

OPTIMIZACION DE LA SOLUCION NUMERICA POR ELEMENTOS FINITOS DE SONDEOS GEOELECTRICOS

O.A. SOTO
y
C. MOLANO

*Dpto. de Ingeniería Civil,
Universidad de los Andes A.A.4976,
Bogotá, Colombia.*

RESUMEN

En el artículo se presenta una nueva metodología de solución para resolver problemas de flujo y potencial modelados con elementos finitos. El sistema de ecuaciones resultantes de dicha solución conocido como CGEIS (Gradientes Conjugados con Precondicionamiento y Escalonamiento, utilizando la Descomposición Incompleta de Cholesky). Este método puede ser utilizado sólo para el caso de matrices simétricas y positivamente definidas, las cuales son encontradas en problemas de potencial tales como sondeos geoelectricos, flujo de aguas subterráneas, hidráulica, contaminación, petróleos, etc.. El método fue implementado con el fin de simular sondeos geoelectricos y flujo de aguas subterráneas. Su montaje se realizó en un computador VAX-2, y se utilizó el FORTRAN 77, como lenguaje de programación. Adicionalmente el método optimiza los recursos computacionales tales como tiempo de ejecución y memoria principal.

SUMMARY

A new solution method is presented to solve potencial and flow problems, when a finite element representation is used. The resulting equations can be arranged in a matrix form and apply a new solution method called CGEIS (Conjugated Gradients Escaled and Preconditioned, using the Incomplet Cholesky Descomposition). This method can be used for symetric and positively defined matrices, which are found in many potentials problems such as in reservoir engineering, geoelectrics, hydraulics, oil, etc.. The method was implemented to solve complex matrices obtained in standar and continuous geoelectrics soundings, and in groundwater flow. A FORTRAN 77 code was developed in a VAX-2 computer. Also, the method optimizes the computer resources (Time and memory).

Recibido: Junio 1991

INTRODUCCION

El objetivo principal del presente artículo, es presentar las bondades del método de los Gradientes Conjugados con Precondicionamiento y Escalamiento, para dar solución al sistema de ecuaciones lineales resultantes de la modelación por elementos finitos de sondeos geolétricos, y de problemas de flujo y potencial en general (Flujo de aguas subterráneas, flujo de calor, contaminación, etc...), Estructuras (Flujo de esfuerzos por elementos finitos, métodos matriciales de cálculo estructural, etc...), Geotecnia, Ingeniería de Petróleos, etc.

MARCO TEORICO

La ecuación diferencial que rige la distribución de potencial en cualquier medio puede ser obtenida a partir del principio de continuidad y de las leyes físicas que modelen el problema específico, p.ej. la ley de Ohm en el caso del flujo de corriente eléctrica y la ley de Darcy en el caso de flujo de agua en medios porosos. Esta es la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x}(K_x \frac{\partial \Phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(K_y \frac{\partial \Phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(K_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}) + W = 0 \quad (1)$$

K_i = Propiedad del medio la cual da la tasa de flujo en la dirección i en cada punto (x, y, z) del dominio (Ω) , por unidad de caída de potencial en la dirección i -ésima en dicho punto.

$\Phi(x, y, z)$ = Función de potencial.

W = Densidad de flujo por unidad de volumen en cada punto (x, y, z) del dominio de flujo (Ω) .

Representación por Elementos Finitos

Para la simulación numérica por elementos finitos de la ecuación anterior generalmente se trata el problema en forma bidimensional. Esto es válido cuando la respuesta del medio es básicamente en dos direcciones como en el caso de sondeos geolétricos, o debido a razones de simetría como en el caso de aguas subterráneas. La ecuación 1 puede ser entonces reducida a su forma bidimensional, la cual se presenta a continuación:

$$L(\Phi) = \frac{\partial}{\partial x}(K_x \frac{\partial \Phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(K_y \frac{\partial \Phi}{\partial y}) + W = 0 \quad (2)$$

en este caso W representa la densidad del flujo por unidad de área, y las demás variables son las mismas de la ecuación (1).

La simulación de la ecuación (2) por elementos finitos tipo Galerkin, consiste primordialmente en dividir el dominio de flujo en una serie de subdominios homogéneos

e isotrópicos ($K_x = K_y = K$) llamados elementos, y reemplazar la solución exacta del potencial por una solución aproximada de la siguiente forma:

$$\Phi(x, y) \approx \hat{\Phi}(x, y) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x, y) \Phi_i \quad (3)$$

Φ_i = Valor del potencial en cada uno de los nodos de la red. Los nodos se localizaron en los vértices de los elementos, los cuales se tomaron triangulares para este caso.

ϕ_i = Función base de interpolación del nodo i . Esta se tomó lineal teniendo el valor de uno en el nodo i , y de cero en los nodos adyacentes. Representa el porcentaje de influencia o ponderación del valor del potencial en el nodo i sobre cada punto (x, y) del dominio de flujo (Ω).

n = Número de nodos de la red.

Reemplazando la función del potencial estimado ecuación (3) en la ecuación (2), se obtiene un residual en cada punto del dominio. El método de Galerkin fuerza el valor promedio del residual sobre todo el dominio de flujo a cero, y utiliza como factores de ponderación para calcular dicho promedio las funciones bases de interpolación presentadas en la ecuación (3). Haciendo esto se llega a un sistema de ecuaciones lineales simultáneas las cuales pueden ser representadas matricialmente como:

$$[A]\{\Phi\} = \{b\} \quad (4)$$

$[A]$ = Matriz de $n \times n$.

$\{\Phi\}$ = Vector de potenciales de $n \times 1$; en su posición i -ésima guarda la variable Φ_i , las cuales son las incógnitas del problema.

$\{b\}$ = Vector de intensidad o de inducción. En su posición i -ésima guarda el valor de la intensidad del flujo inducido en el nodo i .

Para las condiciones de frontera se secciona la red de elementos finitos en tres partes: Zona de interés (red más fina), semi-infinitos laterales y semi-infinito con la profundidad. A los nodos en las fronteras externas de la red puede fijárseles el potencial en un valor dado (Frontera tipo Dirichlet), o dejarlos libres (Fronteras tipo Newman). También puede tomarse como resultado el valor promedio de los potenciales obtenidos de la simulación con las dos condiciones de frontera anteriores.

Método de los Gradientes Conjugados (Kaaschieter, 1985)

Con el algoritmo del método CG (Gradientes Conjugados), básicamente se computan aproximaciones al vector de incógnitas, partiendo de un vector solución inicial, y ajustándolo de una manera óptima por medio del siguiente algoritmo:

Algoritmo No.1 (Kaaschieter, 1985):

$\{r_0\} := \{b\} - [A]\{\Phi_0\}$

do $i = 0, 1, \dots$

if $\{r_i\} = 0$ then stop

$\beta_{i-1} := (\{r_i\}^T \{r_i\}) / (\{r_{i-1}\}^T \{r_{i-1}\}) (\beta_{-1} := 0)$

$\{p_i\} := \{r_i\} + \beta_{i-1} \{p_{i-1}\}$

$\alpha_i := (\{r_i\}^T \{r_i\}) / (\{p_i\}^T [A] \{p_i\})$

$\{\Phi_{i+1}\} := \{\Phi_i\} + \alpha_i \{p_i\}$

$\{r_{i+1}\} := \{r_i\} - \alpha_i [A] \{p_i\}$

End do

Para garantizar la convergencia del método la matriz del sistema de ecuaciones $[A]$, debe ser simétrica y positivamente definida; es decir:

$$[A] = [A]^T \text{ y } \{x\}^T [A] \{x\} > 0 \quad \forall \{x\} \neq 0$$

El vector $\{r\}$ calculado en el algoritmo anterior representa el residual; esto es:

$$\{r_i\} = \{b\} - [A]\{\Phi_i\} \quad (5)$$

Se habrá llegado a la respuesta exacta del sistema de ecuaciones cuando el vector $\{r\}$ sea igual a cero, como puede ser observado en el algoritmo No.1. Sin embargo, desde el punto de vista práctico esta condición es difícil de lograr, por lo cual el criterio de convergencia o terminación del algoritmo debe ser modificado.

Criterio de Terminación

El criterio de terminación para esta clase de métodos iterativos puede ser de dos tipos: Relativo y absoluto. El algoritmo del CGEIS utiliza una combinación de estos dos tipos como se muestra a continuación.

El criterio de error absoluto dice básicamente, que la aproximación obtenida en una iteración determinada del CGEIS es lo suficientemente buena para ser tomada como la solución del sistema, si la norma del error (diferencia entre la solución exacta y su i -ésima aproximación) es menor o igual a un valor positivo muy cercano a cero. En la implementación del algoritmo se tomó como criterio de error absoluto la siguiente expresión (Kaaschieter, 1985):

$$\|\{\Phi\} - \{\Phi_i\}\| = \|[A]^{-1} \{r_i\}\| < \frac{\|\{r_i\}\|}{u_1^{(i)}} \leq e_1 \quad (6)$$

de donde se sigue directamente,

$$\|\{r_i\}\| \leq u_1^{(i)} * e_1 \quad (7)$$

$u_1^{(i)}$ = Aproximación i-ésima al menor valor propio de la matriz $[A]$.
 e_1 = Valor positivo cercano a cero.

La ecuación (7) se implementó como criterio de error absoluto. Utilizando un criterio de error relativo se exige que la norma del error sobre la norma de la solución exacta del sistema, sea menor o igual a un valor positivo muy cercano a cero. Se tomó como criterio de error relativo lo siguiente (Kaaschieter, 1985):

$$\frac{\|\{\Phi\} - \{\Phi_i\}\|}{\|\{\Phi\}\|} \approx \frac{\|\{\Phi\} - \{\Phi_i\}\|}{\|\{\Phi_i\}\|} < \frac{\|\{r_i\}\|}{(\|\{\Phi_i\}\| * u_1^{(i)})} \leq e_2 \quad (8)$$

de donde se sigue directamente,

$$\|\{r_i\}\| \leq u_1^{(i)} * e_2 * \|\{\Phi_i\}\| \quad (9)$$

e_2 = Valor positivo cercano a cero.

Si se exigen los dos tipos de errores, se asegura que la solución encontrada por el método sea muy cercana a la solución exacta (error absoluto pequeño); y que además, no valga la pena ajustar más la aproximación obtenida debido a que la magnitud de las correcciones en una nueva iteración será muy pequeña (error relativo pequeño).

Para estimar el menor valor propio de la matriz $[A]$, se utiliza el método de la bisección.

Precondicionamiento y Escalonamiento de la Matriz del Sistema de Ecuaciones

Para acelerar la convergencia del método, se preconditiona la matriz $[A]$ tal que:

$$[\tilde{A}] = [C]^{-1}[A][C]^T \quad \text{de donde} \quad [A] = [C][\tilde{A}][C]^T \quad (10)$$

Si se reemplaza lo anterior en el sistema original, y se premultiplica por la inversa de la matriz $[C]$, se llega a un sistema de ecuaciones preconditionado de la forma:

$$[C]^{-1}[A][C]^{-T}[C]^T\{\Phi\} = [C]^{-1}\{b\}; \quad \text{o lo que es igual} \quad [\tilde{A}]\{\tilde{\Phi}\} = \{\tilde{b}\} \quad (11)$$

$$\text{donde } \{\tilde{\Phi}\} = [C]^T\{\Phi\} \text{ y } \{\tilde{b}\} = [C]^{-1}\{b\} \quad (12)$$

A la matriz $[M] = [C][C]^T$ se le llama comunmente matriz preconditionadora del sistema.

Para implementar en forma eficiente el preconditionamiento del sistema de ecuaciones, se realiza un ordenamiento matemático a partir del algoritmo No.1, y se llega que para el sistema preconditionado se debe incluir en las interacciones un vector $\{z\}$ dado por:

$$\{z_i\} = [M]^{-1}\{r_i\} \quad (13)$$

y se deben calcular los términos beta y alfa del algoritmo como:

$$\beta_{i-1} = (\{z_i\}^T \{r_i\}) / (\{z_{i-1}\}^T \{r_{i-1}\}) \quad y,$$

$$\alpha_i = (\{z_i\}^T \{r_i\}) / (\{p_i\}^T [A] \{p_i\})$$

Con estas modificaciones, los ajustes del vector de incógnitas y del vector residual continúan igual a lo presentado en el algoritmo No.1.

Para la obtención de la matriz preconditionadora puede ser utilizada la Descomposición Incompleta de Cholesky, la cual consiste en obtener una matriz $[C]$ simétrica tal que:

$$c(i, i) = \frac{1}{\sqrt{a(i, i) - \sum_{j=1}^{i-1} [a(i, j)/a(j, j)]^2}} ; \quad c(i, j) = \frac{a(i, j)}{c(j, j)}; \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n \quad (14)$$

Para que este tipo de matriz preconditionadora pueda ser utilizada, la matriz $[A]$ debe ser tal que los términos $c(i, i)$ no resulten imaginarios al calcular las raíces cuadradas (Ver ecuación 14). El preconditionamiento tiene como objetivo asemejar la matriz del sistema de ecuaciones a la identidad, y de esa forma acelerar la convergencia.

Con el fin de aumentar la eficiencia del método, se definen dos matrices de la siguiente forma:

$$d(i, i) = c(i, i) \quad \forall \quad i; \quad d(i, j) = 0 \quad \forall \quad i \neq j; [E] = [D]^{-1}[C]$$

Reemplazando esta última expresión en el sistema preconditionado (11), se llega al siguiente sistema escalado:

$$[E]^{-1}[\hat{A}][E]^{-T}[E]\{\hat{\Phi}\} = [E]^{-1}\{\hat{b}\} \quad (15)$$

donde

$$[\hat{A}] = [D]^{-1}[A][D]^{-T} = [D]^{-1}[A][D]^{-1}; \quad \{\hat{\Phi}\} = [D]^T\{\Phi\} = [D]\{\Phi\} y \{\hat{b}\} = [D]^{-1}\{b\} \quad (16)$$

La ecuación (15) es exactamente igual a preconditionar el sistema de ecuaciones:

$$[\hat{A}]\{\hat{b}\} = \{\hat{b}\} \quad (17)$$

con la matriz preconditionadora $[M] = [E][E]^T$.

Se puede verificar fácilmente que los términos de la matriz triangular inferior de $[E]$ son exactamente iguales a los de la matriz del sistema representado en la ecuación (17), y que los términos de su diagonal son iguales a uno; estas características permiten ahorrar almacenamiento y simplifican el cálculo del vector $\{z\}$ (Ver ecuación 14), disminuyendo considerablemente el tiempo de ejecución en computador.

Almacenamiento Compacto

La matriz $[A]$ puede ser almacenada de manera compacta con el fin de ahorrar memoria de computador, y de agilizar la implementación de las multiplicaciones del tipo $\{w\} = [A]\{p\}$ que deben ser ejecutadas en el algoritmo.

El almacenamiento es realizado de la siguiente manera: se define el vector $\{a\}$ de $n \times 1$, en el cual son almacenados los términos de la diagonal de la matriz $[A]$; se define un vector $\{m\}$ de $n \times 1$, el cual contiene en su i -ésima posición el número de elementos diferentes de cero que tiene la matriz triangular inferior de $[A]$ en sus primeras i -filas; se define el vector $\{a\}$, en el cual son almacenados los términos diferentes de cero de la matriz inferior de $[A]$ fila por fila, por lo que la dimensión de este vector será $m(n) \times 1$; finalmente se define un vector $\{m\}$, el cual en su i -ésima posición contendrá el valor de la columna en el que se encuentra el término $a(i)$ en la matriz triangular inferior original. Con los vectores $\{a\}$, $\{a\}$, $\{m\}$ y $\{m\}$ queda definida completamente la matriz $[A]$.

PRESENTACION DE RESULTADOS

Comparación de Resultados con Soluciones Analíticas

Con el fin de evaluar la bondad del método de simulación numérica utilizando el algoritmo del CGEIS, se compararon curvas de resistividad (Variable $1/K$ de proporcionalidad para flujo de corriente eléctrica, ver ecuación (1) de modelos teóricos contra simulaciones numéricas de las mismas, utilizando como algoritmo de solución al sistema de ecuaciones, el método descrito en el presente artículo.

Se simularon modelos teóricos de dos, tres y cuatro capas de diferente resistividad, comparándose las curvas obtenidas analíticamente con las obtenidas por el método. Las curvas de resistividad se calculan a partir de los valores de potencial entre dos nodos de la red; lo cual quiere decir que si se obtienen buenas aproximaciones a la solución del sistema de ecuaciones las curvas de resistividad simuladas se asemejarán muy bien a las calculadas teóricamente. En las Figuras 1a), b) y c) se presentan las curvas teóricas (curva continua) y simuladas (curva punteada) para los modelos de dos, tres y cuatro capas respectivamente. Las líneas a trazos rectos que se superponen sobre dichas gráficas, representan el modelo teórico simulado.

Análisis de Sensibilidad

Fueron realizados análisis de sensibilidad con los modelos teóricos con el fin de determinar el grado de susceptibilidad de los resultados de la simulación respecto al criterio de error. Se encontró que colocando tanto las constantes del error absoluto como las del relativo en un valor igual a 0.01, se obtienen aproximaciones muy buenas desde el punto de vista práctico. Modificarlas a valores menores no mejora apreciablemente la calidad de los resultados, y por el contrario, sí aumenta los tiempos de ejecución del algoritmo.

Por otra parte se hicieron ensayos de prueba cambiando el criterio de error mixto por un criterio de error absoluto de la siguiente forma:

$$|\{r_i\}| \leq e \quad (18)$$

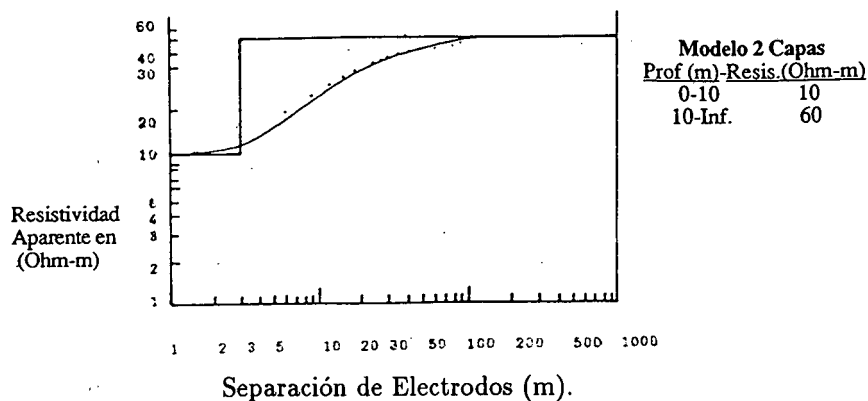


Figura 1a. Curvas de Resistividad Teórica y Numérica Modelo de 2 Capas.

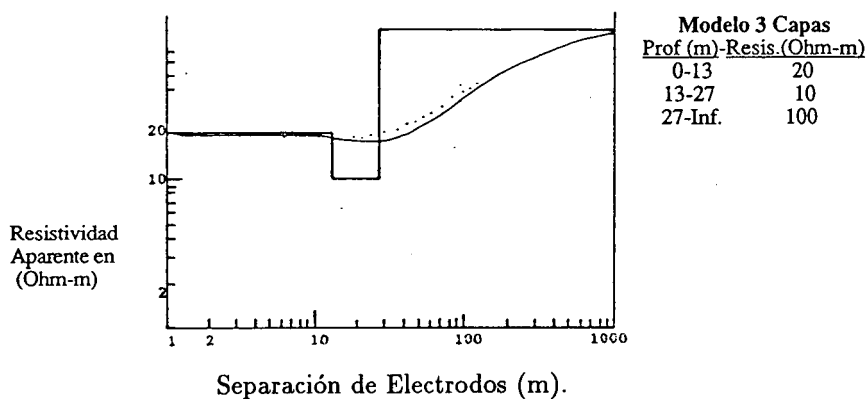


Figura 1b. Curvas de Resistividad Teórica y Numérica Modelo de 3 Capas.

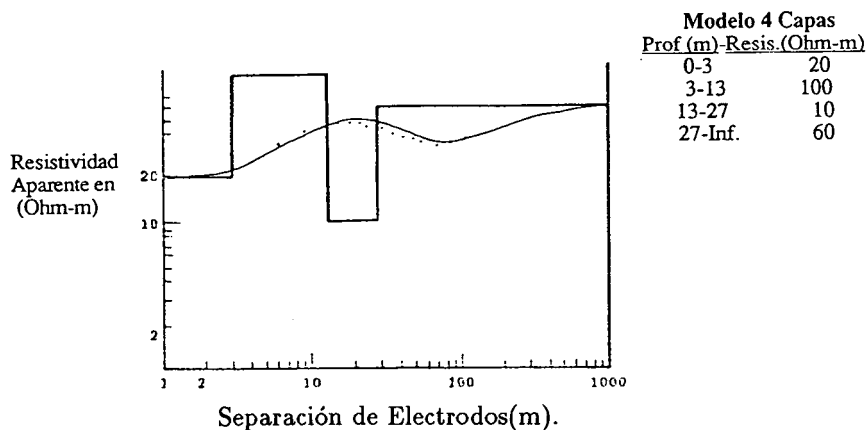


Figura 1c. Curvas de Resistividad Teórica y Numérica Modelo de 2 Capas.

La respuesta siguiendo esta metodología fue de igual calidad que con el criterio mixto, y el número de aproximaciones del algoritmo se reducía considerablemente, disminuyendo el tiempo de ejecución del programa. Lo anterior demuestra que el criterio de error mixto presentado es muy estricto para fines prácticos, y que éste puede ser modificado por un criterio de error absoluto sin perder calidad en los resultados.

Simulación de una Sección Transversal Real

Con el algoritmo implementado, se efectuaron simulaciones numéricas sobre una sección transversal real de características más o menos conocidas. Básicamente con la solución numérica se obtienen una serie de curvas de isorresistividad que son dibujadas en el perfil del terreno (pseudosecciones), las cuales deben ser similares a las obtenidas por medio de la ejecución de sondeos geoelectricos reales. El método utilizado para construir dichas curvas fue el WTP (Wenner Tripotencial); por medio del cual se generán dos tipos de pseudosecciones: Una tipo Alfa, otra tipo Beta sobre Gama. Se trabajó sobre una sección suministrada por el TNO (Institute for Applied Geoscience de Holanda), el cual tenía interés en verificar mediante simulaciones numéricas las condiciones estratigráficas de la misma. Para su estudio el instituto mencionado evaluó pseudosecciones utilizando el método WTP, y construyó pseudosecciones tipo Alfa y Beta sobre Gama a partir de los resultados de campo, sin obtener resultados satisfactorios al compararlas con las obtenidas a partir de perforaciones manuales y estudios de suelos. En la Universidad de los Andes se realizaron simulaciones numéricas con la estratigrafía de la sección enviada por el TNO, utilizando el algoritmo presentado en el artículo.

En la Figura 2a) puede ser observada la estratigrafía aproximada de la zona de estudio. En la Figura 2b) puede ser observada la pseudosección tipo Alfa obtenida a partir de las mediciones de campo. En las Figuras 2c) y d) se muestran las pseudosecciones obtenidas a partir de la simulación numérica del terreno en cuestión. La pseudosección tipo Alfa obtenida numéricamente es muy parecida tanto en los valores como en la forma de las curvas de isorresistividad, a la obtenida a partir de las mediciones de campo. Cabe anotar sin embargo, que la pseudosección Beta sobre Gama obtenida en el terreno, no es muy parecida a la obtenida con la simulación numérica; y que tampoco sigue la estratigrafía que se supone tiene el perfil del suelo. Esto hace pensar que en realidad el terreno posee una configuración estratigráfica un poco diferente a la modelada numéricamente, presentando algunos lentes de material o calidades de agua aún no identificados, que afectan la pseudosección Beta sobre Gama en gran medida, pero muy poco a la pseudosección tipo Alfa. Lo anterior es posible si se tiene en cuenta que las pseudosecciones tipo Alfa muestran una resistividad aparente promedio del terreno, por lo cual lentes de material de espesor pequeño pueden no llegar a ser registrados; y por el contrario, las pseudosecciones tipo Beta sobre Gama tienden a seguir la configuración estratigráfica del terreno, por lo que cualquier lente de material influye notablemente en la forma de la pseudosección.

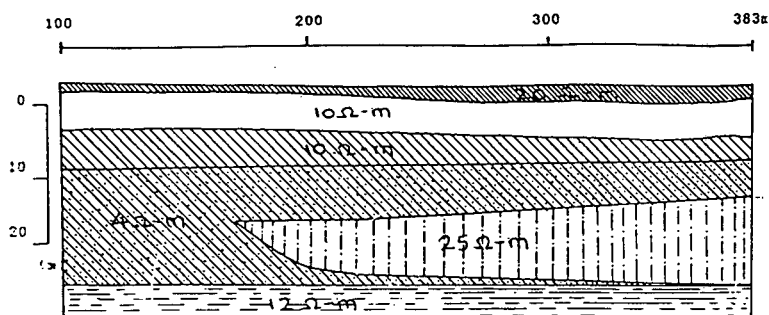


Figura 2a. Estratigrafía Sección Real.

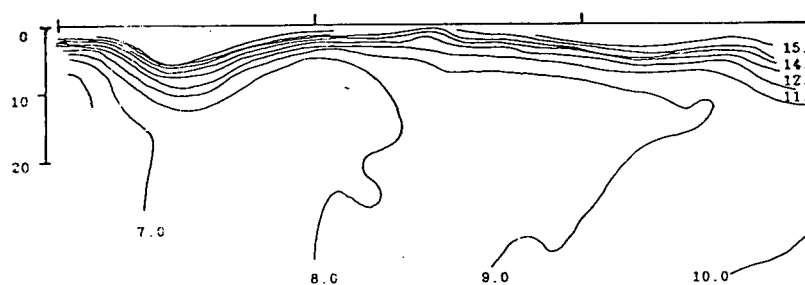


Figura 2b. Pseudosección Real Tipo Alfa.

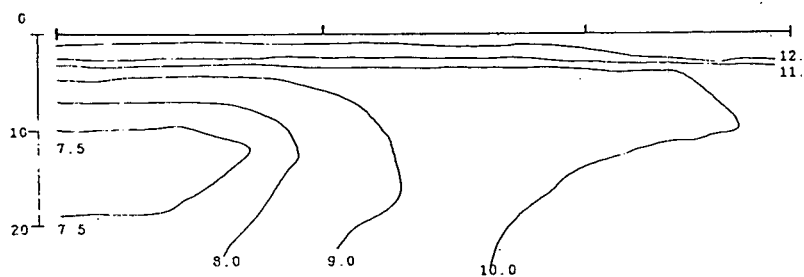


Figura 2c. Pseudosección Simulada Tipo Alfa.

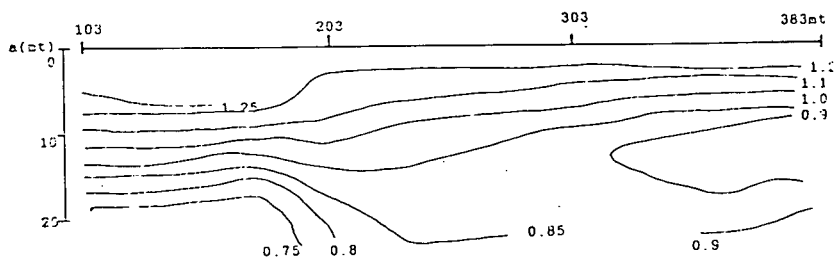


Figura 2d. Pseudosección Simulada Tipo Beta Sobre Gama.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El método de solución de sistemas de ecuaciones lineales implementado optimiza los recursos computacionales por su baja capacidad de almacenamiento y por su gran velocidad de ejecución. Estas últimas características permiten en un momento dado implementarlo en un microcomputador, y aún estar en capacidad de realizar simulaciones numéricas con redes de elementos finitos, o sistemas de ecuaciones, de gran tamaño.

El algoritmo presentado también abre un gran campo de aplicación en otras áreas. Se podría pensar en adaptarlo a problemas de ingeniería en otros campos, como lo son las estructuras, hidráulica, suelos, aguas subterráneas, contaminación; y en general, a problemas en los cuales debido a su modelación se tengan que resolver sistemas de ecuaciones lineales con matrices simétricas y dispersas de gran tamaño. Otra posibilidad es adaptar el sistema de almacenamiento compacto a algoritmos de solución no iterativos, como el método de Cholesky por ejemplo, lo cual podría resultar en un ahorro considerable de almacenamiento y tiempo de computador.

AGRADECIMIENTOS

Se dan agradecimientos muy especiales a los investigadores R. Van Overmeeren y E.F Kaaschieter del TNO, por su interés y valiosa asesoría.

REFERENCIAS

1. M.R. Salamanca , "Simulación numérica de la Resistividad del Subsuelo, Teoria y Práctica", *Tesis MIC-89-1-10*, Universidad de los Andes, Dpto. de Ingeniería Civil, Bogotá, Colombia, (1989).
2. A. Sarria, "Introducción a Los Métodos Geofísicos en la Ingeniería Civil", Universidad de los Andes, Depto. de ingeniería, Bogotá, Colombia, (1988).
3. C.E. Molano, "Representación Tridimensional por Elementos Finitos Del Potencial En Sondeos Geoeléctricos en Medios Heterogéneos y Anisotrópicos", Universidad de los Andes, Depto. de Ingeniería Civil, Bogotá, Colombia, (1989).
4. R.F. Acworth y Griffiths, "Simple Data Procesing Of Tripotential Apparent Resistivity Measurements as an Aid To The Interpretation, Of Subsurface Structure", *Geophysical Prospecting*, Vol. 33, pp. 861-887, (1985).
5. R.A. Van Overmeeren e I.L. Ritsema, "GEA 58: A Way of Continuos Vertical Electrical Sounding", *TNO-Institute of Applied Geoscience*, Delft, the Netherlands, (1988).
6. A. Dey y H.F. Morrison, "Resistivity Modelling for Arbitrarily Shaped Two-Dimensional Structures", *Geophysics*, Vol. 36, No.4, pp. 753-780, (1979).
7. J.H. Coggon, "Electromagnetic And Electrical Modelling By The Finite Element Method", *Geophysics*, No.1, Vol. 36, pp. 132-155, (1971).
8. C.E. Molano y M. Salamanca, "Simulación numérica de la Distribución del Potencial y La Resistividad Aparente en Sondeos Geoeléctricos Verticales", Universidad de los Andes, Depto. de Ingeniería Civil, Bogotá, Colombia,(1989).
9. E.F. Kaaschieter, "A Fortran Implementation of The Preconditioned Method Of Conjugate Gradients", *Report 85-33*, TNO-Institute for Applied Geoscience, Delft, The Netherlands,

- (1985).
10. E.F. Kaaschieter, "The Use Of Preconditioned Gradients In Solving Discretized Potencial Flow Problems", *Report 88-02*, TNO-Institute for Applied Geoscience, Delft, The Netherlands (1988).
 11. E.F. Kaaschieter, "A Practical Termination Criterion For The Conjugate Gradient Method", *Report 87-62*, TNO-Institute for Applied Geoscience, Delft, The Netherlands, (1987).
 12. O.A. Soto, "*Optimización de la Solución numérica por Elementos Finitos de Sondeos Geoelectricos*", Universidad de los Andes, Depto. de Ingeniería Civil, *Tesis MIC-89-II-16*, Bogotá, Colombia, (1989).