

DINÁMICA NO LINEAL DE ESTRUCTURAS

B. Luccioni

Laboratorio de Estructuras,

Universidad Nacional de Tucumán

Av. Roca s/n, 4000 Tucumán - Argentina

S. Oller y A. Barbat

Escuela de Ingenieros de Caminos de Barcelona,

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)

Universidad Politécnica de Cataluña

Campus Norte UPC, 08034 Barcelona

e-mail: sergio.oller@upc.es – alex.barbat@upc.es

1 INTRODUCCIÓN

Normalmente, en la solución de problemas dinámicos, es necesario utilizar alguna forma de amortiguamiento en la respuesta estructural. Generalmente se incorpora directamente un término de amortiguamiento, que depende de las velocidades, en la ecuación de equilibrio dinámico^{1,2}. Para ello, se define una matriz de amortiguamiento estructural, la cual resulta bastante difícil de estimar. Una forma muy utilizada para esta matriz es la propuesta por Rayleigh^{1,2}. Definido ya el amortiguamiento, el problema se resuelve como un problema elástico lineal, situación contradictoria debido a que se está tratando un fenómeno disipativo.

Una alternativa válida y con mayor fundamento para contemplar el amortiguamiento estructural es utilizar modelos constitutivos viscoelásticos en los que la tensión dependa en alguna forma de la velocidad de deformación³. De este modo, el término de amortiguamiento estructural surge directamente en la ecuación de equilibrio dinámico, donde las propiedades de los materiales pueden determinarse a través de simples ensayos de laboratorio.

2 MODELO CONSTITUTIVO VISCOELÁSTICO

Una forma simple de formular modelos constitutivos viscoelásticos es a través de analogías con sistemas resorte amortiguador³. Existen básicamente dos familias de modelos de este tipo: Kelvin y Maxwell. Ver Fig.1.

En la Fig.1 se han representado las curvas de deformación diferida y relajación correspondientes a los modelos de Kelvin y Maxwell respectivamente. Combinando estos modelos simples se pueden obtener comportamientos más complejos.

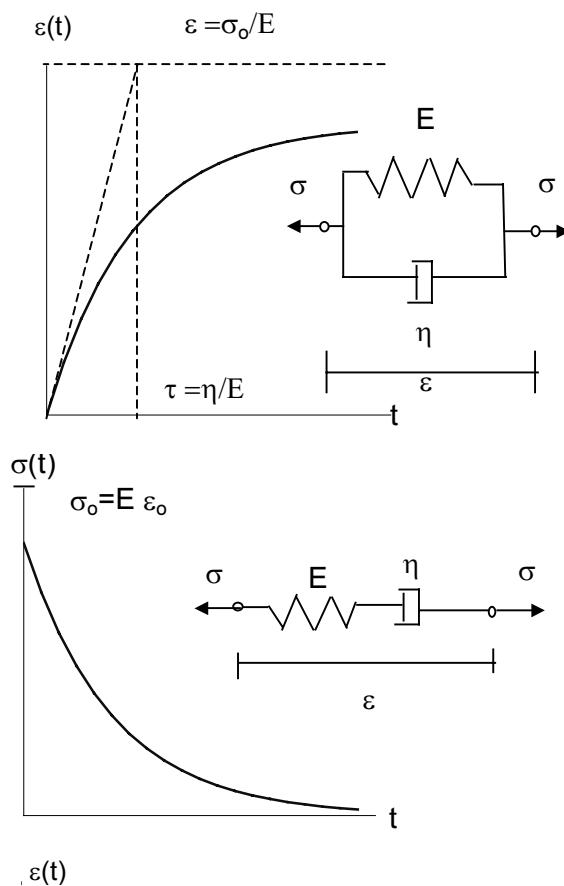


Figura 1. Representación esquemática del modelo de Kelvin y de Maxwell.

2.1 Expresiones generales

En general, en cualquiera de estos modelos se llega a expresiones del tipo⁴:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-s) \frac{d\sigma(s)}{ds} ds \quad (1)$$

donde la *función de deformación diferida* $J(t)$ es la respuesta a una tensión

$$\sigma = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

que puede determinarse en laboratorio; ó

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t R(t-s) \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds \quad (2)$$

donde la función de relajación $R(t)$ es la respuesta a una deformación

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

que puede también determinarse en laboratorio.

2.2 Extensión al caso multiaxial

En el caso de modelos reológicos en general, existen dos formas clásicas de extender las ecuaciones unidimensionales al caso multiaxial:

- Considerando que las funciones de deformación diferida $J(t)$ y de relajación de tensiones $R(t)$ son funciones tensoriales de rango 4⁴. Para materiales isótropos, esta forma tensorial es análoga a la del módulo elástico. Por lo tanto, es posible separarla en dos partes, una correspondiente a la parte volumétrica y otra correspondiente a la parte desviadora.

$$J_{ijkl}(t) = J_o(t)\delta_{ij}\delta_{kl} + J_1(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (3)$$

$$R_{ijkl}(t) = R_o(t)\delta_{ij}\delta_{kl} + R_1(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

Esta formulación requiere al menos dos ensayos para determinar J_o y J_1 o R_o y R_1

- Definiendo una función de deformación diferida única para todas las direcciones y suponiendo que el módulo de Poisson se preserva. La expresión para la deformación diferida extendida al caso multiaxial puede obtenerse escalando la expresión de la deformación uniaxial de ec.(1):

$$\underline{\varepsilon} = \left(E \underline{C}^{-1} \right) : \int_{-\infty}^t J(t-s) \frac{d\underline{\sigma}}{ds} ds \quad (4)$$

Donde E representa el módulo elástico longitudinal en la dirección en la que se ha determinado la función de deformación. La tensión se calcula entonces como:

$$\underline{\sigma} = \underline{C} : \underline{\varepsilon} = E \int_{-\infty}^t J(t-s) \frac{d\underline{\sigma}}{ds} ds \quad (5)$$

Obviamente este tipo de enfoque requiere una sola determinación experimental de la función de deformación diferida. Esta forma simplificada se utiliza en lo que sigue del presente trabajo.

2.3 Integración Numérica

Para la solución de problemas viscoelásticos, normalmente es necesario resolver integrales de convolución del tipo de las ecuaciones (1) ó (2). Si, en particular, J o R tienen la propiedad del semigrupo⁵, es decir, son funciones que cumplen con la condición:

$$f(a+b) = f(a)f(b) \quad (6)$$

se puede evitar la integral de convolución, ya que la misma se puede escribir de la siguiente forma:

$$\int_{-\infty}^{t_n} f(t_n - s) g(s) ds = f(\Delta t_n) f(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t_n - s) g(s) ds \quad (7)$$

En cada paso se utiliza la integral del paso anterior y se integra sólo durante el intervalo de tiempo actual.

Las funciones exponenciales, que aparecen en los modelos viscoelásticos basados en analogías muelle-amortiguador dan como resultado

funciones de relajación y deformación diferida exponenciales que justamente cumplen con la propiedad del semigrupo. No es este el caso de los materiales reales, como el hormigón⁶, en los que la curva de deformación diferida tiene otra forma, y si se quiere utilizar esta propiedad, es necesario admitir una simplificación.

2.4 Modelo de Kelvin aplicado a problemas de dinámica estructural

En lo que sigue se desarrollan en detalle las ecuaciones correspondientes al modelo de Kelvin porque este es el modelo que se utilizará en los ejemplos de aplicación.

Para el modelo de Kelvin de la Fig. 1a:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma^e + \sigma^i = E\varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \\ \varepsilon &= \frac{\sigma - \eta \dot{\varepsilon}}{E} = \frac{\sigma}{E} - \frac{\eta}{E} \dot{\varepsilon} = \varepsilon^\infty - \tau \dot{\varepsilon} \\ \varepsilon &= \int_0^t \frac{1}{\eta} e^{\left(\frac{t-s}{\tau}\right)} \sigma(s) ds\end{aligned}$$

Donde σ^e y σ^i representan la parte elástica e inelástica de la tensión respectivamente, ε^∞ la deformación estacionaria (en tiempo infinito), E el módulo de Young y η la viscosidad. La extensión al caso multiaxial conduce a las siguientes ecuaciones:

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^e + \underline{\sigma}^i = \underline{C} : \left(\underline{\varepsilon} + \frac{\eta}{E} \dot{\underline{\varepsilon}} \right) \quad (8)$$

2.5 Disipación

En el modelo de Kelvin generalizado al caso multiaxial, la energía libre⁷ se puede escribir como:

$$\Psi = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \underline{C} : \underline{\varepsilon} \quad (9)$$

A partir de allí se calcula la tasa de disipación energía por unidad de volumen como:

$$\Xi_m = \underline{\sigma} : \dot{\underline{\varepsilon}} - \dot{\Psi} = (\underline{\sigma} - \underline{C} : \underline{\varepsilon}) : \dot{\underline{\varepsilon}} \quad (10)$$

y la disipación total:

$$E_{dis} = \int_0^t \left(\int_V \Xi_m dV \right) dt \quad (11)$$

3 APLICACIÓN DE LA TEORÍA VISCOELÁSTICA A PROBLEMAS DINÁMICOS

3.1 Ecuaciones de equilibrio dinámico

La ecuación de equilibrio dinámico se puede obtener a partir del Primer Principio de la Termodinámica⁷:

$$\dot{W} = Q_{prop} + P_d \quad (12)$$

Donde \dot{W} es la potencia interna, Q_{prop} el calor propio o potencia calórica y P_d la potencia deformativa. Para problemas mecánicos isotérmicos, isentrópicos y adiabáticos $Q_{prop} = 0$. Además la potencia introducida al sistema se puede escribir como:

$$\begin{aligned} P_{int} &= \int_S \underline{t} \cdot \underline{v} dS + \int_V \rho \underline{b} \cdot \underline{v} dV = \int_V [\underline{v} \cdot \left(\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{x}} + \rho \underline{b} \right) + \underline{\sigma} : \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}}] dV \\ P_{int} &= \underbrace{\int_V \underline{v} \cdot \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} dV}_{P_{cin}} + \underbrace{\int_V \underline{\sigma} : \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}} dV}_{P_d} \end{aligned} \quad (13)$$

donde $\underline{t} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ con \underline{n} normal saliente a la superficie de la frontera, \underline{b} es el vector de fuerzas másicas, ρ la densidad, $\underline{v} = \frac{d\underline{u}}{dt}$ es la velocidad y \underline{u} el campo de desplazamientos.

La potencia deformativa resulta entonces:

$$P_d = P_{in} - P_{cin} \quad (14)$$

Donde P_{in} es la potencia introducida al sistema y P_{cin} la potencia cinética.

La ecuación (12) se puede escribir entonces como:

$$\int_V \rho \dot{w} dV = \int_V \underline{\sigma} : \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}} dV = \oint_S \underline{t} \cdot \underline{v} dS + \int_V \rho \underline{b} \cdot \underline{v} dV - \int_V \rho \underline{v} \cdot \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} dV \quad (15)$$

3.2 Formulación de elementos finitos

En una formulación de elementos finitos el campo de desplazamientos se interpola como:

$$\underline{u} = \underline{N} \cdot \underline{U} \quad \text{y} \quad \underline{\varepsilon} = \underline{B} \cdot \underline{U} \quad (16)$$

Donde los \underline{U} son desplazamientos nodales, \underline{N} es la matriz de funciones de forma y \underline{B} la matriz de compatibilidad cinemática. La ecuación (15) queda entonces :

$$\underbrace{\left(\int_V \underline{N} \cdot \rho \underline{N} dV \right)}_{\underline{M}} \cdot \ddot{\underline{U}} + \underbrace{\int_V \underline{\sigma} : \underline{B} dV}_{\underline{F}_{int}} = \underbrace{\oint_S \underline{t} \cdot \underline{N} dS}_{\underline{F}_{ext}} + \underbrace{\int_V \rho \underline{b} \cdot \underline{N} dV}_{\underline{F}_{ext}} \quad (17)$$

Donde \underline{M} es la denominada matriz de masa, \underline{F}_{int} representa las fuerzas internas y \underline{F}_{ext} las fuerzas externas.

Para el caso especial del modelo viscoelástico de Kelvin (ec.(8)), resulta³:

$$\underline{M} \cdot \ddot{\underline{U}} + \int_V (\underline{C} : \underline{\varepsilon} + \frac{\eta}{E} \underline{C} : \dot{\underline{\varepsilon}}) : \underline{B} dV = \underline{F}_{ext}$$

$$\underline{M} \cdot \ddot{\underline{U}} + \underbrace{\left(\int_V \underline{B} : \underline{C} : \underline{B} dV \right)}_{\underline{K}} \cdot \underline{U} + \underbrace{\left(\int_V \underline{B} : \frac{\eta}{E} \underline{C} : \underline{B} dV \right)}_{\underline{D} = \frac{\eta}{E} \underline{K}} \cdot \dot{\underline{U}} = \underline{F}_{ext}$$

$$\underbrace{\underline{M} \cdot \ddot{\underline{U}}}_{\text{Fuerzas de inercia}} + \underbrace{\underline{K} \cdot \underline{U}}_{\text{Fuerzas elásticas}} + \underbrace{\underline{D} \cdot \dot{\underline{U}}}_{\underline{F}_{int}} = \underline{F}_{ext} \quad (18)$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación de equilibrio dinámico que se usa en problemas elásticos a los que se les agrega amortiguamiento estructural ^{1, 2}. La diferencia es que en este caso, la matriz de amortiguamiento \underline{D} se obtiene a partir del modelo constitutivo. La ecuación (18) obtenida por esta vía tiene una diferencia conceptual importante con la que se utiliza tradicionalmente en problemas de dinámica, pues se trata de una ecuación de equilibrio no lineal.

3.3 Algoritmos de solución

Para un problema dinámico viscoelástico la ecuación de equilibrio discreta, en el espacio, a resolver es la siguiente:

$$\underline{M} \cdot \ddot{\underline{U}}(t) + \underline{F}_{int}(\underline{U}, \dot{\underline{U}}) - \underline{F}_{ext}(\underline{U}, t) = \underline{R}(t) \quad (19)$$

Esta ecuación se puede resolver por el método de Newton Raphson, para ello se aproxima el residuo en el intervalo $t + \Delta t$ en la iteración $k+1$ como:

$$\underline{R}(\underline{U}_{t+\Delta t}^{k+1}) = \underline{R}(\underline{U}_{t+\Delta t}^k) + \underline{J}(\underline{U}_{t+\Delta t}^k) \cdot (\underline{U}_{t+\Delta t}^{k+1} - \underline{U}_{t+\Delta t}^k) \quad (20)$$

Haciendo:

$$\underline{R}(\underline{U}_{t+\Delta t}^{k+1}) = \underline{0} \quad (21)$$

$$\underline{U}_{t+\Delta t}^{k+1} = \underline{U}_{t+\Delta t}^k - [\underline{J}(\underline{U}_{t+\Delta t}^k)]^{-1} \cdot \underline{R}(\underline{U}_{t+\Delta t}^k) \quad (22)$$

Donde el Jacobiano se calcula como:

$$\underline{J}(\underline{U}) = \underline{M} \cdot \frac{\partial \ddot{\underline{U}}}{\partial \underline{U}} + \frac{\partial \underline{F}_{int}}{\partial \underline{U}} + \frac{\partial \underline{F}_{int}}{\partial \dot{\underline{U}}} \cdot \frac{\partial \dot{\underline{U}}}{\partial \underline{U}} - \frac{\partial \underline{F}_{ext}}{\partial \underline{U}} = \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{U}} \quad (23)$$

4 COMPARACIÓN ENTRE AMORTIGUAMIENTO ESTRUCTURAL Y AMORTIGUAMIENTO MATERIAL

4.1 Matriz de amortiguamiento

Cuando se usa la fórmula de Rayleigh, la matriz de amortiguamiento se calcula como:

$$\underline{D}_R = \alpha \underline{M} + \beta \underline{K} \quad (24)$$

Esta forma coincide con la obtenida con el modelo de Kelvin si se toma:

$$\alpha = 0 \quad y \quad \beta = \frac{\eta}{E} \quad (25)$$

4.2 Conclusiones sobre los desplazamientos

Definiendo la matriz de amortiguamiento según ecuaciones (24) y (25), las ecuaciones de equilibrio dinámico obtenidas con amortiguamiento estructural y con amortiguamiento material resultan idénticas. De ello se desprende que las soluciones en desplazamientos, deformaciones, velocidades y aceleraciones coinciden

4.3 Conclusiones sobre las tensiones

Como los modelos constitutivos utilizados son distintos, uno es elástico y el otro viscoelástico, las tensiones resultan distintas:

$$\underline{\sigma} = \begin{cases} \underline{C} : \underline{\varepsilon} & \text{para el modelo elástico} \\ \underline{C} : \left(\underline{\varepsilon} + \frac{\eta}{E_o} \dot{\underline{\varepsilon}} \right) & \text{para el modelo viscoelástico} \end{cases} \quad (26)$$

De aquí se puede observar que la diferencia entre las tensiones es más grande cuanto mayor es el amortiguamiento.

Por otro lado, esta diferencia cobra importancia cuando se trata de evaluar la resistencia de la estructura o cuando el material trabaja al límite de fractura o de plasticidad.

4.4 Disipación de energía

La ec.(14): $P_d = P_{in} - P_{cin}$ que expresa el balance de potencias, puede verificarse en ambos enfoques. Si se postmultiplica la ecuación de equilibrio (17) por $\dot{\underline{U}}$, se obtiene la siguiente expresión:

$$\left(\underline{M} \cdot \ddot{\underline{U}} \right) \cdot \dot{\underline{U}} + \underbrace{\int_V \underline{\sigma} : \underline{B} dV \cdot \dot{\underline{U}}}_{F_{int}} = \underline{F}_{ext} \cdot \dot{\underline{U}} \quad (27)$$

En el caso viscoelástico:

$$P_{cin} = \left(\underline{M} \cdot \ddot{\underline{U}} \right) \cdot \dot{\underline{U}}$$

$$P_d = \left(\int_V \underline{\sigma} : \underline{B} dV \right) \cdot \dot{\underline{U}} = \left(\int_V (\underline{C} : \underline{\varepsilon} + \frac{\eta}{E_o} \underline{C}) : \underline{B} dV \right) \cdot \dot{\underline{U}} = F_{int} \cdot \dot{\underline{U}} \quad (28)$$

$$P_{int} = \underline{F}_{ext} \cdot \dot{\underline{U}}$$

Reemplazando en la ec.(27) se obtiene $P_{cin} + P_d = P_{int}$ y acomodando nuevamente sus términos, se llega a la ec.(14), lo cual es obvio porque la ecuación de equilibrio ha sido derivada de la ecuación de potencias.

En el caso de amortiguamiento estructural, la potencia deformativa contiene sólo la parte elástica:

$$P_d^R = \left(\int_V \underline{\sigma} : \underline{B} dV \right) \cdot \dot{\underline{U}} = \left(\int_V \underline{C} : \underline{\epsilon} : \underline{B} dV \right) \cdot \dot{\underline{U}} = \underline{K} \cdot \underline{U} \cdot \dot{\underline{U}} \quad (29)$$

La igualdad (14) no se cumple sino se agrega un término correspondiente a la parte disipativa de la potencia deformativa, que es externa al material:

$$P_{disip}^R = D \cdot \dot{\underline{U}} \cdot \dot{\underline{U}} \quad (30)$$

cumpliéndose entonces que:

$$P_d^R = P_{int} - P_{disip}^R + K \quad (31)$$

La diferencia fundamental entre la consideración de un modelo viscoelástico y la utilización de un modelo elástico más amortiguamiento estructural se presenta cuando se quiere evaluar la energía disipada por una estructura. En el primer caso la energía disipada puede evaluarse a nivel constitutivo. En el segundo caso, a nivel constitutivo no se disipa energía ya que el modelo constitutivo es elástico. La energía disipada debe medirse a nivel estructural. Esto puede interpretarse como que existe un dispositivo amortiguador externo a la estructura misma (elástica) donde se disipa la energía.

La energía disipada en el modelo viscoelástico se calcula a nivel constitutivo mediante la ec.(11) y resulta:

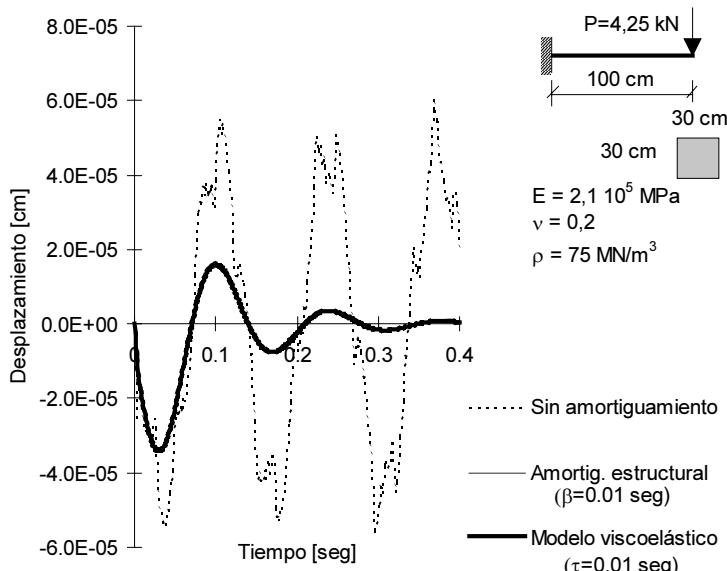
$$E_{dis} = \int_0^t \left(\int_V \underline{B} : \frac{\eta}{E_o} \underline{C} : \underline{B} dV \right) \cdot \dot{\underline{U}} \cdot \dot{\underline{U}} dt = \int_0^t \underline{D} \cdot \dot{\underline{U}} \cdot \dot{\underline{U}} dt \quad (32)$$

En el caso de amortiguamiento estructural la energía disipada puede obtenerse integrando la potencia disipada a nivel estructural (ec.(30)) y resulta idéntica.

5 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

5.1 Viga en voladizo

Este ejemplo consiste en una viga en voladizo sometida a un desplazamiento en su extremo y luego liberada para que oscile libremente. Ver Fig.2. En la misma figura se han representado la variación de los desplazamientos en el tiempo para el caso elástico, viscoelástico con $\tau = \eta/E_o = 0,01$ seg y amortiguamiento estructural con $\beta = 0,01$ seg. En la Fig.3 se han representado las curvas de variación de tensión longitudinal máxima en el extremo empotrado para las mismas situaciones. Puede verse que la respuesta en desplazamientos es la misma no así en tensiones.



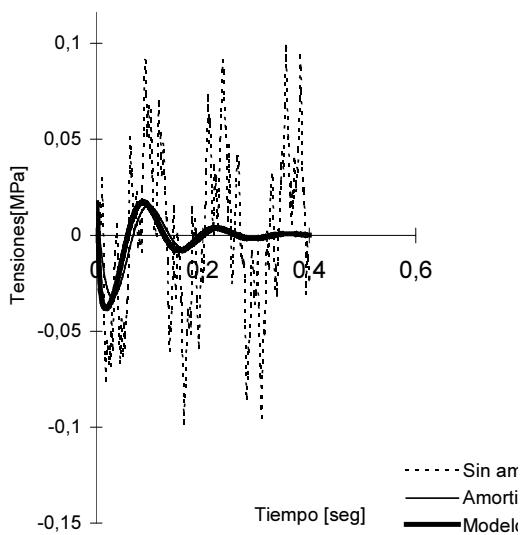


Fig.3 Tension máxima en el empotramiento

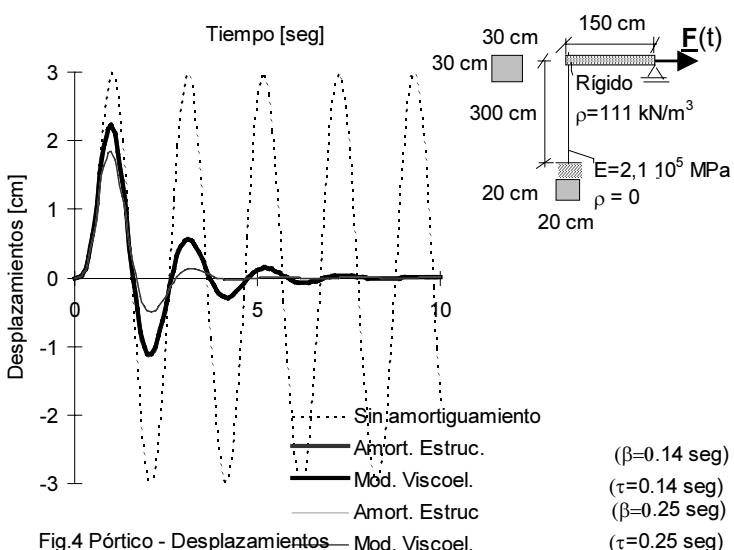


Fig.4 Pórtico - Desplazamientos

($\beta=0.14 \text{ seg}$)
($\tau=0.14 \text{ seg}$)
($\beta=0.25 \text{ seg}$)
($\tau=0.25 \text{ seg}$)

5.2 Pórtico con dintel rígido y masa concentrada en el mismo

En este ejemplo se analiza el comportamiento del pórtico de la Fig.4, sometido a una fuerza F que varía en el tiempo como se indica en la misma figura. En la misma figura se ha representado la variación del desplazamiento en el punto de aplicación de la carga para el caso no amortiguado, modelo viscoelástico con $\tau = \eta/E_o = 0,14$ seg y $\tau = 0,25$ seg y amortiguamiento estructural con $\beta = 0,14$ seg y $\beta = 0,25$ seg. Nuevamente puede verse que ambas formas de considerar el amortiguamiento coinciden en desplazamientos.

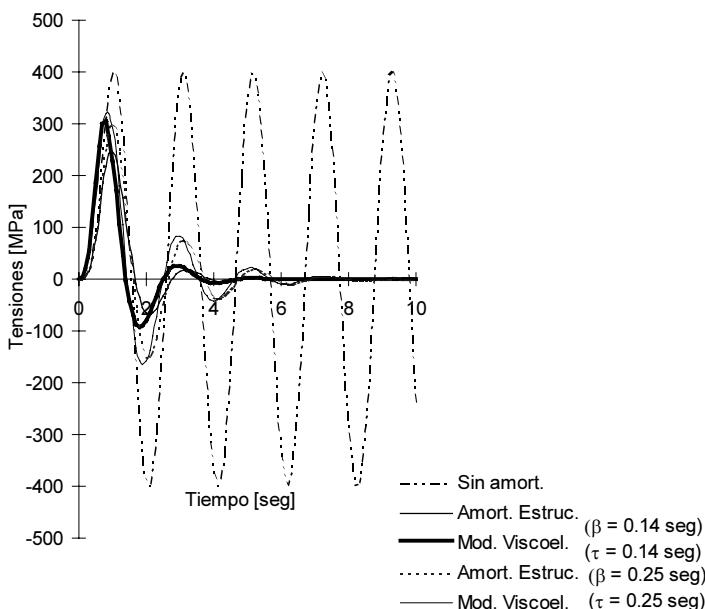


Fig.5 Tensión máxima en el empotramiento

En las Fig.5 se ha representado la variación de la tensión normal máxima en el empotramiento para el caso no amortiguado, modelo viscoelástico con $\tau = \eta/E_o = 0,14$ seg y $\tau = 0,25$ seg y amortiguamiento estructural con $\beta = 0,14$ seg y $\beta = 0,25$ seg. Puede notarse que ambas formas dan resultados diferentes para las tensiones y la diferencia es mayor cuanto mayor es el amortiguamiento.

6 CONCLUSIONES

- Tanto la utilización de un modelo constitutivo viscoelástico de tipo Kelvin, como la incorporación de amortiguamiento estructural de tipo Rayleigh, conducen a la misma ecuación de equilibrio dinámico, cuando los parámetros son adoptados adecuadamente.
- Las soluciones en desplazamientos, velocidades, aceleraciones y deformaciones son idénticas en ambos enfoques.
- La utilización de amortiguamiento estructural conduce a valores menores de tensión que en el caso de utilización de un modelo viscoelástico. La diferencia es mayor cuanto mayor es el amortiguamiento.
- La energía disipada cuando se utiliza un modelo viscoelástico, puede a evaluarse a nivel constitutivo. En el caso de amortiguamiento estructural la energía disipada debe evaluarse también a nivel estructural, como si se tratara de una disipación en un elemento externo adherido a la estructura ya que la estructura en sí, que es elástica, no puede disipar energía.
- En resumen, si bien la utilización de modelos viscoelásticos introduce el amortiguamiento en forma fundamentada, es equivalente a trabajar con modelos de amortiguamiento estructural, salvo el caso en que se requiera evaluar tensiones o resistencias.

REFERENCIAS

- [1] Barbat A.H. , *Cálculo Sísmico de Estructuras*, Editores Técnicos asociados, S.A., Barcelona, 1982.
- [2] Clough R.V., Penzen J., *Dynamic of Structures*, Mc. Graw-Hill International Editors, New York, 1975.
- [3] Barbat,A., Hanganu,A., Oller,S. and Oñate,E., *Rigurous Damping Matrix for Finite Element Models with Viscous Behaviour - Applied to Seismic Problems*), ComputING, Nro.5, Bucarest, Rumania, Aug. 1993.
- [4] Lubliner,J., *Plasticity Theory*, Mc. Millan Publishing, U.S.A., New York, 1990.

- [5] Simo,J. & Hughes, T.J.R., Elastoplasticity and Viscoplasticity. Computational Aspects.
- [6] CEB-FIP *Model Code for Concrete Structures*, 3rd Edition, Comité Euro-International du Béton/Fédération Internationale de la Précontrainte, Paris, 1978, pp. 110-113.