

# **Análisis elasto-viscoplástico en problemas bidimensionales con Stampack**

W.B. Castelló  
F.F. Flores

# **Análisis elasto-viscoplástico en problemas bidimensionales con Stampack**

W.B. Castelló  
F.F. Flores

Publicación CIMNE N<sup>o</sup>-329, Noviembre 2008

# Informe de Avance Semestral

## Analisis elasto-viscoplástico en problemas bidimensionales con Stampack

Walter B. Castelló y Fernando F. Flores

### 1 Introducción

Este informe presenta los avances logrados en la implementación dentro del código *Stampack*, de un modelo constitutivo elasto-viscoplastico del tipo de Perzyna para materiales isótropos con endurecimiento por deformación. El objetivo principal de incluir un modelo elasto-viscoplastico en Stampack, es la posibilidad de tener en cuenta como influye la velocidad de deformación en problemas industriales como el forjado o la extrusión. En estos problemas las temperaturas elevadas (más de un tercio de la temperatura de fusión) juegan un rol importante, provocando un estado viscoso en el material de manera que el flujo plastico resulta ser función de la velocidad de deformación del solido.

El modelo elegido resulta una extrapolación directa del modelo elasto-plástico basado en el gradiente de deformaciones propuesto por Garino [1]. El modelo elasto-visco-plástico unificado se corresponde al propuesto por Ponthot [2]. Aquí se ha empleado el trabajo de Garino y Ponthot et al.[3] para la definición de un *benchmark* aceptable para la comparación de resultados. En este informe se presenta el modelo elasto-viscoplástico implementado en el código de elementos finitos *Stampack*, y se muestra la primera etapa de prueba asociada con problemas en pequeñas deformaciones. Anteriormente *Stampack* no poseía un modelo elasto-viscoplástico para tratar problemas bidimensionales en deformaciones finitas.

El contenido del informe es el siguiente: la sección 2 presenta la cinemática asociada al modelo, el modelo de endurecimiento viscoso y el esquema numérico de integración de la ecuación constitutiva. La sección 3 muestra el ingreso de datos a Stampack y cuales son las rutinas involucradas en proceso de integración del modelo elasto-viscoplástico. Por último la sección 4 contiene un problema de aplicación y se comparan los resultados del presente trabajo con los obtenidos por otros investigadores.

## 2 Algoritmo Elasto-Viscoplástico

El algoritmo propuesto por Garino [1] permite tratar de una manera eficiente, desde el punto de vista computacional, la integración de la ecuación constitutiva en problemas elasto-plásticos. Este algoritmo es susceptible de ser modificado para tratar con problemas elasto-viscoplasticos como lo ha propuesto Ponthot [2], sin modificar su simplicidad y economía de cálculo. Al igual que el algoritmo original se descompone el problema elasto-viscoplástico en dos problemas: un predictor elástico y un corrector viscoplástico, de modo que la resolución de ambos problemas sea equivalente a la solución del problema original.

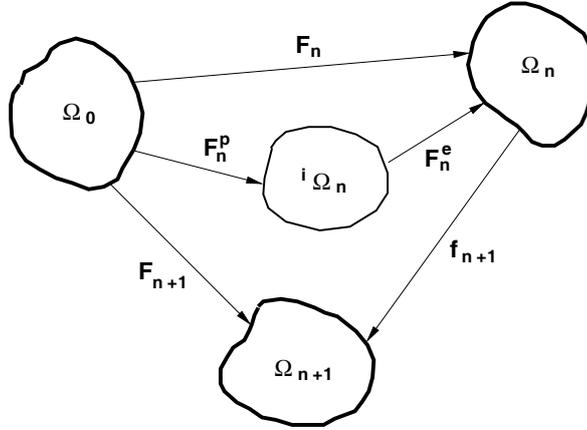
Se asumen conocidas en el paso de tiempo anterior un conjunto de variables que definiremos con  $\{\varphi_n, \mathbf{b}_n^{e-1}, e_n^p\}$ ; donde  $\varphi_n$  representa la configuración,  $\mathbf{b}_n^{e-1}$  es la parte elástica del tensor de Finger y  $e_n^p$  el parámetro de endurecimiento.

### 2.1 Cinemática

En este algoritmo el primer paso consiste en actualizar la configuración, de modo que suponiendo un desplazamiento incremental  $\mathbf{u}_n$  sobre la configuración deformada  $\varphi_n$ , esta se modifica según:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \varphi_{n+1}(\mathbf{X}) = \varphi_n(\mathbf{X}) + \mathbf{u}_n[\varphi_n(\mathbf{X})] \quad (1)$$

donde la nueva configuración geométrica está referida a la configuración anterior  $\varphi_n(\mathbf{X})$  (o último paso convergido) y al igual que los desplazamientos actuales  $\mathbf{u}_n$  son datos; resulta trivial entonces la obtención configuración actual  $\mathbf{x}_{n+1}$ .



**Figura 1:** Configuraciones en este esquema de integración de la ecuación constitutiva.

De acuerdo con la figura 1 y la ecuación (1), se puede obtener el *gradiente de deformación total* en el paso actual  $\mathbf{F}_{n+1}$  como:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{n+1} &= \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial \mathbf{X}} + [\nabla_{x_n} \mathbf{u}_n] \frac{\partial \varphi_n}{\partial \mathbf{X}} \\ &= [\mathbf{1} + \nabla_{x_n} \mathbf{u}_n] \frac{\partial \varphi_n}{\partial \mathbf{X}} \\ &= [\mathbf{1} + \nabla_{x_n} \mathbf{u}_n] \mathbf{F}_n \end{aligned} \quad (2)$$

y por otra parte aplicando derivadas parciales se puede obtener:

$$\mathbf{F}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{x}_n} \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{f}_{n+1} \mathbf{F}_n \quad (3)$$

Se observa que el *gradiente relativo*  $\mathbf{f}_{n+1}$  resulta ser:

$$\mathbf{f}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{x}_n} = \mathbf{1} + \nabla_{x_n} \mathbf{u}_n \quad (4)$$

o bien puede obtenerse de acuerdo a (3) como:

$$\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{-1} \quad (5)$$

Considerando que en elementos finitos  $\mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}) = \sum \mathbf{N}^I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{X}^I$  para  $I = 1, 2, \dots, N_{\text{nodos}}$  y con  $\mathbf{X}^I = [X, Y]^I$  el vector de coordenadas nodales (en dos dimensiones). Las derivadas en el espacio cartesiano  $\{XY\}$  pueden obtenerse a partir de las derivadas en el espacio isoparamétrico  $\{\xi\eta\}$  a través del Jacobiano de la transformación, de acuerdo a:

$$\mathbf{N}_{:\mathbf{X}}^I = \mathbf{N}_{:\boldsymbol{\xi}}^I \mathbf{J}_0^{-1} \quad (6)$$

que son las derivadas de las funciones de forma evaluadas en la configuración original, donde:

$$\mathbf{J}_0 = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial X}{\partial \eta} \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Por lo tanto si empleamos la notación en elementos finitos, los gradientes de deformación  $\mathbf{F}_{n+1}$  y  $\mathbf{F}_n$  pueden obtenerse a través de:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n &= \mathbf{x}_n^I \mathbf{N}_{:\mathbf{X}}^I \\ \mathbf{F}_{n+1} &= \mathbf{x}_{n+1}^I \mathbf{N}_{:\mathbf{X}}^I \end{aligned}$$

de manera que empleando (6) se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_n &= \mathbf{x}_n^I \mathbf{N}_{:\boldsymbol{\xi}}^I \mathbf{J}_0^{-1} \\ \mathbf{F}_{n+1} &= \mathbf{x}_{n+1}^I \mathbf{N}_{:\boldsymbol{\xi}}^I \mathbf{J}_0^{-1} \end{aligned} \quad (8)$$

Igualmente en el caso del gradiente de deformación relativo  $\mathbf{f}_{n+1}$ , podría pensarse a la variable aproximada por  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum \mathbf{N}^I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}^I$ , con la diferencia que se trata de variables espaciales y por lo tanto deben actualizarse en la medida que se actualiza la configuración deformada. De modo que las derivadas resultan  $\mathbf{N}_{:\mathbf{x}_n}^I = \mathbf{N}_{:\boldsymbol{\xi}}^I \mathbf{J}_n^{-1}$  y por lo tanto el gradiente de deformación relativo (4) será:

$$\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+1}^I \mathbf{N}_{:\mathbf{x}_n}^I = \mathbf{x}_{n+1}^I \mathbf{N}_{:\boldsymbol{\xi}}^I \mathbf{J}_n^{-1} \quad (9)$$

En la formulación propuesta por Garino [1], se emplea la inversa del gradiente de deformación relativo  $\mathbf{f}_{n+1}^{-1}$ . Por lo tanto a partir de (5) se puede definir según:

$$\mathbf{f}_{n+1}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \mathbf{x}_{n+1}} = \mathbf{1} - \nabla_{x_n} \mathbf{u}_n \quad (10)$$

y por cierto este gradiente puede obtenerse como:

$$\mathbf{f}_{n+1}^{-1} = \mathbf{x}_n^I \mathbf{N}_{:\mathbf{x}_{n+1}}^I = \mathbf{x}_n^I \mathbf{N}_{:\boldsymbol{\xi}}^I \mathbf{J}_{n+1}^{-1} \quad (11)$$

al igual que se ha hecho anteriormente con los otros gradientes de deformación. Es decir en este caso se tiene un esquema Euleriano donde la evaluación de las derivadas de las funciones de forma debe realizarse en cada nuevo paso de tiempo. Resulta entonces en una Formulación Lagrangiana Actualizada (FLA).

## 2.2 Ley de Endurecimiento Viscoso

La teoría de la viscoplasticidad describe el flujo del material producido por creep, el cual a diferencia de la plasticidad, depende del tiempo. Los aspectos fenomenológicos de la viscoplasticidad pueden estudiarse por diferentes vías: ensayos de endurecimiento bajo velocidad de deformación constante, ensayos de creep bajo carga o tensión constante, ensayos de relajación a deformación constante e inclusive ensayos cíclicos. Según sea el ensayo aplicado se han encontrado diferentes resultados y diversas maneras de cuantificar el fenómeno viscoplástico.

Estos resultados pueden unificarse en una sola ecuación uniaxial con tres parámetros, la cual representa el fenómeno viscoplástico bajo una velocidad de deformación  $\dot{\varepsilon} \geq 0$  (creciente y monotónica). Para cada uno de estos ensayos, se puede caracterizar la evolución de la deformación viscoplástica  $\varepsilon^{vp}$  y su velocidad de deformación  $\dot{\varepsilon}^{vp}$  a través de gráficos  $\varepsilon^{vp}$  vs  $\dot{\varepsilon}^{vp}$  empleando la tensión como parámetro.

En el caso de muchos materiales los ensayos de endurecimiento, creep y relajación, manteniendo la temperatura constante; pueden emplearse para definir curvas de iso-tensión en el espacio  $(\varepsilon^{vp}, \dot{\varepsilon}^{vp})$  con un margen de error mínimo no mayor a los errores de medición. Esto prueba experimentalmente la existencia de una ley mecánica de estado como:

$$\sigma = f(\varepsilon_{vp}, \dot{\varepsilon}_{vp}) \quad (12)$$

el cual puede definirse en el dominio de variación de  $\varepsilon^{vp}$  y  $\dot{\varepsilon}^{vp}$ . Inclusive podríamos ver, en un contexto mas general, que los resultados obtenidos se asemejan a dos ensayos de creep bajo dos distintos niveles de tensión, y por lo tanto decir que la deformación plástica nos permite describir el endurecimiento del material con una razonable exactitud.

Si se tiene en cuenta la ley de Norton y las curvas de endurecimiento, una razonable especificación para la función  $\bar{f}$  consiste en definir esta como el producto de dos funciones de potencia. Incluyendo además la ley de elasticidad lineal, la ley de endurecimiento viscoso puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon^e + \varepsilon^{vp} \\ \sigma^e &= E\varepsilon^e \\ \sigma^{vp} &= \eta(\varepsilon^{vp})^{1/n} (\dot{\varepsilon}^{vp})^{1/m} \end{aligned} \quad (13)$$

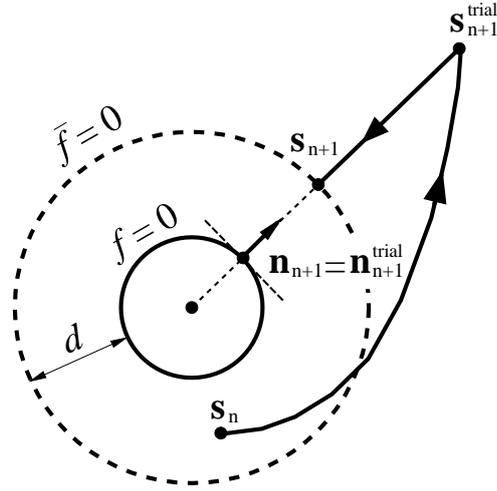
en donde  $n$ ,  $m$  y  $\eta$  son los tres parámetros que definen el estado viscoplástico, los cuales son función de la temperatura y dependientes del material:  $m$  es el exponente viscoso,  $m = 2$  para materiales muy viscosos y aproximadamente  $m = 100$  para materiales levemente viscosos, lo cual garantiza la ley de plasticidad;  $n$  es el exponente de endurecimiento el cual varia aproximadamente entre 2 y 50;  $\eta$  es el coeficiente de resistencia con un orden de magnitud para los metales que varia entre los 100 a 10000 MPa.

En el caso de problemas visco plásticos puede generalizarse la cinemática a partir de la ecuación (13<sub>1</sub>) y considerando que:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^{vp} \quad (14)$$

en donde el supraíndice  $vp$  hace referencia a la contraparte viscosa, de las componentes plásticas de la deformación  $\varepsilon^p$  y de la velocidad de deformación  $\mathbf{d}^p$ .

A diferencia del caso de plasticidad independiente de la velocidad de deformación, la tensión efectiva  $\bar{\sigma}$  no está restringida a permanecer dentro del dominio definido por la superficie de fluencia (ver figura 2), es decir no es necesario cumplir  $\bar{\sigma} \leq \sigma_y$ . Por el contrario se admite la existencia de una sobretensión que se define como:



**Figura 2:** Representación conceptual del esquema de retorno radial para el modelo  $J_2$  elasto-viscoplastico.

$$d = \langle \bar{\sigma} - \sigma_y \rangle \quad (15)$$

con  $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$ , y donde claramente el proceso inelástico tiene lugar cuando  $d > 0$ . Para este problema se plantea un modelo del tipo Perzyna definido por la regla de flujo:

$$\mathbf{d}^{vp} = \langle \phi(d, \eta) \rangle \mathbf{n} \quad (16)$$

donde  $\eta$  es la viscosidad del material.

La estructura de la ecuación (16) sugiere que la función  $\phi$  juega un papel similar al *parámetro viscoplastico*  $\dot{\gamma}^{vp}$ . En este sentido, estos tipos de modelos se pueden considerar como una *regularización de la plasticidad independiente respecto de la velocidad de deformación* en donde el parámetro de consistencia ha sido reemplazado por una función de la sobretensión, y la forma propuesta por Ponthot [2] es:

$$\phi(d, \eta) = \dot{\gamma}^{vp} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\langle \frac{\bar{\sigma} - \sigma_y}{\eta (\dot{\epsilon}^{vp})^{1/n}} \right\rangle^m \quad (17)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (16) y (17), puede verse que:

$$\mathbf{d}^{vp} = \dot{\gamma}^{vp} \mathbf{n} \quad (18)$$

y de (18) podemos obtener la velocidad de deformación viscoplastica equivalente como:

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{d}^{vp} : \mathbf{d}^{vp} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma}^{vp} = \left\langle \frac{\bar{\sigma} - \sigma_y}{\eta (\dot{\epsilon}^{vp})^{1/n}} \right\rangle^m \quad (19)$$

desde (19) se puede encontrar una nueva expresión para la ecuación de restricción elasto-viscoplastica es:

$$\bar{f} = \bar{\sigma} - \sigma_y - \eta (\dot{\epsilon}^{vp})^{1/n} (\dot{\epsilon}^{vp})^{1/m} \quad (20)$$

Esta última ecuación es una *generalización del clásico criterio de von Mises*  $f = 0$  para el caso de *materiales con plasticidad dependientes de la velocidad de deformación*. El criterio clásico de von Mises puede obtenerse haciendo  $\eta = 0$  (material sin efectos viscosos). Por otra parte si  $\eta = \infty$  entonces se tiene un material elástico. Cabe destacar que el último término en (20) se corresponde con la ecuación (13<sub>3</sub>).

## 2.3 Esquema Numérico

### 2.3.1 Problema Elástico

El algoritmo de cálculo es una adaptación del que se presenta en el trabajo de Garino [1], se utiliza la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de las deformaciones de acuerdo a:

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^e \mathbf{F}_{n+1}^p \quad (21)$$

y se supone que la parte plástica no modifica el volumen, de modo que  $\det(\mathbf{F}^p) = 1$  y  $\det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}^e) = J$ .

En el caso del problema elástico las variables plásticas no cambian, es decir  $\mathbf{F}_{n+1}^p = \mathbf{F}_n^p$ , y por lo tanto a partir de la descomposición (21) la parte elástica del tensor gradiente de la deformación:

$$\mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ trial}} = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{p -1} \quad (22)$$

en la cual puede reemplazarse el gradiente de deformación total actual, por la relación expuesta en la ecuación (3) de modo que:

$$\mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ trial}} = \mathbf{f}_{n+1} (\mathbf{F}_n \mathbf{F}_n^{p -1}) = \mathbf{f}_{n+1} \mathbf{F}_n^e \quad (23)$$

A partir de esta última expresión es posible obtener la parte elástica del tensor de Finger según:

$$\begin{aligned} [\mathbf{b}_{n+1}^{e -1}]^{\text{trial}} &= \left[ (\mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ trial}})^{-T} (\mathbf{F}_{n+1}^{e \text{ trial}})^{-1} \right] \\ &= \mathbf{f}_{n+1}^{-T} (\mathbf{F}_n^{e -T} \mathbf{F}_n^{e -1}) \mathbf{f}_{n+1}^{-1} \\ &= \mathbf{f}_{n+1}^{-T} (\mathbf{b}_n^{e -1}) \mathbf{f}_{n+1}^{-1} \end{aligned} \quad (24)$$

El tensor elástico de prueba de Almansi puede calcularse empleando el tensor de Finger (24) a través de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}} = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{g}_{n+1} - (\mathbf{b}_{n+1}^{e -1})^{\text{trial}} \right] \quad (25)$$

y con este último se puede obtener el tensor elástico de prueba de Kirchhoff de acuerdo a:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{trial}} = K \text{tr}(\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}}) \mathbf{1} + 2\mu \text{dev}(\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}}) \quad (26)$$

en donde, considerando que  $\text{dev}(\mathbf{e}_{n+1}^e) = -\frac{1}{2} \text{dev}(\mathbf{b}_{n+1}^{e -1})$ , la parte desviadora de la tensión de Kirchhoff queda definida por:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} &= 2\mu \text{dev}(\mathbf{e}_{n+1}^{e \text{ trial}}) \\ &= -\mu \text{dev}([\mathbf{b}_{n+1}^{e -1}]^{\text{trial}}) \end{aligned} \quad (27)$$

### 2.3.2 Problema Plástico

Ante la falta de efectos viscosos, es decir cuando se tiene plasticidad independiente de la velocidad de deformación se comprueba la *condición de fluencia de Mises-Huber*, que puede escribirse como:

$$f(\boldsymbol{\tau}, \varepsilon_e^p) = \|\text{dev}[\boldsymbol{\tau}]\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [\sigma_Y + A' e^p] \leq 0 \quad (28)$$

donde  $\boldsymbol{\tau}$  es el tensor de tensiones de Kirchhoff,  $\sigma_Y$  es la tensión de fluencia del material,  $A'$  es el módulo de endurecimiento y  $e_e^p$  es el parámetro de endurecimiento.

Para el algoritmo que estamos resolviendo, (28) toma entonces la forma:

$$f_{n+1}^{\text{trial}} = \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [A' e_n^p + \sigma_Y] \quad (29)$$

- Si  $f_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0$  entonces fijamos:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{n+1} &= \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} \\ e_{n+1}^p &= e_n^p \\ \mathbf{b}_{n+1}^e{}^{-1} &= \mathbf{b}_{n+1}^{\text{trial}} \end{aligned} \quad (30)$$

- Si  $f_{n+1}^{\text{trial}} > 0$  se procede al retorno radial.

En este algoritmo empleado en general con el modelo asociado de von Mises, se calcula una tensión predictora  $\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{trial}}$  y la dirección de está se supone paralela a la corregida  $\boldsymbol{\tau}_{n+1}$  (corrección radial). La hipótesis característica de este esquema es suponer fija la dirección del vector normal a la superficie de fluencia  $\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|}$ . esta hipótesis consiste en:

$$\mathbf{n}_{n+1} = \mathbf{n}_{n+1}^{\text{trial}} \quad (31)$$

luego las tensiones desviadoras corregidas pueden obtenerse a partir de la evolución de la regla de flujo como:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\gamma \mathbf{n}_{n+1}^{\text{trial}} \quad (32)$$

y empleando la relación entre las tensiones desviadoras y el vector normal a la superficie de fluencia resulta:

$$\|\mathbf{s}_{n+1}\| \mathbf{n}_{n+1} = \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| \mathbf{n}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\gamma \mathbf{n}_{n+1}^{\text{trial}} \quad (33)$$

que en virtud de (31) se puede reescribir tal que:

$$(\|\mathbf{s}_{n+1}\| + 2\mu\gamma) \mathbf{n}_{n+1} = \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| \mathbf{n}_{n+1} \quad (34)$$

por lo tanto resulta en una ecuación escalar:

$$(\|\mathbf{s}_{n+1}\| + 2\mu\gamma) = \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| \quad (35)$$

La condición de consistencia que debe cumplirse a partir de la función de fluencia de Mises-Huber puede expresarse como  $\|\mathbf{s}_{n+1}\| = R_{n+1}$ , en donde  $R_{n+1}$  es el radio del cilindro de von Mises. Entonces puede escribirse como:

$$\|\mathbf{s}_{n+1}\| = \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_0 + A' e_{n+1}^p) \quad (36)$$

y considerando una ley de endurecimiento asociativa, la evolución del parámetro de endurecimiento queda fijada por:

$$e_{n+1}^p = e_n^p + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma \quad (37)$$

reemplazando (37) y (35) en (36), después de algunas operaciones algebraicas se puede llegar a:

$$\|\mathbf{s}_{n+1}\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ \sigma_0 + A' \left( e_n^p + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma \right) \right] \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| - 2\mu\gamma &= \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_0 + A' e_n^p) + \frac{2}{3} A' \gamma \\ \|\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}}\| + \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_0 + A' e_n^p) &= \frac{2}{3} A' \gamma + 2\mu\gamma \\ f_{n+1}^{\text{trial}} &= \left( \frac{2}{3} A' + 2\mu \right) \gamma \end{aligned}$$

de donde se puede definir como evoluciona el parámetro de consistencia, y resulta:

$$\gamma = \frac{3f_{n+1}^{\text{trial}}}{2A' + 6\mu} \quad (39)$$

En el problema plástico la configuración deformada permanece fija y las variables internas se actualizan de modo que satisfagan la ecuación constitutiva. La relación entre la regla de flujo  $\mathbf{d}^p = \dot{\gamma} \mathbf{n}$  (con  $\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}}$ ) y el cambio en la parte plástica del tensor derecho de Cauchy-Green  $\mathbf{C}^p$ , queda definida por:

$$\dot{\mathbf{C}}^p = 2\phi^* (\dot{\gamma} \mathbf{n}) = 2\dot{\gamma} \mathbf{N} \quad (40)$$

donde  $\phi^*$  implica una transformación del tipo pull-back para expresar la regla de flujo respecto a la configuración original.

La ecuación (40) puede discretizarse empleando un esquema en diferencias finitas de modo de obtener:

$$\frac{\mathbf{C}_{n+1}^p - \mathbf{C}_n^p}{\Delta t} = 2\dot{\gamma} \mathbf{N}_{n+1} \quad (41)$$

desde donde es posible obtener:

$$\mathbf{C}_{n+1}^p = \mathbf{C}_n^p + 2\gamma \mathbf{N}_{n+1} \quad (42)$$

y está misma expresión puede reescribirse en variables espaciales, haciendo uso de una transformación del tipo push-forward a la que indicaremos con  $\phi_*$ , y resulta:

$$\phi_* \mathbf{C}_{n+1}^p = \phi_* \mathbf{C}_n^p + 2\gamma \mathbf{n}_{n+1} \quad (43)$$

Estos términos en variables espaciales se derivan a continuación, y para el caso del primer término  $\phi_* \mathbf{C}_{n+1}^p$  se tiene:

$$\begin{aligned} \phi_* \mathbf{C}_{n+1}^p &= \mathbf{F}_{n+1}^{-T} \mathbf{C}_{n+1}^p \mathbf{F}_{n+1}^{-1} \\ &= \mathbf{F}_{n+1}^{-T} \left( \mathbf{F}_{n+1}^{pT} \mathbf{F}_{n+1}^p \right) \mathbf{F}_{n+1}^{-1} \\ &= \mathbf{F}_{n+1}^{eT} \mathbf{F}_{n+1}^{e-1} \end{aligned} \quad (44)$$

por lo tanto:

$$\phi_* \mathbf{C}_{n+1}^p = \mathbf{b}_{n+1}^e \quad (45)$$

Por otra parte, para el término  $\phi_* \mathbf{C}_n^p$ , se calcula de manera similar empleando para ello el tensor gradiente de la deformación total en el paso de tiempo actual,  $\mathbf{F}_{n+1}$ , y aprovechando la relación (3) con el tensor gradiente de deformación relativo  $\mathbf{f}_{n+1}$ , resulta:

$$\begin{aligned}
\phi_* \mathbf{C}_n^p &= \mathbf{F}_{n+1}^{-T} \mathbf{C}_n^p \mathbf{F}_{n+1}^{-1} \\
&= \mathbf{f}_{n+1}^{-T} \left[ \mathbf{F}_n^{-T} \left( \mathbf{F}_{n+1}^p \mathbf{T} \mathbf{F}_{n+1}^p \right) \mathbf{F}_n^{-1} \right] \mathbf{f}_{n+1}^{-1} \\
&= \mathbf{f}_{n+1}^{-T} \left[ \mathbf{F}_n^{e-1} \mathbf{F}_n^{e-1} \right] \mathbf{f}_{n+1}^{-1}
\end{aligned} \tag{46}$$

con lo cual, de acuerdo (24), se tiene:

$$\begin{aligned}
\phi_* \mathbf{C}_{n+1}^p &= \mathbf{f}_{n+1}^{-T} \mathbf{b}_n^{e-1} \mathbf{f}_{n+1}^{-1} \\
&= \left[ \mathbf{b}_{n+1}^{e-1} \right]^{\text{trial}}
\end{aligned} \tag{47}$$

Entonces el esquema de actualización del tensor elástico de Finger en variables espaciales se puede definir a partir de las ecuaciones (43), (45) y (47), obteniéndose:

$$\mathbf{b}_{n+1}^{e-1} = \left[ \mathbf{b}_{n+1}^{e-1} \right]^{\text{trial}} + 2\gamma \mathbf{n}_{n+1} \tag{48}$$

a partir de la cual puede corregirse el tensor elástico de Almansi:

$$\mathbf{e}_{n+1}^e = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{g}_{n+1} - \mathbf{b}_{n+1}^{e-1} \right] \tag{49}$$

Recordando la ecuación (27), donde  $\mathbf{s} = -\mu \operatorname{dev}(\mathbf{b}^{e-1})$ , por lo tanto si se aplica esta igualdad en la (48) resulta:

$$\begin{aligned}
-\mu \operatorname{dev}(\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}) &= -\mu \operatorname{dev} \left( \left[ \mathbf{b}_{n+1}^{e-1} \right]^{\text{trial}} \right) + 2\mu\gamma \mathbf{n}_{n+1} \\
\mathbf{s}_{n+1} &= \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\gamma \mathbf{n}_{n+1}
\end{aligned} \tag{50}$$

que es la ecuación que permite actualizar las tensiones desviadoras, y se había utilizado en (32), el tensor de tensiones de Kirchhoff actualizado queda definido adicionando a la ecuación (50) la parte volumétrica de las tensiones de modo que:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = K \operatorname{tr}(\mathbf{e}_{n+1}^e) \mathbf{1} + \mathbf{s}_{n+1} \tag{51}$$

Por otra parte la ley de endurecimiento implica  $\dot{e}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial p}$  con lo cual la actualización del parámetro de endurecimiento resulta simplemente:

$$e_{n+1}^p = e_n^p + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma \tag{52}$$

### 2.3.3 Problema Viscoplastico

La regla de flujo definida en (18) puede reescribirse en la configuración original  $\Omega_0$ , en términos del tensor derecho de Cauchy-Green viscoplastico  $\mathbf{C}^{vp}$  y el multiplicador viscoplastico  $\gamma^{vp}$ :

$$\dot{\mathbf{C}}^{vp} = 2\phi^* (\dot{\gamma}^{vp} \mathbf{n}) = 2\dot{\gamma}^{vp} \mathbf{N} \tag{53}$$

en donde (53) se puede integrar empleando un esquema del tipo Backward-Euler

$$\frac{\mathbf{C}_{n+1}^{vp} - \mathbf{C}_n^{vp}}{\Delta t} = 2\dot{\gamma}^{vp} \mathbf{N}_{n+1} \tag{54}$$

Siguiendo los mismos pasos que en el caso de plasticidad independiente (ver ecuaciones (45) y (47)), se puede hacer un *push forward* de está expresión hacia el estado actual, y resulta:

$$\mathbf{b}_{n+1}^{e-1} = [\mathbf{b}_{n+1}^{e-1}]^{\text{trial}} + 2\gamma^{vp} \mathbf{n}_{n+1} \quad (55)$$

y lógicamente a partir del tensor de Finger actualizado (55) se puede definir el tensor de deformaciones de Almansi:

$$\mathbf{e}_{n+1}^e = \frac{1}{2} [\mathbf{g}_{n+1} - \mathbf{b}_{n+1}^{e-1}] = (\mathbf{e}_{n+1}^e)^{\text{trial}} - 2\gamma^{vp} \mathbf{n}_{n+1} \quad (56)$$

Recordando que  $\mathbf{s} = -\mu \text{dev}(\mathbf{b}^{e-1})$ , por lo tanto si se aplica está igualdad en la (55) nuevamente resulta:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\gamma^{vp} \mathbf{n}_{n+1} \quad (57)$$

que es la ecuación que permite actualizar las tensiones desviadoras, y el tensor de tensiones de Kirchhoff actualizado queda definido como:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = K \text{tr}(\mathbf{e}_{n+1}^e) \mathbf{1} + \mathbf{s}_{n+1} \quad (58)$$

Por otra parte la ley de endurecimiento implica  $\mathbf{d}^{vp} = \dot{\gamma}^{vp} \mathbf{n}$ , y por lo tanto  $\dot{\varepsilon}^{vp} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma}^{vp}$ , donde aplicando diferencias finitas (esquema del tipo Backward-Euler) se tiene:

$$\frac{e_{n+1}^{vp} - e_n^{vp}}{\Delta t} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma}^{vp} \quad (59)$$

y simplemente:

$$e_{n+1}^{vp} = e_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma^{vp} \quad (60)$$

Cabe destacar que las variables internas definidas en (55), (58) y (60), no pueden evaluarse si no se conoce el parámetro de consistencia viscoplástico  $\gamma^{vp}$ . El mismo puede obtenerse a partir de la función generalizada de von Mises definida en (20), empleando en la misma las definiciones (57), (59) y (60), llegando a:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\gamma^{vp}) &= \sqrt{\frac{3}{2} [\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\gamma^{vp} \mathbf{n}_{n+1}] : [\mathbf{s}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\gamma^{vp} \mathbf{n}_{n+1}] - [\sigma_y(\gamma^{vp})]_{n+1}} \\ &\quad - \eta \left( e_n^{vp} + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma^{vp} \right)^{1/n} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma^{vp}}{\Delta t} \right)^{1/m} \end{aligned} \quad (61)$$

La ecuación (61) es una expresión no lineal en  $\gamma^{vp}$  y puede resolverse fácilmente a través de algún método iterativo (ej.: Newton Raphson).

## 3 Implementación

### 3.1 Entrada de Datos

La palabra clave ELVIPL en el campo de definición de materiales indica que es un problema elasto-viscoplastico, e implica que a continuación deberán colocarse los tres parámetros asociados al modelo definido por la ecuación (13<sub>3</sub>). El modelo propuesto puede combinarse con distintas leyes de endurecimiento (isótropas) sin inconvenientes, los datos son accedados por la

rutina `MATINP.FI` y leídos por la rutina `MAT_PLA.FI` (la cual además de los datos asociados al modelo viscoso, toma lectura de aquellos ligados al modelo de endurecimiento). A continuación se detallan las palabras clave que definen los parámetros del modelo viscoplastico propuesto en la ecuación (20)

**VISCO:** hace referencia al coeficiente de viscosidad (o coeficiente de resistencia)  $\eta$ .

**HDEXP:** es la inversa del coeficiente de endurecimiento  $N = 1/n$ .

**RSEXP:** es la inversa del coeficiente de sensibilidad a la tasa de deformación (o coeficiente viscoso)  $M = 1/m$ .

Los parámetros de material asociados a un problema elasto-viscoplastico se verán por ejemplo como:

```
MATERIAL_PROPERTIES_DEFINITION
  DEFINITION: MATNO = 1, MATYPE = 1 MISES IHNONE ELVIPL
              YOUNG = 2.10e+11 /
              POISS = 0.30e+00 /
              DENS = 7.80e+03

              UNIAX = 2.40e+08 /
              VISCO = 1.00e+15 /
              HDEXP = 0.00e+00 /
              RSEXP = 1.00e+00
END_MATERIAL_PROPERTIES
```

En este ejemplo se define un material sin endurecimiento y con efectos viscosos puros, ya que el coeficiente de endurecimiento asociado al modelo viscoso es  $N = 0$ .

## 3.2 Corrección Viscoplastica

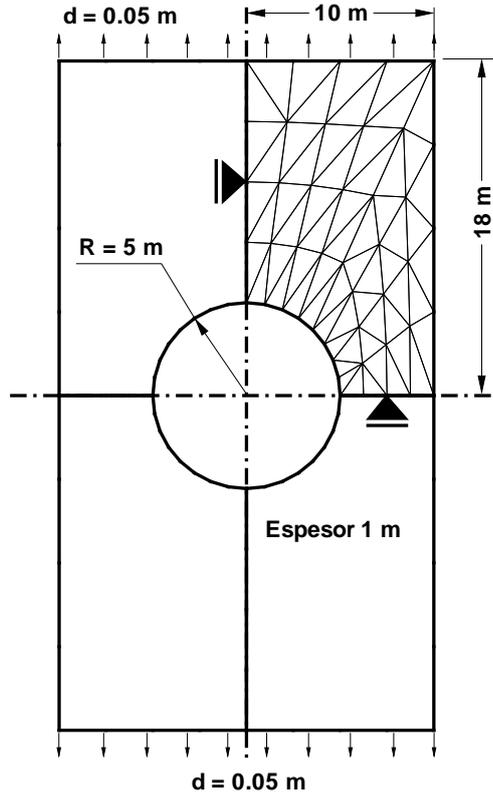
El proceso de corrección viscoplastica se realiza en la subrutina `CORR20.F90` (hay que destacar que este modelo de material está disponible únicamente para el elemento triangular en deformaciones impuestas *TR2D*). La subrutina `VISC20` realiza la corrección viscoplastica, resolviendo la ecuación (61) a través de un método iterativo del tipo Newton-Raphson. La velocidad de convergencia está ligada al valor de arranque, pero usualmente son necesarios a lo sumo 2 iteraciones para la convergencia.

## 4 Problemas de Aplicación

Actualmente el algoritmo está en la fase de prueba, por lo cual se ha elegido un problema en pequeñas deformaciones. Este *benchmark* preliminar permite adquirir conocimiento de la sensibilidad del modelo frente a la viscosidad del material (parametrizando la variable  $\eta$ ). El modelo elasto-viscoplastico propuesto debe recuperar un material elástico cuando  $\eta \rightarrow \infty$  y representar un material elasto-plástico cuando  $\eta \rightarrow 0$ .

### 4.1 Placa con un agujero traccionada en pequeñas deformaciones

En este problema, propuesto por Alfano et al. [4], se analiza un placa con un agujero en el centro en deformación plana. Las dimensiones de la placa están definidas en la figura 3, además se observa también la malla empleada. El material es acero con modulo elástico  $E = 2.1 \times 10^5$



**Figura 3:** Geometría y mallado de la placa con un agujero en deformación plana.

MPa,  $\nu = 0.3$ ,  $\sigma_y = 240$  MPa y sin endurecimiento ( $H = 0$ ). Se considera que el modelo viscoplástico del tipo de Perzyna es lineal con  $m = 1$  y  $n = \infty$ , y se adoptan tres valores distintos para la viscosidad del material  $\eta$ :  $10^2$ ,  $10^{12}$  y  $10^{15}$ . Se impone un desplazamiento al borde superior e inferior de la placa de 50 mm.

La figura 4, presenta los resultados obtenidos con Stampack (empleando la aproximación en deformaciones impuestas asociadas al triángulo TR2D) y se compara con los obtenidos en el trabajo de Garino y Ponthot et al. [3]. La mayor diferencia se encuentra en valores intermedios, lejos de los casos límites: a) caso completamente elástico  $\eta = 10^{15}$  y b) caso elasto-plástico puro con  $\eta = 10^2$ . En la sección siguiente se discuten estas diferencias y se plantean algunas líneas de trabajo a partir de estos resultados.

## 4.2 Discusión de resultados y tareas futuras

Las diferencias observadas en los resultados obtenidos con Stampack en esta primera etapa, cuando se los compara con el trabajo de Garino y Ponthot et al. [3], pueden estar asociada a la discretización (288 elementos cuadriláteros). En este problema solo se usaron 64 elementos triangulares. Aun así, en los casos límites ( $\eta \rightarrow 0$  y  $\eta \rightarrow \infty$ ) los resultados concuerdan con significativa precisión con los obtenidos en otros trabajos.

Actualmente se está trabajando en identificar la relación entre el comportamiento viscoso del material y el paso de tiempo crítico definido a partir del tamaño del elemento (considerando que Stampack es un código que integra de manera explícita las ecuaciones de movimiento). Esta relación resulta primordial, pues se han encontrado oscilaciones espurias de origen numérico cuando se utilizan mallas más finas para el análisis. Una vez identificado esta relación, se procederá a aplicar la formulación a problemas en deformaciones finitas.

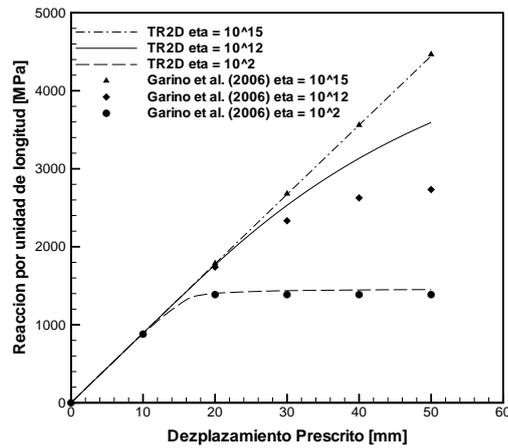


Figura 4: Comparación de resultados para valores de viscosidad  $\eta = 10^{15}, 10^{12}, 10^2$

## REFERENCIAS

- [1] García Garino C. *Un modelo numérico para el análisis de sólidos elasto-plásticos sometidos a grandes deformaciones*. PhD thesis, E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Catalunya, 1993.
- [2] Ponthot J.P., Garino C., and Mirasso A. “Unified stress update algorithms for the numerical simulation of large deformation elasto-plastic and elasto-viscoplastic processes”. *International Journal of Plasticity*, 18:91–126, 2002.
- [3] Garino C., Ponthot J.P., Mirasso A., Koeune R., Jeunechamps P.P., and Cargelio C. “Numerical simulation of large strain rate dependent j2 problems”. *Mecánica Computacional*, XXV:1927–1946, 2006.
- [4] Alfano, G., De Angelis, F., and Rosati, L. “General solution procedures in elasto/viscoplasticity”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:5123–5147, 2001.