Rev. Int. Mét. Num. Cálc. Dis. Ing.
Vol. **19**, **1**, 19–32 (2003)

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

Control del error de interpolación cúbica de la intersección de superficies paramétricas de forma libre

José Olivencia

Departamento de Ingeniería Matemática
Universidad de Concepción
Casilla 160-C, Concepción, Chile
Tel.: 56-41-81 32 20, Fax: 56-41-25 11 42
e-mail: jolivenc@hotmail.com

Luis Quiroz

Departamento de Ingeniería Mecánica
Universidad de Concepción
Casilla 53-C, Concepción, Chile
Tel.: 56-41-20 43 06, Fax: 56-41-25 11 42
e-mail: lquiroz@udec.cl
http://www.udec.cl/Ĩquiroz

Resumen

Se propone un método numérico de trazado capaz de producir un interpolante que aproxime la intersección de dos superficies con un error no mayor que una tolerancia dada. Conceptos de geometría diferencial son empleados para conseguir una estimación global de la curvatura de la intersección. Esto permite la determinación de un tamaño de paso constante. Se generan así puntos de la intersección. Al interpolar linealmente tales puntos, se consigue una poligonal que se encuentra dentro de la tolerancia prefijada. Es posible reducir el número de puntos de intersección que participan en la construcción de tal poligonal. Usando la geometría diferencial de la intersección de dos superficies y tomando en consideración propiedades de las curvas de Bézier polinomiales cúbicas, se logra extender la usual interpolación lineal y construir un interpolante cúbico con tamaño de paso adaptativo y dentro de la tolerancia dada. La implementación numérica del algoritmo presenta resultados satisfactorios.

ERROR CONTROL OF CUBIC INTERPOLATION OF FREE-FORM PARAMETRIC SURFACE INTERSECTION

Summary

A numerical marching method capable to produce an interpolant to bring near the intersection of two surfaces is proposed with an error not greater than a prescribed tolerance. Concepts of differential geometry are employed to get a global estimation to the curvature of the intersection. This allows to determine a constant step size. Thus, points of the intersection are generated. By linear interpolation of these points, a polygonal inside the prescribed tolerance is obtained. It is possible to reduce the number of intersection points of this polygonal. By using the differential geometry of the two surfaces intersection and taking into account properties of the polynomial Bézier curves, one achieves to extend the usual linear interpolation and building a cubic interpolation with adaptive step size and remaining inside the prescribed tolerance. The numerical implementation of the algorithm gives satisfactory results.

 ISSN: 0213–1315 Recibido: Noviembre 2001

INTRODUCCIÓN

Numerosas aplicaciones necesitan encontrar la intersección entre superficies: en el modelado de sólidos, en el método de los elementos finitos, en la evaluación de superficies en diseño asistido por computador (CAD) y en manufactura asistida por computador (CAM). En CAM, la trayectoria de la herramienta es calculada a partir de la representación por fronteras del modelo geométrico compuesta por superficies y sus intersecciones. Este cálculo debe ser efectuado en tal forma que la trayectoria permanezca dentro de una tolerancia fijada por el diseñador de la pieza que está siendo manufacturada.

Se pueden distinguir dos fuentes de error que se necesita controlar para satisfacer las tolerancias: la debida al proceso de maquinado (deformación de las herramientas y de las máquinas, posicionamiento del motor, error del control del movimiento, etc.) y la debida al modelado geométrico. Esta última puede contribuir significativamente al error de manufactura, en particular en lo relacionado a la intersección de superficies. Si las superficies son de forma libre como las NURBS, no existe una representación exacta de la intersección de las superficies. Por consiguiente, sólo los métodos aproximados son capaces de proporcionar el cálculo de la intersección. Como la intersección es aproximada, contiene un error que contribuye al error de manufactura.

En general, cuando la intersección de dos superficies no es vacía, puede ser una colección de puntos, una colección de curvas, una colección de superficies o una combinación de estos tres últimos casos. Debido a su interés práctico, por ejemplo, para modelar sólidos acotados por superficies recortadas donde es importante determinar las curvas de intersección de las superficies[1], se aborda aquí el caso donde la intersección de superficies es una colección de curvas.

La intersección de dos superficies puede ser descompuesta en una o varias componentes conexas. Los métodos numéricos de trazado son los más ampliamente usados para calcular las curvas de intersección. La etapa de preprocesamiento de un método de trazado debe servir para detectar puntos sobre cada una de las componentes de la intersección. Empezando en estos puntos, el método debe construir una secuencia de puntos que están sobre la intersección[2,3]. Los puntos de intersección resultantes serán posteriormente interpolados, obteniéndose una aproximación de la intersección.

Hay muy pocos algoritmos que encaran el problema de controlar el error de aproximación de la intersección de superficies, el cual puede ser prefijado por los requerimientos de la manufactura asistida por computador. En sus métodos de intersección de superficies, Asteasu[4] y Wu *et al.*[3] no abordan el problema. Lasser[5] lo comenta someramente en conexión con las aplicaciones a la manufactura. Chen *et al.*[6], Faux *et al.*[7] y Stoyanov[8] tratan el problema, pero no consiguen un control efectivo del error de la aproximación. En la sección siguiente se muestra la razón esencial por las cual estos métodos son falibles.

En este trabajo se muestra una manera segura de estimar el error de la aproximación dada por el interpolante de los puntos de intersección generados por un método de trazado. Asumiendo que la etapa de preprocesamiento ha sido ya realizada con éxito, se propone un método numérico de trazado que produce un interpolante que aproxima la intersección con un error no mayor que una tolerancia dada. Haciendo uso de la estimación obtenida del error de aproximación, se determina un tamaño de paso constante. Esto permite generar puntos de la intersección que al ser interpolados linealmente originan una poligonal que está más cerca de la curva de intersección que lo permitido por la tolerancia prefijada.

Reduciendo el número de puntos de intersección generados precedentemente, es posible extender la usual interpolación lineal y construir un interpolante cúbico con tamaño de paso adaptativo y dentro de la tolerancia dada. En la implementación numérica del algoritmo se compara el caso lineal con el cúbico.

SOBRE LA TEORÍA LOCAL DE CURVAS

Una curva y su círculo osculador son aproximadamente congruentes en alguna vecindad de su punto de contacto tangencial[9]. La proyección ortogonal de la curva sobre su plano osculador correspondiente al punto de contacto tangencial está localmente a un lado de la recta tangente a la curva en el punto de contacto, siendo localmente su concavidad hacia el centro del círculo osculador (Figuras 1, 2 y 3). En alguna vecindad de su punto de contacto tangencial, la curva tiene el siguiente comportamiento[10]: Si la curvatura de la curva está disminuyendo o aumentando en el punto de contacto, la proyección ortogonal de la curva sobre su correspondiente plano osculador corta tangencialmente al círculo osculador en el punto de contacto. Si la curvatura está disminuyendo (aumentando), va desde el interior (exterior) al exterior (interior) del círculo osculador (Figura 1). La curvatura es estrictamente decreciente (creciente) en el sentido del trazo de la curva. Si la curvatura no disminuye ni aumenta en el punto de contacto, la curvatura de la curva tiene un valor mínimo o un valor máximo en tal punto. La proyección ortogonal de la curva sobre su plano osculador correspondiente al punto de contacto tangencial estará localmente, excepto el punto de contacto, en el interior (exterior) del círculo osculador, puesto que la curvatura tiene un valor mínimo (máximo) y torsión nula en tal punto (Figuras 2 y 3).

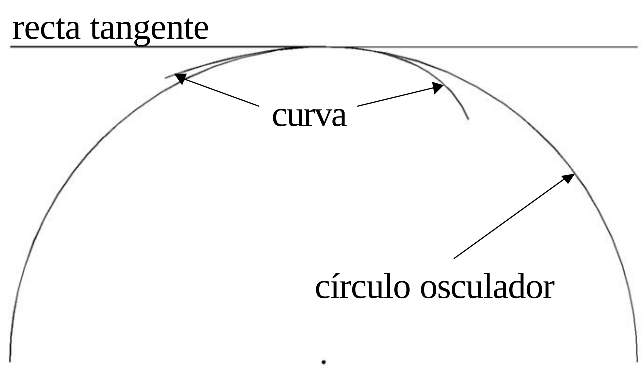

Figura 1. Curva con recta tangente y círculo osculador, cuando la curvatura disminuye o aumenta. Si disminuye (aumenta), el trazo de la curva es hacia la izquierda (derecha)

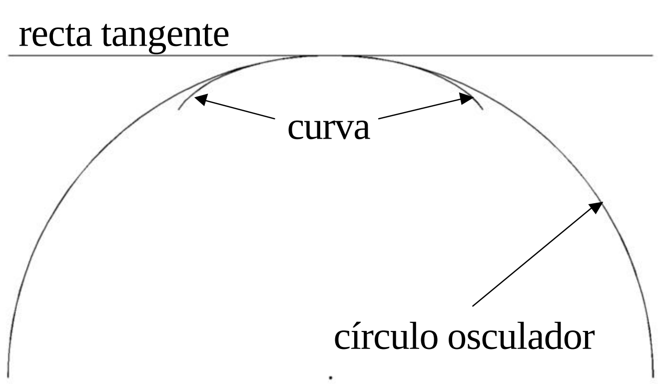

Figura 2. Curva con recta tangente y círculo osculador, cuando la curvatura es un valor mínimo

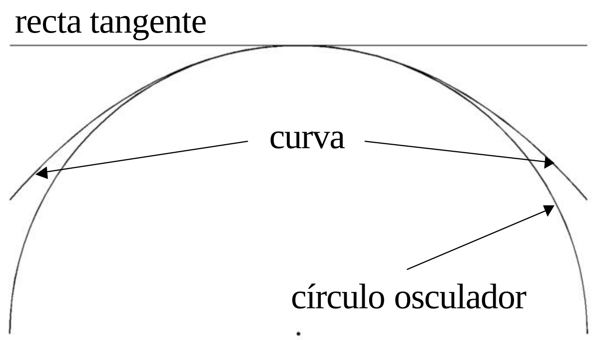

Figura 3. Curva con recta tangente y círculo osculador, cuando la curvatura es un valor máximo

Los métodos que usan geometría diferencial local para proponer un tamaño de paso adaptativo en la generación de los puntos de intersección pueden fallar en satisfacer la tolerancia de error prefijada. En principio, existe siempre el riesgo de que el tamaño de paso no sea lo suficientemente pequeño como para que pueda satisfacer la tolerancia requerida.

En base a las consideraciones precedentes sobre el círculo osculador, se percibe otro problema. Con la intención de resolver la dificultad de hallar un tamaño de paso adaptativo que satisfaga la tolerancia permitida, se acostumbra aproximar la curva de intersección con su círculo osculador, reemplazándola por éste en una vecindad de su punto de contacto tangencial[6,7]. En cualquier sentido del trazo existe un tamaño de paso suficientemente pequeño (en general desconocido) que permite satisfacer la tolerancia requerida, puesto que la proyección ortogonal de la curva sobre su plano osculador se encuentra, en una vecindad de su punto de contacto, entre la recta tangente y el círculo osculador. Esto puede suceder cuando la curvatura tiene un valor máximo en el punto de contacto (Figura 3). En cualquier otro caso de torsión nula siempre hay un sentido del trazo de la curva (los dos cuando la curvatura tiene un valor mínimo en el punto de contacto) en el cual la proyección ortogonal local sobre su correspondiente plano osculador cae en el interior del círculo osculador, pues la curvatura estaría aumentando (Figuras 1 y 2). En tales casos, que son más frecuentes, para cualquier tamaño de paso suficientemente pequeño, interesa considerar los arcos de esa longitud desde el punto de contacto, sobre la curva y sobre su círculo osculador, puesto que la desviación máxima del arco sobre la curva a la cuerda que une sus extremos es mayor que la desviación máxima del arco sobre su círculo osculador a la cuerda que une sus extremos (Figura 1). Esta propiedad de la geometría local de las curvas provoca, naturalmente, falibilidad en los métodos de trazado adaptativo basados en reemplazar localmente la curva por su círculo osculador.

Un problema similar se percibe cuando la aproximación inicial del próximo punto generado por un método de trazado cae sobre una parábola que aproxima la intersección en una vecindad del último punto encontrado[8]. La longitud de la parábola entre los dos puntos es calculada de manera que su desviación máxima de la cuerda que une los puntos no sea mayor que una tolerancia dada. Esto se hace con la intención de que el subsecuente interpolante aproxime la intersección con la tolerancia requerida. El problema se presenta cuando se avanza en el sentido del trazo en el cual la curvatura de la curva está aumentando. En ese sentido la curvatura de la parábola precisamente disminuye, causando que la desviación máxima de la cuerda referente a la curva sea mayor que la desviación máxima de la cuerda referente al correspondiente arco de la parábola.

ESTIMACIÓN DEL ERROR DE INTERPOLACIÓN LINEAL

En esta sección se propone un método para estimar el error del proceso de interpolación lineal de la intersección de superficies. Para el efecto, se considera que la curva de intersección está parametrizada por longitud de arco. Haciendo uso de las curvaturas normales de la curva de intersección sobre cada una de las superficies, se consigue obtener una cota superior global para la curvatura de la curva de intersección.

Sea pues $\mathbf{c}(s)$ la curva de intersección 3D parametrizada por longitud de arco s definida sobre $[s_i, s_i + \Delta s_i]$ y $\mathbf{p}(s)$ el polinomio lineal 3D definido sobre $[s_i, s_i + \Delta s_i]$ tal que

$$\mathbf{p}(s_i) = \mathbf{c}(s_i), \qquad \mathbf{p}(s_i + \Delta s_i) = \mathbf{c}(s_i + \Delta s_i)$$

Es conocido[11], que el error de interpolación de $\mathbf{p}(s)$ en s viene dado por

$$\mathbf{c}(s) - \mathbf{p}(s) = \frac{1}{2}(s - s_i)(s - s_i - \Delta s_i)\bar{\mathbf{c}}^{(2)}$$

donde $\bar{\mathbf{c}}^{(2)} = (c_1^{(2)}(\xi_1), c_2^{(2)}(\xi_2), c_3^{(2)}(\xi_3))$, con ξ_j, $j = 1, 2, 3$ (en general desconocido) sobre $[s_i, s_i + \Delta s_i]$. Se tiene que[10]

$$|\mathbf{c}(s) - \mathbf{p}(s)| \leq \frac{3}{8} \max |\mathbf{c}^{(2)}(s)| (\Delta s_i)^2 = \frac{3}{8} \max k(s) (\Delta s_i)^2$$

La curvatura k de la curva de intersección $\mathbf{c}$ de las dos superficies $\mathbf{S}^1$ y $\mathbf{S}^2$ puede ser expresada en términos de las curvaturas normales $k_{\mathrm{n}1}^1$ y $k_{\mathrm{n}1}^2$ de la curva sobre $\mathbf{S}^1$ y $\mathbf{S}^2$, respectivamente, con las normales unitarias $\mathbf{N}^1$ y $\mathbf{N}^2$ a las dos superficies[7,9,12]. En efecto, considerando el sistema de Frenet[9] $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ de la curva, se tiene

$$\mathbf{t} = \pm \frac{\mathbf{N}^1 \times \mathbf{N}^2}{|\mathbf{N}^1 \times \mathbf{N}^2|}$$

Como $\mathbf{b} = -\mathbf{n} \times \mathbf{t}$, se tiene, expandiendo el triple producto vectorial,

$$k\mathbf{b} = \pm \frac{k\mathbf{n} \times (\mathbf{N}^1 \times \mathbf{N}^2)}{|\mathbf{N}^1 \times \mathbf{N}^2|} = \pm \frac{k_{\mathrm{n}1}^1 \mathbf{N}^2 - k_{\mathrm{n}1}^2 \mathbf{N}^1}{|\mathbf{N}^1 \times \mathbf{N}^2|}$$

Por consiguiente,

$$k = \frac{|k_{\mathrm{n}1}^1 \mathbf{N}^2 - k_{\mathrm{n}1}^2 \mathbf{N}^1|}{|\mathbf{N}^1 \times \mathbf{N}^2|} \leq \frac{|k_{\mathrm{n}1}^1| + |k_{\mathrm{n}1}^2|}{|\mathbf{N}^1 \times \mathbf{N}^2|} \leq \frac{|k^1| + |k^2|}{\operatorname{sen}\theta}$$

dado que cada uno de los valores absolutos de las curvaturas normales $|k_{\mathrm{n}1}^i|$ puede ser superiormente acotado por el máximo de los valores absolutos de las curvaturas principales de la superficie $\mathbf{S}^i$, $|k^i|$. Si las superficies no son tangenciales, es decir, si $\operatorname{sen}\theta \geq c > 0$, para algún $c > 0$, se tiene

$$|\mathbf{c}(s) - \mathbf{p}(s)| \leq \frac{3}{8} \frac{|k^1| + |k^2|}{c} (\Delta s_i)^2 = \frac{3}{8} K_1 (\Delta s_i)^2$$

lo que proporciona una manera segura de estimar el error del proceso de interpolación lineal de la curva de intersección de dos superficies.

CONTROL DEL ERROR DE INTERPOLACIÓN LINEAL

Con la estimación obtenida en la sección precedente, se puede ahora construir un método para generar puntos de la intersección que, al ser posteriormente interpolados, producirán una poligonal que aproxima a la intersección con una tolerancia dada.

Sea ε una tolerancia de error, suficientemente pequeña, dada, por ejemplo, por criterios de manufactura o por otras consideraciones. Se encuentran puntos de intersección de las superficies separados por un tamaño de paso Δs constante y suficientemente pequeño ($K_1 \Delta s \leq \pi/2$) tal que

$$\Delta s \leq \sqrt{\frac{8}{3}\frac{\varepsilon}{K_1}} = L$$

Más precisamente (Figura 4), se considera el punto $\mathbf{c}(s)$ en la curva de intersección $\mathbf{c}$ y el segmento circular de longitud L y radio $1/K_1$ tangencial a $\mathbf{c}$ en $\mathbf{c}(s)$. Se intersecta la superficie esférica $\mathbf{S}$ de centro en $\mathbf{c}(s)$ y radio $(2/K_1)\,\mathrm{sen}((K_1/2)L)$ con $\mathbf{c}$. Este procedimiento determina una poligonal que aproxima la curva de intersección con una muy segura tolerancia de error no mayor que ε, cuyos vértices están sobre la intersección.

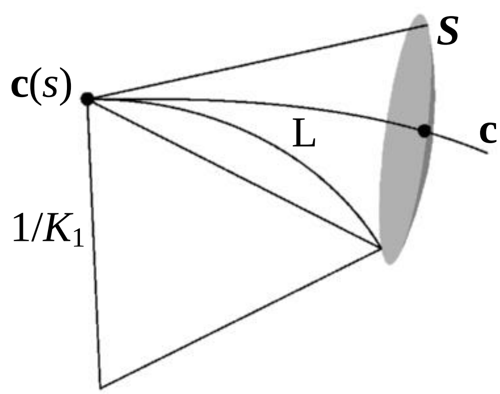

Figura 4. Control del error de interpolación lineal

CONTROL DEL ERROR CON INTERPOLACIÓN CÚBICA ADAPTATIVA

Lo que se busca, además de la precisión, naturalmente a expensas de la velocidad, es minimizar el número de puntos de interpolación para un óptimo proceso de maquinado. Es posible reducir el número de puntos de interpolación que participan en la construcción de la poligonal precedente a fin de obtener un interpolante cúbico con tamaño de paso adaptativo y dentro de la tolerancia dada.

Si $\mathbf{p}(s)$ es el polinomio cúbico 3D definido sobre $[s_i, s_i + \Delta s_i]$ tal que

$$\mathbf{p}(s_i) = \mathbf{c}(s_i), \qquad \mathbf{p}(s_i + \Delta s_i) = \mathbf{c}(s_i + \Delta s_i)$$

$$\mathbf{p}^{(1)}(s_i) = \mathbf{c}^{(1)}(s_i), \qquad \mathbf{p}^{(1)}(s_i + \Delta s_i) = \mathbf{c}^{(1)}(s_i + \Delta s_i)$$

es sabido[11], que el error de interpolación de $\mathbf{p}(s)$ en s viene dado por

$$\mathbf{c}(s) - \mathbf{p}(s) = \frac{1}{4!}(s - s_i)^2 (s - s_i - \Delta s_i)^2 \bar{\mathbf{c}}^{(4)}$$

donde $\bar{\mathbf{c}}^{(4)} = (c_1^{(4)}(\xi_1), c_2^{(4)}(\xi_2), c_3^{(4)}(\xi_3))$, con $\xi_j,\ j = 1,2,3$ (en general desconocido) sobre $[s_i, s_i + \Delta s_i]$. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{c}(s) - \mathbf{p}(s)| &\leq \frac{3}{384} \max |\mathbf{c}^{(4)}(s)|(\Delta s_i)^4 = \\
&= \frac{3}{384} \max \sqrt{(3kk^{(1)})^2 + (k^{(2)} - k\tau^2 - k^3)^2 + (2k^{(1)}\tau + k\tau^{(1)})^2}(s)(\Delta s_i)^4
\end{aligned}
$$

Así pues, dada ε una tolerancia de error, tomando $\varepsilon_c < \varepsilon$, se determina, en primer lugar, una poligonal que aproxime la curva de intersección con una tolerancia de error no mayor que ε_c, cuyos vértices están sobre la intersección.

Luego, se selecciona de los puntos de intersección encontrados antes una secuencia de puntos pertenecientes a la intersección de acuerdo a un tamaño de paso adaptativo dado por Δs_i, donde

$$
\Delta s_i \leq \sqrt[4]{\frac{384}{3} \frac{\varepsilon - \varepsilon_c}{(\sqrt{((3kk^{(1)})^2 + (k^{(2)} - k\tau^2 - k^3)^2 + (2k^{(1)}\tau + k\tau^{(1)})^2})_i}}
$$

Una buena aproximación de Δs_i viene dada sumando, desde el punto inicial $\mathbf{c}(s_i)$, las longitudes de segmentos consecutivos de la poligonal construida antes. Usando la propiedad de subdivisión de las curvas de Bézier polinomiales, que puede llevarse a cabo eficientemente con el algoritmo de de Casteljau[11], se calcula en cada paso la distancia del segmento de la curva de Bézier cúbica 3D $\mathbf{p}(s)$ definida sobre $[s_i, s_i + \Delta s_i]$ tal que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}(s_i) &= \mathbf{c}(s_i), & \mathbf{p}(s_i + \Delta s_i) &= \mathbf{c}(s_i + \Delta s_i) \\
\mathbf{p}^{(1)}(s_i) &= \mathbf{c}^{(1)}(s_i), & \mathbf{p}^{(1)}(s_i + \Delta s_i) &= \mathbf{c}^{(1)}(s_i + \Delta s_i)
\end{aligned}
$$

a la correspondiente porción de la poligonal obtenida antes. Si esta distancia es mayor que $\varepsilon - \varepsilon_c$, lo cual podría suceder si Δs_i no es suficientemente pequeño, se toma un Δs_i menor y se hace nuevamente el proceso hasta que la distancia sea no mayor que $\varepsilon - \varepsilon_c$. Éste será un confiable Δs_i a fin de controlar el error por ε y con un tamaño de paso adaptativo.

El conocimiento de $\mathbf{c}(s_i)$, $\mathbf{c}(s_i + \Delta s_i)$, $\mathbf{c}^{(1)}(s_i)$ y $\mathbf{c}^{(1)}(s_i + \Delta s_i)$ permite determinar la curva de Bézier polinomial cúbica interpolante

$$
\mathbf{p}(s) = \sum_{j=0}^{3} B_j^3(s)\mathbf{b}_j, \qquad s \in [s_i, s_i + \Delta s_i]
$$

$$
B_j^3(s) := \binom{3}{j} \frac{(s_i + \Delta s_i - s)^{3-j}(s - s_i)^j}{(\Delta s_i)^3}, \quad s \in [s_i, s_i + \Delta s_i] \quad j = 0(1)3
$$

son los cuatro polinomios de Bernstein de grado 3 en s sobre $[s_i, s_i + \Delta s_i]$. Los cuatro coeficientes $\mathbf{b}_j,\ j = 0(1)3$, son los puntos de Bézier, que son encontrados como las soluciones del sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}(s_i) &= \mathbf{b}_0, & \mathbf{c}(s_i + \Delta s_i) &= \mathbf{b}_3 \\
\mathbf{c}^{(1)}(s_i) &= (\Delta s_i)^{-1} 3(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0), & \mathbf{c}^{(1)}(s_i + \Delta s_i) &= (\Delta s_i)^{-1} 3(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2)
\end{aligned}
$$

Se percibe pues la necesidad de conocer la geometría diferencial local de la intersección de dos superficies. Concretamente, si se desea un interpolante cúbico, se debe saber calcular hasta la derivada de cuarto orden, en puntos de la curva de intersección. Esto ha sido discutido por Ye *et al.*[12]. En la sección siguiente se indica cómo proceder en el cálculo de estas propiedades de la geometría diferencial local de la intersección entre dos superficies.

GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE LA CURVA DE INTERSECCIÓN

Dada una curva 3D $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ parametrizada por longitud de arco s, de la geometría diferencial de curvas[9], se tiene que $\mathbf{c}^{(1)} = \mathbf{t}$ es el vector tangente unitario de $\mathbf{c}(s)$ en s y $\mathbf{c}^{(2)} = k\mathbf{n}$, donde $\mathbf{n}$ y k son el vector normal unitario y la curvatura, respectivamente, de $\mathbf{c}(s)$ en s. El vector binormal unitario $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ es tal que $\mathbf{b}^{(1)} = -\tau\mathbf{n}$, siendo τ la torsión de $\mathbf{c}(s)$ en s. El triedro $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ constituye una base ortonormal ordenada positivamente orientada, la base de Frenet, que satisface el sistema de ecuaciones diferenciales, las ecuaciones de Frenet.

$$\mathbf{t}^{(1)} = k\mathbf{n}$$

$$\mathbf{n}^{(1)} = -kt + \tau\mathbf{b}$$

$$\mathbf{b}^{(1)} = -\tau\mathbf{n}$$

Derivando reiteradamente con respecto a s y expresando en términos de la base de Frenet, se tiene

$$\mathbf{c}^{(3)} = -k^2\mathbf{t} + k^{(1)}\mathbf{n} + k\tau\mathbf{b}$$

$$\mathbf{c}^{(4)} = -3kk^{(1)}\mathbf{t} + (k^{(2)} - k\tau^2 - k^3)\mathbf{n} + (2k^{(1)}\tau + k\tau^{(1)})\mathbf{b}$$

Dada una superficie paramétrica $\mathbf{S}(u, v)$ de la geometría diferencial de superficies[9], se tiene que

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v}{|\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v|}$$

es el vector normal unitario de $\mathbf{S}(u, v)$ en (u, v). $E = \mathbf{S}_u\mathbf{S}_u$, $F = \mathbf{S}_u\mathbf{S}_v$ y $G = \mathbf{S}_v\mathbf{S}_v$ son los coeficientes de la primera forma fundamental. Similarmente, $e = \mathbf{S}_{uu}\mathbf{N}$, $f = \mathbf{S}_{uv}\mathbf{N}$ y $g = \mathbf{S}_{vv}\mathbf{N}$ son los coeficientes de la segunda forma fundamental.

Una curva 2D, dada por $(u, v)(s) = (u(s), v(s))$, define una curva 3D $\mathbf{c}(s) = \mathbf{S}(u(s), v(s))$ parametrizada por longitud de arco sobre la superficie paramétrica $\mathbf{S}(u, v)$. La primera derivada de $\mathbf{c}(s)$ se obtiene directamente

$$\mathbf{c}^{(1)} = \mathbf{S}_u u^{(1)} + \mathbf{S}_v v^{(1)} \tag{1}$$

De manera similar se pueden obtener las derivadas de orden mayor de $\mathbf{c}(s)$

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^{(2)} &= \mathbf{S}_u u^{(2)} + \mathbf{S}_v v^{(2)} + \\ &+ \mathbf{S}_{uu}(u^{(1)})^2 + 2\mathbf{S}_{uv}u^{(1)}v^{(1)} + \mathbf{S}_{vv}(v^{(1)})^2\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^{(3)} &= \mathbf{S}_u u^{(3)} + \mathbf{S}_v v^{(3)} + \\ &+ 3(\mathbf{S}_{uu}u^{(1)}u^{(2)} + \mathbf{S}_{uv}(u^{(2)}v^{(1)} + u^{(1)}v^{(2)}) + \mathbf{S}_{vv}v^{(1)}v^{(2)}) + \\ &+ \mathbf{S}_{uuu}(u^{(1)})^3 + 3\mathbf{S}_{uuv}(u^{(1)})^2v^{(1)} + 3\mathbf{S}_{uvv}u^{(1)}(v^{(1)})^2 + \mathbf{S}_{vvv}(v^{(1)})^3\end{aligned} \tag{3}$$

De manera similar se podría obtener la derivada de cuarto orden o incluso de mayor orden.

Dadas las superficies $\mathbf{S}^1(u_1, v_1)$ y $\mathbf{S}^2(u_2, v_2)$

$$\mathbf{t} = \pm\frac{\mathbf{N}^1 \times \mathbf{N}^2}{|\mathbf{N}^1 \times \mathbf{N}^2|}$$

es el vector tangente unitario de la curva de intersección. Naturalmente, $\mathbf{N}^1\mathbf{N}^2 = \cos\theta$, siendo θ el ángulo que forman los vectores normales unitarios $\mathbf{N}^1$ y $\mathbf{N}^2$ de las superficies $\mathbf{S}^1$ y $\mathbf{S}^2$, respectivamente. Más aún

$$\gamma\mathbf{n} + \delta\mathbf{b} = \alpha\mathbf{N}^1 + \beta\mathbf{N}^2 \tag{4}$$

Multiplicando escalarmente ambos miembros de (1) por $\mathbf{S}_u$ y $\mathbf{S}_v$, respectivamente

$$\mathbf{S}_u\mathbf{c}^{(1)} = \mathbf{S}_u(\mathbf{S}_u u^{(1)} + \mathbf{S}_v v^{(1)})$$
$$\mathbf{S}_v\mathbf{c}^{(1)} = \mathbf{S}_v(\mathbf{S}_u u^{(1)} + \mathbf{S}_v v^{(1)})$$

se obtiene

$$\begin{cases} Eu^{(1)} + Fv^{(1)} = \mathbf{S}_u\mathbf{c}^{(1)} \\ Fu^{(1)} + Gv^{(1)} = \mathbf{S}_v\mathbf{c}^{(1)} \end{cases}$$

de donde se calculan $u^{(1)}$ y $v^{(1)}$. Multiplicando escalarmente ambos miembros de (2) por $\mathbf{N}$, se obtiene

$$\begin{aligned} k_{\mathrm{n}1} &= \mathbf{c}^{(2)}\mathbf{N} = (\mathbf{S}_u u^{(2)} + \mathbf{S}_v v^{(2)} + \mathbf{S}_{uu}(u^{(1)})^2 + 2\mathbf{S}_{uv}u^{(1)}v^{(1)} + \mathbf{S}_{vv}(v^{(1)})^2)\mathbf{N} = \\ &= e(u^{(1)})^2 + 2fu^{(1)}v^{(1)} + g(v^{(1)})^2 \end{aligned}$$

Por (4), $\mathbf{c}^{(2)} = k\mathbf{n} = \alpha_1\mathbf{N}^1 + \beta_1\mathbf{N}^2$, se tiene que

$$\begin{cases} \alpha_1 + (\cos\theta)\beta_1 = \mathbf{c}^{(2)}\mathbf{N}^1 = k^1_{\mathrm{n}1} \\ (\cos\theta)\alpha_1 + \beta_1 = \mathbf{c}^{(2)}\mathbf{N}^2 = k^2_{\mathrm{n}1} \end{cases}$$

De modo que

$$\mathbf{c}^{(2)} = \frac{k^1_{\mathrm{n}1} - k^2_{\mathrm{n}1}\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\mathbf{N}^1 + \frac{k^2_{\mathrm{n}1} - k^1_{\mathrm{n}1}\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\mathbf{N}^2 \qquad \text{y} \quad k = |\mathbf{c}^{(2)}|$$

Teniendo calculados $\mathbf{t}$, $\mathbf{c}^{(2)}$ y k, es posible ahora calcular

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{c}^{(2)}}{k} \qquad \text{y} \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$

Multiplicando ahora escalarmente ambos miembros de (2) por $\mathbf{S}_u$ y $\mathbf{S}_v$, respectivamente

$$\mathbf{S}_u\mathbf{c}^{(2)} = \mathbf{S}_u\Big(\mathbf{S}_u u^{(2)} + \mathbf{S}_v v^{(2)} + \mathbf{S}_{uu}(u^{(1)})^2 + 2\mathbf{S}_{uv}u^{(1)}v^{(1)} + \mathbf{S}_{vv}(v^{(1)})^2\Big)$$
$$\mathbf{S}_v\mathbf{c}^{(2)} = \mathbf{S}_v\Big(\mathbf{S}_u u^{(2)} + \mathbf{S}_v v^{(2)} + \mathbf{S}_{uu}(u^{(1)})^2 + 2\mathbf{S}_{uv}u^{(1)}v^{(1)} + \mathbf{S}_{vv}(v^{(1)})^2\Big)$$

se obtiene

$$\begin{cases} Eu^{(2)} + Fv^{(2)} = \mathbf{S}_u\mathbf{c}^{(2)} - \dfrac{E_u}{2}(u^{(1)})^2 - E_v u^{(1)}v^{(1)} - \left(F_v - \dfrac{G_u}{2}\right)(v^{(1)})^2 \\ Fu^{(2)} + Gv^{(2)} = \mathbf{S}_v\mathbf{c}^{(2)} - \left(F_u - \dfrac{E_v}{2}\right)(u^{(1)})^2 - G_u u^{(1)}v^{(1)} - \dfrac{G_v}{2}(v^{(1)})^2 \end{cases}$$

de donde se obtiene $u^{(2)}$ y $v^{(2)}$. Multiplicando escalarmente ambos miembros de (3) por $\mathbf{N}$, se obtiene

$$\begin{aligned} k_{\mathrm{n}2} = \mathbf{c}^{(3)}\mathbf{N} &= (\mathbf{S}_u u^{(3)} + \mathbf{S}_v v^{(3)} + 3(\mathbf{S}_{uu}u^{(1)}u^{(2)} + \mathbf{S}_{uv}(u^{(2)}v^{(1)} + u^{(1)}v^{(2)}) + \mathbf{S}_{vv}v^{(1)}v^{(2)}) + \\ &+ \mathbf{S}_{uuu}(u^{(1)})^3 + 3\mathbf{S}_{uuv}(u^{(1)})^2v^{(1)} + 3\mathbf{S}_{uvv}u^{(1)}(v^{(1)})^2 + \mathbf{S}_{vvv}(v^{(1)})^3)\mathbf{N} = \\ &= 3(eu^{(1)}u^{(2)} + f(u^{(2)}v^{(1)} + u^{(1)}v^{(2)}) + gv^{(1)}v^{(2)}) + \\ &+ \mathbf{S}_{uuu}\mathbf{N}(u^{(1)})^3 + 3\mathbf{S}_{uuv}\mathbf{N}(u^{(1)})^2v^{(1)} + 3\mathbf{S}_{uvv}\mathbf{N}u^{(1)}(v^{(1)})^2 + \mathbf{S}_{vvv}\mathbf{N}(v^{(1)})^3 \end{aligned}$$

Por (4), $\mathbf{c}^{(3)} = -k^2\mathbf{t} + k^{(1)}\mathbf{n} + k\tau\mathbf{b} = -k^2\mathbf{t} + \alpha_2\mathbf{N}^1 + \beta_2\mathbf{N}^2$, se tiene que

$$\begin{cases} \alpha_2 + (\cos\theta)\beta_2 = \mathbf{c}^{(3)}\mathbf{N}^1 = k_{\mathrm{n}2}^1 \\ (\cos\theta)\alpha_2 + \beta_2 = \mathbf{c}^{(3)}\mathbf{N}^2 = k_{\mathrm{n}2}^2 \end{cases}$$

De modo que

$$\mathbf{c}^{(3)} = -k^2\mathbf{t} + \frac{k_{\mathrm{n}2}^1 - k_{\mathrm{n}2}^2\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\mathbf{N}^1 + \frac{k_{\mathrm{n}2}^2 - k_{\mathrm{n}2}^1\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\mathbf{N}^2$$

Es posible ahora calcular

$$\tau = \frac{\mathbf{c}^{(3)}\mathbf{b}}{k} \qquad \text{y} \quad k^{(1)} = \mathbf{c}^{(3)}\mathbf{n}$$

Procediendo de manera similar, se podría obtener $u^{(3)}$, $v^{(3)}$ y $k_{\mathrm{n}3}$ (para ambas superficies), por ende $\mathbf{c}^{(4)}$, $\tau^{(1)}$ y $k^{(2)}$.

IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

En esta sección se muestra la aplicación del método propuesto en el cálculo de la curva de intersección de dos superficies de Bézier producto tensorial con una tolerancia de error prefijada. La intersección de las superficies consideradas estará compuesta de cinco componentes, una curva cerrada y cuatro curvas abiertas en las esquinas de una de las superficies, como se visualiza en la Figura 5. Para aproximar la intersección, el proceso de interpolación es efectuado con el método propuesto, como sigue.

El valor máximo de los valores absolutos de las curvaturas principales de las superficies $\mathbf{S}^1$ y $\mathbf{S}^2$ es $|k^1| = 1,1233$ y $|k^2| = 0,8779$, respectivamente. Se estima que el ángulo entre las superficies intersectadas no es menor que 20º. Ahora, sea $\varepsilon = 0,02$ la tolerancia de error permitida. Tomando $\varepsilon_c << \varepsilon$, se tiene, para la primera etapa del método propuesto, un tamaño de paso constante y suficientemente pequeño como para garantizar la convergencia de la iteración de Newton–Raphson involucrada. Esta primera etapa produce una poligonal cerrada y cuatro poligonales abiertas congruentes, que aproximan la intersección con una muy segura tolerancia de error no mayor que ε_c.

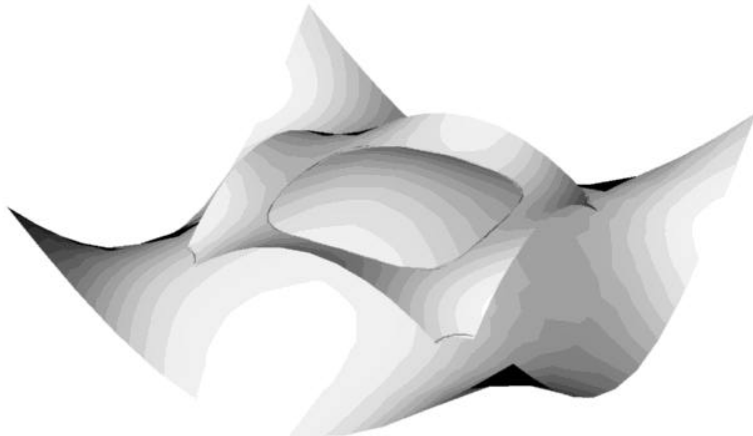

Figura 5. Intersección de dos superficies de Bézier

Para el caso de interpolación lineal adaptativa, la segunda etapa del método propuesto puede usar naturalmente un tamaño de paso adaptativo dado por

$$\Delta s_i = \sqrt{8\frac{\varepsilon - \varepsilon_c}{k_i}}$$

El valor de la curvatura k_i en cada punto ajusta en una manera apropiada el tamaño de paso adaptativo. Esta segunda etapa entrega 28 puntos de interpolación para la componente cerrada de la intersección y 3 puntos de interpolación para cada una de las cuatro componentes abiertas (Figura 6a). Al unir con segmentos de recta cada par de puntos consecutivos en cada una de las componentes de la intersección, se obtiene un interpolante lineal a trozos cerrado y cuatro interpolantes lineales a trozos abiertos, cuya distancia a la poligonal compuesta construida en la primera etapa no es mayor que $\varepsilon - \varepsilon_c$ (Figura 6b).

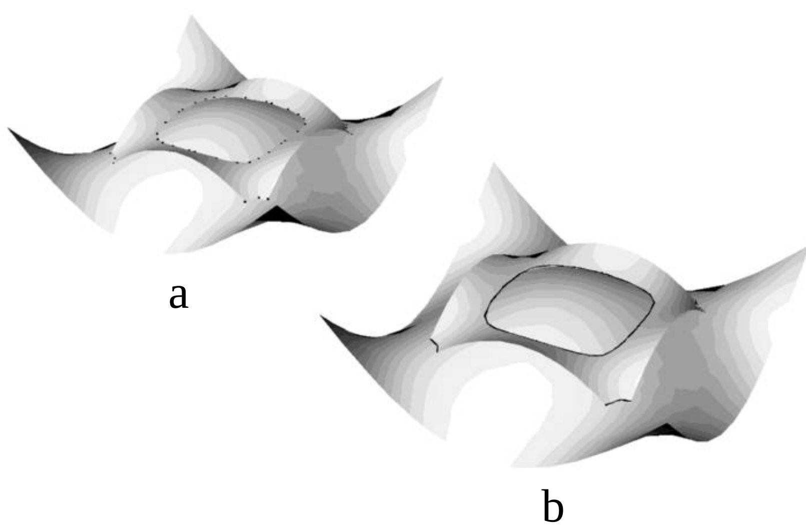

Figura 6. Interpolación lineal adaptativa

Por tanto, éste es un muy confiable interpolante lineal adaptativo que se encuentra dentro de la tolerancia prescrita $\varepsilon = 0,02$. La Figura 7a muestra el gráfico de errores de una de las cuartas partes congruentes del interpolante cerrado. El gráfico de errores de uno de los interpolantes abiertos se muestra en la Figura 7b.

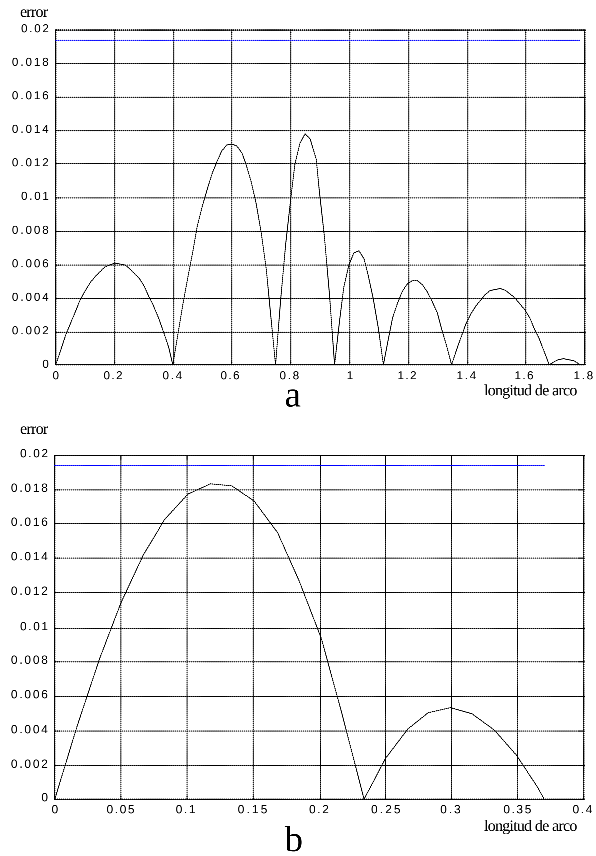

Figura 7. Gráfica de errores de la interpolación lineal adaptativa

Para el caso de interpolación cúbica adaptativa, la segunda etapa del método propuesto puede usar naturalmente un tamaño de paso adaptativo dado por

$$\Delta s_i = \sqrt[4]{384 \frac{\varepsilon - \varepsilon_c}{(\sqrt{((3kk^{(1)})^2 + (k^{(2)} - k\tau^2 - k^3)^2 + (2k^{(1)}\tau + k\tau^{(1)})^2)_i}}}$$

El valor del denominador en la cantidad subradical en cada punto ajusta en una manera apropiada el tamaño de paso adaptativo. Esta segunda etapa proporciona 12 puntos de interpolación para la componente cerrada de la intersección y 2 puntos de interpolación para cada una de las cuatro componentes abiertas (Figura 8a). Al unir con curvas de Bézier cúbicas cada par de puntos consecutivos en cada una de las componentes de la intersección (ver ampliaciones en Figuras 8b y 8c), se obtiene un interpolante cúbico a trozos cerrado y cuatro interpolantes cúbicos abiertos, cuya distancia a la poligonal compuesta construida en la primera etapa no es mayor que $\varepsilon - \varepsilon_c$. Se obtiene así, un muy confiable interpolante cúbico adaptativo (Figura 8d), que se encuentra dentro de la tolerancia de error prescrita $\varepsilon = 0,02$. La Figura 9a muestra el gráfico de errores de una de las cuartas partes congruentes del interpolante cerrado y la Figura 9b el gráfico de errores de uno de los interpolantes abiertos.

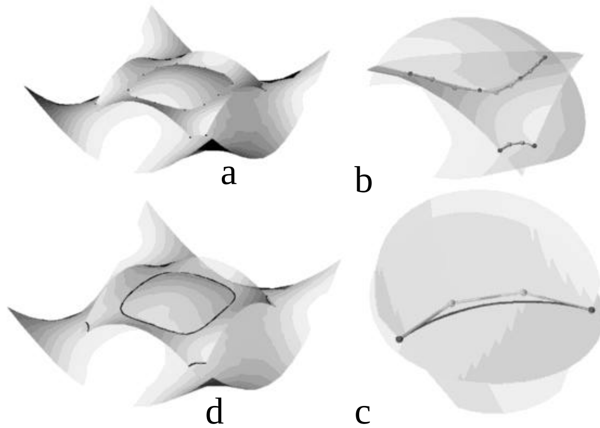

Figura 8. Interpolación cúbica adaptativa

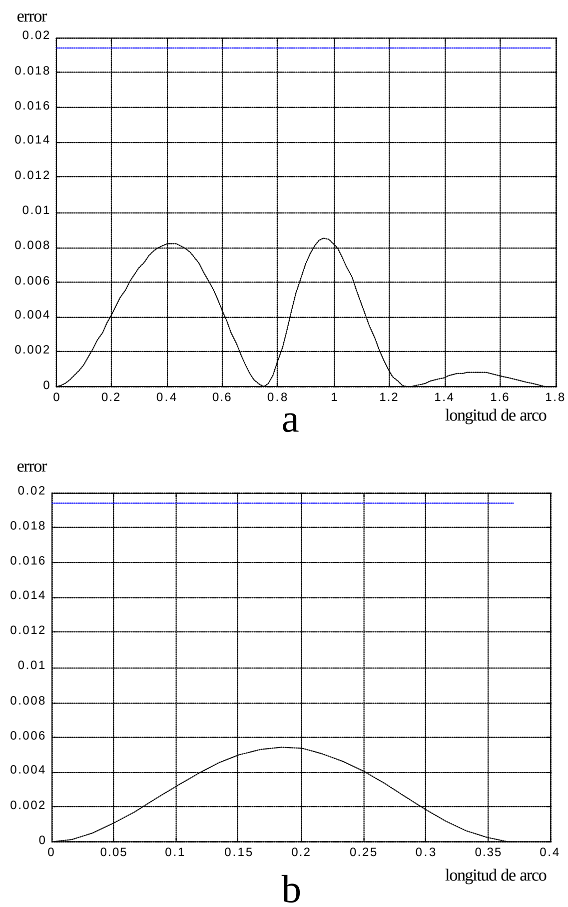

Figura 9. Gráfica de errores de la interpolación cúbica adaptativa

CONCLUSIONES

El método propuesto permite controlar y adaptar el tamaño de paso para conseguir una tolerancia de error prefijada, distribuyendo los puntos de interpolación en una manera conveniente. Dado que el método contempla un control a posteriori del error de aproximación, se pudo relajar por un factor de 3 el tamaño de paso en la segunda etapa del algoritmo, obteniéndose buenos resultados, disminuyendo el número de puntos de interpolación. La información requerida para controlar el error de aproximación es la geometría diferencial local de la curva de intersección. Esto requiere que las superficies involucradas sean suficientemente derivables. Es claro que el método puede extenderse de manera natural al caso general de interpolación de Hermite.

REFERENCIAS

1 K. Abdel-Malek y H.J. Yeh, "Determining intersection curves between surfaces of two solids", *Computer-Aided Design*, Vol. **28**, Nº 6/7, pp. 539–549, (1996).

2 M.E. Mortenson, "*Geometric Modeling*", Wiley, New York, EE.UU., (1985).

3 S.T. Wu y L.N. Andrade, "Marching along a regular surface/surface intersection with circular steps", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. **16**, pp. 249–268, (1999).

4 C. Asteasu, "Intersection of arbitrary surfaces", *Computer-Aided Design*, Vol. **20**, Nº 9, pp. 533–538, (1988).

5 D. Lasser, "Intersection of parametric surfaces in the Bernstein–Bézier representation", *Computer-Aided Design*, Vol. **18**, Nº 4, pp. 186–192, (1986).

6 J.J. Chen y T.M. Ozsoy, "Predictor-corrector type method of intersection algorithm for C^2 parametric surfaces", *Computer-Aided Design*, Vol. **20**, Nº 6, pp. 347–352, (1988).

7 I.D. Faux y M.J. Pratt, "*Computational geometry for design and manufacture*", Ellis Horwood, Chichester, Inglaterra, (1985).

8 T.E. Stoyanov, "Marching along surface/surface intersection curves with an adaptive step length", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. **9**, pp. 485–489, (1992).

9 M. do Carmo, "*Differential geometry of curves and surfaces*", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, EE.UU., (1976).

10 J. Olivencia, L. Quiroz y P. Beckers, "Estimation and control of linear interpolation error of free-form surface intersection", Prepint.

11 J. Hoscheck y D. Lasser, "*Fundamentals of computer aided geometric design*", A.K. Peters, Wellesley, Massachusetts, EE.UU., (1993).

12 X. Ye y T. Maekawa, "Differential geometry of intersection curves of two surfaces", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. **16**, pp. 767–788, (1999).