

# ASPECTOS COMPUTACIONAIS DA IMPLEMENTAÇÃO DA FORMULAÇÃO DIFERENCIAL APLICADA À ANÁLISE REOLÓGICA DE BARRAGENS DE CONCRETO

EDUARDO M.R. FAIRBAIRN  
HENRIQUE I. LONGO  
y  
GERALDO L.C. PEREIRA

*COPPE/UFRJ, Cidade Universitária,  
C.P. 68506, CEP 21945  
Río de Janeiro, BRASIL*

## SUMÁRIO

Neste artigo são apresentadas as formulações integral e diferencial para a modelização matemática do problema reológico do concreto, assim como a correspondência entre as duas formulações. São então apresentados exemplos numéricos visando uma comparação da eficiência computacional de algoritmos baseados nos dois tipos de modelização.

## SUMMARY

In this paper the integral type and the differential type mathematical modelling for the creep problem of concret material are presented, so as the correlation between both formulation. There are then presented some numerical examples in order to compare the computational efficiency of the algorithms based on integral type and differential type modells.

## INTRODUÇÃO: A FORMULAÇÃO INTEGRAL

O desenvolvimento de programas de computador para resolução de problemas relativos ao cálculo de tensões de origem térmica em barragens deve comportar a implementação de algoritmos que prevejam a modelização numérica do fenômeno reológico do concreto como consideração do envelhecimento. Isto se deve ao fato de que o campo térmico originado pela elevação adiabática da temperatura do concreto tem seus máximos por volta dos 3 dias após a concretagem, idade em que a variação de características do material é bastante importante<sup>1,2,3</sup>.

O problema reológico encontra então duas formas básicas de ser modelizado, a saber, a formulação integral e a formulação diferencial. A formulação integral surge diretamente da aplicação do princípio da superposição originando a relação :

Recibido: Octubre 1989

$$\sigma(t) = D^* R(t, t'_0) [\varepsilon(t'_0) - \varepsilon^0(t'_0)] + \int_{t'_0}^t D^* R(t, t') [d\varepsilon(t') - d\varepsilon^0(t')] \quad (1)$$

onde

$$\varepsilon^T = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_{xy}\}$$

é o vetor de deformações (o superíndice  $T$  indicando ("Transposto"),

$$\varepsilon^{0T} = \{\varepsilon_x^0 \ \varepsilon_y^0 \ \varepsilon_{xy}^0\}$$

é o vetor de deformações inelásticas independente de tensões (corresponde a deformações por temperatura, retração, etc),

$$\sigma^T = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_{xy}\}$$

é o vetor de tensões,  $R(t, t')$  é uma família de funções de relaxação, e

$$D^* = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (2)$$

para o estado plano de deformações, onde  $\nu$ , coeficiente de Poisson, é considerado constante com o tempo<sup>4,5,6</sup>.

Os modelos numéricos baseados na relação<sup>1</sup> dão origem a algoritmos cuja eficiência computacional é comprometida pela necessidade de armazenamento de toda a história de deformações<sup>7</sup> o que tende a sobrecarregar a memória computacional, ou ocasionar grande perda de tempo para leitura e impressão de arquivos em disco.

Recorre-se então à formulação diferencial, que requer o armazenamento de apenas algumas tensões e variáveis permitindo maior eficiência computacional. As proposições básicas da formulação diferencial assim como a correspondência entre esta e a formulação integral são apresentadas no item a seguir.

## A FORMULAÇÃO DIFERENCIAL: CORRESPONDÊNCIA COM A FORMULAÇÃO INTEGRAL

Se o núcleo da integral de Stieltjes de equação (1) pode ser degenerado por uma série de Dirichlet:

$$R(t, t') = \sum_{i=1}^n E_i(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_i}\right) \quad (3)$$

então podemos provar<sup>8</sup> que o problema expresso por (1) é equivalente ao conjunto de equações diferenciais:

$$\frac{\dot{\sigma}_i(t)}{E_i(t)} + \frac{\sigma_i(t)}{\eta_i(t)} = D^* [\varepsilon(t) - \varepsilon^0(t)] \quad (4)$$

com condições de contorno:

$$\sigma_i(t'_0) = \mathbf{D}^* E_i(t'_0) [\varepsilon(t'_0) - \varepsilon^0(t'_0)],$$

onde

$$\tau_i = \eta_i(t) / E_i(t)$$

é suposto constante no tempo e:

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(t) \quad (5)$$

com

$$\sigma_i(t) = \mathbf{D}^* E_i(t'_0) \exp\left(-\frac{t-t'_0}{\tau_i}\right) [\varepsilon(t'_0) - \varepsilon^0(t'_0)] + \int_{t'_0}^t \mathbf{D}^* E_i(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_i}\right) [\dot{\varepsilon}(t) - \dot{\varepsilon}^0(t')] dt' \quad (6)$$

A expressão (4) (acompanhada de (5) e (6)) representa então o conjunto de equações constitutivas diferenciais correspondentes à equação integral dada por (1).

A recíproca da proposição anterior é demonstrada em<sup>8</sup>, dendo provado que a integral das equações (6) é a relação constitutiva dada por (1).

As proposições demonstradas acima só são válidas, conforme foi visto, se a relação (3) é correta, ou seja, se é possível a representação da função de relaxação através de uma série de Dirichlet com número finito  $n$  de termos.

Conforme já ficou demonstrado em outros trabalhos<sup>4,7</sup> o desenvolvimento de funções de relaxação por séries de Dirichlet permite uma boa correlação para um número limitado de termos de série. Particularmente, no que diz respeito a exemplos relativos a grandes obras em concreto massa no Brasil (Usina Hidroelétrica de Itaipú, Usina Nuclear de Angra II, etc) coeficientes de correlação da ordem de 0.99 foram encontrados para séries com 5 termos, o que indica excelentes ajustes<sup>8</sup>. Fica então provada a justeza da relação (3) e demonstrada a correspondência entre as formulações integral e diferencial.

### ALGORITMO UTILIZADO PARA FORMULAÇÃO DIFERENCIAL DO PROBLEMA REOLÓGICO COM ENVELHECIMENTO - DESENVOLVIMENTO PARA O MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS

As equações (4) a (6) dão origem a relações tensão-deformação pseudo-elásticas do tipo<sup>9</sup>:

$$\Delta\sigma(t_r) = \mathbf{D}^* E''(t_r) [\Delta\varepsilon(t_r) - \Delta\varepsilon''(t_r)] \quad (7)$$

onde

$$E''(t_r) = \sum_{i=1}^n \lambda_{ir} \bar{E}_i(t_r) \quad (7.a)$$

$$\lambda_{ir} = \frac{1}{\Delta t_r} \cdot \tau_i [1 - \exp(-\frac{\Delta t_r}{\tau_i})] \quad (7.b)$$

$$\bar{E}_i(t_r) = \frac{E_i(t_r) + E_i(t_{r-1})}{2} \quad (7.c)$$

$$\Delta \epsilon''(t_r) = \mathbf{D}^{*-1} E''^{-1}(t_r) \sum_{i=1}^n [1 - \exp(-\frac{\Delta t_r}{\tau_i})] \sigma_i(t_{r-1}) + \Delta \epsilon^0(t_r) \quad (7.d)$$

$$\sigma_i(t_r) = \sigma_i(t_{r-1}) \exp(-\frac{\Delta t_r}{\tau_i}) + \mathbf{D}^* \lambda_{i,r} \bar{E}_i(t_r) [\Delta \epsilon(t_r) - \Delta \epsilon^0(t_r)] \quad (7.e)$$

$$\Delta t_r = t_r - t_{r-1} \quad (7.f)$$

e  $t_r = t(r)$  é um tempo discreto.

Podemos observar que as equações (7) são todas relacionadas ao tempo  $t_r$ , dependendo apenas das tensões  $\sigma_i(t_{r-1})$  relacionadas ao tempo  $t_{r-1}$ .

Cabe agora organizar um programa baseado no Método dos Elementos Finitos onde é implementado o algoritmo descrito pelas equações (7).

Então, para um dado "time-step"  $t_r$ , podemos montar a equação "overall":

$$\mathbf{K}^{t_r} \Delta \mathbf{u}^{t_r} = \Delta \mathbf{R}^{t_r} \quad (8)$$

Estas matrizes "overall" são montadas a partir das matrizes dos elementos:

$$\mathbf{K}_e^{t_r} = \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D}^* E''(t_r) \mathbf{B} dV \quad (9)$$

$$\Delta \mathbf{R}^{t_r} = \Delta \mathbf{R}_{F_e}^{t_r} + \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D}^* E''(t_r) \Delta \epsilon''(t_r) dV \quad (10)$$

$\Delta \mathbf{R}_{F_e}^{t_r}$  é um incremento do vetor de forças no elemento e  $E''(t_r)$  e  $\Delta \epsilon''(t_r)$  são dados pelas equações (7).

A solução da equação (8) permite a avaliação do vetor  $\Delta \epsilon(t_r)$  para um elemento:

$$\Delta \epsilon(t_r) = \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_e \quad (11)$$

Agora é possível calcular as tensões  $\sigma_i(t_r)$  e  $\sigma(t_r)$  por meio das equações (7) e (5) respectivamente. Pode-se então eliminar as tensões  $\sigma_i(t_{r-1})$ , guardar na memória  $\sigma_i(t_r)$  e ir para o próximo "time-step".

## ALGORITMO UTILIZADO PARA FORMULAÇÃO INTEGRAL

Para a formulação integral, o algoritmo utilizado é do tipo daquele proposto por Bazant<sup>9</sup> adaptado ao problema bidimensional<sup>10</sup>. Neste caso, os termos  $E''$  e  $\Delta \epsilon''$  da relação constitutiva pseudo-elástica (7) dependem de toda a história de tensões na estrutura e dos diversos valores de função de fluência ao longo do tempo, conforme as fórmulas a seguir:

$$E''(t_r) = 2/(J(t_r, t_r) + J(t_r, t_{r-1})) \quad (12)$$

$$\Delta \varepsilon''(t_r) = \sum_{s=2}^{r-1} \Delta \sigma(t_r) \frac{1}{2} [J(t_r, t'_s) + J(t_r, t'_{s-1}) - J(t_{r-1}, t'_s) - J(t_{r-1}, t'_{s-1})] + \Delta \varepsilon^0(t_r) \quad (13)$$

### EXEMPLOS COMPARATIVOS ENTRE FORMULAÇÃO INTEGRAL E FORMULAÇÃO DIFERENCIAL

Para os exemplos apresentados abaixo, utilizaram-se programas baseados nos algoritmos descritos anteriormente<sup>10</sup> além do sistema SISTER<sup>11</sup> para o cálculo de temperaturas. Os exemplos para o caso unidimensional utilizaram-se de algoritmos semelhantes àqueles utilizados para o Método dos Elementos Finitos.

#### Bloco de Concreto - Comparação dos Resultados Numéricos - Área de Memória Utilizada

Neste exemplo serão calculadas as tensões térmicas em um bloco de concreto quadrado com 3m de lado e comprimento infinito e impedido de se deslocar na direção longitudinal.

Para analisar este bloco de concreto pelo Método dos Elementos Finitos iremos considerar apenas o quadrante de coordenadas positivas. Na Figura 1 está desenhada a malha de elementos finitos, com a numeração dos elementos, bem como os apoios para se levar em consideração simetria da estrutura.

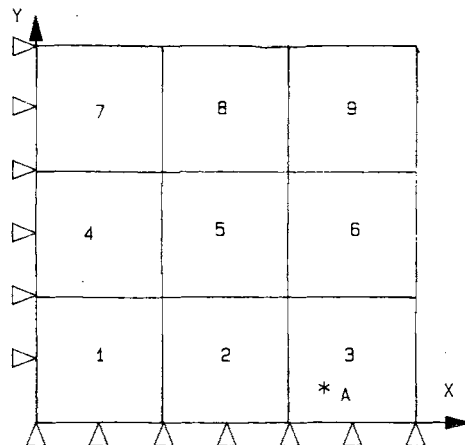


Figura 1. Malha de Elementos Finitos do bloco de concreto.

A temperatura de lançamento do concreto foi considerada igual à temperatura do concreto endurecido, estimada em 38° C. Na Figura 2 estão indicadas algumas curvas de temperaturas nodais ao longo do tempo.

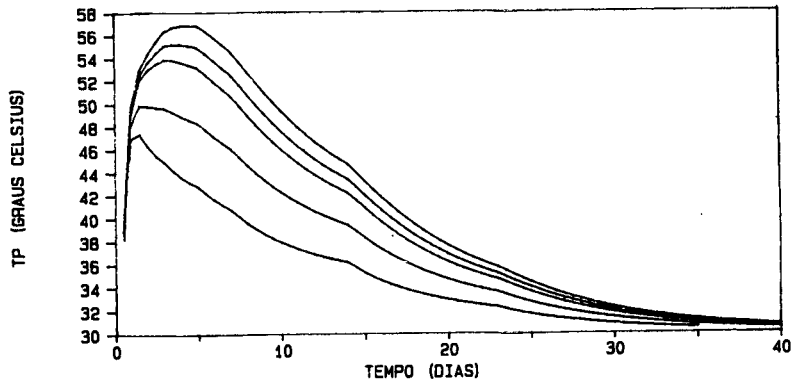
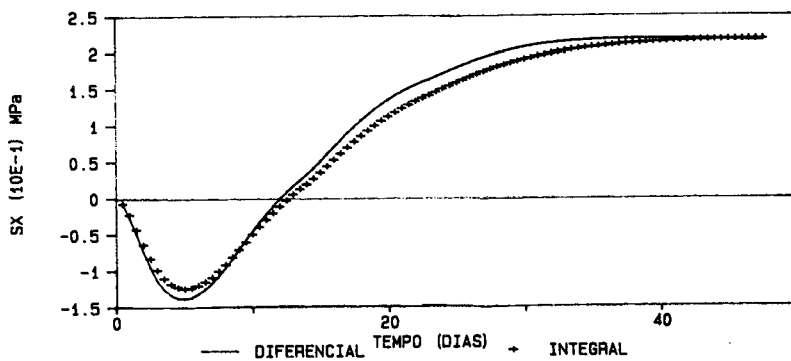
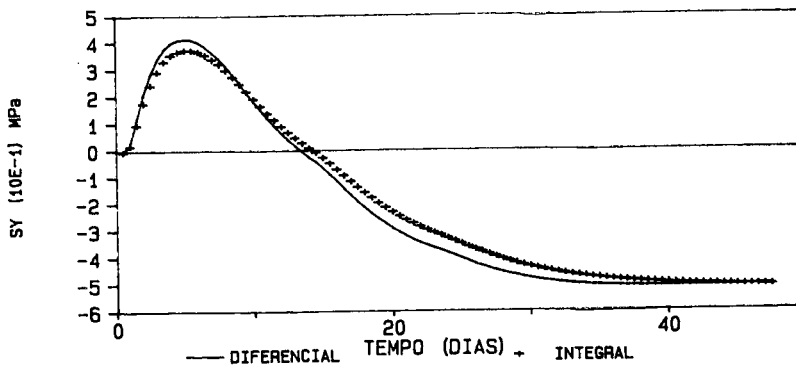


Figura 2. Temperaturas nodais.

Nas figuras 3 à 5 estão indicadas as tensões nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  do ponto de integração  $A$  do elemento 3 pela formulação integral e a curva calculada pela formulação diferencial, em função do tempo decorrido após a idade de 3 dias. Por estes gráficos podemos observar que a curva calculada fica bastante próxima aos pontos obtidos pela formulação integral. Desta maneira, fica demonstrada a equivalência entre as duas formulações através de aplicações bidimensionais do Método dos Elementos Finitos, corroborando a demonstração matemática reportada na referência<sup>8</sup>.

Figura 3. Comparação Sigma  $x$ .Figura 4. Comparação Sigma  $y$ .

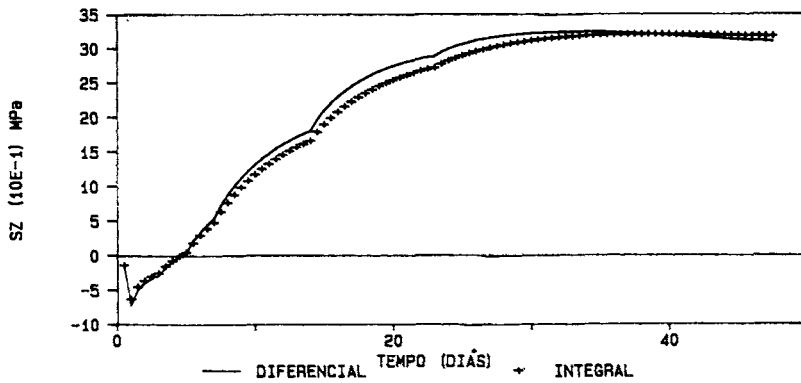


Figura 5. Comparação Sigma z.

Devemos observar que para o exemplo acima, a área de memória necessária para o armazenamento da história das tensões relativas à formulação integral foi de 52 kbytes enquanto que para a formulação diferencial foram necessários 3 kbytes para armazenamento das tensões. Neste exemplo não foram feitas comparações de tempo de processamento visto que a estruturação do programa utilizado<sup>10</sup> não permitiria avaliações conclusivas quanto a este parâmetro.

### Comparação de Tempos de Processamento

A comparação de desempenho computacional entre as formulações integral e diferencial é obtida através da aplicação dos algoritmos apresentados nos itens 3 e 4 a um problema unidirecional com um único elemento, onde uma história da deformação é aplicada uniformemente ao longo deste elemento (ver Figura 6). É importante notar que nestes casos apenas as performances dos núcleos deste algoritmos é testada, não sendo necessárias manipulações ao nível de montagem de sistema de equações, matriz de rigidez de elemento, etc.

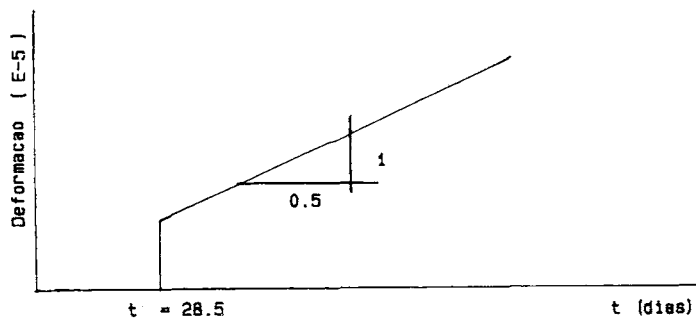


Figura 6. História de deformações.

Para o exemplo aqui relacionado, foi utilizada a função de fluência:

$$J(t, t') = 1/E(t') + F_k(t') \cdot \ln(1 + t - t') \quad (14)$$

onde

$$E(t') = t'^2 / (c_1 \cdot t'^2 + c_2 \cdot t' + c_3) \quad (15)$$

$$c_1 = 0.3800 E - 5; \quad c_2 = 0.3814 E - 4; \quad c_3 = -0.6109 E - 4.$$

$$F_k(t') = c_1 + c_2/t' \quad (16)$$

$c_1 = 0.6275 E - 6$ ;  $c_2 = 0.4349 E - 5$ .  $J(t, t')$  sendo dado em  $(\text{kg}/\text{cm}^2)^{-1}$  para  $t'$  dado em dias.

O primeiro tempo de aplicação de carga  $t'_1$  vale 28.5 dias e o intervalo de tempo foi tomado constante e igual a 0.5 dias.

A Tabela 1 apresenta os tempos de processamento para as formulações integral e diferencial, função do número de interações usadas na solução do problema.

NÚMERO DE INTERAÇÕES	TEMPO DE PROCESSAMENTO (segundos)	TEMPO DE PROCESSAMENTO (segundos)
	Diferencial	Integral
100	0.22	2.14
200	0.44	8.85
300	0.71	19.93
400	0.94	35.54
500	1.15	55.58
600	1.37	80.13
700	1.59	109.24
800	1.81	142.76
900	2.03	180.81
1000	2.25	223.28

Tabela I.

## CONCLUSÕES

Neste artigo foram mostrados os princípios das formulações do tipo integral e diferencial, para representação do problema reológico do concreto com envelhecimento, tendo sido apresentada a correspondência matemática entre as duas formulações. Além disto ficou demonstrado que os resultados obtidos pelo Método dos Elementos Finitos a partir dos programas elaborados com algoritmos baseados na formulação diferencial se ajustam muito bem aos resultados obtidos pela formulação integral para problemas bidimensionais.

Finalmente podemos concluir que os exemplos apresentados neste artigo ressaltaram a superioridade computacional da formulação diferencial em relação à formulação integral.

## REFERÊNCIAS

1. G.L.C. Pereira, "Efeitos térmicos em estruturas maciças de concreto", *Tese de M. Sc.*, COPPE/UFRJ, (1986).
2. R. Gaiofatto, "Análise teórico experimental de concreto Jovem", *Tese de M. Sc.*, COPPE/UFRJ, (1988).
3. G.L.C. Pereira, E.M.R. Fairbairn, L.A. Souza e R.A. Diniz, "Análise Térmica de Estruturas Maciças de concreto", MECOM' 88, Córdoba, Argentina, (1988).
4. Z.P. Bazant (editor), "Materials models for structural creep analysis", preprints to the 4th RILEM International Symposium, Northwestern University, Evanston, III., USA, (1986).
5. Z.P. Bazant, "Theory of creep and Shrinkage in concrete structures: a precis of recent developments", *Mechanical Today*, Vol. 2, pp. 1-93.
6. Z.P. Bazant e F. Wittman, "Creep and Shrinkage in concrete structures", *John Willey and Sons*, (1982).
7. Z.P. Bazant e S.T. Wu, "Rate type creep law of aging concrete based on Maxwell Chain", *Materials and Structures*, Vol. 7, no. 37, Paris, (1974).
8. E.M.R. Fairbairn, Q.M. Guedes e H.I. Longo, "Sobre as formulações integral e diferencial da viscoelasticidade linear com envelhecimento: aplicações ao concreto massa", *Revista Brasileira de Engenharia, Caderno de Engenharia Estrutural*, Vol. 6, no. 1, (1989).
9. Z.P. Bazant, "Numerical determination of long-range stress history from strain history in concrete", *Matériaux et Constructions*, Vol. 7, no. 27, Paris, (1972).
10. H.I. Longo, "Efeitos do comportamento reológico e das fases construtivas na análise estrutural de barragens de concreto", *Tese de D. Sc.*, COPPE/UFRJ, (1989).
11. E.M.R. Fairbairn, G.L.C. Pereira e L.A. Souza, "Sistema SISTER para cálculo de tensões térmicas em barragens de concreto", *Manuais*, Convênio COPPE/ELETRONORTE/SON-DOTÉCNICA, (1986), (1987), (1988).