

LA VERSION p DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EN MECANICA LINEAL DE FRACTURAS

ROBERTO OLIVEIRA

*Centro de Cálculo. Facultad de Ingeniería
Montevideo-Uruguay*

RESUMEN

En este trabajo se presenta un programa de computación basado en la versión p del método de los elementos finitos. Se discuten las características propias de esta versión y su implementación en programas convencionales de elementos finitos. Su aplicación en Mecánica Lineal de Fracturas es demostrada calculando el factor de intensidad de las tensiones K_i , para diferentes valores de p .

Asimismo se presentan comparaciones de estos resultados con los obtenidos usando mallas muy refinadas con elementos isoparamétricos standard y con mallas en las cuales son incorporados elementos finitos especiales (singulares) en torno al frente de la fisura. Diferentes tipos de elementos singulares son considerados.

SUMMARY

This paper presents a computer program based on the p version of the finite element method. The characteristic of this version are discussed as well as its implementation on conventional finite element programs. Its application on Linear Fracture Mechanics is demonstrated calculating the stress intensity factor K_i , for different p values.

Likewise, comparisons of these results are presented faced to the ones obtained using quite refined meshes with isoparametric standard elements and meshes with special finite elements (singular) surrounding the crack tip. Different types of singular elements are considered.

INTRODUCCION

El Método de los Elementos Finitos (MEF), es la técnica del cálculo numérico más usada para obtener soluciones aproximadas de cierto tipo de ecuaciones diferenciales parciales. A pesar de que sus orígenes se encuentran en el análisis estructural, ha tenido como método un gran desarrollo en los últimos años y sus aplicaciones son hoy muy variadas, pudiéndose destacar entre ellas aplicaciones en problemas de transferencia de calor, fluidos, electromagnetismo, etc., siendo actualmente centro de interés de numerosos investigadores en las ramas de la matemática y física aplicadas e ingeniería.

Lo que caracteriza al método es que el dominio de la aproximación es subdividido en subdominios convexos llamados elementos (triángulos, rectángulos, cubos, etc.) y la

Recibido: Marzo 1989

función de aproximación es construida con funciones simples, generalmente polinomios, definidos en los elementos de tal manera que ciertas condiciones son satisfechas.

Se deben distinguir dos procesos de convergencia dentro del MEF:

a) Se define la convergencia h como el proceso en el cual las funciones de interpolación son mantenidas fijas y el máximo diámetro del elemento (comunmente llamado h) es reducido hasta que es alcanzado el grado de precisión deseado en el resultado.

b) Se define la convergencia p como el proceso en el cual la malla de elementos finitos es mantenida fija y el grado p de las funciones polinómicas de interpolación es aumentado uniforme o selectivamente.

Recientes avances en el desarrollo del MEF han dado la posibilidad de desarrollar programas de elementos finitos basados en la versión p , y que han demostrado ser muy eficientes en la aplicación a problemas donde la solución varía en forma muy rápida en parte de su dominio. Esta versión fue primeramente estudiada en forma teórica por Babuska, Szabo y Kats¹.

En la Facultad de Ingeniería de Montevideo se viene desarrollando una línea de investigación que contempla el desarrollo de programas de computación basados en la versión p y el desarrollo de programas auto adaptativos. El objetivo de este desarrollo es el tener herramientas efectivas de cálculo para ser aplicadas a problemas específicos donde el método convencional de elementos finitos converge muy lentamente, como ser en Mecánica de Fracturas.

El programa de elementos finitos SOLVIA-P, cuya aplicación presentamos en este trabajo, está basado en la versión p y ha sido desarrollado a partir del programa de elementos finitos (versión h) SOLVIA². Como un primer paso en la implementación de la versión p , se lo hizo para el caso de elementos planos.

ELEMENTOS FINITOS JERARQUICOS

Para implementar la versión p del MEF es necesario contar con una familia de elementos finitos de grado arbitrario que cumplan ciertas propiedades de continuidad. Teóricamente la calidad de la aproximación está dada completamente por la malla de elementos finitos, el grado de las funciones de interpolación y la continuidad en el contorno de los elementos adyacentes. Es independiente de cómo las funciones de interpolación son construidas.

Sin embargo hay aspectos prácticos a tener en cuenta en la elección de estas funciones, como ser simplicidad desde el punto de vista de la programación y estabilidad del comportamiento de las funciones de interpolación para valores altos de p . En el programa SOLVIA-P se usan funciones jerárquicas construidas con polinomios de Legendre, (Szabo y Peano³).

El concepto jerárquico significa que las funciones de interpolación correspondientes a una aproximación de grado p , constituyen un subconjunto del formado por aquellas correspondientes a una aproximación de grado $p + 1$. De este modo las matrices correspondientes a un nivel de aproximación anterior no necesitan ser recalculadas,

lo que permite un importante ahorro en tiempo de computación.

Ecuaciones básicas

La solución del conjunto de ecuaciones diferenciales lineales

$$Lu = f \quad (1)$$

definido en la región Ω con las correspondientes condiciones de contorno, por ejemplo las ecuaciones de Navier en la elasticidad lineal, por el método de los elementos finitos, está basada en una malla de elementos finitos, una formulación variacional o de Galerkin y una aproximación de la variable u de la siguiente manera:

$$u \simeq u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i H_i \quad (2)$$

en donde los α_i son parámetros desconocidos a determinar y los H_i son las funciones de interpolación también llamadas funciones de forma.

Si aplicamos una aproximación standard de Galerkin transformamos el sistema de ecuaciones diferenciales en (1) en el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas

$$K_{nn} \alpha_n = f_n \quad (3)$$

donde K_{nn} es la matriz de rigidez (que contiene derivadas de las funciones H) y f es el vector de fuerzas.

Cuando se aumenta el grado de los polinomios de interpolación de p a $p + 1$, el número de parámetros α_n es aumentado a α_{n+m} y un procedimiento idéntico de discretización resulta en el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$K_{n+m} \alpha_{n+m} = f_{n+m} \quad (4)$$

Si el refinamiento fue hecho en forma jerárquica tendremos

$$\begin{pmatrix} k_{nn} & k_{nm} \\ k_{mn} & k_{mm} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_n \\ \alpha_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_n \\ f_m \end{Bmatrix} \quad (5)$$

en donde vemos que K_{nn} , α_n y f_n correspondientes a una aproximación de grado p se presentan en forma incambiada como parte del nuevo sistema.

Sólo esta característica de las funciones jerárquicas justificaría plenamente su utilización, pero además con su uso se forman matrices de rigidez mejor condicionadas y permiten el acoplamiento de elementos de diferentes grados de aproximación manteniéndose la compatibilidad. Esta facilidad, no implementada aún en nuestro programa, permite el refinamiento selectivo, lo que puede disminuir considerablemente el número de grados de libertad en el modelo.

Aproximación en el elemento

El elemento básico en el programa SOLVIA-P es un elemento plano de 4 nodos, con el cual se construye la malla de elementos finitos, Figura 1. Como se interpola la geometría con un polinomio de menor grado (en este caso lineal) que el desplazamiento u , es el elemento en este sentido subparamétrico.

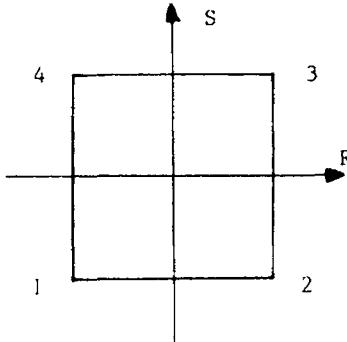


Figura 1. Elemento básico en SOLVIA-P.

Las funciones de forma asociadas con este elemento para $p \geq 1$ son las siguientes:
vértices

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{4}(1-R)(1-S) \\ H_2 &= \frac{1}{4}(1+R)(1-S) \\ H_3 &= \frac{1}{4}(1+R)(1+S) \\ H_4 &= \frac{1}{4}(1-R)(1+S) \end{aligned}$$

aristas

$$\begin{aligned} \text{número de funciones} &= 4(p-1) \quad (p \geq 2) \\ (S = -1) \end{aligned}$$

$$H_p^1(R, S) = \frac{1}{2}(1-S)f_p(R)$$

$$(R = 1)$$

$$H_p^2(R, S) = \frac{1}{2}(1+R)f_p(S)$$

$$(S = 1)$$

$$H_p^3(R, S) = \frac{1}{2}(1+S)f_p(-R)$$

$$(R = -1)$$

$$H_p^4(R, S) = \frac{1}{2}(1 - R)f_p(-S)$$

donde

$$\begin{aligned} f_p(\epsilon) &= \frac{1}{p!}(\epsilon^p - 1) && p \text{ par} \\ f_p(\epsilon) &= \frac{\epsilon}{p!}(\epsilon^{p-1} - 1) && p \text{ impar} \end{aligned}$$

anteriores

$$\text{número de funciones} = 1/2(p - 2)(p - 3) \quad (p \geq 4)$$

$$H_p(R, S) = (1 - R^2)(1 - S^2)P_{p-i-2}(R)P_{i-1}(S) \quad i = 1, 2, \dots, p - 3$$

en donde $P_j(\epsilon)$ es el polinomio de Legendre de grado j .

MECANICA LINEAL DE FRACTURAS

El problema básico en Mecánica Lineal de Fracturas es la evaluación de los factores de intensidad de las tensiones K , parámetro éste usado para determinar las posibilidades de propagación de una fisura. En el presente trabajo nos limitamos al cálculo del factor de intensidad K_i , correspondiente al modo I de carga.

Para obtener el valor K_i para una geometría y condición de carga determinadas es necesario calcular el campo de las tensiones y deformaciones en torno al frente de la fisura. En otras palabras el problema elíptico de valores de contorno presentando una singularidad en su dominio es solucionado.

Los términos predominantes de la distribución de tensiones y desplazamientos en la vecindad del frente de una fisura, Figura 2, pueden ser escritos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_i}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_y &= \frac{K_i}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_i}{\sqrt{2\pi r}} \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{(1 + \nu)K_i}{4\pi E} \sqrt{2\pi r} \left[(2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2}\right] \\ u_y &= \frac{(1 + \nu)K_i}{4\pi E} \sqrt{2\pi r} \left[(2\kappa + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2}\right] \end{aligned} \quad (11)$$

donde E es el módulo elástico, ν el módulo de Poisson, $\kappa = (3 - 4\nu)$ en deformación plana y $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ en tensión plana.

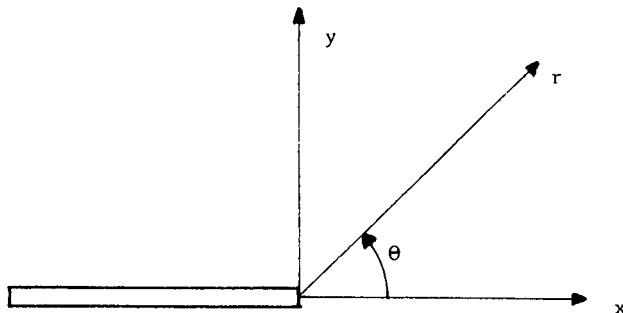


Figura 2. Frente de la fisura

Métodos analíticos basados en la teoría clásica de la elasticidad, para la determinación de los factores de intensidad K_i , existen sólo para geometrías y condiciones de carga simples. Para casos más complicados, no existen soluciones analíticas dadas las dificultades inherentes en la evaluación de las tensiones y deformaciones en el frente de una fisura. Por esta razón se buscan soluciones aproximadas usando métodos numéricos, especialmente MEF.

La aplicación directa del MEF en el cálculo de los factores K_i , usando elementos convencionales, converge muy lentamente y puede producir serios errores cuando se modela una singularidad con un número limitado de grados de libertad. Por otra parte el costo en tiempos de computación y preparación de datos cuando se usan mallas muy refinadas puede ser inaceptable, especialmente en modelos tridimensionales.

Esto ha llevado a muchos investigadores en los últimos años a volcar esfuerzos en buscar formas de superar la necesidad del uso de mallas muy refinadas. Afortunadamente la forma de la singularidad en el caso lineal es única y bien definida ($1/\sqrt{r}$ siendo r la distancia radial al frente de la fisura, Figura 2) y hace posible incorporar los efectos de la singularidad en la formulación del elemento finito. Este procedimiento es ayudado por la naturaleza variacional del MEF, ya que sólo la formulación del elemento es necesario ser modificada, las rutinas de solución se mantienen incambiadas. Como resultado de las investigaciones realizadas en torno a este problema se puede encontrar hoy en la literatura numerosos ejemplos del uso de elementos singulares^{4,9}. Muchos de estos elementos son difíciles o imposibles de incorporar en programas standard de elementos finitos, otros causan incompatibilidades en los desplazamientos entre los elementos singulares y los regulares y otros pueden causar un aumento en el ancho de la banda de la matriz de rigidez. Dentro de los elementos singulares hasta hoy desarrollados son los QPE (quarter-point elements) los que han tenido mayor difusión, debido al hecho de que son elementos isoparamétricos convencionales lo cual permite su uso con cualquier programa de elementos finitos que contenga este tipo de elementos, además de su efectividad, hecho ampliamente documentado en la literatura. Estas dos razones hicieron que consideráramos estos elementos como los más aptos a usar en este trabajo.

El uso de estos elementos singulares está basado en las investigaciones efectuadas por Barsoum⁸ y Henshell y Shaw⁹. Estos pueden tener forma rectangular o triangular. En el caso de los rectangulares la singularidad deseada se logra a través de un corrimiento de los nodos 5 y 8 (Figura 3a), originariamente a una distancia $L/2$ hacia

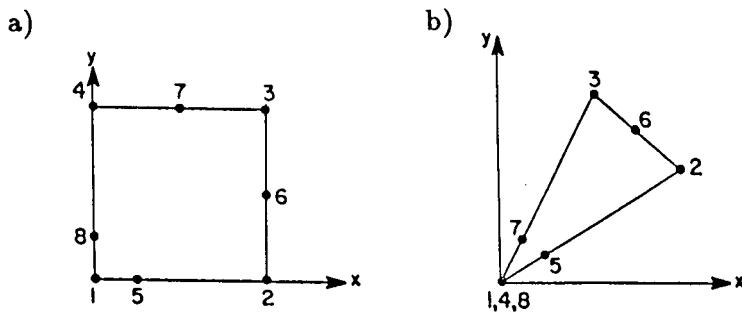


Figura 3. Elementos QPE.

una distancia $L/4$. Los elementos triangulares son construidos a partir de un elemento rectangular donde se produce un colapso de uno de sus lados definiendo los nodos 1, 4 y 8 como un único nodo (Figura 3b). Además se produce un corrimiento de los nodos 5 y 7 de la misma forma que para los rectangulares.

APLICACIONES Y RESULTADOS

Como caso de aplicación se consideró el de una placa rectangular sometida a tensión uniforme conteniendo una fisura simple de canto, Figura 4.

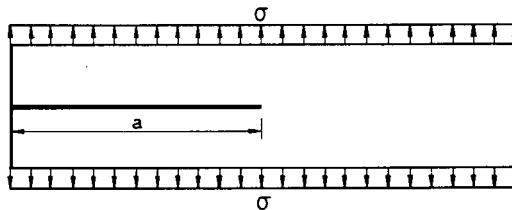


Figura 4. Especimen usado en los cálculos.

Las mallas usadas en los cálculos se muestran en las Figuras 6 y 7 donde debido a la simetría se modeló solamente la mitad superior de la geometría. Las mallas de la Figura 6 están compuestas de elementos isoparamétricos convencionales de 8 nodos. La malla I contiene 100 elementos mientras que la II contiene 200 elementos. Con cada una de estas mallas se obtuvieron 3 valores de K_i , correspondientes a los 3 tipos de elementos usados en el frente de la fisura (regulares, QPE rectangulares y QPE triangulares). En todos estos cálculos se utilizó el programa SOLVIA. En la Figura 7 se muestran las mallas (III y IV) usadas en relación con la versión *p*. Se obtuvieron valores de K_i correspondientes a valores de *p* entre 2 y 7.

El factor de intensidad K_i fue calculado a partir de la ecuación (11) y tomando un valor de u_y para el nodo ubicado más cerca del frente de la fisura, para un valor de $\theta = 180^\circ$.

Los resultados obtenidos son presentados de la siguiente manera:

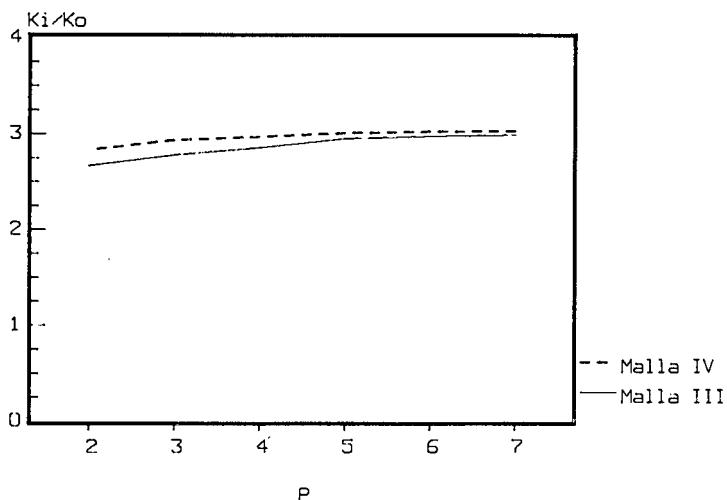


Figura 5. Valores de K_i/K_0 en función de p .

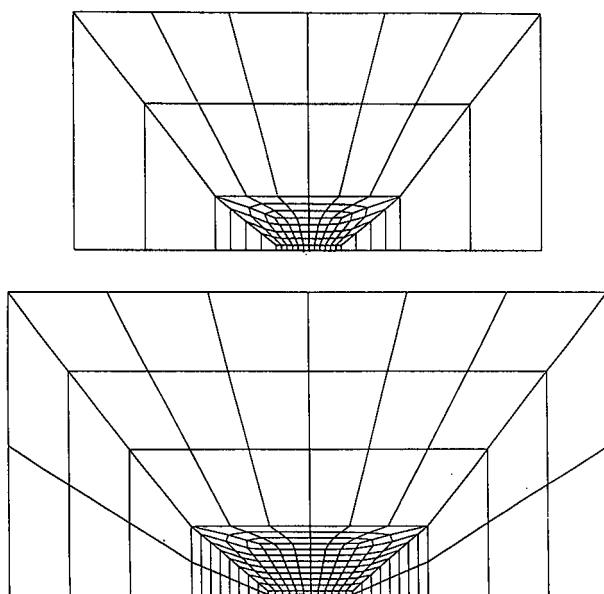


Figura 6. Mallas I y II.

En la Figura 5 se muestra la gráfica de los valores de K_i/K_0 en función de p , siendo $K_0 = \sigma\sqrt{\pi a}$, (σ es la tensión aplicada y a es el largo de la fisura).

En la Figura 8 se asume la solución para la malla IV y $p = 7$ como "exacta" y se grafica el error relativo en K_i/K_0 en función del número de grados de libertad N , para las mallas III y IV.

En la Tabla I se presentan los valores de K_i/K_0 obtenidos incluyendo el de la referencia [10].

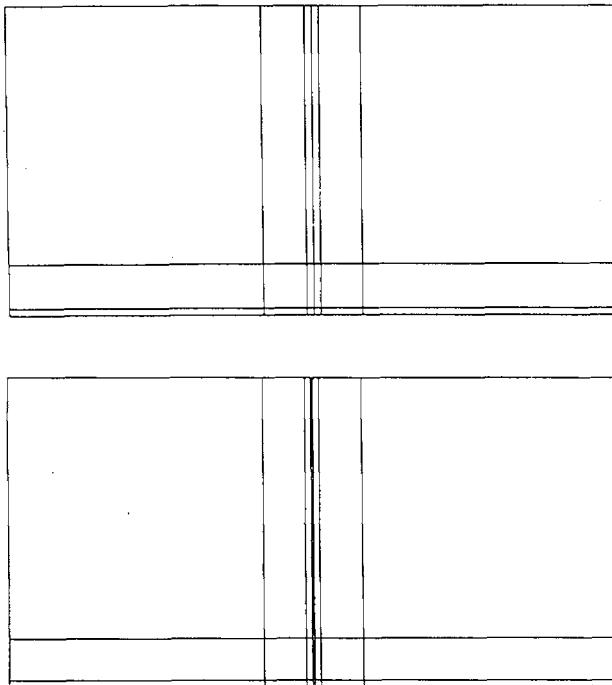


Figura 7. Mallas III y IV.

CONCLUSIONES

Los resultados presentados en este trabajo demuestran la eficiencia computacional de la versión p del MEF. Indican claramente que la versión p requiere menos grados de libertad que la versión h para alcanzar el mismo nivel de precisión. Cabe también destacar la disminución del volumen de datos a ingresar, factor muy importante ya que en gran parte del tiempo total en el análisis por elementos finitos, se consume en la preparación de los datos de entrada. En relación con la versión p , la construcción de las mallas usadas dependen más de la forma geométrica de la estructura a analizar que de la precisión deseada. Por otra parte la no necesidad de reconstruir las mallas para aumentar la precisión en el resultado, lleva a tener la posibilidad de aumentar la confiabilidad y disminuir los costos del análisis por elementos finitos.

En el caso particular de Mecánica de Fracturas, los resultados obtenidos demuestran que los programas basados en la versión p constituyen una herramienta extremadamente eficiente ya que son capaces de "absorber" singularidades sin necesidad de asumir a priori el carácter de éstas. Este hecho es de fundamental importancia si consideramos la aplicación de este tipo de programas en Mecánica no Lineal de Fracturas donde la singularidad no es única sino que varía con el endurecimiento del material.

A modo de conclusión final podríamos decir que los resultados obtenidos motivan la continuación de las investigaciones realizadas sobre todo enfocando la aplicación del programa SOLVIA-P en problemas de Mecánica no Lineal de Fracturas.

N	K_i/K_0	p	tipo de elemento
Malla III			
138	2.67	2	—
225	2.77	3	—
348	2.85	4	—
507	2.94	5	—
702	2.97	6	—
933	2.99	7	—
Malla IV			
232	2.82	2	—
380	2.93	3	—
592	2.96	4	—
868	3.00	5	—
1208	3.02	6	—
16.12	3.03	7	—
Malla I			
652	2.80	—	regulares
652	2.97	—	QPE-rectangulares
656	3.00	—	QPE-triangulares
Malla II			
1254	2.86	—	regulares
1254	3.00	—	QPE-rectangulares
1274	3.01	—	QPE-triangulares
ref [10]	—	3.00	—

TABLA I. Valores de K_i/K_0 para todos los casos contemplados.

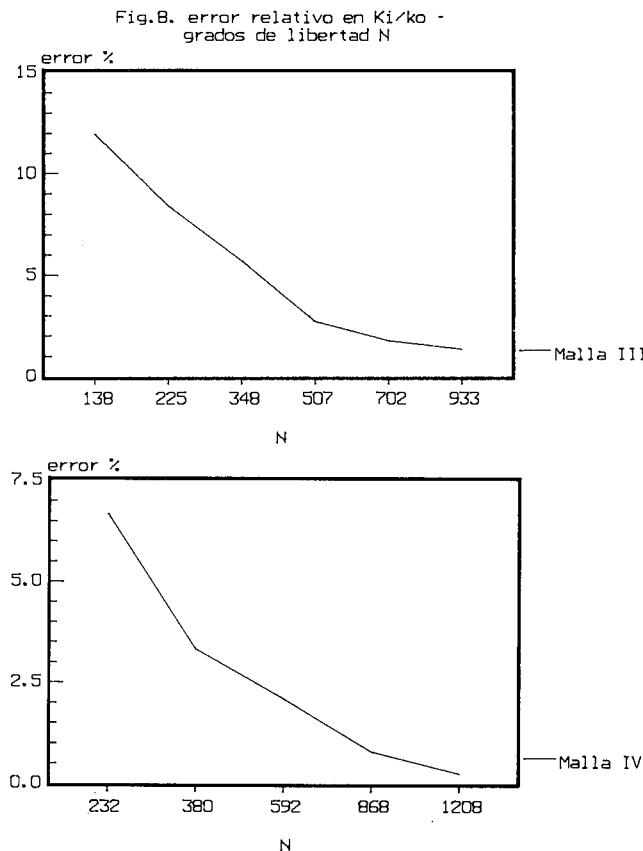


Figura 8. Error relativo en K_i/K_0 . Grados de libertad N.

REFERENCIAS

1. I. Babuska, B.A. Szabo y I.N. Katz, "The p-version of the finite element method", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **18**, pp. 515–545, (1981).
2. SOLVIA Engineering AB. Sweden.
3. B.A. Szabo y A.G. Peano, "Hierarchic finite elements", *Report No. WU/CCM-83/1*, Washington University, (1983).
4. M.A. Astiz, "An incompatible singular elastic element for two and three dimensional crack problems", *Int. J. of Fract.*, Vol. **31**, pp. 105–124, (1986).
5. D.M. Tracey, "Finite elements for determination of crack tip elastic stress intensity factors", *Engng. Fract. Mech.*, Vol. **3**, pp. 255–266, (1971).
6. A.J. Fawkes, D.R. Owen y A.R. Luxmoore, "An assessment of crack tip singularity models for use with isoparametric elements", *Engng. Fract. Mech.*, Vol. **11**, pp. 143–159, (1979).
7. E. Byskov, "The calculation of stress intensity factors using the finite element method with cracked elements", *Int. J. of Fract. Mech.*, Vol. **6**, pp. 159–167, (1970).
8. R. Barsoum, "On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics", *Int. J. of Fract. Mech.*, Vol. **10**, pp. 603–605, (1974).
9. R.D. Henshell y K.G. Shaw, "Crack tip finite elements are unnecessary", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **9**, pp. 495–507, (1975).
10. D.P. Rooke y D.J. Cartwright, "Compendium of stress intensity factors", H.M S.O, (1977).