

ANALISIS DE ESTRUCTURAS LAMINARES GENERALES UTILIZANDO EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

EDUARDO N. DVORKIN*

*Instituto de Materiales y Estructuras
Facultad de Ingeniería. Universidad de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina*

y

KLAUS-JÜRGEN BATHE⁺

*Department of Mechanical Engineering
Massachusetts Institute of Technology
Cambridge, Massachusetts, U.S.A.*

RESUMEN

En esta comunicación resumimos brevemente nuestras últimas investigaciones en el campo del análisis lineal y no-lineal de estructuras laminares, mediante la utilización del Método de Elementos Finitos.

Nuestros requerimientos para el desarrollo de elementos generales de láminas que puedan ser utilizados como una herramienta confiable en la práctica ingenieril son discutidos y nuestra solución para satisfacer dichos requerimientos: **la interpolación mixta de componentes tensoriales** es presentada.

Por último discutimos los métodos de resolución que se utilizan en problemas no-lineales.

SUMMARY

We briefly present our latest research in the field of nonlinear finite element analysis of shell structures.

We discuss the requirements for reliable analyses of shells in practical engineering environments, and present our approach to meet these requirements: **the mixed interpolation of tensorial components**.

Finally we discuss solution methods for nonlinear problems.

Recibido: Noviembre 1986

(*) Profesor de Mecánica del Sólido.

(+) Profesor de Ingeniería Mecánica.

INTRODUCCION

El análisis de estructuras laminares generales es un campo de trabajo ingenieril en continua expansión.

Por un lado la creciente complejidad de las estructuras que deben analizarse y por otro lado, la necesidad de implementar algoritmos de cálculo que puedan ser utilizados sin mayores restricciones en análisis rutinarios (por ej. aplicaciones de C.A.D.) hacen que la condición fundamental de los métodos de cálculo que se desarrollan sea la **fiabilidad**¹.

El análisis no-lineal de estructuras laminares utilizando el Método de Elementos Finitos, tiene dos componentes principales:

- a) Los elementos generales de lámina a utilizar.
- b) Los métodos de resolución de las ecuaciones planteadas.

En la Sección II discutimos los requerimientos que un elemento general de lámina debe satisfacer, a nuestro entender, para poder recomendar su uso fiable en la práctica ingenieril, y en la Sección III presentamos nuestra solución para satisfacer dichos requerimientos: los elementos generales de lámina basados en la interpolación mixta de componentes tensoriales.

En la Sección IV discutimos brevemente los métodos de resolución de modelos no-lineales y en particular un algoritmo de resolución automática de problemas no-lineales estáticos, apto para proseguir la solución después de puntos críticos (problemas de post-pandeo).

En la Sección V presentamos algunas consideraciones prácticas sobre la eficiente implementación computacional de los elementos descriptos, y finalmente en la Sección VI proponemos algunas ideas sobre futuras direcciones de trabajo en un tema que está lejos de haber sido agotado.

FORMULACION DE ELEMENTOS GENERALES DE LAMINA

Requerimientos

El desarrollo de elementos generales de lámina ha sido un área de trabajo muy activa en las dos últimas décadas. Muchos elementos han sido propuestos y los avances han sido muy importantes, sin embargo, en el análisis de láminas aún no se ha llegado al punto en que un programa de elementos finitos pueda ser siempre usado en forma rutinaria por analistas sin conocimientos sobre el método en sí. De ahí la necesidad de continuar investigando y desarrollando sobre el tema.

En este punto debemos remarcar que, de acuerdo a nuestra experiencia, un buen elemento de placa no necesariamente conduce a un buen elemento de lámina, y un buen elemento lineal de lámina no necesariamente conduce a un buen elemento no-lineal de lámina. Por lo tanto, siendo nuestro objetivo el desarrollo de elementos generales de lámina nos abocaremos directamente a ello y luego, podremos particularizar la formulación y obtener así elementos lineales de lámina y también elementos de placa.

Los requerimientos que nos hemos fijado para el desarrollo de elementos generales de lámina²⁻⁷ están dictados por nuestro deseo de que puedan ser ampliamente utilizados en forma rutinaria (por ej. situaciones de C.A.D.). Por este motivo, un elemento debe idealmente satisfacer los siguientes criterios⁷:

Criterio 1: El elemento debe ser formulado en una forma muy general, que permita utilizarlo en cualquier análisis de láminas o placas.

Criterio 2: La formulación teórica del elemento debe estar fuertemente basada en la Mecánica del Sólido, con hipótesis en la discretización por elementos finitos que sean, desde el punto de vista mecánico, claras y bien fundamentadas. El elemento no debe contener factores de ajuste numéricos.

Criterio 3: El elemento no debe contener modos rígidos espúreos y no debe sufrir bloqueo⁸⁻¹⁰ bajo ninguna circunstancia.

Criterio 4: El elemento debe ser lo más simple y económico que sea posible, cuando se emplee para el análisis de láminas con 5 ó 6 grados de libertad por nodo (ver Sección V) y para el análisis de placas con 3 grados de libertad por nodo.

Criterio 5: El elemento debe tener buena convergencia y ser, lo más insensible que sea posible a las deformaciones de la malla.

Los criterios enunciados constituyen la base para el desarrollo de elementos de lámina eficientes y fiables. Queremos remarcar una vez más, que consideramos la fiabilidad como la característica más importante de un elemento; mucho más importante, por ejemplo, que su eficiencia computacional.

Los elementos de lámina basados en la **interpolación mixta de componentes tensoriales**, fueron desarrollados⁴⁻⁷ para poder satisfacer los criterios enunciados. En su desarrollo hemos utilizado inspecciones analíticas de diversos aspectos del comportamiento de elementos de lámina como así también numerosas experiencias numéricas. Como una herramienta fundamental para examinar nuestros desarrollos hemos hecho uso de la prueba de la parcela propuesta por Irons (Patch Test)¹¹, la que a lo largo del desarrollo fue usada como un filtro; sólo fueron considerados aquellos elementos que satisficieran esta prueba, los que a posteriori fueron utilizados para resolver algunos problemas típicos, a fin de realizar estudios de convergencia.

Para realizar la prueba de la parcela se somete a la **parcela de elementos** (ver Fig. 9) a condiciones de vínculo que restrinjan únicamente los movimientos rígidos y a fuerzas externas nodales que correspondan a las condiciones de borde de un estado de tensiones constante (ver Apéndice I); el análisis de este modelo produce los desplazamientos nodales y tensiones en los puntos interiores de la parcela. La prueba de la parcela tiene éxito si los resultados obtenidos coinciden exactamente con los resultados analíticos.

En este trabajo comentaremos el elemento no-plano de 4 nodos que hemos desarrollado con nuestra metodología (MITC4)⁴⁻⁶ y el elemento de 8 nodos (MITC8)⁷.

En las Refs. (4-5) hemos presentado un principio variacional para el elemento MITC4; dicho principio variacional corresponde a una particularización del principio general de Hu-Washizu¹².

Una demostración formal de convergencia del MITC4 en un problema particular fue desarrollada en la Ref. (13).

Desarrollos similares al nuestro están siendo investigados por Crisfield¹⁴ y Park y Stanley¹⁵. Huang y Hinton¹⁶ han presentado un elemento de 9 nodos basado en nuestra formulación.

El elemento standard

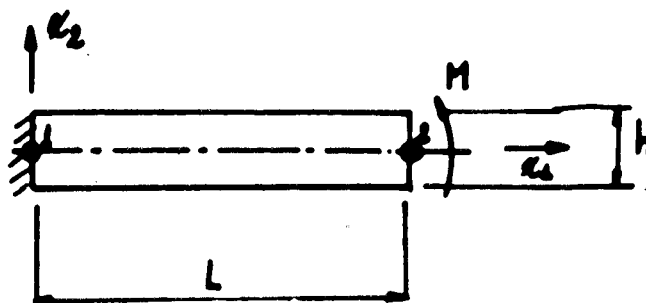
El elemento cuya concepción permite una mayor generalidad (láminas finas y moderadamente gruesas, lineales y no-lineales) es el que fue introducido por Ahmad, Irons

y Zienkiewicz¹⁸ para problemas lineales, y extendido a problemas no-lineales por Ramm¹⁹, Bathe y Bolourchi³ y otros.

Este elemento presenta el problema fundamental del bloqueo (locking) debido a las tensiones de corte transversales^{8, 9} y en elementos curvos también bloqueo debido a las tensiones de membrana¹⁰.

Para ilustrar el fenómeno de bloqueo debido a las tensiones de corte transversales consideraremos un elemento de viga basado en la formulación de Ahmad, Irons y Zienkiewicz, modelo numérico que corresponde al modelo matemático de la viga de Timoshenko (modelo en el que se incluyen deformaciones por corte). Es importante destacar que si bien el ejemplo de una viga sirve para ilustrar el problema numérico de bloqueo, el análisis de este problema en elementos de lámina es mucho más complejo que el análisis en el caso de elementos de viga y por lo tanto la solución del problema es también mucho más compleja en el caso de elementos de lámina que en el caso de elementos de viga.

Bloqueo debido a las tensiones de corte transversales en el elemento standard.



NOMENCLATURA:

- u_L^k : desplazamiento del nodo k en la dirección i .
- θ^k : rotación en el nodo k .
- E : módulo de Young del material.
- G : módulo de corte del material.
- b : ancho de la viga.

Figura 1. Viga sometida a un momento flexor constante.

Para la viga elástica lineal de la Fig. 1, el funcional de la Energía Potencial^{8, 12} es:

$$\pi = \frac{EI}{2} \left[\int_0^L (\theta_{,1})^2 dx_1 + \alpha \int_0^L \frac{1}{L^2} (u_{2,1} - \theta)^2 dx_1 \right] - M\theta^2 \quad (1)$$

donde,

$$\alpha = \frac{12Gk}{E} \left(\frac{L}{h} \right)^2$$

siendo $I = bh^3/12$ el momento de inercia de la sección y k el factor de corrección de la energía elástica de corte⁸.

Es evidente de (1) que $\alpha \rightarrow \infty$ cuando $(h/L) \rightarrow 0$, es decir que para elementos de viga muy delgados, la segunda integral de la ecuación (1) actúa como un término de penalización para imponer la condición,

$$\gamma = u_{2,1} - \theta \equiv 0 \quad (2)$$

Si sobre esta viga imponemos las rotaciones que corresponden a la solución analítica (curvatura constante), la satisfacción de $\gamma \equiv 0$ impone el cumplimiento de (2) en los dos puntos de integración de Gauss sobre el eje de la viga.

$$\frac{u_2^2}{L} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \theta^2 = 0 \quad (3.a)$$

$$\frac{u_2^2}{L} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \theta^2 = 0$$

El sistema de ecuaciones (3.a) sólo admite solución para $\theta^2 = 0$, en cuyo caso $u_2^2 = 0$.

En efecto, usando en (1) la condición de equilibrio $\delta\pi=0$, obtenemos, (ver Ref. 4),

$$\frac{\theta_{(MEF)}^2}{\theta_{(AN)}^2} = \frac{1}{1 + \frac{Gk}{E} \left(\frac{L}{h} \right)^2} \quad (3.b)$$

lo que demuestra que para elementos muy finos, es decir $L/h \rightarrow \infty$, $\theta_{(MEF)}^2/\theta_{(AN)}^2 \rightarrow 0$.

El problema numérico de bloqueo aparece debido a que la condición $\gamma \equiv 0$ no puede ser representada por las funciones de interpolación del elemento.

En este punto entendemos importante realizar dos reflexiones.

Primero, la severidad del problema de bloqueo está relacionada con la relación (h/l) de cada elemento, y no de la estructura que se analiza⁹.

Segundo, en el análisis de láminas delgadas, en que las deformaciones por corte son en general despreciables, más importante que una exacta representación de dichas deformaciones es el mantenimiento de la idea fundamental del elemento de Ahmad, Irons y Zienkiewicz: la continuidad en C^0 (es decir, la interpolación independiente de desplazamientos y rotaciones).

Bloqueo debido a las tensiones membranales en los elementos curvos standard.

Para la viga circular de la Fig. 2, el funcional de la Energía Potencial es,

$$\pi = \frac{EI}{2} \left[\int_0^L \theta_{,s} ds + \alpha_M \int_0^L u_{2,s}^2 ds + \alpha_s \int_0^L (u_{n,s} - \theta)^2 ds \right] - M\theta^2 \quad (4)$$

donde L es la longitud del arco de viga, s es la dirección tangencial a su eje y n es la dirección normal al mismo.

Dado que $\alpha_M = 12/h^2$ y $\alpha_s = 12Gk/h^2$, es evidente que cuando la viga es muy delgada, las integrales segunda y tercera de (4) actúan como términos de penalización para imponer las condiciones,

$$\tilde{\epsilon}_{ss} = u_{s,s} \equiv 0 \quad (5.a)$$

$$\gamma_{ns} = u_{n,s} - \theta \equiv 0 \quad (5.b)$$

es decir, deformaciones membranales y de corte nulas.

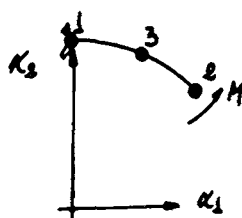


Figura 2. Viga curva sometida a un momento flexor constante.

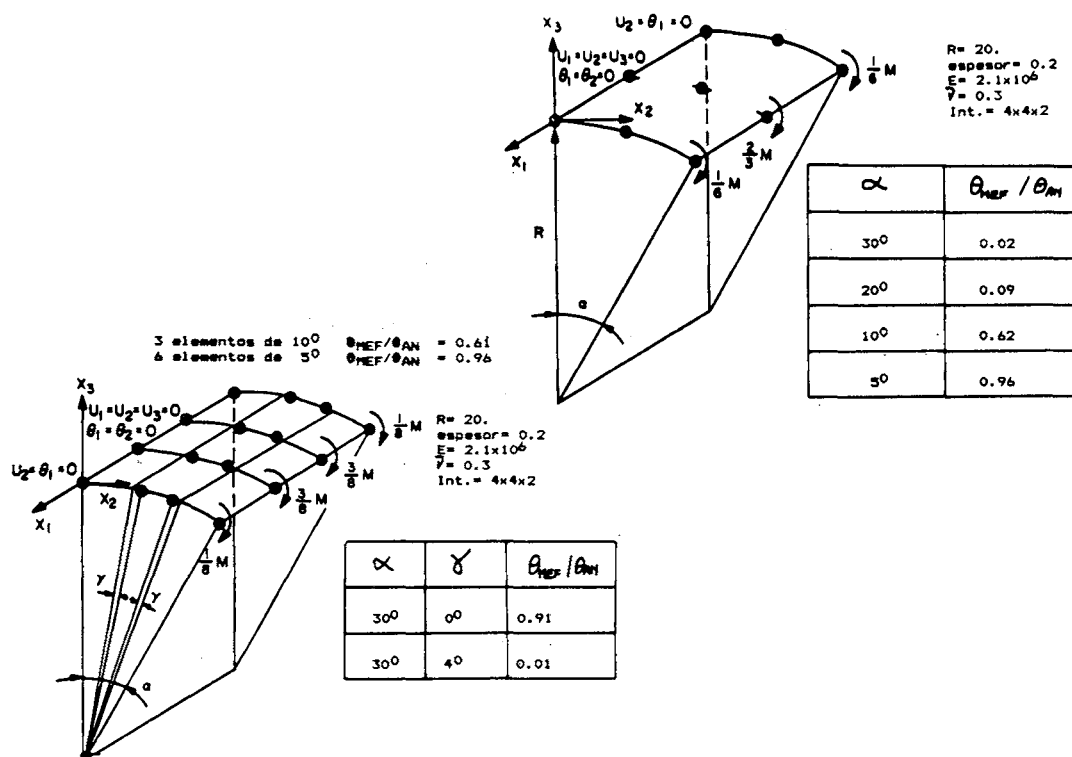


Figura 3. Análisis de una viga curva usando elementos isoparamétricos de lámina standard.

En la viga de 3 nodos de la Fig. 2, si imponemos las rotaciones θ^i ($i=1,2,3$) correspondientes a la solución analítica, y las condiciones (5.a) y (5.b) en los tres puntos de integración de Gauss que están sobre su eje, obtenemos un sistema de 6 ecuaciones con 4 incógnitas u_i^k para $k=2,3$; $i=1,2$ que no puede ser resuelto, demostrando así el bloqueo combinado corte/membranal.

En la Fig. 3 presentamos resultados correspondientes al análisis de una viga curva usando los elementos standard de 9 y 16 nodos; resultados donde se pone de manifiesto, claramente, el comentado efecto de bloqueo^{4, 9}.

Remedios para el bloqueo

Se ha observado que cuando en la integración de las matrices de rigidez de los elementos se utiliza integración numérica reducida o selectiva²⁰ el problema de bloqueo desaparece. Sin embargo, en general, actuando de esta forma introducimos en los elementos de lámina modos rígidos espúreos^{8, 9}.

Estos modos rígidos espúreos representan una característica no deseable de los elementos, especialmente en problemas no lineales.

Por lo tanto, es necesario buscar otra forma de solución para el problema de bloqueo, una **formulación controlada** que no introduzca efectos indeseables en los elementos.

ELEMENTOS DE LÁMINA BASADOS EN LA INTERPOLACIÓN MIXTA DE COMPONENTES TENSORIALES

Con el objeto de lograr elementos generales de lámina que satisfagan los criterios expuestos en la Sección II, hemos desarrollado una formulación basada en la interpolación mixta de componentes tensoriales.

En la presente Sección comentaremos los dos elementos que hasta ahora hemos desarrollado usando dicha formulación.

Nuestro elemento de 4 nodos (MITC4)

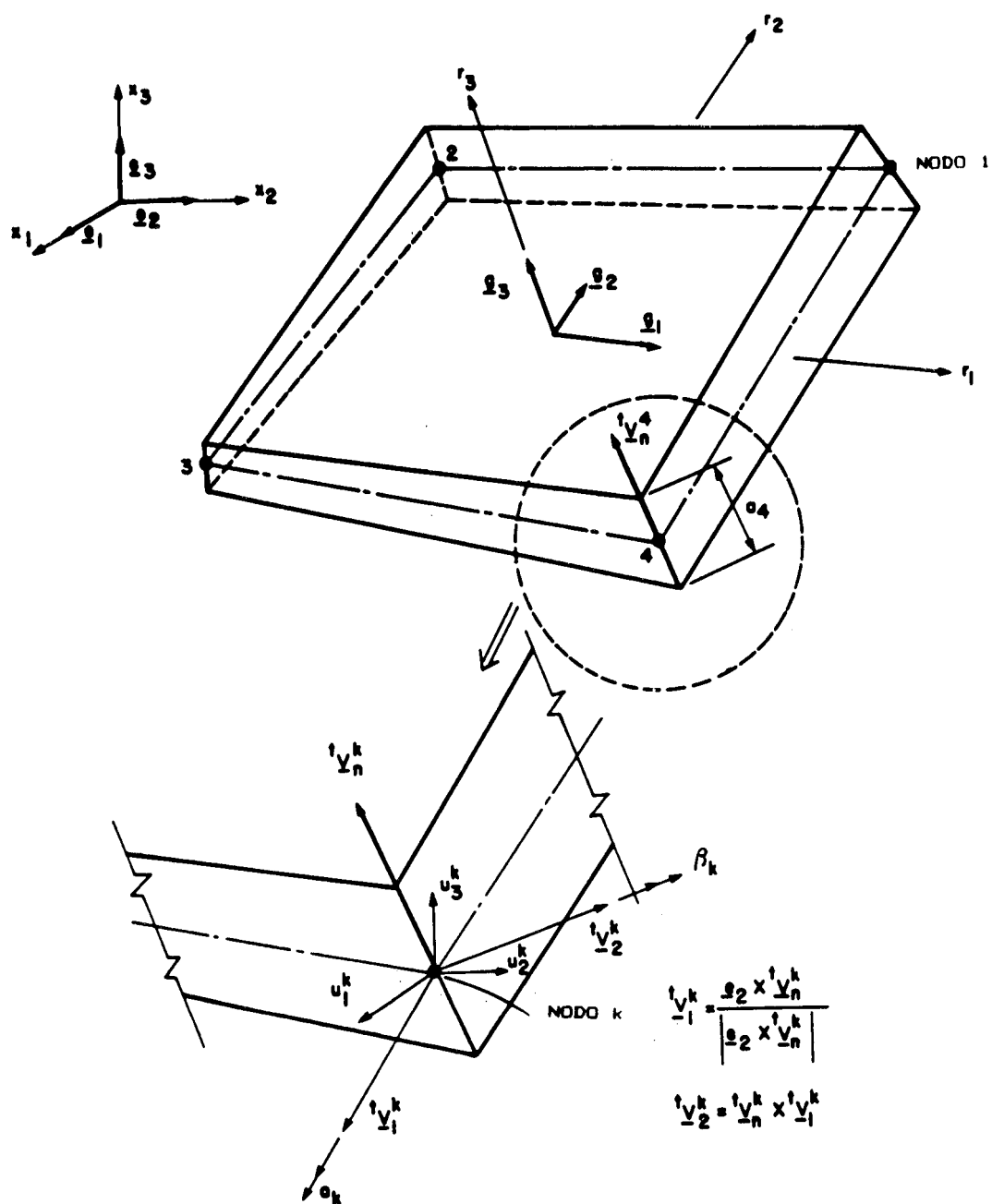
Formulación del elemento

El elemento MITC4 ha sido desarrollado en detalle en las Refs. (4 y 6).

El MITC4 está basado en el elemento de Ahmad, Irons y Zienkiewicz con las deformaciones membranales y de flexión calculadas en la forma usual, a partir de la interpolación de desplazamientos/rotaciones; pero con las deformaciones de corte transversales interpoladas con una función de interpolación especial.

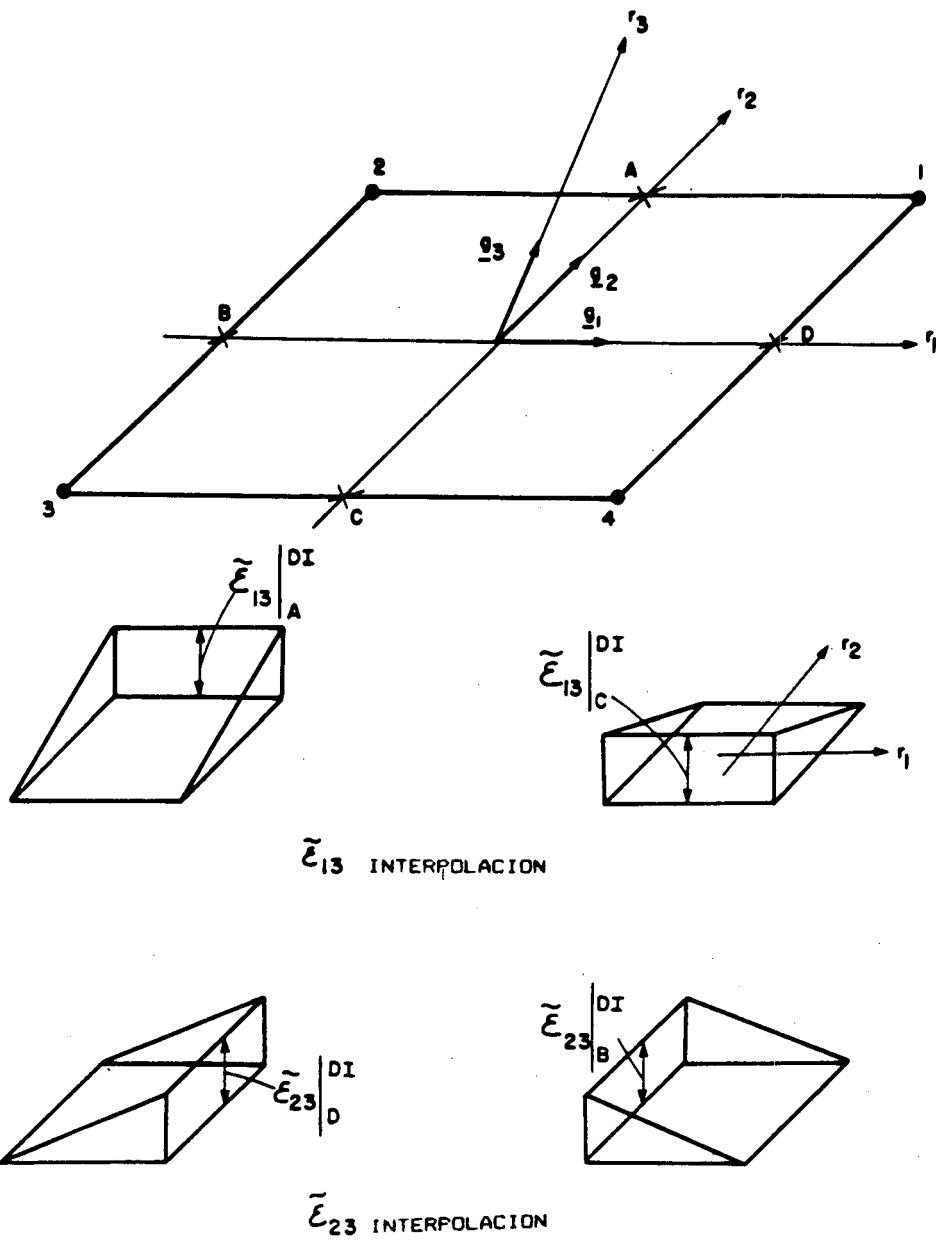
Enfoques relacionados con el nuestro fueron usados por MacNeal²¹ y Hughes-Tezduyar²² para desarrollar elementos lineales de placa y por Wempner, Talaslidis y Hwang²³ para desarrollar un elemento de lámina. La Fig. 4 muestra esquemáticamente el elemento en cuestión, los grados de libertad nodales y la interpolación para las deformaciones de corte transversales:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{13} &= \frac{1}{2}(1 + r_2) \tilde{\epsilon}_{13} \bigg|_A^{DI} + \frac{1}{2}(1 - r_2) \tilde{\epsilon}_{13} \bigg|_C^{DI} \\ \tilde{\epsilon}_{23} &= \frac{1}{2}(1 + r_1) \tilde{\epsilon}_{23} \bigg|_D^{DI} + \frac{1}{2}(1 - r_1) \tilde{\epsilon}_{23} \bigg|_B^{DI} \end{aligned} \quad (6)$$



a) Descripción del elemento.

Figura 4. Elemento de 4 nodos (MITC4)



b) Funciones de interpolación para las deformaciones de corte transversales.

Figura 4. (continuación)

Para poder tratar elementos no-planos, en la Ec. (6) hemos interpolado las componentes ccvariantes del tensor de deformaciones, medidas en la terna convectiva del elemento¹⁷.

En la Ec. (6), las variables $\tilde{\epsilon}_{ij} \Big|_{A, B, C, D}^{DI}$ son las componentes de deformación en los puntos A,B,C,D calculadas directamente a partir de la interpolación de desplazamientos/rotaciones. En nuestra notación, el superíndice "DI" significa **interpolación directa de los desplazamientos y giros nodales**. Por lo tanto estas variables son eliminadas de la Ec. (6), expresándolas en función de los grados de libertad nodales.

En la terna convectiva, las ecuaciones correspondientes a la configuración en el instante (nivel de cargas) $t + \Delta t$, son derivadas del Principio de los Trabajos Virtuales⁸,

$$\int_{\circ V} {}^{t+\Delta t} \tilde{S}^{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \tilde{\epsilon}_{ij} \circ dV = {}^{t+\Delta t} R_{\phi} \quad (7)$$

donde los ${}^{t+\Delta t} \tilde{S}^{ij}$ son las componentes contravariantes del 2do. tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff; los ${}^{t+\Delta t} \tilde{\epsilon}_{ij}$ son las componentes covariantes del tensor de deformaciones de Green-Lagrange; la integración es calculada sobre el volumen original, $\circ V$, del elemento y ${}^{t+\Delta t} R_{\phi}$ es el trabajo virtual de las fuerzas exteriores.

Podemos realizar las siguientes observaciones:

- * El elemento que hemos desarrollado es un elemento general, no-lineal de lámina, (hemos usado en su planteo la formulación total de Lagrange⁸), la única limitación existente es la de pequeñas deformaciones. Elementos lineales de lámina y placa⁶ pueden ser obtenidos como casos particulares.
- * El elemento no presenta ni bloqueo ni modos rígidos espúreos y es aceptablemente insensible a las distorsiones de la malla.
- * Para evaluar las matrices del elemento se usa integración numérica de Gauss de 2×2 en la superficie media del elemento; para materiales elástico-lineales 2 puntos de integración de Gauss (3 de Newton-Cotes) son usados en el espesor. En placas la integración en el espesor fue realizada en forma analítica⁶. Para materiales no lineales, consideraciones de exactitud pueden llevar al uso de más puntos de integración.

Verificación del elemento

La prueba de la parcela

De acuerdo a lo dicho en la Sección II, el primer paso en la verificación del elemento es demostrar que el mismo satisface las diferentes pruebas de la parcela (en estado de sollicitación membranar, de sollicitación por flexión, etc.).

En las Refs. (4-6) hemos presentado ejemplos numéricos mostrando que nuestro elemento satisface las pruebas de la parcela indicadas en la Fig. 9. Las pruebas correspondientes a estados membranarales se satisfacen obviamente.

En la Ref. (7) hemos demostrado analíticamente que nuestro elemento satisface la prueba de la parcela para un estado de sollicitaciones por flexión. Esta demostración analítica, además de profundizar el entendimiento del elemento, también provee de

pautas sobre los caminos a seguir a fin de desarrollar elementos de orden mayor que también satisfagan las pruebas de la parcela.

Experimentación numérica

En las Refs. (4-6) hemos presentado una ordenada investigación numérica del elemento. La misma demostró que:

- El elemento es consistente²⁴, es decir no presenta modos rígidos espúreos y satisface las pruebas de la parcela.
- El elemento puede aproximar las hipótesis de Kirchhoff-Love para el caso de láminas delgadas (no presenta bloqueo).
- El elemento presenta buena convergencia en los problemas tipo que se utilizan para investigar el comportamiento de elementos de lámina, aun utilizando mallas muy distorsionadas.
- El elemento tiene buen comportamiento en problemas no-lineales simples.
- El elemento da buenos resultados en problemas no-lineales complejos.

En esta comunicación mostramos sólo algunos pocos resultados para ilustrar sobre el comportamiento del MITC4.

$R = 300$
 $L = 600$
 $\phi = 40^\circ$
 espesor = 3.0
 $E = 2.1 \times 10^6$ $\bar{\nu} = 0.0$
 peso específico = 0.208333

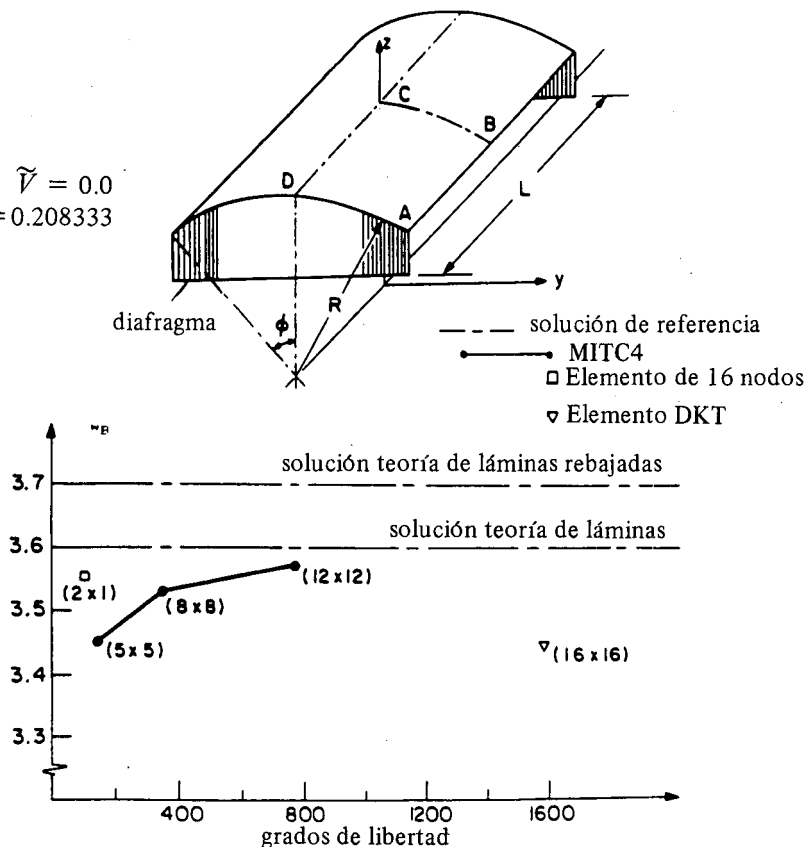
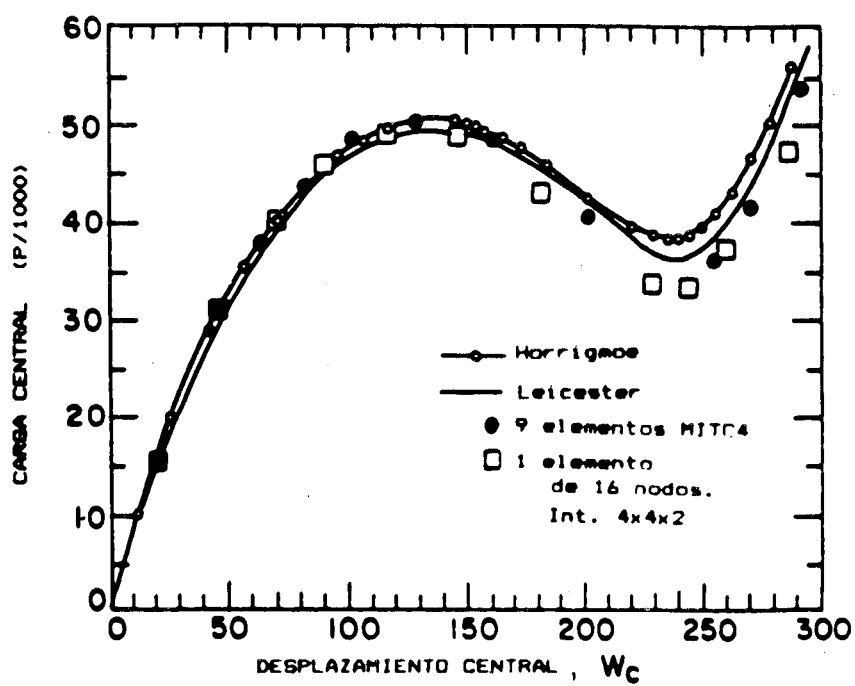
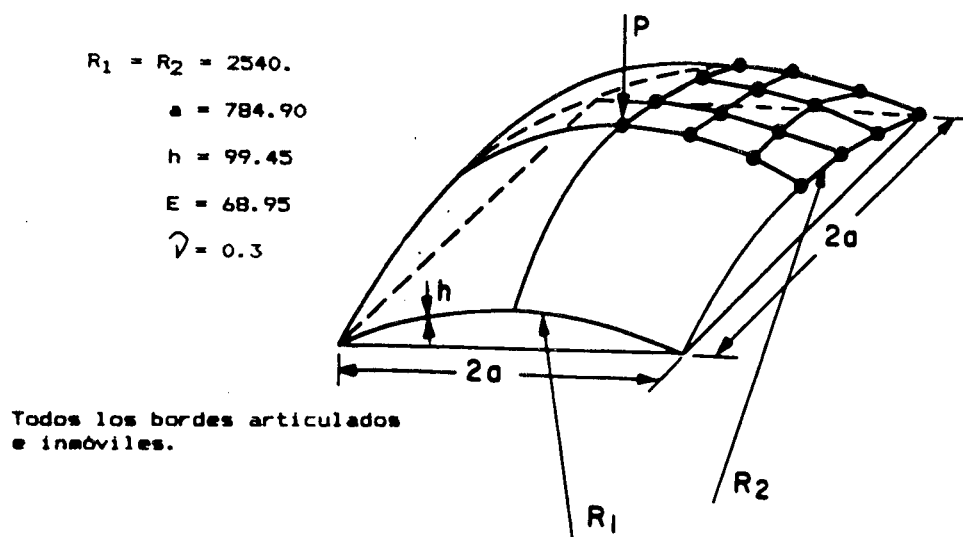
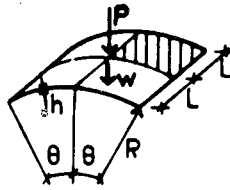


Figura 5. Lámina de Scordelis-Lo (MITC4) Refs. ^{25, 29}



a. Problema de Leicester. Ref.^{26, 27}

Figura 6. Láminas elásticas con grandes desplazamientos.



$R = 2540.$

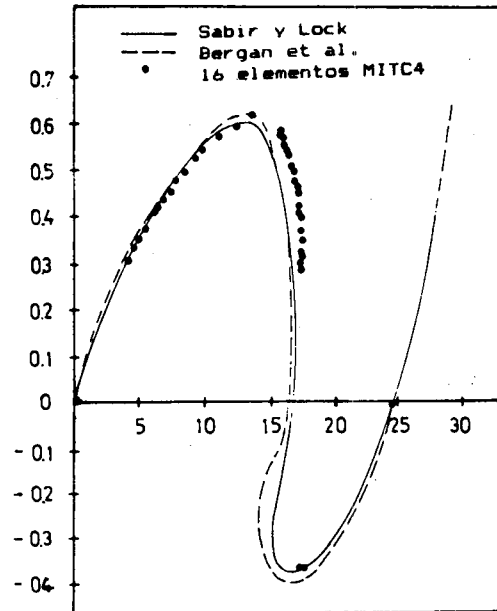
$L = 254.$

espesor $h = 6.35$

$\theta = 0.1 \text{ rad.}$

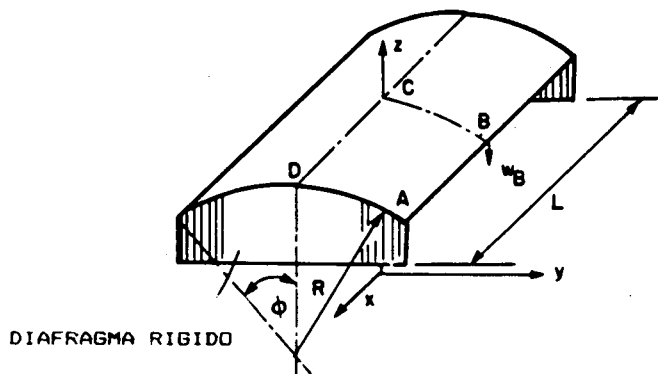
$E = 3.10275$

$\gamma = 0.3$



b. Problema de Sabir y Lock. Refs.^{40, 41}

Figura 6. (continuación)



DIAFRAGMA RIGIDO

$E = 21,000$

$\nu = 0$

$E_T = 0$

$\sigma_y = 4.2$

$L = 15,200$

$R = 7,600$

$\phi = 40^\circ$

espesor $= 76$

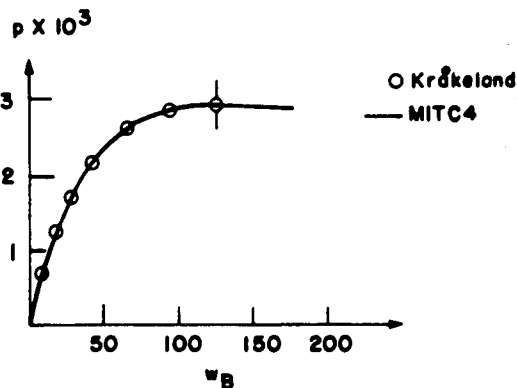


Figura 7. Análisis de una lámina cilíndrica elasto-plástica con grandes desplazamientos/rotaciones. Se usaron 9 elementos MITC4 en el área ABCD. Ref.²⁸;

En la Fig. 5 presentamos los resultados correspondientes a la ya clásica lámina de Scordelis-Lo; en las Figs. 6.a y 6.b los resultados correspondientes a dos láminas elásticas con grandes desplazamientos y en la Fig. 7 el resultado correspondiente a una lámina elástica perfectamente plástica con grandes desplazamientos/rotaciones, para los problemas no lineales hemos utilizado el algoritmo automático descrito en la Sección IV.

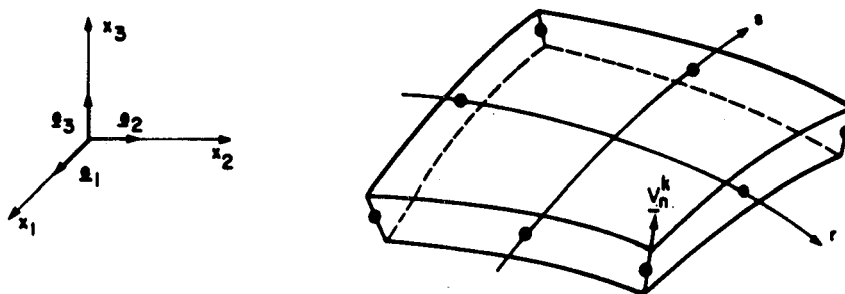
Nuestro elemento de 8 nodos (MITC8)

Formulación del elemento

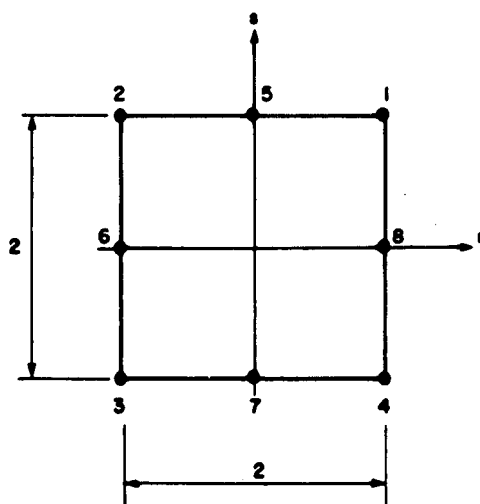
El elemento MITC8 ha sido presentado en detalle en la Ref. (7).

En nuestra búsqueda de mejores elementos de lámina, seguimos aplicando el concepto usado en el desarrollo del elemento de 4 nodos: la interpolación mixta de componentes tensoriales; para desarrollar ahora un elemento curvo de orden mayor.

Estudiando varias posibilidades de interpolación mixta, analítica y numéricamente hemos identificado el elemento de 8 nodos que describimos en esta Sección, ver Fig. 8.

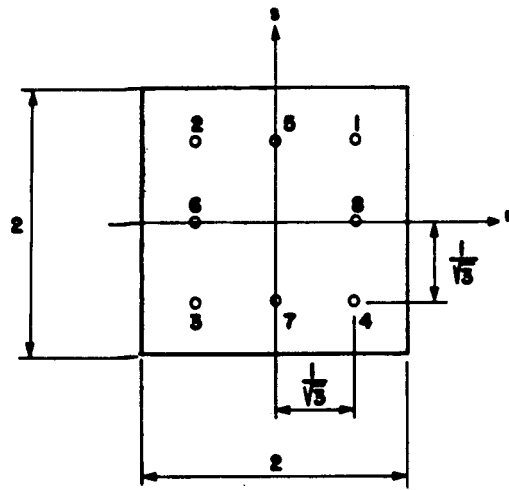


a) Geometría del elemento



b) Nodos usados para interpolar desplazamientos y rotaciones.

Figura 8. Elemento de 8 nodos (MITC8)



c) Puntos usados para interpolar deformaciones de pliego.

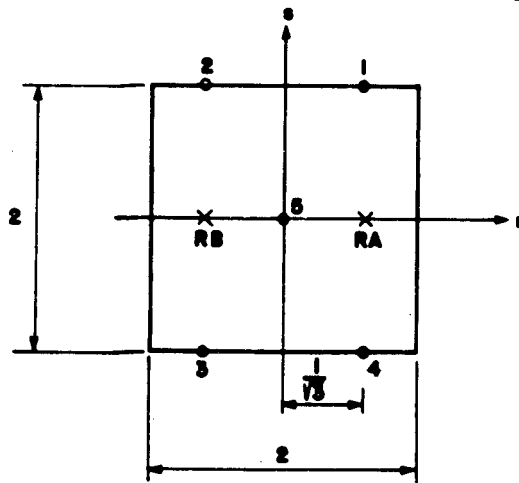
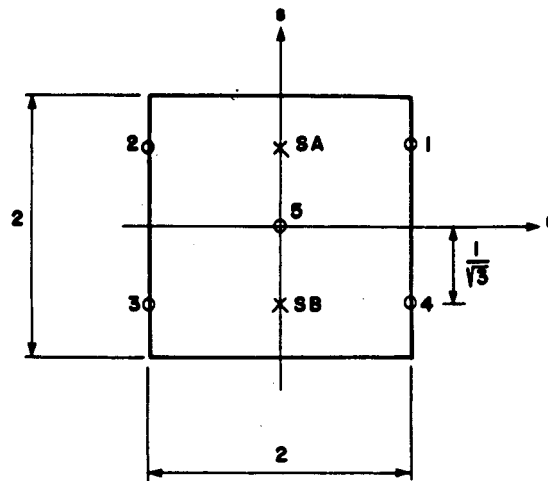
d) Puntos usados para interpolar $\tilde{\epsilon}_{rt}$ $\tilde{g}^r \tilde{g}^t$.e) Puntos usados para interpolar $\tilde{\epsilon}_{st}$ $\tilde{g}^s \tilde{g}^t$.

Figura 8. (continuación)

En cada nodo se usa la misma descripción cinemática del elemento de Ahmad, Irons y Zienkiewicz y del MITC4, es decir vectores directores y 5 grados de libertad^{3, 5, 8}. Por lo tanto la interpolación de desplazamientos/rotaciones es la usual.

Para evitar el bloqueo por corte y el bloqueo por acción membranal, interpolamos en forma independiente las deformaciones membranales en cada pliego del elemento (deformaciones de pliego), y las deformaciones de corte transversales, mediante funciones de interpolación adecuadamente conformadas y relacionamos los coeficientes en estas funciones de interpolación a las deformaciones calculadas a partir de la interpolación desplazamientos/rotaciones.

La interpolación de las deformaciones de pliego describe la acción membranal y la acción por flexión del elemento, en tanto que la interpolación de las deformaciones por corte transversales describe la acción por corte transversal del elemento.

Para formular el elemento general de lámina interpolamos el tensor de deformaciones expresado en término de sus componentes covariantes, $\tilde{\epsilon}_{ij}$, y vectores base contravariantes, $\mathbf{g}^i$, medidos en el sistema de coordenadas convectivas del elemento.

En lo que sigue consideraremos el tensor de deformaciones en un tiempo cualquiera del proceso de deformación. Para la formulación incremental referimos al lector a nuestros trabajos anteriores sobre el tema^{4, 5, 8} y aquí prescindiremos del índice izquierdo, que en la notación que usamos⁸ indica el tiempo que se considera (es decir, $\mathbf{g}_i \equiv {}^t\mathbf{g}_i$). También, en lo que sigue, a los efectos de simplificar la notación usaremos: $\mathbf{g}_r \equiv \mathbf{g}_1$; $\mathbf{g}_s \equiv \mathbf{g}_2$; $\mathbf{g}_t \equiv \mathbf{g}_3$.

El tensor de deformaciones en un punto perteneciente al elemento es:

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon} = & \tilde{\epsilon}_{rr} \mathbf{g}^r \mathbf{g}^r + \tilde{\epsilon}_{ss} \mathbf{g}^s \mathbf{g}^s + \tilde{\epsilon}_{rs} (\mathbf{g}^r \mathbf{g}^s + \mathbf{g}^s \mathbf{g}^r) \\ & \text{-----} \\ & \text{deformaciones de pliego} \\ & + \tilde{\epsilon}_{rt} (\mathbf{g}^r \mathbf{g}^t + \mathbf{g}^t \mathbf{g}^r) + \tilde{\epsilon}_{st} (\mathbf{g}^s \mathbf{g}^t + \mathbf{g}^t \mathbf{g}^s) \\ & \text{-----} \\ & \text{deformaciones de corte transversales} \end{aligned} \quad (8)$$

Debe recordarse que el elemento se construye en base a la hipótesis de espesor constante, medido en la dirección de los vectores directores, lo que implica $\tilde{\epsilon}_{tt} = 0$ ^{4, 5}.

El paso más importante de nuestra formulación es el de encontrar unas funciones de interpolación adecuadas para satisfacer todos los criterios expuestos más arriba, en la forma más ajustada posible.

Nosotros hemos llegado a las siguientes funciones de interpolación:

* Deformaciones de pliego (ver Fig. 8.c)

$$\underline{\epsilon} = \sum_{i=1}^8 h_i^{IS} \underline{\epsilon}_i \quad (9)$$

donde los h_i^{IS} se obtienen de las funciones usuales de interpolación del elemento 8 nodos⁸ (Fig. 5.5), reemplazando r por r/a y s por s/a ; $a=1/\sqrt{3}$.

Para $i=1, 2, 3$ y 4

$$\underline{\epsilon}|_i = \tilde{\epsilon}_{rr} \mathbf{g}^r \mathbf{g}^r|_i^{\text{DI}} + \tilde{\epsilon}_{ss} \mathbf{g}^s \mathbf{g}^s|_i^{\text{DI}} + \tilde{\epsilon}_{rs} (\mathbf{g}^r \mathbf{g}^s + \mathbf{g}^s \mathbf{g}^r)|_i^{\text{DI}} \quad (10)$$

Para $i = 5$ y 7 ,

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon}|_5 = & \tilde{\epsilon}_{ss} \bar{\mathbf{g}}^s \bar{\mathbf{g}}^s|_5^{\text{DI}} + \left\{ \bar{\mathbf{g}}_r \cdot \left[\frac{1}{2} (\underline{\epsilon}|_1^{\text{DI}} + \underline{\epsilon}|_2^{\text{DI}}) \right] \cdot \bar{\mathbf{g}}_r \right\} \bar{\mathbf{g}}^r \bar{\mathbf{g}}^r|_5^{\text{DI}} \\ & + \left\{ \bar{\mathbf{g}}_r \cdot \left[\frac{1}{2} (\underline{\epsilon}|_1^{\text{DI}} + \underline{\epsilon}|_2^{\text{DI}}) \right] \cdot \bar{\mathbf{g}}_s \right\} (\bar{\mathbf{g}}^r \bar{\mathbf{g}}^s + \bar{\mathbf{g}}^s \bar{\mathbf{g}}^r)|_5^{\text{DI}} \end{aligned} \quad (11.a)$$

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon}|_7 = & \tilde{\epsilon}_{ss} \bar{\mathbf{g}}^s \bar{\mathbf{g}}^s|_7^{\text{DI}} + \left\{ \bar{\mathbf{g}}_r \cdot \left[\frac{1}{2} (\underline{\epsilon}|_3^{\text{DI}} + \underline{\epsilon}|_4^{\text{DI}}) \right] \cdot \bar{\mathbf{g}}_r \right\} \bar{\mathbf{g}}^r \bar{\mathbf{g}}^r|_7^{\text{DI}} \\ & + \left\{ \bar{\mathbf{g}}_r \cdot \left[\frac{1}{2} (\underline{\epsilon}|_3^{\text{DI}} + \underline{\epsilon}|_4^{\text{DI}}) \right] \cdot \bar{\mathbf{g}}_s \right\} (\bar{\mathbf{g}}^r \bar{\mathbf{g}}^s + \bar{\mathbf{g}}^s \bar{\mathbf{g}}^r)|_7^{\text{DI}} \end{aligned}$$

donde,

$$\bar{\mathbf{g}}_r = \mathbf{g}_r - (g_{rs}/g_{ss}) \mathbf{g}_s; \bar{\mathbf{g}}^s = \mathbf{g}_s; \bar{\mathbf{g}}_t = \mathbf{g}_t$$

Los vectores indicados arriba se han construido de forma de que $\bar{\mathbf{g}}_r$ y $\bar{\mathbf{g}}_s$ estén en el plano definido por $\mathbf{g}_r$ y $\mathbf{g}_s$ y además sean ortogonales.

Para $i = 6$ y 8 , usamos en la Ec. (9):

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon}|_6 = & \tilde{\epsilon}_{rr} \bar{\mathbf{g}}^r \bar{\mathbf{g}}^r|_6^{\text{DI}} + \left\{ \bar{\mathbf{g}}_s \cdot \left[\frac{1}{2} (\underline{\epsilon}|_2^{\text{DI}} + \underline{\epsilon}|_3^{\text{DI}}) \right] \cdot \bar{\mathbf{g}}_s \right\} \bar{\mathbf{g}}^s \bar{\mathbf{g}}^s|_6^{\text{DI}} \\ & + \left\{ \bar{\mathbf{g}}_r \cdot \left[\frac{1}{2} (\underline{\epsilon}|_2^{\text{DI}} + \underline{\epsilon}|_3^{\text{DI}}) \right] \cdot \bar{\mathbf{g}}_s \right\} (\bar{\mathbf{g}}^r \bar{\mathbf{g}}^s + \bar{\mathbf{g}}^s \bar{\mathbf{g}}^r)|_6^{\text{DI}} \end{aligned} \quad (12.a)$$

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon}|_8 = & \tilde{\epsilon}_{rr} \bar{\mathbf{g}}^r \bar{\mathbf{g}}^r|_8^{\text{DI}} + \left\{ \bar{\mathbf{g}}_s \cdot \left[\frac{1}{2} (\underline{\epsilon}|_1^{\text{DI}} + \underline{\epsilon}|_4^{\text{DI}}) \right] \cdot \bar{\mathbf{g}}_s \right\} \bar{\mathbf{g}}^s \bar{\mathbf{g}}^s|_8^{\text{DI}} \\ & + \left\{ \bar{\mathbf{g}}_r \cdot \left[\frac{1}{2} (\underline{\epsilon}|_1^{\text{DI}} + \underline{\epsilon}|_4^{\text{DI}}) \right] \cdot \bar{\mathbf{g}}_s \right\} (\bar{\mathbf{g}}^r \bar{\mathbf{g}}^s + \bar{\mathbf{g}}^s \bar{\mathbf{g}}^r)|_8^{\text{DI}} \end{aligned} \quad (12.b)$$

donde,

$$\bar{\mathbf{g}}_r = \mathbf{g}_r; \bar{\mathbf{g}}_s = \mathbf{g}_s - (g_{rs}/g_{rr}) \mathbf{g}_r; \bar{\mathbf{g}}_t = \mathbf{g}_t$$

La ec. (9) es una interpolación de componentes tensoriales, desarrollada de modo que sea satisfecha la prueba de la parcela en sollicitación membranal (para elementos con lados rectos y nodos intermedios ubicados en el centro geométrico de cada lado), y en elementos no planos sea evitado el bloqueo por acción membranal. Todo ello, desde ya, sin introducir modos rígidos espúreos en el elemento.

* Deformaciones de corte transversales (ver Fig. 8.d y e).

$$\tilde{\epsilon}_{rt} \mathbf{g}^r \mathbf{g}^t = \sum_{i=1}^4 h_i^{\text{RT}} \tilde{\epsilon}_{rt} \mathbf{g}^r \mathbf{g}^t|_i^{\text{DI}} + h_5^{\text{RT}} \left[\frac{1}{2} (\tilde{\epsilon}_{rt}|_{\text{RA}}^{\text{DI}} + \tilde{\epsilon}_{rt}|_{\text{RB}}^{\text{DI}}) \right] \mathbf{g}^r \mathbf{g}^t|_5^{\text{DI}} \quad (13)$$

donde, las h_i^{RT} se obtienen de las funciones de interpolación serendípticas reemplazando r por r/a y $a = 1/\sqrt{3}$.

De la misma forma,

$$\tilde{\epsilon}_{st} \mathbf{g}^s \mathbf{g}^t = \sum_{i=1}^4 h_i^{ST} \tilde{\epsilon}_{st} \mathbf{g}^s \mathbf{g}^t \Big|_i^{DI} + h_5^{ST} \left[\frac{1}{2} (\tilde{\epsilon}_{st} \Big|_{SA}^{DI} + \tilde{\epsilon}_{st} \Big|_{SB}^{DI}) \right] \mathbf{g}^s \mathbf{g}^t \Big|_5^{DI} \quad (14)$$

donde, las h_i^{st} se obtienen de las funciones de interpolación serendípicas reemplazando s por s/a y $a = 1/\sqrt{3}$.

Las Ecs. (13) y (14) corresponden a una interpolación de componentes tensoriales, desarrollada de modo que el bloqueo por acción de corte transversal sea evitado y la prueba de la parcela, en sollicitación por flexión, sea satisfecha sin introducir modos rígidos espúreos en el elemento.

Podemos realizar las siguientes observaciones:

- * El elemento que hemos presentado es un elemento general, no-lineal, de lámina; (hemos usado en su planteo la formulación total de Lagrange⁸), la única limitación existente es la de pequeñas deformaciones. Elementos lineales de lámina y placa pueden ser obtenidos como casos particulares.
- * El elemento no presenta ni bloqueo ni modos rígidos espúreos y es aceptablemente insensible a las distorsiones de la malla.
- * Para evaluar las matrices del elemento se usa integración numérica de Gauss de 3×3 en la superficie media del elemento; para materiales elástico lineales 2 puntos de integración de Gauss (3 de Newton-Cotes) son usados en el espesor. Para materiales no-lineales, consideraciones de exactitud pueden llevar al uso de más puntos de integración.

Comprobación del elemento

La prueba de la parcela

Tal como lo hicimos en el caso del elemento MITC4, comenzamos verificando que nuestro elemento de 8 nodos satisfaga las diferentes pruebas de la parcela.

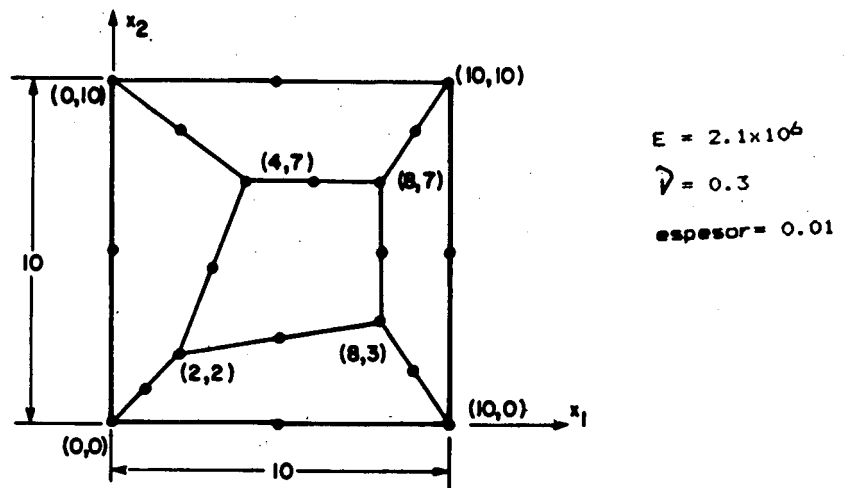
Las pruebas indicadas en la Fig. 9 son todas satisfechas exactamente.

Sin embargo, pequeños errores en los resultados correspondientes a desplazamientos y tensiones, aparecen cuando los lados de los elementos son curvos o cuando los nodos intermedios no se ubican en el centro geométrico de los lados.

Experimentación numérica

En la Ref. (7) hemos presentado una ordenada verificación numérica del elemento. La misma demostró que:

- a) El elemento es consistente²⁴ es decir nunca presenta modos rígidos espúreos y pasa la prueba de la parcela, bajo las restricciones indicadas arriba.
- b) El elemento no presenta bloqueos ni membranal ni por corte transversal.
- c) El elemento presenta buena convergencia en los problemas tipo que se utilizan para investigar el comportamiento de elementos de lámina, aun utilizando mallas muy distorsionadas.
- d) El elemento presenta un buen comportamiento en el campo no-lineal.



PARCELA DE ELEMENTOS CONSIDERADA

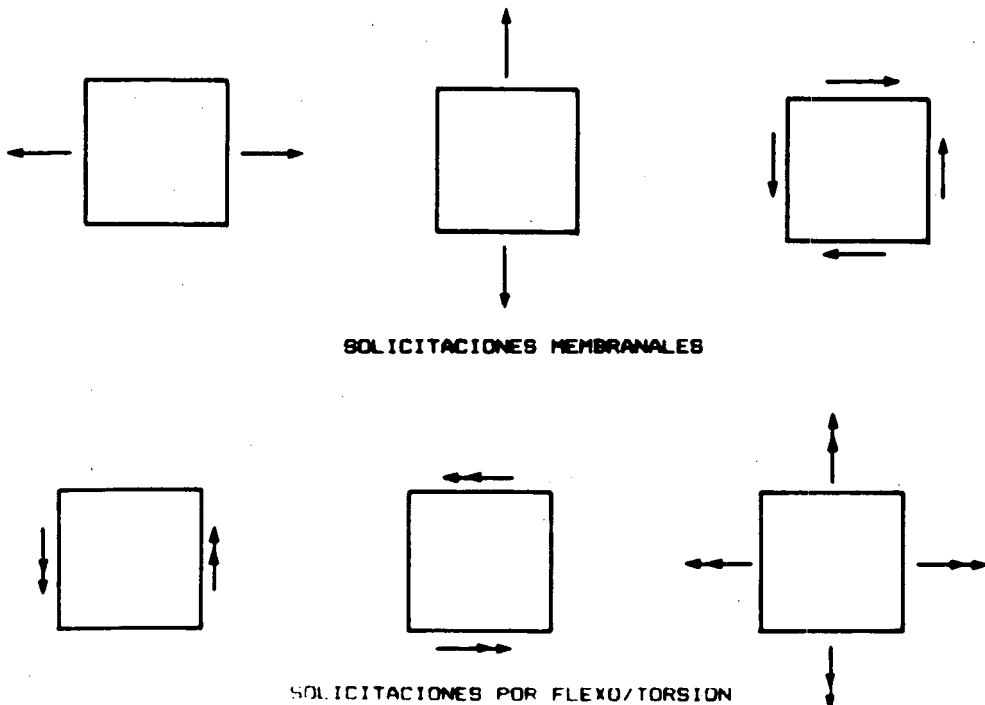


Figura 9. Pruebas de la parcela. Para el elemento de 4 nodos los nodos intermedios sobre los lados no están definidos.

En esta comunicación presentaremos sólo algunos resultados para ilustrar sobre el comportamiento del MITC8.

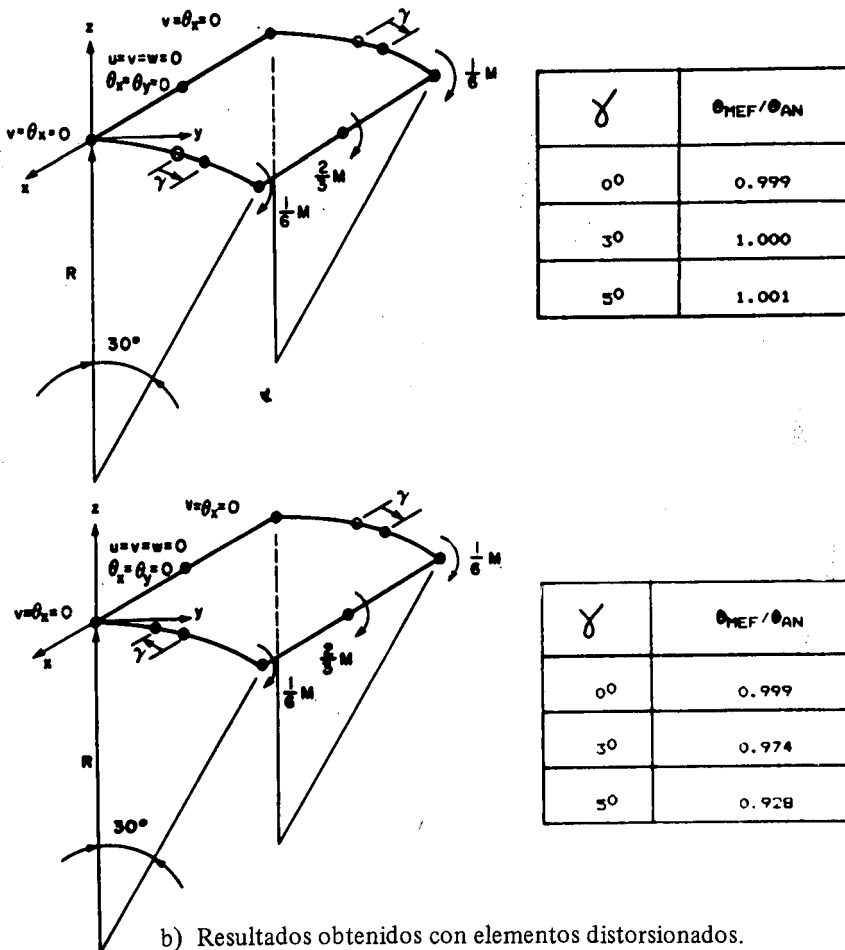
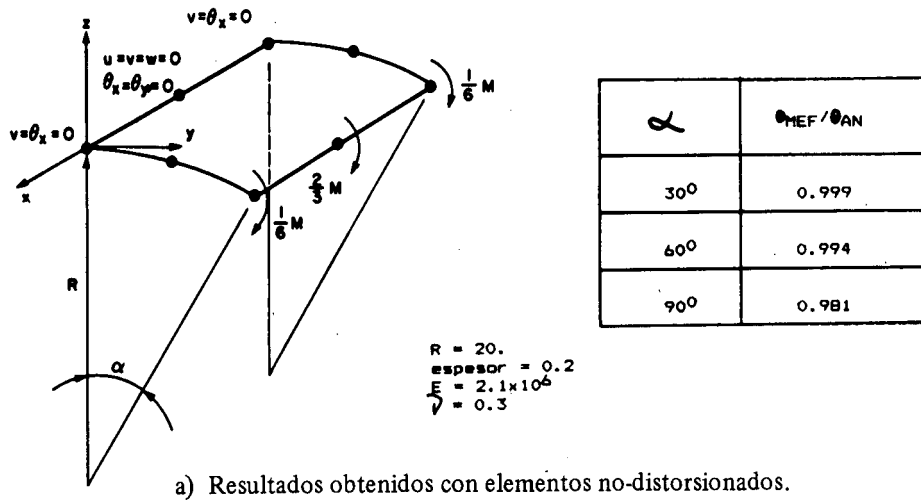


Figura 10. Análisis de una viga curva usando elementos MITC8.

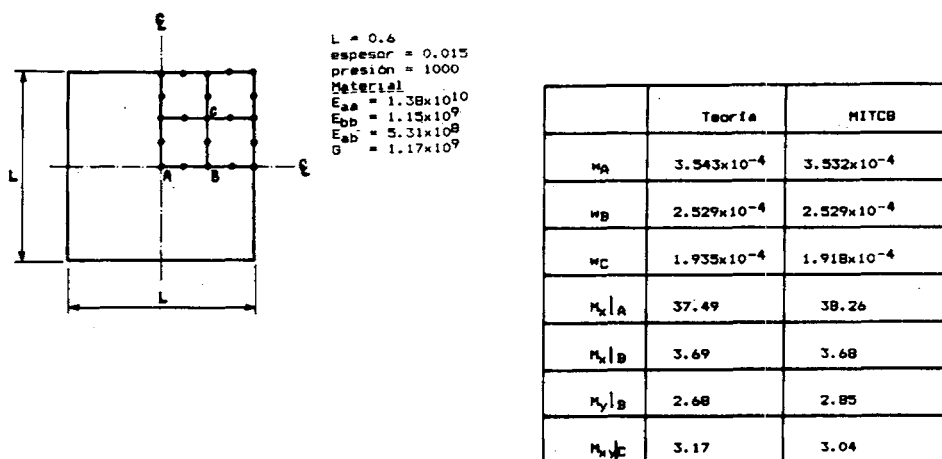
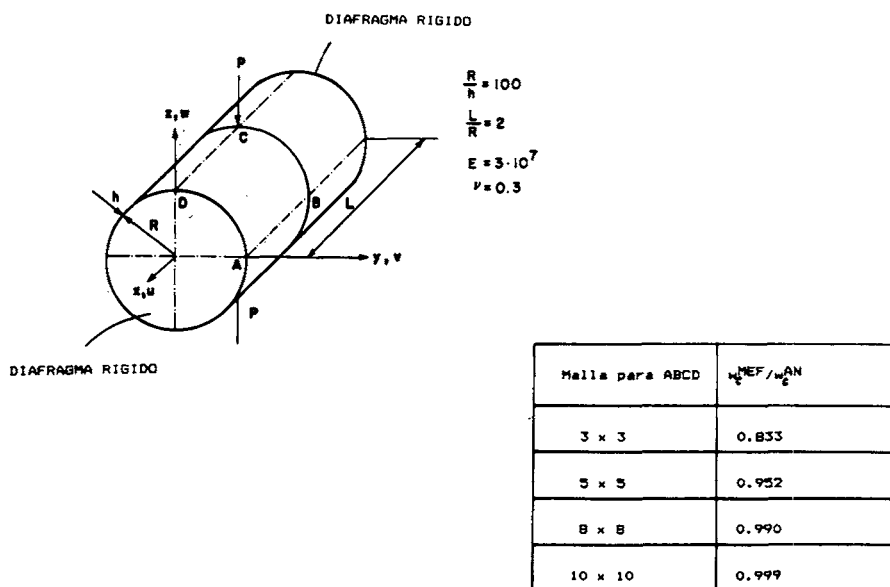
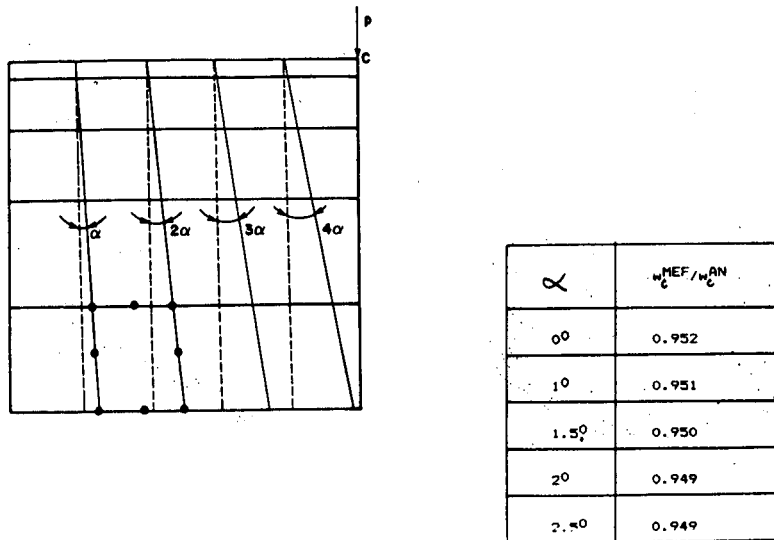


Figura 11. Análisis de una placa ortótropa simplemente apoyada sometida a una presión uniforme. Ref.²⁹



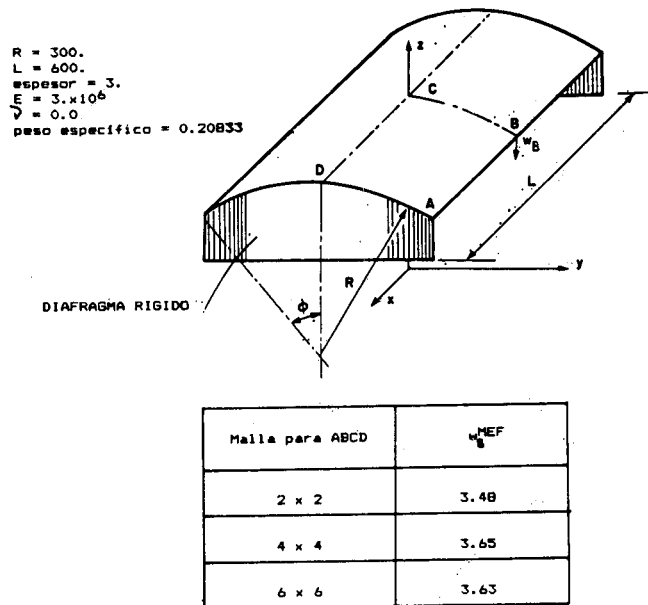
a) Resultados obtenidos con elementos no distorsionados.

Figura 12. Análisis de un cilindro sometido a cargas concentradas. Ref.³⁰.



b) Resultados obtenidos con elementos distorsionados.

Figura 12. (continuación)



Solución analítica $w_s = 3.6$ Ref./25/

Figura 13. Lámina de Scordelis-Lo (MITC8).

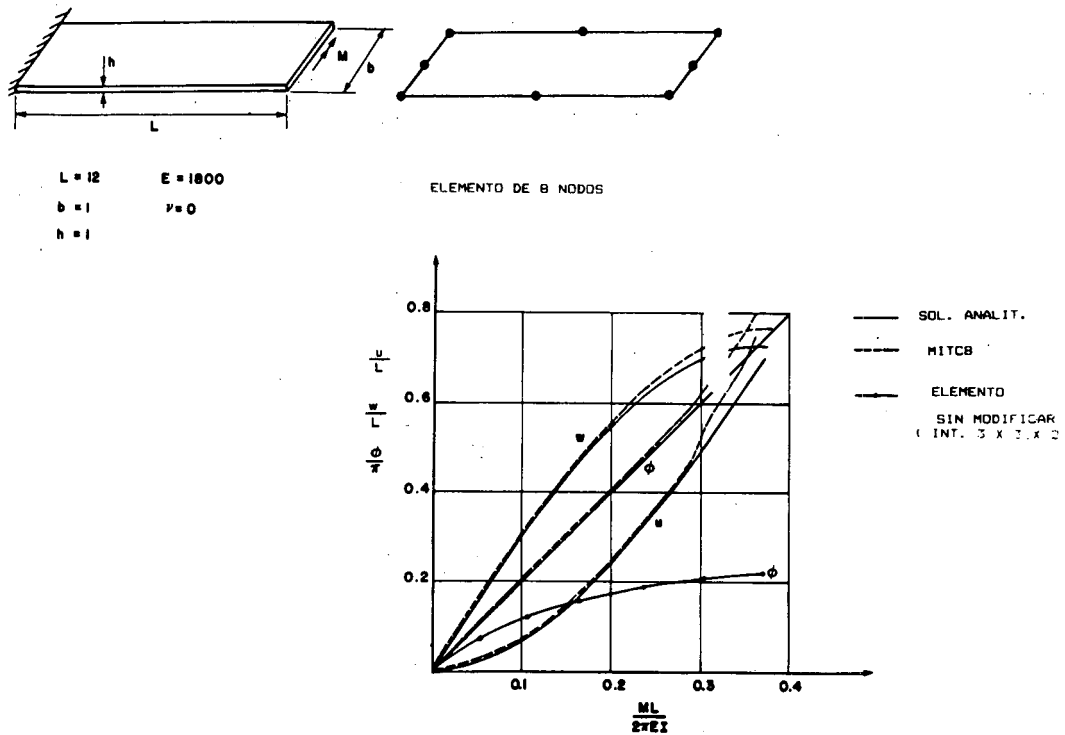


Figura 14. Análisis de una viga con grandes desplazamientos/rotaciones.

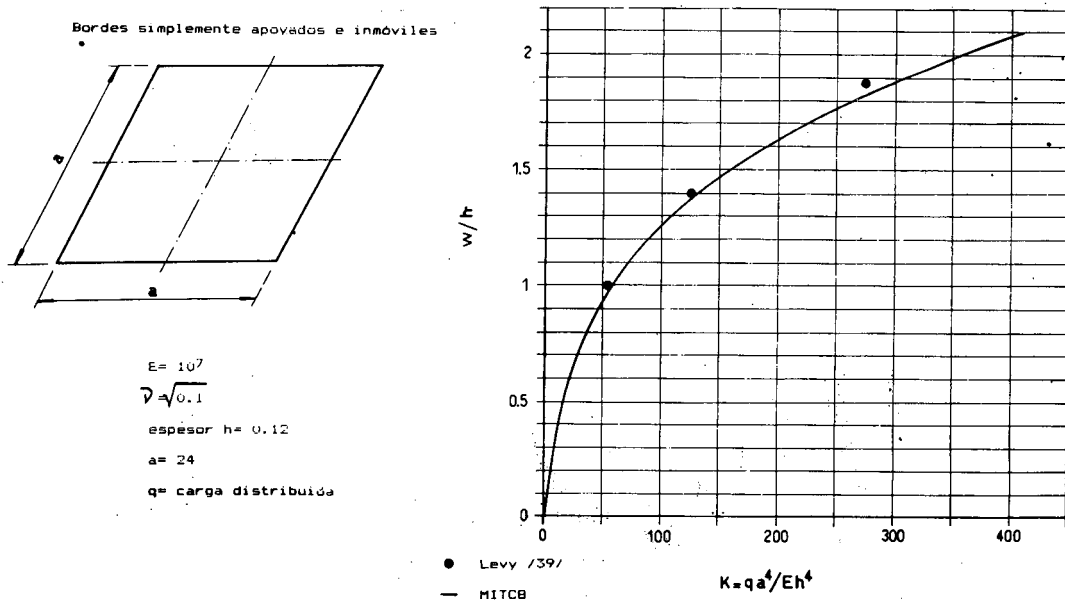


Figura 15. Placa simplemente apoyada. Se usaron cuatro MITC8 para modelar un cuarto de la placa.

En la Fig. 10 se presenta el resultado correspondiente a la flexión de una viga curva usando elementos no distorsionados y distorsionados (comparar con el resultado presentado en la Fig. 3); en la Fig. 11 se presenta el resultado correspondiente a una placa de material ortótropo en régimen lineal; en la Fig. 12 se presenta el resultado correspondiente a un cilindro con cargas radiales concentradas, los resultados presentados fueron obtenidos utilizando mallas no distorsionadas y mallas distorsionadas; en la Fig. 13 se presenta el resultado correspondiente a la lámina de Scordelis-Lo y en la Fig. 14 se presenta el resultado correspondiente a la flexión de una viga elástica, con grandes desplazamientos/rotaciones. En dicha figura hemos incluido junto a los resultados correspondientes al MITC8 los del elemento isoparamétrico sin modificar de 8 nodos con "integración completa". Si bien en el campo lineal este último elemento produce resultados exactos, en el campo no-lineal sufre el problema de bloqueo. Por último en la Fig. 15 se indica el resultado correspondiente a una placa elástica con grandes desplazamientos, resultado obtenido empleando el algoritmo automático descrito en la Sección IV.

SOLUCION DEL PROBLEMA NO-LINEAL

En la solución por elementos finitos de estructuras laminares en régimen no-lineal, es tan importante la formulación del elemento de lámina como la formulación de algoritmos adecuados para poder resolver las ecuaciones resultantes.

En la presente Sección sólo comentaremos brevemente sobre los distintos algoritmos que utilizamos; para una descripción detallada de los mismos remitimos al lector a las Refs^{4, 8, 31 y 32}.

La ecuación que se debe satisfacer en la posición de equilibrio correspondiente a un instante (nivel de carga) $t + \Delta t$ es:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (15)$$

donde, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$: vector de cargas exteriores actuantes en el instante $t + \Delta t$

${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$: vector de fuerzas equivalentes a las tensiones actuantes en el sólido en el instante $t + \Delta t$.

El esquema iterativo resultante⁸ está dado por la ecuación incremental linealizada,

$${}^T \mathbf{K}^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \quad (16.a)$$

y

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)} \quad (16.b)$$

donde (i) es el número de la iteración y ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ el vector de desplazamientos nodales correspondientes al instante $t + \Delta t$.

La matriz ${}^T \mathbf{K}^{(i-1)}$ es diferente en los varios esquemas iterativos que pueden ser usado^{8, 31, 32}.

a) En la **técnica modificada de Newton-Raphson** la matriz es sólo actualizada al comienzo de determinados pasos y no se modifica durante la iteración, dando una mayor economía de computación por iteración. Esta economía en algunos casos se ve severamente disminuida por una lenta convergencia.

b) En la técnica de Newton-Raphson se forma e invierte la matriz en cada iteración, dando un mayor costo de computación por iteración, pero en general, una rápida convergencia.

c) La técnica BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) es un método intermedio en que la inversa de la matriz es directamente actualizada en cada iteración para aproximar una iteración con secantes, en lugar de la iteración con tangentes de la técnica de Newton-Raphson⁸.

La actualización de la inversa de la matriz es de la forma⁸:

$$\left[t+\Delta t \mathbf{K}^{-1} \right]^{(i)} = g \left(\left[t+\Delta t \mathbf{K}^{-1} \right]^{(i-1)} ; \Delta \mathbf{U}^{(i-1)} \right) \quad (17)$$

En general el método BFGS es muy efectivo desde el punto de vista de costo computacional.

Los tres métodos anteriores pueden ser combinados con búsquedas lineales, en los que la ecuación (16.b) se reemplaza^{8 y 31} por:

$$t+\Delta t \mathbf{U}^{(i)} = t+\Delta t \mathbf{U}^{(i-1)} + \beta \Delta \mathbf{U}^{(i)} \quad (18)$$

donde el escalar β se calcula de forma de minimizar el producto

$$\Delta \mathbf{U}^{(i)T} \left(t+\Delta t \mathbf{R} - t+\Delta t \mathbf{F}^{(i)} \right) \quad (19)$$

En la anterior, hemos asumido:

* El analista prescribe los valores de $t+\Delta t \mathbf{R}$.

* La solución se busca en niveles de carga inferiores a los de un punto crítico; es decir, no se investigan respuestas en regímenes post-críticos.

Si se intenta relevar, como en muchos casos, la característica carga-desplazamientos de un sólido (por ej. una lámina) en los períodos pre y post-críticos, asumiendo que la carga varía en forma proporcional, es decir:

$$t+\Delta t \mathbf{R} = t+\Delta t \lambda \mathbf{R} \quad (20)$$

donde $t+\Delta t \lambda$ es un escalar y $\mathbf{R}$ un vector carga de referencia. La ecuación (16.a) se reescribe,

$$\tau \mathbf{K}^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = t+\Delta t \lambda \mathbf{R} - t+\Delta t \mathbf{F}^{(i-1)} \quad (21)$$

Obviamente en problemas con puntos críticos (por ejemplo problemas con snap-through) no es posible fijar $t+\Delta t \lambda$ antes de conocer la solución.

Riks y Wempner^{33, 34} desarrollaron la idea original de iterar en el espacio cargas - desplazamientos, es decir, considerar a $t+\Delta t \lambda$ como otra incógnita de la solución.

De esta forma, la ecuación incremental se reescribe como,

$$\tau \mathbf{K}^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = \left(t+\Delta t \lambda^{(i-1)} + \Delta \lambda^{(i)} \right) \mathbf{R} - t+\Delta t \mathbf{F}^{(i-1)} \quad (22.a)$$

$$t + \Delta t \lambda = t + \Delta t \lambda^{(i-1)} + \Delta \lambda^{(i)} \quad (22.b)$$

Una ecuación adicional debe ser empleada para fijar la longitud del paso en el espacio cargas-desplazamientos.

$$f(\Delta \lambda^{(i)}, \Delta \mathbf{U}^{(i)}) = 0 \quad (23)$$

Diversas formas han sido propuestas para esta ecuación adicional, como ser la longitud constante de la tangente³³ y la longitud esférica de arco constante^{35, 36}.

En nuestra investigación para lograr un método de solución automática^{4, 32} hemos encontrado dos formas convenientes:

a) La longitud esférica de arco constante cuando la solución está alejada de los puntos críticos.

b) El trabajo constante de las fuerzas exteriores en la proximidad de los puntos críticos.

Hemos desarrollado un algoritmo automático diseñado para calcular la longitud de paso, iterar, disminuir la longitud de paso si no hubo convergencia y reiniciar la iteración.

El algoritmo, implementado en el programa ADINA³⁷, comienza iterando con la técnica modificada de Newton-Raphson y si la convergencia se torna lenta, pasa a la técnica de Newton-Raphson.

En los métodos iterativos arriba planteados debe fijarse un criterio para decidir cuando, dentro de cierta tolerancia a fijar, la convergencia (equilibrio) ha sido alcanzada.

La cuestión no es simple, y en general los diversos criterios existentes son más o menos exitosos en diferentes problemas.

Un criterio de convergencia en general exitoso, es el de la energía^{8, 31, 32}, que establece que la convergencia se considera alcanzada en la iteración (i) si:

$$\Delta \mathbf{U}^{(i)T} \left(t + \Delta t \mathbf{R} - t + \Delta t \mathbf{F}^{(i-1)} \right) \leq \text{ETOL} \left[\Delta \mathbf{U}^{(1)T} \left(t + \Delta t \mathbf{R} - t \mathbf{F} \right) \right] \quad (24)$$

siendo ETOL fijada en base a la experiencia del analista.

Otros criterios que pueden fijarse son:

$$\| t + \Delta t \mathbf{R} - t + \Delta t \mathbf{F}^{(i-1)} \|^{(\text{DESP})} \leq \text{RTOL} \cdot \text{RNORM} \quad (25.a)$$

$$\| t + \Delta t \mathbf{R} - t + \Delta t \mathbf{F}^{(i-1)} \|^{(\text{ROT})} \leq \text{RTOL} \cdot \text{RMNORM} \quad (25.b)$$

$$\| \Delta \mathbf{U}^{(i)} \|^{(\text{DESP})} \leq \text{DTOL} \cdot \text{DNORM} \quad (26.a)$$

$$\| \Delta \mathbf{U}^{(i)} \|^{(\text{ROT})} \leq \text{DTOL} \cdot \text{DMNORM} \quad (26.b)$$

RNORM, RMNORM, DNORM, DMNORM, RTOL y DTOL son también valores fijados por el analista.

En ADINA hemos considerado conveniente una implementación que permita al analista optar entre diversas combinaciones de los criterios arriba expuestos o usar individualmente cualquiera de ellos.

Por último deseamos hacer referencia a un problema no trivial en la implementación de un elemento de lámina con grandes rotaciones.

Si el elemento se emplea en un caso de pequeñas rotaciones, el vector director, en un nodo k , puede ser actualizado utilizando las dos rotaciones nodales que se han obtenido para ese nodo como resultado de la ecuación incremental linealizada,

$${}^{t+\Delta}t\mathbf{V}_n^k = {}^t\mathbf{V}_n^k - \alpha_k {}^t\mathbf{V}_2^k + \beta_k {}^t\mathbf{V}_1^k \quad (27)$$

Para α_k , β_k , ${}^t\mathbf{V}_1^k$ y ${}^t\mathbf{V}_2^k$ ver Fig. 4.

La Ec. (27) es válida pues las pequeñas rotaciones pueden ser consideradas vectores, no así las grandes rotaciones; para el caso de grandes rotaciones, una forma aproximada de actualización del vector director es^{3, 8}

$${}^{t+\Delta}t\mathbf{V}_n^k = {}^t\mathbf{V}_n^k + \int_{\alpha_k, \beta_k} -\tau \mathbf{V}_2^k d\alpha_k + \tau \mathbf{V}_1^k d\beta_k \quad (28)$$

Los errores que introduce la (28), al igual que todos los errores inherentes a la ecuación incremental linealizada, son salvados en el proceso de iteración, y en el cumplimiento final (dentro de tolerancias) de la Ec. (15).

Otro enfoque para tratar la actualización de los vectores directores se presenta en la Ref. (38).

ALGUNAS CONSIDERACIONES PRACTICAS

En nuestra formulación de elementos de lámina, hemos utilizado 5 grados de libertad por nodo: 3 desplazamientos incrementales y 2 rotaciones del vector director correspondiente al nodo alrededor de dos ejes normales al mismo.

Muchas veces, debido a intersecciones de láminas o a intersecciones de vigas con láminas (láminas rigidizadas) es necesario utilizar 6 grados de libertad nodales. Hacemos esto transformando los 5 grados de libertad originales en 6, pero sin recurrir a la extendida práctica de adicionar resortes de rotación artificiales en la dirección correspondiente a la rotación alrededor del vector director.

No agregamos el mencionado resorte artificial pues de acuerdo a nuestra experiencia, su inclusión puede resultar en puntos críticos artificiales en la respuesta de la estructura y puede inhibir el uso de un algoritmo automático de resolución, como por ejemplo el descrito en las Refs.^{4, 32}.

De esta forma, al implementar los elementos de lámina en ADINA, hemos considerado que un nodo perteneciente a un elemento de lámina puede tener 5 ó 6 grados de libertad, a elección del analista: 5 grados de libertad son usados cuando el nodo recibe sólo aportes de rigidez correspondientes a esos 5 grados de libertad y no se imponen condiciones de borde para cuya especificación se requiera el uso de las direcciones de rotación alineadas con los ejes de referencia globales; en caso contrario los 5 grados de libertad son transformados en 6 grados de libertad en la dirección de los ejes globales; así se pueden conectar los elementos de lámina con elementos de viga isoparamétricos⁸, representar intersecciones de láminas, imponer condiciones de borde en la dirección de los ejes globales, etc.

CONCLUSIONES

En esta comunicación comenzamos discutiendo los requerimientos que, a nuestro entender, deben satisfacer los elementos generales de lámina para poder ser usados como herramientas fiables en la práctica ingenieril.

A continuación resumimos nuestra solución para satisfacer dichos requerimientos: **La interpolación mixta de componentes tensoriales**, y examinamos dos elementos que hemos desarrollado utilizando esta formulación.

El elemento de 4 nodos (MITC4) es de alta fiabilidad y eficiente, y ya ha sido incorporado a la versión 84 del programa ADINA.

El elemento de 8 nodos (MITC8), aparece como muy atractivo y aún permanece en su etapa de verificación. Algunos refinamientos en su formulación serían altamente deseables, sobre todo en lo que hace a la satisfacción de la prueba de la parcela para cualquier configuración distorsionada de elementos.

Hemos construido el elemento MITC8 basados en nuestra experiencia acumulada y en la prueba de la parcela, sería muy valioso contar con una formulación matemática que estructurara el desarrollo de estos elementos.

En cuanto a los métodos de resolución de problemas no-lineales, es importante investigar el desarrollo de métodos más eficientes. El estudio de la selección automática de criterios de convergencia y tolerancias es sumamente importante si se pretende poder acoplar estos métodos de resolución con sistemas de C.A.D.

REFERENCIAS

1. K.J. Bathe y D.R.J. Qwen (compiladores), *Reliability of Methods for Engineering Analysis*, Pineridge Press, 1986.
2. K.J. Bathe y L.W. Ho, "Some Results in the Analysis of Thin Shell Structures", publicado en *Nonlinear Finite Elements in Structural Mechanics* (compilado por W. Wunderlich et al), Springer-Verlag, Berlín, 1981.
3. K.J. Bathe y S. Bolourchi, "A Geometric and Material Nonlinear Plate and Shell Element", *J. Computers and Structures*, Vol. **11**, pp. 23-48, 1979.
4. E. N. Dvorkin, "On Nonlinear Finite Element Analysis of Shell Structures", Ph. D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 1984.
5. E.N. Dvorkin y K.J. Bathe, "A Continuum Mechanics Based Four-Node Shell Element for General Nonlinear Analysis", *J. Engng. Computations*, Vol. **1**, pp. 77-88, 1984.
6. K.J. Bathe y E.N. Dvorkin, "A four-Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Plate Theory and a Mixed Interpolation", *Int. J. Numerical Methods in Engng*, Vol. **21**, pp. 367-383, 1985.
7. K.J. Bathe y E. N. Dvorkin, "A Formulation of General Shell Elements - The Use of Mixed Interpolation of Tensorial Components", *Int. J. Numerical Methods in Engng.*, Vol. **22**, pp. 697-722, 1986.
8. K. J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
9. K. J. Bathe, E. N. Dvorkin, y L. W. Ho, "Our Discrete - Kirchhoff and Isoparametric Shell Elements for Nonlinear Analysis - An Assesment", *J. Computers and Structures*, Vol. **16**, pp. 89-98, 1983.
10. H. Stolarski y T. Belytschko, "Membrane Locking and Reduced Integration for Curved Elements", *ASME, J. Applied Mechanics*, Vol. **49**, pp. 172-176, 1982.
11. B. Irons y S. Ahmad, *Techniques of Finite Elements*, Ellis Harwood Ltd., 1980.
12. K. Washizu, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity* (3rd. Edition), Pergamon Press, 1982.
13. K. J. Bathe y F. Brezzi, "On the Convergence of a Four-Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Plate Theory and a Mixed Interpolation", *Proceedings Conference on Mathematics of Finite Elements and Applications V*, Brunel Univ., Inglaterra, 1984.
14. M. A. Crisfield, "A Quadratic Mindlin Element Using Shear Constraints", *J. Computers and Structures*, Vol. **18**, pp. 833-852, 1984.

15. K. C. Park y G. M. Stanley, "A Curved C⁰ Shell Element Based on Assumed Natural - Coordinate Strains", Report n^o LMSC-F035235, Applied Mech. Lab., Lockheed Palo Alto Research Lab., 1984.
16. H. C. Huang y E. Hinton, "A Nine-Node Lagrangian Mindlin Plate Element with Enhanced Shear Interpolation", J. Engng. Computations, Vol. 1, pp. 369-379, 1984.
17. A. E. Green y W. Zerna, *Theoretical Elasticity* (2nd. Edition), Oxford University Press, 1968.
18. S. Ahmad, B. M. Irons y O. C. Zienkiewicz, "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements", Int. J. Numerical Methods in Engng., Vol. 2, pp. 419-451, 1970.
19. E. Ramm, "A Plate/Shell Element For Large Deflections and Rotations", publicado en *Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis* (compilado por K. J. Bathe et al), M. I. T. Press, 1977.
20. O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor y J. M. Too, "Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells", Int. J. Numerical Methods in Engng., Vol. 3, pp. 275-290, 1971.
21. R. H. MacNeal, "Derivation of Element Siffness Matrices by Assumed Strain Distributions", J. Nuclear Engng. and Design, Vol. 70, pp. 3-12, 1982.
22. T. J. R. Hughes y T. E. Tezduyar, "Finite Elements Based Upon Mindlin Plate Theory With Particular Reference to the four-Node Bilinear Isoparametric Element", ASME, J. Applied Mechanics, Vol. 46, pp. 587-596, 1981.
23. G. Wempner, D. Talaslidis y C. -M. Hwang, "A Simple and Efficient Approximation of Shells via Finite Quadrilateral Elements", ASME, J. Applied Mechanics, Vol. 49, pp. 115-120, 1982.
24. G. Strang y G. J. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice - Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
25. K. Forsberg y R. Hartung, "An Evaluation of Finite Difference and Finite Element Techniques for Analysis of General Shells", *Symposium on High Speed Computing of Elastic Structures*, I.U.T.A.M., Liege, 1970.
26. R. H. Leicester, "Finite Deformation of Shallow Shells", Proc. A.S.C.E., Vol. 94, (EM6), pp. 1.409-1.423, 1968.
27. G. Horrigmoe, "Finite Element Instability Analysis of Free-Form Shells", Report 77-2, Div. of Structural Mechanics, The Norwegian Institute of Technology, University of Trondheim, Noruega, 1977.
28. B. Kråkeland, "Nonlinear Analysis of Shells Using Degenerate Isoparametric Elements", *Finite Elements in Nonlinear Mechanics*, (compilado por P. G. Bergan et al), Tapir Publishers, Norwegian Institute of Technology, Trondheim, Noruega, 1978.
29. Report AE 84-5, ADINA Verificación Manual.
30. G. M. Lindberg, M. D. Olson y G. R. Cowper, "New Developments in the Finite Element Analysis of Shells", Q. Bull. Div. Mech. Eng. and the National Aeronautical Establishment, National Research Council of Canada, Vol. 4, 1969.
31. K. J. Bathe y A. P. Cimento, "Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations", J. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 22, pp. 231-277, 1980.
32. K. J. Bathe y E. N. Dvorkin, "On the Automatic Solution of Nonlinear Finite Element Equations", J. Computers and Structures, Vol. 17, pp. 871-879, 1983.
33. E. Riks, "An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems", Int. J. Solids and Structures, Vol. 15, pp. 529-551, 1979.
34. G. A. Wempner, "Discrete Approximation Related to Nonlinear Theories of Solids", Int. J. Solids and Structures, Vol. 7, pp. 1.581-1.599, 1971.
35. E. Ramm, "Strategies for Tracing Nonlinear Responses Near Limit Points", publicado en *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics* (compilado por W. Wunderlich et al), pp. 63-89, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
36. M. A. Crisfield, "A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles Snap-Through", J. Computers and Structures, Vol. 13, pp. 55-62, 1981.
37. K. J. Bathe, "Finite Elements in CAD - and Adina", Nuclear Engg. and Design, (en prensa).
38. E. Oñate y J. Oliver, "A Finite Element Formulation for the Geometrically Nonlinear Analysis of Shells", publicado en *Finite Element Methods for Plate and Shell Structures*, (compilado por T. J. R. Hughes y E. Hinton), Pineridge Press, 1986.

39. S. Levy, "Bending of Rectangular Plates with Large Deflections", Technical Notes, NACA, 1942.
40. A. B. Sabir y A. C. Lock, "The Application of Finite Elements to the Large Deflection Geometrically Non-Linear Behaviour of Cylindrical Shells", *Variational Methods in Engineering*, (compilado por C.A. Brebbia y H. Tottenham), Southampton University Press, 1973.
41. P. G. Bergan, G. Horrigmoe, B. Kråkeland y T. Soreide, "Solution Techniques for Non-Linear Finite Element Problems", *Int. J. for Numerical Methods in Engng.*, Vol. 12, pp. 1.677-1.696, 1978.

APENDICE I

Comentarios Sobre la Prueba de la Parcela en Elementos con Interpolación Mixta de Componentes Tensoriales.

En el presente Apéndice estudiaremos la forma más exigente de plantear la prueba de la parcela.

A efectos de simplificar el planteo consideraremos un elemento plano de tensiones, de 8 nodos, constituido en base a la interpolación de tensiones de pliego, usada en la formulación del MITC8.

Llamando $\mathbf{B}$ a la matriz de deformaciones/desplazamientos del elemento isoparamétrico standard y $\hat{\mathbf{B}}$ a la correspondiente matriz del elemento mixto, si $\mathbf{U}^*$ es el vector de desplazamientos nodales correspondiente a un estado de deformaciones constante, es evidente, del estudio de las funciones de interpolación usadas que,

$$\mathbf{B} \mathbf{U}^* = \hat{\mathbf{B}} \mathbf{U}^* \quad (\text{AI.1})$$

y por consiguiente,

$$\mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{U}^* = \mathbf{C} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{U}^* \quad (\text{AI.2})$$

donde $\mathbf{C}$ es la matriz constitutiva del material del elemento.

En general,

$$\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \mathbf{U}^* \neq \int_V \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{B}} dV \mathbf{U}^* \quad (\text{AI.3})$$

La prueba de la parcela se cumple cuando valga el signo igual en la ecuación (AI.3).

Por lo que, no es suficiente imponer en los nodos de la parcela, los desplazamientos correspondientes a un valor de deformación constante y verificar dicho valor en el interior de cada elemento; deben también verificarse las fuerzas nodales resultantes.

De ahí, que para verificar el cumplimiento de la prueba de la parcela hayamos recomendado la metodología enunciada en la Sección II.