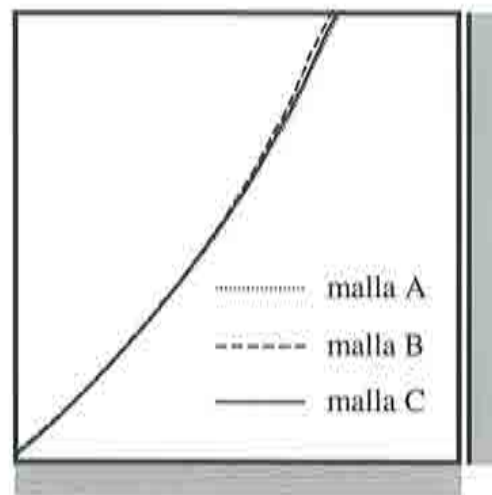


Figura 6.27 Líneas de discontinuidad del talud vertical.

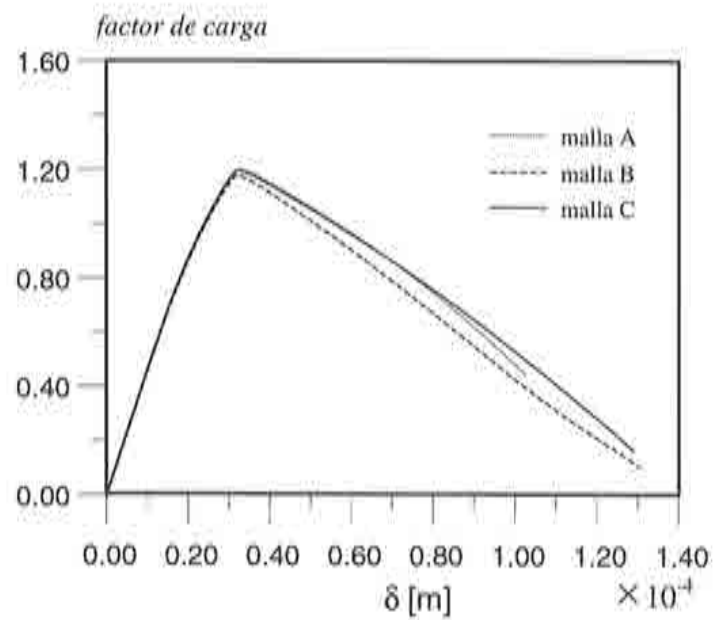


Figura 6.28 Evolución del factor de carga.

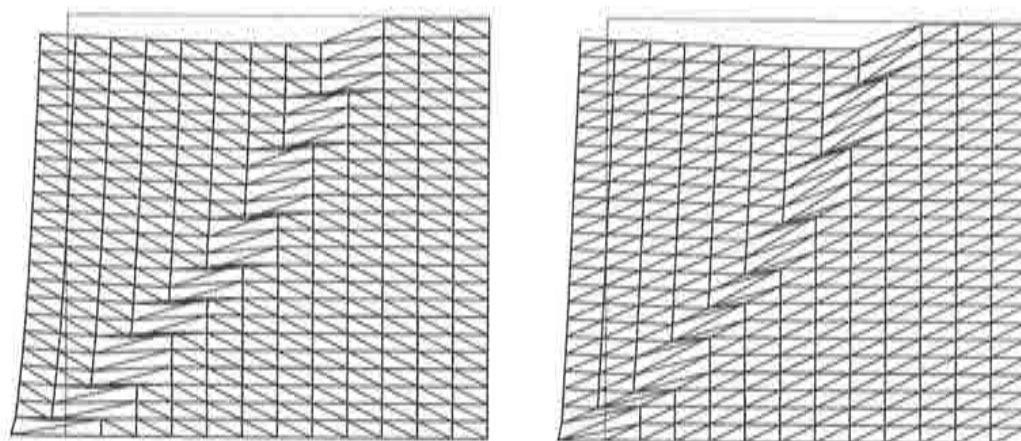


Figura 6.29 Configuraciones deformadas de las mallas estructuradas A y B.

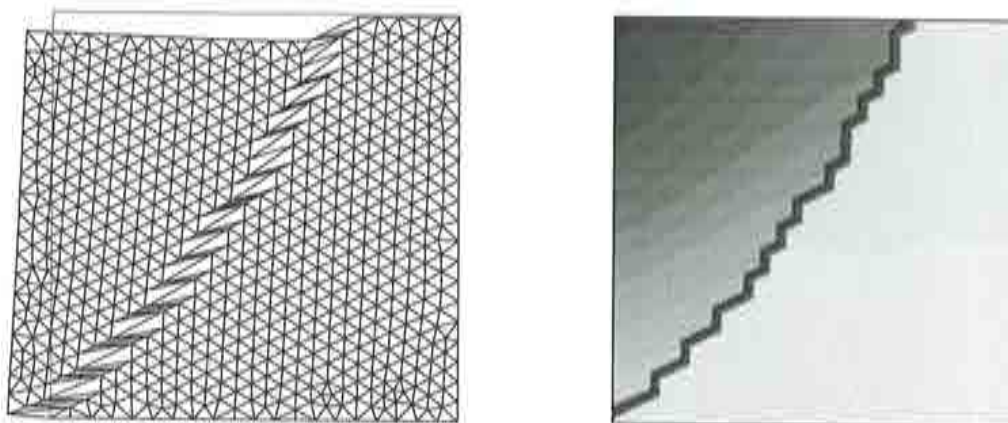


Figura 6.30 Resultados del talud vertical obtenidos con la malla C: configuración deformada y contornos de iso-desplazamientos.

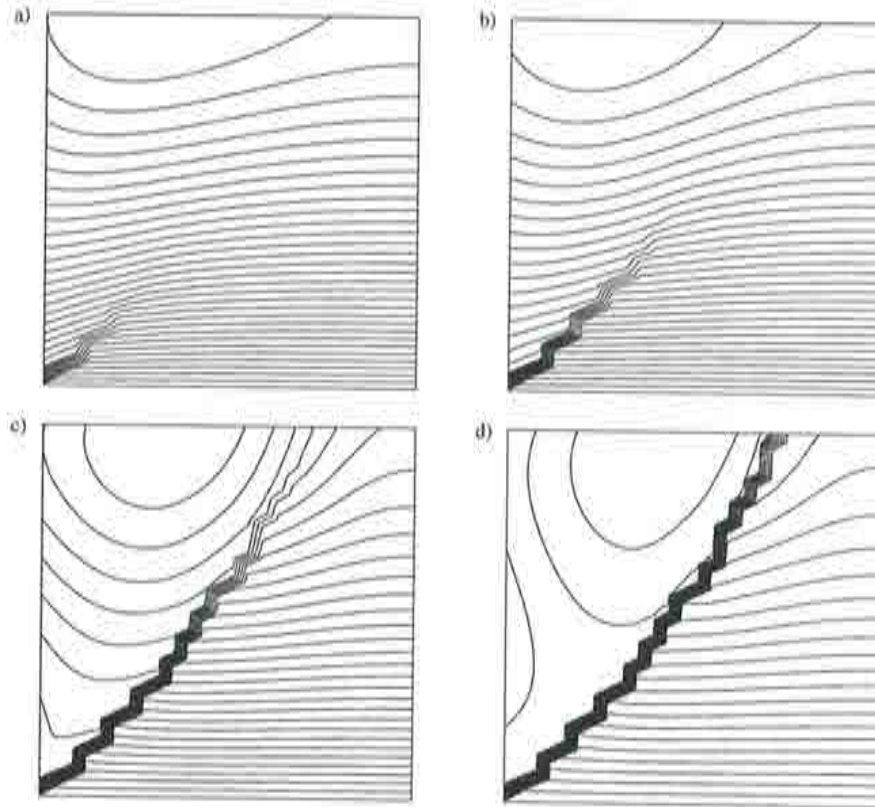


Figura 6.31 Contornos de iso-desplazamientos del talud vertical en diferentes instantes del proceso de carga.

En esta figura se puede apreciar también la forma casi circular de la línea de discontinuidad formada por los segmentos de rectas en cada elemento que la contiene. La figura 6.32.b muestra la configuración deformada (ampliada) de la malla en el instante del análisis, correspondiente a $\delta = 0.12 \text{ mm}$. Se puede observar que el efecto de dilatación es más acentuado en la parte inferior de la discontinuidad. Este hecho se debe a la forma regularizada de la superficie de fluencia (y del potencial plástico) en el eje positivo de tensiones media p (véase figura 6.24). Los contornos de iso-desplazamiento de la figura 6.30.c indican que el mecanismo de colapso corresponde aproximadamente a un movimiento de sólido rígido relativo entre las dos partes del cuerpo divididas por la discontinuidad. Este hecho es remarcado por los vectores de desplazamientos nodales presentados en la figura 6.32.d.

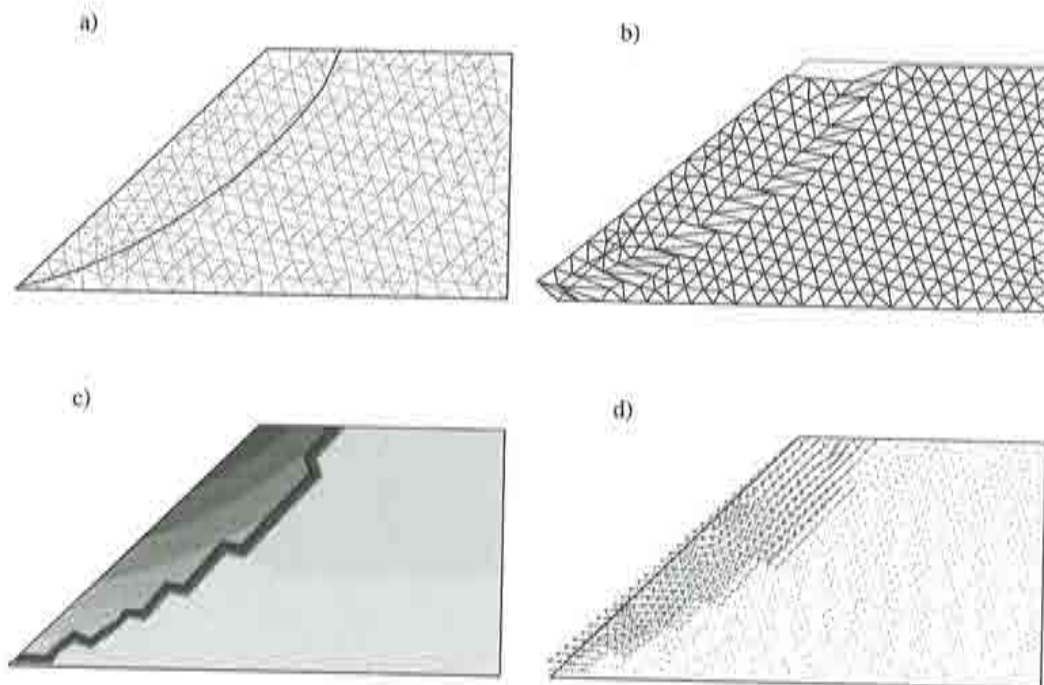


Figura 6.32 Resultados del talud inclinado a 45° .

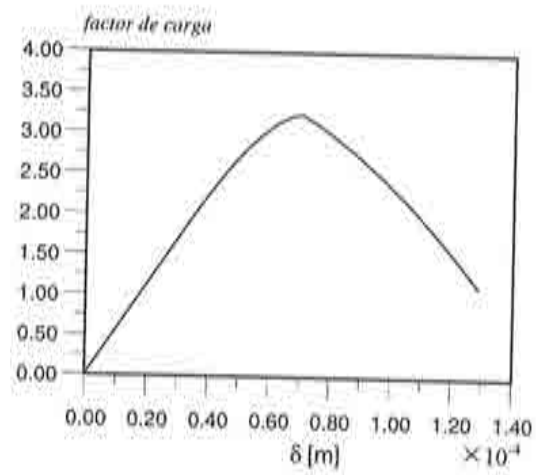


Figura 6.33 Evolución del factor de carga del talud inclinado a 45° .

La figura 6.33 muestra la curva factor de carga *versus* desplazamiento δ , donde se puede verificar un importante aumento de la carga crítica con respecto a la obtenida para el talud vertical.

6.3.2 Capa de suelo no drenado sometido a la presión ejercida por una zapata rígida

La simulación numérica que se presenta a continuación corresponde al problema geotécnico clásico de una capa de suelo no drenada sometida a la presión vertical ejercida por una zapata rígida. Se consideran impedidos los desplazamientos relativos en la interfaz zapata-suelo. Se analizan las situaciones de carga simétrica y no simétrica (figuras 6.34.a y 6.35.a). Zienkiewicz, Huang y Pastor (1995) analizaron estos ejemplos mediante la estrategia de remallado adaptable para capturar la formación de líneas de deslizamiento, considerando plasticidad perfecta.

En el presente análisis se considera la condición de deformación plana, eligiendo el desplazamiento vertical δ del punto de aplicación de la carga como variable de control del proceso de carga. Se ha adoptado $\nu = 0.45$ para simular la respuesta elástica y el modelo elasto-plástico de Von Mises (ecuaciones (6.4)) para describir el comportamiento no lineal del suelo no drenado. Con objeto de obtener grandes deformaciones plásticas antes de la formación de la discontinuidad, se ha empleado el modelo de localización del apartado 6.2.7, definiendo una rama de plasticidad perfecta para representar el comportamiento en la fase *pre-bifurcación* e imponiendo bifurcación cuando la deformación plástica equivalente alcanza el valor $\alpha = \alpha_B = 10 \sigma_y / E$. La zapata se considera elástica con un módulo de Young 10^4 veces superior al del suelo.

Se han empleado elementos finitos triangulares con interpolación cuadrática de desplazamientos regulares.

La figura 6.34.a muestra la geometría, la carga y los datos del material que se han considerado en el análisis. Se ha supuesto que los desplazamientos horizontales de los nodos pertenecientes a la línea de simetría están prescritos, evitando, de este modo, posibles mecanismos de colapso no simétricos que este tipo de carga puede generar. Se ha refinado la malla de elementos finitos en la región alrededor de las esquinas de la zapata con objeto de minimizar la influencia de la distribución singular de tensiones en la definición de la orientación de la línea de discontinuidad que se inicia en dicha región.

La figura 6.34.b muestra la configuración deformada de la malla de elementos finitos en la fase final del proceso de carga y la figura 6.34.c muestra los contornos

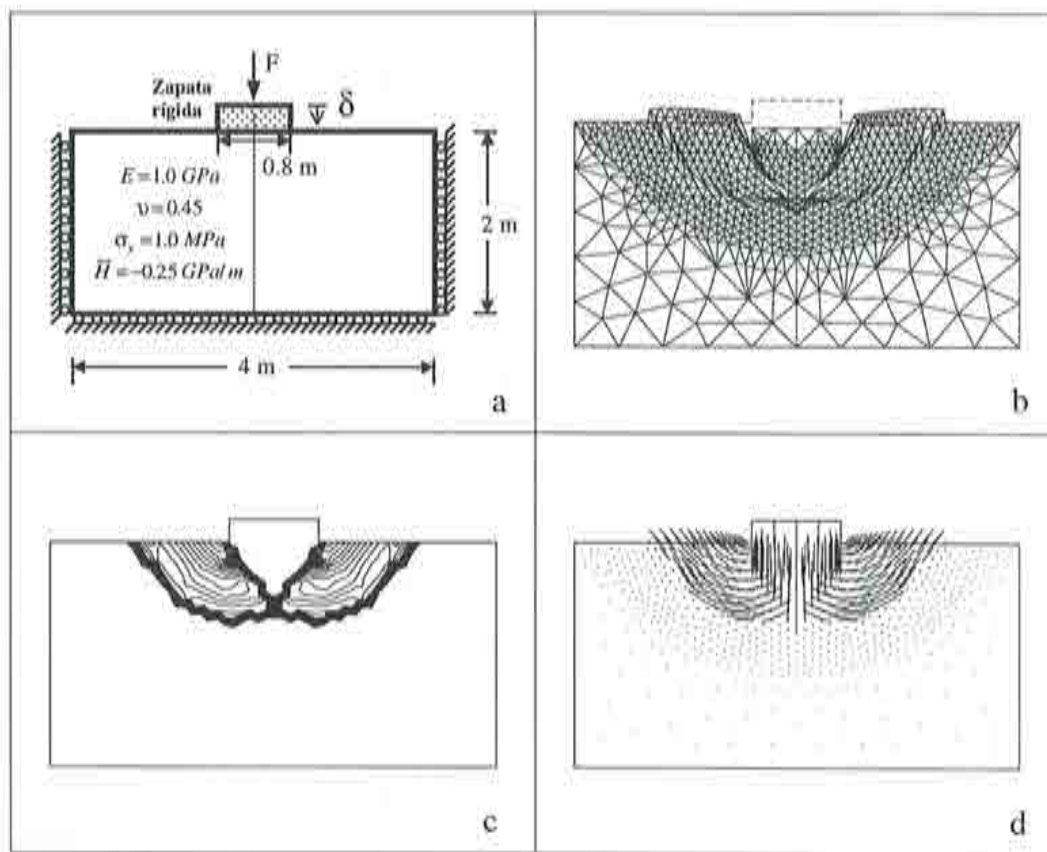


Figura 6.34 Resultados de la capa de suelo no drenado. Caso simétrico.

de iso-desplazamiento, donde se puede apreciar la existencia de dos líneas de deslizamiento que se inician en las esquinas de la zapata y se cruzan en un punto del eje de simetría. En la figura 6.34.d, mediante los vectores de desplazamientos nodales, se puede observar el mecanismo de colapso del problema. La cuña triangular de suelo bajo la zapata se desplaza verticalmente de modo solidario con ésta, induciendo el movimiento de expulsión de las dos cuñas laterales que deslizan con respecto al resto del sólido que permanece prácticamente indeformado.

La figura 6.35 corresponde al caso de carga excéntrica. La geometría y los parámetros del material son los mismos utilizados anteriormente. Las figuras 6.35.b, 6.35.c y 6.35.d muestran la configuración deformada de la malla, los contornos de iso-desplazamiento y los vectores de desplazamientos nodales, respectivamente, en la fase final. En este caso se desarrolla sólo una línea de discontinuidad, permaneciendo solidaria la zapata a una cuña de suelo con la

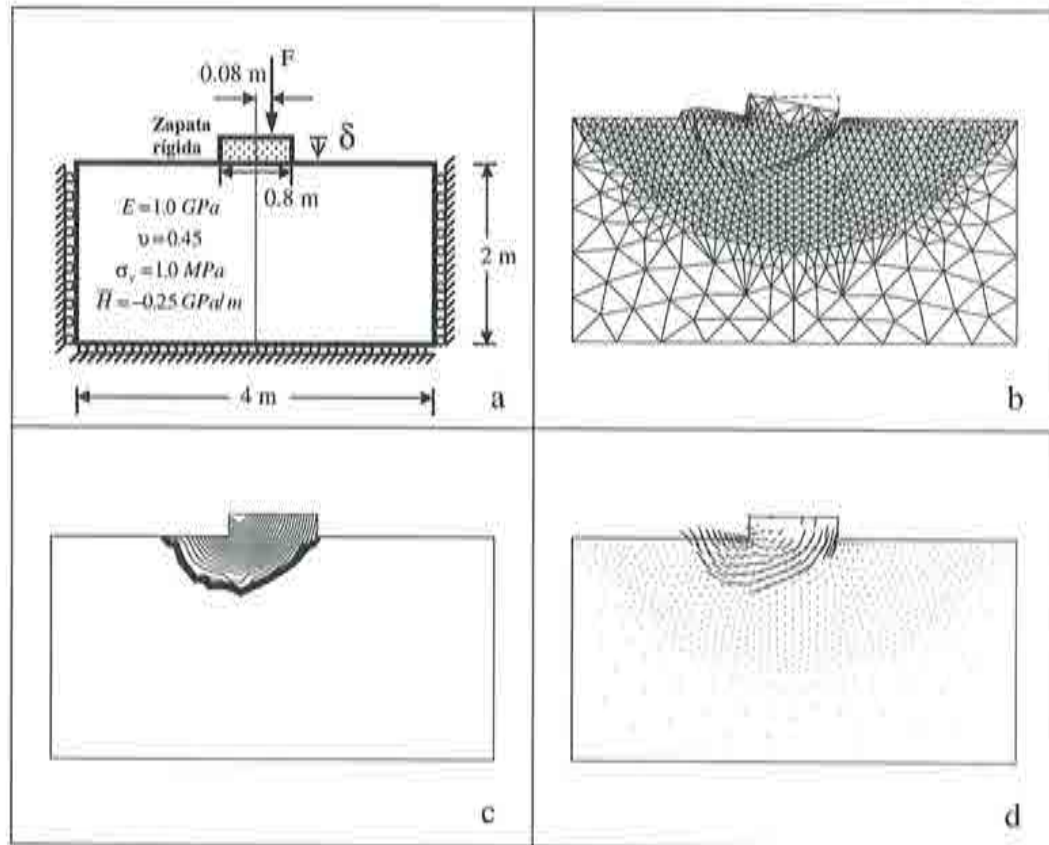


Figura 6.35 Resultados de la capa de suelo no drenado. Caso asimétrico.

forma aproximada de un semi-círculo, la cual experimenta una rotación respecto al resto del suelo que permanece casi indeformado.

Nótese que, en las dos situaciones de carga, las líneas de discontinuidad corresponden a líneas de deslizamiento en las que la componente normal del salto es despreciable respecto a la componente transversal, tal como predice el análisis de discontinuidad fuerte para el modelo elasto-plástico de Von Mises.

La figura 6.36 ilustra las curvas fuerza *versus* desplazamiento vertical δ para las dos situaciones de carga. En el caso simétrico, la carga crítica $F_{cr} = 2300 \text{ KN}$ es ligeramente inferior a la carga crítica teórica $F_{cr} = 2374 \text{ KN}$, predicha por Prandtl en 1921 (ver Chen 1975). La carga máxima correspondiente al caso excéntrico es aproximadamente un 25% inferior a la que se obtiene para el caso simétrico.

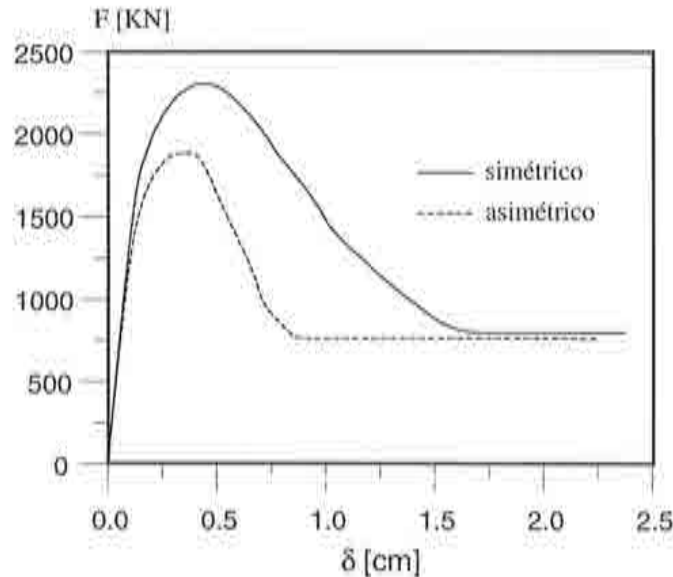


Figura 6.36 Evolución de la carga en los casos simétrico y asimétrico.

En la fase final de carga, los puntos materiales de la discontinuidad se encuentran en estado final de ablandamiento, en el que el límite elástico, delimitado por la superficie de fluencia, corresponde al eje de tensiones hidrostáticas ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$). La carga residual que se observa en la rama horizontal de la fase final de carga refleja la existencia de tensiones no nulas y de carácter volumétrico en la línea de discontinuidad. Como consecuencia, se produce carga plástica en régimen de plasticidad perfecta en los puntos externos a la línea de discontinuidad, indicando que el mecanismo de colapso debería ser más complejo, con presencia de líneas de discontinuidad adicionales o secundarias. El algoritmo utilizado para el trazado de la discontinuidad sólo ha permitido capturar la línea que predomina en el mecanismo de colapso.

Capítulo 7

EJEMPLOS NUMÉRICOS II: MEDIOS ELÁSTICOS DEGRADABLES

7.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se analiza la capacidad del modelo teórico y numérico de formación de discontinuidades fuertes propuesto para predecir el proceso de ruptura de piezas de hormigón empleando el modelo de degradación elástica escalar, detallado en el capítulo 4. Exceptuando el ensayo de tracción biaxial, se contrastan los resultados obtenidos numéricamente con los obtenidos experimentalmente.

7.2 MODELO ADOPTADO DE FORMACIÓN DE LA DISCONTINUIDAD FUERTE

En el modelo de localización implementado se induce la bifurcación en el instante del proceso de carga en el que las tensiones en un punto material alcanzan el límite elástico. Por ello, se ha considerado que el módulo de ablandamiento en el inicio del proceso de daño se corresponde con el valor crítico H_{crit} , definido en función del estado de tensiones/deformaciones en el instante de bifurcación (véase apartado 4.4.6). El valor del ancho de banda en el instante de bifurcación viene definido por la relación (ver ecuación (4.166))

$$h_B = \frac{H_{crit}}{\dot{H}} \quad (7.1)$$

Mediante la definición de las leyes de variación del ancho de banda, h , y del valor del módulo de ablandamiento intrínseco, $\dot{H}$, en función del umbral de degradación r^σ , se puede obtener la ley de evolución del módulo de ablandamiento de la forma (ver ecuación (4.166))

$$H(r^\sigma) = h(r^\sigma) \bar{H}(r^\sigma) \quad (7.2)$$

7.2.1 Modelo de ancho de banda variable

En los casos donde las condiciones correspondientes al régimen de discontinuidad fuerte no se verifican en el instante de bifurcación, se ha adoptado una ley de variación lineal del ancho de banda para la fase de transición, tal como se indica la figura 7.1.

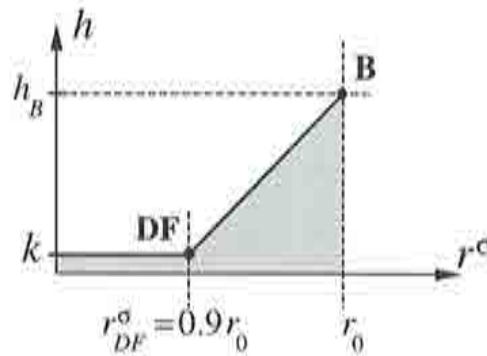


Figura 7.1 Modelo de variación del ancho de banda.

7.2.2 Ley de ablandamiento

Se ha verificado que el modelo de formación de discontinuidad fuerte considerando constante el módulo de ablandamiento intrínseco (ablandamiento lineal), $\bar{H}$, no es capaz de reproducir adecuadamente algunos de los resultados experimentales existentes, principalmente en lo que se refiere a la obtención de la carga pico.

Con objeto de ampliar el modelo propuesto y obtener mejores predicciones de los resultados experimentales, se ha propuesto una ley de variación del módulo de ablandamiento intrínseco, expresada como

$$\bar{H}(r^\sigma) = \bar{A} r^\sigma \quad (7.3)$$

donde el parámetro $\bar{A}$ es constante. Teniendo en cuenta que (véase ecuación (4.167))

$$\bar{H} = \frac{\partial r^\sigma}{\partial \bar{\alpha}} \quad (7.4)$$

sustituyendo (7.4) en (7.3) se llega a una ecuación diferencial cuya solución es la función exponencial

$$\boxed{r^\sigma = r_0 e^{\bar{A}\bar{\alpha}}} \quad (7.5)$$

En la solución (7.5) se ha considerado la condición de contorno $r^\sigma|_{\bar{\alpha}=0} = r_0$. La figura 7.2 ilustra las evoluciones del umbral r^σ en función del parámetro de endurecimiento $\bar{\alpha}$ para los casos de ablandamiento lineal ($\bar{H}$ constante) y exponencial ($\bar{H}$ variable).

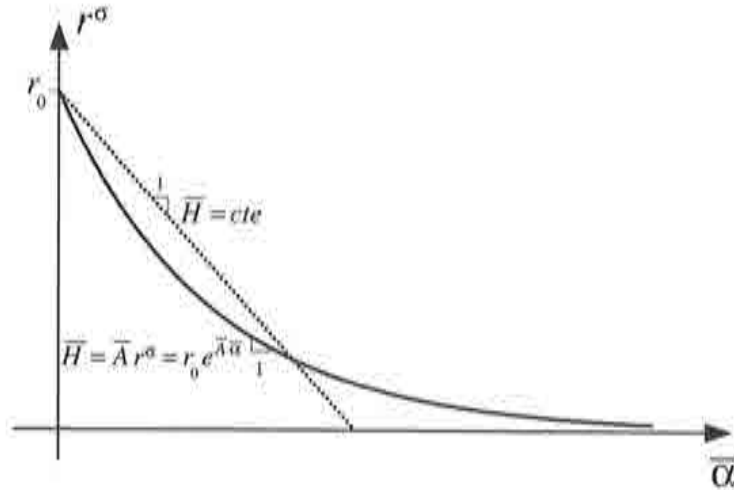


Figura 7.2 Posibles leyes de ablandamiento.

Como se ha detallado en el apartado 4.5.5, para el modelo de degradación asociado, la energía de fractura correspondiente a la situación en la cual la bifurcación se produce en el límite elástico en régimen de discontinuidad fuerte ($\mathbf{Y} = \mathbf{B} = \mathbf{DF}$) viene expresada por el área bajo las curvas de la figura 7.2, es decir (véase ecuación (4.177))

$$G_f = \int_{t_B}^{\infty} \mathbf{t} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket dt = \int_{\bar{\alpha}_B=0}^{\infty} r^\sigma d\bar{\alpha} \quad (7.6)$$

Para el caso de ablandamiento exponencial de la ecuación (7.5), la expresión (7.6) resulta

$$G_f = -\frac{r_0}{\bar{A}} \quad (7.7)$$

donde se concluye que el parámetro $\bar{A}$ puede considerarse, al igual que $\bar{H}$, una propiedad del material que depende de la energía de fractura y del umbral de degradación inicial:

$$\bar{A} = -\frac{r_0}{G_f} \quad (7.8)$$

Para el caso de ablandamiento lineal se tiene

$$\bar{H} = -\frac{r_0^2}{2G_f} \quad (7.9)$$

7.3 ENSAYO DE TRACCIÓN BIAIXIAL

Considérese una probeta sometida a tracción biaxial representada en la figura 7.3, donde se indican también los datos utilizados. La figura 7.4 muestra las trayectorias de tensiones en el plano $\sigma_1 - \sigma_2$ del espacio de tensiones principales correspondientes al caso de tracción simple ($f_V/f_H = 1/0$) e tracción biaxial con $f_V/f_H = 2/1$, obtenidas utilizando una malla no estructurada formada por elementos finitos triangulares con interpolación lineal de los desplazamientos regulares. Se ha supuesto estado plano de tensiones y se ha adoptado el criterio de degradación sólo a tracción, es decir (véase ecuación (4.149))

$$\bar{\tau}(\sigma) = \sqrt{\sigma^+ : C^{\epsilon^{-1}} : \sigma^+} \quad (7.10)$$

Los puntos indicados por **Y**, **B** y **DF** corresponden, respectivamente, al inicio del proceso de degradación, bifurcación y al inicio del régimen de discontinuidad fuerte. La parte sombreada de la figura representa la región del espacio de tensiones donde existe una dirección normal a la línea de discontinuidad, **n**, según la cual se verifica la condición de discontinuidad fuerte (ver condición (4.169))

$$m_{tt} = \varepsilon_{tt} = 0 \quad (7.11)$$

Por tanto, en dicha región la bifurcación puede ocurrir con $H = 0$, o sea, directamente en régimen de discontinuidad fuerte ($\mathbf{B} = \mathbf{DF}$).

Observación 7.1 Como la condición de discontinuidad fuerte (7.11) no depende del criterio de degradación elegido, la región sombreada, donde la bifurcación puede ocurrir en régimen de discontinuidad fuerte ($\mathbf{B} = \mathbf{DF}$), es la misma para cualquier superficie de degradación. Nótese también que dicha región es bastante amplia y, por consiguiente, la bifurcación puede ocurrir en régimen de discontinuidad fuerte sin la necesidad de la fase de transición en gran parte de los casos.

En la figura 7.4 se puede apreciar que, para el caso de tracción simple, la trayectoria de tensiones parte del punto $\mathbf{O}$ y alcanza la superficie de degradación en un punto que pertenece a la región sombreada. En este caso, la bifurcación ocurre en régimen de discontinuidad fuerte $\mathbf{B} = \mathbf{DF}$. Por otro lado, en la situación correspondiente a tracción biaxial, el punto de contacto de la trayectoria de tensiones con la superficie de degradación se produce fuera de la zona sombreada, donde la condición de discontinuidad fuerte no se verifica para ninguna dirección de $\mathbf{n}$. En esta situación, la bifurcación ($\mathbf{B}$) ocurre en régimen de discontinuidad débil con $h = h_B \neq 0$ y, por consiguiente, el régimen de discontinuidad fuerte tiene lugar sólo después de la fase de transición.

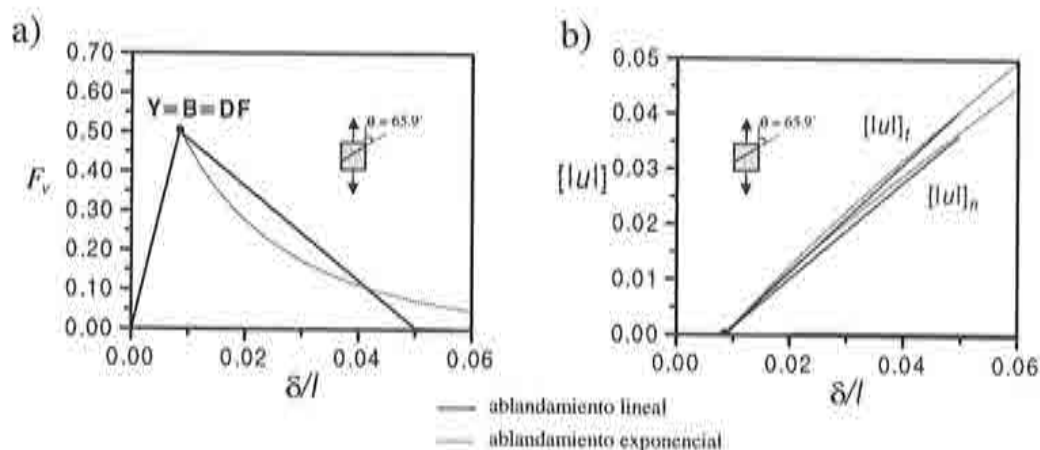


Figura 7.5 Evolución de las variables del problema (tracción simple; tensión plana)

Las figura 7.5 muestra la evolución de la fuerza vertical aplicada y de las componentes de los saltos para el caso de tracción simple, considerando leyes

de ablandamiento lineal y exponencial. Nótese que, por tratarse de un problema donde el campo de tensiones/deformaciones es homogéneo, el comportamiento *post*-pico de las curvas fuerza *versus* desplazamiento de la figura 7.5.a reproduce la ley de ablandamiento adoptada. En la figura 7.5.b se puede verificar que la formación de la discontinuidad ocurre en modo mixto, puesto que las componentes transversal y normal del salto presentan la misma orden de magnitud.

La figura 7.6 muestra la posición de la línea de discontinuidad sobre la malla de elementos finitos, la configuración deformada y los contornos de iso-desplazamientos en el final del proceso de carga, cuando las tensiones se encuentran totalmente relajadas. Nótese que la formulación de elementos finitos ha reproducido exactamente el desplazamiento de sólido rígido relativo entre las dos partes de la probeta.

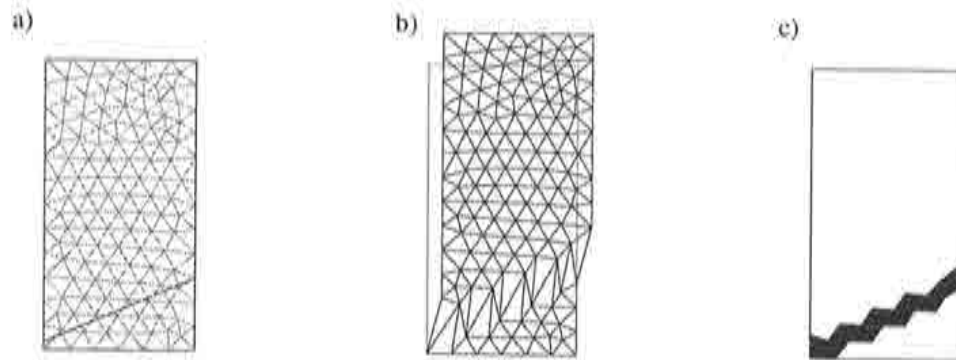


Figura 7.6 Resultados del ensayo de tracción simple.

7.4 ENSAYOS DE FRACTURA DEL HORMIGÓN

En los ejemplos que siguen, se ha evaluado el valor del umbral de daño r_0 en función de la resistencia a tracción, f_t , y del módulo de elasticidad del hormigón, E , especificados en el ensayo experimental, mediante la particularización de la expresión (7.10) para el caso de tracción uniaxial, obteniendo

$$r_0 = \frac{f_t}{\sqrt{E}} \quad (7.12)$$

Los valores de $\tilde{A}$ (ablandamiento exponencial) y $\tilde{H}$ (ablandamiento lineal) se han evaluados en función del umbral r_0 y de la energía de fractura G_f , de acuerdo con las expresiones (7.8) y (7.9), respectivamente.

7.4.1 Flexión de viga entallada sometida a fuerzas en tres puntos (*three point notched beam*)

La figura 7.7 muestra la geometría las propiedades materiales de la viga de hormigón que se ha elegido para el análisis de fractura en modo I. Dichos datos se basan en los valores experimentales obtenidos por Peterson (1981).

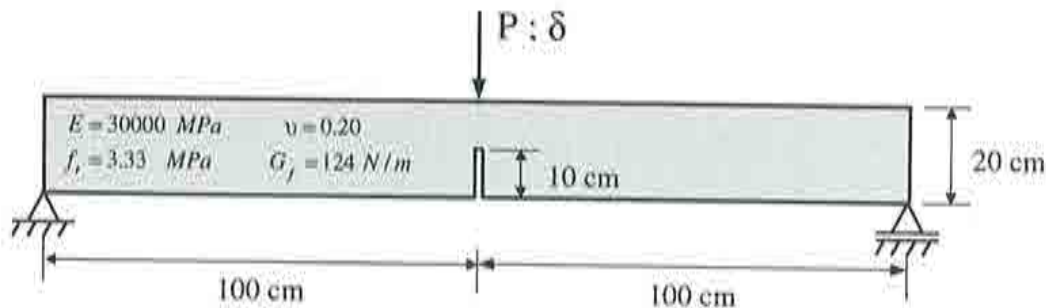


Figura 7.7 Ensayo de fractura en modo I.

Tanto para el ensayo experimental como para el análisis numérico se ha impuesto un desplazamiento vertical creciente en el centro de la viga. Para la discretización espacial se ha empleado una malla de elementos finitos triangulares con interpolación lineal de los desplazamientos regulares, densificada en la región cercana a la entalla (ver figura 7.9). El análisis numérico se ha llevado a cabo suponiendo estado de tensión plana y empleando leyes de ablandamiento lineal y exponencial.

En la figura 7.8 se puede apreciar la comparación entre las curvas de carga *versus* desplazamiento obtenidas experimental y numéricamente para distintas leyes de ablandamiento. El resultado obtenido empleando la ley de ablandamiento exponencial ha predicho muy satisfactoriamente los resultados experimentales. Por otro lado, el empleo de la ley de ablandamiento lineal ha generado una curva fuera del rango de los resultados experimentales. Nótese que, en este caso, la carga pico así como el comportamiento *post*-pico de la respuesta estructural del problema es muy sensible a ley de variación del módulo de ablandamiento intrínseco $\tilde{H}$.

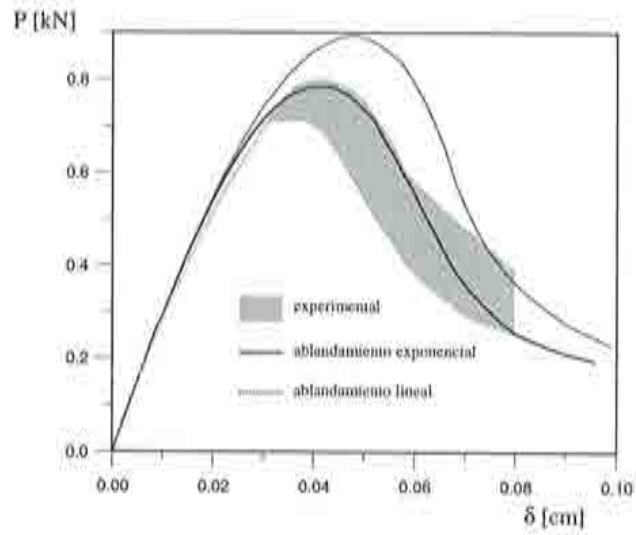


Figura 7.8 Curvas de carga *versus* desplazamiento obtenidas experimental y numéricamente.

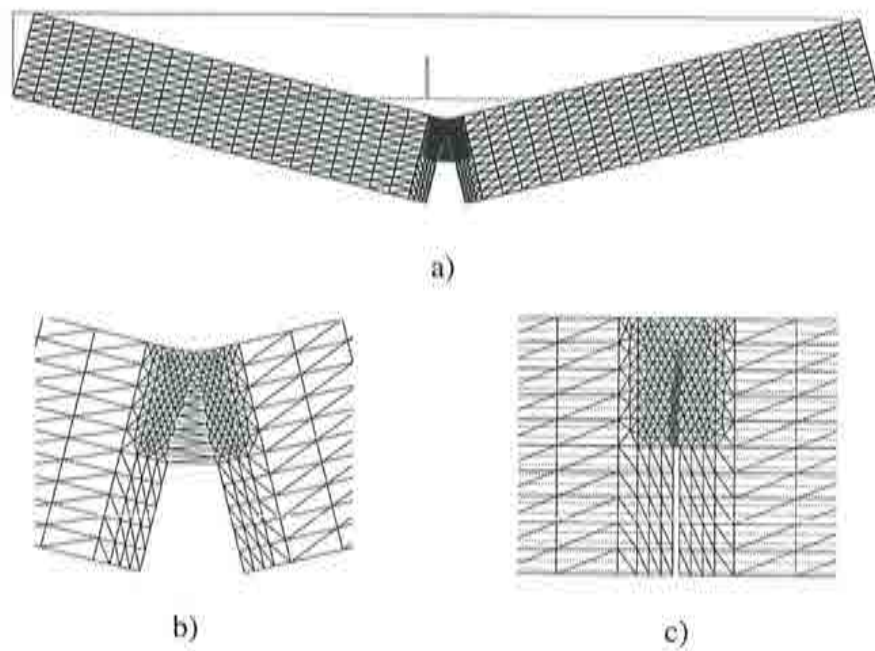


Figura 7.9 Resultados del ensayo de fractura en modo I.

En las figuras 7.9.a y 7.9.b se puede apreciar la malla de elementos finitos deformada en el instante final del proceso de carga. Nótese que la formación de la discontinuidad sigue una trayectoria aproximadamente vertical con claro predominio de apertura en modo I. La figura 7.9.c muestra los contornos de iso-desplazamientos horizontales, donde se puede observar que, prácticamente, toda la deformación se concentra en los elementos que contienen la línea de discontinuidad.

7.4.2 Flexión de viga entallada sometida a fuerzas en cuatro puntos (*four point notched beam*)

Para analizar el caso de fractura en modo mixto se ha elegido el ensayo de flexión de la viga entallada sometida a fuerzas aplicadas en cuatro puntos, como ilustra la figura 7.10. Diversos investigadores han analizado experimental y numéricamente este tipo de ensayo (Arrea y Ingraffea 1982; Rots *et al.* 1985; Rots 1991; Carpinteri *et al.* 1993; Bhattacharjee y Léger 1994, Oller 1988). Los datos elegidos para el estudio del modelo están presentados en la figura 7.10 y corresponden al ensayo experimental realizado por Arrea y Ingraffea (1982). Se ha empleado una malla no estructurada formada por elementos finitos triangulares con interpolación lineal de los desplazamientos regulares y se ha supuesto estado plano de tensión. Se ha considerado que las piezas de acero utilizadas para transferir la carga a la viga se comportan elásticamente, presentando un módulo de elasticidad cien veces superior al de la viga.

Los resultados experimentales se obtuvieron mediante el control del desplazamiento vertical relativo δ entre los labios de la entalla (ver figura 7.10). El análisis numérico se ha llevado a cabo mediante el control de la componente vertical del desplazamiento del labio derecho de la entalla.

Se ha considerado sólo la ley de ablandamiento exponencial, adoptando la variación del módulo de ablandamiento intrínseco, $\bar{H}$, de acuerdo con la expresión (7.3). El parámetro $\bar{A}$ se ha obtenido mediante la ecuación (7.8).

En la figura 7.11 se exponen los resultados experimentales y numéricos correspondientes a la evolución de carga P aplicada en función del desplazamiento relativo δ , donde se puede apreciar la satisfactoria concordancia de la predicción numérica con los resultados experimentales.

La figura 7.12 muestra las líneas de discontinuidad obtenidas experimentalmente y mediante la formulación numérica propuesta, donde se puede observar la excelente predicción numérica de la posición de la línea de discontinuidad.

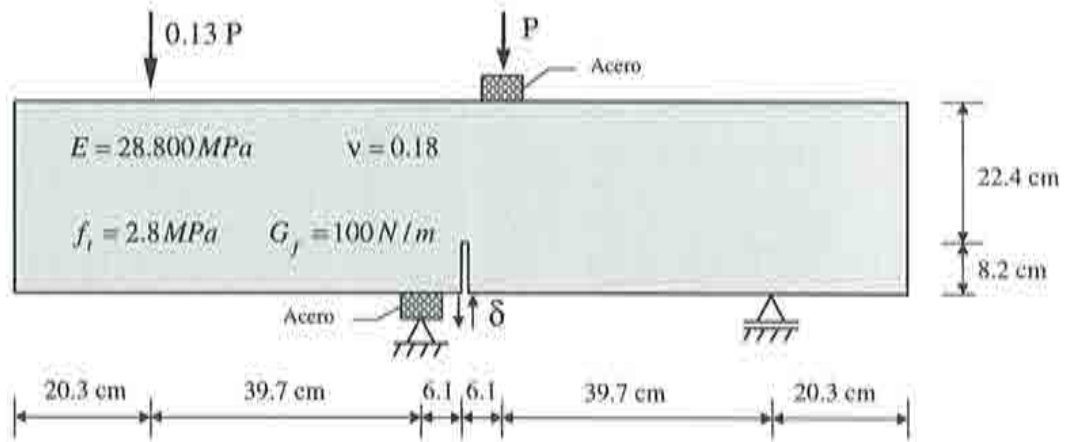


Figura 7.10 Ensayo de fractura en modo mixto.

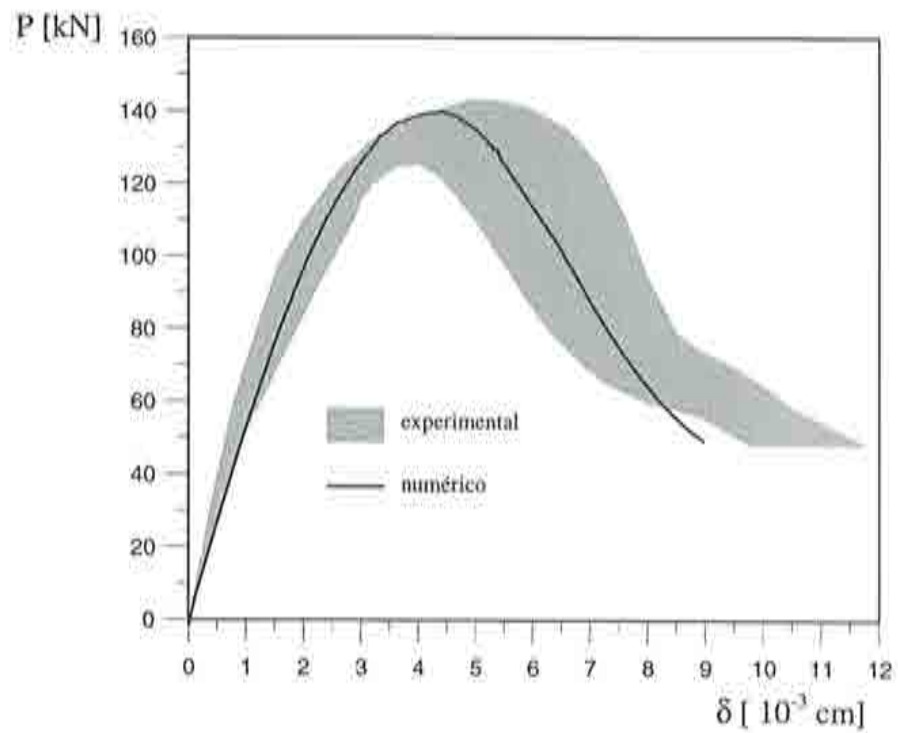


Figura 7.11 Curvas de carga versus desplazamiento obtenidas experimental y numéricamente.

En la figura 7.13 se muestra la malla de elementos finitos deformada en la etapa final del proceso de carga. En la figura 7.13.b se presentan los contornos de iso-desplazamientos horizontales en la malla deformada. Nótese que prácticamente

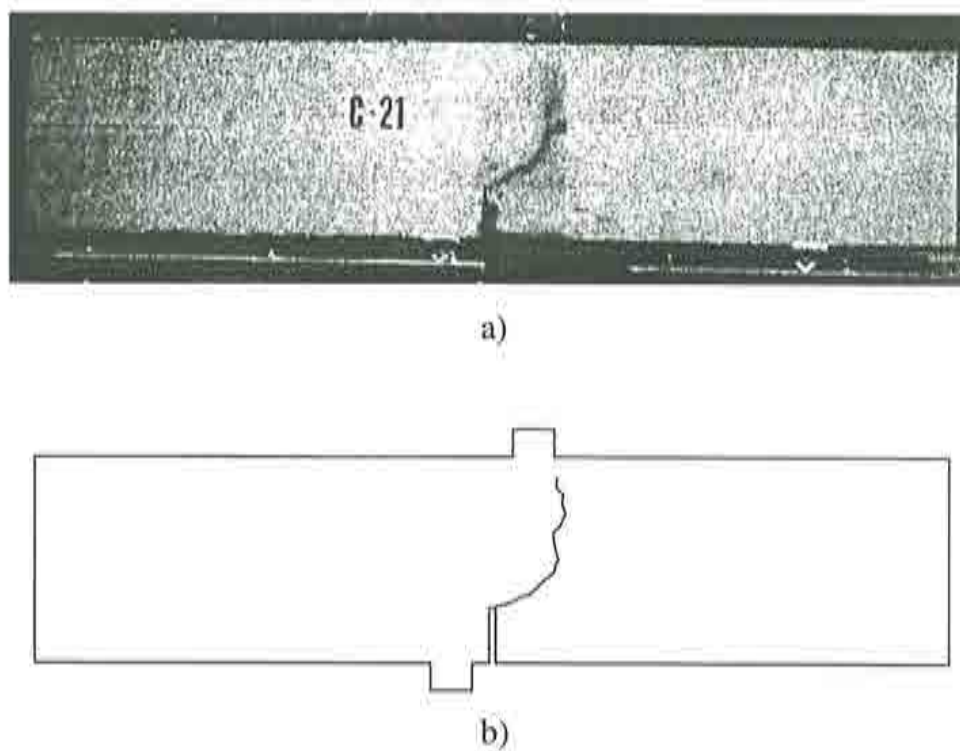


Figura 7.12 Trayectoria de la línea de discontinuidad: a) resultado experimental. b) predicción numérica.

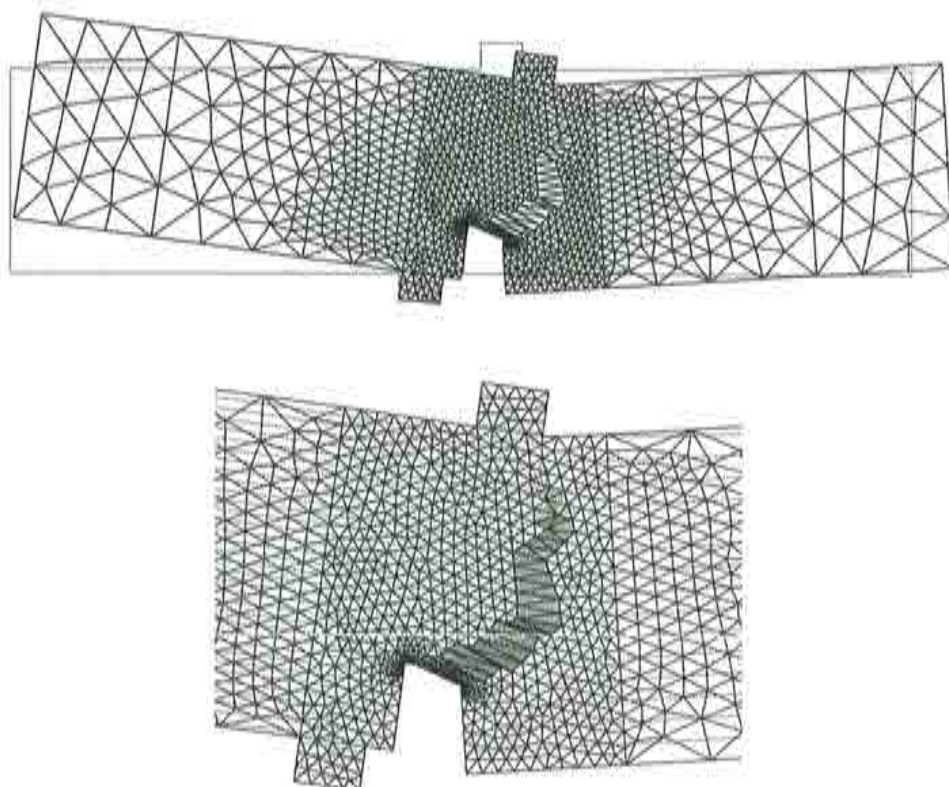


Figura 7.13 Resultados numéricos del ensayo de fractura en modo mixto.

Capítulo 8

CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

8.1 RESUMEN DE LA INVESTIGACIÓN DESARROLLADA

En el presente trabajo de investigación se formula un modelo analítico y numérico para simular el fenómeno de localización de deformaciones en medios elasto-plásticos y elástico-degradables sometidos a procesos de carga cuasi-estáticos. El estudio se ha centrado en problemas de una y dos dimensiones, considerando deformaciones infinitesimales.

Desde el punto de vista del modelo analítico propuesto se destacan las siguientes características:

- El modo de localización discontinuo se describe mediante la cinemática de discontinuidad fuerte que se caracteriza por la presencia de una superficie (o línea en 2D) de discontinuidad en la que el campo de desplazamientos es discontinuo y el campo de deformaciones compatible es no acotado. A su vez, el modo de localización continuo se caracteriza por la presencia de una banda de localización, delimitada por dos superficies (o líneas en 2D) de discontinuidad en las que el campo de deformaciones es discontinuo (superficies de discontinuidad débil), mientras el campo de desplazamientos permanece continuo. El ancho de dicha banda de localización es objeto del denominado modelo de *ancho de banda variable*.
- Se considera que el modo de localización discontinuo corresponde al caso límite del modo continuo, cuando el ancho de banda tiende a cero.
- El comportamiento del material se describe mediante ecuaciones constitutivas incrementales convencionales de medios continuos y el inicio de la localización se caracteriza por la pérdida de elipticidad de dichas ecuaciones (bifurcación discontinua), indicada por la singularidad del tensor de localización. Se ha demostrado que para que el problema tenga sentido físico y matemático después de la bifurcación, en general la localización sólo puede producirse en modo continuo (régimen de discontinuidad débil), alcanzando el modo

más estable, es decir, el modo de localización discontinuo (régimen de discontinuidad fuerte), en un instante posterior a la bifurcación. Por tanto, el modo de localización continuo se considera, en general, precursor del modo discontinuo, requiriéndose un mecanismo de transición entre ambos modos de localización.

- Para describir las cinemáticas correspondientes a los modos de localización se propone una cinemática representativa que, a través de una estructura única, describe las principales características de ambos modos de localización. Dicha cinemática representativa o regularizada se caracteriza por presentar los campos de desplazamientos y de deformaciones discontinuos en una superficie (o línea en 2D) de discontinuidad de dimensión nula, de tal modo que la discontinuidad débil corresponde a deformaciones incompatibles acotadas, mientras que la discontinuidad fuerte se caracteriza por deformaciones compatibles no acotadas en la superficie de discontinuidad.
- Se ha propuesto la variación de la variable h , que representa el ancho de banda, como el mecanismo para inducir el modo de localización discontinuo a partir del modo de localización continuo. La evolución del ancho de banda se establece en función del llamado *módulo de ablandamiento intrínseco o discreto*, considerado como una propiedad del material. A partir del análisis de discontinuidad fuerte, se identifican las características necesarias para que el campo de deformaciones no acotadas sea compatible con las ecuaciones constitutivas del medio continuo (tensiones *versus* deformaciones). Para inducir el régimen de discontinuidad fuerte ($h \rightarrow 0$), se propone una ley de reducción de h en función de la evolución de la variable interna tipo tensión de los puntos de la discontinuidad.

Desde el punto de vista numérico, la formulación del método de elementos finitos que se ha propuesto presenta las siguientes características principales:

- Está basada en el *método de deformaciones mejoradas* (Simó y Rifai 1990) por el hecho de añadir al campo de deformaciones "regulares" del elemento un término *mejorado* incompatible con el propósito de representar los efectos de una banda de localización en el interior del elemento. La construcción del término mejorado se orienta hacia la representación de la cinemática representativa de los modos de localización continuo y discontinuo del modelo teórico propuesto. Se añade a las ecuaciones de equilibrio convencionales en forma débil un conjunto de ecuaciones que determinan el sistema de ecuaciones que, junto a los desplazamientos "regulares", presenta los modos de deformación mejorados como incógnitas del problema. Las variaciones admisibles del término *mejorado* del campo de deformaciones, que desempeñan

el papel de funciones de prueba de las ecuaciones débiles adicionales, se definen de manera que impongan en forma débil la condición de equilibrio en la interfaz de discontinuidad (continuidad del vector tracción).

- Se emplea la regla generalizada de punto medio para la integración en el "tiempo" del término de la tasa de deformaciones en el que interviene la variable $h(t)$, que se asocia al valor del ancho de banda en un instante t del proceso de carga.
- Se emplea un esquema de cuadratura modificada para la integración espacial de las variables del problema, basado en la introducción de un punto de integración adicional para representar las variables en el interior de la discontinuidad.
- Se utiliza un algoritmo de trazado de la línea de discontinuidad a lo largo del proceso de carga, con objeto de obtener las informaciones necesarias para la construcción del campo de deformaciones mejoradas y definir el conjunto de elementos atravesados por la línea de discontinuidad. La propagación de la línea de discontinuidad a lo largo del proceso de carga se define en función del análisis de bifurcación discontinua, donde se obtienen la dirección y el instante de localización en el dominio de cada elemento atravesado por la línea de discontinuidad.

8.2 CONCLUSIONES

El modelo teórico y numérico propuesto ha sido analizado en profundidad y se ha empleado en la simulación numérica del proceso de localización en diversos ejemplos.

Con respecto al modelo analítico, se destacan las siguientes conclusiones:

- Mediante el análisis de discontinuidad fuerte se demuestra que la cinemática de discontinuidad fuerte impone restricciones adicionales al estado de tensión-deformación de los puntos de la discontinuidad, de tal forma que las relaciones constitutivas convencionales entre tensiones y deformaciones se transforman en relaciones del tipo discreto entre tracciones y saltos de desplazamientos en la interfaz de discontinuidad. Dicha característica ha sido comprobada mediante ejemplos numéricos. Este hecho establece la conexión con los modelos teóricos discretos de localización, basados en relaciones constitutivas del tipo discreto. El módulo de ablandamiento intrínseco desempeña un papel importante en las relaciones constitutivas discretas y, mediante su relación con el concepto de

energía de fractura, se establece la correlación con los principios de la mecánica de fractura no lineal.

- Como las relaciones constitutivas discretas (tracción *versus* salto) emergen de las relaciones constitutivas del tipo continuo (tensiones *versus* deformaciones) cuando se alcanza el régimen de discontinuidad fuerte, no es necesario deducirlas ni introducirlas en el modelo. Las relaciones constitutivas del tipo continuo describen el comportamiento del sólido durante los regímenes continuo y discontinuo. Este hecho es una de las ventajas de la aproximación, puesto que la deducción de dichas relaciones discretas puede resultar una tarea difícil para algunos modelos constitutivos del medio continuo.

En lo que se refiere al modelo numérico para la simulación del proceso de localización, se destacan las siguientes conclusiones:

- La formulación de elementos finitos basado en el método de las deformaciones mejoradas es capaz de reproducir adecuadamente las principales características predichas por el modelo analítico propuesto. Se ha constatado que, a pesar de generar matrices de rigidez no simétricas, las definiciones del término *mejorado* del campo de deformaciones y de su variación admisible reproducen adecuadamente los efectos de los modos de localización continuo y discontinuo y imponen la condición de continuidad de tracciones dentro y fuera de la banda de localización. Dichos ingredientes resultan fundamentales para la correcta aproximación numérica de problemas de localización de deformaciones.
- El algoritmo de trazado de la discontinuidad a lo largo del proceso de carga es imprescindible para la construcción adecuada de los términos *mejorados* del campo de deformaciones.
- En los ejemplos numéricos con condiciones de contorno más complejas, se ha verificado la necesidad de la utilización de algoritmos de detección de la línea de discontinuidad más sofisticados, con el objetivo de reproducir mecanismos de colapso más complejos, constituidos por varias líneas de discontinuidad. En algunos ejemplos numéricos, se ha constatado la representación incompleta del mecanismo de colapso a través de la incapacidad de llevar el proceso de carga hasta la relajación completa de las tensiones, debido a la presencia de tensiones residuales.
- Se han obtenido resultados satisfactorios empleando elementos finitos triangulares con interpolación lineal y cuadrática de los desplazamientos "regulares" y elementos cuadrilaterales con interpolación bilineal de dichos desplazamientos, demostrando que la formulación de elementos finitos propuesta puede utilizar cualquier tipo de elemento finito estándar como

elemento base de la aproximación:

- La formulación de elementos finitos propuesta proporciona mejoras importantes en el tema de la objetividad de la respuesta con respecto a la discretización adoptada, hasta el punto de poder afirmarse que algunas respuestas obtenidas son totalmente independientes del tamaño y de la orientación de la malla.
- Se ha verificado que la etapa de formación de la línea de discontinuidad es la más crítica con respecto a la estabilidad numérica, exigiendo pequeños pasos de tiempo para lograr convergencia en el proceso incremental e iterativo del análisis no lineal. Cabe mencionar que la utilización de matrices de rigidez consistentes también ha sido una valiosa herramienta a este respecto.

8.3 PRINCIPALES APORTACIONES

Con base en lo expuesto anteriormente, las principales aportaciones realizadas en la presente investigación pueden resumirse en:

- Desarrollo de un nuevo modelo para describir el fenómeno de la localización, capaz de establecer la conexión entre los modelos teóricos continuos y discretos, aplicándolo al análisis de medios elasto-plásticos y de medios elásticos degradables. Desde el punto de vista de los modelos teóricos continuos, el modelo propuesto permite la descripción del comportamiento del material después de la bifurcación, sin abandonar los conceptos macroscópicos de tensión y deformación. Desde el punto de vista de los modelos teóricos discretos, el modelo es capaz de establecer la conexión entre la ley constitutiva del tipo continuo que describe el comportamiento del medio continuo y la ley constitutiva del tipo discreto que describe el comportamiento de la discontinuidad.
- Desarrollo de una formulación de elementos finitos capaz de representar el proceso del colapso estructural por localización, sin la necesidad de utilizar técnicas de remallado adaptable o mallas pre-diseñadas en función de la posición estimada *a priori* de la zona de localización. Como se ha podido constatar en los ejemplos presentados, dicha formulación proporciona importantes avances con respecto a la dependencia de la discretización espacial por elementos finitos. Otro aspecto importante es que la formulación propuesta es aplicable a cualquier tipo de elemento finito estándar.

8.4 FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

A partir de los estudios realizados en el presente trabajo de investigación, se pueden plantear nuevas líneas de investigación orientadas hacia la extensión y profundización de algunos aspectos que todavía continúan abiertos:

- Extensión de la aproximación a tres dimensiones. A pesar de considerar sólo casos en una y dos dimensiones, el presente trabajo contiene los desarrollos teóricos y numéricos que lo hacen extensible a tres dimensiones.
- Extensión de la aproximación para que pueda representar mecanismos de colapso más complejos, constituidos por varias líneas de discontinuidad. Para este propósito sería necesario el desarrollo de algoritmos de trazado de líneas de discontinuidades más sofisticados, así como la extensión de la formulación de elementos finitos con el objeto de representar más de una línea de discontinuidad en el dominio de un elemento.
- Extensión a otras ecuaciones constitutivas capaces de describir comportamientos materiales más complejos e incluso comportamientos dependientes de la velocidad de carga.
- Extensión a grandes deformaciones con objeto de representar de modo más realista las intensas deformaciones en la zona de localización.
- En el presente trabajo se ha propuesto un modelo de variación de la banda en función de la variable interna tipo tensión para explorar las potencialidades de la aproximación en establecer el vínculo entre los modos de localización continuo y discreto. Naturalmente, se requiere más investigación de carácter experimental y teórico con objeto de desarrollar criterios más apropiados para la definición del modelo que gobierna la transición entre los distintos modos de localización.

REFERENCIAS

- E. C. Aifantis. On the microstructural origin of certain inelastic models. *J. Engr. Mat. Tech. ASME*, 106:326–334, 1984.
- F. Armero. Localized anisotropic damage of brittle materials. In D. Owen, E. Onate, and H. E., editors, *Proc. International Conference on Computational Plasticity V*, Barcelona, 1997. CIMNE.
- F. Armero and Garikipati. Recent advances in the analysis and numerical simulation of strain localization in inelastic solids. In D. Owen, E. Onate, and H. E., editors, *Proc. International Conference on Computational Plasticity V*, pages 547–561, Barcelona, 1995. CIMNE.
- F. Armero and K. Garikipati. An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids. *Int. J. Solids Structures*, 33(20):2863–2885, 1996.
- M. Arrea and A. R. Ingraffea. Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete. *Dept. of Struct. Engrg. Rep. 81-13*, 1982.
- Z. Bazant. Instability, ductility and size effect in strain softening concrete. *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, 102:331–344, 1976.
- Z. Bazant. Scaling laws in mechanics of failure. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 119(9):1828–1844, 1993.
- Z. Bazant and B. H. Oh. Crack band theory for fracture of concrete. *Matériaux et Constructions*, 93(16):155–177, 1983.
- Z. P. Bazant and T. B. Belytschko. Wave propagation in a softening bar: Exact solution. *J. Engr. Mech., ASCE*, 111:381–389, 1985.
- Z. P. Bazant, T. B. Belytschko, and T. P. Chang. Continuum theory for strain softening. *J. Engr. Mech., ASCE*, 110:1666–1692, 1984.
- Z. P. Bazant and F. B. Lin. Non-local yield limit degradation. *Int. J. Num. Meth. Engr.*, 26:1805–1823, 1988.
- T. Belytschko, J. Fish, and A. Bayliss. The spectral overlay on finite elements for problems with high gradients. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 81:71–89, 1989.

- T. Belytschko, J. Fish, and B. Engelmann. A finite element with embedded localization zones. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engr.*, 70:59-89, 1988.
- S. Bhattacharjee and P. Leger. Application of nlfm models to predict cracking in concrete gravity dams. *Journal of Structural Engineering ASCE.*, 120:1255-1271, 1994.
- D. Bigoni and T. Hueckel. Uniqueness and localization - i. associative and non-associative elastoplasticity. *Int. J. Solids Structures*, 28(2):197-213, 1991.
- P. Bocca, A. Carpinteri, and S. Valente. Size effects in the mixed mode crack propagation: Softening and snap-back analysis. *Engineering Fracture Mechanics*, 35:159-170, 1990.
- P. Bocca, A. Carpinteri, and S. Valente. Mixed mode fracture of concrete. *Int. J. Solids Structures*, 27(9):1139-1153, 1991.
- R. Borst, L. Sluys, H. Mühlhaus, and J. Pamín. Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation. *Engineering Computations*, 10:99-121, 1993.
- R. D. Borst. Simulation of strain localization: A reappraisal of the cosserat continuum. *Engr. Comp.*, 8:317-332, 1991.
- R. D. Borst and H. B. Mühlhaus. Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 35:521-539, 1992.
- I. Carol, E. Rizzi, and K. Willam. A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface. *Int. J. Solids Struc.*, 31:2835-2865, 1994.
- A. Carpinteri, S. Valente, G. Ferrara, and G. Melchiorri. Is mode fracture energy a real material property? *Computers & Structures*, 48(3):397-413, 1993.
- M. Cervera, E. Hinton, and O. Hassan. Non linear analysis of reinforced plate and shell structures using 20-nodes isoparametric brick elements. *Computers and Structures*, 25:845-870, 1987.
- A. Chen and W. F. Chen. Constitutive relations for concrete. *J. Eng. Mech. Div.*, 101:465-481, 1975.
- W. Chen. *Limit Analysis and soil plasticity*. Elsevier, Amsterdam, 1975.
- W. F. Chen. *Plasticity in reinforced concrete*. McGraw-Hill, 1982.
- E. Cosserat and F. Cosserat. *Théorie des Corps Deformables*. Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, Paris, 1909.
- M. A. Crisfield. A fast incremental iterative solution procedure that handles "snap through". *Computers and Structures*, 13:55-62, 1981.

- D. C. Drucker and P. W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Q. J. Appl. Math.*, 10:157–164, 1952.
- E. Dvorkin and A. Assanelli. 2d finite element with displacement interpolated embedded localization lines: The analysis of fracture in frictional materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 90:829–844, 1991.
- E. Dvorkin, C. no, A.M, and G. Gioia. Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *Int. Journ. Num. Meth. Engng.*, 30:541–564, 1990.
- J. Fish and T. Belytschko. General finite elements procedures for problems with high gradients. *Computers and Structures*, 35:309–319, 1990.
- A. Gens and D. M. Potts. Critical state models in computational geomechanics. *Eng. Comput.*, 5:178–197, 1987.
- J. Hadmard. *Leçons sur la propagation des ondes et les equations de l'hydrodynamique*. Hermann, Paris, 1903.
- R. Hill. General theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 6:236–249, 1958.
- R. Hill. Acceleration waves in solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 10:1–16, 1962.
- A. Hillerborg. *Numerical Methods to Simulate Softening and Fracture of Concrete*. 1985.
- A. Hillerborg, M. Modeer, and P. Petersson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6, 1976.
- T. Hueckel and G. Maier. Incremental boundary value problems in presence of coupling of elastic and plastic deformations: a rock mechanics oriented theory. *Int. J. Solids Struct.*, 13:1–15, 1977.
- A. R. Igraffea and V. Saouma. *Numerical modeling fracture propagation in reinforced and plain concrete*. 1984.
- M. Jirásek. Embedded crack models for concrete fracture. In de Borst et. al., editor, *Proc. EURO-C 1998 Computer Modelling of Concrete Structures*, pages 291–300, Rotterdam, 1998. Balkema.
- L. M. Kachanov. *Introduction to continuum damage mechanics*. Nijhoff, Dordrecht, Netherlands, 1986.
- M. Klisinski, K. Runesson, and S. Sture. Finite element with inner softening band. *ASCE, Journal of Engng. Mechanics*, 117(3):575–587, 1991.

- R. Larsson and Runesson. Cohesive crack models for semi-brittle materials derived from localization of damage coupled to plasticity. *Int. J. Fracture*, 69:899–911, 1995.
- R. Larsson, K. Runesson, and M. Akesson. Embedded localization band based on regularized strong discontinuity. In D. Owen, E. Onate, and H. E., editors, *Proc. International Conference on Computational Plasticity IV*, pages 599–610, Barcelona, 1995. CIMNE.
- R. Larsson, K. Runesson, and N. Ottosen. Discontinuous displacement approximation for capturing plastic localization. *Int. Journ. Num. Meth. Engng.*, 36:2087–2105, 1993.
- R. Larsson, K. Runesson, and S. Sture. Embedded localization band in undrained soil based on regularized strong discontinuity - theory and fe-analysis. *Int. J. Solids Structures*, 33(20-22):3081–3101, 1996.
- J. Lemaitre and C. J. L. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1988.
- B. Loret and J. H. Prevost. Dynamic strain localization in elasto-(visco) plastic solids, parti. general formulation and one-dimensional examples. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 83:247–273, 1990.
- H. Lotfi and P. Shing. Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 38:1307–1325, 1995.
- J. Lubliner. *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing Company, London, 1990.
- G. Maier and T. Hueckel. Non-associated and coupled flow-rules of elastoplasticity for rock-like materials. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 16:77, 1979.
- L. E. Malvern. Printice Hall, 1969.
- J. Mandel. Conditions de stabilité et postulat de drucker. In J. Kravtchenko and P. Sirieys, editors, *Rheology and Soil Mechanics*, pages 58–68, Berlin, 1966. Springer.
- S. C. Mikhlin. *Variational methods in mathematical physics*. Macmillan, 1964.
- H. B. Mühlhaus and I. Vardoulakis. The thickness of shear bands in granular materials. *Géotechnique*, 37:271–283, 1987.
- A. Nacar, A. Needleman, and M. Ortiz. A finite element methods for analyzing localization in rate dependent solids at finite strains. *Comput. Methods Appl. Engng.*, 73:235–258, 1989.
- A. Nadai. volume I. McGraw-Hill, 1931.

- A. Needleman. Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 67:69–86, 1988.
- U. Ohlsson and T. Olofsson. Mixed-mode fracture and anchor bolts in concrete. analysis with inner softening bands. *Journal of Engineering Mechanics*, 123:1027–1033, 1997.
- J. Oliver. A consistent characteristic length for smeared cracking models. *Int. Journ. Num. Meth. Engng.*, 28:461–474, 1989.
- J. Oliver. Continuum modelling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models. *Computational Mechanics*, 17(1/2):49–61, 1995a.
- J. Oliver. Continuum modelling of strong discontinuities in solid mechanics. In D. Owen, E. Onate, and H. E., editors, *Proc. International Conference on Computational Plasticity IV*, pages 455–479, Barcelona, 1995b. CIMNE.
- J. Oliver. Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 1: Fundamentals. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 39(21):3575–3600, 1996a.
- J. Oliver. Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 2: Numerical simulation. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 39(21):3601–3623, 1996b.
- J. Oliver, M. Cervera, and O. Manzoli. On the use of j2 plasticity models for the simulation of 2d strong discontinuities in solids. In D. Owen, E. Onate, and H. E., editors, *Proc. International Conference on Computational Plasticity V*, pages 38–55, Barcelona, 1997. CIMNE.
- J. Oliver, M. Cervera, and O. Manzoli. Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach. *submitted to Int. J. of Plasticity*, 1998b.
- J. Oliver, M. Cervera, and O. L. Manzoli. *On the use of strain-softening models for the simulation of strong discontinuities in solids*. John Wiley and Sons Ltd (in press), 1998a.
- J. Oliver, M. Cervera, S. Oller, and J. Lubliner. Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. In N. B. et. al., editor, *SCI-C Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, pages 945–957, Swansea, 1990. Pineridge Press.
- J. Oliver and D. G. Pulido. On the use of strain-softening damage constitutive equations to model cracking of concrete. In de Borst et. al., editor, *Proc. EURO-C 1998 Computer Modelling of Concrete Structures*, pages 263–372, Rotterdam, 1998. Balkema.

- S. Oller. *Un modelo de daño continuo para materiales friccionales*, Ph. D. Thesis, PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España, 1988.
- M. Ortiz, Y. Leroy, and A. Needleman. A finite element method for localized failure analysis. *Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.*, 61:189–214, 1987.
- M. Ortiz and J. Quigley. Adaptive mesh refinement in strain localization problems. *Computer Methods in Appl. Mech. and Engrg.*, 90:781–804, 1991.
- N. Ottosen. Thermodynamic consequences of strain softening in tension. *J. Eng. Mech. ASCE*, 112:1152–1164, 1986.
- N. Ottosen and K. Runesson. Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity. *Int. J. Solids Structures*, 27(4):401–421, 1991.
- J. Pamin. *Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena*, Ph. D. Thesis, PhD thesis, Delft University of Technology, Delft, Netherlands, 1994.
- P. E. Petersson. Crack growth and development of fractures zones in plain concrete and similar materials. *Division of Building materials, Rep. No. 1006*, 1981.
- S. Pietruszczak and Z. Mróz. Finite element analysis of deformation of strain-softening materials. *Int. J. for numerical Meth. in Engng.*, 17:327–334, 1981.
- G. Pijaudier Cabot and Z. Bazant. Nonlocal damage theory. *Jour. Engng. Mech., A.S.C.E.*, 113:1512–1533, 1987.
- J. Planas and M. Elices. Nonlinear fracture of cohesive materials. *Int. J. of Fracture*, 51:139–157, 1992.
- W. J. M. Rankine. On the stability of loose earth. *Phil. Trans. R. Soc.*, 147:9–27, 1857.
- J. Rice. The localization of plastic deformation. In W. Koiter, editor, *Theoretical and Applied Mechanics, 14th IUTAM Congr.*, pages 207–220, Amsterdam, 1976. North-Holland.
- J. Rots. smeared and discret representation of localized fracture. *Int. J. Fracture*, 51:45–59, 1991.
- J. Rots, P. Nauta, G. M. A. Kusters, and J. Blaauwendraad. smeared crack approach an fracture localization in concrete. *HERON*, 30(1):48 pp., 1985.
- J. Rudinicki and J. Rice. Conditions for localization of deformations in pressure-sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 23:371, 1975.

- K. Runesson, N. Ottosen, and D. Peric. Discontinuous bifurcations of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain. *Int. J. of Plasticity*, 7:99–121, 1991.
- J. Simó and J. Oliver. A new approach to the analysis and simulation of strain softening in solids. In Z. Bazant, Z. Bittnar, and M. Jirásek, editors, *Fracture and Damage and Quasibrittle Structures*, pages 25–39. E&FN Spon, 1994.
- J. Simó and S. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *Int. Journ. Num. Meth. Engr.*, 29:1595–1638, 1990.
- J. C. Simó and F. Armero. Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Num. Meth. Engr.*, 33:1413–1449, 1992.
- J. C. Simó and T. J. R. Hughes. *Plasticity, viscoplasticity and viscoelasticity computational aspects*. Springer-Verlag (in preparation).
- J. C. Simó and J. W. Ju. Strain- and stress-based continuum damage models-i. formulation. *Int. J. Solids Struct.*, 23:821–840, 1997a.
- J. C. Simó and J. W. Ju. Strain- and stress-based continuum damage models-ii. formulation. *Int. J. Solids Struct.*, 23:841–869, 1997b.
- J. C. Simó, J. Oliver, and F. Armero. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, 12:277–296, 1993.
- L. J. Sluys and R. D. Borst. Wave propagation and localisation in a rate-dependent cracked medium: Model formulation and one-dimensional examples. *Int. J. Solids Struct.*, 29:2945–2958, 1992.
- P. Steinmann and K. Willam. Performace of enhanced finite element formulations in localized failure computations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engr.*, 90:845–867, 1991.
- P. Steinmann and K. William. Finite-element analysis of elastoplastic discontinuities. *Journal of Engineering Mechanics*, 120(11):2428–2442, 1994.
- T. Y. Thomas. *Plastic flows and fracture of solids*. Academic Press, New York, 1961.
- I. Vardoulakis. Bifurcation analysis of the plane rectilinear deformation on dry sand samples. *Int. J. Solids Structures*, 17(11):1085–1101, 1981.
- I. Vardoulakis, M. Goldscheider, and G. Gudehus. Formation of shear bands in sand bodies as a bifurcation problem. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 2:99–128, 1978.

- K. Willam, N. Bîćanić, and S. Sture. Constitutive and computational aspects of strain-softening and localization in solids. In K. A. Willam, editor, *Constitutive Equations: macro and computational aspects*, pages 845–867, New York, 1984.
- O. C. Zienkiewics and R. L. Taylor. *El método de los elementos finitos. Volumen 1: Formulación básica y problemas lineales*. CIMNE, Barcelona, 4^a edition, 1994a.
- O. C. Zienkiewics and R. L. Taylor. *El método de los elementos finitos. Volumen 2: Mecánica de sólidos y flúidos. Dinámica y no linealidad*. CIMNE, Barcelona, 4^a edition, 1994b.
- O. Zienkiewicz, M. Huang, and M. Pastor. Localization problems in plasticity using finite elements with adaptive remeshing. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 19:127–148, 1995.