

MODELO NUMÉRICO PARA EL ESTUDIO DINÁMICO DE UN ROTOR CON EJE AGRIETADO

P. SAAVEDRA*
D. BAQUEDANO*
y
L. SAN JUAN**

* *Departamento de Ingeniería Mecánica
Facultad de Ingeniería
Universidad de Concepción
Casilla 53-C, Concepción, Chile*

** *Departamento de Ingeniería Mecánica
Universidad de Bío-Bío
Casilla 5-C, Concepción, Chile*

RESUMEN

En este trabajo se presenta un análisis teórico de la dinámica de un sistema rotor–descansos con una grieta transversal en su eje. Con el objeto de poder utilizar programas estándares de elementos finitos se deduce utilizando los principios de la mecánica de fractura, la matriz de rigidez para un elemento de eje con una grieta transversal que se abre y cierra. Los cambios de rigidez generados por el respiro de la grieta son expresados a través de una función armónica. Se analiza la influencia de la grieta en las vibraciones transversales y longitudinales de un rotor sencillo perfectamente balanceado. Los resultados obtenidos son comparados con resultados de trabajos teóricos y experimentales publicados anteriormente. Se muestra cómo las componentes espectrales de los desplazamientos vibratorios 1Ω , 2Ω y 3Ω varían con la velocidad del rotor. Esto es un buen indicador a usar para diagnosticar un eje agrietado en los sistemas de monitoreo de vibraciones.

SUMMARY

A theoretical analysis of the dynamics of a rotor–bearing system with a transversely cracked shaft is presented. In order to model the system for standard finite element method, the stiffness matrix of a shaft element with an opening/closing crack is derived based on fracture mechanics. The change of stiffness due to the crack breathing is expressed through an harmonica function. The influence of crack on the transversal and longitudinal vibration of a simple balanced rotor is analyzed. Results obtained by this analysis procedure are compared with previous analytical and experimental works published. From the FFT analysis of the displacement responses, it is shown how the 1Ω , 2Ω and 3Ω components excited varied with speed rotor. This provides good indicator for diagnosing a cracked shaft from a vibration monitoring system.

Recibido: Abril 1994

INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas más serios en las máquinas de alta velocidad, tales como turbinas a vapor, compresores centrífugos, generadores, bombas etc., es el riesgo de una falla catastrófica debido a la generación de grietas transversales en sus ejes. Aunque los ejes de estas máquinas son cuidadosamente diseñados, construidos con materiales de alta calidad y minuciosamente inspeccionados, tanto antes de su puesta en servicio como periódicamente durante su vida operativa, hay antecedentes de costosas detenciones de plantas producidas por el colapso de ejes agrietados en este tipo de máquinas llegando incluso a la destrucción total de ellas¹³. Sin duda, la detección a tiempo de una grieta en el eje de una máquina crítica evitará una falla que podría ser muy cara y peligrosa.

Los sistemas de detección *en línea* de fallas de máquinas, es decir, mientras la máquina está funcionando, aumentan su seguridad y tienen la ventaja económica obvia de realizar la vigilancia de su condición mecánica mientras ella está produciendo. Dentro de las técnicas usadas para esto, la más utilizada en los últimos años es el análisis de las vibraciones medidas en los descansos de la máquina.

La presencia de una grieta transversal en un eje altera la flexibilidad de este y por lo tanto el comportamiento dinámico del rotor. En consecuencia, para identificar una grieta como eventual causante de estas alteraciones es necesario conocer las variaciones de flexibilidad en el tiempo que introduce la grieta cuando el eje rota.

Para el estudio analítico del problema es necesario formular un modelo de grieta que permita representar adecuadamente la flexibilidad local que ella introduce en el eje. Para ello se han utilizado diferentes procedimientos: Dirr y Schmalhorst⁴ e Iman *et al.* usan una modelación por elementos finitos en tres dimensiones con comportamiento elástico del material; Ostachowicz y Krawczuk¹⁵ usan una modelación por elementos finitos triangulares e introducen las propiedades elastoplásticas del material, Changhe *et al.*³ usan un método analítico-experimental; Papadopoulos y Dimarogonas¹⁸, Kikidis y Papadopoulos¹¹, Jun y Eun¹⁰, Huang *et al.*⁷ y otros investigadores usan conceptos de la mecánica de fractura.

En estructuras donde las cargas estáticas son importantes, como normalmente ocurre en los ejes de máquinas horizontales, las grietas se abren y cierran regularmente, por lo que se requiere formular un modelo que considere el "respiro" de la grieta o su forma de apertura/cierre. Los modelos de apertura/cierre de la grieta utilizados en la literatura se pueden clasificar en dos grupos: 1) modelos que determinan la flexibilidad que introduce la grieta en el eje para cada grado de apertura de esta y 2) modelos que determinan las flexibilidades extremas cuando la grieta está totalmente abierta y totalmente cerrada y proponen una ley predeterminada de variación entre estos valores. La forma de la grieta que consideran los modelos propuestos es un segmento circular (Figura 1) cuantificado por su profundidad a y cuya orientación está definida por el eje ξ perpendicular al fondo de la grieta.

Dentro de los modelos del primer grupo Jun y Eun¹⁰ determinan para cada posición angular del eje, qué parte de la grieta está abierta o cerrada analizando si los factores de intensidad de esfuerzos bajo las cargas a que está sometida la sección son de tracción o compresión. Change *et al.*³ determinan la parte de la grieta que está abierta o cerrada ubicando la posición del eje neutro de la sección agrietada de acuerdo a la dirección

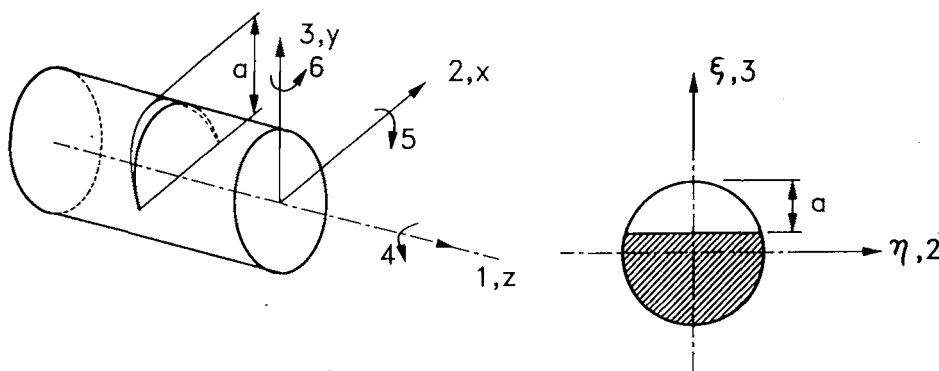


Figura 1. Sección agrietada del eje

instantánea del momento flector que actúa sobre ella.

Sin embargo, con el fin de simplificar el análisis, la mayoría de los autores utilizan modelos del segundo grupo. El modelo más sencillo es el tipo “escalón o interruptor” que considera que la grieta pasa abruptamente de completamente abierta a completamente cerrada y viceversa. Iman *et al.*⁹ consideran la grieta completamente abierta para los ángulos ϕ entre -90° y 90° y completamente cerrada para los ángulos ϕ entre 90° y 270° , donde ϕ es el ángulo que forma el eje ξ respecto al desplazamiento transversal de la sección agrietada. Inagaki *et al.*⁸ establecen que en rotores horizontales, donde el desplazamiento transversal del rotor debido a su peso es mucho mayor que el desplazamiento debido a las fuerzas dinámicas, la grieta estará completamente abierta o cerrada según si el eje ξ esté bajo o sobre la horizontal respectivamente. Sekhar y Prabhu²¹ consideran que la grieta está completamente abierta cuando el desplazamiento de la sección agrietada en la dirección ξ es positivo y completamente cerrada cuando este desplazamiento es negativo.

Otra función utilizada para representar las variaciones de rigidez durante el proceso de cierre/apertura de la grieta es la variación armónica de ella en cada revolución del eje. Mayes y Davies¹² suponen que la rigidez varía en forma sincrónica con la velocidad del rotor a través de la función $(1 - \sin \phi)$, donde $\phi = \Omega t$ y Ω es la velocidad de giro del rotor. Papadopoulos y Dimarogonas¹⁷ expresan esta variación en forma sincrónica con la velocidad de rotación mediante una serie de cuatro funciones armónicas de frecuencias $n\Omega t$ con $n = 1, 2, 3$ y 4 .

Respecto a trabajos publicados sobre análisis dinámico de rotores con ejes agrietados, la mayor parte de ellos se refiere a rotores de Jeffcott o de Laval con el eje agrietado en su plano medio entre descansos y con acoplamiento de movimientos debido a la grieta sólo en algunos grados de libertad. Estas simplificaciones permiten establecer expresiones analíticas para evaluar la rigidez del eje agrietado. Jun y Eun¹⁰ consideran los efectos del acoplamiento de los movimientos de flexión, y Papadopoulos y Dimarogonas¹⁶ consideran los efectos del acoplamiento de los movimientos de flexión y el movimiento longitudinal.

Sin embargo, para rotores más complejos con cambios de sección y con grietas en cualquier parte de ellos se requiere de otro método de solución resultando muy

adecuada una formulación por elementos finitos. Mayes y Davies¹² utilizan un elemento de diámetro reducido para cuantificar la disminución de rigidez que introduce la grieta, aproximación también usada por Grabowski⁶ e Inagaki *et al.*⁸. Nelson y Nataraj¹⁴ usan esta misma aproximación, pero le agregan una función escalón para considerar el efecto de cierre/apertura de la grieta. Sin embargo, el uso de un elemento de eje con diámetro reducido para representar la flexibilidad introducida por la grieta no considera los acoplamientos de movimientos longitudinales y de torsión con la flexión y el corte que la grieta produce.

En el presente artículo se desarrolla la matriz de rigidez para un elemento de eje agrietado. Se considera el caso general con seis grados de libertad, lo que permite analizar todos los posibles acoplamientos de movimientos que la grieta produce. Este elemento es incorporado como un elemento más en una formulación por elementos finitos con el objeto de estudiar el comportamiento dinámico de un rotor con eje agrietado. Se simula la respuesta vibratoria de un rotor desbalanceado y de uno perfectamente balanceado para diferentes velocidades de giro.

DESCRIPCIÓN DEL MODELO DE GRIETA

Se considera un elemento de eje cilíndrico que tiene una grieta transversal en forma de un segmento de círculo (Figura 1). La sección agrietada está sometida a las siguientes fuerzas internas: fuerza axial P_1 , fuerzas de corte P_2 y P_3 ; momento de torsión P_4 y momentos de flexión P_5 y P_6 .

La presencia de la grieta en el elemento de eje genera una variación local de la flexibilidad. En el borde de la grieta bajo cargas se produce una concentración de esfuerzos que genera una mayor deformación en torno a ella y por lo tanto un aumento local de la flexibilidad. Esta flexibilidad adicional introducida por la grieta puede ser calculada utilizando la mecánica de fractura.

La grieta genera desplazamientos localizados adicionales u_i de la sección a la derecha de la grieta respecto a la sección a la izquierda de ella de forma similar a una rótula. Suponiendo un comportamiento elástico de la grieta, Tada *et al.*²² calcularon para el caso de una sección rectangular de ancho unitario, altura h y profundidad de grieta α , como el achurado en la Figura 2, el desplazamiento adicional u_i que genera la grieta en la dirección i bajo la acción de una fuerza P_i a través de la ecuación

$$u_i = \frac{\partial}{\partial P_i} \int_0^{\alpha_x} I(\alpha) d\alpha \quad (1)$$

donde $I(\alpha) = \partial U_T / \partial \alpha$ es la función densidad de energía de deformación relajada por la grieta

$$I(\alpha) = \frac{1}{E'} \left[\left(\sum K_{Ij} \right)^2 + \left(\sum K_{IIj} \right)^2 + m \left(\sum K_{IIIj} \right)^2 \right] \quad (2)$$

donde $E' = E$ para esfuerzos planos y $E' = E/(1 - \nu^2)$ para deformación plana. E es el módulo de elasticidad, $m = 1 + \nu$, ν es la razón de Poisson, K_{ij} son los factores de intensidad de esfuerzos debido a la grieta para los modos de fractura $i = I, II$ y III ,

de apertura, deslizamiento y desgarro respectivamente y para los índices de la carga $j = 1, 2, \dots, 6$.

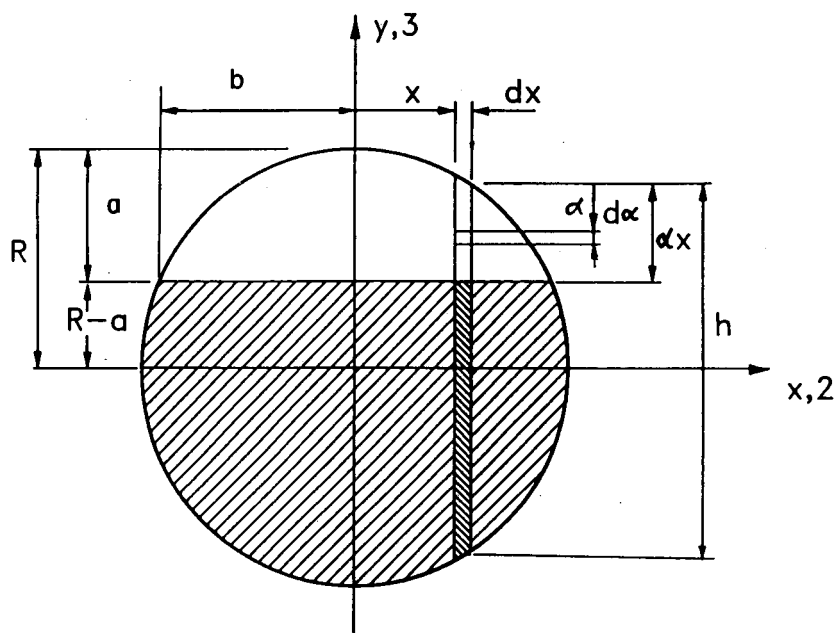


Figura 2. Geometría de la sección agrietada

Los coeficientes de la flexibilidad localizada debido a la grieta por unidad de ancho para una sección transversal rectangular son entonces determinados mediante el teorema de Castigliano

$$C_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial P_j} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \left[\int_0^{\alpha_x} I(\alpha) d\alpha \right] \quad (3)$$

Para el caso de una sección circular agrietada esta puede ser considerada compuesta por una serie de secciones rectangulares elementales como la achurada en la Figura 2. Como la densidad de energía es un escalar, se puede integrar a lo largo de toda la superficie agrietada. De esta forma, los coeficientes de la flexibilidad adicional debida a la grieta en la sección circular pueden calcularse por

$$C_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \left[\int_{-b}^b \int_0^{\alpha_x} I(\alpha) d\alpha dx \right] \quad (4)$$

Los coeficientes de intensidad de esfuerzos K_{ij} de la ecuación (2) son conocidos de la literatura¹⁶

$$\begin{aligned}
 K_{I1} &= \sigma_1 \sqrt{\pi \alpha} F_1(\alpha/h), & \sigma_1 &= P_1/(\pi R^2) \\
 K_{I5} &= \sigma_5 \sqrt{\pi \alpha} F_1(\alpha/h), & \sigma_5 &= P_5 \cdot y/(\pi R^4/4) \\
 K_{I6} &= \sigma_6 \sqrt{\pi \alpha} F_2(\alpha/h), & \sigma_6 &= P_6 \cdot x/(\pi R^4/4) \\
 K_{I2} &= K_{I3} = K_{I4} = 0 \\
 \\
 K_{II3} &= \sigma_3 \sqrt{\pi \alpha} F_3(\alpha/h), & \sigma_3 &= k P_3/(\pi R^2) \\
 K_{II4} &= \sigma_4 \sqrt{\pi \alpha} F_3(\alpha/h), & \sigma_4 &= P_4 \cdot x/(\pi R^4/2) \\
 K_{II1} &= K_{II2} = K_{II5} = K_{II6} = 0 \\
 \\
 K_{III2} &= \sigma_2 \sqrt{\pi \alpha} F_4(\alpha/h), & \sigma_2 &= k P_2/(\pi R^2) \\
 K_{III4} &= \sigma_4 \sqrt{\pi \alpha} F_4(\alpha/h), & \sigma_4 &= P_4 \cdot y/(\pi R^4/2) \\
 K_{III1} &= K_{III3} = K_{III5} = K_{III6} = 0
 \end{aligned} \tag{5}$$

donde

$$\begin{aligned}
 F_0(\alpha/h) &= [\tan(\pi \alpha/2h)/(\pi \alpha/2h)]^{0.5} / \cos(\pi \alpha/2h) \\
 F_1(\alpha/h) &= F_0(\alpha/h) \{0.752 + 2.02(\alpha/h) + 0.37(1 - \sin(\pi \alpha/2h))^3\} \\
 F_2(\alpha/h) &= F_0(\alpha/h) \{0.923 + 0.199[1 - \sin(\pi \alpha/2h)]^4\} \\
 F_3(\alpha/h) &= [1.122 + 0.561(\alpha/h) + 0.085(\alpha/h)^2 + 0.18(\alpha/h)^3]/\{1 - \alpha/h\}^{0.5} \\
 F_4(\alpha/h) &= F_0(\alpha/h) \cos(\pi \alpha/2h) \\
 k &= 6(1 + \nu)/(7 + 6\nu) = \text{coeficiente de forma para sección circular}
 \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación (4) y utilizando los siguientes valores adimensionales

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= x/R; \quad \bar{\alpha} = \alpha/R; \quad \bar{a} = a/R; \quad \bar{b} = b/R; \quad \bar{\alpha}_x = \alpha_x/R \\
 \alpha_x &= a + R + \sqrt{R^2 - x^2} \\
 \bar{\alpha}_x &= \bar{a} - 1 + \sqrt{1 + \bar{x}^2}
 \end{aligned} \tag{6}$$

se obtienen los siguientes coeficientes adimensionales de la matriz de flexibilidad

$$\bar{C}_{11} = \pi E' R C_{11} = 2 \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \bar{\alpha} F_1^2 d\bar{\alpha} d\bar{x} \tag{7}$$

$$\bar{C}_{15} = \pi E' R^2 C_{15} = 8 \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \bar{\alpha} (1 - \bar{x}^2)^{0.5} F_1 F_2 d\bar{\alpha} d\bar{x} \tag{8}$$

$$\bar{C}_{22} = \pi E' R C_{22} = 2 \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \int_0^{\bar{\alpha}_x} m k^2 \bar{\alpha} F_4^2 d\bar{\alpha} d\bar{x} \quad (9)$$

$$\bar{C}_{24} = \pi E' R C_{24} = 4 \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \int_0^{\bar{\alpha}_x} m k \bar{\alpha} (1 - \bar{x}^2)^{0.5} F_4^2 d\bar{\alpha} d\bar{x} \quad (10)$$

$$\bar{C}_{33} = \pi E' R C_{33} = 2 \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \int_0^{\bar{\alpha}_x} k^2 \bar{\alpha} F_3^2 d\bar{\alpha} d\bar{x} \quad (11)$$

$$\bar{C}_{44} = \pi E' R^3 C_{33} = 8 \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \bar{\alpha} [\bar{x}^2 F_3^2 + m(1 - \bar{x}^2) F_4^2] d\bar{\alpha} d\bar{x} \quad (12)$$

$$\bar{C}_{16} = \pi E' R^2 C_{16} = 8 \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \bar{\alpha} \bar{x} F_1^2 d\bar{\alpha} d\bar{x} \quad (13)$$

$$\bar{C}_{34} = \pi E' R^2 C_{26} = 4 \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \int_0^{\bar{\alpha}_x} k \bar{\alpha} \bar{x} F_3^2 d\bar{\alpha} d\bar{x} \quad (14)$$

$$\bar{C}_{55} = \pi E' R^3 C_{55} = 32 \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \bar{\alpha} (1 - \bar{x}^2) F_2^2 d\bar{\alpha} d\bar{x} \quad (15)$$

$$\bar{C}_{56} = \pi E' R^3 C_{56} = 32 \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \bar{\alpha} \bar{x} (1 - \bar{x}^2)^{0.5} F_1 F_2 d\bar{\alpha} d\bar{x} \quad (16)$$

$$\bar{C}_{66} = \pi E' R^3 C_{66} = 32 \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} \int_0^{\bar{\alpha}_x} \bar{\alpha} \bar{x}^2 F_1^2 d\bar{\alpha} d\bar{x} \quad (17)$$

La matriz de flexibilidad adicional que introduce la grieta puede expresarse entonces por la matriz indicada en la ecuación (18).

$$C = \frac{1}{\pi E' R^2} \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} R & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{15} & \bar{C}_{16} \\ 0 & \bar{C}_{22} R & 0 & \bar{C}_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_{33} R & \bar{C}_{34} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{C}_{42} & \bar{C}_{43} & \bar{C}_{44}/R & 0 & 0 \\ \bar{C}_{51} & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55}/R & \bar{C}_{56}/R \\ \bar{C}_{61} & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{65}/R & \bar{C}_{66}/R \end{bmatrix} \quad (18)$$

Mediante una integración numérica de las ecuaciones (7) a (17) se pueden determinar los coeficientes adimensionales $\bar{C}_{ij}$ para diferentes formas y grados de apertura de la grieta. Para utilizar los modelos de grieta indicados precedentemente en el grupo dos, es de particular interés determinar la flexibilidad que introduce la grieta cuando ella está totalmente abierta. La Figura 3 muestra dichos coeficientes de flexibilidad $\bar{C}_{ij}$ para diferentes tamaños de grieta.

Los coeficientes $\bar{C}_{ij}$ han sido calculados utilizando el teorema de Castigliano y la energía U_τ que relaja la presencia de una grieta en una sección transversal cargada del eje. La energía se relaja en la parte de la sección agrietada que se abre bajo el sistema de cargas debido a su imposibilidad de transmitir esfuerzos de tracción. La parte abierta de la sección agrietada bajo el sistema de fuerzas aplicadas y por lo tanto los límites de integración para las ecuaciones (7) a (17) pueden ser determinados por superposición de los factores de intensidad de esfuerzos normales $K_{ij}(x, y)$ en los diferentes puntos de la sección agrietada de manera similar a lo realizado por Jun y Eun¹⁰.

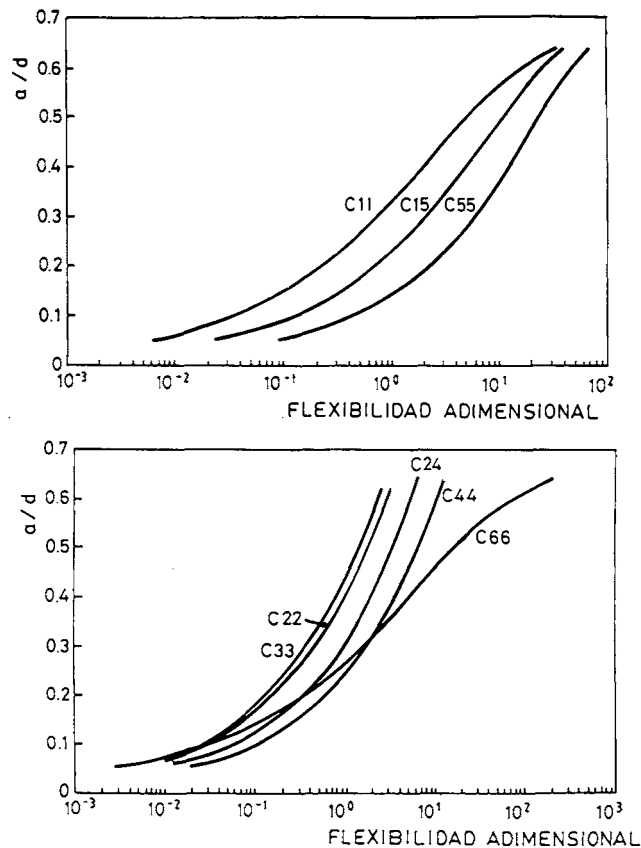


Figura 3. Coeficientes de flexibilidad para grieta completamente abierta

Si el signo de $K(x, y)$ en la ecuación (19) es positivo, la grieta está abierta en ese punto y, si el signo es negativo, entonces está cerrada.

$$K(x, y) = \sum \sum K_{ij}(x, y) \quad \begin{array}{l} i = \text{I, II, III} \\ j = 1, 2, \dots, 6 \end{array} \quad (19)$$

Antes de efectuar algunas hipótesis simplificadoras del problema es conveniente dar una interpretación física de algunos coeficientes C_{ij} .

- (i) Cuando en la sección agrietada actúa sólo un momento flector P_5 , como el indicado en la Figura 4, la grieta se abre completamente y el eje neutro es entonces paralelo al eje 2. La sección agrietada gira en torno a este eje en un ángulo u_5 y el centro 0 de la sección nominal se desplaza en u_1 . Por lo tanto $C_{55} = u_5/P_5$ y $C_{15} = u_1/P_5$. La simetría existente permite inferir que la sección no puede girar en torno al eje 3 y por lo tanto para esta condición de grieta completamente abierta $u_6 = C_{65} = u_6/P_5 = 0$. Esto es consistente con la ecuación (16), cuya simple inspección permite constatar que para este caso $C_{65} = 0$; resultado que contradice lo publicado por Papadopoulos y Dimarogonas¹⁶.

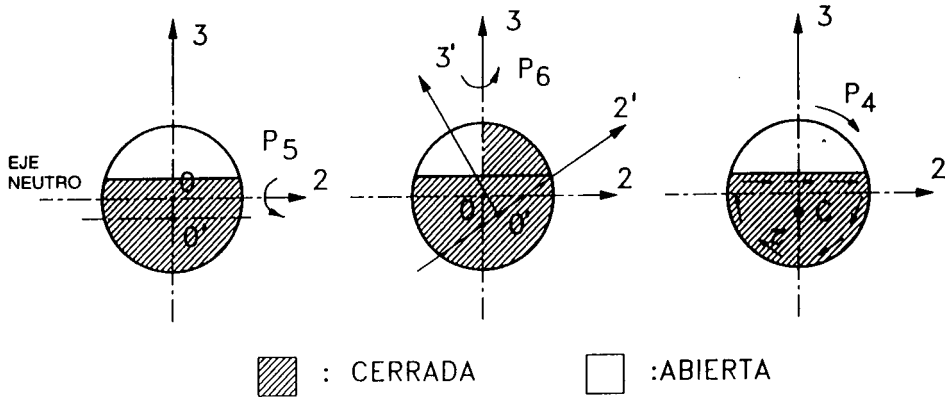


Figura 4. Diferentes cargas actuando en la sección agrietada

- (ii) Cuando en la sección agrietada actúa sólo un momento flector P_6 , la parte derecha de la grieta se cierra y los ejes principales centrales de rigidez son los indicados por $2' 0' 3'$, según la Figura 4. Esto trae como consecuencia que el centro 0 se desplace u_1 y la sección agrietada gire en el caso general en u_5 y u_6 . Por lo tanto $C_{66} = u_6/P_6$, $C_{16} = u_1/P_6$ y $C_{56} = u_5/P_6$ son diferentes de cero. Sin embargo, si sobre la sección agrietada actúan además otras cargas que obligan a la grieta a permanecer completamente abierta entonces con la misma lógica utilizada en el punto anterior, se infiere que $C_{56} = C_{16} = 0$.
- (iii) Cuando en la sección agrietada actúa sólo un momento torsor P_4 , como se indica en la Figura 4, el centro de corte se encuentra en C y por lo tanto el centro 0 de la sección nominal se desplaza por corte en u_2 y la sección agrietada gira en u_4 . De aquí, que $C_{24} = u_2/P_4$ y $C_{44} = u_4/P_4$ sean diferentes de cero. Por simetría existente respecto al eje 3 o por inspección de la ecuación (10) se ve que cuando la grieta está completamente abierta, $u_3 = C_{34} = u_3/P_4 = 0$.

Las interpretaciones físicas dadas anteriormente son consistentes con los resultados obtenidos para los $\bar{C}_{ij}$ a través de la integración numérica de las ecuaciones (7) a (17), según se indica en la Figura 3.

Matriz de rigidez de un elemento de eje agrietado

Qian *et al.*¹⁹ y Sekhar y Prabhu²¹ presentan una matriz de rigidez para un elemento de eje agrietado considerando solamente los movimientos de flexión. A continuación en el presente trabajo se formulará la matriz de rigidez de un elemento de eje agrietado considerando el caso general con seis grados de libertad.

La grieta es considerada como una rótula existente en la sección transversal agrietada. Se desprecia la longitud de elemento que es afectado por la grieta alrededor de ella respecto a la longitud total de este. Estudios experimentales, Dirr y Schmalhorst⁶, demuestran que la longitud de la zona afectada por la grieta es del orden del diámetro del eje a cada lado de ella.

Los movimientos de las secciones transversales a ambos lados de la grieta son definidos por los vectores desplazamiento y_L y y_R , donde L y R se refieren a las

secciones inmediatamente a la izquierda y a la derecha de la grieta respectivamente. El vector de desplazamiento relativo entre ambas secciones de la grieta está relacionado al vector de fuerzas aplicadas al lado derecho de la grieta $\mathbf{P}_R$ por la matriz de flexibilidad (18)

$$\mathbf{y}_R - \mathbf{y}_L = \mathbf{C} \mathbf{P}_R \quad (20)$$

combinando la ecuación (20) con las ecuaciones de equilibrio (21), se obtiene la ecuación (22)

$$\mathbf{P}_L = -\mathbf{P}_R \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_L \\ \mathbf{P}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} & -\mathbf{C}^{-1} \\ -\mathbf{C}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_L \\ \mathbf{y}_R \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \mathbf{y}$$

donde

$$\mathbf{P}^T = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}\}$$

$$\mathbf{y}^T = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}\}$$

La ventaja de expresar una matriz de rigidez sólo para la grieta, como se indica en la ecuación (22), es su facilidad de cálculo. Sin embargo, para pequeñas grietas los coeficientes de dicha matriz son muy grandes y pueden generar problemas de inestabilidad numérica durante su solución. Una manera de solucionar esto es determinar una matriz de rigidez para un elemento que contenga una grieta, que es lo que se hará a continuación.

Con el objeto de disminuir el número de matrices a manejar se supondrá que la grieta está en un extremo del elemento (Figura 5). Un análisis similar para el caso en que la grieta está en cualquier posición en el elemento se encuentra desarrollado en el trabajo de Baquedano¹. La Figura 5 muestra un elemento de eje con una grieta en uno de sus extremos; C y B son los puntos inmediatamente a la izquierda y a la derecha de la grieta respectivamente y A es el otro extremo del elemento.

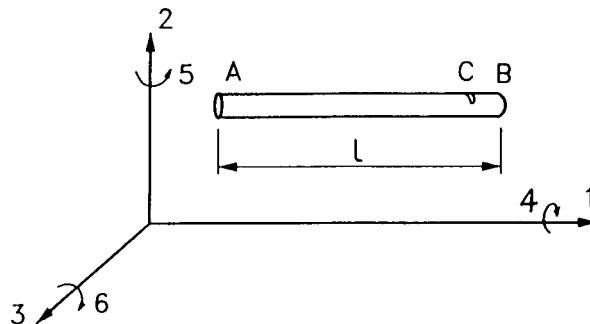


Figura 5. Elemento de eje agrietado

De las ecuaciones de la mecánica de sólidos, considerando el elemento como una viga de Euler-Bernoulli, la relación entre los desplazamientos y_A e y_C de los puntos A y C respectivamente es

$$y_C = \mathbf{A} P_C + B y_A \quad (23)$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} l/EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l^3/3EI & 0 & 0 & 0 & l^2/2EI \\ 0 & 0 & l^3/3EI & 0 & -l^2/2EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l/GI_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l^2/2EI & 0 & l/EI & 0 \\ 0 & l/2EI & 0 & 0 & 0 & l/EI \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde E y G son los módulos de elasticidad y corte respectivamente, I e I_p son los momentos de inercia transversal y polar respectivamente y $\mathbf{A}$ es el área de la sección transversal.

Combinando las ecuaciones (20) y (23) con las ecuaciones de equilibrio (24), se obtiene

$$P_C = \mathbf{D} P_A \quad (24)$$

donde

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -l & 0 & -1 & 0 \\ 0 & l & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} y_B &= \{A + C\} D P_A + B y_A \\ y_B &= T P_A + B y_A \end{aligned} \quad (25)$$

con

$$T = \{A + C\} D$$

y combinando la ecuación (25) con las ecuaciones de equilibrio para el elemento de grieta, se obtiene

$$P_B = -P_C = -D P_A = -D T^{-1} y_B + D T^{-1} B y_A$$

se obtiene

$$\begin{bmatrix} P_A \\ P_B \end{bmatrix} = [K] \begin{bmatrix} y_A \\ y_B \end{bmatrix} \quad (26)$$

donde la matriz de rigidez del elemento agrietado es

$$K = \begin{bmatrix} -T^{-1}B & T^{-1} \\ D T^{-1}B & -D T^{-1} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Variación de la rigidez del elemento de eje agrietado con el cierre/apertura de la grieta

Durante la rotación del eje, la grieta se abre y se cierra dependiendo de la dirección de la deflexión del eje respecto a la ubicación de la grieta. En la mayoría de los rotores horizontales, donde la deflexión estática vertical debido a su peso es mucho mayor que la vibración del rotor, se puede suponer que la grieta está completamente abierta cuando $\phi = 0^\circ$ y completamente cerrada cuando $\phi = 180^\circ$. Para este caso, ϕ es el ángulo que forma el eje ξ con la dirección vertical hacia abajo (dirección supuesta del desplazamiento transversal del eje).

Cuando la grieta está completamente abierta, la matriz de rigidez K_1 del elemento de eje agrietado respecto a ejes rotatorios $\xi\eta$ fijos al elemento es determinada de la ecuación (27) utilizando los coeficientes de flexibilidad adicional que introduce la grieta, mostrados en la Figura 3. Cuando la grieta está completamente cerrada, la matriz de rigidez es simplemente la de un elemento de eje

$$K_0 = \text{diag} [AE/l, 4kGA/l, 4kGA/l, GI_p/l, 4EI/l, 4EI/l] \quad (28)$$

Durante la rotación del eje, la parte de la sección agrietada está abierta y por lo tanto la rigidez del elemento agrietado varía periódicamente. El valor de la rigidez del elemento agrietado para cada ubicación ϕ de la grieta puede ser determinado evaluando la parte de la sección agrietada que se encuentra abierta de acuerdo al signo $K(x, y)$ en la ecuación (19), como se explicó precedentemente.

La forma de apertura de la grieta depende del sistema de cargas que actúa en la sección agrietada, de la razón profundidad de la grieta/diámetro del eje y de la esbeltez del eje (razón largo/diámetro). Como la forma de apertura de la grieta depende de muchos parámetros, específicamente de muchas combinaciones posibles de cargas, no es posible expresar los coeficientes de rigidez del eje agrietado a través de ábacos y será necesario calcularlos para cada caso particular.

Sin embargo, con el objeto de simplificar el procedimiento de cálculo, la mayoría de los autores especifican de antemano una forma de variación de los coeficientes de rigidez con la posición de la grieta en el eje variando entre un valor máximo cuando la grieta

está completamente cerrada a un valor mínimo cuando la grieta está completamente abierta.

Puesto que la variación de los coeficientes de rigidez Δk con la rotación del eje es periódica, puede ser expresada como una serie de Fourier, aunque el problema es la determinación de los coeficientes. Para grietas en ejes de tamaño mayor a aproximadamente $a/d \geq 0.2$, las cuales son factibles de determinar con el monitoreo de sus vibraciones, Mayes y Davies¹² muestran experimentalmente que el primer término de la serie de Fourier es predominante respecto a los otros y, por consiguiente, expresan la variación de los coeficientes de rigidez a través de una función senoidal.

Por otro lado, trabajos precedentes, como los de Jun y Eun¹⁰ y San Juan y Saavedra²⁰, muestran que los resultados numéricos obtenidos en el estudio dinámico de ejes agrietados suponiendo un modelo de grieta que considera una variación senoidal de los coeficientes de rigidez entregan resultados casi idénticos a los obtenidos utilizando sus variaciones reales.

En base a lo anterior y a los objetivos del presente trabajo, la variación de la rigidez del elemento de eje agrietado respecto a los ejes ξ y η será expresada por una función armónica del ángulo ϕ , como se indica en la Figura 6. En rotores donde la deflexión transversal estática en la sección agrietada debido al peso es mucho mayor que la deflexión dinámica, como generalmente ocurre en los rotores horizontales, $\phi \approx \Omega t$.

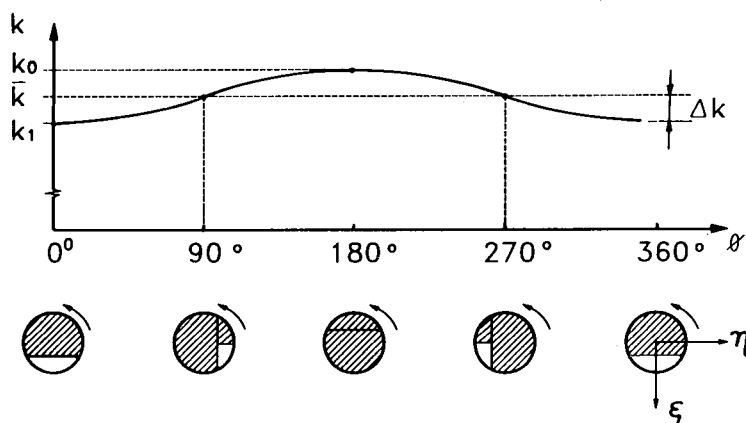


Figura 6. Variación de la rigidez con el cierre/apertura de la grieta, respecto a los ejes ξ y η

La rigidez del elemento agrietado $\mathbf{K}$ para cualquier posición ϕ de la grieta será expresada entonces por

$$\mathbf{K} = \bar{\mathbf{K}} - \Delta \mathbf{K} \cos \phi \quad (29)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}} &= (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1)/2 \\ \Delta \mathbf{K} &= (\mathbf{K}_0 - \mathbf{K}_1)/2 \end{aligned} \quad (30)$$

y $\mathbf{K}_0$ y $\mathbf{K}_1$ son las matrices de rigidez cuando la grieta está totalmente abierta y cerrada respectivamente.

Los coeficientes de la matrix de rigidez del elemento de eje agrietado pueden ser determinados con respecto a ejes fijos $X - Y - Z$ a través de las relaciones de transformación de ejes siguiente

$$k_{rs} = a_{ri} a_{sj} k_{ij} \quad (31)$$

donde

k_{rs} = coeficientes de rigidez referidos a los ejes $X - Y - Z$

k_{ij} = coeficientes de rigidez referidos a los ejes $\xi - \eta - z$

$a_{ri} a_{sj}$ = cosenos directos de los ejes $\xi - \eta - z$ respecto a los ejes $X - Y - Z$

Desarrollando para el coeficiente $r = s = x$ y utilizando la ecuación (31), se obtiene

$$k_{xx} = \frac{\bar{k}_{\xi\xi} + \bar{k}_{\eta\eta}}{2} - \frac{\Delta k_{\xi\xi} + \Delta k_{\eta\eta}}{2} \cos \phi + \frac{\bar{k}_{\xi\xi} + \bar{k}_{\eta\eta}}{2} \cos 2\phi - \frac{\Delta k_{\xi\xi} - k_{\eta\eta}}{2} \cos \phi \cos 2\phi \quad (32)$$

La ecuación (32) permite ver claramente cómo se modifica con la transformación de ejes la variación armónica de los coeficientes de rigidez respecto a los ejes móviles indicada en la ecuación (29).

La aproximación de utilizar una ley de variación armónica para la rigidez del eje agrietado, aunque como se indicó precedentemente, tiene un efecto despreciable en los resultados numéricos, introduce las siguientes incongruencias físicas:

- (i) Considera que la ley de variación de la rigidez es independiente del tamaño de la grieta, del sistema de carga en la sección agrietada y de la esbeltez del eje (razón largo/diámetro). Por simple inspección se infiere que grietas poco profundas permanecerán cerradas durante una buena parte de giro del eje y no sólo para $\phi = 180^\circ$, como se deduce del modelo usado. En este último caso, un modelo como el tipo escalón se ajusta mejor a la realidad.
- (ii) Si se considera el caso en que las deformaciones por flexión son preponderantes, como sucede en la mayoría de los rotores, se puede observar que cuando la grieta está completamente abierta o cerrada, los ejes $\xi - \eta$ son direcciones principales de rigidez ($k_{\xi\eta} = 0$) siendo el eje ξ el eje débil o eje respecto al cual la rigidez de la sección agrietada es menor.

El modelo utilizado considera implícitamente que los ejes ξ y η continúan siendo direcciones principales de inercia cuando la grieta está parcialmente abierta. Sin embargo, en esta situación las direcciones principales de rigidez verdaderas presentan una desviación con respecto a los ejes $\xi - \eta$, como se puede concluir por simple inspección de la Figura 7. Desde esta figura se infiere que $I_{\eta\eta} > I_{\xi\xi}$ y $k_{\xi\xi} > k_{\eta\eta}$ y por lo tanto el eje débil real está más cerca de la dirección η que de la dirección ξ . Una conclusión

similar se puede inferir analizando los resultados teóricos publicados en el trabajo de Li Canhge *et al.*³. En el caso de un eje agrietado sometido a una carga estática, la consideración anteriormente mencionada tiene como consecuencia que para ángulos ϕ entre 180° a 90° y entre 90° y 180° el coeficiente de flexibilidad C_{xy} calculado con el modelo usado tenga signos opuestos a los correctos, como se observa en la Figura 8. En esta figura se compara el coeficiente de flexibilidad adimensional $C_{xy} = C_{xy}/C_0$ de un eje agrietado en su punto medio calculado con el modelo propuesto con el obtenido experimentalmente por San Juan y Saavedra²⁰, los cuales son similares a los publicados por Dirr y Schmalhorst⁶.

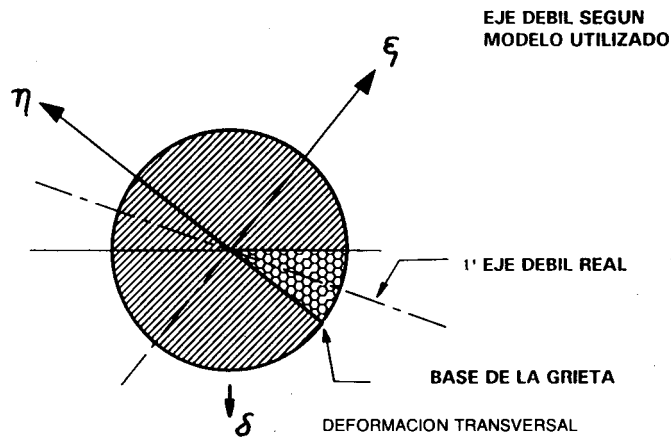


Figura 7. Grieta profunda con pequeño grado de apertura

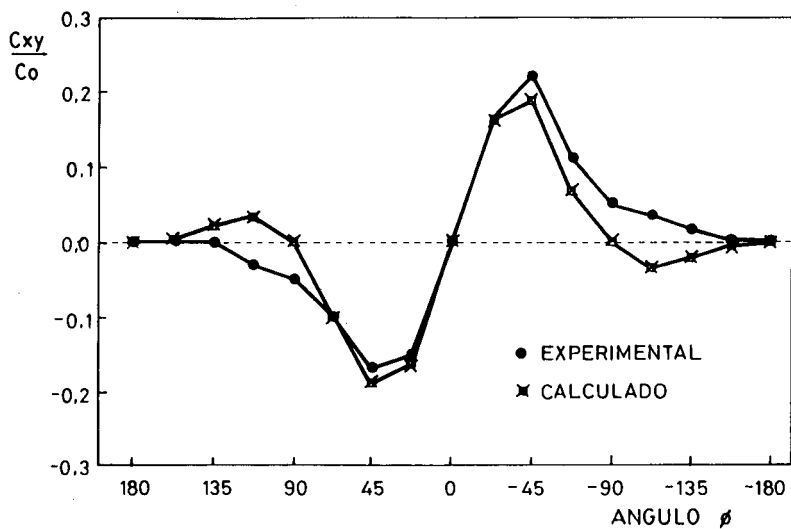


Figura 8. Flexibilidad medida y calculada ($a/d = 0.5$, $l/d = 30$)

Ecuaciones del movimiento de un rotor con eje agrietado

La Figura 9 muestra un rotor horizontal con una grieta transversal en su eje y una vista transversal de la sección agrietada. Para el análisis dinámico del rotor se utiliza una modelación de elementos finitos. La matriz de rigidez del rotor se obtiene ensamblando elementos de viga de Euler-Bernoulli en tres dimensiones para los elementos de eje no agrietados y el elemento agrietado desarrollado anteriormente para el elemento del rotor que contiene la grieta.

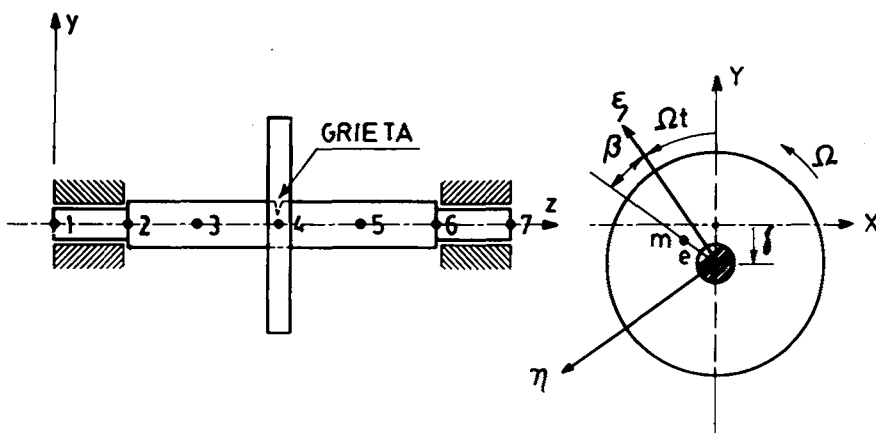


Figura 9. Rotor con eje agrietado

Las ecuaciones del movimiento respecto a ejes inerciales para el sistema rotor agrietado-descansos son expresadas por la siguiente ecuación

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + (\mathbf{C} + \mathbf{H}) \dot{\mathbf{d}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_s) \mathbf{d} = \omega^2 m \mathbf{e} + \mathbf{f} \quad (33)$$

donde

$\mathbf{d}$ = vector de desplazamientos nodales

$\mathbf{M}$ = matriz de masa del sistema

$\mathbf{C}$ = matriz de amortiguamiento viscoso equivalente del sistema

$\mathbf{H}$ = matriz giroscópica del sistema

$\mathbf{K}$ = matriz de rigidez del rotor

$\mathbf{K}_s$ = matriz de rigidez de los descansos

$\mathbf{e}$ = vector excentricidad de la masa m del disco

$\mathbf{e}^T = (e \cos \Omega t \hat{i} + e \sin \Omega t \hat{j})$

$\mathbf{f}$ = vector fuerzas externas

Las matrices de masa, amortiguamiento y giroscópica del sistema y la matriz de rigidez de los descansos en la ecuación (33) no cambian cuando el rotor gira. Sin embargo, debido a la apertura y cierre de la grieta, la matriz de rigidez del rotor varía

con el vector desplazamiento y el tiempo; $\mathbf{K} = \mathbf{K}(d, t)$. En este caso, las ecuaciones no lineales del movimiento deben ser resueltas utilizando un método de integración numérica y un proceso iterativo.

Cuando los desplazamientos debido al peso son dominantes, la matriz de rigidez del eje sólo es dependiente del tiempo, $\mathbf{K} = \mathbf{K}(t)$ y la ecuación (33) se transforma en una ecuación lineal con coeficientes periódicamente variables. Esto permite simplificar su solución para sistemas de muchos grados de libertad, introduciendo aproximaciones como las indicadas por Mayes y Davies¹² y por lo tanto usar programas estándares de dinámica lineal del rotor en vez de métodos de resolución por integración numérica.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

El elemento de eje agrietado desarrollado precedentemente se usa junto a un programa estándar de elementos finitos para estudiar el comportamiento dinámico del rotor mostrado en la Figura 9, el cual fue posteriormente construido y ensayado en el laboratorio¹. El disco tiene masa $m = 1.7$ (kg) y está montado sobre un eje uniforme de acero con una grieta transversal en su punto medio. La profundidad de la grieta es $a = 0.35$ (m), el largo del eje es $L = 0.31$ (m) y su diámetro $d = 0.01$ (m). El rotor está montado sobre descansos rígidos. El factor de amortiguamiento considerado fue $\xi_i = 0.02$, valor medido experimentalmente en el rotor del laboratorio.

Para la simulación del comportamiento dinámico del rotor, el eje se modela mediante cuatro elementos, tres elementos de viga sin grieta y un elemento de eje agrietado. El número de grados de libertad del sistema es 30. Las ecuaciones del movimiento obtenidas son integradas numéricamente mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

La Figura 10 muestra formas típicas obtenidas para la forma de la vibración y el espectro en frecuencias de los desplazamientos verticales del disco para el caso en que el disco está perfectamente balanceado ($e = 0$) y para una razón de la velocidad de rotación del eje a su primera velocidad crítica $\Omega/w_1 = 0.33$. Se puede observar que el espectro vibratorio contiene como componentes espectrales los primeros tres armónicos de la velocidad de rotación $1 \times \Omega$, $2 \times \Omega$, $3 \times \Omega$ o simplemente $1\times$, $2\times$ y $3\times$. La causa que genera estas componentes vibratorias es la variación de la rigidez que introduce la grieta. Esto se puede inferir observando que en la ecuación (32) las variaciones de la rigidez presentan componentes a las mismas frecuencias $1\times$, $2\times$ y $3\times$.

La presencia de un desbalanceamiento de masas en el disco, como normalmente ocurre en los rotores, no cambia sustancialmente la forma de la onda y de su espectro vibratorio. Siguen siendo predominantes las componentes $1\times$, $2\times$ y $3\times$. Sin embargo, sus amplitudes pueden variar significativamente según la ubicación del desbalanceamiento respecto a la grieta.

La Figura 11 muestra la variación de la amplitud de estas componentes con la velocidad de rotación del eje. Se observan tres velocidades críticas (picos en la respuesta). Para sistemas ligeramente amortiguados estas velocidades esencialmente ocurren cuando la frecuencia de las componentes espectrales de la vibración coincide con alguna frecuencia natural de vibrar del rotor, en este caso a w_1 , $w_1/2$ y $w_1/3$. Esta

característica que presentan los rotores agrietados es utilizada en la práctica como un síntoma característico para diagnosticar un eje agrietado en un rotor².

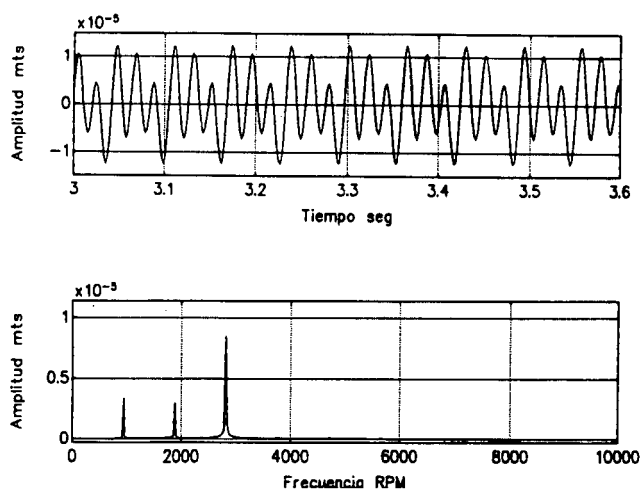


Figura 10. Forma de onda y espectro en frecuencias del desplazamiento vertical del disco

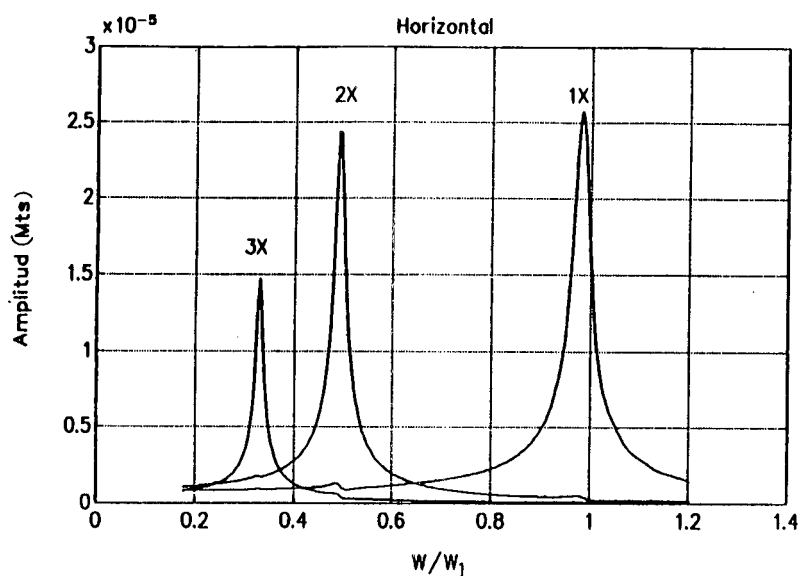


Figura 11. Variación con la velocidad de las componentes del desplazamiento horizontal del disco

La Figura 12 compara el espectro en frecuencias de los desplazamientos horizontal y longitudinal (dirección X) obtenidos para un rotor perfectamente balanceado. Se observa que la vibración longitudinal global es menor que el 1 % de la vibración horizontal; resultado que concuerda con lo publicado por Papadopoulos y

Dimarogonas¹⁶. En el caso de una máquina real, este débil acoplamiento entre la vibración longitudinal y radial será encubierto, sin embargo, por otros mecanismos que generan acoplamientos más fuertes entre estas vibraciones que el que genera la grieta (por ejemplo, el de un eventual desalineamiento de acoplamientos o descansos). Por esta razón, en la práctica resulta discutible su utilización como un síntoma para indicar la presencia de una grieta en un eje, como lo han sugerido autores como Papadopoulos y Dimarogonas¹⁶.

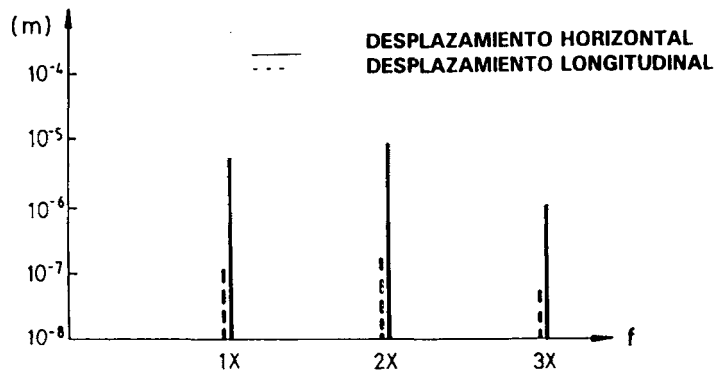


Figura 12. Desplazamientos vibratorios horizontal y longitudinal

CONCLUSIONES

1. Se presenta la matriz de rigidez de un elemento de viga con una grieta en uno de sus extremos. Esto permite utilizarlo en programas de elementos finitos estándares para el estudio del comportamiento dinámico, estático y de la estabilidad de rotores y de sistemas estructurales agrietados.
La matriz de rigidez del elemento de eje agrietado que se formula permite además analizar los acoplamientos de movimientos que introduce la grieta en las diferentes direcciones.
2. Se usa la matriz de rigidez de un elemento de viga con una grieta en uno de sus extremos en vez de la matriz de un elemento que sólo contenga la grieta, como lo han formulado algunos autores, debido a que este último elemento, aunque simplifica notoriamente los cálculos, puede generar problemas numéricos durante su solución debido a los altos valores de los coeficientes de flexibilidad adicional que introduce la grieta para pequeños valores de ella.
3. Se usa la matriz de rigidez de un elemento de eje agrietado analizado junto a un programa estándar de elementos finitos para modelar el comportamiento dinámico de un rotor con eje agrietado ensayado en el laboratorio. Las principales características de comportamiento vibratorio del rotor con eje agrietado modelado en este trabajo son las siguientes:
 - 3.1 Las vibraciones generadas en el rotor con eje agrietado en ausencia de fuerzas dinámicas excitadoras externas son de origen paramétrico, producto de las variaciones de la rigidez del eje con la rotación del eje.

- 3.2 El espectro vibratorio en frecuencias tiene componentes espectrales distintivas a frecuencias a uno, dos y tres veces la velocidad de giro del rotor ($1\times$, $2\times$ y $3\times$).
- 3.3 Se generan velocidades críticas subsincrónicas con la velocidad de rotación; específicamente a $1/2$ y $1/3$ de ella.
- 3.4 Se introduce acoplamiento entre las vibraciones radiales y longitudinales.
- 4. Los resultados señalados anteriormente son utilizados con mayor o menor éxito como indicadores de la presencia de grietas en ejes de rotores cuando se monitorea el comportamiento vibratorio de máquinas rotatorias mientras ella está funcionando. A este respecto y de acuerdo con la experiencia en ensayos de laboratorio con ejes agrietados los autores proponen los siguientes indicadores para identificar la presencia de una grieta transversal en ejes de rotores.
 - 4.1 Efectuar un análisis espectral de las vibraciones medidas en los descansos de la máquina mientras ella funciona en su estado estacionario a velocidad constante. La presencia de la grieta transversal en el eje genera componentes espectrales a frecuencias 1, 2 y 3 veces la velocidad de rotación del eje ($1\times$, $2\times$ y $3\times$). Esta característica, sin embargo, no es distintiva de la presencia de una grieta en el eje. También la presenta el desalineamiento de acoplamientos, falla de frecuente ocurrencia en las máquinas rotatorias. No obstante, el desalineamiento presenta dos características adicionales que permiten discriminar entre estas dos fallas: (i) genera una carga adicional en los descansos de la máquina, lo que es detectado como un aumento de temperatura por las termocuplas ubicadas en los metales de los descansos hidrodinámicos y (ii) genera vibraciones, tanto en la máquina conductora como en la conducida (las fuerzas que actúan sobre una y otra máquina en el acoplamiento son fuerzas de acción y reacción).
 - 4.2 Construir un gráfico de las componentes $1\times$, $2\times$ y $3\times$ para diferentes velocidades de rotación de la máquina cuando es factible económicamente interrumpir la producción de la máquina para efectuar un análisis vibratorio durante su detención.

El gráfico indicado en la Figura 11 es distintivo de la presencia de una grieta transversal en el eje, específicamente por: (i) la presencia de velocidades críticas sincrónicas y (ii) la existencia de amplitudes vibratorias apreciables de las componentes a $1\times$, $2\times$ y $3\times$ cuando la velocidad de rotación de la máquina tiende a cero.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo es una parte del conocimiento obtenido con el desarrollo de una investigación financiada a través del Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico, FONDECYT.

REFERENCIAS

1. D. Baquedano, "Estudio teórico-experimental de un rotor con eje agrietado", Tesis de Magister en Ciencias de la Ingeniería, Universidad de Concepción, Chile, (1994).
2. D. Bently y A. Muszynska, "Detection of Rotor Cracks", *15th Turbomachinery Symposium*, Texas, (1986).
3. L. Change, O. Bernasconi, N. Xenophontides, "A Generalized Approach to the Dynamics of Cracked Shafts", *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, Vol. **111**, pp. 257-263, (1989).
4. B.O. Dirr y B.K. Schmalhorst, "Crack Depth Analysis of a Rotating Shaft by Vibration Measurements", *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, Vol. **110**, pp. 158-164, (1988).
5. A. Gash, "A Survey of the Dynamic Behaviour of a Simple Rotating Shaft with a Transverse Crack", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **160**, 2, pp. 313-332, (1993).
6. B. Grabowski, "Shaft Vibration in Turbomachinery Excited by Cracks", *TAMU Workshop on Rotordynamic Instability Problems in High Performance Machinery*, (1982).
7. S.C. Huang, Y.M. Huang y S.H. Shieh, "Vibration and Stability of a Rotating Shaft Containing a Transverse Crack", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **162**, 3, pp. 387-401, (1993).
8. T. Inagaki, H. Kanki y K. Shiraki, "Transverse Vibrations of a General Cracked Rotor Bearing System", *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. **104**, pp. 345-355, (1982).
9. I. Iman, S.H. Azzaro, R.J. Bankert y I. Scheibel, "Development of an On-Line Rotor Crack Detection and Monitoring System", *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, Vol. **111**, pp. 241-250, (1989).
10. O.S. Jun y H.J. Eun, "Modelling and Vibration Analysis of a Simple Rotor with a Breathing Crack", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **155**, 2, pp. 273-290, (1992).
11. M.C. Kikidis y C.A. Papadopoulos, "Slenderness Ratio Effect on Cracked Beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **155**, 1, pp. 1-11, (1992).
12. I.W. Mayes y W.G.R. Davies, "Analysis of the Response of a Multi-Rotor Bearing System Containing a Traverse Crack in a Rotor", *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, Vol. **106**, pp. 139-145, (1984).
13. A. Muszynska, "Shaft Crack Detection", *Seventh Machinery Dynamics Seminar*, Canadá, (1982).
14. H.D. Nelson y C. Nataraj, "The Dynamics of a Rotor System with a Cracked Shaft", *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, Vol. **108**, pp. 189-196, (1986).
15. W.M. Ostrachowicz y M. Krawczuk, "Vibration Analysis of a Cracked Beam", *Computer and Structures*, Vol. **36**, 2, pp. 245-250, (1990).
16. C.A. Papadopoulos y A.D. Dimarogonas, "Coupled Longitudinal and Bending Vibrations of a Rotating Shaft with an Open Crack", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **117**, 1, pp. 81-93, (1987).
17. C.A. Papadopoulos y A.D. Dimarogonas, "Stability of Cracked Rotors in the Coupled Vibration Mode", *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, Vol. **110**, pp. 356-359, (1988).
18. C.A. Papadopoulos y A.D. Dimarogonas, "Coupled Vibration of Cracked Shafts", *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. **114**, 1, pp. 461-467, (1992).
19. G.L. Qian, S.N. Gu y J. Jian, "The Dynamic Behaviour and Crack Detection of a Beam with a Crack", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **138**, 2, pp. 233-243, (1990).

20. L. San Juan y P. Saavedra, "Análisis comparativo de modelos de grieta en ejes de máquinas rotatorias", *Actas V. Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, Chile, (1992).
21. A.S. Sekhar y B.S. Prabhu, "Crack Detection and Vibration Characteristics of Cracked Shaft", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **157**, pp. 375-381, (1992).
22. H. Tada, P.C. Paris y G.R. Irwin, "The Stress Analysis of Cracks Handbook", Hellerton, Pennsylvania: Del Research Corp., (1973).