

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE PROCESOS DE COMPACTACIÓN DE PULVIMATERIALES Parte 1: Modelo Constitutivo, de Contacto y Fricción

JUAN CARLOS CANTE
JAVIER OLIVER
y
SERGIÓ OLLER

*E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Cataluña
Campus Norte, Módulo C1, Gran Capitán s/n
08034 Barcelona, España
Tel: + 34-3-401 5669 Fax: + 34-3-401 6517
E-mail: jcante@ulises.upc.es*

RESUMEN

Se presenta un modelo numérico, basado en la teoría de las grandes deformaciones plásticas, para la simulación del proceso de compactación de pulvimateriales aplicado al diseño de piezas axisimétricas. La respuesta elástica se obtiene a partir de un modelo hiperelástico. La respuesta plástica representa esencialmente la pérdida de vacíos así como la deformación plástica de las partículas. La superficie de fluencia es una modificación del criterio de Von Mises que se controla mediante dos parámetros que dependen de la densidad relativa. Se propone un modelo viscoplástico para incluir el efecto de la velocidad de compactación sobre las propiedades finales del compacto. Esta regularización permite además evitar la pérdida de elipticidad que puede aparecer con algunos procesos de compactación mal definidos. Se estudian dos tipos de modelos de fricción con las paredes: 1. Modelo del tipo Norton-Hoff y 2. Modelo de Coulomb. Para resolver este último se estudian las técnicas de penalización y multiplicadores de Lagrange y se propone el uso de un algoritmo mixto para implementar dicho problema de forma robusta.

NUMERICAL SIMULATION OF POWDER COMPACTION PROCESSES Part 1: Constitutive Model, Contact and Friction

SUMMARY

A numerical model, based on large strain plasticity, to simulate the uniaxial compaction of powder materials is presented. The elastic response is obtained from a hyperelastic model. The plastic response represents the loss of voids and the plastic deformation of the grains. Two parameters that evolve in terms of the relative density control the modified, Von Mises type, yield surface. A visco-plastic model to include the rate load dependency is proposed. This regularization prevents the loss of ellipticity that could occur with wrong compaction processes. Two different friction models are studied: 1 a Norton-Hoff type model and 2. a Coulomb friction model. Penalization and Lagrange multipliers methods are studied to solve the last one as well as a mixed algorithm, to implement the last model in a robust way.

Recibido: Marzo 1997

INTRODUCCIÓN

Los procesos de compactación de pulvimateriales son una parte fundamental de la pulvimetalurgia y de la fabricación de materiales cerámicos. Los procesos de compactación uniaxial consisten esencialmente en la aplicación de presión sobre un material pulverulento mediante la acción de una serie de punzones que se desplazan a una velocidad predeterminada. A continuación se liberan parte de los punzones y se procede a expulsar la pieza del molde con la ayuda de los punzones restantes. Las dimensiones de la pieza compactada (el compacto) corresponden básicamente a las dimensiones finales requeridas. Esta es una de las grandes ventajas que posee dicha tecnología de conformado respecto a técnicas de fabricación tradicionales como la fundición o el maquinado. Durante la compactación la densidad del material puede aumentar hasta 2 o 3 veces su valor inicial y alcanzar valores cercanos al 95 % de la densidad teórica de la mezcla. La distribución de dicha densidad en el interior del compacto es uno de los parámetros básicos para determinar si un proceso de compactación es adecuado, ya que los fuertes gradientes en las densidades son causa de la aparición de grietas o roturas durante las fases de expulsión o de sintetización.

El diseño de un proceso de compactación consiste básicamente en la selección, montaje y puesta en funcionamiento de los diferentes elementos de matriceria (matriz, punzones, noyos, etc) que se requieren para fabricar una pieza con determinadas prestaciones. Tradicionalmente este diseño se lleva a cabo por mecanismos de prueba y error de diferentes prototipos, que consumen mucho tiempo y dinero, basados esencialmente en la experiencia acumulada por los diseñadores. El propósito de este trabajo es presentar una herramienta numérica que facilite y optimice el diseño del proceso y disminuya de esta forma el número de ensayos requeridos tradicionalmente. Para la formulación e implementación de dicha herramienta numérica se requiere un modelo constitutivo del pulvimaterial que reproduzca su comportamiento durante la compactación de la forma más precisa posible. Durante estos últimos años ha aparecido un gran número de modelos que intentan llenar este vacío. Estos básicamente se pueden clasificar en: modelos microscópicos y modelos macroscópicos.

- En los *modelos microscópicos*, conocidos también como modelos directos^{31,29,3}, cada partícula se modela como una esfera (o pequeñas variaciones de ésta) y los movimientos de muchas de ellas se calculan considerando el contacto entre los mismos. Estos modelos están pensados para simular el comportamiento mecánico del material, pero es muy difícil modelar situaciones reales complicadas como colapso de las partículas durante la densificación, la irregularidad de las formas o dislocaciones locales. Además los cálculos de modelización requieren tiempos de ejecución muy grandes, ya que se deben incluir muchas partículas en el análisis.

- En el grupo de modelos macroscópicos^{32,1,6,9,14,15,17,21,23,30,22} se analiza el pulvimaterial mediante la mecánica de los medios continuos. El resultado es un conjunto de ecuaciones que permiten conocer la variación de la densidad, y en general de todas las variables mecánicas involucradas, en función de la presión externa aplicada. Una característica común de dichos modelos es el uso de la teoría de la plasticidad como elemento fundamental. Los primeros modelos se formularon como modificaciones de otros empleados para materiales porosos^{26,21,24,32} o para materiales

friccionales^{15,30,6,11}. En general es unánime la elección de la *densidad relativa* como variable de endurecimiento, pero esto implica que fenómenos como la difusión y el deslizamiento de partículas no se tienen en cuenta o se consideran despreciables. Básicamente la diferencia entre los distintos modelos se concentra en la definición de la superficie de fluencia y su evolución a medida que la densidad aumenta. En general, los modelos constitutivos propuestos son modificaciones del criterio de Von Mises o del modelo Cam-Clay tradicionalmente utilizado para simular suelos. Los primeros introducen un término adicional que depende del primer invariante de las tensiones y de la densidad y están dirigidos a la simulación de materiales metálicos, ya que se espera que al final de la compactación, el producto resultante se comporte como tal. Los segundos se formulan para que la superficie final degenere en una de las típicas para materiales friccionales que tenga en cuenta el crecimiento en la resistencia debido al aumento en la densidad y también fenómenos como la dilatación y la baja resistencia a la tracción.

El modelo numérico que se formula en este trabajo tiene como punto de partida los modelos constitutivos propuestos por^{1,32,22} entre otros, donde la superficie de fluencia (de forma elíptica) es una modificación del criterio de Von Mises. La superficie se define mediante dos parámetros que dependen exclusivamente de la densidad relativa. En concordancia con^{1,32,21} el modelo numérico se encuentra inmerso dentro de la teoría de las grandes deformaciones plásticas. El equilibrio se verifica en la configuración material y la integración de la ecuación constitutiva se lleva a cabo en la configuración espacial. En cuanto al problema de contacto y fricción entre el pulvimaterial y los elementos de matricería, se formulan diferentes técnicas provenientes de la teoría de optimización para resolverlo.

El resto del artículo se organiza de la siguiente forma: en la sección siguiente se justifica el uso de la plasticidad en el modelo, en la sección posterior se realiza la descripción de modelo constitutivo en términos de la teoría de la plasticidad para grandes deformaciones. La integración numérica del modelo propuesto se describe en la última sección y se generaliza a un modelo visco-plástico. En las dos últimas secciones se analiza el problema de contacto y fricción entre el pulvimaterial y las paredes del molde. Se analizan dos tipos de modelos de fricción, el primero del tipo fricción seca (modelo de Coulomb) y el segundo del tipo Norton Hoff que depende de la velocidad relativa. Para la solución numérica de dichos problemas se consideraron las técnicas de penalización y multiplicadores de Lagrange.

Los modelos elastoplásticos y la simulación del proceso de compactación

Durante los primeros pasos del proceso de compactación el movimiento de los punzones y de la matriz produce una disminución global en el volumen del conjunto. Estos movimientos producen deformaciones que en su mayor parte son irreversibles. Este fenómeno macroscópico proviene de la combinación de dos fenómenos a nivel microscópico^{25,5}. El primero es la gran pérdida de vacíos y el segundo involucra directamente a las partículas, ya que aumentan sus puntos de contacto y se producen las primeras deformaciones elásticas en estas zonas. A medida que la presión aumenta, los puntos de contacto se convierten en puntos de contacto permanente. En este instante comienza el desarrollo de deformación plástica a nivel de partículas para los materiales

dúctiles y el inicio de la etapa de fragmentación para los materiales frágiles. Al final, las fronteras entre las partículas desaparecen, el crecimiento de las deformaciones irreversibles disminuye y el crecimiento de las deformaciones elásticas se vuelve más importante. El tensor de deformación plástica empleado en el modelo incluye los dos efectos, es decir, las pérdidas de vacíos y las deformaciones plásticas o fragmentación de las partículas en las zonas de contacto. El tensor de deformación elástica considera básicamente las deformaciones elásticas de las partículas, que se incrementan más rápidamente al final del proceso. Se supone en general que dichas deformaciones son pequeñas comparadas con las plásticas. El uso de la teoría de las grandes deformaciones plásticas permite entonces calcular muy precisamente estos grandes movimientos y deformaciones de las partículas que ocurren durante la compactación. La condición de fluencia, al igual que en plasticidad clásica, separa aquí los estados incrementalmente elásticos de los estados incrementalmente elastoplásticos. La superficie de fluencia y la ley de flujo se formulan de tal forma que se aproxima el comportamiento del polvo como un fluido en las primeras fases de la compactación y como un material metálico en las etapas finales. Este es el objetivo que se describe en la siguiente sección.

Modelo constitutivo

Cinemática

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$) abierto y acotado que representa al material que se desea compactar. Se supondrá de aquí en adelante que Ω define la configuración de referencia del cuerpo. Sea $[0, T]$ el intervalo de tiempo de interés. Aquí la variable t se debe interpretar como un parámetro, que se incrementa de forma monótona e indica el nivel de progreso en el proceso de deformación.

Denótese por $\varphi : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ la aplicación que describe el movimiento del cuerpo Ω . Sea $\mathbf{X} \in \Omega$ una partícula del cuerpo, entonces $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ denotará la posición de la partícula en el instante $t \in [0, T]$. Se considerará además que el conjunto

$$\varphi_t(\Omega) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \text{ donde } \mathbf{X} \in \Omega\} \quad (1)$$

define la configuración actual del cuerpo. Sea $\mathbf{F} = \partial\varphi/\partial\mathbf{X}$ el tensor gradiente de la deformación. Se define $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ el campo de desplazamientos como

$$\varphi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \quad (2)$$

entonces el tensor gradiente de la deformación se puede escribir como

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{I} + \text{GRAD } \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \quad (3)$$

donde $\text{GRAD } \mathbf{U}$ denota el gradiente de los desplazamientos en la configuración de referencia. De forma estándar se supondrá válida la descomposición multiplicativa del tensor \mathbf{F} , que supone que para cada $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ existe una vecindad del punto \mathbf{x} contenida en $\Omega_t = \varphi_t(\Omega)$ para la cual es válida la siguiente descomposición

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}^e(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{F}^p(\mathbf{X}, t) \quad (4)$$

El tensor \mathbf{F}^e corresponde a la parte elástica y el tensor \mathbf{F}^p a la parte plástica. El tensor $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ se define como el tensor de Cauchy-Green a la derecha y $\mathbf{C}^p = \mathbf{F}^{pT} \cdot \mathbf{F}^p$ la componente plástica. El tensor de deformaciones de Green-Lagrange viene dado por $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G})$ y su componente plástica por $\mathbf{E}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^p - \mathbf{G})$, donde \mathbf{G} se define como el tensor métrico de la configuración material.

Mediante las funciones de transformación hacia adelante y hacia atrás ϕ^* y ϕ_* definidas en²⁰(en inglés conocidas como *push-forward* y *pull-back*), los anteriores tensores se relacionan con el tensor de deformación de Almansi \mathbf{e} y su componente plástica \mathbf{e}^p mediante la siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \phi_*(\mathbf{E}) & \mathbf{E} &= \phi^*(\mathbf{e}) \\ \mathbf{e}^p &= \phi_*(\mathbf{E}^p) & \mathbf{E}^p &= \phi^*(\mathbf{e}^p) \end{aligned} \quad (5)$$

La componente elástica se obtiene como la diferencia $\mathbf{e}^e = \mathbf{e} - \mathbf{e}^p$

Formulación de las ecuaciones constitutivas

Respuesta elástica

Restringiéndonos al caso puramente mecánico y en concordancia con la hipótesis de Mandel *et al.*¹⁸, se supone aquí, que el estado local termodinámico se determina mediante las variables \mathbf{e}^e, \mathbf{q} . El tensor \mathbf{e}^e corresponde al tensor de deformación elástico y la variable \mathbf{q} denota el vector de variables internas.

La densidad de energía libre bajo la hipótesis de elasticidad desacoplada se escribe entonces como

$$\psi(\mathbf{e}^e, \mathbf{q}) = \psi^e(\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) + \psi^p(\mathbf{q}) \quad (6)$$

La única variable interna que se considera en este trabajo es la deformación plástica, que ya se encuentra incluida en las variables básicas. Durante todo el proceso de compactación se puede suponer que las deformaciones elásticas son *pequeñas*, por lo tanto la energía elástica se puede definir directamente en la *configuración actual* Ω_t mediante la siguiente función cuadrática

$$\psi^e = \frac{1}{2\rho_o} \mathbf{e}^e : \mathbf{c} : \mathbf{e}^e = \frac{1}{\rho_o} \left[\frac{1}{2} \bar{\lambda} (\text{tr } \mathbf{e}^e)^2 + \bar{\mu} (\mathbf{e}^e : \mathbf{e}^e) \right] \quad (7)$$

donde $\mathbf{c} = 2\bar{\mu}\mathbf{I} + \bar{\lambda}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ es el tensor constitutivo elástico en la configuración deformada y $\bar{\mu}, \bar{\lambda}$ las constantes de Lamé. Si se supone además una respuesta hiperelástica del material, entonces las tensiones de Kirchhoff se obtienen a partir de la siguiente relación

$$\boldsymbol{\tau} = \rho_o \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{e}^e} = \mathbf{c} : (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) = 2\bar{\mu}(\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) + \bar{\lambda} \text{tr}[\mathbf{e} - \mathbf{e}^p] \mathbf{1} \quad (8)$$

Densidad relativa

A partir del principio de conservación de la masa la densidad relativa en la configuración de referencia se puede escribir como¹³

$$\eta(\mathbf{X}, t) = \frac{\eta_o(\mathbf{X})}{\text{Det}[\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)]} \quad (9)$$

donde η_o es la densidad relativa inicial y η_t la densidad relativa * en el instante t . Ésta es una expresión bastante sencilla de evaluar en la configuración material a diferencia de su correspondiente expresión espacial.

Superficie de fluencia

La evolución de la superficie de fluencia pone de manifiesto el incremento en la resistencia del material a medida que se avanza en el proceso de compactación. La superficie que se considera aquí, con algunas modificaciones, fue inicialmente propuesta por Kuhn y Downey y empleada por G.G. Weber y S.B. Brown³² y se define en la configuración espacial de la siguiente forma

$$\phi(\boldsymbol{\tau}, \eta) = \|\text{dev}[\boldsymbol{\tau}]\|^2 + \frac{1}{9}a_1(\eta)\text{tr}^2[\boldsymbol{\tau}] - \frac{2}{3}a_2(\eta)\sigma_y^2 \leq 0 \quad (10)$$

El tensor $\boldsymbol{\tau}$ corresponde a las tensiones de Kirchhoff es η la densidad relativa y σ_y la resistencia máxima del material a compresión. Los parámetros a_1 , a_2 son funciones que dependen de la densidad relativa y se definen dependiendo del tipo de material. Los términos $\text{dev}[\boldsymbol{\tau}]$ y $\text{tr}[\boldsymbol{\tau}]$, corresponden al desviador y la traza del tensor $\boldsymbol{\tau}$ y vienen dados por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \text{tr}[\boldsymbol{\tau}] &= \tau^{ij}g_{ij} = \mathbf{g} : \boldsymbol{\tau} \\ \text{dev } \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3}\text{tr}[\boldsymbol{\tau}]\mathbf{g}^{-1} \end{aligned} \quad (11)$$

De forma equivalente, la condición de fluencia se puede escribir en la configuración de referencia como

$$\Phi(\mathbf{S}, \eta) = \|\text{DEVS}\|_C^2 + \frac{1}{9}a_1(\eta)\text{TR}^2[\mathbf{S}] - \frac{2}{3}a_2(\eta)\sigma_y^2 \leq 0 \quad (12)$$

donde

$$\begin{aligned} \text{TR}[\mathbf{S}] &= \mathbf{C} : \mathbf{S} \\ \text{DEV}[\mathbf{S}] &= \mathbf{S} - \frac{1}{3}\text{TR}[\mathbf{S}]\mathbf{C}^{-1} \\ \|\text{DEVS}\|_C^2 &= (\text{DEVS})^{ij}(\text{DEVS})^{kl}\mathbf{C}_{ik}\mathbf{C}_{jl} \end{aligned} \quad (13)$$

Al inicio del proceso de compactación, cuando la densidad relativa coincide con la densidad inicial, la superficie de fluencia es prácticamente un punto ($a_2(\eta_o) = 0$).

* El término densidad relativa se entiende como la densidad respecto a la densidad teórica del material

Esto coincide con la apreciación física que se tiene del material al inicio del proceso de compactación, ya que es un material que carece de un estado de tensiones elástico y no soporta un nivel apreciable de tracción ni de cortante. A medida que la densidad relativa aumenta, la elipse que describe la superficie crece en función de los parámetros a_1 y a_2 (Figura 1), donde $r_\xi = \frac{\text{tr}[\boldsymbol{\tau}]}{3}$ y $r_\rho = \|\text{dev}[\boldsymbol{\tau}]\|$. Este crecimiento es debido al trabajo en frío realizado sobre las partículas que implica un crecimiento en la resistencia del material y en la capacidad para soportar cortante y tracción. La superficie definida en la ecuación (10) permite una evolución similar del lado de las tracciones. En el caso que se produjeran tracciones importantes durante el proceso de compactación, sería necesario incluir un criterio de falla por tracción.

Los parámetros a_1 y a_2 de la ecuación (10) se ajustan de tal forma que al final la superficie se asemeja a la superficie de Huber-von Mises, típica de un material metálico homogéneo.

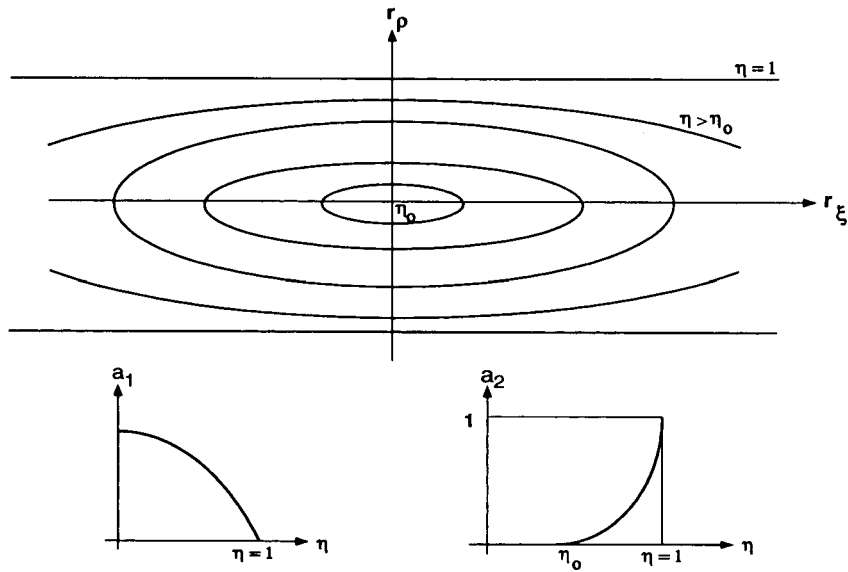


Figura 1. Superficie de fluencia

Regla de flujo y disipación plástica

Se supone una regla de flujo *asociada* definida como

$$L_{\nu} \mathbf{e}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (14)$$

donde L_{ν} representa la derivada de Lie² y el parámetro $\dot{\lambda} \geq 0$ es una función escalar no negativa conocida como parámetro de consistencia plástica, que debe cumplir las siguientes condiciones de Kuhn-Tucker^{27,18}

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad \phi(\boldsymbol{\tau}, \eta) \leq 0 \quad \dot{\lambda} \phi(\boldsymbol{\tau}, \eta) = 0 \quad (15)$$

Las anteriores condiciones se conocen en la terminología clásica como condiciones de carga y descarga. Además debe cumplirse la siguiente condición de persistencia

$$\dot{\lambda} L_{\mathbf{v}} \phi(\boldsymbol{\tau}, \eta) = 0 \quad (16)$$

Como se verá más adelante, dicha ecuación permite obtener una integración cerrada de la ecuación constitutiva y obtener una expresión exacta del tensor algorítmico tangente.

El cumplimiento del segundo principio de la termodinámica se deriva directamente de la imposición de la ecuación (8) y del concepto de máxima disipación plástica^{27,18}, que afirma que en el caso de flujo asociado la disipación es positiva y además máxima.

Tensor elastoplástico tangente

El tensor elastoplástico tangente \mathbf{c}^{ep} , relaciona la derivada objetiva de las tensiones $L_{\mathbf{v}} \boldsymbol{\tau}$ con la derivada objetiva de las deformaciones $L_{\mathbf{v}} \mathbf{e}$ de tal forma que $L_{\mathbf{v}} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{c}^{ep} : L_{\mathbf{v}} \mathbf{e}$. El tensor \mathbf{c}^{ep} se obtiene a partir de la derivación objetiva de la ecuación (8) y del uso de la condición de persistencia (16). La derivada de Lie de la ecuación(8) se puede escribir como

$$L_{\mathbf{v}} \boldsymbol{\tau} = L_{\mathbf{v}} \mathbf{c} : [\mathbf{e} - \mathbf{e}^p] + \mathbf{c} : [L_{\mathbf{v}} \mathbf{e} - L_{\mathbf{v}} \mathbf{e}^p] \quad (17)$$

El producto $L_{\mathbf{v}} \mathbf{c} : (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p)$ se puede escribir de la siguiente forma (Apéndice 1)

$$L_{\mathbf{v}} \mathbf{c} : (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) = \mathbf{a} : L_{\mathbf{v}} \mathbf{e} \quad (18)$$

donde el tensor \mathbf{a} viene dado por

$$\mathbf{a}^{ijkl} = -4\bar{\mu}[(\mathbf{e}^e)^{il} \delta^{jk} + \delta^{ik} (\mathbf{e}^e)^{lj}] - 2\bar{\lambda}[\delta^{ij} (\mathbf{e}^e)^{kl} + \delta^{ik} \delta^{jl} \text{tr}[\mathbf{e}^e]] \quad (19)$$

A partir de la ecuación de persistencia (16), se obtiene la siguiente expresión para el parámetro $\dot{\lambda}$

$$\dot{\lambda} = \frac{[\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{a} + \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{c} + 2 \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{g}} - \eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \mathbf{g}^{-1}] : L_{\mathbf{v}} \mathbf{e}}{\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{c} : \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}}} \quad (20)$$

donde se ha utilizado la relación $\dot{\eta} = -\eta \mathbf{g}^{-1} : L_{\mathbf{v}} \mathbf{e}$ (ref.¹⁰).

Tras algunas manipulaciones algebraicas, el tensor \mathbf{c}^{ep} se puede escribir como¹⁰

$$\mathbf{c}^{ep} = (\mathbf{c} + \mathbf{a}) - \frac{(\mathbf{c} : \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}}) \otimes [\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : (\mathbf{c} + \mathbf{a}) + 2 \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{g}} - \eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \mathbf{g}^{-1}]}{\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{c} : \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}}} \quad (21)$$

El Cuadro 1 resume las ecuaciones básicas del modelo constitutivo que se propone en este trabajo.

a) Respuesta elástica	$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{c} : (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) = \mathbf{c} : \mathbf{e}^e$
b) Condición de fluencia	$\phi(\boldsymbol{\tau}, \eta) = \ \text{dev } \boldsymbol{\tau}\ ^2 + \frac{1}{9} a_1(\eta) \text{tr}^2[\boldsymbol{\tau}] - \frac{2}{3} a_2(\eta) \sigma_y^2 \leq 0$
c) Regla de flujo	$L_{\mathbf{v}} \mathbf{e}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}}$
d) Condiciones de Kuhn-Tucker	$\dot{\lambda} \geq 0 \quad \phi(\boldsymbol{\tau}, \eta) \leq 0 \quad \dot{\lambda} \phi(\boldsymbol{\tau}, \eta) = 0$
e) Condición de persistencia	$\dot{\lambda} L_{\mathbf{v}} \phi(\boldsymbol{\tau}, \eta) = 0$
f) Tensor elasto-plástico tangente	$\mathbf{a}^{ijkl} = -4\bar{\mu}[(\mathbf{e}^e)^{il} \delta^{jk} + \delta^{ik} (\mathbf{e}^e)^{lj}] - 2\bar{\lambda}[\delta^{ij} (\mathbf{e}^e)^{kl} + \delta^{ik} \delta^{jl} \text{tr}[\mathbf{e}^e]]$ $\mathbf{c}^{ep} = (\mathbf{c} + \mathbf{a}) - \frac{1}{\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \mathbf{c} : \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}}} \left[\mathbf{c} : \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right] \otimes \left[\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : (\mathbf{c} + \mathbf{a}) + 2 \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{g}} - \eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \mathbf{g}^{-1} \right]$

Cuadro 1. Modelo constitutivo del pulvimaterial

INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN CONSTITUTIVA

Sea $[t_n, t_{n+1}]$ el subintervalo de tiempo de interés. Sea $\mathbf{X} \in \Omega$ un punto material del cuerpo, fijo pero arbitrario. Se supone que el cuerpo en el estado t_n se encuentra en equilibrio y que las siguientes variables que caracterizan el modelo son conocidas

$$\boldsymbol{\varphi}_n(\Omega), \{ \mathbf{E}_n(\mathbf{X}), \mathbf{S}_n(\mathbf{X}), \mathbf{E}_n^p(\mathbf{X}), \eta_n(\mathbf{X}) \} \quad (22)$$

Esto equivale a suponer que se conocen las siguientes variables en la configuración espacial

$$\{ \mathbf{e}_n(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}_n(\mathbf{x}), \mathbf{e}_n^p(\mathbf{x}), \eta_n(\mathbf{x}) \} \quad (23)$$

donde $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}_n(\mathbf{X})$. Las variables agrupadas en (22) y (23) se relacionan vía los operadores de transformación hacia adelante ϕ_n^* y hacia atrás ϕ_n^* respectivamente. El índice n indica que las transformaciones se llevan a cabo mediante el tensor de deformación \mathbf{F}_n .

Dado el campo $\Delta \mathbf{U}_{n+1}$ de desplazamientos incrementales, el objetivo es actualizar las variables básicas en el tiempo t_{n+1} de tal forma que se satisfagan las ecuaciones del

Cuadro 1. En principio el sistema se completa añadiendo la descomposición del tensor \mathbf{F}_{n+1}

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^e \cdot \mathbf{F}_{n+1}^p \quad (24)$$

donde la configuración definida a partir de $(\mathbf{F}_{n+1}^e)^{-1}$ es una incógnita adicional del sistema. Si se supone que las deformaciones elásticas son pequeñas comparadas con las deformaciones plásticas, entonces se puede realizar la siguiente aproximación

$$\mathbf{F}^e \approx \mathbf{1} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}^p \approx \mathbf{F} \quad (25)$$

por lo tanto las configuraciones intermedia y deformada coinciden.

Actualización de las deformaciones y la densidad relativa

La nueva configuración en el tiempo t_{n+1} y el gradiente de la deformación se actualizan como sigue

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_{n+1}(\mathbf{X}) &= \boldsymbol{\varphi}_n(\mathbf{X}) + \Delta \mathbf{U}_{n+1}(\mathbf{X}) \\ \mathbf{F}_{n+1}(\mathbf{X}) &= \mathbf{F}_n(\mathbf{X}) + \text{GRAD } \Delta \mathbf{U}_{n+1}(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (26)$$

Las deformaciones y la densidad relativa vienen dadas por

$$\mathbf{E}_{n+1}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{n+1}^T \mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{G}) \quad (27)$$

$$\eta_{n+1}(\mathbf{X}) = \frac{\eta_o(\mathbf{X})}{\det[\mathbf{F}_{n+1}(\mathbf{X})]} \quad (28)$$

Integración de la ecuación de flujo

La ecuación de evolución (14) se escribe en la configuración de referencia como

$$\frac{\partial \mathbf{E}^p}{\partial t}(\mathbf{X}, t) = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} \quad (29)$$

Integrando implícitamente la ecuación (29) y teniendo en cuenta la ecuación (12) se obtiene la siguiente expresión para las deformaciones plásticas

$$\mathbf{E}_{n+1}^p = \mathbf{E}_n^p + \Delta \lambda_{n+1} \left[2\mathbf{C} \cdot \text{DEV} \mathbf{S} \cdot \mathbf{C} + \frac{2}{9} a_1(\eta) \text{TR}[\mathbf{S}] \mathbf{C} \right]_{n+1} \quad (30)$$

donde $\Delta \lambda_{n+1} = \Delta t \dot{\lambda}(t_{n+1})$

La transformación hacia adelante de la ecuación (30) por medio del operador ϕ_*^{n+1} permite escribir la deformación plástica en la configuración deformada como

$$\mathbf{e}_{n+1}^p = \tilde{\mathbf{e}}_n^p + 2\Delta \lambda_{n+1} \left[\text{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}] + \frac{1}{9} a_1 \text{tr}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}] \mathbf{g} \right] \quad (31)$$

donde $\tilde{\mathbf{e}}_n^p = \phi_*^{n+1}(\mathbf{E}_n^p)$. El estado tensional se calcula a partir de la ecuación (8) como

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \mathbf{c} : (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^p) \quad (32)$$

El sistema de ecuaciones se completa con las siguientes condiciones de Kuhn-Tucker en su forma discreta

$$\phi_{n+1} \leq 0 \quad \Delta\lambda_{n+1} \geq 0 \quad \Delta\lambda_{n+1}\phi_{n+1} = 0 \quad (33)$$

La resolución del sistema de ecuaciones formado por (31)-(33) se lleva a cabo de forma estándar utilizado para ello un algoritmo de tipo predictor-corrector²⁷, como se describe a continuación.

Predictor elástico

Esta etapa consiste en suponer que ninguna de las variables internas del modelo evoluciona durante el intervalo de tiempo analizado. En particular se supone que la deformación plástica permanece constante, entonces la deformación elástica se obtiene de la siguiente expresión

$$\mathbf{E}^{e^{trial}} = \mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^p \quad (34)$$

En la configuración espacial se tiene que

$$\mathbf{e}_{n+1}^{e^{trial}} = \mathbf{e}_{n+1} - \phi_*^{n+1}(\mathbf{E}_n^p) = \mathbf{e}_{n+1} - \tilde{\mathbf{e}}_n^p \quad (35)$$

El estado de tensiones y la condición de fluencia de prueba se definen entonces como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} &= \mathbf{c} : \mathbf{e}_{n+1}^{e^{trial}} \\ \phi_{n+1}^{trial} &= \phi(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}, \eta_{n+1}) \end{aligned} \quad (36)$$

Debido a la convexidad de la superficie de fluencia como función de las tensiones se puede probar que $\phi_{n+1}^{trial} \geq \phi_{n+1}$, donde $\phi_{n+1} = \phi(\boldsymbol{\tau}_{n+1}, \eta_{n+1})$.

Corrector plástico

Caso 1

Supóngase en primer lugar que $\phi_{n+1}^{trial} < 0$. En consecuencia $\phi_{n+1} < 0$ por el comentario anterior y por las condiciones de Kuhn Tucker (33) se tiene que $\Delta\lambda_{n+1} = 0$. Entonces la deformación plástica no evoluciona y el estado de prueba es el correcto. Las variables en el estado $n + 1$ son por lo tanto

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{n+1} &= \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} \\ \mathbf{e}_{n+1}^p &= \tilde{\mathbf{e}}_n^p \end{aligned} \quad (37)$$

1. Actualización

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_{n+1} &= \boldsymbol{\varphi}_n + \Delta \mathbf{U}_{n+1} & \mathbf{F}_{n+1} &= \mathbf{F}_n + \text{GRAD } \Delta \mathbf{U}_{n+1} \\ \mathbf{E}_{n+1} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{n+1}^T \mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{G}) & \eta_{n+1} &= \frac{\eta_0}{\det[\mathbf{F}_{n+1}]}\end{aligned}$$

2. Predictor elástico

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} = \mathbf{c} : \mathbf{e}_{n+1}^{e,trial} \quad \text{donde} \quad \mathbf{e}_{n+1}^{e,trial} = \phi_*^{n+1}(\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^p)$$

3. Verificación de la condición de fluencia

Si $\phi(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}, \eta_{n+1}) \leq 0$, entonces

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_{n+1} &= \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} \\ \mathbf{e}_{n+1}^p &= \tilde{\mathbf{e}}_n^p, & \tilde{\mathbf{e}}_n^p &= \phi_*^{n+1}(\mathbf{E}_n^p)\end{aligned}$$

Si no

$$\begin{aligned}p_{n+1}^{trial} &= \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}] \\ \Delta \lambda_{n+1} & \text{raíz positiva de (40)} \\ \alpha_{n+1} &= \frac{1}{1 + 4\bar{\mu}\Delta\lambda_{n+1}} & \beta_{n+1} &= \frac{1}{1 + 2\kappa a_1 \Delta\lambda_{n+1}} \\ \boldsymbol{\tau}_{n+1} &= \alpha_{n+1} \text{dev } \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} + \beta_{n+1} p_{n+1}^{trial} \mathbf{1} \\ \mathbf{e}_{n+1}^p &= \tilde{\mathbf{e}}_n^p + 2\Delta\lambda_{n+1} \left[\text{dev } \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} + \frac{1}{9} a_1 \text{tr}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}] \mathbf{1} \right]\end{aligned}$$

4. Tensor algorítmico tangente

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_{n+1}^{ep} &= \alpha_{n+1} \boldsymbol{\Lambda}_{n+1} + \frac{1}{3} \beta_{n+1} \mathbf{1} \otimes \mathbf{P}_{n+1}^{trial} - \frac{2}{3} \beta_{n+1} \text{tr}[\boldsymbol{\tau}] \mathbf{I} + \\ &+ G_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial (2J_2)} \mathbf{A}_{n+1} + \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial (I_1^2)} \mathbf{B}_{n+1} - \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \eta_{n+1}} \mathbf{D}_{n+1} \right]\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Lambda}_{n+1} &= \mathbf{C}_{n+1} + \frac{2}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}] \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{P}_{n+1}^{trial} & \mathbf{A}_{n+1} &= \mathbf{q}_{n+1}^{trial} \otimes \mathbf{J}_{n+1}^{trial} \\ \mathbf{B}_{n+1} &= 2 \text{tr}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}] \mathbf{q}_{n+1}^{trial} \otimes \mathbf{P}_{n+1}^{trial} & \mathbf{D}_{n+1} &= \eta \mathbf{q}_{n+1}^{trial} \otimes \mathbf{1} \\ \mathbf{q}_{n+1}^{trial} &= 4\bar{\mu} \alpha_{n+1}^2 \text{dev } \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} + 2\kappa a_1 \beta_{n+1}^2 p_{n+1}^{trial} \mathbf{1} & G_{\alpha\beta}^{-1} &= 4\bar{\mu} \alpha_{n+1}^2 \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + 2\kappa a_1 \beta_{n+1}^2 \frac{\partial \phi}{\partial \beta}\end{aligned}$$

Cuadro 2. Integración de la ecuación constitutiva

Caso 2

Supóngase ahora que $\phi_{n+1}^{trial} > 0$, entonces se trata de un estado no admisible, y por lo tanto $\Delta\lambda_{n+1} > 0$ de tal forma que $\mathbf{E}_n^p \neq \mathbf{E}_{n+1}^p$, y se concluye que $\boldsymbol{\tau}_{n+1} \neq \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}$.

Se puede probar (anexo A) que el estado de tensiones viene dado por

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \alpha_{n+1} \text{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}] + \beta_{n+1} p_{n+1}^{trial} \mathbf{1} \quad (38)$$

donde

$$p_{n+1}^{trial} = \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}] \quad \alpha_{n+1} = \frac{1}{1 + 4\bar{\mu}\Delta\lambda_{n+1}} \quad \beta_{n+1} = \frac{1}{1 + 2\kappa a_1 \Delta\lambda_{n+1}} \quad (39)$$

El parámetro $\bar{\mu}$ es una de las constantes de Lamé (módulo de deformación transversal) y κ es el módulo de deformación volumétrica del material. El término $\Delta\lambda_{n+1}$ se obtiene como solución de la siguiente ecuación no lineal

$$\alpha_{n+1}^2 (\Delta\lambda_{n+1}) \|\text{dev} \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}\|^2 + \beta_{n+1}^2 (\Delta\lambda_{n+1}) [p_{n+1}^{trial}]^2 - \frac{2}{3} a_2 (\eta_{n+1}) \sigma_y^2 = 0 \quad (40)$$

El tensor algorítmico tangente \mathbf{c}_{n+1}^{ep} se obtiene a partir de la derivación objetiva de la ecuación (32) y del uso de la condición de persistencia en su forma discreta $\Delta\lambda_{n+1} L_{\mathbf{v}} \phi_{n+1} = 0$. Un resumen de los cálculos se encuentra en el Apéndice 1. El Cuadro 2 contiene los pasos para realizar la integración del modelo constitutivo.

Extensión a un modelo visco-plástico: regularización viscosa

Esta extensión del modelo permite tener en cuenta el efecto que tiene la velocidad del proceso de compactación sobre las propiedades finales del compacto. Dicha extensión puede ser interpretada como una regularización del modelo elasto-plástico. Esta interpretación es particularmente útil cuando existe una pérdida de la elipticidad de las ecuaciones incrementales, debida a un proceso de compactación no definido de manera apropiada y que forma parte de los procesos propuestos para el diseño de una nueva pieza.

La extensión a un modelo visco-plástico del tipo Perzyna se obtiene tras reemplazar el parámetro de consistencia λ por la siguiente ecuación de evolución^{18,27}

$$\dot{\lambda} = \frac{\langle \phi(\boldsymbol{\tau}, \eta) \rangle}{\nu} \quad \nu > 0 \quad (41)$$

donde \langle, \rangle representa la función de Macauley, ϕ corresponde a la función de fluencia definida en la ecuación (10) y ν es la viscosidad. Suponiendo que $\phi^{trial} > 0$, entonces la deformación plástica se calcula de forma similar a la ecuación (31)

$$\mathbf{e}_{n+1}^p = \tilde{\mathbf{e}}_n^p + 2\Delta\lambda_{n+1} \left[\text{dev} \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} + \frac{1}{9} a_1 \text{tr} [\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}] \mathbf{1} \right] \quad (42)$$

pero el término $\Delta\lambda_{n+1}$ ahora viene dado por

$$\Delta\lambda_{n+1} = \frac{\Delta t}{\nu} \langle \phi(\boldsymbol{\tau}_{n+1}, \eta_{n+1}) \rangle \quad (43)$$

Si $\phi_{n+1} > 0$, entonces $\Delta\lambda_{n+1}$ es solución de la siguiente ecuación no lineal

$$\frac{\nu}{\Delta t} \Delta\lambda_{n+1} = \|\text{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}]\|^2 + \frac{1}{9} a_1(\eta_{n+1}) [\text{tr}\boldsymbol{\tau}_{n+1}]^2 - \frac{2}{3} a_2(\eta_{n+1}) \sigma_y^2 \quad (44)$$

Obsérvese que si la viscosidad ν tiende a cero, entonces la ecuación (44) se convierte en la ecuación (10), y por lo tanto $\Delta\lambda_{n+1}$ tiende al parámetro de consistencia del modelo elasto-plástico. En el cálculo del tensor algorítmico tangente sólo el coeficiente $G_{\alpha\beta}$ (Cuadro 2) se debe modificar por

$$\tilde{G}_{\alpha\beta} = \frac{G_{\alpha\beta}}{1 + \frac{\nu}{\Delta t} G_{\alpha\beta}} \quad (45)$$

TRATAMIENTO DEL CONTORNO: CONTACTO

La Figura 2 ilustra las principales etapas que se distinguen durante el proceso de compactación (llenado, transferencia de cámara, compresión y expulsión). Durante las diferentes fases las zonas de contacto del pulvimaterial contra las paredes del molde pueden variar, además la fricción con éstas afecta durante todo el proceso. Entonces se debe dotar al modelo numérico de las herramientas necesarias para simular estos fenómenos.

El problema de contacto

Sea Ω el cuerpo de interés y $\boldsymbol{\varphi}_t$ la aplicación que describe su movimiento definida en la ecuación (1). Sean $M_1 \dots M_p$ cuerpos que representan los elementos de matricería (molde, punzones, noyo, etc). El problema de contacto que aparece entre Ω y el cuerpo $M = \bigcup_{j=1}^p M_j$ se restringe al contacto entre el cuerpo deformable Ω y el contorno rígido ∂M . Durante la compactación ∂M define una región cerrada que al final del proceso tiene la forma de la pieza deseada. Esta región se modifica para permitir la expulsión del compacto.

En la teoría general de contacto para cuerpos deformables se alternan las superficies que se toman como referencia durante el cálculo. En este caso lo más simple es elegir como superficie de referencia el contorno rígido ∂M . Se supondrá que dicha superficie se encuentra parametrizada por longitud de arco mediante el parámetro s , tal que

$$\partial M_t = \{\mathbf{y}(s, t) / s \in (0, l), l > 0\} \quad (46)$$

La primera derivada de \mathbf{y} respecto a s define el vector tangente $\hat{\mathbf{t}}(s, t) = \partial\mathbf{y}/\partial s$. El vector $\hat{\mathbf{n}}$ se define como la normal exterior al cuerpo rígido (Figura 3).

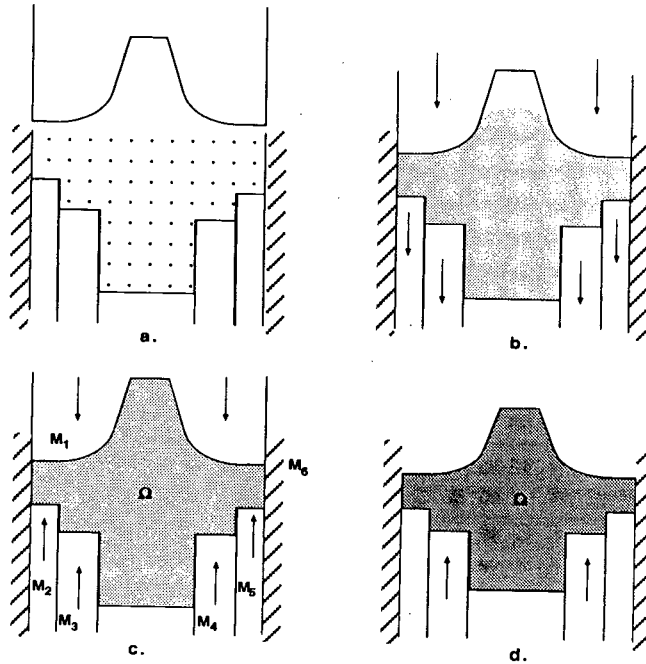


Figura 2. Etapas en el proceso de compactación: a) llenado, b) transferencia, c) compresión, d) expulsión

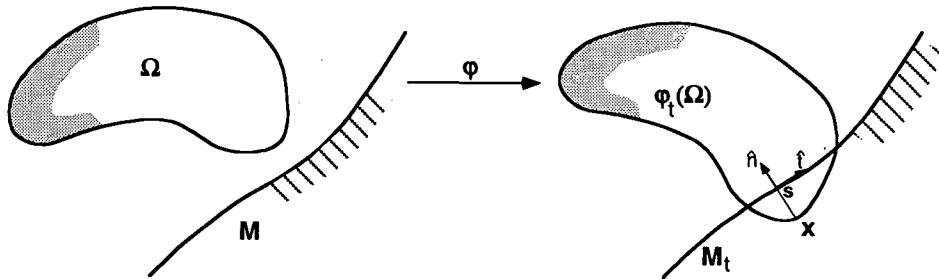


Figura 3. Contacto entre el cuerpo deformable y el contorno rígido

Sea Γ_C la porción de la frontera de $\partial\Omega$ que puede entrar en contacto con el cuerpo rígido. Se define g la función de penetración sobre $\varphi_t(\Gamma_C)$ como

$$g(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}}\| & \text{si } (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} < 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad (47)$$

donde $\mathbf{x} \in \varphi_t(\Gamma_C)$ y $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}(\bar{s}, t)$ es el punto sobre ∂M_t , donde la función distancia $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}(s, t)\|$ alcanza su mínimo. Dicho mínimo viene caracterizado por la siguiente ecuación

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}(s, t)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}(s, t)\|} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s} = \tilde{\mathbf{n}}(s, t) \cdot \hat{\mathbf{t}}(s, t) = 0 \quad (48)$$

La variación de la función g respecto al tiempo se obtiene a partir de su definición (48)

$$\dot{g}(\mathbf{x}, t) = [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}_M(\bar{s}, t)] \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (49)$$

donde \mathbf{v}_M representa la velocidad del contorno rígido en el punto \bar{s} y en el tiempo t .

La velocidad de deslizamiento tangencial $\mathbf{v}_T(\mathbf{x})$ para el punto $\mathbf{x} \in \varphi_t(\mathbf{X})$ se define como la velocidad a la que varía su punto de mínima distancia³³, esto es

$$\mathbf{v}_T(\mathbf{x}, t) = \dot{\bar{s}} \hat{\mathbf{t}}(\bar{s}) \quad (50)$$

donde $\bar{s} = \operatorname{argmin} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}(s, t)\|$. La variación $\dot{\bar{s}}$ se deduce a partir de la ecuación (48). Después de derivar ésta respecto al tiempo se deduce que¹⁰

$$\dot{\bar{s}} = [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}_M(t)] \cdot \hat{\mathbf{t}} + \frac{1}{\kappa} g(\mathbf{x}, t) \quad (51)$$

donde κ es la curvatura en el punto \bar{s} . Cuando se impone la condición de contacto de forma fuerte, o sea cuando $g(\mathbf{x}, t) = 0$, entonces el término $\dot{\bar{s}}$ se reduce a $\dot{\bar{s}} = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_M) \cdot \hat{\mathbf{t}}$, donde $\dot{\bar{s}}$ representa la variación del parámetro solución del problema de mínima distancia.

Condiciones de Kuhn-Tucker

Sea $h(\mathbf{x}, t) = -(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}}) \cdot \hat{\mathbf{n}}$ para $\mathbf{x} \in \varphi_t(\mathbf{X})$ y $\bar{\mathbf{y}}$ el punto sobre ∂M_t , donde se alcanza la mínima distancia. Esta función coincide con g si $(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} < 0$, pero toma valores negativos en caso contrario. La condición de no penetración se reformula como sigue

$$h(\mathbf{x}, t) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \varphi_t(\Gamma_C) \quad (52)$$

Sea t_n la componente normal de la fuerza de contacto. Dicha fuerza sólo puede ser de compresión, entonces

$$t_n(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \geq 0 \quad (53)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de Cauchy y $\hat{\mathbf{n}}$ la normal asociada al punto \mathbf{x} (Figura 3). La componente tangencial se supone nula al no considerarse por el momento los efectos de fricción. En conjunto, las condiciones de contacto sobre la porción de la frontera Γ_C se pueden escribir como sigue²⁸

$$h(\mathbf{x}) \leq 0 \quad t_n(\mathbf{x}) \geq 0 \quad t_n(\mathbf{x})h(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \varphi_t(\Gamma_C) \quad (54)$$

Las anteriores restricciones se conocen como condiciones de Kuhn-Tucker para el problema de contacto. Adicionalmente el cuerpo Ω debe satisfacer la ecuación de equilibrio, el modelo constitutivo y el resto de las condiciones en la frontera. El problema completo se puede formular de la siguiente forma: encontrar $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ campo de desplazamientos que satisfaga las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
\text{Div } \mathbf{P} + \mathbf{b} &= \mathbf{0} & \text{en } \Omega \\
\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{N}} &= \bar{\mathbf{t}} & \text{sobre } \Gamma_T \\
\mathbf{U} &= \bar{\mathbf{U}} & \text{sobre } \Gamma_D
\end{aligned} \tag{55}$$

donde \mathbf{b} representa las fuerzas de volumen, $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ es la porción de la superficie, donde los desplazamientos $\bar{\mathbf{U}}$ son conocidos y Γ_T , donde las tracciones $\bar{\mathbf{t}}$ son conocidas. Las ecuaciones de equilibrio (55) junto con las condiciones de contacto (54) y las ecuaciones del modelo constitutivo del Cuadro 1 definen el problema clásico a resolver. Con el ánimo de resolver dicho problema mediante la técnica de los elementos finitos se procede a definir un problema equivalente pero en forma integral.

Defínase \mathcal{V} el conjunto de desplazamientos admisibles como

$$\mathcal{V} = \left\{ \boldsymbol{\eta} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N \mid \boldsymbol{\eta}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0} \right\} \quad N : 2, 3 \tag{56}$$

El conjunto \mathcal{K} se define como el conjunto de los desplazamientos admisibles que satisfacen las restricciones del contacto

$$\mathcal{K} = \{ \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V} \mid h(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})) \leq 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \Gamma_C \} \tag{57}$$

El problema variacional asociado con las ecuaciones (55-57) es una desigualdad variacional. La solución directa de dicho problema es muy difícil ya que los elementos de \mathcal{K} no pueden obtenerse explícitamente. Afortunadamente en muchos casos que dependen básicamente de la ecuación constitutiva que se emplee, se puede reformular como uno de optimización. En este caso se plantea encontrar $\mathbf{U} \in \mathcal{K}$ campo de desplazamientos admisibles que minimice el siguiente funcional

$$J(\mathbf{U}) = \min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{K}} \left\{ J(\boldsymbol{\eta}) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \psi(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X})) d\mathbf{X} - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} d\mathbf{X} - \int_{\Gamma_T} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} dS \right\} \tag{58}$$

El problema (58) se puede interpretar como la minimización de un funcional de energía, pero en este caso con la dificultad adicional que los desplazamientos deben satisfacer ciertas restricciones. Los métodos que se describen a continuación tienen como objetivo central la eliminación de la restricción, formulando un problema equivalente y cuya solución sea abordable mediante el Método de los Elementos Finitos.

Método de penalización

El método de penalización consiste en añadir al funcional (58) una función de penalización que permite reformular el problema como una minimización sin restricciones. La solución de este problema aproximado tiende al mínimo del problema (58) en la medida que el parámetro de penalización ϵ tiende a cero. El nuevo problema que se debe resolver es: encontrar $\mathbf{U}_\epsilon \in \mathcal{V}$ tal que

$$J_\epsilon(\mathbf{U}_\epsilon) = \min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}} \left\{ J_\epsilon(\boldsymbol{\eta}) := J(\boldsymbol{\eta}) + \int_{\Gamma_C} \frac{1}{2\epsilon} \langle h \rangle^2 d\Gamma_C \right\} \tag{59}$$

donde \langle, \rangle representa la función de Macauley. La condición de punto extremo del funcional (59) se caracteriza porque la derivada $\delta J_\epsilon(\mathbf{U}_\epsilon; \boldsymbol{\eta}) = 0$.

Esta derivada se puede escribir explícitamente como

$$\delta J(\mathbf{U}_\epsilon; \boldsymbol{\eta}) + \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\epsilon} \langle h(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X})) \rangle \delta h(\boldsymbol{\eta}) d\Gamma = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V} \quad (60)$$

$\delta J(\mathbf{U}_\epsilon; \boldsymbol{\eta})$ agrupa los términos estándar que coinciden con la aplicación del teorema de los trabajos virtuales al sistema (55). El término que se adiciona a δJ en la ecuación (60) se puede interpretar como la aplicación de una fuerza en la dirección normal de magnitud $t^N = \frac{1}{\epsilon} \langle h \rangle$.

Método de los multiplicadores de Lagrange aplicado al contacto

El método consiste en la introducción de una nueva variable λ_n conocida como multiplicador de Lagrange y en la formulación de un nuevo problema, donde las incógnitas $(\mathbf{U}, \lambda_n) \in \mathcal{V} \times Q^+$ satisfacen el siguiente problema de punto de silla

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}, \lambda_n) = \max_{\mu \in Q^+} \min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}} \{ \mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}, \mu) := J(\boldsymbol{\eta}) + \int_{\Gamma_C} \mu h(\boldsymbol{\eta}) d\Gamma \} \quad (61)$$

donde

$$Q = L^2(\Gamma_C) \quad (62)$$

es el espacio de los multiplicadores de Lagrange y $Q^+ = \{\mu \in Q \mid \mu \geq 0\}$. Este último se interpreta como el conjunto de las fuerzas por unidad de superficie normales (de compresión) admisibles. La solución del problema anterior se caracteriza por satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones¹⁹

$$\begin{aligned} \delta J(\mathbf{U}; \boldsymbol{\eta}) + \int_{\Gamma_C} \lambda_n \delta h(\boldsymbol{\eta}) d\Gamma &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V} \\ \int_{\Gamma_C} \mu h(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X})) d\Gamma &= 0 \quad \forall \mu \in Q^+ \end{aligned} \quad (63)$$

El sistema anterior corresponde a las ecuaciones de Euler Lagrange asociadas al problema (61). La primera ecuación corresponde a la derivada de Gateaux de \mathcal{L} respecto a los desplazamientos en la dirección $\boldsymbol{\eta}$ y la segunda establece que $\lambda_n(\mathbf{X})$ sólo puede ser diferente de cero en los puntos en que la restricción es activa, o sea si $h(\mathbf{X}) = 0$.

Lagrangiano aumentado aplicado al problema del contacto

El método del Lagrangiano aumentado combina los métodos de penalización y multiplicadores de Lagrange para tratar de eliminar algunas de las desventajas que tienen los métodos por separado^{19,7}.

El lagrangiano aumentado que se postula para el problema de contacto es el siguiente^{19,4,10}

$$\mathcal{L}_\epsilon(\boldsymbol{\eta}, \mu) = J(\boldsymbol{\eta}) + \int_{\Gamma_C} \frac{\epsilon}{2} \left[\langle \mu + \frac{1}{\epsilon} h \rangle^2 - \mu^2 \right] d\Gamma \quad (64)$$

Cuando el multiplicador de Lagrange es nulo, entonces \mathcal{L}_ϵ se reduce al funcional de penalización (59), y cuando $\epsilon \rightarrow 0$, entonces la solución del problema (61) se aproxima a la solución del problema (61).

De forma similar al caso de los multiplicadores el problema es encontrar $(\mathbf{U}_\epsilon, \lambda_{n_\epsilon}) \in \mathcal{V} \times Q$ tal que

$$\mathcal{L}_\epsilon(\mathbf{U}_\epsilon, \lambda_{n_\epsilon}) = \max_{\mu \in Q} \min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}} \mathcal{L}_\epsilon(\boldsymbol{\eta}, \mu) \quad (65)$$

El problema anterior puede resolverse mediante dos tipos de estrategias. La primera se basa en la utilización de un esquema iterativo de tipo Uzawa que consiste en la incorporación de un nuevo lazo iterativo que se encarga de actualizar el multiplicador mediante la siguiente expresión

$$\lambda_{n_{k+1}} = \langle \lambda_{n_k} + \epsilon h \rangle \quad (66)$$

y para cada valor fijo λ_{n_k} se resuelve un problema variacional estándar correspondiente al paso 2 del Cuadro 3.

1. $k = 0, \quad \lambda_{n_0} = \lambda_{n_{\text{inicial}}} \geq 0$
2. Encontrar $\mathbf{U}_k \in \mathcal{V}$ solución de

$$\delta J(\mathbf{U}_k; \boldsymbol{\eta}) + \int_{\Gamma_C} \langle \lambda_{n_k} + \frac{1}{\epsilon} h \rangle \delta h(\boldsymbol{\eta}) d\Gamma = 0$$
3. Si $\| \langle h \rangle \|_{\Gamma_C}^2 < TOL$, entonces
FIN
Si no

$$\lambda_{n_{k+1}} = \langle \lambda_{n_k} + \frac{1}{\epsilon} h \rangle$$

$$k = k+1$$
4. Volver al paso 2

Cuadro 3. Lagrangiano aumentado: esquema anidado

La segunda estrategia conocida como método mixto⁴ consiste básicamente en resolver de forma simultánea las siguientes ecuaciones que caracterizan el punto de silla

$$\begin{aligned} \delta J(\mathbf{U}; \boldsymbol{\eta}) + \int_{\Gamma_C} \left\langle \lambda_n + \frac{1}{\epsilon} h(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X})) \right\rangle \delta h(\boldsymbol{\eta}) d\Gamma = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V} \\ \int_{\Gamma_C} \epsilon \mu \left(\left\langle \lambda_n + \frac{1}{\epsilon} h \right\rangle - \lambda_n \right) d\Gamma = 0 \quad \forall \mu \in \mathcal{Q} \end{aligned} \quad (67)$$

donde las incógnitas son \mathbf{U} , λ_n . La primera ecuación corresponde a la ecuación de equilibrio del cuerpo y la segunda a la condición de contacto.

TRATAMIENTO DEL CONTORNO: FRICCIÓN

El fenómeno de la fricción aparece como un efecto de resistencia al deslizamiento tangencial entre el pulvimaterial y el contorno rígido. En general dicho efecto es bastante complejo y depende de diversos parámetros como la rugosidad del molde, tamaño y forma de las partículas, la velocidad de aplicación de las cargas tipo de lubricante, etc. Esta gran variedad de parámetros hace que un modelo general sea extremadamente complejo. Con el ánimo de incluir los efectos más relevantes se formulan en el presente trabajo dos modelos de fricción: el primero del tipo Norton Hoff que depende de la velocidad relativa y la presión normal y el segundo del tipo fricción de Coulomb (fricción seca), donde el coeficiente de fricción puede depender de la densidad.

Fricción del tipo Norton Hoff

En este caso la fuerza tangencial t_t se obtiene directamente de la siguiente expresión

$$t_t = -\alpha \|v_T\|^{p-1} v_T \langle f_n \rangle \quad (68)$$

donde $v_T = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_M) \cdot \hat{\mathbf{t}}$ es la velocidad relativa tangente, f_n la fuerza normal de contacto y α un parámetro conocido como factor de fricción, que en general depende de las propiedades de los materiales involucrados. En este caso se supondrá que α depende también de la densidad. La ecuación (68) es una generalización de la ley de fricción propuesta en⁸. En el caso que $p = 1$ la ecuación (68) se reduce a

$$t_t = -\alpha v_T \langle f_n \rangle \quad (69)$$

Supóngase que la fuerza normal de contacto f_n y α permanecen constantes, entonces la variación de t_t respecto de la velocidad se reduce a

$$dt_t = -\alpha \langle f_n \rangle dv_T \quad (70)$$

que es la contribución del modelo a la matriz tangente del sistema. El término $-\alpha \langle f_n \rangle$ no depende del valor de la velocidad, lo que hace que el modelo definido por (69) sea muy atractivo desde el punto de vista computacional.

Fricción de Coulomb

El modelo consiste en suponer que la fuerza de fricción es proporcional a la fuerza normal de compresión. La constante en este caso se conoce como coeficiente de fricción. Se distinguen básicamente dos estados¹², un estado *stick*, donde la velocidad relativa entre las dos superficies en contacto es nula y un estado de deslizamiento *slip* asociado con un movimiento tangencial relativo.

La fuerza tangencial (o de fricción) debe cumplir la siguiente desigualdad

$$\theta(\mathbf{t}) = |t_t| - \mu |t_n| \leq 0 \quad (71)$$

La condición *stick* se formula como $v_t = 0$, en este caso la fuerza tangencial se interpreta como una reacción. En el caso *slip* la fuerza tangencial se calcula a partir de

$$t_t = -\mu |t_n| \frac{v_t}{|v_t|} \quad (72)$$

donde t_n representa la fuerza normal de contacto. El sistema se completa con la adición de las siguientes condiciones de Kuhn-Tucker

$$|v_t| \geq 0, \quad \theta(\mathbf{t}) \leq 0, \quad |v_t| \theta(\mathbf{t}) = 0 \quad (73)$$

Las ecuaciones (71-73) definen el modelo de fricción de Coulomb. Las técnicas más conocidas para solucionar el problema anterior se basan al igual que en el problema de contacto, en la reformulación del modelo como un problema de optimización.

La penalización^{28,33} consiste en asociar el modelo con uno de plasticidad unidimensional. El desplazamiento tangencial es la suma de dos términos $u_t = u_t^e + u_t^d$, donde u_t^e representa la parte elástica (reversible) y u_t^d el deslizamiento (irreversible). La función de fluencia viene dada por la ley de Coulomb (71) y se toma como dirección de flujo la derivada de θ respecto de t_t . La formulación se completa con la adición de las condiciones de Kuhn-Tucker (73). La integración de este modelo y comentarios a cerca de su implementación pueden encontrarse en^{10,28}.

El uso de la técnica de los multiplicadores supone la adición de una nueva variable que corresponde en este caso a la fuerza tangencial. En el caso *stick* el multiplicador se interpreta como la reacción y en el caso *slip* el multiplicador debe cumplir con (72).

En el caso de la simulación del proceso de compactación las dos técnicas anteriores presentan dificultades numéricas a la hora de detectar de forma robusta las zonas *stick*. En el caso de la penalización la elección del penalizador no es una tarea fácil y los desplazamientos presentan oscilaciones. En el caso de los multiplicadores¹⁰ se propuso un algoritmo para eliminar dichas oscilaciones, pero en la medida que la malla se hace muy fina las oscilaciones reaparecen. Estos problemas motivan el empleo de una técnica de lagrangiano aumentado similar al caso de contacto. Esta técnica consiste

en regularizar el método de los multiplicadores mediante la adición de un término de penalización. En este caso lo que se regulariza es la condición *stick*. La implementación se realiza con base en dos estrategias utilizadas también para el contacto. La primera que consiste en la adición de un nuevo lazo iterativo para actualizar el multiplicador de forma consistente con el modelo de fricción y la segunda es un método mixto que resuelve de forma simultánea desplazamientos y fuerzas. La ecuación adicional obliga a que las fuerzas tangenciales satisfagan el modelo de fricción de Coulomb. La primera estrategia se implementó y analizó en¹⁰. Los resultados obtenidos demuestran que se mejoró en la robustez a la hora de localizar las zonas *stick*, pero el coste computacional se elevó drásticamente. Para superar esta dificultad se propone el empleo de un algoritmo de tipo mixto originalmente propuesto por Alart y Curnier en⁴.

Algoritmo mixto de contacto y fricción: caso cuasiestático

La expresión de la velocidad tangente v_t , que aparece en la formulación del modelo de Coulomb (71-73), viene dada por la expresión (50). En el caso cuasiestático y bajo la restricción que el término de curvatura es despreciable, dicha expresión se puede aproximar por

$$v_t = \frac{1}{\Delta t} g_t := \frac{1}{\Delta t} [\Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}_M] \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad (74)$$

donde $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ representa el tamaño del incremento que se desea resolver y $\Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}_M$ el incremento en el desplazamiento relativo. Se ha supuesto adicionalmente que el sistema $\hat{\mathbf{t}} - \hat{\mathbf{n}}$ no varía durante este intervalo.

Debido a que el modelo de Coulomb (71-73) es homogéneo de grado 0 respecto a v_t , entonces se pueden establecer las mismas ecuaciones reemplazando v_t por g_t . En este caso el lagrangiano aumentado (64) que se postuló para el caso de contacto no se modifica, excepto que los elementos del conjunto \mathcal{V} se interpretan ahora como desplazamientos incrementales admisibles.

Para el caso general de contacto y fricción se postula el siguiente lagrangiano propuesto originalmente en⁴, y que se adapta aquí al caso bidimensional. En este caso, el problema es encontrar el punto de silla $(\Delta \mathbf{u}, \lambda_t, \lambda_n)$ del siguiente funcional

$$\mathcal{L}_\epsilon(\boldsymbol{\eta}, \mu_t, \mu_n) = J(\boldsymbol{\eta}) + \mathcal{L}_\epsilon^n(\boldsymbol{\eta}, \mu_n) + \mathcal{L}_\epsilon^t(\boldsymbol{\eta}, \mu_t) \quad (75)$$

donde $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}$ y $\mu_t, \mu_n \in Q$. Los términos \mathcal{L}_ϵ^n y \mathcal{L}_ϵ^t definen las componentes debidas al contacto y a la fricción respectivamente. Dichas componentes se definen como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\epsilon^n(\boldsymbol{\eta}, \mu_n) &:= \int_{\Gamma_C} \frac{\epsilon}{2} [\langle f_n \rangle^2 - \mu_n^2] d\Gamma \\ \mathcal{L}_\epsilon^t(\boldsymbol{\eta}, \mu_t) &:= \int_{\Gamma_C} \mu_t g_t d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \frac{1}{2\epsilon} g_t^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \frac{\epsilon}{2} \Phi^*(f_t, \tilde{f}_n) d\Gamma \end{aligned} \quad (76)$$

Las variables f_t y f_n se definen como $f_t = \mu_t + \frac{1}{\epsilon} g_t$ y $f_n = \mu_n + \frac{1}{\epsilon} h$. El término Φ^* corresponde a la siguiente función definida por partes

$$\Phi^*(f_t, \tilde{f}_n) = \begin{cases} 0 & |f_t| < \mu < \tilde{f}_n > \\ (|f_t| - \mu < \tilde{f}_n >)^2 & |f_t| \geq \mu < \tilde{f}_n > \end{cases} \quad (77)$$

La función Φ^* se interpreta como la distancia entre el punto f_t y la proyección de éste sobre la superficie definida por el modelo de Coulomb (71). El término \tilde{f}_n viene dado por $\tilde{f}_n = \lambda_n + \frac{1}{\epsilon} h(\Delta \mathbf{u})$, donde $\Delta \mathbf{u}$ y λ_n corresponden a la solución del problema de contacto. La desigualdad $|f_t| < \mu < \tilde{f}_n >$ define la condición de no deslizamiento (condición *stick*). En este caso la distancia entre el punto f_t y la superficie es cero y el lagrangiano \mathcal{L}_ϵ^t se reduce al caso de una restricción de igualdad. La otra desigualdad $|f_t| \geq \mu < \tilde{f}_n >$ define la condición de deslizamiento (condición *slip*) y la distancia entre f_t y la proyección es $|f_t| - \mu < \tilde{f}_n >$.

El punto de silla $(\Delta \mathbf{u}, \lambda_t, \lambda_n)$ del funcional (75) se caracteriza por ser solución del siguiente sistema

$$\begin{aligned} \delta J(\Delta \mathbf{u}; \boldsymbol{\eta}) + \int_{\Gamma_C} \langle f_n \rangle \delta h(\boldsymbol{\eta}) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} [f_t \delta g_t(\boldsymbol{\eta}) - \frac{\epsilon}{2} \delta \boldsymbol{\eta} \Phi^*(f_t, f_n)] d\Gamma &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V} \\ \int_{\Gamma_C} \epsilon \mu_n [\langle f_n \rangle - \lambda_n] d\Gamma &= 0 \quad \forall \mu_n \in Q \\ \int_{\Gamma_C} \epsilon \left[\frac{1}{\epsilon} g_t \mu_t - \frac{1}{2} \delta \mu_t \Phi^*(f_t, f_n) \right] d\Gamma &= 0 \quad \forall \mu_t \in Q \end{aligned} \quad (78)$$

donde $f_t = \lambda_t + g_t(\Delta \mathbf{u})$ y $f_n = \lambda_n + \frac{1}{\epsilon} h(\Delta \mathbf{u})$. Los términos $\delta \boldsymbol{\eta} \Phi^*(f_t, f_n)$ y $\delta \mu_t \Phi^*(f_t, f_n)$ corresponden a las variaciones de la función Φ^* respecto a $\boldsymbol{\eta}$ y μ_t respectivamente. La primera de éstas se escribe como

$$\delta \boldsymbol{\eta} \Phi^*(f_t, f_n) = \frac{2}{\epsilon} \begin{cases} 0 & |f_t| < \mu < f_n > \\ (f_t - \mu < f_n >) \delta g_t & f_t \geq \mu < f_n > \\ (f_t + \mu < f_n >) \delta g_t & -f_t \geq \mu < f_n > \end{cases} \quad (79)$$

La variación respecto a μ_t es similar a la ecuación (79), basta con reemplazar δg_t por μ_t y el coeficiente $\frac{2}{\epsilon}$ por 2. Como consecuencia de la definición de Φ^* en (77), en el cálculo de su variación respecto a $\boldsymbol{\eta}$ o μ_t hay que distinguir tres casos: 1) estado de no deslizamiento (*stick*), donde $|f_t| < \mu < f_n >$, y los casos 2) y 3) que corresponden a un estado de deslizamiento (*slip*). Acerca de este último hay que distinguir entre un deslizamiento hacia adelante ($f_t \geq \mu < f_n >$) y un deslizamiento hacia atrás ($-f_t \geq \mu < f_n >$), que deben tenerse en cuenta para la correcta formulación de la matriz tangente, como se verá en la siguiente sección.

La primera ecuación del sistema (78) corresponde a la aplicación del teorema de los trabajos virtuales, mientras que la segunda y tercera corresponden a las condiciones de contacto y fricción respectivamente.

DISCRETIZACIÓN DE LOS TÉRMINOS DE CONTACTO Y FRICCIÓN

Zona de contacto

Según lo explicado anteriormente, el contacto entre el cuerpo deformable Ω y el contorno rígido ∂M se modela como un problema de contacto unilateral. En este caso el cuerpo M lo conforman los diferentes elementos de matricería, como son el molde, los punzones y el noyo.

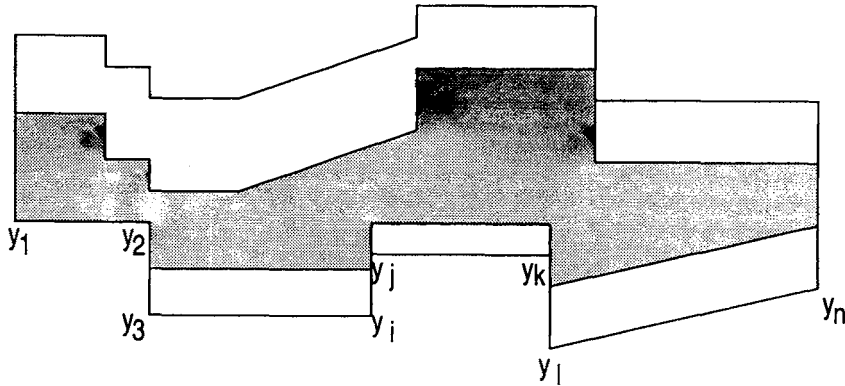


Figura 4. Elementos de matricería

El contorno de cada uno de estos elementos se aproxima mediante una sucesión de segmentos rectos definidos por los puntos $y_1 \dots y_k$ (Figura 4). Cada punto material $\mathbf{X} \in \Gamma_C$ se asocia con uno de estos segmentos $\overline{y_i y_{i+1}}$ al cual pertenece la solución del siguiente problema de mínima distancia (Figura 5a)

$$\bar{y} = \arg \min_{y \in [y_i, y_j]} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (80)$$

donde $\mathbf{x} = \varphi_t(\mathbf{X})$.

La función h definida anteriormente se puede escribir como

$$h(\mathbf{X}, t) = -[\varphi_t(\mathbf{X}) - \bar{y}] \cdot \hat{\mathbf{n}} = -[\mathbf{x} - \bar{y}] \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (81)$$

donde las direcciones normal y tangencial se definen a partir del segmento que contiene al punto \bar{y} . En este caso

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i}{\|\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i\|} \quad \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{i}}_3 \times \hat{\mathbf{t}} \quad (82)$$

donde $\hat{\mathbf{i}}_3$ es el versor perpendicular hacia afuera respecto al plano de análisis. El punto $\bar{\mathbf{y}}$ se puede escribir como $\bar{\mathbf{y}} = (1 - \bar{\alpha})\mathbf{y}_i + \bar{\alpha}\mathbf{y}_j$, donde $\bar{\alpha} = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}_i) \cdot \hat{\mathbf{t}}}{\|\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i\|}$.

Debido a los grandes desplazamientos que ocurren durante el proceso de compactación, el punto solución del problema de mínima distancia puede en general cambiar de segmento de un paso de tiempo al otro. También puede ocurrir, como se aprecia en la Figura 5b, que el punto solución se sitúe en una esquina formada por dos segmentos, o que la solución no sea única, como se muestra en la Figura 5c.

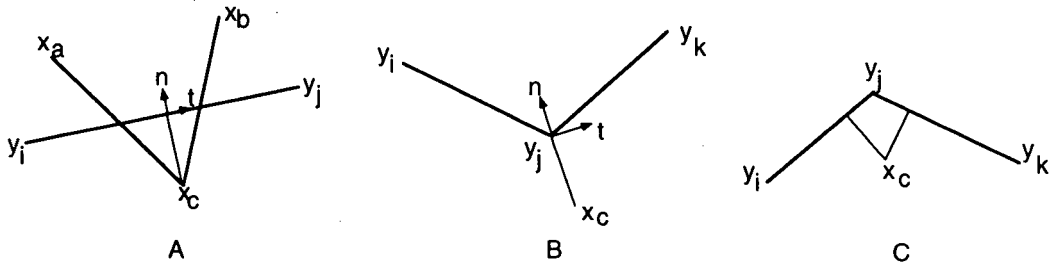


Figura 5. Problema de mínima distancia: a) mínimo en el interior del segmento, b) mínimo en la esquina, c) dos soluciones

En el caso de la esquina, la función h se define como $h(\mathbf{x}_c) = -(\mathbf{x}_c - \mathbf{y}_j) \cdot \hat{\mathbf{n}}$, donde los vectores normal y tangente vienen dados por

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{y}_j - \mathbf{x}_c}{\|\mathbf{y}_j - \mathbf{x}_c\|} \quad \hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{i}}_3 \quad (83)$$

Cuando la solución no es única, el segmento al que pertenecía el punto \mathbf{x}_c no se modifica, por lo tanto los vectores normal y tangencial continúan siendo los del paso de tiempo previo.

Discretización de los diferentes términos

Sea $\Omega^h = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_e$ una discretización del dominio material Ω en elementos finitos,

donde n_e representa el número de elementos utilizados. La aproximación Γ_C^h de la frontera Γ_C se define a partir del conjunto $\{X_c\}_{c=1}^{n_c}$ de todos los nodos de la frontera que pueden estar en contacto con el contorno rígido. El valor n_c denota el número total de estos nodos.

Los siguientes conjuntos \mathcal{V}^h y Q^h , que corresponden a las aproximaciones de los conjuntos \mathcal{V} y Q definidos en (56) y (62) respectivamente, son los espacios de los (incrementos) desplazamientos admisibles y multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^h &= \{\boldsymbol{\eta}_p : (w^1, w^2) \in [C^0(\Omega)]^2 / w^1, w^2|_{\Omega_e} \in P_1, e : 1..n_e, p : 1..n_p, \boldsymbol{\eta}_p = 0 \text{ sobre } \Gamma_D\} \\ Q^h &= \{\delta_{X_i} : \text{delta de Kronecker} / \delta_{X_i}(X_j) = \delta_{ij}, X_i, X_j \in \Gamma_C^h\} \end{aligned} \quad (84)$$

El conjunto P_1 representa los polinomios de orden 1 y Γ_D la porción de la frontera, donde los desplazamientos son conocidos. El valor n_p representa el número total de nodos que definen la discretización Ω^h . Con base en la anterior discretización, las variables $(\Delta \mathbf{u}, \lambda_n, \lambda_t)$ se interpolan de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{u}_h(\mathbf{X}) &= \sum_{p=1}^{n_p} w_p(\mathbf{X}) \Delta \mathbf{u}_h^p, & \Delta \mathbf{u}_h^p &\in \mathbb{R}^2 \\ \lambda_n(\mathbf{X}) &= \sum_{c=1}^{n_c} \lambda_n^c \delta_{X_c}(\mathbf{X}) \\ \lambda_t(\mathbf{X}) &= \sum_{c=1}^{n_c} \lambda_t^c \delta_{X_c}(\mathbf{X})\end{aligned}\quad (85)$$

Por comodidad en la notación, los coeficientes de $\Delta \mathbf{u}_h(\mathbf{X})$, $\lambda_n(\mathbf{X})$ y $\lambda_t(\mathbf{X})$ se agrupan en los vectores $\Delta \mathbf{u}^h$, Λ_n^h y Λ_t^h de dimensiones n_p , n_c y n_c . Como consecuencia de la elección del conjunto Q^h , todas las variables que intervienen en el problema de contacto y fricción se transforman en variables nodales. En este caso, la aproximación más apropiada de las funciones h y g_t es la siguiente

$$\begin{aligned}h_c &= -[\Delta \mathbf{u}_h^c - \Delta \mathbf{u}_M] \cdot \hat{\mathbf{n}}_c + h_c^{(n)} \\ g_t^c &= -[\Delta \mathbf{u}_h^c - \Delta \mathbf{u}_M] \cdot \hat{\mathbf{t}}_c\end{aligned}\quad (86)$$

El término $h_c^{(n)}$ corresponde al valor de h en el paso de tiempo previo y $\Delta \mathbf{u}_M$ es el incremento en el desplazamiento del contorno rígido. Las variaciones de las funciones (86) respecto al incremento en los desplazamientos se escriben como

$$\delta h_c = -\delta \mathbf{u}_h^c \cdot \hat{\mathbf{n}}_c \quad \delta g_t^c = -\delta \mathbf{u}_h^c \cdot \hat{\mathbf{t}}_c \quad (87)$$

Luego de reemplazar las expresiones (85-87) en el sistema de ecuaciones (78), se obtiene el siguiente problema discreto: encontrar $(\Delta \mathbf{u}^h, \Lambda_n^h, \Lambda_t^h) \in \mathbb{R}^{2 \times n_p} \times \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}^{n_c}$ que satisfacen el siguiente sistema no lineal

$$G(\Delta \mathbf{u}^h, \Lambda_n^h, \Lambda_t^h, \delta \mathbf{u}_h) = 0 \quad p : 1 \dots n_p \quad (88a)$$

$$G_t(\Delta \mathbf{u}^h, \Lambda_t^h, \mu_q) = 0 \quad q : 1 \dots n_c \quad (88b)$$

$$G_n(\Delta \mathbf{u}^h, \Lambda_n^h, \mu_q) = 0 \quad q : 1 \dots n_c \quad (88c)$$

La primera ecuación del sistema (88) corresponde al teorema de los trabajos virtuales en su forma discreta, mientras que las otras dos corresponden a las condiciones de fricción y contacto respectivamente.

La ecuación (88a) se puede escribir como

$$G(\Delta \mathbf{u}^h, \Lambda_n, \Lambda_t, \delta \mathbf{u}_h) = G^{int}(\Delta \mathbf{u}^h, \delta \mathbf{u}_h) + \sum_{c=1}^{n_c} G_c^{ext}(\Lambda_t, \Lambda_n, \delta \mathbf{u}_h) \quad (89)$$

donde G_c^{ext} es la contribución típica debida al nodo $\mathbf{X}_c \in \Gamma_c^h$, que viene dada por la siguiente expresión

$$G_c^{ext}(\lambda_t^c, \lambda_n^c, \delta \mathbf{u}_h) = - \langle f_n^c \rangle \delta \mathbf{u}_h^c \cdot \hat{\mathbf{n}} - f_t^c \delta \mathbf{u}_h^c \cdot \hat{\mathbf{t}} - \frac{\epsilon}{2} \delta u \Phi^*(f_t^c, f_n^c) \quad (90)$$

donde $f_n^c = \lambda_n^c + \frac{1}{\epsilon} h^c$ y $f_t^c = \lambda_t^c + \frac{1}{\epsilon} g_t^c$. De forma similar, las condiciones de contacto y fricción para el nodo \mathbf{X}_c se pueden escribir como

$$\begin{aligned} G_t(\Delta \mathbf{u}^h, \lambda_t^c, \mu_t) &= \epsilon \left[\frac{1}{\epsilon} g_t^c \mu_t - \frac{1}{2} \delta_{\mu_t} \Phi^*(f_t^c, f_n^c) \right] \\ G_n(\Delta \mathbf{u}^h, \lambda_n^c, \mu_n) &= \epsilon \mu_n (\langle f_n^c \rangle - \lambda_n^c) \end{aligned} \quad (91)$$

El sistema de ecuaciones (88) se resuelve mediante la aplicación del método de Newton, para lo cual se requiere el cálculo del vector de residuos y de la matriz tangente en cada iteración del algoritmo. La contribución a dichos términos se puede separar en dos: 1) la contribución debida a la expresión G^{int} que se describe detalladamente en¹⁰ y 2) la contribución debida al contacto y a la fricción. Esta última, para el caso de un solo nodo de contacto, se puede resumir en los siguientes casos (que son consecuencia de la definición de la función Φ^*):

a) condición de despegue (*gap*)

$$\mathcal{F}_c^{res} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\epsilon \lambda_t \\ -\epsilon \lambda_n \end{pmatrix} \quad (92)$$

b) no deslizamiento (*stick*)

$$\mathcal{F}_c^{res} = \begin{pmatrix} -f_t \\ -f_n \\ g_t \\ h \end{pmatrix} \quad (93)$$

c) deslizamiento (*slip*) hacia adelante y hacia atrás

$$\begin{pmatrix} -\mu f_n \\ -f_n \\ \epsilon(-\lambda_t + \mu f_n) \\ h \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu f_n \\ -f_n \\ -\epsilon(\lambda_t + \mu f_n) \\ h \end{pmatrix} \quad (94)$$

La contribución a la matriz tangente es la siguiente:

a) condición de despegue (*gap*)

$$\mathbf{K}_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon \end{pmatrix} \quad (95)$$

b) no deslizamiento (*stick*)

$$\mathbf{K}_c = \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\epsilon} & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (96)$$

c) deslizamiento (*slip*) hacia adelante y hacia atrás

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\epsilon}\mu & 0 & -\mu \\ 0 & \frac{1}{\epsilon} & 0 & -1 \\ 0 & -\mu & -\epsilon & \epsilon\mu \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\epsilon}\mu & 0 & \mu \\ 0 & \frac{1}{\epsilon} & 0 & -1 \\ 0 & \mu & -\epsilon & -\epsilon\mu \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (97)$$

CONCLUSIONES

El modelo constitutivo que se formula está inmerso dentro de la teoría de las grandes deformaciones plásticas. Esto permite calcular de forma muy precisa los grandes movimientos y deformaciones del material. La evolución en la resistencia del material se controla a través de dos curvas que dependen de la densidad relativa. La elección de una regla de flujo asociada combinada con la formulación de la función de fluencia permite simular el efecto asintótico de la densidad al final del proceso de compactación.

Junto con la calibración de las dos curvas que controlan el aumento en la resistencia, el modelo constitutivo requiere el conocimiento de las propiedades elásticas y la resistencia máxima a compresión del material en verde. Debido a que el número de parámetros es reducido, el modelo resultante es fácil de calibrar, y por lo tanto atractivo como herramienta de diseño para la industria.

La elección de un modelo hiperelástico y la integración cerrada de la regla de flujo permiten la formulación exacta del tensor algorítmico tangente que preserva la convergencia cuadrática del sistema global. Esto permite mantener valores bajos en los tiempos de cálculo, característica muy importante que debe tener como herramienta de diseño.

La generalización a un modelo viscoplástico permite tener en cuenta la velocidad de compactación. Se podrán estudiar los efectos sobre la pieza final que tiene el hecho de realizar la misma pieza en diferentes tipos de prensas a diferentes velocidades de movimiento de los punzones. Además dicha regularización puede utilizarse como herramienta para mejorar la robustez del modelo en los casos que el proceso de compactación no haya sido definido de forma apropiada y conduzca a una pérdida en la elipticidad de las ecuaciones. Esto se logra fácilmente manteniendo baja la viscosidad y definiendo un incremento de tiempo lo suficientemente pequeño.

La formulación del modelo numérico se completa con la adición de dos modelos de fricción entre el polvo y las paredes del molde. El primero corresponde a un modelo del tipo fricción de Coulomb. Para su implementación se propone el uso de un algoritmo mixto que permite encontrar zonas *stick* de forma robusta. El segundo corresponde

a modelo del tipo Norton Hoff, donde la fuerza tangencial es función de la velocidad relativa y la fuerza de compresión. Cuando $p = 1$, la fuerza tangencial es proporcional a la velocidad, y por lo tanto la contribución a la matriz tangente del sistema es independiente de la velocidad, lo que lo hace muy atractivo desde el punto de vista computacional.

ANEXO: TENSOR ELASTO-PLÁSTICO TANGENTE

La obtención de los tensores tangentes tanto elasto-plástico como algorítmico consisten en transformar las expresiones que intervienen en el cálculo a la configuración material mediante el operador ϕ^* , derivar estas nuevas expresiones y luego transformar los resultados a la configuración espacial mediante ϕ_* .

Derivada del tensor elástico

El tensor elástico \mathbf{c} se puede escribir en la configuración material (mediante ϕ^*) como

$$\Xi = [2\mu \mathbf{I}_{C^{-1}} + \lambda C^{-1} \otimes C^{-1}] \quad (98)$$

donde

$$I_{C^{-1}}^{abcd} = \frac{1}{2} [(C^{-1})^{ac}(C^{-1})^{bd} + (C^{-1})^{ad}(C^{-1})^{bc}] \quad (99)$$

La derivada de Ξ se puede escribir como

$$d\Xi = [2\mu d\mathbf{I}_{C^{-1}} + \lambda d\mathbf{G}] \quad (100)$$

donde

$$d\mathbf{G} = -2 [C^{-1} d\mathbf{E} C^{-1} \otimes C^{-1} + C^{-1} \otimes C^{-1} d\mathbf{E} C^{-1}] \quad (101)$$

La derivada $d\mathbf{I}_{C^{-1}}$ se obtiene de la regla del producto y la ecuación (99). La derivada de Lie de \mathbf{c} resulta de aplicar la transformación ϕ_* a la ecuación (100)

$$L_{\mathbf{v}}\mathbf{c} = 2\bar{\mu}\phi_*(d\mathbf{I}_{C^{-1}}) + \bar{\lambda}\phi_*(d\mathbf{G}) \quad (102)$$

A partir de la ecuación (102), el producto $L_{\mathbf{v}}\mathbf{c} : (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p)$ se puede escribir en términos del siguiente tensor de cuarto orden

$$L_{\mathbf{v}}\mathbf{c} : (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) = \mathbf{a} : L_{\mathbf{v}}\mathbf{e} \quad (103)$$

donde

$$a^{ijkl} = -4\bar{\mu}[(\mathbf{e}^e)^{il}\delta^{jk} + \delta^{ik}(\mathbf{e}^e)^{lj}] - 2\bar{\lambda}[\delta^{ij}(\mathbf{e}^e)^{kl} + \delta^{ik}\delta^{jl}\text{tr}[\mathbf{e}^e]] \quad (104)$$

Tensor Algorítmico tangente

Después de algunas manipulaciones algebraicas y de la aplicación de la regla de la cadena se prueban los siguientes lemas.

Lema A.1

Sea $\phi_{n+1}^{trial} = \phi(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}, \eta_{n+1})$, entonces el tensor de tensiones se puede escribir como

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \begin{cases} \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} & \phi_{n+1}^{trial} < 0 \\ \alpha_{n+1}\text{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}] + \beta_{n+1}p_{n+1}^{trial} \mathbf{1} & \phi_{n+1}^{trial} \geq 0 \end{cases} \quad (105)$$

donde

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{1 + 4\bar{\mu}\Delta\lambda_{n+1}} \quad \beta_{n+1} = \frac{1}{1 + 2\kappa a_1\Delta\lambda_{n+1}} \quad (106)$$

Lema A.2

La derivada de $\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}$ se puede formular como $d\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} = \mathbf{C}_{n+1} : d\mathbf{e}_{n+1}$. El tensor \mathbf{C} viene dado por la siguiente expresión, donde $e = \mathbf{e}_{n+1}^{e^{trial}}$

$$\mathbf{C}_{n+1} = c^{ijkl} - 4\bar{\mu} [\delta^{ik} e^{lj} + \delta^{jk} e^{il}] - 2\bar{\lambda} [\delta^{ij} e^{kl} + \delta^{ik}\delta^{jl} \text{tr}[e]] \quad (107)$$

Lema A.3

Las derivadas del desviador del primer y segundo invariante de las tensiones vienen dadas por

$$\begin{aligned} dp_{n+1}^{trial} &= \frac{1}{3} \mathbf{P}_{n+1}^{trial} : d\mathbf{e}_{n+1} := [2\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} + \mathbf{1} : \mathbf{C}_{n+1}] : d\mathbf{e}_{n+1} \\ d[2J_2]_{n+1} &= \mathbf{J}_{n+1}^{trial} : d\mathbf{e}_{n+1} := 2[2\text{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}] \cdot \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} + \text{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}] : \mathbf{C}_{n+1}] : d\mathbf{e}_{n+1} \\ d[\text{dev}\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}] &= \boldsymbol{\Lambda}_{n+1} : d\mathbf{e}_{n+1} := \left[\mathbf{C}_{n+1} + \frac{2}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}] \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{P}_{n+1}^{trial} \right] : d\mathbf{e}_{n+1} \end{aligned}$$

Supóngase que $\phi_{n+1}^{trial} < 0$, entonces el tensor algorítmico se obtiene directamente como resultado de Lema A.1. En el otro caso ($\phi_{n+1}^{trial} \geq 0$) el tensor se obtiene a partir de la derivada objetiva de

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\tau}_{n+1} &= \alpha_{n+1} d[\text{dev}\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}] + d\alpha_{n+1}\text{dev}\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial} + \\ &+ \beta_{n+1}d[p_{n+1}^{trial}] \mathbf{1} + d\beta_{n+1}p_{n+1}^{trial} \mathbf{1} - \frac{2}{3}\beta_{n+1}\text{tr}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}]d\mathbf{e}_{n+1} \end{aligned} \quad (108)$$

Las derivadas del primer y segundo invariantes de las tensiones resultan de aplicar el Lema A.3. Las otras derivadas se calculan a partir de la regla de la cadena y la condición de persistencia $d\Phi_{n+1} = 0$ cuyos resultados se resumen en el siguiente lema

Lema A.4

$$\begin{aligned} d\alpha_{n+1} &= g_\alpha d(\Delta\lambda_{n+1}) := -4\bar{\mu}\alpha_{n+1}^2 d(\Delta\lambda_{n+1}) \\ d\beta_{n+1} &= g_\beta d(\Delta\lambda_{n+1}) := -2\kappa a_1 \beta_{n+1}^2 d(\Delta\lambda_{n+1}) \\ d(\Delta\lambda_{n+1}) &= G_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial\phi}{\partial(J_2)} \mathbf{J} + 2\text{tr}[\boldsymbol{\tau}] \frac{\partial\phi}{\partial(I_1^2)} \mathbf{P} - 2\eta \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \mathbf{1} \right]_{n+1}^{trial} : d\mathbf{e}_{n+1} \end{aligned} \quad (109)$$

donde

$$\begin{aligned} -G_{\alpha\beta}^{-1} &= g_\alpha \frac{\partial\phi}{\partial\alpha} + g_\beta \frac{\partial\phi}{\partial\beta} & \mathbf{q}_{n+1}^{trial} &= g_\alpha \text{dev}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}] + g_\beta p_{n+1}^{trial} \mathbf{1} \\ \mathbf{A}_{n+1} &= \mathbf{q}_{n+1}^{trial} \otimes \mathbf{J}_{n+1}^{trial} & \mathbf{B}_{n+1} &= 2\text{tr}[\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}] \mathbf{q}_{n+1}^{trial} \otimes \mathbf{P}_{n+1}^{trial} \\ \mathbf{D}_{n+1} &= \eta \mathbf{q}_{n+1}^{trial} \otimes \mathbf{1} \end{aligned} \quad (110)$$

El tensor algorítmico se obtiene tras reemplazar los resultados parciales contenidos en los Lemas A.2, A.3, A.4 en la expresión(108).

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido realizada con la financiación parcial de la Comisión Internacional de Ciencia y Tecnología (CICYT) mediante los proyectos 95-0099-OP y TAP97-1147. Los autores desean agradecer desde aquí dicha financiación.

REFERENCIAS

1. M. Abouaf, "Modélisation de la compaction de poudres métalliques frittées. Approche par la mécanique des milieux continus", Tesis Doctoral, L'Institut National Polytechnique de Grenoble, (1985).
2. R. Abraham, J.E. Marsden y Ratiu, "*Manifolds, Tensor Analysis and Applications*", Addison-Wesley, (1983).
3. A.R. Akisaya, A.C.F. Cocks y N.A. Fleck, "The Role of Contact-Contact Interaction in the Densification of Powders", *Proceedings of the Powder Metallurgy 94, World Congress*, pp. 757-760, Paris, (1994).
4. P. Alart y A. Curnier, "A Mixed Formulation for Frictional Contact Problems to Newton like Solution Methods", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engn.*, Vol. **92**, pp. 353-375, (1991).
5. V.S. Arunachalam y O.V. Roman, *Powder Metallurgy*, Aspect publishin, (1990).

6. J. Bandstra, P. Otto y R. Ted Massa,, "Finite Element Simulation of Cold Die Compaction Leading to Sintered Part Dimension Control", *Advances in Powder Metallurgy*, pp. 181-196, (1990).
7. M.S. Bazaraa, H.D. Sherali y C.M. Shetty, "*Nonlinear Programming Theory and Algorithms*", John Wiley & Sons, (1993).
8. C. Bohatier y J.L. Chenot, "Finite Element Formulation For Non-Stady-State Large Deformations with Sliding or Evolving Contact Boundary Conditions", *Int. J. for Num. Meth. in Engn.*, Vol. **28**, pp. 753-768, (1989).
9. W.A.M. Brekelmans, J.D. Janssen y A.A.F. Van De Ven, "An Eulerian Approach for Die Compaction Processes", *Int. J. for Num. Meth. in Engn.* , Vol. **31**, pp. 509-524, (1991).
10. J.C. Cante, "Simulación numérica de procesos de compactación de pulvimateriales. Aplicación de técnicas de cálculo paralelo, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, (1995).
11. G. Coccoz, M. Bellet, R. Lécot, L. Ackermann y H. Haggblad, "Cold Compaction of Iron Powder: Experiments and Simulation" *Proceedings of the Powder Metallurgy 94*, pp. 709-712, (1994).
12. A. Curnier, "A Theory of Friction", *Int. J. Solids Structures* , Vol. **20**, 7, pp. 637-647, (1984).
13. G. Duvaut, "Mécanique des milieux continus", MASSON, (1990).
14. B. Ferguson, Lynn y Krauss, "*Advances in Powder Metallurgy*" , pp. 147-164, (1990).
15. D.T. Gethin, R.W. Lewis, D.V. Tran y J.G. Ashoka, Finite Element Simulation in Metal Powder Die Compaction, *Proceedings of the Powder Metallurgy 92, World Congress*., pp. 11-27, (1992).
16. J.H. Heegaard y A. Curnier, "An Augmented Lagrangian Method for Discrete Large-Slip Contact Problems", *Int. J. for Num. Meth. in Engn.* , Vol. **36**, pp. 569-593, (1993).
17. T. M. Krauss, G.J. Petrus y B.L. Ferguson, "Die Compaction Process Design Part 2: FEM Simulation", *Proceedings of the Powder Metallurgy Conf. Exhibition*, pp. 111-122, (1991).
18. J. Lubliner, "*Plasticity Theory*", Publishing Company N.Y., (1990).
19. D.F. Luenberger, "*Programación lineal and no lineal*", Addison-Wesley, (1989).
20. J.F. Marsden y T.J.R. Hughes, "*Mathematical Foundations of Elasticity*", Prentice-Hall, (1983).
21. Tomokazu Nakagawa y Massaki Sato, "Simulation of Powder Densification in Die Compaction Process", *Proceedings of the Powder Metallurgy 92, World Congress*, Vol. **2**, (1992).
22. J. Oliver, S. Oller y J. C. Cante, "A Plasticity Model for Simulation of Industrial Powder Compaction Processes", *Int. J. Solids Structures*, Vol. **33**, 20-22, pp. 3161-3178, 1996.
23. J. Oliver, S. Oller y Juan C. Cante, "Numerical Simulation of Uniaxial Compaction Processes in Powder Materials", *International Congress on Numerical Methods in Engineering*, pp. 1277-1286, (1992).
24. M.D. Riera, A. Miralles, G. Cugat y J.M. Prado, "Modelización del proceso de compactación en frío de polvos metálicos", *Proceedings del II Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, pp. 1546-1555, (1993).
25. R.L. Sands y C.R. Shakespeare, *Powder Metallurgy*, International Monographs on Mat. Science and Tech., (1966).

26. S. Shima y M. Oyade, "Plasticity Theory for Porus Metals", *Int. J. for Mechanical Science*, Vol. 18, pp. 285, (1976).
27. J.C. Simo y T.J.R. Hughes, "Elastoplasticity and Viscoplasticity, Computational Aspects", Technical Report, Stanford Univ. Dept. of Appl. Mech., (1988).
28. J.C. Simo y T.A. Laursen, "An Augmented Lagrangian Treatment of Contact Problems Involving Friction", *Computers & Structures*, Vol. 42, 1, pp. 97-116, (1992).
29. S. Tamura, T. Mitsuno y T. Aizawa, "Powder Pressing Design Analysis by the Granular Model Simulation", *Proceedings of the Powder Metallurgy 94, World Congress*, pp. 753-756, Paris, (1994).
30. J. Trasorras, T.M. Krauss y B.L. Ferguson, "Modeling of Powder Compaction Using the Finite Element Method", *Proceedings of the Powder Metallurgy Conf. Exhibition*, Vol. 1, pp. 85-104, (1989).
31. C.D. Turner, "A Micromechanical Model of Multiaxial Powder Densification", *Proceedings of the Powder Metallurgy 94, World Congress*, pp. 713-716, Paris, (1994).
32. G.G. Weber y S.B. Brown, "Simulation of the Compaction of Powder Components", Department of Materials Science and Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, (1990).
33. P. Wriggers, "Finite Element Algorithms for Contact Problems", *Arch. of Comp. Meth. in Engn.*, Vol. 2, 4, pp. 1-49, (1995).