

**Monografías de Ingeniería Sísmica**

Editor A. H. Barbat

**Control predictivo en  
sistemas de protección  
sísmica de estructuras**

R. Andrade Cascante  
J. Rodellar  
F. López Almansa

**Monografía CIMNE IS-2 1993**

**Monografías de Ingeniería Sísmica**

Editor A. H. Barbat

**Control predictivo en  
sistemas de protección  
sísmica de estructuras**

R. Andrade Cascante  
J. Rodellar  
F. López Almansa

**Monografía CIMNE IS-2 1993**

**MONOGRAFIAS DE INGENIERIA SISMICA**  
Editor A.H. Barbat

CENTRO INTERNACIONAL DE METODOS NUMERICOS EN INGENIERIA  
Edificio C1, Campus Norte UPC  
C/ Gran Capitán, s/n  
08034 Barcelona, España.

**ISSN: 1134-3249**

**CONTROL PREDICTIVO EN SISTEMAS DE PROTECCION SISMICA DE ESTRUCTURAS**  
Monografia CIMNE IS-2  
© Los Autores

**ISBN: 84-87867-37-5**

**IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN**

## Prefacio

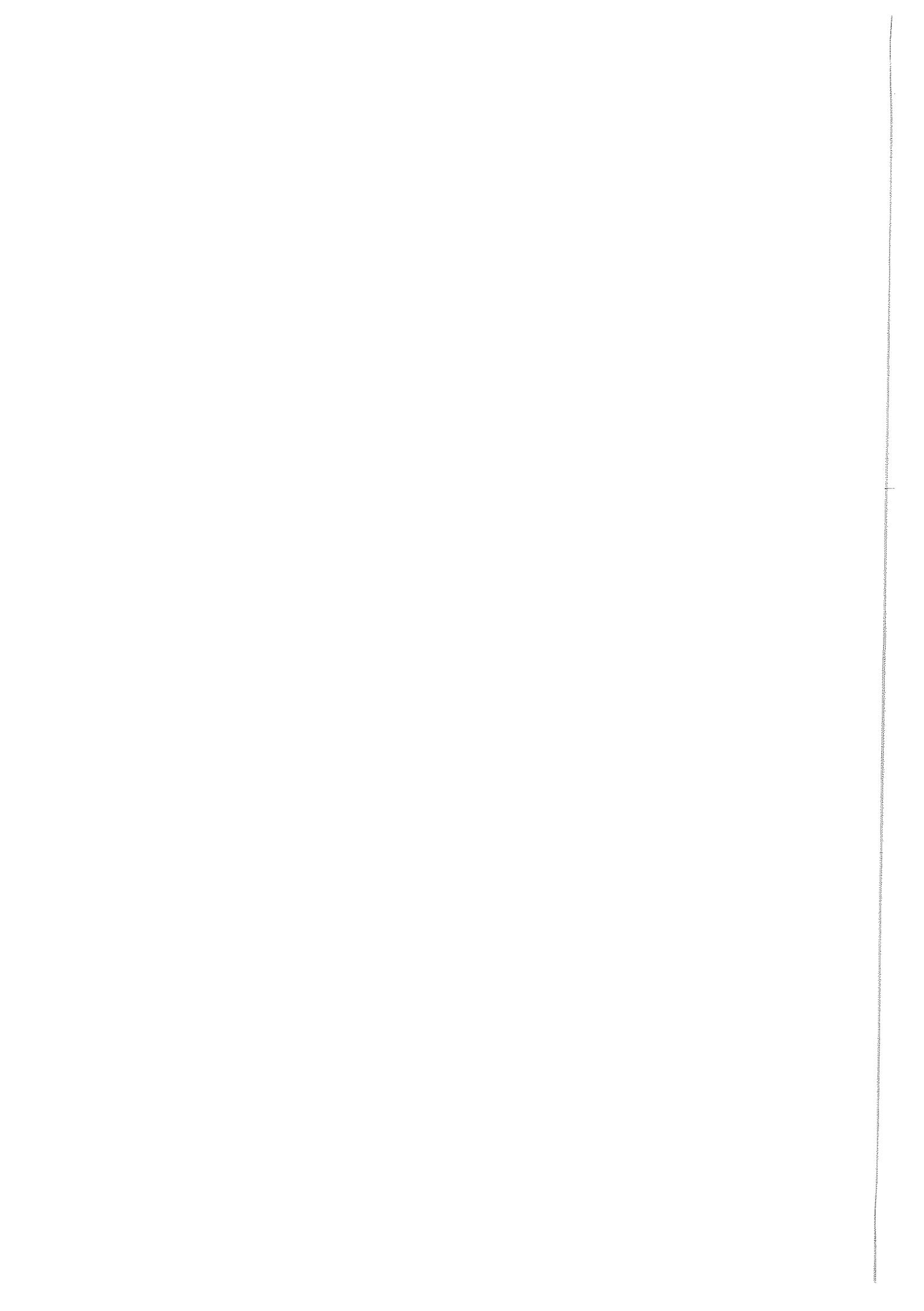
En las últimas décadas se ha propuesto la aplicación de técnicas de control activo al campo de las estructuras flexibles sometidas a acciones sísmicas dando lugar a una nueva filosofía de diseño conocida como Control Activo de Estructuras. Las estructuras resultantes también conocidas como Estructuras Inteligentes son objeto de este libro.

El objetivo del control activo es ajustar los movimientos de la estructura a un criterio preestablecido. Para ello se dispone en las estructuras sensores capaces de medir sus desplazamientos y mecanismos actuadores que pueden ejercer sobre éstas acciones mecánicas capaces de modificar sus deformaciones. La medida de los sensores es utilizada para decidir, de acuerdo con un criterio denominado algoritmo de control, el valor de las fuerzas a aplicar por los actuadores teniendo siempre la finalidad de adecuar los desplazamientos a los valores deseados.

En este trabajo se propone una metodología para diseñar sistemas de control activo de estructuras utilizando un algoritmo de control basado en la estrategia de control predictivo. Se considera que el diseño del sistema de control consiste en seleccionar el número, el tipo, las características y la posición de los sensores y actuadores, y en escoger los valores de los parámetros que definen la estrategia de control predictivo. La metodología propuesta puede aplicarse de forma numérica o experimental; en este trabajo se utiliza simulación numérica pero en aplicaciones reales el diseño final debe ir precedido de ensayos experimentales siguiendo la metodología descrita en este trabajo.

La metodología propuesta se basa en combinar la estrategia de control predictivo con el concepto de control modal independiente, el cual consiste básicamente en diseñar estrategias de control individuales para cada modo que se desea controlar. Se consideran sistemas de control con un número reducido de sensores y actuadores.

El presente trabajo se organiza en cuatro capítulos: en el primero se presenta una introducción al control activo de estructuras, en el segundo se formula el algoritmo de control predictivo de estructuras, en el tercero se presentan elementos para un análisis de la eficiencia del sistema de control y estudios sobre condiciones de eficiencia en sistemas de 1 grado de libertad, en el cuarto se aplican las condiciones de eficiencia recomendadas en el capítulo anterior a sistemas de varios grados de libertad.



# Indice General

Prefacio .....	I
----------------	---

## Capítulo 1

### INTRODUCCION AL CONTROL ACTIVO DE ESTRUCTURAS

1.1 Tendencias actuales en la Ingeniería Sísmica .....	1
1.2 El concepto de control activo de estructuras .....	2
1.3 Sistemas de control de estructuras .....	3
1.3.1 Sistemas pasivos .....	3
1.3.2 Sistemas activos .....	4
1.3.3 Sistemas semi-activos .....	6
1.3.4 Sistemas híbridos .....	6
1.4 Temáticas relativas al control activo de estructuras .....	7
Referencias .....	8

## Capítulo 2

### FORMULACION DEL CONTROL PREDICTIVO DE ESTRUCTURAS

2.1 Introducción .....	9
2.2 Representación de estado de sistemas .....	9
2.2.1 Sistemas y modelos dinámicos .....	9
2.2.2 El concepto de estado .....	10
2.2.3 Representación en espacio de estado .....	11
2.3 Solución de la ecuación de estado de sistemas lineales .....	13
2.3.1 Sistemas en tiempo continuo .....	13
2.3.2 Sistemas en tiempo discreto .....	16
2.3.3 Discretización del modelo de estado de tiempo continuo .....	18

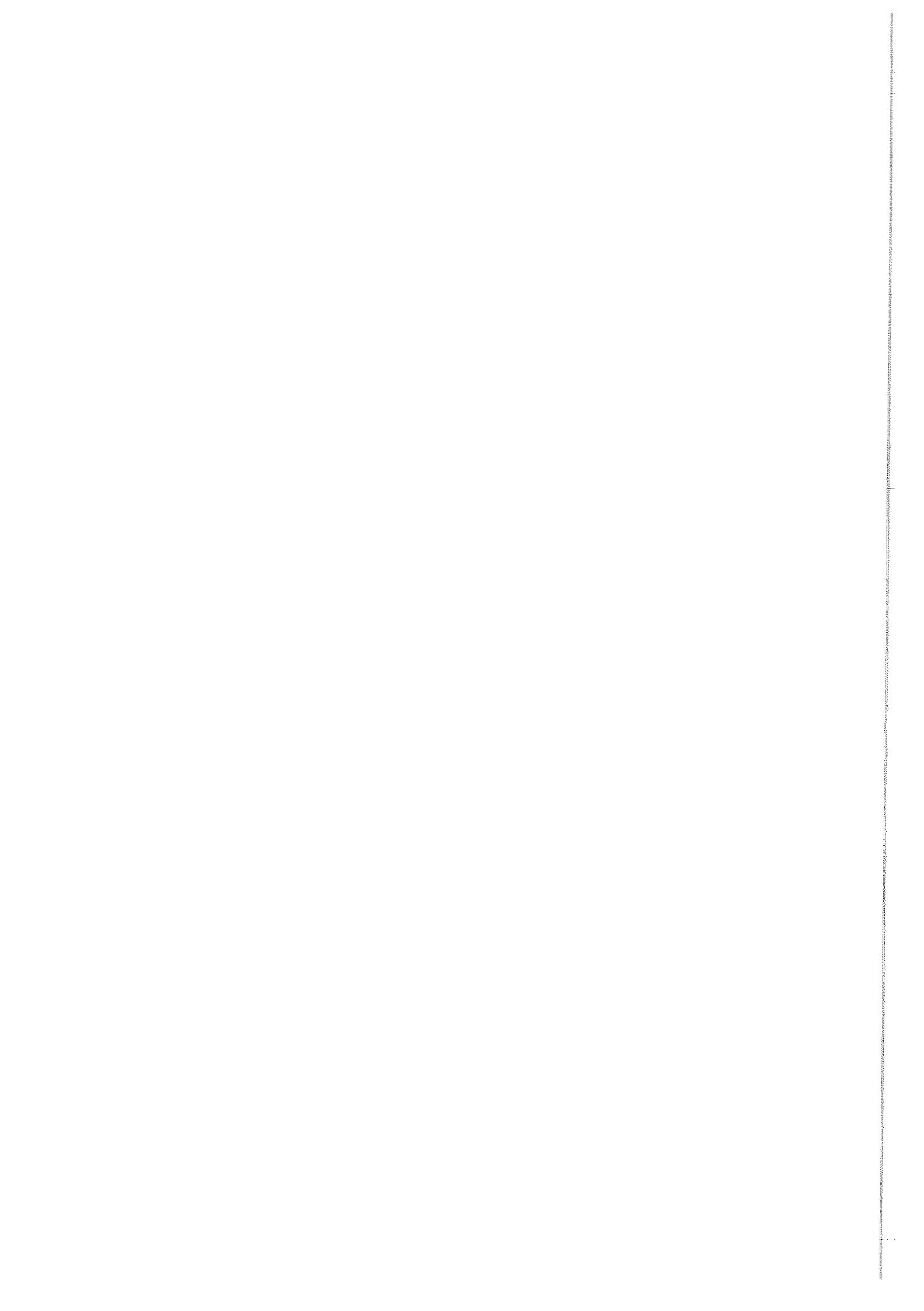
2.4 Respuesta dinámica de estructuras .....	19
2.4.1 Formulación del algoritmo SSP .....	21
2.4.2 Cálculo de la matriz $A$ .....	24
2.4.3 Esquema general de implementación del algoritmo SSP .....	29
2.5 Control predictivo de estructuras .....	30
2.5.1 La estrategia de control predictivo .....	30
2.5.2 Algoritmo de control predictivo .....	30
2.6 Comentarios finales .....	39
Referencias .....	39

### **Capítulo 3**

### **ELEMENTOS PARA UN ANALISIS DE EFICIENCIA DEL CONTROL PREDICTIVO DE ESTRUCTURAS**

3.1 Introducción .....	41
3.2 Parámetros del lazo de control .....	42
3.2.1 Parámetros modales de la estructura .....	43
3.2.2 Parámetros del algoritmo de control predictivo .....	46
3.2.3 Parámetros de los mecanismos actuadores .....	48
3.2.4 Parámetros de la excitación .....	48
3.2.5 Período de muestreo .....	51
3.2.6 Tabla de parámetros .....	51
3.3 Herramientas de análisis .....	51
3.3.1 Condiciones de estabilidad del control predictivo .....	52
3.3.2 Comportamiento dinámico equivalente del sistema con control .....	55
3.3.3 Índices de rendimiento y espectros de control .....	58
3.4 Análisis numérico de eficiencia en sistemas de 1 grado de libertad. Condiciones ideales .....	65
3.5 Análisis numérico de eficiencia en sistemas de 1 grado de libertad. Condiciones irregulares .....	68

3.6 Comentarios finales .....	70
Referencias .....	71
<b>Capítulo 4</b>	
<b>APLICACION DEL ANALISIS DE EFICIENCIA A SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD</b>	
4.1 Introducción .....	73
4.2 Control predictivo modal independiente .....	74
4.3 Implementación con un actuador y un sensor en cada grado de libertad .....	77
4.3.1 Implementación .....	78
4.3.2 Ejemplos de simulación numérica .....	81
4.4 Implementación con número reducido de actuadores .....	96
4.4.1 Formulación .....	96
4.4.2 Solución por mínimos cuadrados .....	97
4.4.3 Solución despreciando modos residuales .....	99
4.4.4 Estabilidad y eficacia .....	100
4.4.5 Ejemplos de simulación numérica .....	100
4.5 Implementación con número reducido de sensores y actuadores .....	107
4.5.1 Formulación .....	107
4.5.2 Estabilidad y eficacia .....	112
4.5.3 Ejemplos de simulación numérica .....	117
a) Estructura de la Universidad de Buffalo .....	117
b) Estructura de la Universidad de California - Berkeley .....	120
c) Edificio experimental en Japón .....	129
4.6 Conclusiones .....	141
Referencias .....	143



# **Capítulo 1**

## **INTRODUCCION AL CONTROL ACTIVO DE ESTRUCTURAS**

### **1.1 TENDENCIAS ACTUALES EN LA INGENIERIA SISMICA**

Las últimas décadas han marcado un avance importante en distintos campos de la ciencia y la Ingeniería Sísmica no ha sido la excepción. Ella se ha enriquecido sobre todo del impulso dado por los ordenadores al estar al alcance de muchos usuarios, dando paso al desarrollo de técnicas tan diversas como el análisis espectral de señales sísmicas, el cálculo de estructuras por métodos más precisos, la simulación numérica de problemas complejos de interacción suelo-fluido-estructura, etc.

Los cambios tecnológicos han permitido adoptar nuevos criterios para el diseño de estructuras ante solicitudes sísmicas. Los métodos de diseño en función de la resistencia y ductilidad de la estructura han pasado a ser tradicionales y hoy se habla de “estructuras inteligentes” como la vanguardia en diseño de estructuras. Estas nuevas estructuras incorporan sistemas activos de control que actúan en el mismo instante en que actúa la excitación, absorbiendo energía, modificando las características dinámicas del sistema y minimizando los efectos desfavorables de ésta sobre la estructura. El desarrollo de estos sistemas ha abierto un nuevo campo en la Ingeniería Sísmica conocido internacionalmente con el nombre anglosajón de “Structural Control” (Leipholz y Abdel-Rohman 1986, Meirovitch 1990, Soong 1990).

En los apartados siguientes se describen las características generales de los sistemas de control y de algunos temas relacionados con este nuevo campo científico.

## 1.2 EL CONCEPTO DE CONTROL ACTIVO DE ESTRUCTURAS

La idea de controlar la evolución temporal de un proceso, en este caso particular el movimiento de una estructura ante solicitudes dinámicas, ha sido una preocupación constante en el mundo de la técnica desde hace mucho tiempo. Se trata de actuar sobre el proceso con el fin de adecuar su comportamiento a ciertos valores deseados. Para ello, se miden las características de la evolución del proceso y se comparan con los valores preestablecidos para poder actuar en consecuencia. El concepto de control puede parecer una idea totalmente nueva pero sin embargo ésta existe desde hace millones de años, desde el inicio mismo de la vida en muchos procesos naturales. Un ejemplo de proceso natural sometido a una acción de control es el movimiento del ser humano: éste a través de los sentidos adquiere información de su posición la cual es procesada por el cerebro para poner en accionamiento a los músculos con el fin de realizar los desplazamientos deseados. El concepto de control automático surge cuando la actuación sobre el proceso se hace sin intervención humana.

En las últimas décadas se ha propuesto la aplicación de técnicas de control al campo de las estructuras flexibles dando lugar al **control activo de estructuras**. El objetivo de la acción de control es ajustar los movimientos de la estructura a un criterio preestablecido. Se dispone en las estructuras sensores capaces de medir sus desplazamientos y mecanismos actuadores que pueden ejercer sobre éstas acciones mecánicas capaces de modificar sus deformaciones. La medida de los sensores es utilizada para decidir el valor de las fuerzas a aplicar por los actuadores teniendo siempre la finalidad de adecuar los desplazamientos a los valores deseados.

El control activo de estructuras se aplica básicamente a dos tipos de problemas: reducción de vibraciones de estructuras flexibles sometidas a acciones dinámicas y corrección de distorsiones de estructuras que deban mantener una configuración preestablecida. Ambos casos se conocen en lengua inglesa como "vibration control" y "shape control", respectivamente. Un ejemplo de control de forma se da en el caso de un espejo perteneciente a un telescopio el cual debe mantener una gran regularidad superficial, en cuyo caso el objetivo del control es la minimización de los alabeos de la superficie del espejo. Un ejemplo de control de vibraciones se tiene en una estructura de ingeniería civil sometida a un sismo. En este caso el principal objetivo del control es reducir las oscilaciones horizontales de la misma; este libro está orientado en la línea de la protección sísmica de estructuras.

En el presente capítulo se presenta una visión general de la problemática del control activo de estructuras y de las aplicaciones de éste en los diversos campos de la ingeniería civil.

### 1.3 SISTEMAS DE CONTROL DE ESTRUCTURAS

En el campo del control de estructuras de ingeniería civil, el desarrollo de sistemas activos ha sido precedido por los denominados sistemas pasivos; posteriormente a la aparición de los sistemas activos han sido propuestos los sistemas semi-activos y los híbridos. En los siguientes subapartados se definen brevemente dichos sistemas.

#### 1.3.1 Sistemas pasivos

En estructuras de ingeniería civil y mecánica durante los últimos años se han utilizado dispositivos externos a la estructura pero incorporados a la misma para absorber la energía contenida en la excitación y, consecuentemente, aumentar el amortiguamiento y modificar su rigidez. Dichos dispositivos se denominan sistemas de control pasivo.

Entre los sistemas pasivos de control pueden distinguirse dos grupos: los sistemas pasivos asistidos que precisan un aporte de energía para su funcionamiento y los sistemas puramente pasivos que funcionan sin necesidad de dicho aporte.

Para el caso de los sistemas mecánicos en los cuales la excitación es conocida, estos sistemas se diseñan de tal manera que incrementen el amortiguamiento para las frecuencias cercanas a la natural del sistema y de esta manera reducir los efectos de resonancia. Para los casos en los cuales la excitación es aleatoria, que generalmente son estructuras de ingeniería civil, dichos mecanismos deben diseñarse estimando previamente el rango de frecuencias presentes en la excitación. Generalmente su uso se ha orientado al control de vibraciones.

Frecuentemente estos sistemas deben ser reemplazados después de la actuación de solicitudes dinámicas violentas. Su capacidad para disminuir la respuesta de la estructura es, por otra parte, limitada. En general, su principal ventaja es que los daños se concentran en estos elementos, protegiendo de esta forma a la estructura que no presenta daño alguno.

Estos sistemas no reciben información "on-line" (al mismo tiempo que actúa la excitación) y por lo tanto no tienen capacidad para reaccionar de forma automática e inteligente. De hecho no son sistemas de control en el sentido estricto del control automático de sistemas. Ejemplos de éstos tenemos: los sistemas de aislamiento de base, los sistemas de pasivos de masas sintonizadas TMD, los amortiguadores sintonizados de columna líquida entre otros que han sido incorporados a una variedad de estructuras en diversos países. Otros sistemas se encuentran descritos en Leipholz y Abdel-Rohman (1986), Soong (1990), Fujita (1991) y Andrade (1992).

### 1.3.2 Sistemas activos

Son sistemas que utilizan en tiempo real (“on-line”) la respuesta medida de la estructura para calcular un conjunto de fuerzas de control que se aplican a la estructura por medio de dispositivos mecánicos actuadores con el fin ya sea de reducir su respuesta o ajustarse a una trayectoria predefinida (Zuk 1980, Yao 1972). Por su propia concepción, estos sistemas son capaces de adaptarse automáticamente a las características de la excitación o perturbación y alcanzar sus objetivos de forma más eficiente que los sistemas pasivos.

El control activo utiliza conceptos y esquemas propios del Control Automático. El Control Automático es una rama de la Ingeniería de Sistemas que se ocupa del diseño de sistemas capaces de actuar en tiempo real sobre un proceso físico para conseguir que su evolución temporal siga unas especificaciones dadas. El comportamiento de los procesos objeto de control se representa mediante *sistemas dinámicos*, entendiendo por tales, entes cuyo estado se caracteriza mediante los valores que toman un conjunto de parámetros y variables que evolucionan en el tiempo dependiendo de la interacción con el exterior y de las interacciones internas entre sus partes.

Existe un conjunto de variables que definen la relación de un sistema dinámico con el exterior: variables de *entrada*  $u(t)$  cuyos valores son manipulables, variables de *perturbación* formadas por magnitudes no manipulables y variables de *salida*  $y(t)$  que representan la respuesta del sistema y cuyos valores se suponen accesibles, es decir pueden ser medidos u observados.

En los sistemas dinámicos se definen un conjunto de variables denominadas *variables de estado*  $z(t)$  caracterizadas por la propiedad de que, conociendo sus valores en un instante determinado  $t_0$ , es posible conocer la evolución del sistema en cualquier intervalo futuro  $[t_0, t]$  a partir de los valores de la entrada y de la perturbación en dicho intervalo. El valor de las variables de estado en cada instante define el *estado del sistema* (y el dominio de dichas variables se denomina *espacio de estado* (subapartado 2.2.2)).

Se denomina *controlador* al sistema que manipula los valores de las variables de entrada del sistema para que la salida del mismo alcance unos valores asignados denominados *consigna*.

Los sistemas de control pueden operar básicamente de dos formas: en bucle abierto (también conocido como lazo abierto) y en bucle cerrado (lazo cerrado). En lazo abierto el controlador manipula los valores de la entrada siguiendo las indicaciones de la consigna pero sin conocer los valores de la salida producida. La falta de información de la salida hace que un control en lazo abierto no pueda corregir los efectos de las perturbaciones. Se trata de una acción de control en general de eficacia limitada. En lazo cerrado el controlador conoce las valores de la salida a través de una realimentación (feedback) y, de acuerdo con dichos valores y con las indicaciones de la consigna, determina los valores de la entrada siguiendo un proceso denominado *estrategia de control*. Existen distintos algoritmos para implementar una estrategia de control: control por realimentación negativa clásica, control

óptimo, control por asignación de polos y muchos más (Meirovitch, 1990). En este libro se adopta la estrategia de control predictivo.

Un sistema de control activo de estructuras es un sistema en lazo cerrado que consta por tanto de: unos *sensores* que miden la respuesta de la estructura, un *controlador* que calcula el valor de las fuerzas de control a partir de la respuesta de la estructura mediante un *algoritmo de control* y unos *actuadores* que ejercen dichas fuerzas sobre la estructura. La similitud del sistema con los cuerpos vivos ha hecho que se acuñe el término de **estructuras inteligentes**. El tiempo de respuesta de los actuadores, es decir, el tiempo que transcurre desde que éstos reciben la señal de control hasta que aplican las fuerzas a la estructura introduce un desfase que debe ser tenido en cuenta en la formulación del algoritmo de control. Dicho desfase origina lo que se conoce como *tiempo de retardo*.

El controlador puede ser implementado mediante una instrumentación analógica. En dicho caso el problema de control se plantea en tiempo continuo y consiste básicamente en formular una ley que genere  $u(t)$  en función de  $y(t)$  o de  $\dot{y}(t)$ .

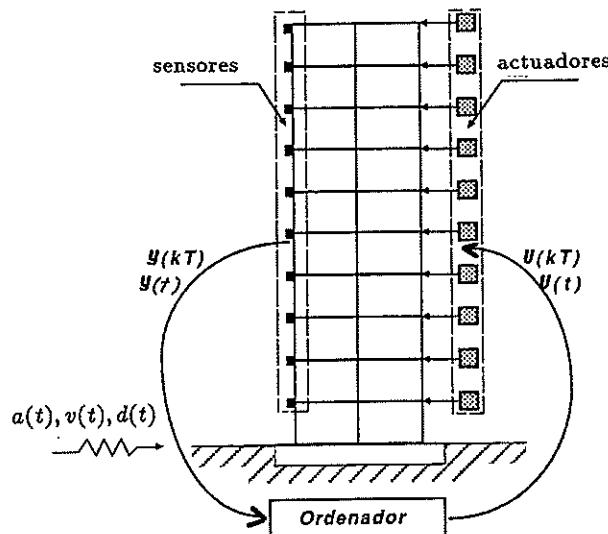


Figura 1.1 Esquema de un sistema de control activo de estructuras.

Debido al espectacular desarrollo de los ordenadores digitales en los últimos años, es cada vez más frecuente la introducción de un ordenador digital en el lazo de control. Esta es la tendencia actual en el control automático de sistemas, donde el concepto de control digital está sustituyendo al de control analógico. En un esquema de control digital el problema de control se plantea en tiempo discreto y consiste básicamente en formular un algoritmo de control que calcule en tiempo real y en cada instante de muestreo  $k$  el valor

de la secuencia discreta de control  $u(kT)$  en función de la secuencia discreta  $y(kT)$ .  $T$  es el período de muestreo que gobierna el lazo de control. En la figura 1.1 se muestra un esquema de control activo digital de estructuras.

Ejemplos de sistemas activos de control son: deflectores aerodinámicos de geometría variable, amortiguadores de masas activas AMD, sistemas de rigidez variable AVS, sistemas de aislamiento activos de base, sistemas de cables activos ATS y otros más cuyas aplicaciones se describen en Leipholz y Abdel-Rohman (1986), López Almansa (1988), Soong (1990), Fujita (1991) y Andrade (1992).

Se ha discutido a veces que una desventaja de los sistemas activos puede ser el hecho de que necesitan una alimentación externa de energía, razón por la cual se han investigado modificaciones a estos sistemas que permitan solventar dichas limitaciones. Los sistemas resultantes pueden ser semi-activos o híbridos. En los subapartados 1.3.3 y 1.3.4 se describen dichos sistemas.

### 1.3.3 Sistemas semi-activos

Los sistemas de control activo precisan un aporte de energía para gobernar el movimiento de los actuadores. Si la energía utilizada es hidráulica deben disponerse instalaciones de almacenamiento capaces de mantener una presión de alimentación constante y, en presencia de una excitación dinámica violenta, son frecuentes las interrupciones en el suministro de energía eléctrica por lo cual no suele ser posible suministrar fluido a presión constante durante mucho tiempo. Para obviar estas limitaciones se proponen sistemas semi-activos que se caracterizan por consumir una cantidad ínfima de energía durante su actuación. Los sistemas semi-activos se distinguen de los sistemas pasivos en que reciben información on-line de la respuesta de la estructura y de los sistemas activos en que no precisan un aporte exterior de energía en cuantía apreciable. Aplicaciones de estos sistemas se describen en Andrade (1992).

### 1.3.4 Sistemas híbridos

En los subapartados anteriores se ha puesto de manifiesto que cada sistema de control tiene unas limitaciones que reducen su aplicabilidad para resolver todos los problemas dinámicos que pueden afectar a una estructura concreta. Parece, pues, una solución natural combinar en una misma estructura distintos sistemas de control de forma que se complementen adecuadamente. Los sistemas resultantes se denominan *sistemas híbridos*. Su campo de aplicación está centrado en los sistemas de reducción de vibraciones.

Una de las perspectivas más interesantes en el campo de los sistemas híbridos es la colaboración entre sistemas activos y pasivos. Ambos tipos de sistemas presentan limitaciones complementarias que restringen frecuentemente su campo de utilización: los sistemas pasivos no suelen ser aplicables a grandes estructuras por las importantes fuerzas dinámicas que entran en juego y por el riesgo de comprometer la estabilidad general

de la estructura, mientras que los sistemas activos tienen un coste muy elevado debido, especialmente, a la importante cantidad de energía que se precisa para generar las fuerzas de control. En los últimos años se ha detectado un notable interés por este tipo de sistemas ( Reinhorn 1987, Kelly et al. 1987, Pu y Kelly 1991, Inaudi et al. 1992, Nagarajaiah et al. 1992, Yang et al. 1992, Feng et al. 1993, Rodellar et al. 1993). Muchos de estos sistemas se encuentran en etapa de investigación y desarrollo industrial por empresas japonesas, francesas, neozelandesas y norteamericanas (Fujita, 1991).

#### **1.4 TEMATICAS RELATIVAS AL CONTROL ACTIVO DE ESTRUCTURAS**

Existen muchas temáticas íntimamente ligadas al control activo de estructuras, entre ellas se pueden mencionar:

- Formulación del problema de control
- Modelación de la estructura
- Dinámica de sensores y actuadores. Tiempos de retardo
- Estrategias de control
- Estabilidad y eficacia
- Robustez
- Control modal y spillover
- Colocación óptima de sensores y actuadores
- Control de orden reducido. Número reducido de sensores y actuadores
- Control directo
- Sistemas no lineales
- Control adaptativo. Identificación
- Optimización y control
- Observadores y filtros

Si bien todos estos temas son importantes, en este libro se abordan estudios relacionados con los primeros nueve temas, siendo el objetivo fundamental el describir una metodología que permita implementar la estrategia de Control Predictivo en un sistema donde se ha incorporado un número reducido de sensores y actuadores. Dado que una estructura en realidad es un sistema con infinito número de grados de libertad, la implementación del sistema de control con número finito de sensores y actuadores es un problema importante a solucionar. En Meirovitch (1990) y Andrade (1992) se encuentra un extenso análisis de todos estos temas.

En el capítulo 2 se tratan temas relacionados con la modelación de la estructura, con la formulación del problema de control y con la estrategia de control, que para el caso

específico se refiere al Control Predictivo. En el capítulo 3 se abordan temas relacionados con la estabilidad y eficacia, con la robustez y con la dinámica de sensores y actuadores. En el capítulo 4 se desarrollan temas relacionados con el control modal, con la implementación en sistemas con número reducido de sensores y actuadores, con la colocación óptima de éstos, con la estabilidad, eficacia y con el spillover.

## REFERENCIAS

- Andrade R.A.** (1992), Metodología para la implementación de sistemas de control predictivo de estructuras, *Tesis Doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya*.
- Feng, M.Q., Shinozuka, M. and Fujii, S.** (1993). Friction-controllable sliding isolated system, *J. Engrg. Mech.*, ASCE, 119(9), 1845–1864.
- Fujita T.** (1991), Seismic Isolation and Response Control for Nuclear and Non-Nuclear Structures, *Special Issue for the Exhibition of the 11th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, SMIRT 11*, Tokio.
- Inaudi, J., López Almansa, F., Kelly, J.M. and Rodellar, J.** (1992). Predictive control of base isolated structures, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 21, 471–482.
- Kelly, J.M., Leitmann, G. and Soldatos, A.** (1987). Robust control of base-isolated structures under earthquake excitation, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 53, 159–181.
- Leipholz H.H.E. y Abdel-Rohman M.** (1986). *Control of structures*, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- López Almansa F.** (1988), Contribución al desarrollo de sistemas de control de estructuras de edificación mediante cables activos, *Tesis Doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya*.
- Meirovitch L.** (1990), *Dynamics and Control of Structures*, Wiley Interscience, New York.
- Nagarajaiah, S., Riley, M., Reinhorn, A.M. and Shinozuka, M.** (1992). Hybrid control of sliding isolated bridges, *Proc. 1992 Pressure Vessels and Piping Conf.*, ASME/PVP-237, 2, 83–89.
- Pu J.P. y Kelly J.M.** (1991). Active control and seismic isolation, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol.117, No.10, pp.2221–2235.
- Reinhorn A.M.** (1987). Hybrid systems-combined passive and active control, *Forum on structural applications of protective systems for earthquake hazard mitigation*, The National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York, Buffalo, N.Y.
- Rodellar, J., Ryan, E.P. and Barbat, A.H.** (1993). Adaptive control of uncertain coupled mechanical systems with application to base-isolated structures, *Proc. 6th Workshop on Dynamics and Control*, Vienna, Austria, en prensa.
- Soong T.T.** (1990). *Active Structural Control: Theory and Practice*, Longman Scientific&Technical, New York.
- Yang, J.N., Danielians, A. and Liu, S.C.** (1992). Aseismic hybrid control of nonlinear and hysteretic structures, *J. Engrg. Mech.*, ASCE, 118(EM7), 1423–1440.
- Yao J.T.P.** (1972). Concept of structural control, *ASCE J. Struc. Div.*, Vol.98 (ST7), pp. 1567–1574.
- Zuk W.** (1980). The past and future of active structural control systems, *Structural Control*, H.H.E. Leipholz, Editor, North Holland, Amsterdam, pp. 779–794.

## Capítulo 2

# FORMULACION DEL CONTROL PREDICTIVO DE ESTRUCTURAS

### 2.1 INTRODUCCION

En este capítulo se presenta la formulación del Control Predictivo de Estructuras. Dado que ésta se sustenta en un modelo de la estructura en espacio de estado, previamente se describen conceptos básicos de representación de estado de sistemas dinámicos particularizando para sistemas lineales y con aplicación a las ecuaciones de movimiento de estructuras. Se introduce la estrategia de Control Predictivo mostrando su aplicación al control activo de estructuras y describiendo la deducción de las ecuaciones que definen el algoritmo de control.

### 2.2 REPRESENTACION DE ESTADO DE SISTEMAS

#### 2.2.1 Sistemas y modelos dinámicos

Se puede definir un sistema como un ente cuyo estado está caracterizado por un conjunto de parámetros y variables que evolucionan en el tiempo dependiendo de la interacción con el exterior y de las interacciones internas entre sus partes. Por tanto, en un sistema existe una evolución temporal del tipo causa-efecto, es decir una *dinámica* en su comportamiento. Dicha dinámica está relacionada con variables que tienen en cuenta la relación del sistema con el exterior. Las variables son de dos tipos:

- **Variables de entrada:** describen las acciones del exterior sobre el sistema. Estas pueden ser de dos tipos: manipulables, como las fuerzas de control sobre la estructura; y no manipulables como la acción dinámica que produce un sismo (u otra excitación) sobre la estructura.
- **Variables de salida:** representan la respuesta del sistema la cual varía con el tiempo por acción de las entradas. Pueden ser medidas y observadas a través de sensores, así por ejemplo, el desplazamiento y la velocidad de un punto cualquiera de un edificio.

Por tanto existe siempre una relación dinámica entre las variables de entrada y salida de un sistema. Un **modelo** es una herramienta que describe dicha relación y permite hacer

análisis y predicciones del comportamiento temporal del sistema frente a distintas entradas posibles.

Generalmente para formular un modelo se hace uso de relaciones matemáticas habitualmente en forma de ecuaciones diferenciales o en diferencias. Según el tipo de ecuaciones usadas se pueden dar distintas clasificaciones de modelos:

- Modelos de **tiempo continuo** (el tiempo y las variables de entrada-salida se comportan como continuas) descritos por ecuaciones diferenciales y modelos de **tiempo discreto** (las variables de entrada-salida están discretizadas a intervalos de tiempo) descritas en ecuaciones en diferencias.
- Modelos de **parámetros distribuidos** (sus características no están localizadas en puntos concretos sino repartidos sobre el sistema) descritos por ecuaciones en derivadas parciales (en el caso de que se trate de modelos en tiempo continuo) y modelos de **parámetros concentrados** descritos en ecuaciones diferenciales ordinarias (en tiempo continuo)
- Modelos **estocásticos** o modelos **deterministas** según si los parámetros o variables entrada-salida son descritos mediante variables aleatorias o simplemente deterministas.
- Modelos **lineales** o modelos **no lineales** según lo sean o no las ecuaciones.
- Modelos con **parámetros variables** o con **parámetros constantes** según la relación entrada-salida varíe o se mantenga constante en el tiempo.

La utilización de uno u otro modelo viene dada, por un lado, por la propia naturaleza del sistema y, por otro, por el grado de sofisticación que se quiera introducir en la formulación matemática.

Concretamente, en el caso de una estructura sometida a cargas dinámicas, se tiene de hecho un sistema con parámetros (masa, rigidez, amortiguamiento) distribuidos, con comportamiento no lineal (por las propiedades de los materiales y por las deformaciones finitas), y que en rigor, considerando la aleatoriedad de las cargas dinámicas (sismo, viento, tráfico, etc.) y de las características de la estructura, es estocástico. Sin embargo, una simplificación frecuente es formular un modelo lineal con parámetros constantes y concentrados por discretización espacial por elementos finitos o por masas concentradas, donde las variables de entrada-salida se consideran deterministas.

### 2.2.2 El concepto de estado

El **estado** de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables (denominadas variables de estado) tales que el conocimiento de esas variables en  $t = t_0$  juntamente con la entrada para  $t \geq t_0$ , determinan totalmente el comportamiento del sistema para cualquier tiempo  $t \geq t_0$ .

Por tanto, el estado de un sistema dinámico en el tiempo  $t$  queda determinado

únivocamente por el estado en el tiempo  $t_0$  y la entrada para  $t \geq t_0$ , y es independiente del estado y la entrada antes de  $t_0$ .

Si se necesitan  $n$  variables de estado para describir totalmente el comportamiento de un sistema dado, se pueden considerar a estas  $n$  variables de estado como las  $n$  componentes de un vector  $\mathbf{x}(t)$ . Este vector se denomina **vector de estado**.

El espacio  $n$ -dimensional cuyos ejes de coordenadas consisten en los ejes  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , se denomina **espacio de estado**. Por tanto, se puede representar cualquier estado del sistema como un punto en el espacio de estado.

En el siguiente subapartado se plantea, como ejemplo introductorio, la representación en espacio de estado de un sistema descrito por una ecuación diferencial de orden  $n$ .

### 2.2.3 Representación en espacio de estado

Se considera la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes y de orden  $n$ :

$$\overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + a_2 \overset{(n-2)}{y} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u \quad (2.1)$$

en donde  $y$  es la variable de salida,  $\dot{y}$  representa la primera derivada de  $y$  respecto al tiempo, y  $\overset{(p)}{y}$  la derivada de  $y$  de orden  $p$  respecto al tiempo. Conociendo los valores de  $y(t_0), \dot{y}(t_0), \dots, \overset{(n-1)}{y}(t_0)$  juntamente con la entrada  $u(t)$  para  $t \geq t_0$ , se puede determinar completamente el comportamiento futuro del sistema (para  $t \geq t_0$ ) si se toma a

$y(t), \dot{y}(t), \dots, \overset{(n-1)}{y}(t)$  como las  $n$  variables de estado. En dicho caso, se define

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

...

$$x_n = \overset{(n-1)}{y}$$

Entonces (2.1) es equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

...

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - \cdots - a_1 x_n + u$$

o en forma de ecuación matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u \quad (2.2)$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La variable de salida  $y$  se relaciona con el vector de estado  $\mathbf{x}$  mediante

$$y = (1 \ 0 \ \dots \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

o lo que es lo mismo

$$y = \mathbf{H}\mathbf{x} \quad (2.3)$$

La ecuación diferencial de primer orden (2.2) se conoce como **ecuación de estado**, y la ecuación (2.3) como **ecuación de salida**. Es importante señalar que en este caso particular sólo existe una variable de salida medible  $y$ , por tanto la matriz  $\mathbf{H}$  se ha convertido en un vector fila. En los casos más generales, la matriz  $\mathbf{H}$  tiene una fila por cada variable de salida medible e  $\mathbf{y}$  es un vector que recibe el nombre de **vector de salida**, incluso se puede dar el caso que todas las variables de estado sean medibles y que la matriz  $\mathbf{H}$  se constituya en una matriz cuadrada, que comúnmente suele ser la matriz identidad.

## 2.3 SOLUCION DE LA ECUACION DE ESTADO DE SISTEMAS LINEALES

### 2.3.1 Sistemas en tiempo continuo

El caso más general de la ecuación de estado (2.2) y de la ecuación de salida (2.3) puede ser representado en la forma

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{u}(t) \quad (2.4)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (2.5)$$

$\mathbf{F}(t)$ ,  $\mathbf{G}(t)$ ,  $\mathbf{H}(t)$  y  $\mathbf{D}(t)$  son matrices de dimensiones apropiadas que contienen los parámetros propios del sistema. Obtener la solución de la ecuación diferencial (2.4) puede ser tarea compleja dependiendo de la variación temporal de la matriz  $\mathbf{F}$ . El caso más sencillo, que se considera a continuación, supone  $\mathbf{F}$  constante.

Consideremos la ecuación (2.4) con  $\mathbf{F}$  constante:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{u}(t) \quad (2.6)$$

Se supone dada la condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ . Hallemos primero la solución de la ecuación homogénea

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) \quad (2.7)$$

La solución de (2.7) que cumple la condición inicial dada es

$$\mathbf{x}_h(t) = \exp[\mathbf{F}(t - t_0)]\mathbf{x}_0 \quad (2.8)$$

donde aparece la matriz exponencial definida como

$$\exp(\Theta) = \mathbf{I} + \Theta + \frac{\Theta^2}{2!} + \dots = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^p \frac{\Theta^p}{p!} \quad (2.9)$$

La matriz exponencial verifica las siguientes propiedades fundamentales

$$\exp(0) = \mathbf{I} \quad (2.10a)$$

$$\exp(I) = eI \quad (2.10b)$$

$$\exp(\Theta_1)\exp(\Theta_2) = \exp(\Theta_1 + \Theta_2) \quad \text{si y solo si } \Theta_1\Theta_2 = \Theta_2\Theta_1 \quad (2.10c)$$

La matriz  $\exp(\Theta)$  es siempre invertible y su matriz inversa es igual a

$$[\exp(\Theta)]^{-1} = \exp(-\Theta) \quad (2.10d)$$

La derivada respecto a  $\lambda$  de la matriz exponencial  $\lambda\Theta$  (siendo  $\Theta$  una matriz constante) se obtiene por

$$\frac{d \exp(\lambda\Theta)}{d\lambda} = \Theta \exp(\lambda\Theta) \quad (2.10e)$$

La solución  $\mathbf{z}(t)$  de la ecuación completa (2.6) será la suma de la solución  $\mathbf{z}_h(t)$  de la ecuación homogénea (2.7) y de una solución particular  $\mathbf{z}_p(t)$  de la ecuación completa (2.6):

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_h(t) + \mathbf{z}_p(t)$$

El cumplimiento de la condición inicial  $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$  obliga a que  $\mathbf{z}_p(t_0) = 0$ . Para hallar una solución particular  $\mathbf{z}_p(t)$  de (2.6) se utiliza el método de variación de constantes sustituyendo en (2.8)  $\mathbf{z}_0$  por un vector variable  $\mathbf{z}(t)$ :

$$\mathbf{z}_p(t) = \exp[\mathbf{F}(t - t_0)]\mathbf{z}(t) \quad (2.11)$$

Obteniendo la derivada respecto al tiempo de (2.11), reemplazando en (2.6) y tomando en cuenta (2.10d) se tiene

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \exp[-\mathbf{F}(t - t_0)]\mathbf{G}(t)\mathbf{u}(t) \quad (2.12)$$

Esta ecuación diferencial se integra teniendo en cuenta la condición inicial  $\mathbf{z}(t_0) = 0$ , de lo que resulta

$$\mathbf{z}(t) = \int_{t_0}^t \exp[-\mathbf{F}(\tau - t_0)]\mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (2.13)$$

La sustitución de (2.13) en (2.11) y el uso de la propiedad (2.10c) conduce a

$$\mathbf{z}_p(t) = \int_{t_0}^t \exp[\mathbf{F}(t - \tau)]\mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (2.14)$$

En definitiva la solución de (2.6) que cumple  $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$  tiene la forma

$$\mathbf{z}(t) = \exp[\mathbf{F}(t - t_0)]\mathbf{z}_0 + \int_{t_0}^t \exp[\mathbf{F}(t - \tau)]\mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (2.15)$$

El primer término de (2.15) depende del estado inicial en  $t_0$  y el segundo es un término de convolución o término forzado que representa la respuesta debida a la entrada al sistema en  $[t_0, t]$ .

Si definimos una matriz  $\mathbf{T}(t, \tau) = \exp[\mathbf{F}(t - \tau)]$ , podemos comprobar a partir de las ecuaciones (2.10) que cumple las siguientes propiedades:

$$\mathbf{T}(\tau, \tau) = \mathbf{I} \quad (\text{matriz identidad}) \quad (2.16a)$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{T}(t, \tau) \quad (2.16b)$$

$$\mathbf{T}(t_2, t_0) = \mathbf{T}(t_2, t_1)\mathbf{T}(t_1, t_0) \quad (2.16c)$$

$$\mathbf{T}(t_2, t_0) = \mathbf{T}^{-1}(t_0, t_2) \quad (2.16d)$$

$\mathbf{T}(t, \tau)$  se conoce como la **matriz de transición** asociada al sistema (2.6). Para el caso más general del sistema (2.4) con matriz variable con el tiempo  $\mathbf{F}(t)$ , la existencia de una matriz de transición  $\mathbf{T}(t, \tau)$  verificando las propiedades (2.16) está garantizada si los elementos de  $\mathbf{F}(t)$  son funciones continuas. La solución de (2.4) tiene la forma general

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{T}(t, t_0)\mathbf{z}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{T}(t, \tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (2.17)$$

La ecuación (2.17) da la solución formal de la ecuación de estado, pero su aplicación práctica requiere la obtención previa de la matriz de transición. No obstante, sólo en casos especiales como el correspondiente a la ecuación (2.6) con coeficientes constantes  $\mathbf{T}(t, \tau)$  admite una expresión cerrada.

### 2.3.2. Sistemas en tiempo discreto

Los sistemas en tiempo discreto pueden ser representados en espacio de estado por ecuaciones en diferencias de primer orden de la forma

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{z}(k), \mathbf{u}(k), k] \quad (2.18a)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}[\mathbf{z}(k), \mathbf{u}(k), k] \quad (2.18b)$$

donde  $k$  es un entero que denota el instante de tiempo  $t = k\Delta t$ .  $\mathbf{f}$  debe cumplir en cada caso las condiciones matemáticas necesarias para garantizar la unicidad de la solución.  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{h}$  pueden ser funciones no lineales.

Una forma habitual de (2.18) considerando un modelo lineal es

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{z}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \quad (2.19a)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{z}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \quad (2.19b)$$

donde las matrices de parámetros  $\mathbf{A}(k)$ ,  $\mathbf{B}(k)$ ,  $\mathbf{H}(k)$  y  $\mathbf{D}(k)$  tienen dimensiones apropiadas.

La ecuación (2.19a) es una ecuación en diferencias de primer orden que, como puede comprobarse por aplicación sucesiva a partir de la condición inicial  $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$ , puede escribirse en la forma

$$\mathbf{z}(k) = \prod_{r=0}^{k-1} \mathbf{A}(r)\mathbf{z}_0 + \sum_{j=1}^k [\prod_{r=j}^{k-1} \mathbf{A}(r)]\mathbf{B}(j-1)\mathbf{u}(j-1) \quad (2.20)$$

donde

$$\prod_{r=j(j < k)}^{k-1} \mathbf{A}(r) = \mathbf{A}(k-1)\mathbf{A}(k-2) \cdots \mathbf{A}(j)$$

Para  $j = k$  se considera por convenio

$$\prod_{r=k}^{k-1} \mathbf{A}(r) = \mathbf{I} \quad (\text{matriz identidad})$$

Análogamente al caso de la ecuación (2.15), el primer término en (2.20) representa la contribución del estado inicial a la respuesta del sistema, mientras que el segundo depende de cómo la entrada fuerza al sistema. Podemos considerar en este caso una matriz de transición en tiempo discreto definida como

$$\mathbf{T}(k, j) = \prod_{r=j}^{k-1} \mathbf{A}(r) \quad (2.21)$$

y escribir (2.20) en la forma

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{T}(k, 0) + \sum_{j=1}^k \mathbf{T}(k, j) \mathbf{B}(j-1) \mathbf{u}(j-1) \quad (2.22)$$

El cálculo de la matriz de transición es tedioso al requerir los productos implicados en (2.21). En el caso en que la matriz  $\mathbf{A}(k)$  es constante, la matriz de transición tiene la forma

$$\mathbf{T}(k, j) = \mathbf{A}^{k-j} \quad (2.23)$$

que facilita el cálculo. La solución de la ecuación de estado es en este caso

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{A}^k \mathbf{z}_0 + \sum_{j=1}^k \mathbf{A}^{k-j} \mathbf{B}(j-1) \mathbf{u}(j-1) \quad (2.24)$$

La formulación de un modelo en tiempo discreto puede tener su origen esencialmente en: 1) que el sistema considerado tenga en sí mismo una naturaleza temporal discreta; 2) una discretización artificial del tiempo.

En el primer caso el sistema exhibe la salida sólo en determinados instantes de tiempo. El par entrada-salida puede representarse por un par de secuencias numéricas. Un proceso controlado automáticamente por ordenador es un ejemplo típico de sistema de tiempo discreto. En efecto el ordenador, en cada instante de muestreo, recibe información de la medida de la variable del proceso que se desea controlar y utiliza dicha información para calcular en tiempo real el valor de la entrada a aplicar al proceso. El sistema completo se representa por un par entrada-salida (secuencia de variables de control-secuencia de medidas) que, en muchos casos, se relaciona por un modelo de estado como el expresado en (2.19).

En el segundo caso el sistema tiene una evolución continua y puede ser descrito por un modelo de tiempo continuo. Aunque el sistema esté sometido a una entrada continua y exhiba una respuesta en todo tiempo  $t$ , sólo se consideran sus valores en instantes discretos de muestreo. Se renuncia a describir el comportamiento del sistema entre instantes de muestreo. Se formula un modelo en tiempo discreto que relaciona dichas secuencias de valores. Una forma usual de formular tal modelo consiste en aproximar el modelo inicial en tiempo continuo mediante algún procedimiento numérico de discretización. A continuación se describe un método que se utiliza habitualmente para la discretización de la ecuación de estado lineal (2.6).

### 2.3.3. Discretización del modelo de estado de tiempo continuo

Consideremos el caso del modelo en tiempo continuo lineal con parámetros constantes (2.6) donde el tiempo  $t$  está discretizado en instantes separados regularmente por un intervalo  $\Delta t$ . Para obtener un modelo de estado en tiempo discreto aplicamos la solución de (2.6) entre dos instantes consecutivos tomando  $t_0 = k\Delta t$  y  $t = (k+1)\Delta t$  en la expresión (2.15). De ello resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k\Delta t + \Delta t) &= \exp(\Delta t \mathbf{F}) \mathbf{z}(k\Delta t) + \\ &+ \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \exp\{[(k+1)\Delta t - \tau] \mathbf{F}\} \mathbf{G}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.25)$$

El desarrollo de la integral contenida en (2.25) permite expresar el valor de la respuesta  $\mathbf{z}(k\Delta t + \Delta t)$  a partir de la respuesta del instante anterior  $\mathbf{z}(k\Delta t)$  y hallar así recurrentemente la respuesta en todos los instantes de muestreo. Sin embargo no es posible resolver dicha integral sin conocer la evolución de  $\mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau)$  entre los instantes  $k$  y  $k+1$ .

Si se considera que se conoce una secuencia discreta de valores de  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{u}$  en los sucesivos instantes de muestreo, se puede reconstruir  $\mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau)$  mediante algún criterio de interpolación. Un criterio sencillo puede consistir en suponer una interpolación de orden cero que mantiene constante el valor muestreado durante el intervalo de discretización; es decir

$$\mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{G}(k\Delta t)\mathbf{u}(k\Delta t) \quad k\Delta t \leq \tau < (k+1)\Delta t \quad (2.26)$$

Sustituyendo (2.26) en (2.25), utilizando el cambio de variable  $\mu = (k+1)\Delta t - \tau$ , cambiando los límites de integración, se puede resolver la integral, obteniéndose como resultado

$$\mathbf{z}(k\Delta t + \Delta t) = \exp(\Delta t \mathbf{F}) \mathbf{z}(k\Delta t) + \int_0^{\Delta t} \exp(\mu \mathbf{F}) \mathbf{G}(k\Delta t) \mathbf{u}(k\Delta t) d\mu \quad (2.27)$$

Omitiendo en la escritura el incremento de tiempo  $\Delta t$  la expresión (2.27) se escribe en la forma de la ecuación de estado de tiempo discreto (2.19) como

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{z}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \quad (2.28)$$

donde  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}(k)$  son matrices definidas por:

$$\mathbf{A} = \exp(\Delta t \mathbf{F}) \quad (2.29a)$$

$$\mathbf{B}(k) = \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{G}(k) \quad (2.29b)$$

Pueden utilizarse otros criterios de interpolación resultando diferentes ecuaciones en tiempo discreto tales como las propuestas por Rodellar y Barbat (1985), López Almansa et al. (1988b), aunque la interpolación de orden cero da lugar a un modelo muy sencillo y que, si el incremento de tiempo es suficientemente pequeño, ofrece una buena discretización del sistema continuo.

#### 2.4 RESPUESTA DINAMICA DE ESTRUCTURAS

El movimiento de una estructura sometida a unas cargas dinámicas en presencia de fuerzas de control activo y representada por un modelo espacial discreto con  $n$  grados de libertad, es regido por la siguiente ecuación diferencial:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{d}(t) = \mathbf{f}_c(t) + \mathbf{f}(t) \quad (2.30)$$

Si los materiales que constituyen la estructura tienen un dominio elástico y lineal de deformación y no se superan los límites de dicho dominio,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{K}$  son las matrices constantes de masa, amortiguamiento y rigidez. El vector  $\mathbf{d}$  contiene los desplazamientos de los  $n$  grados de libertad y los vectores  $\mathbf{f}_c$  y  $\mathbf{f}$  contienen, respectivamente, las fuerzas de control y de excitación expresadas por sus componentes sobre los grados de libertad.

Las fuerzas contenidas en los vectores  $\mathbf{f}_c(t)$  y  $\mathbf{f}(t)$  suelen conocerse frecuentemente por valores en instantes discretos no ajustables a ninguna expresión analítica de forma que (2.30) debe resolverse por métodos numéricos. Los procedimientos numéricos existentes están fuertemente condicionados por el tipo de matriz de amortiguamiento  $\mathbf{C}$  considerada, puesto que un amortiguamiento de tipo clásico permite un desacoplamiento en coordenadas modales de las ecuaciones del movimiento (2.30), mientras que con una matriz  $\mathbf{C}$  arbitraria, las ecuaciones en coordenadas modales quedan acopladas a través de la propia matriz de amortiguamiento.

Para sistemas con matriz de amortiguamiento de tipo no clásico (no desacoplables) se han propuesto diversos procedimientos de integración directa, algunos basados en esquemas explícitos (método de las diferencias centrales, etc.) y otros en esquemas implícitos (método de Hoúbolt, método  $\theta$  de Wilson, método de Newmark, etc.), que han sido analizados en detalle por Bathe y Wilson (1976). Todos ellos parten de la hipótesis de variación lineal de la aceleración de respuesta  $\ddot{\mathbf{d}}$  del sistema durante el intervalo básico de discretización  $\Delta t$  para resolver (2.30) en los instantes de muestreo. Los procedimientos citados pueden conducir a una respuesta inestable e imprecisa si el incremento de tiempo  $\Delta t$  considerado no es suficientemente pequeño con respecto a los períodos de los modos propios de vibración del sistema. Puesto que la respuesta en cada instante se calcula recurrentemente a partir de la obtenida en el instante anterior los errores son acumulativos y pueden ser importantes en análisis de duración elevada. Todos

los algoritmos de integración directa citados pueden aplicarse en coordenadas generales o en coordenadas modales, incluyendo en el cálculo en este caso el número de modos con influencia significativa en la respuesta global del sistema. En esta última situación, a la imprecisión generada por el propio algoritmo se suma la debida a los modos superiores no tomados en consideración.

Otro procedimiento aplicable a sistemas con amortiguamiento no clásico es el desacoplamiento modal en el campo complejo, Hurty y Rubistein (1964), cuyo principal inconveniente radica en el notable tiempo de cálculo que se precisa, por la propia configuración del algoritmo y por la necesidad de operar con números complejos.

También suele utilizarse en sistemas no desacopables un sistema altamente impreciso consistente en efectuar un desacoplamiento ficticio mediante relaciones de amortiguamiento ponderadas en cada modo propio, Roessel et al. (1973).

Un último procedimiento capaz de determinar la respuesta dinámica de sistemas no desacopables es el análisis en el campo de la frecuencia, Clough y Penzien (1975). En dicho caso es necesario efectuar una doble transformación discreta de Fourier (directa e inversa), la cual es fuente de inexactitudes y precisa un tiempo de cálculo importante, aunque con el desarrollo de la transformada rápida de Fourier (FFT) se ha mejorado muchísimo los tiempos de operación.

En sistemas desacopables (o en sistemas con un solo grado de libertad) pueden resolverse las ecuaciones escalares resultantes de desacoplar el sistema general mediante algunos de los algoritmos citados para sistemas no desacopables: métodos de integración directa y obtención de la respuesta en el dominio de la frecuencia. Las ecuaciones escalares en coordenadas modales pueden además ser resueltas por aplicación de las integrales de Duhamel, las cuales son capaces de proporcionar resultados muy precisos, (Clough y Penzien, 1975).

El algoritmo que se propone es un método de integración directa de la ecuación diferencial resultante de formular (2.30) en espacio de estado, presentado inicialmente por Rodellar y Barbat (1985) como algoritmo SSP. Por no prejuzgar el comportamiento de la aceleración de respuesta  $\ddot{d}$  en el interior del intervalo de discretización y no discretizar directamente la ecuación (2.30) sino su solución analítica en espacio de estado, proporciona resultados de una gran precisión. Puede aplicarse en coordenadas generales o en coordenadas modales, tomando en consideración en dicho caso únicamente los modos propios que influyen de manera apreciable en la respuesta. Si el algoritmo propuesto se aplica a sistemas con un solo grado de libertad el proceso de cálculo coincide con el que resulta de utilizar las integrales de Duhamel, por lo que dicho algoritmo puede ser considerado como una generalización para sistemas con varios grados de libertad de los procedimientos basados en las integrales de Duhamel.

#### 2.4.1 Formulación del algoritmo SSP

El algoritmo que se propone parte de la formulación en espacio de estado de las ecuaciones del movimiento (2.30). Considerando a los desplazamientos  $\mathbf{d}$  y a las velocidades  $\dot{\mathbf{d}}$  de los grados de libertad como variables de estado, se introduce un **vector de estado**  $\mathbf{x}$  definido por:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \dot{\mathbf{d}} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

La expresión (2.30) se transforma en espacio de estado en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{v}_c + \mathbf{v} \quad (2.32a)$$

donde  $\mathbf{F}$  es la **matriz del sistema** de tamaño  $2n \times 2n$  cuyos elementos pueden ordenarse en cuatro bloques  $n \times n$  de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix} \quad (2.32b)$$

$\mathbf{v}_c$  es el **vector de control** y  $\mathbf{v}$  es el **vector de excitación**, definidos por:

$$\mathbf{v}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_c \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f} \end{pmatrix} \quad (2.32c)$$

A partir de condiciones iniciales  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , usando la forma de la expresión (2.15), la solución de la ecuación diferencial (2.32a) tiene la forma siguiente:

$$\mathbf{x}(t) = \exp[\mathbf{F}(t - t_0)]\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \exp[\mathbf{F}(t - \tau)][\mathbf{v}_c(\tau) + \mathbf{v}(\tau)]d\tau \quad (2.33)$$

Discretizando temporalmente con un período de discretización constante  $\Delta t$ , en forma similar a (2.25), la ecuación (2.33) entre dos instantes consecutivos  $t_0 = k\Delta t$  y  $t = (k + 1)\Delta t$  resulta igual a:

$$\mathbf{x}(k\Delta t + \Delta t) = \exp(\Delta t \mathbf{F})\mathbf{x}(k\Delta t) +$$

$$+ \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \exp\{[(k + 1)\Delta t - \tau]\mathbf{F}\} [\mathbf{v}_c(\tau) + \mathbf{v}(\tau)] d\tau \quad (2.34)$$

El desarrollo de la integral contenida en (2.34) permite conocer el valor de la respuesta  $\mathbf{x}(k\Delta t + \Delta t)$  a partir de la respuesta  $\mathbf{x}(k\Delta t)$  del instante anterior y hallar

así recurrentemente la respuesta en todos los instantes de muestreo. Sin embargo no es posible resolver dicha integral sin conocer la evolución de los vectores de excitación  $\mathbf{v}$  y de control  $\mathbf{v}_c$  entre los instantes  $k$  y  $k + 1$ .

La variación del vector de control  $\mathbf{v}_c$  en el interior del intervalo  $[k \Delta t, k \Delta t + \Delta t]$  depende del dispositivo de retención utilizado en la conversión digital-analógica de la señal de control. Los convertidores D/A utilizados habitualmente incorporan un dispositivo de orden 0 que genera una secuencia de vectores de control escalonada de acuerdo con:

$$\mathbf{v}_c(\tau) = \mathbf{v}_c(k \Delta t) \quad k \Delta t \leq \tau < (k + 1) \Delta t \quad (2.35a)$$

Para el vector de excitación  $\mathbf{v}$  ha de elegirse también un criterio numérico de interpolación. Un criterio sencillo puede ser considerar  $\mathbf{v}(t)$  constante en el interior del intervalo de discretización, es decir:

$$\mathbf{v}(\tau) = \mathbf{v}(k \Delta t) \quad k \Delta t \leq \tau < (k + 1) \Delta t \quad (2.35b)$$

Sustituyendo las expresiones (2.35) en la ecuación (2.34), utilizando el cambio de variable  $\mu = (k + 1) \Delta t - \tau$ , se resuelve la integral obteniéndose

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k \Delta t + \Delta t) &= \\ &= \exp(\Delta t \mathbf{F}) \mathbf{x}(k \Delta t) + \int_0^{\Delta t} \exp(\mu \mathbf{F}) [\mathbf{v}_c(k \Delta t) + \mathbf{v}(k \Delta t)] d\mu = \\ &= \exp(\Delta t \mathbf{F}) \mathbf{x}(k \Delta t) + \mathbf{F}^{-1} [\exp(\Delta t \mathbf{F}) - \mathbf{I}] [\mathbf{v}_c(k \Delta t) + \mathbf{v}(k \Delta t)] \end{aligned} \quad (2.36)$$

La expresión anterior tiene siempre sentido porque la matriz del sistema  $\mathbf{F}$  es invertible, y que su matriz inversa  $\mathbf{F}^{-1}$  es

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{pmatrix} -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} & -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

La expresión (2.36) es similar a la expresión (2.28), en ésta para determinar el vector de estado  $\mathbf{x}$  en el instante  $k + 1$  se requiere conocer las condiciones de estado del instante anterior  $k$  y los vectores de excitación  $\mathbf{v}$  y de control  $\mathbf{v}_c$  en el instante  $k$ . Las aceleraciones se pueden determinar por derivación numérica utilizando la siguiente expresión:

$$\ddot{\mathbf{d}}(k \Delta t + \Delta t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}(k \Delta t + \Delta t) - \dot{\mathbf{d}}(k \Delta t)}{\Delta t} \quad (2.38a)$$

La aceleración puede hallarse también a partir de la ecuación discreta del movimiento para el instante  $k + 1$

$$\ddot{\mathbf{d}}(k+1) = \mathbf{M}^{-1} \left[ -\mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}(k+1) - \mathbf{K} \mathbf{d}(k+1) + \mathbf{f}(k+1) + \mathbf{f}_c(k+1) \right] \quad (2.38b)$$

Si se considera interpolación lineal en vez de interpolación constante para la excitación exterior, pueden obtenerse en general resultados más precisos. En dicho caso debe sustituirse la expresión (2.35b) por la siguiente fórmula de interpolación lineal:

$$\mathbf{v}(\tau) = \mathbf{v}(k \Delta t) + (\tau - k \Delta t) \frac{\mathbf{v}(k \Delta t + \Delta t) - \mathbf{v}(k \Delta t)}{\Delta t} \quad k \Delta t \leq \tau < (k+1) \Delta t \quad (2.39)$$

Sustituyendo (2.35a) y (2.39) en (2.34) y utilizando nuevamente el cambio de variable  $\mu = (k+1) \Delta t - \tau$ , se concluye que el vector de estado en el instante  $k+1$  obedece ahora a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k \Delta t + \Delta t) &= \exp(\Delta t \mathbf{F}) \mathbf{x}(k \Delta t) + \\ &+ \int_0^{\Delta t} \exp(\mu \mathbf{F}) \left[ (\Delta t - \mu) \frac{\mathbf{v}(k \Delta t + \Delta t) - \mathbf{v}(k \Delta t)}{\Delta t} + \mathbf{v}(k \Delta t) \right] d\mu + \\ &+ \int_0^{\Delta t} \exp(\mu \mathbf{F}) \mathbf{v}_c(k \Delta t) d\mu = \\ &= \mathbf{A} \mathbf{x}(k \Delta t) + \mathbf{P}_1 \mathbf{v}(k \Delta t + \Delta t) + \mathbf{P}_2 [\mathbf{v}(k \Delta t + \Delta t) - \mathbf{v}(k \Delta t)] + \mathbf{P}_1 \mathbf{v}_c(k \Delta t) \end{aligned}$$

Omitiendo en la escritura el incremento de tiempo  $\Delta t$ , la expresión anterior se escribe en la forma

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{P}_1 \mathbf{v}(k+1) + \mathbf{P}_2 [\mathbf{v}(k+1) - \mathbf{v}(k)] + \mathbf{P}_1 \mathbf{v}_c(k) \quad (2.40a)$$

donde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$  son matrices constantes de dimensión  $2n \times 2n$  definidas por

$$\mathbf{A} = \exp(\Delta t \mathbf{F}) \quad (2.40b)$$

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \quad (2.40c)$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{F}^{-1} \left( \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}_1 - \mathbf{A} \right) \quad (2.40d)$$

La matriz  $\mathbf{A}$  se denomina **matriz del sistema en tiempo discreto**.

La expresión (2.40a) es diferente a las expresiones (2.36) y (2.28), en ella para calcular el vector de estado  $\mathbf{x}$  en el instante  $k + 1$  a más de las condiciones que se requieren en las expresiones (2.28) y (2.36), existe la necesidad de conocer el vector de perturbación  $\mathbf{v}$  en el instante  $k + 1$ .

En el presente trabajo se utilizan preferentemente las expresiones (2.40) en lugar de (2.36) para obtener los desplazamientos y las velocidades en cada instante de muestreo. Las aceleraciones se determinan por derivación numérica a partir de (2.38a).

Es interesante señalar que las dos únicas fuentes de error intrínsecas al procedimiento descrito son: el criterio de interpolación elegido para la excitación, (2.35b) o (2.39), y el cálculo necesariamente aproximado de la matriz  $\mathbf{A}$  (2.40b). En el resto del proceso de cálculo intervienen únicamente operaciones algebraicas que pueden ser consideradas teóricamente exactas. Un estudio exhaustivo de estabilidad y precisión del algoritmo SSP puede encontrarse en los trabajos hechos por López Almansa (1988) y López Almansa et al. (1988a). En los párrafos que siguen a la expresión (2.54) se incluye un breve resumen de dicho estudio.

A continuación se presenta un método para calcular el exponencial de una matriz a partir de la cual se obtiene  $\mathbf{A}$ , método que ha sido usado en este trabajo.

#### 2.4.2 Cálculo de la matriz $\mathbf{A}$

El cálculo de la matriz  $\mathbf{A}$  es la operación más delicada del algoritmo SSP por cuanto involucra el cálculo de la exponencial de una matriz y en ella se concentran todas las inexactitudes inherentes a las operaciones matemáticas comprendidas en el mismo.

Para programar en un ordenador el cálculo de la función exponencial de una matriz existen dos tipos de procedimientos generales: aquellos que utilizan aproximaciones tomando un número finito de términos en series enteras, especialmente de series de Taylor y Padé; y los que calculan la función exponencial de una matriz determinando previamente la de su forma reducida de Jordan y efectuando posteriormente un cambio de base (López Almansa et al. 1988a y López Almansa, 1988). A continuación se muestra el cálculo de  $\mathbf{A}$  por desarrollo en serie de Taylor de  $\Delta t \mathbf{F}$ .

La función exponencial de una matriz cuadrada  $\mathbf{X}$  se define mediante la siguiente serie potencial:

$$\exp(\mathbf{X}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^p \frac{\mathbf{X}^p}{p!} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{X}}{1!} + \frac{\mathbf{X}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{X}^p}{p!} + \cdots \quad (2.41)$$

Si se toma únicamente un número finito  $p$  de términos de la serie anterior se tiene el siguiente resultado aproximado:

$$\exp(\mathbf{X}) \simeq \mathbf{I} + \frac{\mathbf{X}}{1!} + \frac{\mathbf{X}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{X}^p}{p!} = T_p(\mathbf{X}) \quad (2.42)$$

Para que la expresión (2.41) tenga sentido es preciso considerar una norma para las matrices que en ella intervienen. Al aproximar  $\exp(\mathbf{X})$  mediante  $T_p(\mathbf{X})$  es importante disponer de un criterio de medida del error cometido y para ello también es necesario elegir una norma. En el presente subapartado se considera la norma euclídea ordinaria. Siendo  $\mathbf{X}$  una matriz cuadrada e  $\mathbf{y}$  un vector columna de la misma dimensión, la norma euclídea  $\|\mathbf{X}\|$  se define mediante:

$$\|\mathbf{X}\| = \sup_{\|\mathbf{y}\|=1} \|\mathbf{X} \cdot \mathbf{y}\| \quad (2.43)$$

La norma anterior  $\|\mathbf{X}\|$  puede calcularse de forma más comoda teniendo en cuenta que es también igual a la raíz cuadrada del mayor valor propio de la matriz simétrica y definida no negativa  $\mathbf{X}^t \mathbf{X}$ .

El error cometido al aproximar  $\exp(\mathbf{X})$  por  $T_p(\mathbf{X})$  puede acotarse respecto de la norma euclídea anterior mediante la siguiente expresión (Moler y Van Loan, 1978):

$$\|T_p(\mathbf{X}) - \exp(\mathbf{X})\| \leq \frac{\|\mathbf{X}\|^{p+1}}{(p+1)!} \frac{1}{1 - \|\mathbf{X}\|/(p+2)} \leq \varepsilon \quad (2.44)$$

En la desigualdad (2.44)  $\varepsilon$  representa una cota máxima del error cometido en el cálculo aproximado de  $\exp(\mathbf{X})$ .

Si la norma de la matriz  $\mathbf{X}$  toma valores elevados, la desigualdad (2.44) se convierte en inoperante porque es necesario considerar un número  $p$  demasiado elevado de términos para poder garantizar una cota de error  $\varepsilon$  razonablemente pequeña. En este caso es útil aplicar la siguiente propiedad de la función exponencial:

$$\exp(\mathbf{X}) = \exp\left(\frac{\mathbf{X}}{l}\right)^l \quad (2.45)$$

La expresión (2.45) muestra como para calcular  $\exp(\mathbf{X})$  es suficiente hallar  $\exp(\mathbf{X}/l)$  y posteriormente multiplicar el resultado por sí mismo  $l$  veces. Ello tiene la ventaja de que al sustituir  $\mathbf{X}$  por  $\mathbf{X}/l$  en (2.44) la norma de la matriz  $\mathbf{X}/l$  es  $l$  veces menor que la de  $\mathbf{X}$  y puede garantizarse un error razonablemente pequeño con un número  $p$  de términos no excesivo.

Si se elige  $l$  como una potencia entera de dos ( $l = 2^q$ ) la operación de multiplicar  $l$  veces una matriz por sí misma se sustituye por la operación de elevar  $q$  veces una matriz al cuadrado tal como se muestra a continuación:

$$l = 2^q \quad \exp(\mathbf{X}) = \underbrace{\left[ \cdots \left[ \left[ \exp\left(\frac{\mathbf{X}}{2^q}\right) \right]^2 \right]^2 \cdots \right]^2}_{q \text{ veces}} \quad (2.46)$$

La operación anterior es más rápida que multiplicar  $l$  veces una matriz por sí misma puesto que  $q$  es mucho menor que  $l$ .

La igualdad (2.46) puede ser utilizada para evaluar numéricamente la matriz  $\mathbf{A}$  (2.40b) sustituyendo en dicha expresión  $\mathbf{X} = \Delta t \mathbf{F}$ . Eligiendo el valor del entero  $q$  tal que la norma de la matriz  $(\Delta t/2^q)\mathbf{F}$  sea menor que la unidad, al sustituir  $\mathbf{X} = (\Delta t/2^q)\mathbf{F}$  en la acotación (2.44) se obtiene una cota de error  $\varepsilon$  pequeña sin necesidad de considerar un número  $p$  de términos excesivamente grande. Sin embargo, al multiplicar  $q$  veces la matriz  $\exp[(\Delta t/2^q)\mathbf{F}]$  por sí misma en (2.46) el error acotado por (2.44) (siendo  $\mathbf{X} = (\Delta t/2^q)\mathbf{F}$ ) resulta, en general, amplificado y para conocer una cota de error de la norma de  $\exp(\mathbf{X})$  se introduce una matriz de error  $\mathbf{E}$  que verifica las propiedades (Moler y Van Loan, 1978):

$$\mathbf{X}\mathbf{E} = \mathbf{E}\mathbf{X} \quad T_p\left(\frac{\mathbf{X}}{2^j}\right)^{2^j} = \exp(\mathbf{X} + \mathbf{E}) = \exp(\mathbf{X})\exp(\mathbf{E}) \quad (2.47a)$$

$$\|\mathbf{X}\| \leq 2^{j-1} \Rightarrow \|\mathbf{E}\| \leq \frac{1}{(p+1)2^{p-3}} \quad (2.47b)$$

$$\|\exp(\mathbf{X} + \mathbf{E}) - \exp(\mathbf{X})\| \leq \|\exp(\mathbf{X})\| \|\mathbf{E}\| \exp(\|\mathbf{E}\|) \quad (2.47c)$$

Las expresiones (2.47) permiten acotar el error cometido al evaluar de forma aproximada  $\exp(\Delta t \mathbf{F})$  a través de  $[T_p(\Delta t/2^q)\mathbf{F}]^{2^q}$ .

En el caso en que  $\mathbf{X} = \Delta t \mathbf{F}$  la matriz exponencial de  $\mathbf{X}$  es  $\mathbf{A}$  y los parámetros  $p$ ,  $\varepsilon$  y  $q$  introducidos, respectivamente, en las expresiones (2.42), (2.44) y (2.46) influyen en la precisión del cálculo de  $\mathbf{A}$  de forma distinta. El valor de  $\varepsilon$  debe fijarse previamente mientras que los valores de  $p$  y  $q$  se determinan posteriormente. El valor del exponente  $q$  se obtiene a partir de la condición  $\|(\Delta t/2^q)\mathbf{F}\| \leq 1$  de forma que depende únicamente de la norma de la matriz de estado  $\mathbf{F}$  y, consecuentemente, el número  $p$  de términos necesario para garantizar una cota de error  $\varepsilon$  se halla a partir de (2.44) independientemente de la norma de  $\mathbf{F}$ . Un valor menor de  $\varepsilon$  se traduce en un cálculo más preciso de  $\mathbf{A}$ .

La cota de error  $\varepsilon$  dada por (2.44) sustituyendo  $\mathbf{X}$  por  $(\Delta t/2^q)\mathbf{F}$  no es aplicable a  $\Delta t \mathbf{F}$  pero las expresiones (2.47) señalan que un valor más alto de  $p$  proporciona un error más pequeño.

Las operaciones necesarias para calcular el valor de la matriz  $\mathbf{A}$  pueden ser ordenadas de la siguiente forma:

- 1) Elección del mayor error  $\varepsilon$  permitido en la norma de la matriz  $\mathbf{A}$ .
- 2) Cálculo de la norma euclídea de la matriz  $\Delta t \mathbf{F}$ .

Se trata de hallar la raíz cuadrada del mayor valor propio de la matriz  $(\Delta t \mathbf{F})^t \Delta t \mathbf{F}$ , la cual puede expresarse según:

$$(\Delta t \mathbf{F})^t (\Delta t \mathbf{F}) = (\Delta t)^2 \begin{pmatrix} (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K})^t (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}) & (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K})^t (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}) \\ (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C})^t (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}) & \mathbf{I} + (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C})^t (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}) \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

- 3) Determinación del menor exponente  $q$  tal que:

$$\|\Delta t \mathbf{F}\| \leq 2^q \quad (2.49)$$

- 4) Cálculo del número  $p$  de términos que deben considerarse en el desarrollo en serie de Taylor de  $(\Delta t/2^q)\mathbf{F}$  para poder asegurar que el error en la norma de la matriz  $\mathbf{A}$  no supera un valor prefijado. Sustituyendo  $\mathbf{X} = (\Delta t/2^q)\mathbf{F}$  en (2.44) resulta que  $p$  puede tomarse como el menor entero que satisface la desigualdad siguiente:

$$\frac{\left\| \frac{\Delta t \mathbf{F}}{2^q} \right\|^{p+1}}{(p+1)!} \frac{1}{1 - \left\| \frac{\Delta t \mathbf{F}}{2^q} \right\| \frac{1}{p+2}} \leq \varepsilon \quad (2.50)$$

- 5) Se halla  $\exp[(\Delta t/2^q)\mathbf{F}]$  de forma aproximada utilizando (2.42):

$$\exp\left(\frac{\Delta t \mathbf{F}}{2^q}\right) \simeq \mathbf{I} + \frac{1}{1!} \frac{\Delta t \mathbf{F}}{2^q} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta t \mathbf{F}}{2^q}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{p!} \left(\frac{\Delta t \mathbf{F}}{2^q}\right)^p = T_p\left(\frac{\Delta t \mathbf{F}}{2^q}\right) \quad (2.51)$$

La igualdad (2.51) se expresa en forma de producto para minimizar los errores de redondeo y para poder ser programada en ordenador con mayor facilidad. Se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} T_p\left(\frac{\Delta t}{2^q} \mathbf{F}\right) &= \\ &= \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2^q} \mathbf{F} \left( \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2^q} \frac{1}{2} \left( \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2^q} \frac{1}{3} \left( \mathbf{I} + \cdots \left( \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2^q} \frac{1}{p-1} \left( \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2^q} \frac{1}{p} \right) \right) \cdots \right) \right) \right) \quad (2.52) \end{aligned}$$

El cálculo de esta expresión puede implementarse en cualquier lenguaje de programación mediante un bucle en el cual la operación fundamental consiste en premultiplicar en cada iteración una matriz variable  $\mathbf{Y}$  por  $(\Delta t/2^q)\mathbf{F}$ . Llamando  $\mathbf{Y}_{ij}$

( $1 \leq i, j \leq 2$ ) a los cuatro bloques cuadrados que configuran la matriz  $\mathbf{Y}$ , a partir de la expresión de  $\mathbf{F}$  en (2.32b) se deduce inmediatamente la siguiente formulación del producto  $\mathbf{FY}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{FY} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{Y}_{11} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{Y}_{21} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{Y}_{12} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{Y}_{22} \end{pmatrix} \quad (2.53) \end{aligned}$$

Si se tiene en cuenta la expresión particular del producto  $\mathbf{FY}$  mostrada en (2.53) al programar el cálculo de (2.52), se obtiene una notable reducción del número de operaciones con respecto a las que se precisan si se programa el producto de las matrices  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{Y}$  sin tomar en consideración la constitución de  $\mathbf{F}$  en bloques indicada en (2.32b).

- 6) La matriz  $\mathbf{A}$  se obtiene finalmente por aplicación de la igualdad (2.46):

$$\mathbf{A} \simeq \underbrace{\left[ \dots \left[ \left[ \left[ T_p \left( \frac{\Delta t}{2^q} \mathbf{F} \right) \right]^2 \right]^2 \right]^2 \dots \right]}_{q \text{ veces}}^2 \quad (2.54)$$

Tal como se dice en el subapartado 2.4.1, López Almansa (1988) realiza estudios del error cometido en el cálculo de  $\mathbf{A}$ , a partir del error en la respuesta de desplazamiento de un sistema no amortiguado con vibración libre sometido a un desplazamiento inicial unidad. Para un modo propio  $i$  dicho autor determina, por ejemplo, que con  $p = 5$  y  $q = 8$  se obtiene un error menor a  $10^{-10}$  siempre que el intervalo  $\Delta t$  sea menor que  $0.2 T_i$  ( $\frac{\Delta t}{T_i} < 0.2$ ), siendo  $T_i$  el período natural del modo propio. Para otros valores de  $p$  y de  $q$  se obtienen errores igualmente pequeños.

La otra fuente de error constituye la interpolación de la excitación en (2.35b) o (2.39), siendo ésta mucho más importante que el error que se introduce en el cálculo aproximado de la matriz  $\mathbf{A}$ . Es decir, por más que se tomen valores de  $p$  y de  $q$  que hagan más exacto el valor de  $\mathbf{A}$ , si el haber tomado un valor de  $\Delta t$  muy alto respecto al período de la excitación sinusoidal (o del contenido de frecuencias de una excitación cualquiera) hace que el cálculo sea inexacto, esta inexactitud predominará sobre la otra. En general, el algoritmo SSP es notablemente más exacto que los otros métodos (diferencias centrales,  $\beta$  de Newmark y  $\theta$  de Wilson), y los valores de  $\Delta t$  que se pueden tomar en el algoritmo SSP pueden ser varias veces mayores que los valores que se toman en esos métodos para alcanzar el mismo nivel de exactitud.

Respecto a la estabilidad, es necesario comentar que el simple análisis de los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$  permiten conocer la estabilidad del algoritmo (ver capítulo 3), es decir, si el módulo máximo de los valores propios está dentro del círculo unidad, el algoritmo SSP es estable. Estudios de estabilidad de sistemas dinámicos pueden encontrarse en los trabajos realizados por LaSalle y Lefschetz (1961), Ogata (1967), Willems (1970), López Almansa et al. (1988a) y Andrade (1992).

#### 2.4.3 Esquema general de implementación del algoritmo SSP

Una secuencia de operaciones que puede seguirse en la implementación es la siguiente:

- a) Obtención de la matriz del sistema  $\mathbf{F}$  a partir de las matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{K}$  según la expresión (2.32b).
- b) Cálculo de la matriz  $\mathbf{F}^{-1}$  a partir de (2.37).
- c) Determinación de la matriz del sistema en tiempo discreto  $\mathbf{A}$  de acuerdo con la expresión (2.40b). Se utiliza en este caso el desarrollo por series de Taylor (apartado 2.4.2).
- d) Cálculo de las matrices  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$  definidas, respectivamente, en (2.40c) y (2.40d).
- e) Consideración de las condiciones iniciales  $\mathbf{z}_0$ .
- f) Obtención del vector de excitación  $\mathbf{v}$  en cada instante.
- g) Obtención del vector de control  $\mathbf{v}_c$  en cada instante.
- h) Aplicación recurrente de (2.40a) y (2.38) para conocer los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en cada instante de muestreo.

## 2.5 CONTROL PREDICTIVO DE ESTRUCTURAS

El control predictivo fue formulado inicialmente en tiempo discreto (Martín Sánchez 1974, 1976) y su estrategia de control consiste en predecir en cada instante de muestreo, un valor de la salida para el instante siguiente y obtener la señal de control imponiendo que la salida predicha sea igual a una salida deseada. La salida se predice en cada instante a partir del valor real del instante anterior mediante un modelo discreto que simula la evolución del sistema. Este modelo se denomina **modelo predictivo**.

Con posterioridad se amplía el alcance de las predicciones, definiendo un instante posterior  $k + \lambda$  hasta el que se puede predecir la evolución del sistema (Rodellar 1982, Rodellar et al. 1987). Al intervalo  $[k, k + \lambda]$  se denomina **intervalo de predicción** donde  $\lambda$  constituye la **longitud del horizonte de predicción**. En cada instante el modelo predictivo predice, a partir de la salida real del sistema en el instante  $k$ , la secuencia de salidas en los instantes futuros anteriores al horizonte de predicción. La acción de control es generada en cada instante minimizando una función de coste.

A continuación se presenta un esquema general de la formulación de la estrategia del control predictivo.

### 2.5.1 La estrategia de Control Predictivo

Los puntos básicos para formular la estrategia de control predictivo pueden resumirse en:

- 1) En cada instante de muestreo  $k$  se define un intervalo (horizonte) de predicción  $[k, k + \lambda]$  sobre un número finito de instantes  $\lambda$ .
- 2) Se considera un modelo del sistema en tiempo discreto para predecir una secuencia de salidas en el intervalo de predicción en función de una secuencia de control. Dicha predicción se realiza a partir de la salida medida en el instante de muestreo  $k$ .
- 3) Se genera una secuencia de salida y una secuencia de control tales que verifiquen un criterio de rendimiento en el intervalo de predicción.
- 4) El control que se aplica al sistema en el instante  $k$ , es el primer valor de la secuencia de control obtenida en 3). El resto de la secuencia de control en  $[k + 1, k + \lambda]$  no se aplica al sistema, dado que el procedimiento se redefine en cada instante de muestreo  $k$ .

En el siguiente subapartado se concretan estos puntos en la formulación de una ley de control activo de estructuras.

### 2.5.2 Algoritmo de Control Predictivo

El comportamiento dinámico lineal de una estructura sometida a una excitación en presencia de unas fuerzas de control activo puede representarse en espacio de estado mediante el siguiente modelo discreto de primer orden:

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{z}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k - n_r) + \mathbf{w}(k) \quad (2.55)$$

En la expresión anterior las matrices constantes  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son, respectivamente, la **matriz del sistema en tiempo discreto** y la **matriz de control en tiempo discreto**.  $\mathbf{z}(k)$  es el vector de estado en el instante  $k$  y  $\mathbf{w}(k)$  es el vector que contiene las características de la excitación.  $\mathbf{u}(k - n_r)$  es el vector de control generado en el instante  $k - n_r$ , el cual no ejerce su efecto sobre la estructura hasta el instante  $k$ , siendo el número entero  $n_r$  el **número real de retardos del sistema**, es decir, el número de períodos de muestreo que transcurren desde que se ordena a los actuadores que ejerzan una acción sobre la estructura hasta que esta acción se ejerce efectivamente debido a la inercia mecánica de los mismos. Si se llama  $T$  al **periodo de muestreo**, el **tiempo de respuesta** de los actuadores  $\tau_r$  se considera que es un múltiplo entero de  $n_r$ .

$$\tau_r = n_r T \quad (2.56a)$$

El modelo mostrado en la expresión (2.55) puede ser generado a partir del algoritmo SSP descrito en el apartado 2.4 estableciendo las siguientes equivalencias entre las expresiones (2.40a) y (2.55):

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{v}_c(k) = \mathbf{B} \mathbf{u}(k - n_r) \quad (2.56b)$$

$$\mathbf{v}_c(k) = \mathbf{L} \mathbf{u}(k - n_r) \quad (2.56c)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}_1 \mathbf{L} = \mathbf{P}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{J} \end{pmatrix} \quad (2.56d)$$

$\mathbf{v}_c(k)$  es el vector de control que actúa sobre la estructura en el instante  $k$  el cual es generado en el instante  $k - n_r$  y consiste en  $n_a$  fuerzas cuyas características se contienen en el vector  $\mathbf{u}$ .  $\mathbf{L}$  es una matriz de dimensiones  $2n \times n_a$  que contiene a las submatrices  $\mathbf{0}$  y  $\mathbf{J}$  de dimensión  $n \times n_a$ . La submatriz  $\mathbf{J}$  tiene como componentes a 0 o 1 dependiendo de la presencia o ausencia de actuadores en los distintos grados de libertad.

El vector  $\mathbf{w}(k)$  depende del tipo de interpolación que se haya utilizado en la excitación. Para interpolación constante de acuerdo con (2.35b) y (2.36)  $\mathbf{w}(k)$  es igual a

$$\mathbf{w}(k) = \mathbf{P}_1 \mathbf{v}(k) \quad (2.56e)$$

Para interpolación lineal de acuerdo con (2.39) y (2.40)  $\mathbf{w}(k)$  es igual a

$$\mathbf{w}(k) = \mathbf{P}_1 \mathbf{v}(k+1) + \mathbf{P}_2 [\mathbf{v}(k+1) - \mathbf{v}(k)] \quad (2.56f)$$

Las características de la respuesta de la estructura se contienen en el vector de salida  $\mathbf{y}$ . Los vectores de salida  $\mathbf{y}(k)$  y de estado  $\mathbf{x}(k)$  en un mismo instante  $k$  se relacionan mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H} \mathbf{x}(k) \quad (2.57)$$

donde la matriz constante  $\mathbf{H}$  es la matriz de salida. En este caso, se considera que todas las variables de estado son medibles y por tanto se relacionan con el vector de salida por la matriz constante  $\mathbf{H}$ , que en muchos casos se toma igual a la matriz identidad.

El modelo definido por (2.55) y (2.57) representa en tiempo discreto la evolución dinámica del sistema controlado, y para predecir la respuesta del sistema en el intervalo de predicción  $[k, k + \lambda + \hat{n}_r]$  se considera un modelo predictivo que se formula en base a las siguientes igualdades:

$$\hat{\mathbf{x}}(k + j | k) = \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{x}}(k + j - 1 | k) + \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{u}}(k + j - 1 - \hat{n}_r | k) \quad (2.58a)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k + j | k) = \hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{x}}(k + j | k) \quad j = 1, \dots, \lambda + \hat{n}_r \quad (2.58b)$$

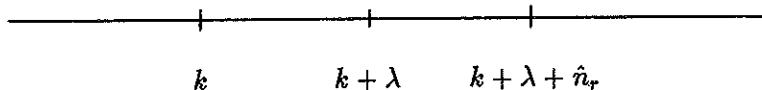
Los vectores  $\hat{\mathbf{x}}(k + j | k)$  y  $\hat{\mathbf{y}}(k + j | k)$  son, respectivamente los vectores de estado y de salida predichos en el instante  $k$  para el instante futuro  $k + j$ . El vector  $\hat{\mathbf{u}}(k + j - 1 - \hat{n}_r | k)$  es el vector de control predicho en el instante  $k$  para el instante  $k + j - 1 - \hat{n}_r$ , siendo  $\hat{n}_r$  el número de períodos de muestreo que se estima como tiempo de respuesta de los actuadores.  $k$  representa el instante de muestreo presente mientras que  $[k, k + \lambda + \hat{n}_r]$  es un intervalo de predicción ficticio en el cual el modelo (2.58) se usa para predecir una secuencia de vectores de estado  $\hat{\mathbf{x}}(k + 1 | k), \dots, \hat{\mathbf{x}}(k + \lambda + \hat{n}_r | k)$ .

El modelo predictivo (2.58) tiene una estructura similar a la de (2.55) y (2.57) aunque los valores de  $\mathbf{A}$  y de  $\hat{\mathbf{A}}$ , de  $\mathbf{B}$  y de  $\hat{\mathbf{B}}$ , de  $\mathbf{H}$  y de  $\hat{\mathbf{H}}$ , así como los de  $n_r$  y  $\hat{n}_r$  pueden diferir por errores de estimación. Además no se incluye la excitación exterior en la predicción puesto que sus valores en los instantes futuros son desconocidos.

El objetivo fundamental del modelo predictivo (2.58) es predecir en los instantes  $k + 1, \dots, k + \lambda + \hat{n}_r$  los vectores de estado  $\hat{\mathbf{x}}(k + j | k)$  y de salida  $\hat{\mathbf{y}}(k + j | k)$  ( $j = 1, \dots, \lambda + \hat{n}_r$ ) a partir del vector de estado real del sistema en el instante  $k$ ,  $\mathbf{x}(k)$ . A tal efecto, el intervalo de predicción  $[k, k + \lambda + \hat{n}_r]$  se subdivide en los intervalos  $[k, k + \lambda - 1]$  y  $[k + \lambda, k + \lambda + \hat{n}_r]$ , figura 2.1.

La secuencia de vectores de estado predichos  $\hat{\mathbf{x}}$  proporcionada por la expresión (2.58a) se construye recurrentemente a partir del estado real del sistema en el instante inicial  $k$ , es decir

$$\hat{\mathbf{x}}(k | k) = \mathbf{x}(k) \quad (2.59)$$



**Figura 2.1 Intervalo temporal ficticio de predicción**

La secuencia de vectores de control predichos  $\hat{\mathbf{u}}$ , en los instantes previos a  $k$ , son iguales a los vectores de control  $\mathbf{u}$  aplicados en dichos instantes sobre la estructura:

$$\hat{\mathbf{u}}(k-j|k) = \mathbf{u}(k-j) \quad (j = 1, \dots, \hat{n}_r) \quad (2.60)$$

Los vectores de control  $\hat{\mathbf{u}}$  correspondientes a los instantes comprendidos entre  $k$  y  $k + \lambda - 1$  intervienen en la predicción de  $\hat{\mathbf{x}}(k+j|k)$  ( $j = 1, \dots, \lambda + \hat{n}_r$ ) mediante (2.58a) y constituyen la secuencia desconocida de vectores que verifican un criterio de rendimiento adecuado.

Los vectores de control  $\hat{\mathbf{u}}$  que corresponden al intervalo  $[k + \lambda, k + \lambda + \hat{n}_r]$  no intervienen en el modelo predictivo (2.58a) y no condicionan la predicción de  $\hat{\mathbf{x}}(k+j|k)$  ( $j = 1, \dots, \lambda + \hat{n}_r$ ).

Un criterio de rendimiento para obtener el valor de la secuencia de vectores de control  $\hat{\mathbf{u}}(k|k), \dots, \hat{\mathbf{u}}(k+\lambda-1|k)$  puede consistir en la minimización de la siguiente función de coste:

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\lambda+\hat{n}_r} [\hat{\mathbf{y}}(k+j|k) - \mathbf{y}_r(k+j|k)]^t \mathbf{Q}_j [\hat{\mathbf{y}}(k+j|k) - \mathbf{y}_r(k+\lambda|k)] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\lambda-1} \hat{\mathbf{u}}(k+j|k)^t \mathbf{R}_j \hat{\mathbf{u}}(k+j|k) \end{aligned} \quad (2.61)$$

donde la secuencia de vectores de salida  $\mathbf{y}_r(\cdot|k)$  pertenece a una trayectoria de referencia generada en el instante  $k$  a partir de la salida real del sistema en dicho instante y que evoluciona en los instantes futuros hacia una consigna que en el control activo de estructuras es siempre nula.  $\mathbf{Q}_j$  ( $j = 1, \dots, \lambda + \hat{n}_r$ ) y  $\mathbf{R}_j$  ( $j = 0, \dots, \lambda - 1$ ) son matrices de peso simétricas.

La minimización de la función de coste  $J$  dada en (2.61) impone que los valores de la salida predicha estén próximos a los de la trayectoria de referencia en el interior del intervalo de predicción  $[k, k + \lambda + \hat{n}_r]$  limitando también los valores de los vectores  $\hat{\mathbf{u}}$ . La secuencia desconocida de vectores de control  $\hat{\mathbf{u}}(k|k), \dots, \hat{\mathbf{u}}(k+\lambda-1|k)$  puede ser hallada minimizando el funcional  $J$ , resultando ecuaciones matriciales de Riccati similares a las que se obtienen en el control óptimo.

La búsqueda de soluciones más sencillas conduce a la estrategia de pretender únicamente el ajuste entre  $\hat{\mathbf{y}}$  e  $\mathbf{y}_r$ , en el instante de predicción  $k + \lambda + \hat{n}_r$ , en cuyo caso las matrices  $\mathbf{Q}_j$  correspondientes a los instantes anteriores al mismo pueden elegirse nulas:

$$\mathbf{Q}_1 = \cdots = \mathbf{Q}_{\lambda+\hat{n}_r-1} = \mathbf{0} \quad \mathbf{Q}_{\lambda+\hat{n}_r} = \mathbf{Q} \quad (2.62)$$

Una posibilidad que permite obtener unas expresiones sencillas en la minimización de  $J$  es considerar una secuencia uniforme de los vectores de control  $\hat{\mathbf{u}}(\cdot | k)$  en el intervalo  $[k, k + \lambda - 1]$ :

$$\mathbf{u}(k) = \hat{\mathbf{u}}(k | k) = \hat{\mathbf{u}}(k + 1 | k) = \cdots = \hat{\mathbf{u}}(k + \lambda - 1 | k) \quad (2.63)$$

Considerando la secuencia constante mostrada en (2.63), en la minimización de  $J$  únicamente es preciso obtener el valor de un vector incógnita igual al vector de control que debe ser generado en el instante  $k$  para aproximar en el instante  $k + \lambda + \hat{n}_r$  la salida predicha a la salida de referencia. En el instante siguiente  $k + 1$ , se genera una nueva secuencia uniforme de vectores de control y se obtiene un nuevo valor  $\mathbf{u}(k + 1)$  del vector de control que aproxima en el instante  $k + 1$  los vectores de salida predicho y de referencia.

La sustitución de (2.62) y (2.63) en (2.61) proporciona la siguiente expresión para la función de coste  $J$ :

$$\begin{aligned} J = \frac{1}{2} [\hat{\mathbf{y}}(k + \lambda + \hat{n}_r | k) - \mathbf{y}_r(k + \lambda + \hat{n}_r | k)]^t \mathbf{Q} [\hat{\mathbf{y}}(k + \lambda + \hat{n}_r | k) - \mathbf{y}_r(k + \lambda + \hat{n}_r | k)] + \\ + \frac{1}{2} \mathbf{u}(k)^t \mathbf{R} \mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (2.64a)$$

donde

$$\mathbf{R} = \sum_{j=0}^{\lambda-1} \mathbf{R}_j \quad (2.64b)$$

En las expresiones (2.64)  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  son matrices simétricas que ponderan en la minimización de  $J$  la influencia de la diferencia entre la respuesta predicha y la respuesta perteneciente a la trayectoria de referencia y la influencia del valor de la señal de control, respectivamente. Una matriz  $\mathbf{Q}$  de valores elevados y una matriz  $\mathbf{R}$  de valor más pequeño implica una disminución importante de la diferencia entre  $\hat{\mathbf{y}}$  e  $\mathbf{y}_r$ , pero con una señal de control  $\mathbf{u}$  grande. Por el contrario, valores altos de la matriz  $\mathbf{R}$  restringen fuertemente el valor de la señal de control y, consecuentemente, ésta no puede actuar eficazmente sobre la estructura para reducir su respuesta.

La expresión (2.64a) muestra la repercusión del valor del horizonte de predicción  $\lambda$  en las características del control: un valor pequeño de  $\lambda$  supone pretender la aproximación de la respuesta al valor de referencia al cabo de poco tiempo y, por tanto, implica una acción de control energética con una importante disminución de la respuesta de la estructura. Por el contrario, un valor elevado de  $\lambda$  corresponde a un control más suave en el que únicamente se pretende la atenuación de la respuesta al cabo de un horizonte más lejano. La descripción general de la estrategia de control predictivo contenida en el subapartado 2.5.1 muestra que existen diferencias cualitativas (y por tanto cuantitativas) entre los casos  $\lambda = 1$  y  $\lambda > 1$ . Cuando  $\lambda = 1$  la fuerza de control se calcula en cada instante  $k$  para que en el instante siguiente  $k + 1$  la función de coste  $J$  sea mínima, y en dicho instante se parte de la respuesta real para obtener una nueva fuerza de control que minimize a  $J$  en el instante  $k + 2$ . Por el contrario, cuando  $\lambda > 1$  la situación es distinta ya que en un instante  $k$  la fuerza de control se halla imponiendo la minimización de  $J$  en el instante  $k + \lambda$  y, antes de alcanzar dicho instante, se modifica la estrategia apuntando siempre hacia un horizonte alejado una longitud  $\lambda$ . Esta diferencia de comportamiento se pone de manifiesto en el análisis desarrollado en este trabajo.

Para determinar el valor de  $\hat{\mathbf{x}}(k + \lambda + \hat{n}_r | k)$ , vector de estado predicho en el instante  $k + \lambda + \hat{n}_r$  a partir del instante  $k$ , puede aplicarse reiteradamente la igualdad (2.58a) para  $j = 1, \dots, \lambda + \hat{n}_r$ :

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) &= \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k - \hat{n}_r) \\
\hat{\mathbf{x}}(k+2|k) &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k+1 - \hat{n}_r) = \\
&= \hat{\mathbf{A}}^2\mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k - \hat{n}_r) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k+1 - \hat{n}_r) \\
\hat{\mathbf{x}}(k+3|k) &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k+2|k) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k+2 - \hat{n}_r) = \\
&= \hat{\mathbf{A}}^3\mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{A}}^2\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k - \hat{n}_r) + \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k+1 - \hat{n}_r) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k+2 - \hat{n}_r) \\
&\quad \dots \\
\hat{\mathbf{x}}(k+\hat{n}_r|k) &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k+\hat{n}_r-1|k) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k-1) = \\
&= \hat{\mathbf{A}}^{\hat{n}_r}\mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{A}}^{\hat{n}_r-1}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k-\hat{n}_r) + \dots + \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k-2) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k-1) \\
\hat{\mathbf{x}}(k+\hat{n}_r+1|k) &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k+\hat{n}_r|k) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) = \\
&= \hat{\mathbf{A}}^{\hat{n}_r+1}\mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{A}}^{\hat{n}_r}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k-\hat{n}_r) + \dots + \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k-1) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) \\
\hat{\mathbf{x}}(k+\hat{n}_r+2|k) &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(k+\hat{n}_r+1|k) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) = \\
&= \hat{\mathbf{A}}^{\hat{n}_r+2}\mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{A}}^{\hat{n}_r+1}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k-\hat{n}_r) + \dots + \hat{\mathbf{A}}^2\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k-1) + \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}(k + \hat{n}_r + 3 | k) &= \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{x}}(k + \hat{n}_r + 2 | k) + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}(k) = \\
&= \hat{\mathbf{A}}^{\hat{n}_r+3} \mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{A}}^{\hat{n}_r+2} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}(k - \hat{n}_r) + \dots + \\
&+ \hat{\mathbf{A}}^3 \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}(k - 1) + \hat{\mathbf{A}}^2 \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}(k) + \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}(k) + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}(k) \\
&\quad \dots \dots \\
&\quad \dots \dots \\
\hat{\mathbf{x}}(k + \hat{n}_r + \lambda | k) &= \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{x}}(k + \hat{n}_r + \lambda - 1 | k) + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}(k) = \\
&= \hat{\mathbf{A}}^{\hat{n}_r+\lambda} \mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{A}}^{\hat{n}_r+\lambda-1} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}(k - \hat{n}_r) + \dots + \\
&+ \hat{\mathbf{A}}^\lambda \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}(k - 1) + \hat{\mathbf{A}}^{\lambda-1} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}(k) + \hat{\mathbf{A}}^{\lambda-2} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}(k) + \dots + \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}(k) + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}(k)
\end{aligned}$$

La expresión anterior define el valor del vector de estado predicho al cabo del horizonte de predicción. Dicha expresión puede escribirse de la siguiente forma:

$$\hat{\mathbf{x}}(k + \lambda + \hat{n}_r | k) = \hat{\mathbf{T}} \mathbf{x}(k) + \psi(k) + \hat{\mathbf{Z}}_0 \mathbf{u}(k) \quad (2.65a)$$

siendo

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{A}}^{\lambda+\hat{n}_r} \quad (2.65b)$$

$$\psi(k) = \hat{\mathbf{Z}}_1 \mathbf{u}(k - 1) + \dots + \hat{\mathbf{Z}}_{\hat{n}_r} \mathbf{u}(k - \hat{n}_r) \quad (2.65c)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_i = \hat{\mathbf{A}}^{\lambda+i-1} \hat{\mathbf{B}} \quad (i = 1, \dots, \hat{n}_r) \quad (2.65d)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_0 = (\hat{\mathbf{A}}^{\lambda-1} + \hat{\mathbf{A}}^{\lambda-2} + \dots + \hat{\mathbf{A}}^2 + \hat{\mathbf{A}} + \mathbf{I}) \hat{\mathbf{B}} \quad (2.65e)$$

Las expresiones (2.65) definen el estado predicho en el instante  $[k + \lambda + \hat{n}_r]$  a partir del estado real del sistema en el instante  $k$ .

Utilizando (2.58b) en (2.65) se obtiene la siguiente expresión para la respuesta predicha:

$$\hat{\mathbf{y}}(k + \lambda + \hat{n}_r | k) = \hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{T}} \mathbf{x}(k) + \hat{\mathbf{H}} \psi(k) + \hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0 \mathbf{u}(k) \quad (2.66)$$

El valor de  $\mathbf{u}(k)$  se halla minimizando la expresión de  $J$  en (2.64a) teniendo en cuenta (2.66). La optimización de  $J$  exige la anulación de su gradiente en la dirección del vector  $\mathbf{u}(k)$ :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}(k)} = 0 \quad (2.67)$$

El carácter de mínimo exige además que la matriz hessiana que contiene las derivadas segundas de  $J$  respecto de  $\mathbf{u}(k)$  sea semidefinida positiva. Si dicha matriz hessiana es además definida positiva se tiene un mínimo en sentido estricto.

Derivando la expresión (2.64a) y teniendo en cuenta (2.66) se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}(k)} = (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} [\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{T}} \mathbf{z}(k) + \hat{\mathbf{H}} \psi(k) + \hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0 \mathbf{u}(k) - \mathbf{y}_r(k + \lambda + \hat{n}_r | k)] + \mathbf{R} \mathbf{u}(k) \quad (2.68a)$$

Derivando nuevamente la expresión (2.68a) se obtiene el valor de la matriz hessiana:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial^2 \mathbf{u}(k)} = (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0) + \mathbf{R} \quad (2.68b)$$

Utilizando la condición de mínimo (2.67) y con (2.68a) puede deducirse el valor del vector de control  $\mathbf{u}(k)$  que corresponde a un extremo relativo de  $J$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(k) &= \\ &= -[(\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0) + \mathbf{R}]^{-1} \left\{ (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} [\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{T}} \mathbf{z}(k) + \hat{\mathbf{H}} \psi(k) - \mathbf{y}_r(k + \lambda + \hat{n}_r | k)] \right\} \end{aligned} \quad (2.69)$$

La expresión (2.69) tiene únicamente sentido si la matriz  $(\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0) + \mathbf{R}$  es inversible. Dicha matriz coincide con la matriz hessiana hallada en (2.68b) y, consecuentemente, si la matriz  $(\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0) + \mathbf{R}$  es definida positiva se cumplen simultáneamente las dos condiciones siguientes: las expresiones (2.67) y (2.68) definen únicamente el vector de control  $\mathbf{u}(k)$  correspondiente a un extremo relativo de  $J$  y puede asegurarse que dicho extremo es un mínimo en sentido estricto. Por tanto, las matrices de peso  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  deben elegirse en cada caso de forma que la matriz  $(\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0) + \mathbf{R}$  sea definida positiva.

Para determinar en la expresión (2.69) el valor del vector  $\mathbf{u}(k)$  es preciso generar la trayectoria de referencia a la que pertenece el vector  $\mathbf{y}_r(k + \lambda + \hat{n}_r | k)$ . La trayectoria de referencia puede generarse en cada instante en tiempo discreto de forma recurrente mediante un modelo de primer orden en el que no se tiene en cuenta a la perturbación exterior ya que en el contexto de la dinámica de estructuras sus valores futuros suelen ser impredecibles. La expresión iterativa que define la trayectoria de referencia generada a partir del instante  $k$  es la siguiente:

$$\mathbf{y}_r(k+j|k) = \mathbf{A}_r \mathbf{y}_r(k+j-1|k) \quad (2.70)$$

En la expresión anterior  $\mathbf{A}_r$  es una matriz constante, independiente de  $k$  y de  $j$ , llamada matriz de referencia.

La trayectoria generada en el instante  $k$  parte de la respuesta real en dicho instante  $\mathbf{y}(k)$ . Ello significa que en dicho instante la respuesta real del sistema  $\mathbf{y}$  y la perteneciente a la trayectoria de referencia  $\mathbf{y}_r$  son iguales:

$$\mathbf{y}_r(k|k) = \mathbf{y}(k) \quad (2.71)$$

La aplicación reiterada de (2.70) cuando  $j = 1, \dots, \hat{n}_r$  teniendo en cuenta (2.71) permite obtener el valor de la respuesta de referencia en el instante  $k + \lambda + \hat{n}_r$ :

$$\mathbf{y}_r(k + \lambda + \hat{n}_r | k) = \mathbf{T}_r \mathbf{y}(k) \quad (2.72a)$$

en la que la matriz  $\mathbf{T}_r$  tiene el siguiente valor:

$$\mathbf{T}_r = \mathbf{A}_r^{\lambda + \hat{n}_r} \quad (2.72b)$$

Frecuentemente en la simulación del comportamiento dinámico de estructuras se considera una matriz de referencia  $\mathbf{A}_r = \mathbf{0}$  de forma que se genera una trayectoria de referencia nula. Dicho caso corresponde a una acción de control intensa en la que se pretende que la respuesta predicha al cabo del horizonte de predicción se aproxime a la respuesta nula. Otra posibilidad es generar  $\mathbf{A}_r$  de la misma manera que se genera  $\mathbf{A}$  en (2.40b) a partir de  $\mathbf{F}$  en (2.32b), pero con la diferencia que en este caso se toma una matriz  $\mathbf{C}$  que contiene unas fracciones de amortiguamiento elevadas. De esta forma, el sistema al ser muy amortiguado tiende a reducir rápidamente la respuesta y no producir desplazamientos, es decir físicamente se genera una trayectoria de referencia que tiende a ser nula rápidamente.

La sustitución del resultado (2.72) en la expresión de  $\mathbf{u}(k)$  en (2.69) proporciona el siguiente resultado:

$$\mathbf{u}(k) = -[(\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0) + \mathbf{R}]^{-1} [(\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} \hat{\mathbf{H}} (\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T}_r) \mathbf{x}(k) + (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} \hat{\mathbf{H}} \psi(k)] \quad (2.73)$$

Todos los elementos que intervienen en el segundo miembro de la igualdad anterior son conocidos. Teniendo en cuenta (2.65c) la expresión (2.73) puede escribirse también de la siguiente forma:

$$\mathbf{u}(k) = -\hat{\mathbf{D}} \mathbf{x}(k) - \sum_{i=1}^{\hat{n}_r} \hat{\mathbf{K}}_i \mathbf{u}(k-i) \quad (2.74a)$$

en la que  $\hat{\mathbf{D}}$  se denomina matriz de ganancia y tiene el siguiente valor:

$$\hat{\mathbf{D}} = [(\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0) + \mathbf{R}]^{-1} (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} \hat{\mathbf{H}} (\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{T}_r) \quad (2.74b)$$

Las matrices de memoria  $\hat{\mathbf{K}}_i$  obedecen a la expresión:

$$\hat{\mathbf{K}}_i = [(\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0) + \mathbf{R}]^{-1} (\hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_0)^t \mathbf{Q} \hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{Z}}_i \quad (i = 1, \dots, \hat{n}_r) \quad (2.74c)$$

Las igualdades (2.74) y (2.65) y (2.72b) definen el algoritmo de control predictivo de estructuras considerado en este trabajo.

## 2.6 COMENTARIOS FINALES

En este capítulo se ha presentado la formulación del Control Predictivo de Estructuras que se utiliza en los capítulos siguientes para realizar un análisis de eficiencia del mismo. Dicha formulación se sustenta en una representación en espacio de estado por lo que previamente se han expuesto los conceptos básicos de representación de estado de sistemas.

## REFERENCIAS

- Andrade R.A.** (1992). Metodología para la implementación de sistemas de control predictivo de estructuras, *Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña*.
- Bathe K.J. y Wilson E.L.** (1976), *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- Clough W. y Penzien J.** (1975), *Dynamics of Structures*, Mc. Graw-Hill, New York.
- Hurty W.C y Rubinstein M.F.** (1964), *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- LaSalle J. y Lefschetz S.** (1961), *Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications*, Academic Press, New York.
- López Almansa F.** (1988). Contribución al desarrollo de sistemas de control de estructuras de edificación mediante cables activos, *Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña*.
- López Almansa F., Rodellar J. y Barbat A.H.** (1988a), *Procedimientos de espacio de estado en dinámica de estructuras*, ETSICCPB-UPC, Barcelona.
- López Almansa F., Rodellar J. y Barbat A.H.** (1988b). SSP algorithm for linear and nonlinear dynamic response simulation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.26, No.12, pp. 2687-2706.

- Martín Sánchez J.M.** (1974), Contribución a los sistemas adaptativos con modelo de referencia a partir de la teoría de la hiperestabilidad, *Tesis Doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona*.
- Martín Sánchez J.M.** (1976), A new solution to adaptive control, *Proc. of IEEE*, Vol. 64, N<sup>o</sup> 8, pp. 461–464.
- Moler C. y Van Loan C.** (1978), Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, *SIAM Review*, Vol.20, N<sup>o</sup> 4, pp. 801–836.
- Ogata K.** (1967), *State Space Analysis of Control Systems*, Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- Rodellar J.** (1982), Diseño óptimo del bloque de consigna en el sistema de control adaptativo-predictivo, *Tesis Doctoral, Universitat de Barcelona*.
- Rodellar J. y Barbat A.H.** (1985), Numerical analysis of the seismic response. A state space approach, *Proceedings of the NUMETA '85 Conference*, Swansea, A.A., Balkema Publ., pp 273–279.
- Rodellar J., Barbat A.H. y Martín Sánchez J.M.** (1987), Predictive control of structures, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol.113, No.6, pp 797–812.
- Roessel J., Whitman R.V. y Dobry R.** (1973), Modal analysis for structures with foundation interaction, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 99, pp. 399–416.
- Willems J.L.** (1970), *Stability Theory of Dynamical Systems*, Thomas Nelson, Waton - on - Thames, Surrey, England.

## **Capítulo 3**

# **ELEMENTOS PARA UN ANALISIS DE EFICIENCIA DEL CONTROL PREDICTIVO DE ESTRUCTURAS**

### **3.1 INTRODUCCION**

En el área del control de estructuras la estrategia de control predictivo ha sido utilizada hasta ahora en ensayos numéricos de simulación o en aplicaciones experimentales sobre modelos a escala reducida. Sin embargo, la mayor parte de estos estudios han sido llevados a cabo sin determinar de forma sistemática la influencia de las características de los elementos que intervienen en el lazo de control (especialmente estructura, algoritmo de control, mecanismos actuadores y excitación) en el rendimiento del mismo. En este capítulo se presentan las herramientas a partir de las cuales se realiza un análisis numérico de la eficacia del control predictivo de estructuras. En los apartados 3.4 y 3.5 se resumen los más importantes resultados obtenidos en sistemas de un grado de libertad y en el capítulo 4 en sistemas de varios grados de libertad. Estas herramientas consisten esencialmente en criterios de estabilidad y cuantificación de la acción de control mediante el cálculo de frecuencias y amortiguamientos equivalentes y mediante índices de rendimiento modales.

El análisis que se desarrolla en este trabajo es de naturaleza paramétrica, a este respecto en este capítulo se presentan los parámetros más significativos que intervienen en el lazo de control y que, por tanto, deben ser considerados en el análisis. La estructura se caracteriza por medio de sus parámetros dinámicos: períodos y amortiguamientos para cada modo de vibración.

Se parte de la descripción de la estrategia de control predictivo presentada en el capítulo anterior para deducir condiciones de estabilidad del lazo de control, las cuales pueden expresarse de forma sencilla mediante acotaciones del módulo máximo de los valores propios de una matriz.

Se muestra que el efecto de la acción de control en ausencia de tiempos de retardo es equivalente a un incremento de la rigidez y del amortiguamiento de la estructura.

La herramienta fundamental de análisis utilizada son los espectros de control los cuales son curvas que resumen los resultados de la acción de control sobre un modo (o sistema de un grado de libertad). Estos elementos son utilizados para estudiar de forma numérica la eficacia de la estrategia de control predictivo sobre sistemas de un grado

de libertad considerando condiciones ideales de funcionamiento del lazo de control cuyos resultados se presentan en el apartado 3.4 mientras que en el apartado 3.5 se muestran los resultados de analizar la robustez del mismo. El análisis de robustez considera distintas situaciones irregulares de los elementos que intervienen en el lazo cerrado de control: discrepancias entre los parámetros de la estructura y los que definen el algoritmo de control, funcionamiento de los actuadores en condiciones de saturación, errores de medida de los sensores y otros.

En el capítulo 4 se extiende el análisis de eficiencia a sistemas con varios grados de libertad.

### **3.2 PARAMETROS DEL LAZO DE CONTROL**

Los parámetros que definen las características de un sistema de control activo de estructuras pueden agruparse básicamente en cinco categorías:

- Los que se refieren a las propiedades de la estructura.
- Los que intervienen en el algoritmo de control, que en el caso presente se refieren a la estrategia del control predictivo.
- Los que caracterizan las prestaciones de los mecanismos que aplican las fuerzas de control sobre la estructura.
- Los que definen a la excitación que actúa sobre la estructura.
- Período de muestreo del lazo de control digital.

Cada una de las categorías anteriores corresponde a uno de los elementos que intervienen en el lazo de control representado en la figura 1.1. La influencia de los sensores se tiene en cuenta en el apartado 3.5. En los cinco subapartados siguientes se describen los parámetros que hay que tomar en cuenta, ordenados según la clasificación anterior. En el subapartado 3.2.6 se incluye una tabla de los parámetros descritos en los subapartados anteriores. Para lograr un estudio independiente de las unidades en que se formule el problema, dichos parámetros se presentan en la medida de lo posible en forma adimensional.

#### **3.2.1 Parámetros modales de la estructura**

En este subapartado se muestra que la estructura puede ser descrita fundamentalmente por el período y el amortiguamiento de los modos de vibración.

Toda estructura sometida a control tiene que estar representada por un modelo dinámico que englobe sus características más relevantes.

En general, una estructura es un sistema continuo caracterizado por una geometría más o menos complicada y compuesto por materiales con ecuaciones constitutivas diferentes y complejas. Un modelo dinámico excesivamente sofisticado da lugar en general a complicaciones innecesarias pues las mejoras que puede proporcionar su utilización

no son equiparables con la complejidad de los modelos matemáticos o con los errores cometidos durante el proceso de cálculo. De ahí que normalmente se utilice un modelo lo más simplificado posible haciendo énfasis en ciertas características particulares de la estructura. A continuación se describen los tres procedimientos más habituales de modelación dinámica: en primer lugar los dos criterios de discretización espacial más comunes (masas concentradas y elementos finitos) y posteriormente el planteamiento de las ecuaciones en derivadas parciales del movimiento del medio continuo.

- 1) Cuando una estructura tiene mayor cantidad de masa en unos puntos que en otros, se puede modelar la estructura por medio del **método de las masas concentradas**. Este método considera la masa de la estructura concentrada en una serie de puntos seleccionados de forma que el modelo dinámico es capaz de proporcionar una descripción suficientemente aproximada del comportamiento de la estructura real. El número total de componentes de movimiento en que las masas concentradas vibran se denomina *número de grados de libertad*. El movimiento se rige por la ecuación diferencial

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{K}$  son, respectivamente, las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez de la estructura. Los vectores  $\mathbf{d}(t)$  y  $\mathbf{f}(t)$  son los desplazamientos y las fuerzas de excitación aplicadas en cada grado de libertad de la estructura.

Si el modelo requiere únicamente un desplazamiento para describir su deformada en el tiempo, se dice que la estructura puede ser modelada como un sistema de un grado de libertad (1 *gdl*).

- 2) Cuando la masa está repartida de forma más o menos uniforme la estructura puede ser discretizada por el **método de los elementos finitos**. En éste el medio continuo analizado es sustituido por un número finito de subdominios interconectados entre sí en un número finito de puntos denominados nodos. Las funciones solución no están definidas en todo el continuo, sino únicamente en los nodos. La función solución en cualquier otro punto del continuo se obtiene utilizando funciones de interpolación adecuadas denominadas funciones de forma, las cuales se definen para cada elemento finito. El método calcula los desplazamientos en los nodos para cualquier instante de tiempo; cada desplazamiento constituye un grado de libertad para el modelo. La exactitud de la solución depende del número de elementos finitos utilizados, del tipo de elemento o del número de nodos por elemento, y de las funciones de interpolación utilizadas. Una ventaja importante del método de los elementos finitos es que en el proceso de discretización se sigue una metodología sistemática de fácil implementación en ordenador con la que se obtienen ecuaciones del movimiento de la forma (3.1).
- 3) El comportamiento del sistema continuo es descrito con mayor fidelidad por medio de

**las ecuaciones del movimiento en derivadas parciales.** Considerando a modo de ilustración el caso de estructuras unidimensionales, se presenta la ecuación del movimiento transversal de una viga recta de sección constante

$$m \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} + c \frac{\partial d}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 d}{\partial x^4} = F(x, t) \quad (3.2)$$

donde  $m$  es la masa por unidad de longitud,  $c$  el amortiguamiento transversal por unidad de longitud y  $EI$  la rigidez a flexión de la viga. Los desplazamientos dinámicos  $d(x, t)$  pueden expresarse como suma de productos de funciones de forma  $\psi_i(x)$  y funciones dependientes del tiempo  $\beta_i(t)$ .

$$d(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) \beta_i(t) \quad (3.3)$$

Cada función de forma está asociada a un modo de vibración, por lo que la expresión (3.3) constituye la superposición de los desplazamientos asociados a todos los modos de vibración.

Un análisis dinámico considerando los modos de vibración de la estructura, o lo que es lo mismo en función de las coordenadas naturales o modales del sistema (también llamado análisis modal), puede transformar en ciertos casos un sistema de  $n$  grados de libertad en un conjunto de  $n$  subsistemas independientes de 1 *gdl*. Para esto es necesario considerar que la matriz de amortiguamiento de la estructura (en (3.1)) es de tipo clásico. En este caso se dice que se ha hecho un *desacoplamiento modal*. A partir de (3.3) la ecuación (3.2) se descompone en infinitas ecuaciones desacopladas en coordenadas modales. Solamente en algunos casos particulares existen soluciones explícitas, por lo que en general deben usarse métodos numéricos.

Por esta razón en algunas partes de este trabajo se considera únicamente un sistema de 1 *grado de libertad* pues las conclusiones que se obtengan pueden ser extrapoladas a sistemas más complejos modelados por cualquiera de los tres métodos descritos anteriormente. En el capítulo 4 se estudia este aspecto con mayor profundidad.

Para caracterizar a una estructura modelada como un sistema con 1 grado de libertad (o un modo) se necesita conocer su masa  $m$ , su amortiguamiento  $c$  y su rigidez  $k$ . Un sistema de estas características bajo acción de control con fuerzas  $f_c(t)$  y cargas dinámicas  $f(t)$ , está representado por la ecuación diferencial del movimiento:

$$m \ddot{d}(t) + c \dot{d}(t) + k d(t) = f(t) + f_c(t) \quad (3.4a)$$

o por su equivalente

$$\ddot{d}(t) + 2\xi\omega\dot{d}(t) + \omega^2 d(t) = \frac{f(t)}{m} + \frac{f_c(t)}{m} \quad (3.4b)$$

donde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \xi = \frac{c}{2m\omega} \quad (3.5a)$$

son, respectivamente, la frecuencia natural de vibración de la estructura sin amortiguamiento  $\omega$  y el factor de amortiguamiento viscoso  $\xi$ .

La frecuencia de vibración  $\omega$  se relaciona con el período natural sin amortiguamiento de la estructura  $T_{est}$  a través de

$$\omega = \frac{2\pi}{T_{est}} \quad (3.5b)$$

La señal de control  $u$  (la cual tiene dimensiones de aceleración) se relaciona con las fuerzas de control  $f_c$  mediante la expresión

$$u(t - \tau_r) = \frac{f_c(t)}{m} \quad (3.5c)$$

Independientemente de que la estructura haya sido analizada por el método de las masas concentradas, de los elementos finitos o a partir de ecuaciones en derivadas parciales, el movimiento de cada modo se rige por una ecuación del mismo tipo que (3.4b).

En el análisis que se efectúa en este capítulo y en los siguientes se utilizan indistintamente los términos modo y estructura. Así, al hablar de una estructura de 1 gdl también se está hablando de un modo  $i$  de vibración y al hablar de período  $T_{est}$  de la estructura de 1 gdl también se está refiriendo al período  $T_i$  asociado al modo de vibración  $i$ .

Una estructura de 1 grado de libertad (como las consideradas en el presente análisis) se caracteriza por sus constantes de masa  $m$ , amortiguamiento  $c$  y rigidez  $k$ . En condiciones ideales (concepto definido en el capítulo 5) el lazo de control se comporta linealmente y la influencia del valor de  $m$  (a igualdad de  $\xi$  y de  $\omega$ ) es también lineal tal como se justifica a continuación. Para los casos sin control, la ecuación (3.4b) muestra que si la excitación es sísmica ( $f(t) = -ma(t)$ ) la respuesta de la estructura es independiente de la masa, mientras que si no es de tipo sísmico al aumentar  $\alpha$  veces la masa disminuirá  $\alpha$  veces la respuesta de la estructura. En presencia de control la matriz de ganancia  $\hat{D}$  para sistemas con 1 gdl no depende de la masa (Andrade, 1992), consecuentemente, para los casos con control ocurre lo mismo que en los casos sin control. En resumen, es suficiente representar las tres constantes  $m$ ,  $c$  y  $k$  mediante sólo dos coeficientes  $T_{est}$  y  $\xi$  relacionados con aquéllas en (3.5a) y (3.5b).

La justificación de la preferencia del uso en este trabajo del período de vibración en lugar de la frecuencia se encuentra en que de manera intuitiva se puede asociar un valor aproximado del período fundamental de vibración con el número de pisos una edificación.

En este capítulo se estudian los posibles beneficios que introduce la acción de control sobre estructuras (o modos) con distintos  $T_{est}$ . En adelante, para acotar el estudio, las estructuras o modos se clasifican en los siguientes grupos de acuerdo con su  $T_{est}$ :

- a) **Modos rígidos**, aquellos que tienen un período natural de vibración menor que 0.5 segundos.
- b) **Modos medianamente flexibles**, cuyo período natural de vibración se encuentra entre los límites de 0.5 y 2.0 segundos.
- c) **Modos muy flexibles**, cuyo período de vibración es mayor o igual que 2.0 segundos.

Con esta clasificación es más sencillo describir el comportamiento que presenta el control predictivo sobre distintas estructuras (o sobre distintos modos de vibración).

### 3.2.2 Parámetros del algoritmo de Control Predictivo

En este subapartado se seleccionan los parámetros que definen el algoritmo de Control Predictivo aplicado a sistemas de un grado de libertad.

Para un modo de vibración o para un sistema de 1 gdl la función de coste  $J$  presentada en el capítulo anterior en la expresión (2.64a) se reduce a la forma

$$J = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}}(k + \lambda + \hat{n}_r | k)^t \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}(k + \lambda + \hat{n}_r | k) + \frac{1}{2} \mathbf{u}(k)^t R \mathbf{u}(k) \quad (3.6)$$

en que la matriz de peso  $\mathbf{R}$  se transforma en el coeficiente escalar  $R$ , la señal de control  $\mathbf{u}(k)$  tiene una sola componente escalar  $u(k)$  (dimensión de aceleración) y la matriz de salida  $\hat{\mathbf{H}}$  es igual a la identidad  $\mathbf{I}$  ( $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{x}}$ ).

En (3.6) se ha considerado una trayectoria de referencia nula ( $\mathbf{y}_r = \mathbf{0}$ ) lo cual, según (2.70) y (2.72b), implica que

$$\mathbf{T}_r = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

La expresión (2.64a) muestra que una trayectoria de referencia nula supone pretender que la respuesta de la estructura tienda a anularse de forma directa, generándose una acción de control enérgica. Consecuentemente, el valor nulo de  $\mathbf{T}_r$  en (3.7) no constituye una pérdida de generalidad de este estudio.

En la representación en espacio de estado dada en (2.31) el vector  $\hat{\mathbf{x}}$  tiene ahora dos componentes: desplazamiento  $\hat{d}$  y velocidad  $\hat{\dot{d}}$ . La función de coste  $J$  dada en (3.6) se expresa en función de dichas componentes por

$$J = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{d} & \hat{\dot{d}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{d} \\ \hat{\dot{d}} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} u^t R u \quad (3.8a)$$

que desarrollada es

$$J = \frac{1}{2} (\hat{d}^2 Q_{11} + \hat{\dot{d}} \hat{d} Q_{21} + \hat{\dot{d}} \hat{\dot{d}} Q_{12} + \hat{\dot{d}}^2 Q_{22} + u^2 R) \quad (3.8b)$$

La matriz de peso  $\mathbf{Q}$  debe tener elementos que relacionen en la función de coste  $J$  desplazamiento-desplazamiento y velocidad-velocidad pero no desplazamiento-velocidad, ya que el objetivo del control es la minimización del desplazamiento y la velocidad y no es la minimización del producto de ambos. Por tanto se elige una matriz  $\mathbf{Q}$  diagonal

$$Q_{12} = Q_{21} = 0 \quad (3.9a)$$

Con la finalidad de trabajar con parámetros que tengan las mismas dimensiones se introducen los coeficientes  $Q_d$ ,  $Q_v$  y  $r$ , los cuales se relacionan, respectivamente, con  $Q_{11}$ ,  $Q_{22}$  y  $R$  mediante

$$Q_{11} = Q_d \quad (3.9b)$$

$$Q_{22} = T^2 Q_v \quad (3.9c)$$

$$R = T^4 r \quad (3.9d)$$

$Q_d$  se denomina coeficiente de desplazamiento,  $Q_v$  coeficiente de velocidad y  $r$  coeficiente de control. A partir de las igualdades (3.9) la matriz  $\mathbf{Q}$  queda constituida como

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_d & 0 \\ 0 & T^2 Q_v \end{pmatrix} \quad (3.9e)$$

quedando por último la función de coste  $J$  expresada mediante:

$$J = \frac{1}{2} [\hat{d}^2 (k + \lambda + \hat{n}_r | k) Q_d + \hat{\dot{d}}^2 (k + \lambda + \hat{n}_r | k) T^2 Q_v + u^2 (k) T^4 r] \quad (3.10)$$

Los parámetros del algoritmo de control cuya influencia en el mismo se analiza son los coeficientes de peso  $Q_d$ ,  $Q_v$  y  $r$ , la longitud  $\lambda$  del intervalo de predicción, y el número estimado de períodos de retardo  $\hat{n}_r$ .

Si la función de coste se constituye en una función de minimización de la energía del sistema de control, los coeficientes  $Q_d$ ,  $Q_v$  y  $r$  tienen dimensiones de  $[MT^{-2}]$  y los

cocientes  $Q_v/Q_d$  y  $r/Q_d$  son adimensionales y por tanto independientes de las unidades en que se modela la estructura.

### 3.2.3 Parámetros de los mecanismos actuadores

En relación a los actuadores, el objetivo de la investigación desarrollada en los capítulos siguientes es establecer cuál debe ser la magnitud de la fuerza máxima que aplican a la estructura y con qué velocidad debe cambiar.

Para el diseño de estos mecanismos es necesario conocer la fuerza que la estrategia de control predictivo ha calculado en cada instante y su valor máximo; conociendo dicho último dato se puede plantear que los actuadores sean uno o varios mecanismos que hagan posible aplicar esa magnitud de fuerza de control sobre la estructura. Dichos mecanismos precisan tener además capacidad para variar el valor de la fuerza aplicada tan rápido como lo hace la fuerza de control calculada, es decir que el valor del producto de la fuerza de control  $f_c$  por su derivada respecto al tiempo  $\dot{f}_c$  (el cual es proporcional a la potencia instantánea desarrollada por los mecanismos actuadores y, por tanto, puede ser considerada como seudo-potencia), debe ser compatible con la potencia instantánea requerida por el algoritmo de control.

Otro factor a tener en cuenta es el tiempo de respuesta  $\tau_r$ , relacionado en (2.56a) con el número de períodos de retardo  $n_r$ .

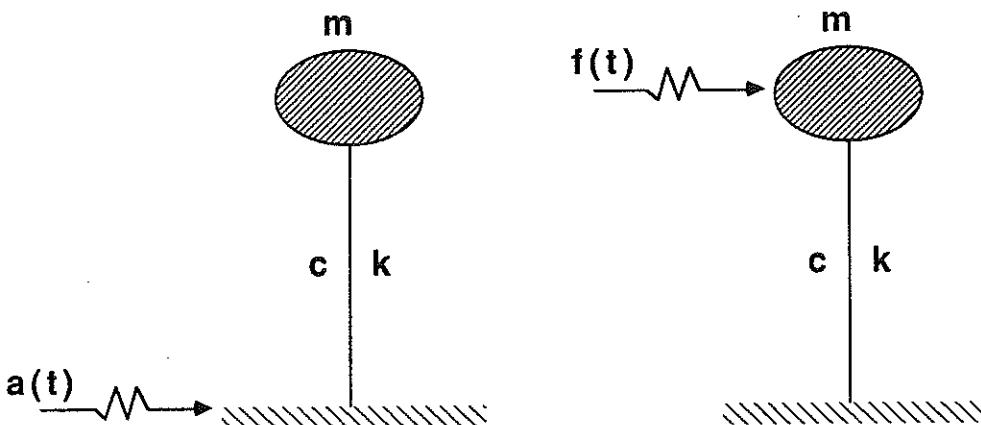
En definitiva, se tendrán en cuenta tres factores propios de los actuadores: fuerza máxima de control  $|f_c|_{max}$ , potencia máxima desarrollada  $|f_c \dot{f}_c|_{max}$  y número real de retardos  $n_r$  de los mecanismos.

### 3.2.4 Parámetros de la excitación

Una excitación se caracteriza fundamentalmente por el contenido en frecuencias y la amplitud máxima.

En el presente estudio se utilizan excitaciones sinusoidales (las cuales contienen una sola frecuencia). Tomando distintos valores del período de la excitación  $T_{exc}$  se analiza su influencia en las características de la acción de control.

El valor máximo de cada excitación constituye la amplitud de la onda, que en este caso se toma igual a  $0.1 g$ , siendo  $g$  la aceleración de la gravedad. Este valor se ha seleccionado porque constituye un valor medio de las excitaciones que se presentan en algunos fenómenos de la naturaleza tales como los sísmicos. Mientras se estudie el efecto de la acción de control sobre estructuras que trabajen en el rango lineal de esfuerzos, la magnitud de la excitación incide en el rendimiento de la acción de control de forma lineal, ya que todos los resultados serán proporcionales a su magnitud y, consecuentemente, no es necesario realizar un análisis específico de la influencia de la amplitud de la excitación en el rendimiento de la acción de control y la elección del valor anterior no tiene mayor trascendencia.



**Fig.3.1a** Estructura sometida a una excitación sinusoidal en la base.

**Fig.3.1b** Estructura sometida a una fuerza dinámica.

Para analizar la actuación de la excitación sobre la estructura hay que conocer el punto donde ésta se aplica: una excitación en la base de la estructura (correspondiente, por ejemplo, a una acción sísmica), fuerzas concentradas en algunos puntos de la estructura, o fuerzas distribuidas en toda la superficie como es el caso de la acción del viento. Para sistemas de 1 gdl como los que aquí se consideran existen únicamente dos posibilidades: movimiento sísmico de la base (caso representado por la figura 3.1a) y fuerza dinámica de excitación actuando sobre la estructura (figura 3.1b).

Para ilustrar el caso de movimiento sísmico, la figura 3.2 muestra las oscilaciones laterales de una estructura producidas por la actuación de una excitación en su base. Para cualquier otro tipo de excitación dinámica ejercida en la base de la estructura, la situación es completamente similar. El valor  $d_o$  es el desplazamiento que tiene la base de la estructura,  $d_r$  es el desplazamiento del sistema respecto a la base y  $d_t$  es el desplazamiento absoluto o total del sistema.

Particularizando (3.4a) para una estructura (o un modo) sometida a excitación sísmica y controlada activamente se establece la ecuación del movimiento

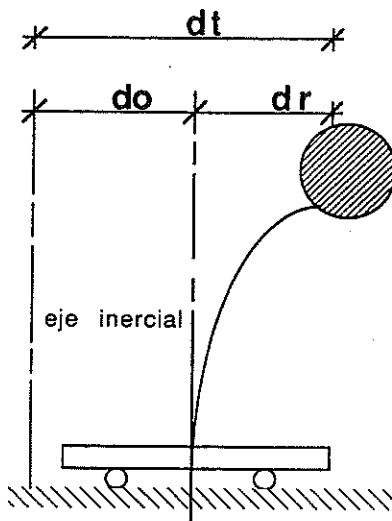
$$m\ddot{d}_r(t) + cd_r(t) + kd_r(t) = -ma(t) + f_c(t) \quad (3.11)$$

donde  $a(t)$  es la aceleración del terreno.

El desplazamiento absoluto del sistema  $d_t$  se obtiene como la suma del desplazamiento relativo  $d_r$  y del desplazamiento de la base  $d_o$

$$d_t(t) = d_o(t) + d_r(t) \quad (3.12a)$$

Derivando dos veces respecto al tiempo se obtiene



**Figura 3.2** Oscilaciones horizontales de una estructura sometida a una excitación sísmica.

$$\ddot{d}_t(t) = \ddot{d}_o(t) + \ddot{d}_r(t) \quad (3.12b)$$

Reemplazando (3.12b) en (3.11)

$$m[\ddot{d}_t(t) - \ddot{d}_o(t)] + c\dot{d}_r(t) + kd_r(t) = -ma(t) + f_c(t) \quad (3.13)$$

ya que

$$m\ddot{d}_o(t) = ma(t) \quad (3.14)$$

Reemplazado en (3.13)

$$m[\ddot{d}_t(t) - \ddot{d}_o(t)] + c\dot{d}_r(t) + kd_r(t) = -m\ddot{d}_o(t) + f_c(t)$$

Simplificando y agrupando convenientemente resulta

$$m\ddot{d}_t(t) = f_c(t) - c\dot{d}_r(t) - kd_r(t) = f_b(t) \quad (3.15)$$

donde  $f_b$  es la fuerza en la base, es decir, la fuerza entre la estructura y el terreno. El máximo del valor absoluto de la parte izquierda de (3.15) constituye la fuerza total máxima en la base, que en adelante se abrevia por  $|f_b|_{max}$ :

$$|f_b|_{max} = |m\ddot{d}_t(t)|_{max} \quad (3.16)$$

### 3.2.5 Período de muestreo

El período de muestreo  $T$  gobierna la evolución temporal del lazo de control digital e influye notablemente en el funcionamiento del mismo por lo que hay que tenerlo en cuenta en este estudio.

En general puede afirmarse que tomar un valor de  $T$  pequeño produce una acción de control más eficaz ya que se genera un número mayor de fuerzas de control a lo largo del tiempo. No obstante, no es posible utilizar valores muy bajos de  $T$  debido a que todas las operaciones involucradas en el lazo de control (en especial la aplicación de las fuerzas de control por los mecanismos actuadores) precisan tiempo para desarrollarse. En ensayos experimentales (Rodellar et al. 1989) se han utilizado normalmente valores de  $T = 0.01$  s.

Una manera de tener en cuenta el período de muestreo y de realizar un estudio independiente del sistema de unidades es caracterizar a la excitación y a la estructura por parámetros adimensionales:  $T_{exc}/T$  y  $T_{est}/T$ . Otra importante razón para considerar estos parámetros es que, en el estudio de estabilidad realizado en 3.3, los valores propios de la matriz  $\bar{A}$  (de acuerdo con las expresiones que presenta Andrade (1992)) dependen de la relación  $\omega T$  (o su equivalente  $T_{est}/T$ ), y no de  $T_{est}$ .

### 3.2.6 Tabla de parámetros

Introduciendo los parámetros  $T_{est}/T$  y  $T_{exc}/T$  se logra que, a excepción de  $|f_c|_{max}$  y  $|f_c f_c|_{max}$ , los parámetros involucrados en el análisis del lazo de control sean adimensionales:  $\xi$ ,  $\lambda$ ,  $n_r$ ,  $n_r$ ,  $r/Q_d$  y  $Q_v/Q_d$ .

A manera de resumen se presenta la tabla 3.1 donde se muestran los parámetros que intervienen en el análisis del comportamiento y de la eficiencia del control predictivo de estructuras.

## 3.3 HERRAMIENTAS DE ANALISIS

En este apartado se presentan las tres herramientas que se utilizan en este trabajo para realizar el análisis numérico de eficiencia del control:

- Valores propios de  $\bar{A}$
- Frecuencias y amortiguamientos equivalentes  $\omega'$  y  $\xi'$
- Índices de rendimiento y espectros de control

A continuación se explica en qué consiste cada uno de ellos.

TABLA 3.1

**PARAMETROS A CONSIDERAR EN EL ANALISIS DE EFICIENCIA  
DEL CONTROL PREDICTIVO DE ESTRUCTURAS (1 GDL)**

Elemento	Parámetro	
Estructura	$T_{est}/T$	período natural de vibración / período de muestreo
	$\xi$	coeficiente de amortiguamiento
Algoritmo de control	$Q_v/Q_d$	relación entre coeficientes de peso para $\hat{x}$
	$r/Q_d$	relación entre coeficientes de peso para $u$
	$\lambda$	longitud del horizonte de predicción
	$\hat{n}_r$	número estimado de retardos
Mecanismos actuadores	$ f_c _{max}$	máxima fuerza de control
	$ f_c \dot{f}_c _{max}$	máxima seudo-potencia
	$n_r$	número real de retardos
Excitación	$T_{exc}/T$	período de la excitación sinusoidal / período de muestreo

### 3.3.1 Condiciones de estabilidad del control predictivo

En este subapartado se muestra que las condiciones de estabilidad pueden expresarse mediante el módulo de los valores propios de la matriz  $\bar{A}$ .

La estabilidad del lazo cerrado se estudia suponiendo que el lazo abierto (es decir, sin control) es estable. La excitación exterior no se incluye en el análisis porque sus características no modifican las condiciones de estabilidad.

Puesto que no se tiene en cuenta la excitación exterior, la expresión (2.55) que representa en espacio de estado la evolución dinámica de la estructura (de varios grados de libertad) se convierte en la siguiente ecuación:

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{Az}(k) + \mathbf{Bu}(k - n_r) \quad (3.17)$$

En el presente subapartado se estudian las condiciones de estabilidad del modelo numérico (3.17) cuando el valor del vector de control  $u$  se obtiene a partir de la ley de control predictivo (2.74). En la medida en que dicho modelo represente fielmente el

comportamiento dinámico de la estructura, las conclusiones elaboradas a partir de dicho modelo son extrapolables al comportamiento real del sistema. En López Almansa (1988) se muestra que el lazo abierto definido en (3.17) siendo  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  es estable.

Estudios específicos de estabilidad tanto en sistemas de tiempo discreto como de tiempo continuo pueden encontrarse en LaSalle y Lefschetz (1961), Willems (1970) y López Almansa et al. (1988).

En el análisis se distinguen dos situaciones distintas: los casos en que no se consideran retardos ni en el modelo predictivo (2.58) ni en el modelo del sistema (2.56) (es decir,  $n_r = \hat{n}_r = 0$ ) y los casos en que en uno o en ambos modelos se toman en consideración retardos (es decir,  $n_r \neq 0$  o  $\hat{n}_r \neq 0$ ).

Cuando no se consideran retardos en la modelización de la estructura, la ecuación (2.56) que rige su comportamiento dinámico adopta la siguiente expresión simplificada:

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{z}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (3.18)$$

Si en el modelo predictivo (2.58) no se incluyen retardos, la expresión (2.74a) se transforma en

$$\mathbf{u}(k) = -\hat{\mathbf{D}}\mathbf{z}(k) \quad (3.19)$$

que proporciona el valor de la señal de control  $\mathbf{u}(k)$  y, sustituyendo dicho valor en (3.18), se obtiene el siguiente resultado:

$$\mathbf{z}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}})\mathbf{z}(k) \quad (3.20a)$$

La igualdad (3.20a) simula el comportamiento dinámico del sistema controlado sin retardos y sin incluir el efecto de la excitación. Dicha expresión puede escribirse también de la siguiente forma:

$$\mathbf{z}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}(k) \quad (3.20b)$$

siendo

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}} \quad (3.20c)$$

La igualdad (3.20a) muestra que el proceso controlado sin retardos es asintótica y globalmente estable si el módulo de los valores propios de la matriz  $\bar{\mathbf{A}}$  es menor que la unidad (Ogata, 1967).

Si se consideran retardos en el modelo predictivo o en el modelo del sistema se distinguen a su vez dos casos distintos: las situaciones en que  $\hat{n}_r \leq n_r \neq 0$  y las situaciones en que  $0 \neq n_r \leq \hat{n}_r$ .

Cuando es  $\hat{n}_r \leq n_r \neq 0$ , las expresiones (3.17) y (2.74) pueden ser englobadas en el siguiente sistema ampliado:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{u}(k) \\ \dots \\ \mathbf{u}(k-\hat{n}_r+1) \\ \dots \\ \mathbf{u}(k-n_r+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ -\hat{\mathbf{D}} & -\hat{\mathbf{K}}_1 & \dots & -\hat{\mathbf{K}}_{\hat{n}_r} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \\ \dots \\ \mathbf{u}(k-\hat{n}_r) \\ \dots \\ \mathbf{u}(k-n_r) \end{pmatrix} \quad (3.21a)$$

La expresión (3.21a) puede escribirse también en los siguientes términos:

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}}(k) \quad (3.21b)$$

Siendo  $\bar{\mathbf{x}}$  un nuevo vector de estado y  $\bar{\mathbf{A}}$  la siguiente matriz:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ -\hat{\mathbf{D}} & -\hat{\mathbf{K}}_1 & \dots & -\hat{\mathbf{K}}_{\hat{n}_r} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.21c)$$

La expresión (3.21b) muestra que, si los valores propios de la matriz  $\bar{\mathbf{A}}$  definida en (3.21c) son menores que la unidad, el control es globalmente estable.

Si es  $n_r \leq \hat{n}_r$  y  $n_r$  es distinto de cero, puede escribirse una expresión similar a (3.21a):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{u}(k) \\ \dots \\ \mathbf{u}(k-n_r+1) \\ \dots \\ \mathbf{u}(k-\hat{n}_r+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\hat{\mathbf{D}} & -\hat{\mathbf{K}}_1 & \dots & -\hat{\mathbf{K}}_{n_r} & \dots & -\hat{\mathbf{K}}_{\hat{n}_r-1} & -\hat{\mathbf{K}}_{\hat{n}_r} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k-1) \\ \dots \\ \mathbf{u}(k-n_r) \\ \dots \\ \mathbf{u}(k-\hat{n}_r) \end{pmatrix} \quad (3.22a)$$

La igualdad (3.22a) puede escribirse también de la siguiente forma:

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}}(k) \quad (3.22b)$$

$\bar{\mathbf{z}}$  es un nuevo vector de estado y  $\bar{\mathbf{A}}$  es ahora la siguiente matriz:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\hat{\mathbf{D}} & -\hat{\mathbf{K}}_1 & \cdots & -\hat{\mathbf{K}}_{n_r} & \cdots & -\hat{\mathbf{K}}_{\hat{n}_r-1} & -\hat{\mathbf{K}}_{\hat{n}_r} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & \cdots & & \\ & & & & \cdots & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.22c)$$

Las igualdades (3.20b), (3.21b) y (3.22b) muestran que el lazo cerrado es globalmente estable si los valores propios de la matriz  $\bar{\mathbf{A}}$  tienen módulo menor que la unidad.

Estudios de la influencia de  $\lambda$  en la estabilidad del sistema pueden encontrarse en López Almansa (1988).

### 3.3.2 Comportamiento dinámico equivalente del sistema con control

En el presente subapartado se analizan las características del comportamiento dinámico de una estructura cuyo movimiento se controla mediante unas fuerzas de control activo obtenidas a partir de un algoritmo de control predictivo. Se muestra que en ausencia de retardos la acción de control equivale una variación del amortiguamiento y de la rigidez de la estructura.

El estudio de los sistemas dinámicos en tiempo discreto se realiza con la ayuda de la transformada  $z$  (Ogata, 1988). Aplicando ésta a la ecuación (2.55) suponiendo  $\mathbf{z}(0) = \mathbf{0}$  y haciendo uso de (2.56f) se obtiene

$$z \mathbf{z}(z) = \mathbf{A} \mathbf{z}(z) + \mathbf{B} z^{-n_r} \mathbf{u}(z) + z (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) \mathbf{v}(z) - \mathbf{P}_2 \mathbf{v}(z) \quad (3.23)$$

Aplicando de igual forma la transformada  $z$  a la ecuación (2.74a) resulta

$$\mathbf{u}(z) = -\hat{\mathbf{D}} \mathbf{z}(z) - \sum_{i=1}^{\hat{n}_r} z^{-i} \hat{\mathbf{K}}_i \mathbf{u}(z)$$

y agrupando términos comunes se tiene el valor de  $\mathbf{u}(z)$

$$\mathbf{u}(z) = - \left[ \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\hat{n}_r} z^{-i} \hat{\mathbf{K}}_i \right]^{-1} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{z}(z) \quad (3.24)$$

Reemplazando (3.24) en (3.23) y ordenando adecuadamente se obtiene

$$\left[ z\mathbf{I} - \left( \mathbf{A} - \mathbf{B}z^{-n_r} \left[ \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\hat{n}_r} z^{-i} \hat{\mathbf{K}}_i \right]^{-1} \hat{\mathbf{D}} \right) \right] \mathbf{x}(z) = \left[ z(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) - \mathbf{P}_2 \right] \mathbf{v}(z) \quad (3.75)$$

La matriz de transferencia  $\mathbf{H}(z)$  entre  $\mathbf{v}(z)$  y  $\mathbf{x}(z)$  del sistema dinámico (3.25) es

$$\mathbf{H}(z) = \left[ z\mathbf{I} - \left( \mathbf{A} - \mathbf{B}z^{-n_r} \left[ \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\hat{n}_r} z^{-i} \hat{\mathbf{K}}_i \right]^{-1} \hat{\mathbf{D}} \right) \right]^{-1} \left[ z(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) - \mathbf{P}_2 \right] \quad (3.26)$$

Si  $\hat{n}_r = n_r = 0$  la expresión anterior se reduce a

$$\mathbf{H}(z) = \left[ z\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}}) \right]^{-1} \left[ z(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) - \mathbf{P}_2 \right] \quad (3.27)$$

La matriz inversa de  $z\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}})$  se escribe en la forma

$$\left[ z\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}}) \right]^{-1} = \frac{1}{\det[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}})]} \text{adj}[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}})]^t$$

Para una estructura con  $n$  grados de libertad  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}}$  es una matriz de dimensiones  $2n \times 2n$  y por tanto  $\det[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}})]$  es un polinomio de grado  $2n$  en  $z$  con coeficientes  $r_i$  ( $i = 1, \dots, 2n$ )

$$\Theta(z) = z^{2n} + r_1 z^{2n-1} + \dots + r_{2n-1} z + r_{2n}$$

mientras que la matriz adjunta  $\text{adj}[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}})]^t$  tiene la forma polinómica

$$\text{adj}[z\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}})]^t = z^{2n-1} \mathbf{E}_1 + z^{2n-2} \mathbf{E}_2 + \dots + z \mathbf{E}_{2n-1} + \mathbf{E}_{2n}$$

donde  $\mathbf{E}_i$  ( $i = 1, \dots, 2n$ ) son matrices  $2n \times 2n$ . Sustituyendo estas expresiones en (3.27), la matriz de transferencia  $\mathbf{H}(z)$  puede expresarse en la forma

$$\mathbf{H}(z) = \frac{1}{\Theta(z)} \left( z^{2n-1} \mathbf{E}_1 + z^{2n-2} \mathbf{E}_2 + \dots + z \mathbf{E}_{2n-1} + \mathbf{E}_{2n} \right) \left[ z(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) - \mathbf{P}_2 \right] \quad (3.28)$$

Las raíces de  $\Theta(z)$  determinan los llamados polos del sistema cuya matriz de transferencia es  $\mathbf{H}(z)$ , los cuales coinciden con los valores propios de la matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}}$  que

definen los modos del sistema. Estos valores son en general complejos y pueden expresarse en la forma

$$z_i = a_i + j b_i = \exp(\alpha_i T) \quad (3.29)$$

En (3.29)  $\alpha_i$  es (Mickleborough y Pi 1989, Andrade et al. 1993)

$$\alpha_i = -\omega'_i \xi'_i + j \omega'_i \sqrt{1 - \xi'^2_i} \quad (3.30)$$

donde  $\omega'_i$  y  $\xi'_i$  son, respectivamente, la frecuencia y amortiguamiento equivalentes del modo  $i$  por efecto del control. Reemplazando (3.30) en (3.29) se obtiene

$$z_i = \exp(-\omega'_i \xi'_i T) \exp(j \omega'_i T \sqrt{1 - \xi'^2_i}) = c_i \exp(j \theta_i) \quad (3.31a)$$

en donde

$$c_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} = \exp(-\omega'_i \xi'_i T) \quad (3.31b)$$

$$\theta_i = \tan^{-1}(-b_i/a_i) = \omega'_i \sqrt{1 - \xi'^2_i} T \quad (3.31c)$$

De las expresiones (3.31) se obtiene

$$\omega'_i \xi'_i = \frac{-\ln(a_i^2 + b_i^2)}{2T} = f_{1i} \quad (3.32a)$$

$$\omega'_i \sqrt{1 - \xi'^2_i} = \frac{\tan^{-1}(b_i/a_i)}{T} = f_{2i} \quad (3.32b)$$

Operando con las expresiones (3.32) se obtiene finalmente

$$\omega'_i = \sqrt{f_{1i}^2 + f_{2i}^2} \quad (3.33a)$$

$$\xi'_i = \frac{f_{1i}}{\sqrt{f_{1i}^2 + f_{2i}^2}} \quad (3.33b)$$

A partir de las ecuaciones (3.33) se puede estudiar la estructura controlada como un sistema equivalente. Si  $\omega'_i$  y  $\xi'_i$  son mayores que los valores originales de la estructura sin control, el sistema de control es eficiente para ese modo por cuanto se ha aumentado la rigidez y el amortiguamiento. El procedimiento descrito en este subapartado se utiliza

como herramienta para el análisis de la eficiencia del Control Predictivo en sistemas de 1 o varios grados de libertad.

En Andrade (1992) se presenta un estudio similar aplicable a sistemas con un grado de libertad en el que las formulaciones en tiempo continuo y discreto se consideran equivalentes. En dicho estudio se obtienen intervalos de eficacia del control predictivo en función de las características de la matriz de ganancia  $\hat{D}$ .

Cuando hay retardos no ha sido posible obtener expresiones equivalentes a (3.33). No obstante, estudios numéricos desarrollados en Andrade (1992) y presentados en López Almansa et al. (1994) muestran que, para un número moderado de retardos, el efecto del control sigue siendo aproximadamente equivalente a un aumento de la rigidez y del amortiguamiento del sistema.

### **3.3.3 Índices de rendimiento y espectros de control**

Para analizar el rendimiento de la acción de control hay que tener en cuenta los siguientes puntos:

- a) En estructuras de ingeniería civil sometidas a excitaciones sísmicas u otras excitaciones dinámicas transmitidas por la base el objetivo principal de la acción de control es la disminución del desplazamiento relativo y la aceleración absoluta. La reducción del desplazamiento relativo máximo conduce a mejorar las condiciones de seguridad y servicio de la estructura y; la disminución de la aceleración absoluta máxima mejora las condiciones de confort humano y las solicitudes a que se ven sometidos los elementos no estructurales. Para cualquier otro tipo de acción dinámica no transmitida por la base se trata simplemente de reducir el desplazamiento y la aceleración ya que, por no existir desplazamientos de la base, no hay distinción entre valores absolutos y relativos.
- b) Las capacidades que deben poseer los mecanismos actuadores: fuerza de control máxima que pueden aplicar a la estructura, y potencia instantánea máxima que pueden desarrollar.
- c) En estructuras de ingeniería civil es preciso tener en cuenta el efecto que producen las fuerzas de control en la cimentación, es decir cómo se modifican a causa de la acción de control las fuerzas máximas en la base de la estructura.

El rendimiento de la acción de control se cuantifica mediante el estudio del comportamiento de cinco índices de rendimiento adimensionales ( $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$  y  $\Delta_5$ ) que tienen que ver con los tres puntos anteriores. Dichos índices se definen para cada modo o para sistemas con un grado de libertad.

Una estructura sometida a cargas dinámicas puede fallar como producto de desplazamientos excesivos, de ahí que dentro de la filosofía de diseño, se hable de los desplazamientos máximos que puede soportar una estructura ya sea para su colapso definitivo o simplemente para pasar de un estado elástico a uno plástico.

Consecuentemente, el objetivo primordial de la acción de control es reducir dicho desplazamiento máximo, tal como ha sido dicho en el punto a) anterior. Los dos primeros índices de rendimiento  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  cuantifican los beneficios de la acción de control desde el punto de vista de la disminución de la respuesta estructural. Para acción sísmica (y otras acciones dinámicas transmitidas por la base) se definen en la forma

$$\Delta_1 = \frac{|d_r|_{max_c}}{|d_r|_{max}} \quad (3.34)$$

$$\Delta_2 = \frac{|\ddot{d}_r|_{max_c}}{|\ddot{d}_r|_{max}} \quad (3.35)$$

donde  $|d_r|_{max}$  y  $|\ddot{d}_r|_{max}$  son, respectivamente, el desplazamiento y la aceleración máximos relativos a la base de un sistema sin control; y  $|d_r|_{max_c}$ ,  $|\ddot{d}_r|_{max_c}$  son el desplazamiento y la aceleración máximos relativos a la base de la misma estructura cuando adicionalmente a la excitación actúan fuerzas de control activo. Para excitaciones no transmitidas por la base  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  se definen de la misma forma.

Las expresiones (3.34) y (3.35) muestran que  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  son *adimensionales* y por tanto pueden representar el comportamiento de un sistema ante la acción de control independientemente de las unidades en que se expresen las características físicas de la estructura.

En caso de excitación no transmitida por la base (no sísmica) el control es beneficioso para la estructura si los valores de los índices  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  son menores que la unidad, y aun más beneficioso si éstos se aproximan a cero. Si  $\Delta_1$  o  $\Delta_2$  tienden a uno, la acción de control no es adecuada, y la situación es aun peor si estos índices son mayores que uno, ya que en este caso la acción de control está perjudicando a la estructura, es decir, se está amplificando su respuesta en vez de disminuirla. El valor de  $\Delta_1$  representa el nivel de seguridad de la estructura y el valor de  $\Delta_2$  corresponde fundamentalmente a las condiciones de confort humano y de seguridad de equipos e instalaciones.

En presencia de excitaciones transmitidas por la base (sísmica), el índice  $\Delta_1$  tiene el mismo significado que en el caso anterior. El índice  $\Delta_2$  carece de significado relevante ya que la aceleración relativa no caracteriza a las condiciones de confort humano. La mejora en las condiciones de confort humano se expresa por la disminución de la aceleración absoluta, la cual se analiza a partir del índice  $\Delta_5$  que se define más adelante en la expresión (3.38).

En un sistema real de control es necesario que existan mecanismos actuadores capaces de aplicar a la estructura las fuerzas calculadas utilizando la estrategia de control, en este caso control predictivo. Dichos mecanismos precisan tener capacidad para variar el valor de la fuerza aplicada tan rápido como lo hace la fuerza de control calculada, es decir, el valor del producto *fuerza · velocidad = potencia* debe ser compatible con la potencia

requerida por el algoritmo de control.

De acuerdo con las consideraciones expuestas en el párrafo anterior, los índices  $\Delta_3$  y  $\Delta_4$  representan las prestaciones que se solicitan a los mecanismos actuadores y se definen en la forma

$$\Delta_3 = \frac{|f_c|_{max}}{|f|_{max}} \quad (3.36)$$

$$\Delta_4 = \frac{|f_c \dot{f}_c|_{max}}{|f \dot{f}|_{max}} \quad (3.37)$$

donde  $f_c$  representa la fuerza de control y  $f$  la fuerza de excitación de acuerdo con (3.4a). Cuando la excitación es sísmica basta con sustituir  $f(t)$  por  $-ma(t)$  de acuerdo con (3.11).

Los valores óptimos de  $\Delta_3$  son menores que la unidad, sin embargo valores mayores no implican perjuicio a la estructura, sino simplemente representan necesidad de una fuerza de control de mayor valor que la excitación.

El índice  $\Delta_4$  se relaciona con la potencia máxima que debe desarrollar el mecanismo actuador. En efecto, tomando la idea física de que el mecanismo actuador puede estar constituido por un sistema de pistones cuyo movimiento modifica el valor de la fuerza aplicada, la velocidad de variación de su movimiento multiplicada por la fuerza aplicada da idea de la potencia instantánea que desarrolla. De forma análoga, la velocidad con que cambia la fuerza de excitación multiplicada por la fuerza de excitación da idea de la potencia instantánea que ésta posee. De la forma en que se han definido ambos productos no tienen dimensiones de potencia, por lo que su denominación correcta puede ser **seudo-potencia**.

La relación adimensional entre estas dos seudo-potencias está representada por el índice  $\Delta_4$ . También en este caso los valores menores que uno son óptimos, significando que el mecanismo actuador puede tener una potencia menor que la máxima que tiene la excitación. Sin embargo si  $\Delta_4$  es mayor que uno, el sistema de control no es perjudicial para la estructura, simplemente el actuador debe tener más potencia que la excitación.

En presencia de excitaciones sísmicas muchas veces se ha demostrado que el peor daño sufrido por estructuras no ha sido producto de que se hayan sobrepasado los valores máximos de desplazamiento, sino que ha ocurrido por fallo del suelo de cimentación. Este fenómeno hace que sea importante analizar también el efecto que produce en la cimentación y en el terreno el introducir fuerzas de control en la estructura. El índice  $\Delta_5$  cuantifica la acción del control sobre la cimentación mediante la relación entre la fuerza total máxima en la base de la estructura cuando hay control  $|f_b|_{max_c}$  y la fuerza total máxima en la base cuando no lo hay  $|f_b|_{max}$ .

$$\Delta_5 = \frac{|f_b|_{max_c}}{|f_b|_{max}} \quad (3.38a)$$

Puesto que  $|f_b|_{max}$  se relaciona con la aceleración absoluta en (3.16), el índice  $\Delta_5$  también es igual a

$$\Delta_5 = \frac{|\ddot{d}_t(t)|_{max_c}}{|\ddot{d}_t(t)|_{max}} \quad (3.38b)$$

TABLA 3.2

**SIGNIFICADO DE LOS INDICES DE RENDIMIENTO**  
Excitación transmitida por la base (sísmica)

Indice	Valor	Significado
$\Delta_1$	$\frac{ d_r _{max_c}}{ d_r _{max}}$	máximo desplazamiento relativo (seguridad de la estructura)
$\Delta_3$	$\frac{ f_c _{max}}{ f _{max}}$	fuerza de control máxima
$\Delta_4$	$\frac{ f_c \dot{f}_c _{max}}{ f f _{max}}$	potencia instantánea máxima requerida
$\Delta_5$	$\frac{ f_b _{max_c}}{ f_b _{max}}$	cortante máximo en la base (seguridad en las cimentaciones)
$\Delta_5$	$\frac{ \ddot{d}_t(t) _{max_c}}{ \ddot{d}_t(t) _{max}}$	aceleración absoluta máxima (confort humano y seguridad de las instalaciones)

Para excitaciones transmitidas por la base (sísmicas) el índice  $\Delta_5$  tiene dos significados: el primero de ellos (3.38b) relativo al grado de confort humano y de seguridad de instalaciones que se puede tener dentro de una estructura al disminuir la aceleración total que experimenta, y el segundo (3.38a) referido a la fuerza máxima que transmite la estructura al terreno.

Cuando la excitación no se transmite a través de la base, la ecuación (3.15) muestra que  $\Delta_5 = \Delta_2$  y por tanto dicho índice no tiene un significado específico.

Para excitación sísmica los valores óptimos de  $\Delta_5$  son menores que la unidad, lo cual significa que la aceleración total de la estructura con control es menor que la aceleración

sin control, y la fuerza máxima que se transmite a la base de la estructura disminuye por efecto del control.

Bajo excitación sísmica (y, en general, bajo cualquier excitación producida por el movimiento del terreno) no se puede lograr simultáneamente una reducción del desplazamiento relativo ( $\Delta_1$ ) y de la aceleración absoluta ( $\Delta_5$ ), ya que ello implica minimizar los movimientos relativos y absolutos al mismo tiempo (una acción de control intensa tiende a generar valores de  $\Delta_1$  próximos a 0 y de  $\Delta_5$  próximos a 1), por lo que en los objetivos de la estrategia de control es necesario buscar una solución de compromiso. Los sistemas híbridos se diseñan para cumplir ambas condiciones simultáneamente.

En las tablas 3.2 y 3.3 se describen los significados e interpretaciones de los índices de rendimiento para, respectivamente, excitaciones transmitidas por la base (sísmicas) y excitaciones producidas por fuerzas dinámicas (no sísmicas). En la tabla 3.3 se presentan para  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  las expresiones equivalentes a (3.34) y (3.35) cuando la excitación no se transmite a través de la base.

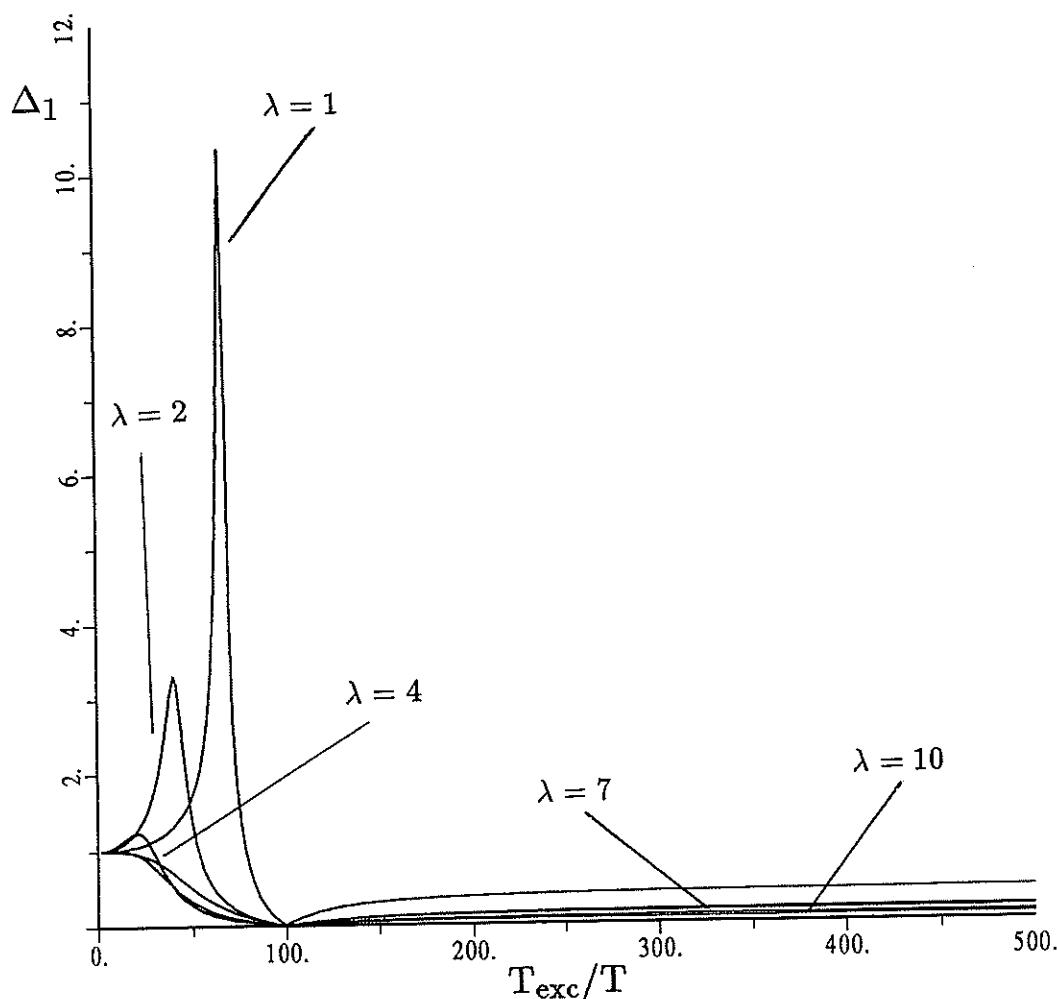
TABLA 3.3		
SIGNIFICADO DE LOS INDICES DE RENDIMIENTO Excitación no transmitida por la base		
Indice	Valor	Significado
$\Delta_1$	$\frac{ d _{max_c}}{ d _{max}}$	máximo desplazamiento (seguridad de la estructura)
$\Delta_2$	$\frac{ \ddot{d} _{max_c}}{ \ddot{d} _{max}}$	aceleración máxima (confort humano y seguridad de las instalaciones)
$\Delta_3$	$\frac{ f_c _{max}}{ f _{max}}$	fuerza de control máxima
$\Delta_4$	$\frac{ f_c \dot{f}_c _{max}}{ \dot{f} f _{max}}$	potencia instantánea máxima requerida

Estos índices responden a la problemática de control de la gran mayoría de estructuras a las que les han sido aplicadas técnicas de control activo. En algunos casos particulares puede ser necesario definir otros índices.

Los espectros de control se definen para un modo (o un sistema de un grado de libertad) sometidos a una acción sinusoidal y a una acción de control, como curvas que representan en abcisas a  $T_{exc}/T$  (cociente entre el período de la excitación y el período de muestreo)

y en ordenadas a uno de los índices de rendimiento  $\Delta_i$  definidos previamente.

Andrade (1992) presenta un estudio analítico del comportamiento de los espectros de control que luego son verificados mediante el estudio numérico de varias experiencias de control. El aspecto general de un espectro de control para  $\Delta_1$  se muestra en la figura 3.3.



**Figura 3.3** Espectro de control aproximado para  $\Delta_1$ .

Las tres herramientas básicas presentadas en este apartado son utilizadas por Andrade (1992) en un estudio numérico sistemático de la eficiencia de la acción de control cuyos resultados se presentan en los dos apartados siguientes.

TABLA 3.4

INTERVALO DE VALORES RECOMENDADOS DE  $r/Q_d$   
 $\xi = 0$        $\hat{n}_r = n_r = 0$        $Q_v/Q_d = 0$

$\lambda$	$T_{est}/T$					
	10	20	30	40	50	100
1	$10^{-2} - 1$	$10^{-2} - 10$	$10^{-2} - 10$	$10^{-2} - 10$	$10^{-2} - 10^2$	$10^{-2} - 10^2$
2	$10^{-2} - 10^2$	$10^{-2} - 10^2$	$1 - 10^2$	$1 - 10^2$	$1 - 10^2$	$1 - 10^2$
4	—	$1 - 10^2$	$1 - 10^2$	$1 - 10^2$	$1 - 10^2$	$1 - 10^2$
7	—	—	$1 - 10^3$	$1 - 10^3$	$1 - 10^3$	$1 - 10^3$
10	—	—	—	$10^2 - 10^4$	$10^2 - 10^4$	$10^2 - 10^4$

### 3.4 ANALISIS NUMERICO DE EFICIENCIA EN SISTEMAS DE 1 GRADO DE LIBERTAD. CONDICIONES IDEALES

Se estudia la eficacia del Control Predictivo analizando numéricamente la influencia en el comportamiento del lazo cerrado de los parámetros descritos en la tabla 3.1. Posteriormente se indican los valores de dichos parámetros que generan acciones de control eficaces. Estos valores se presentan en forma de tablas y constituyen un criterio de partida para el diseño de sistemas de control predictivo para protección sísmica de estructuras.

Para la selección de estos valores se utilizan las tres herramientas de análisis descritas en el apartado 3.3.

Se considera que el sistema de control trabaja en **condiciones ideales** cuando el comportamiento real del sistema de control es igual al esperado, es decir: i) los parámetros de la estructura coinciden con los valores considerados en el algoritmo de control y ii) los sensores, los actuadores y en general todos los elementos que intervienen en el lazo de control funcionan correctamente.

El estudio realizado en este capítulo es válido para excitaciones sísmicas (generadas por un movimiento de la base) y no sísmicas (provocadas por fuerzas dinámicas). El análisis en condiciones no ideales se desarrolla en el apartado 3.5.

Puesto que en este apartado el estudio se desarrolla en condiciones ideales, se tiene que los parámetros del lazo de control son iguales a los considerados en el modelo predictivo (2.58):

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \quad . \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \quad \hat{n}_r = n_r \quad (3.39)$$

El estudio de la influencia de los parámetros contenidos en la tabla 3.1 se divide en dos partes:

- 1.- Se analiza la influencia de  $T_{est}/T$ ,  $r/Q_d$ ,  $\lambda$ ,  $\hat{n}_r$  y  $T_{exc}/T$ . Se seleccionan los valores de dichos parámetros que proporcionan acciones de control eficaces y se presentan en forma de tablas.
- 2.- Utilizando valores de  $r/Q_d$ ,  $\lambda$  y  $\hat{n}_r$  recomendados en la parte anterior se estudia la influencia de otros factores de menor importancia (como  $Q_v/Q_d$  y  $\xi$ ).

Detalles complementarios de estos estudios pueden encontrarse en Andrade (1992). La influencia de  $|f_c|_{max}$  y  $|f_c \cdot \dot{f}_c|_{max}$  se considera en el siguiente apartado.

La conclusión general de este apartado es que la estrategia de control predictivo es capaz de proporcionar acciones de control estables y eficaces para sistemas de 1 grado de libertad en condiciones ideales de funcionamiento. A continuación se describe la influencia en el rendimiento de la acción de control de los parámetros de la tabla 3.1.

TABLA 3.5

INTERVALO DE VALORES RECOMENDADOS DE $r/Q_d$						
$\xi = 0$ $\hat{n}_r = n_r = 1, 2, 3$ $Q_v/Q_d = 0$						
$\lambda$				$T_{est}/T$	150	200
	10	20	50			
1	$10^{-2} - 1$	$10^{-2} - 10$	$1 - 10^2$	$1 - 10^2$	$1 - 10^2$	$1 - 10^2$
2	$10^{-2} - 10^2$	$1 - 10^2$	$1 - 10^2$	$1 - 10^2$	$1 - 10^2$	$1 - 10^2$
4	—	$1 - 10^2$	$1 - 10^2$	$1 - 10^3$	$1 - 10^3$	$1 - 10^3$
7	—	—	$10 - 10^3$	$10^2 - 10^4$	$10^2 - 10^4$	$10^2 - 10^4$
10	—	—	$10^2 - 10^4$	$10^2 - 10^4$	$10^2 - 10^4$	$10^2 - 10^4$

$T_{est}/T$ . Para valores pequeños de este parámetro ( $T_{est}/T < 25$ ) es difícil generar acciones de control eficaces especialmente para valores pequeños de  $T_{exc}/T$  (menores que 50), es decir, excitaciones con frecuencias altas. Los valores de  $T'_{est}/T$  y de  $\xi'$  no dependen significativamente de este parámetro.

$\xi$ . La influencia de este parámetro es poco significativa.

$Q_v/Q_d$ . El valor óptimo de este parámetro es 0.

$r/Q_d$ . En general, valores de  $r/Q_d$  elevados ( $> 10^3$ ) generan acciones de control suaves con escasa reducción de la respuesta. Valores pequeños proporcionan acciones de control más enérgicas con grandes reducciones de la respuesta. Para  $r/Q_d = 0$  pueden aparecer problemas de inestabilidad especialmente para  $\lambda = 1$  y  $T_{exc}/T$  bajos.

$\lambda$ . Valores de  $\lambda > 5$  producen acciones de control suaves y valores menores de dicho parámetro producen acciones de control enérgicas.  $\lambda = 1$  genera comportamientos cualitativamente distintos a  $\lambda > 1$ . En general, es preferible considerar  $\lambda > 1$ .

$\hat{n}_r$ . Valores no nulos de  $\hat{n}_r$  deterioran la acción de control generando valores de  $\Delta_1$  y  $\Delta_3$  mayores que con  $\hat{n}_r = 0$ .

$T_{exc}/T$ . Si  $T_{exc}/T < 50$  y  $T_{est}/T < 25$  es difícil lograr acciones de control estables y eficaces.

TABLA 3.6								
INTERVALO DE VALORES RECOMENDADOS DE $\lambda$								
Sistemas	10	20	50	$T_{est}/T$	100	150	200	400
$n_r = 0$	1 - 2	2 - 4	2 - 6	2 - 7	2 - 7	2 - 8	2 - 10	
$n_r \neq 0$	2	3 - 4	3 - 6	3 - 7	3 - 7	3 - 8	3 - 10	

En las tablas 3.4 y 3.5 se presentan intervalos de valores de  $r/Q_d$  recomendados en función de  $T_{est}/T$  y  $\lambda$  para, respectivamente,  $n_r = 0$  y  $n_r \neq 0$ . A partir de dichos valores de  $r/Q_d$  en la tabla 3.6 se recomiendan intervalos de valores de  $\lambda$  en función de  $T_{est}/T$  y  $n_r$ . Los datos de estas tablas no pueden ser considerados como criterios definitivos de diseño sino solamente como valores a partir de los cuales debe realizarse en cada caso particular un estudio en mayor profundidad.

### 3.5 ANALISIS NUMERICO DE EFICIENCIA EN SISTEMAS

#### DE 1 GRADO DE LIBERTAD. CONDICIONES IRREGULARES

En este apartado se presenta un análisis numérico de la robustez del control predictivo de estructuras. Dicho análisis se realiza “a posteriori” (es decir, después de conocer de acuerdo con el apartado anterior el comportamiento en condiciones ideales) y se limita a sistemas con 1 grado de libertad. Se entiende por **robustez** el mantenimiento de las características de la acción de control bajo condiciones de funcionamiento irregulares, es decir distintas de las idealmente consideradas.

En el apartado 3.4 se ha considerado que todos los elementos que intervienen en el lazo de control se comportan de forma ideal: no existen errores de medida en los sensores, no hay discrepancias entre los parámetros de la estructura y los valores utilizados para generar el algoritmo de control, los mecanismos actuadores operan sin alcanzar sus condiciones de saturación y el tiempo de retardo considerado en el algoritmo de control coincide con el valor real. En este apartado se estudia la sensibilidad de la acción de control respecto a situaciones irregulares en cada uno de los aspectos anteriores.

Las herramientas de análisis son las descritas en el apartado 3.3. Los valores propios de la matriz  $\hat{\mathbf{A}}$  proporcionan información de la estabilidad del sistema y con los espectros de control se analiza el deterioro en la eficiencia de la acción de control.

Debido a la gran extensión del análisis, éste no puede ser exhaustivo. En cada caso de diseño se deben realizar análisis de sensibilidad siguiendo las directrices a continuación.

En este apartado se proponen los siguientes campos de estudio:

- Errores relacionados con los sensores: calibración incorrecta y perturbaciones.
- Errores en la estimación de las características dinámicas de la estructura ( $T_{est}$  y  $\xi$ ), ocasionando discrepancias de valores en las matrices  $\hat{\mathbf{A}}$  y  $\hat{\mathbf{B}}$  respecto a las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ .
- Problemas con los mecanismos actuadores en lo referente a la fuerza máxima que pueden aplicar y a la potencia máxima que pueden desarrollar. Además, también se consideran diferencias entre el tiempo real de retardo en los actuadores  $n_r$  y el valor considerado en el lazo de control  $\hat{n}_r$ .

Las variaciones en las características dinámicas de la estructura durante la acción de las fuerzas de excitación no son consideradas en este estudio, en Andrade (1992) se justifica que ello no supone una restricción.

En la tabla 3.7 se resumen los aspectos estudiados en detalle por Andrade (1992) en lo referente a análisis de robustez y cuyos principales resultados se presentan a continuación.

La conclusión general de este apartado es que el control predictivo de estructuras para sistemas con 1 grado de libertad es robusto frente a irregularidades moderadas del funcionamiento del lazo de control pero puede ser sensible a situaciones irregulares de

TABLA 3.7

ASPECTOS CONSIDERADOS EN EL ANALISIS DE ROBUSTEZ DEL CONTROL PREDICTIVO DE ESTRUCTURAS	
Elemento	Problema
Sensores	<p>Errores de tipo aditivo en la medida del desplazamiento y la velocidad.</p> <p>Errores de tipo multiplicativo en la medida del desplazamiento y la velocidad.</p> <p>Presencia de perturbación aleatoria: ruido blanco.</p>
Algoritmo de control	Errores en la identificación de los valores de $T_{est}$ y $\xi$ .
Mecanismos actuadores	<p>Trabajo en condiciones de saturación.</p> <p>Valores límites: <math> f_c _{max}</math> y <math> f_c \dot{f}_c _{max}</math></p> <p>Discrepancias entre el tiempo de retardo supuesto y el real del sistema: <math>\hat{n}_r \neq n_r</math>.</p>

mayor importancia. Conclusiones particulares son las siguientes:

*Sensores.* - El control es robusto frente a errores multiplicativos de medida y frente a errores aditivos sistemáticos de magnitud moderada. Es sensible a errores aditivos elevados o a perturbaciones aleatorias aditivas.

*Algoritmo de control.* - El sistema es robusto ante errores moderados en la estimación del amortiguamiento y del período natural de la estructura. Es sensible a errores importantes (en especial por defecto) de estimación de dicho período.

*Actuadores.* - El sistema es robusto frente limitaciones moderadas de la fuerza de control y de la potencia requerida pero es sensible a restricciones significativas de dichas magnitudes. El sistema es robusto frente a discrepancias entre  $\hat{n}_r$  y  $n_r$ , si  $\hat{n}_r \geq 2$  y sensible si  $\hat{n}_r < 2$ .

### 3.6 COMENTARIOS FINALES

En este capítulo se han presentado los elementos a partir de los cuales se realiza en el capítulo siguiente un análisis numérico de la eficacia de la estrategia de control predictivo para reducir la respuesta dinámica de estructuras modeladas como sistemas de varios grados de libertad.

Para desarrollar dicho análisis se han tenido en cuenta todos los elementos que intervienen en el lazo de control, especialmente la estructura, el algoritmo de control, los sensores, los actuadores y la excitación. La influencia de estos elementos en el rendimiento del control se analiza estudiando el efecto de los parámetros que los caracterizan. Los parámetros cuya influencia en la acción de control es más importante son el período natural de la estructura, el período predominante de la excitación y otros parámetros propios del algoritmo de control predictivo. Para obtener un análisis con la mayor generalidad posible los parámetros han sido normalizados de forma adimensional.

El comportamiento dinámico de la estructura se ha representado por un modelo matemático (ecuaciones del movimiento en derivadas parciales o ecuaciones vectoriales fruto de una discretización espacial) que puede descomponerse (en coordenadas modales) en sistemas desacoplados de un grado de libertad.

Se han presentado las herramientas fundamentales de análisis relacionadas con el estudio de la estabilidad del lazo cerrado de control, con las características dinámicas equivalentes de la estructura y con los espectros de control.

La complejidad de las expresiones analíticas que definen al control predictivo hace que sea difícil establecer la influencia de los parámetros que se estudian por lo que es imprescindible realizar un análisis numérico. Dicho análisis consiste en someter a experiencias de control a estructuras con 1 grado de libertad a excitaciones armónicas.

El análisis numérico para sistemas de un grado de libertad se realiza desde dos puntos de vista: el primero en condiciones ideales, y el segundo orientado al estudio de la robustez. El análisis en condiciones ideales (apartado 3.4) consiste en considerar que todos los parámetros del algoritmo de control están correctamente estimados y no existe ningún problema de funcionamiento los mecanismos actuadores y en los sensores. El análisis de robustez (apartado 3.5) considera distintas situaciones irregulares de los elementos que intervienen en el lazo cerrado de control: discrepancias entre los parámetros de la estructura y los que definen el algoritmo de control, funcionamiento de los actuadores en condiciones de saturación, errores en la medida de los sensores y otros problemas que pueden surgir en la implementación real de un sistema de control.

Las tablas de valores recomendados para los distintos parámetros deben tomarse como valores de partida a partir de los cuales se debe ajustar el diseño definitivo del sistema de control.

## REFERENCIAS

- Andrade R.A.** (1992), Metodología para la implementación de sistemas de control predictivo de estructuras, *Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña*.
- Andrade R.A., López Almansa F. y Rodellar J.**, (1993), Características dinámicas equivalentes de una estructura bajo acciones de control activo, *Proceedings del II Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, pp.224-232, ISBN 84-87-867-23-5.
- LaSalle J. y Lefschetz S.** (1961), *Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications*, Academic Press, New York.
- López Almansa F.** (1988). Contribución al desarrollo de sistemas de control de estructuras de edificación mediante cables activos, *Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña*.
- López Almansa F., Rodellar J. y Barbat A.H.** (1988), *Procedimientos de espacio de estado en dinámica de estructuras*, ETSCCPB-UPC, Barcelona.
- López Almansa F. y Rodellar J.** (1990), Feasibility and robustness of predictive control of building structures, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, No.19, pp. 157-171.
- López Almansa F., Andrade R.A. Rodellar J. y Reinhorn A.M.** (1994), Modal Predictive Control of Structures, part II: Implementation, *Journal of Engineering Mechanics, Div. ASCE*, en prensa.
- Mickleborough N.C. y Pi L.** (1989), Modal parameter identification using z-transforms, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.28, pp. 2307-2321.
- Ogata K.** (1967), *State Space Analysis of Control Systems*, Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- Ogata K.** (1988), *Ingeniería de Control Moderna*, Prentice-Hall Inc., México.
- Rodellar J., Chung L.L., Soong T.T. y Reinhorn A.M.** (1989), Experimental digital control of structures, *Journal of Engineering Mechanics, Div. ASCE*, Vol.115, No.6, pp.1245-1261.
- Willems J.L.** (1970), *Stability Theory of Dynamical Systems*, Thomas Nelson, Waton - on - Thames, Surrey, England.



## Capítulo 4

# APLICACION DEL ANALISIS DE EFICIENCIA A SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

### 4.1 INTRODUCCION

En el capítulo 3 se ha presentado resultados de un estudio numérico de las condiciones de eficiencia del control predictivo de estructuras modeladas como sistemas de un grado de libertad. En el apartado 3.4 se considera que el lazo de control evoluciona bajo condiciones ideales y en el apartado 3.5 se plantea diversos problemas (análisis de robustez) que pueden darse en la implementación de sistemas de control y su repercusión en la eficiencia de éstos. El objetivo de este capítulo es la utilización de las conclusiones surgidas del estudio de sistemas de un grado de libertad en el diseño e implementación de controladores para estructuras con varios grados de libertad. Para ello un sistema de  $n$  grados de libertad, a través de un desacoplamiento modal, se transforma en un conjunto de  $n$  sistemas independientes de un grado de libertad, para cada uno de los cuales se seleccionan los valores de  $\lambda$  y  $r/Q_d$  de forma independiente utilizando los criterios de eficiencia del capítulo anterior de acuerdo con las características de cada modo.

Una vez formulado el control predictivo modal independiente, se analizan tres casos posibles de implementación real de este control. En los dos primeros se considera que existen sensores en cada uno de los grados de libertad, de tal manera que se conoce el estado completo de la estructura. En el primer caso, se considera la implementación con un número de actuadores igual al número de grados de libertad de la estructura. En el segundo, se utiliza un número menor de actuadores. El tercer caso, con vistas a una implementación más realista, utiliza un número de sensores y de actuadores menor que el número de grados de libertad.

Debido a la imposibilidad de realizar un estudio exhaustivo la efectividad del control se analiza mediante ejemplos numéricos sobre tres estructuras de edificación sometidas a acciones sísmicas: i) un modelo a escala 1:4 de una estructura experimental de seis plantas que se encuentra en la "University of New York at Buffalo"; ii) un modelo de laboratorio de un edificio dotado con un sistema de aislamiento de base existente en la "University of California at Berkeley" y iii) la estructura de un edificio de 6 plantas a escala real construido en Japón por la compañía Takenaka con fines de ensayos de campo de control activo.

## 4.2 CONTROL PREDICTIVO MODAL INDEPENDIENTE

La ecuación de movimiento de una estructura sometida a una excitación exterior  $\mathbf{f}(t)$  y a acciones de control  $\mathbf{f}_c(t - \tau_r)$  de acuerdo con (2.30) es

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{f}(t) + \mathbf{f}_c(t - \tau_r) \quad (4.1)$$

el vector  $\mathbf{f}_c$  tiene  $n$  componentes, uno por grado de libertad del modelo de la estructura.

El estudio del comportamiento dinámico de la estructura se puede realizar por medio del análisis de  $n$  sistemas independientes de un grado de libertad, cada uno correspondiente a un modo de vibración de la estructura.

Sea  $\Phi$  la matriz de cambio de base (dimensión  $n \times n$ ) de coordenadas modales  $\eta$  a generales  $d$ , de tal forma que

$$\mathbf{d} = \Phi\eta \quad \dot{\mathbf{d}} = \Phi\dot{\eta} \quad \ddot{\mathbf{d}} = \Phi\ddot{\eta} \quad (4.2a)$$

$$\eta = \Phi^{-1}\mathbf{d} \quad \dot{\eta} = \Phi^{-1}\dot{\mathbf{d}} \quad \ddot{\eta} = \Phi^{-1}\ddot{\mathbf{d}} \quad (4.2b)$$

y que cumple la condición de ser ortonormal a través de la matriz  $M$ :

$$\Phi^t M \Phi = I \quad (4.3)$$

donde  $I$  es la matriz identidad.

Sustituyendo (4.2) en (4.1) y premultiplicando por  $\Phi^t$  se obtiene

$$\Phi^t M \Phi \ddot{\eta}(t) + \Phi^t C \Phi \dot{\eta}(t) + \Phi^t K \Phi \eta(t) = \Phi^t \mathbf{f}(t) + \Phi^t \mathbf{f}_c(t)$$

que se transforma en

$$\ddot{\eta}(t) + C^* \dot{\eta}(t) + \Omega^2 \eta(t) = \mathbf{f}^*(t) + \mathbf{f}_c^*(t - \tau_r) \quad (4.4)$$

donde

$$C^* = \Phi^t C \Phi \quad (4.5a)$$

$$\Omega^2 = \Phi^t K \Phi \quad (4.5b)$$

$$\mathbf{f}^* = \Phi^t \mathbf{f} \quad (4.5c)$$

$$\mathbf{f}_c^* = \Phi^t \mathbf{f}_c \quad (4.5d)$$

(4.4) es la ecuación del movimiento en coordenadas modales. La matriz  $\Omega$  es una matriz diagonal que contiene las  $n$  frecuencias de vibración  $\omega_i$ , ya que  $\Phi$  es ortogonal respecto a  $\mathbf{K}$  al provenir de la solución del problema de valores propios  $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\phi = 0$ .

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & & & \\ & \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

La matriz  $\mathbf{C}^*$  en general no es diagonal, sin embargo si el amortiguamiento es de tipo clásico la matriz de amortiguamiento en coordenadas modales  $\mathbf{C}^*$  es diagonal. Del estudio de robustez (apartado 3.5) se puede deducir que parece factible aproximar una matriz de amortiguamiento cualquiera por una matriz  $\mathbf{C}$  de tipo clásico ya que el amortiguamiento natural de la estructura casi no influye en la respuesta con control (Andrade, 1992). Por tanto, se considerarán únicamente matrices con amortiguamiento de este tipo, de tal forma que  $\mathbf{C}^*$  sea diagonal e igual a

$$\mathbf{C}^* = \begin{pmatrix} 2\xi_1\omega_1 & & & \\ & 2\xi_2\omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2\xi_n\omega_n \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

La ecuación (4.4) se descompone en  $n$  ecuaciones independientes

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\xi_i\omega_i \dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta_i(t) = f_i^*(t) + f_{c_i}^*(t - \tau_r) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.8)$$

en cada una de las cuales se pretende generar fuerzas de control modal  $f_{c_i}^*$  que sean función de sus coordenadas modales  $\eta_i$  y  $\dot{\eta}_i$  (Meirovitch, 1990). Estas fuerzas de control modal se generan a partir de la estrategia de control predictivo. En adelante se presenta el desarrollo para la obtención de dichas fuerzas. Utilizando representación de estado para (4.8) se obtiene

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_i(t) \\ \ddot{\eta}_i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\xi_i\omega_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_i(t) \\ \dot{\eta}_i(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_i(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_{c_i}^*(t - \tau_r) \end{pmatrix} \quad (4.9a)$$

o lo que es lo mismo

$$\dot{\mathbf{Z}}_i(t) = \mathbf{F}_i \mathbf{Z}_i(t) + \mathbf{v}_i^*(t) + \mathbf{v}_{c_i}^*(t) \quad (4.9b)$$

donde

$$\mathbf{Z}_i(t) = \begin{pmatrix} \eta_i(t) \\ \dot{\eta}_i(t) \end{pmatrix} \quad (4.9c)$$

$$\mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\xi_i\omega_i \end{pmatrix} \quad (4.9d)$$

$$\mathbf{v}_i^*(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_i(t) \end{pmatrix} \quad (4.9e)$$

$$\mathbf{v}_{ci}^*(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_{ci}^*(t - \tau_r) \end{pmatrix} \quad (4.9f)$$

La solución en tiempo continuo de (4.9b) de acuerdo con (2.32a) y (2.33) es

$$\mathbf{Z}_i(t) = \exp[\mathbf{F}_i(t - t_0)]\mathbf{Z}_i(t_0) + \int_{t_0}^t \exp[\mathbf{F}_i(t - \tau)][\mathbf{v}_{ci}^*(\tau) + \mathbf{v}_i^*(\tau)]d\tau \quad (4.10)$$

Discretizando temporalmente con un período constante  $\Delta t$ , de igual forma que en el subapartado 2.4.1, la ecuación (4.10) se transforma de acuerdo con (2.40) en

$$\mathbf{Z}_i(k+1) = \mathbf{A}_i^*\mathbf{Z}_i(k) + \mathbf{P}_{1i}^*\mathbf{v}_i^*(k+1) + \mathbf{P}_{2i}^*[\mathbf{v}_i^*(k+1) - \mathbf{v}_i^*(k)] + \mathbf{P}_{1i}^*\mathbf{v}_{ci}^*(k) \quad (4.11)$$

donde  $\mathbf{A}_i^*$ ,  $\mathbf{P}_{1i}^*$ ,  $\mathbf{P}_{2i}^*$  son matrices constantes de dimensiones de  $2 \times 2$  definidas por

$$\mathbf{A}_i^* = \exp(\Delta t \mathbf{F}_i) \quad (4.12a)$$

$$\mathbf{P}_{1i}^* = \mathbf{F}_i^{-1}(\mathbf{A}_i^* - \mathbf{I}) \quad (4.12b)$$

$$\mathbf{P}_{2i}^* = \mathbf{F}_i^{-1}\left(\frac{1}{\Delta t}\mathbf{P}_{1i}^* - \mathbf{A}_i^*\right) \quad (4.12c)$$

La matriz  $\mathbf{A}_i^*$  es la matriz del sistema del modo  $i$  en tiempo discreto.

A partir de (4.11) se puede plantear el modelo predictivo, en el cual no se incluye la excitación exterior:

$$\hat{\mathbf{Z}}_i(k+j|k) = \hat{\mathbf{A}}_i^* \hat{\mathbf{Z}}_i(k+j-1|k) + \hat{\mathbf{B}}_i^* \hat{f}_{ci}^*(k+j-1-\hat{n}_r|k) \quad (j = 1, \dots, \lambda + \hat{n}_r) \quad (4.13)$$

en donde  $\hat{\mathbf{A}}_i^*$  es el valor estimado de  $\mathbf{A}_i^*$ ,  $\hat{\mathbf{Z}}_i(k+j|k)$  el valor predicho de  $\mathbf{Z}_i$  y  $\hat{f}_{ci}^*(k+j-1-\hat{n}_r|k)$  el valor predicho de  $f_{ci}^*$  y

$$\hat{\mathbf{B}}_i^* = \hat{\mathbf{P}}_{1i}^* \mathbf{L}_i = \mathbf{P}_{1i}^* \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

siendo  $\hat{\mathbf{P}}_{1i}^*$  el valor estimado de  $\mathbf{P}_{1i}^*$ . Utilizando (4.13) se deducen las fuerzas de control de forma similar a (2.74), con lo que se obtiene

$$f_{ci}^*(k) = -\hat{\mathbf{D}}^{*i} \begin{pmatrix} \eta_i(k) \\ \dot{\eta}_i(k) \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{\hat{n}_r} \hat{K}_{ij}^* f_{ci}^*(k-j) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.15)$$

donde  $\hat{\mathbf{D}}^{*i}$  se puede denominar matriz de ganancia modal y es de la forma

$$\hat{\mathbf{D}}^{*i} = (\hat{D}_{1i}^* \quad \hat{D}_{2i}^*) \quad (4.16)$$

Los coeficientes  $\hat{D}_{1i}^*$  y  $\hat{D}_{2i}^*$  se calculan por las expresiones generales (4.52a) y (4.52b) respectivamente. Los coeficientes  $\hat{K}_{ij}^*$  se calculan por la ecuación general (4.55b).

La expresión (4.15) permite calcular el valor de la fuerza de control modal  $f_{ci}^*$  independientemente para cada modo. Si se eligen los valores de  $r/Q_d$  y  $\lambda$  (para cada modo) de acuerdo con los criterios de eficiencia del capítulo anterior la acción de control será, en general, eficiente.

Debido a que no es posible aplicar directamente las fuerzas modales  $f_{ci}^*$  sobre la estructura ya que son función de variables que físicamente no son medibles, y las coordenadas modales no representan puntos de aplicación en el espacio, es necesario transformarlas en magnitudes factibles de ser aplicadas sobre la estructura. Dichas magnitudes deben cumplir dos requisitos: 1) ser función de variables físicas medibles; 2) tener puntos de aplicación en el espacio. Las señales de control contenidas en el vector  $\mathbf{u}$  que se define más adelante satisfacen ambos requerimientos.

En los apartados siguientes se considera la transformación de estas fuerzas de control modal  $f_c^*$  en señales de control en coordenadas generales  $\mathbf{u}$  y se analiza la posibilidad de implementarlas con un número variable de actuadores y/o sensores.

#### 4.3 IMPLEMENTACION CON UN ACTUADOR Y UN SENSOR EN CADA GRADO DE LIBERTAD

En este caso se considera igual número de sensores y actuadores que de grados de libertad. En el subapartado 4.3.1 se describe la formulación general del problema y en el subapartado 4.3.2 se presentan ejemplos numéricos de simulación.

### 4.3.1 Implementación

Como las fuerzas modales de control  $\mathbf{f}_c^*$  no se pueden aplicar directamente a la estructura ya que no son físicamente materializables por no tener puntos de aplicación ni ser medibles las coordenadas  $\boldsymbol{\eta}$ , es necesario transformar las fuerzas modales  $\mathbf{f}_c^*$  en señales de control  $\mathbf{u}$  realmente implementables en un sistema de control.

Las  $n$  fuerzas modales en (4.15) pueden expresarse matricialmente por

$$\mathbf{f}_c^*(k) = -\hat{\mathbf{D}}^* \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}(k) \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}(k) \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{n_r} \hat{\mathbf{K}}_j^* \mathbf{f}_c^*(k-j) \quad (4.17)$$

donde  $\hat{\mathbf{D}}^*$  es una matriz de dimensión  $n \times 2n$  y  $\hat{\mathbf{K}}_j^*$  son matrices de dimensión  $n \times n$ .  $\hat{\mathbf{D}}^*$  está formada por dos submatrices diagonales  $n \times n$   $\hat{\mathbf{D}}_1^*$  y  $\hat{\mathbf{D}}_2^*$ , cada una de las cuales contiene los  $n$  elementos  $\hat{D}_{1i}^*$  y  $\hat{D}_{2i}^*$  de cada modo, es decir

$$\hat{\mathbf{D}}^* = (\hat{\mathbf{D}}_1^* \quad \hat{\mathbf{D}}_2^*) \quad (4.18a)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_1^* = \begin{pmatrix} \hat{D}_{11}^* & & & \\ & \hat{D}_{12}^* & & \\ & & \ddots & \\ & & & \hat{D}_{1n}^* \end{pmatrix} \quad (4.18b)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_2^* = \begin{pmatrix} \hat{D}_{21}^* & & & \\ & \hat{D}_{22}^* & & \\ & & \ddots & \\ & & & \hat{D}_{2n}^* \end{pmatrix} \quad (4.18c)$$

Los elementos de la matriz  $\hat{\mathbf{D}}_1^*$  corresponden a los desplazamientos  $\boldsymbol{\eta}$  en (4.17) mientras que los de  $\hat{\mathbf{D}}_2^*$  corresponden a las velocidades  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ . Las matrices diagonales  $n \times n$   $\hat{\mathbf{K}}_j^*$  contienen igualmente los  $n$  coeficientes  $\hat{K}_{ji}^*$  de cada modo

$$\hat{\mathbf{K}}_j^* = \begin{pmatrix} \hat{K}_{j1}^* & & & \\ & \hat{K}_{j2}^* & & \\ & & \ddots & \\ & & & \hat{K}_{jn}^* \end{pmatrix} \quad (4.18d)$$

Puesto que existe una fuerza de control por cada grado de libertad, el vector de fuerzas de control en coordenadas generales  $\mathbf{f}_c$  puede escribirse como

$$\mathbf{f}_c(k) = \mathbf{M}\mathbf{u}(k) \quad (4.19)$$

donde  $\mathbf{u}$  (que tiene dimensión de aceleración) es la señal de control. Sustituyendo (4.19) en (4.5d) se obtiene

$$\mathbf{f}_c^*(k) = \Phi^t \mathbf{M}\mathbf{u}(k) \quad (4.20)$$

La ecuación (4.20) establece una relación directa entre las fuerzas de control modal  $\mathbf{f}_c^*$  generadas por algoritmos de control predictivos y las señales de control  $\mathbf{u}$  que se aplican a la estructura.

La relación inversa de (4.20) siempre existe puesto que  $\Phi^t$  y  $\mathbf{M}$  son matrices cuadradas y no singulares. Operando en (4.3) se obtiene

$$(\Phi^t)^{-1} = \mathbf{M}\Phi \quad (4.21a)$$

$$\Phi^{-1} = \Phi^t \mathbf{M} \quad (4.21b)$$

Sustituyendo (4.21b) en (4.20) resulta

$$\mathbf{u}(k) = \Phi\mathbf{f}_c^*(k) \quad (4.22)$$

La expresión (4.22) muestra que en este caso es posible aplicar sobre la estructura señales de control contenidas en  $\mathbf{u}$  de forma que las fuerzas de control modales  $f_c^*$  tomen los valores requeridos por las estrategias de control consideradas en cada modo. Consecuentemente, si los valores de  $\lambda$  y  $r/Q_d$  se seleccionan para cada modo de acuerdo con las recomendaciones del capítulo 3 la acción de control en general será eficaz.

La ecuación matricial (4.17) se puede expresar en función de las coordenadas medibles  $\mathbf{d}$  y  $\dot{\mathbf{d}}$  utilizando las relaciones (4.2b)

$$\mathbf{f}_c^*(k) = -\hat{\mathbf{D}}^* \begin{pmatrix} \Phi^{-1}\mathbf{d}(k) \\ \Phi^{-1}\dot{\mathbf{d}}(k) \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{n_r} \hat{\mathbf{K}}_j^* \mathbf{f}_c^*(k-j) \quad (4.23)$$

Premultiplicando (4.23) por  $\Phi$  y haciendo uso de (4.22), (4.20), (4.21b) y de la definición de la matriz de ganancia dada en (4.18) se tiene

$$\mathbf{u}(k) = -(\Phi\hat{\mathbf{D}}_1^*\Phi^t\mathbf{M} \quad \Phi\hat{\mathbf{D}}_2^*\Phi^t\mathbf{M}) \begin{pmatrix} \mathbf{d}(k) \\ \dot{\mathbf{d}}(k) \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{n_r} \Phi\hat{\mathbf{K}}_j^*\Phi^t\mathbf{M}\mathbf{u}(k-j) \quad (4.24)$$

Se introducen las matrices de orden  $n \times n$

$$\hat{G}_1 = \Phi \hat{D}_1^* \Phi^t M \quad (4.25a)$$

$$\hat{G}_2 = \Phi \hat{D}_2^* \Phi^t M \quad (4.25b)$$

$$\hat{E}_j = \Phi \hat{K}_j^* \Phi^t M \quad (4.25c)$$

que permiten calcular las señales de control  $\mathbf{u}$  (aceleraciones) por la expresión

$$\mathbf{u}(k) = -\hat{\mathbf{G}} \begin{pmatrix} \mathbf{d}(k) \\ \dot{\mathbf{d}}(k) \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{n_r} \hat{E}_j \mathbf{u}(k-j) \quad (4.26a)$$

donde

$$\hat{\mathbf{G}} = (\hat{G}_1 \quad \hat{G}_2) \quad (4.26b)$$

es de dimensión  $n \times 2n$ .  $\hat{G}_1$  y  $\hat{G}_2$  son las matrices de ganancia del control en coordenadas generales. Nótese que de acuerdo con el procedimiento aquí descrito estas matrices se han generado a partir de las matrices de ganancia del control independiente para cada modo  $\hat{D}_1^*$  y  $\hat{D}_2^*$ .

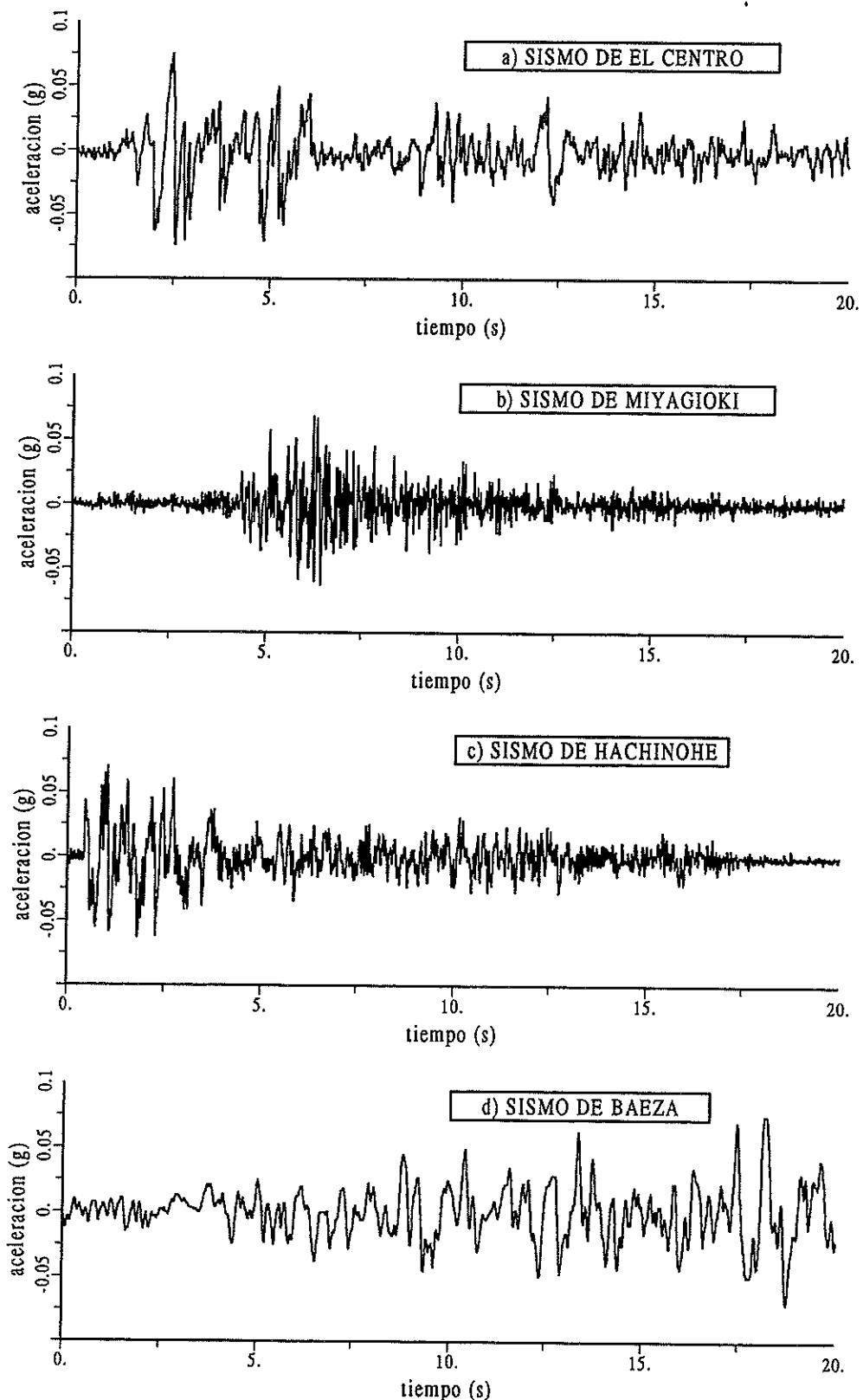
La expresión (4.26a) permite que se implemente el cálculo de la señal de control  $\mathbf{u}$  en función de variables físicas medibles  $\mathbf{d}$  y  $\dot{\mathbf{d}}$ .

Por último, las fuerzas de control en coordenadas generales  $\mathbf{f}_c$  se obtienen al reemplazar (4.26a) en la expresión (4.19).

### 4.3.2 Ejemplos de simulación numérica

En el presente subapartado se analiza a partir de un ejemplo la utilidad de los valores

ESTRUCTURA DE LA UNIVERSIDAD DE BUFFALO						
TABLA 4.1						
Matriz de Masa [ $kN \cdot s^2/m$ ]	3.1879	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0	3.1879	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0	0.0	3.1879	0.0	0.0	0.0
	0.0	0.0	0.0	3.1879	0.0	0.0
	0.0	0.0	0.0	0.0	3.1879	0.0
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	3.1879
Matriz de Amortiguamiento [ $kN \cdot s/m$ ]	6.5080	-0.4169	-1.3930	-0.7441	2.0382	-1.2086
	-0.4169	3.4605	-2.1900	0.1976	0.4171	-0.0904
	-1.3930	-2.1900	4.3428	-0.6368	-0.6766	0.6788
	-0.7441	0.1976	-0.6368	2.6856	-1.1980	0.5488
	2.0382	0.4171	-0.6766	-1.1980	3.9167	-1.4660
	-1.2086	-0.0904	0.6788	0.5488	-1.4660	2.2427
Matriz de Rigidez [ $kN/m$ ]	14332.58	-3988.15	-395.64	-164.23	-278.19	-101.32
	-3988.15	12318.34	-8153.99	-93.37	247.57	-81.48
	-395.64	-8153.99	12869.11	-4715.70	343.20	-156.12
	-164.23	-93.37	-4715.70	9363.11	-4742.73	102.04
	-278.19	247.57	343.20	-4742.73	9635.76	-5128.80
	-101.32	-81.48	-156.12	102.04	-5128.80	5047.67
$\omega$ [rad/s]	9.80	28.84	49.70	65.66	71.86	84.07
$T_{est}/T$ ( $T = 0.01$ s)	64.11	21.79	12.64	9.57	8.74	7.47
$\xi$ [%]	2.34	0.59	0.61	2.16	0.80	1.11
Participación modal [%]	83.50	9.08	1.35	4.44	1.44	0.19
Matriz modal normalizada	0.024	-0.046	-0.054	0.170	0.127	-0.065
	0.059	-0.128	-0.094	0.029	-0.061	0.147
	0.077	-0.127	-0.023	-0.084	-0.037	-0.155
	0.105	-0.051	0.152	-0.039	0.112	0.065
	0.124	0.061	0.072	0.111	-0.132	-0.028
	0.136	0.118	-0.119	-0.067	0.060	0.010



**Figura 4.1** a) Sismo de El Centro b) Sismo de Miyagioki c) Sismo de Hachinohe d) Sismo de Baeza (Ecuador).

TABLA 4.2

**CONDICIONES DE CONTROL**  
 Estructura de la Universidad de Buffalo. Seis actuadores y seis sensores.  $Q_v/Q_d = 0$

Modo	$A_1$ $\lambda r/Q_d$	$A_2$ $\lambda r/Q_d$	$A_3$ $\lambda r/Q_d$	$A_4$ $\lambda r/Q_d$	$A_5$ $\lambda r/Q_d$	$A_6$ $\lambda r/Q_d$	$A_7$ $\lambda r/Q_d$	$A_8$ $\lambda r/Q_d$	$A_9$ $\lambda r/Q_d$	
1	4	1	4	0	4	$10^5$	4	1000	4	500
2	4	1	4	0	4	$10^5$	4	1000	4	500
3	3	1	3	0	3	$10^5$	3	1000	3	500
4	2	1	2	0	2	$10^5$	2	1000	2	500
5	2	1	2	0	2	$10^5$	2	1000	2	500
6	2	1	2	0	2	$10^5$	2	1000	2	500

En los casos  $A_1$  a  $A_7$   $\hat{n}_r = n_r = 0$ . En los casos  $A_8$  y  $A_9$   $\hat{n}_r = 2$  y  $n_r = 1$ .

**TABLA 4.3**

**FRECUENCIAS EQUIVALENTES [rad/s] Y FACTORES DE AMORTIGUAMIENTO EQUIVALENTES [%]**  
 Estructura de la Universidad de Buffalo. Condiciones de control según tabla 4.2

Caso	$\omega'_1$	$\omega'_2$	$\omega'_3$	$\omega'_4$	$\omega'_5$	$\omega'_6$	$\xi'_1$	$\xi'_2$	$\xi'_3$	$\xi'_4$	$\xi'_5$	$\xi'_6$
$A_1$	37.09	40.71	54.98	78.18	83.33	91.42	39.88	68.86	28.55	26.24	26.32	23.91
$A_2$	37.16	41.13	55.11	79.35	84.85	92.67	40.16	69.63	29.17	28.21	29.21	27.25
$A_3$	9.84	28.85	49.70	65.66	71.86	84.07	2.47	0.65	0.62	2.16	0.81	1.11
$A_4$	12.91	29.77	49.91	65.80	71.95	84.12	11.65	5.57	1.85	2.48	1.06	1.29
$A_5$	15.20	30.51	50.11	65.95	72.05	84.17	17.54	9.41	2.99	2.80	1.31	1.47
$A_6$	24.46	33.45	51.27	67.00	72.78	84.55	37.86	23.78	9.52	5.05	3.14	2.80
$A_7$	37.09	40.71	47.78	56.53	56.71	63.08	39.88	68.86	26.17	20.26	18.90	7.56

TABLA 4.4

**RESULTADOS DEL CONTROL. Sismo El Centro**  
 Estructura de la Universidad de Buffalo. Condiciones de control según tabla 4.2

Caso	$d_6$		$\ddot{d}_6$		$u_1$		$u_2$		$u_3$		$u_4$		$u_5$		$u_6$		
	max	med	max	med	max	med	max	med	max	med	max	med	max	med	max	med	
SC	2.723	0.965	333.65	97.96													
$A_1$	0.051	0.015	46.03	8.48	45.31	8.79	85.06	17.09	94.77	19.41	103.56	23.11	103.10	24.03	103.10	24.51	
$A_2$	0.051	0.013	45.67	8.38	46.15	8.79	85.32	17.20	94.84	19.63	103.22	22.99	102.89	24.08	102.97	24.38	
$A_3$	2.69	0.91	333.2	96.21	0.38	0.13	0.91	0.33	1.24	0.38	1.67	0.56	1.90	0.64	2.13	0.74	
$A_4$	1.24	0.30	270.2	53.82	14.78	4.16	36.52	10.64	48.54	13.86	70.74	18.49	88.75	22.20	99.85	24.51	
$A_5$	0.673	0.180	186.05	38.71	16.64	4.62	42.06	12.01	54.56	15.26	76.27	20.80	94.31	24.51	105.87	26.82	
$A_6$	0.173	0.045	94.26	16.81	26.34	6.02	69.80	14.78	85.98	18.49	104.01	22.66	109.55	24.97	114.66	26.34	
$A_7$	0.053	0.015	46.33	8.51	17.09	3.70	91.06	18.49	103.10	21.72	103.10	23.11	103.10	24.03	103.10	24.51	
$A_8$	0.775	0.218	220.67	49.68	18.95	5.54	47.14	13.86	61.95	18.03	86.43	24.51	107.24	29.59	120.65	32.36	
$A_9$	0.107	0.025	122.05	29.54	46.23	8.79	122.96	24.03	146.53	29.14	171.96	35.13	183.99	36.98	186.31	37.90	

$d_6$  en [cm]  
 $\ddot{d}_6$  en [ $cm/s^2$ ]  
 $u_i$  en [ $cm/s^2$ ]

recomendados por las tablas 3.4, 3.5 y 3.6 para diseñar acciones de control modal eficaces.

En este subapartado se presentan las tablas 4.1 a 4.5 y las figuras 4.1 a 4.9.

Se llevan a cabo ensayos de simulación numérica sobre el modelo a escala 1:4 de una estructura de 6 plantas que se encuentra en el laboratorio de SUNY/Buffalo, cuyas características (Wang, 1991) se detallan en la tabla 4.1. Se ha seleccionado este modelo por el gran número de ensayos experimentales y de simulación que se realizan sobre él, lo que puede permitir en una etapa posterior comparar con los resultados de otras metodologías y algoritmos de control.

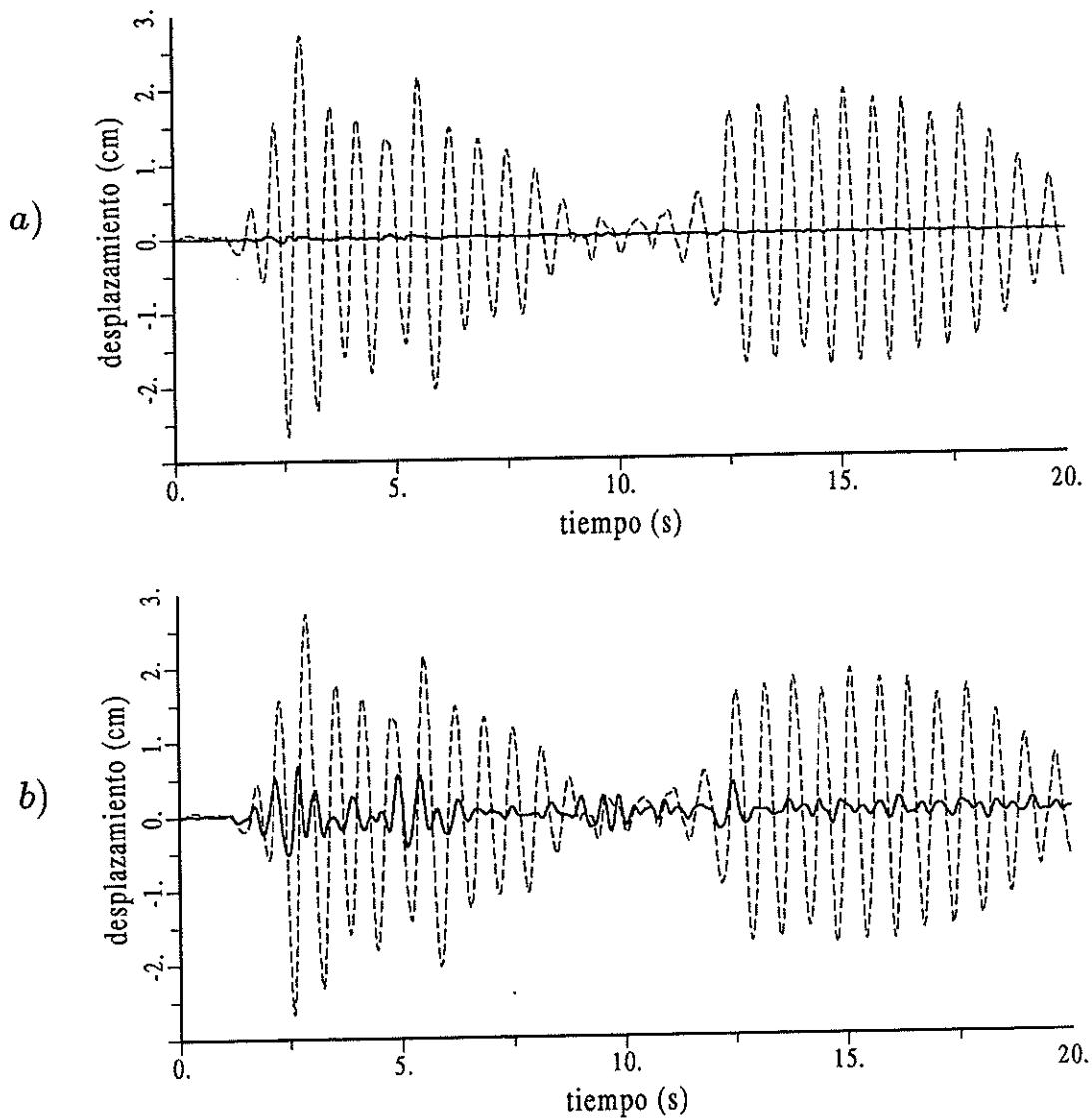
El modelo se somete a la acción de 4 sismos, todos ellos normalizados a una amplitud máxima de  $0.075\ g$  y con una duración de 20 s. En la figura 4.1 se presentan los acelerogramas de estos sismos.

Se plantean 9 condiciones de control (denominadas  $A_1$  a  $A_9$ ). Las condiciones de control para los nueve casos se encuentran detalladas en la tabla 4.2. El período de muestreo  $T$  es 0.01 s.

En la tabla 4.3 se presentan los valores de las frecuencias y amortiguamientos equivalentes por efecto del control para los casos  $A_1$  a  $A_7$ . Estos valores equivalentes se obtienen tal como se describe en el apartado 4.5. Para los casos  $A_8$  y  $A_9$  estos valores no pueden obtenerse mediante la formulación presentada en el apartado 4.5 ya que el sistema tiene retardos. La comparación entre los valores de  $\omega'_i$ ,  $\xi'_i$  en la tabla 4.3 y de  $\omega_i$ ,  $\xi_i$  en la tabla 4.1 pone de manifiesto la eficacia de la acción de control con excepción del caso  $A_3$ .

En la tabla 4.4 se muestran los valores máximos y medios cuadráticos del desplazamiento relativo y aceleración relativa en el sexto piso y los valores máximos y medios cuadráticos de las 6 señales de control. Las siglas SC significan "Sin Control". La conclusión general de la tabla 4.4 confirma la de la tabla 4.3 y las de las figuras 4.2 a 4.9.

En el caso  $A_1$  las matrices de ganancia modal  $\hat{D}_1^*$  y  $\hat{D}_2^*$  definidas en (4.18) se generan al imponer las condiciones de eficiencia recomendadas en las tablas 3.4 y 3.6. Esta condición de control produce un aumento sustancial de las frecuencias y amortiguamientos equivalentes de la estructura para los 6 modos (tabla 4.3). La reducción de la respuesta es muy considerable respecto al caso SC tal como muestra la tabla 4.4.

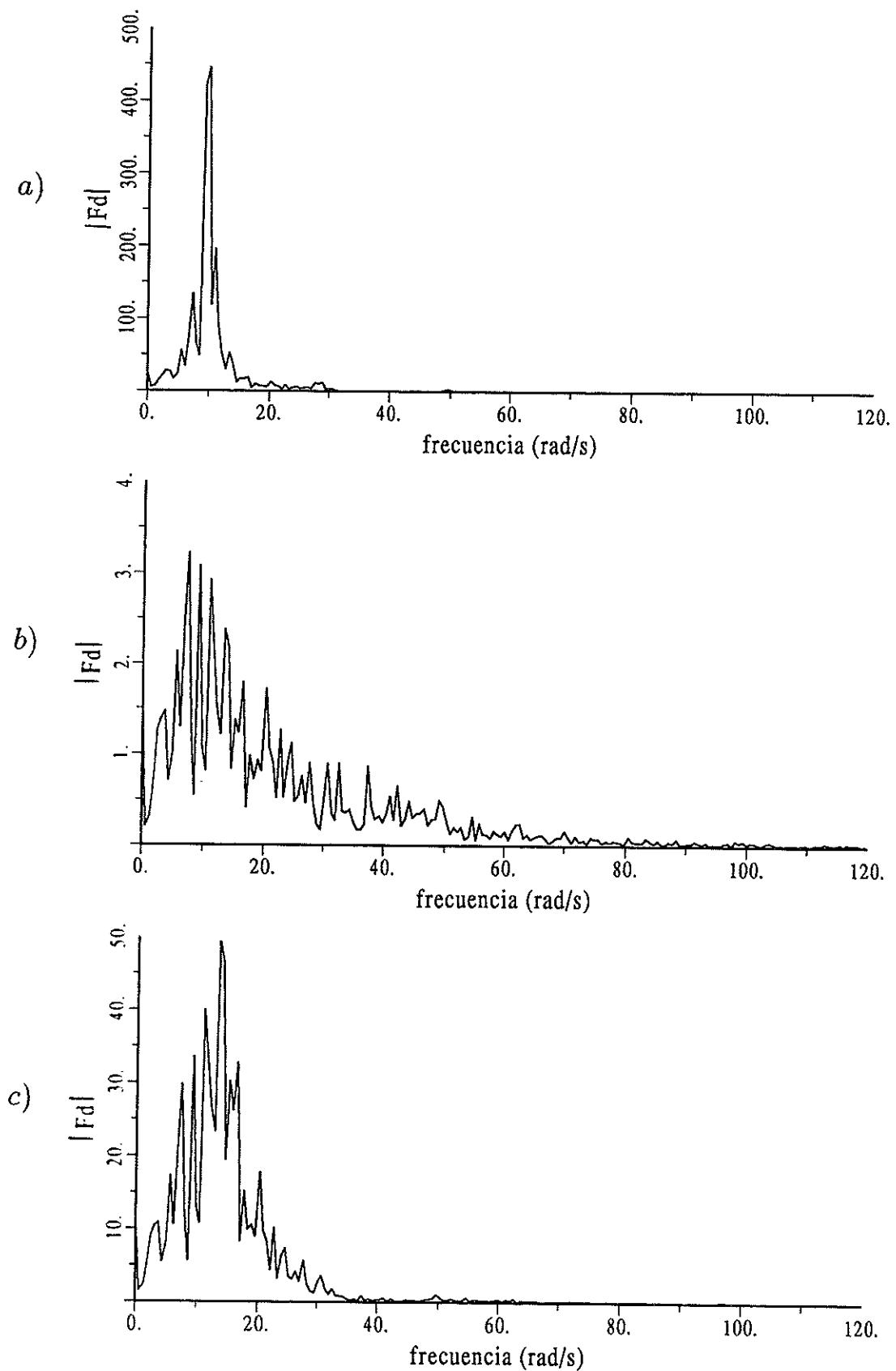


**Figura 4.2 Reducción del desplazamiento relativo del sexto piso. Sismo de El Centro. a) Caso A<sub>1</sub> b) Caso A<sub>5</sub>.**

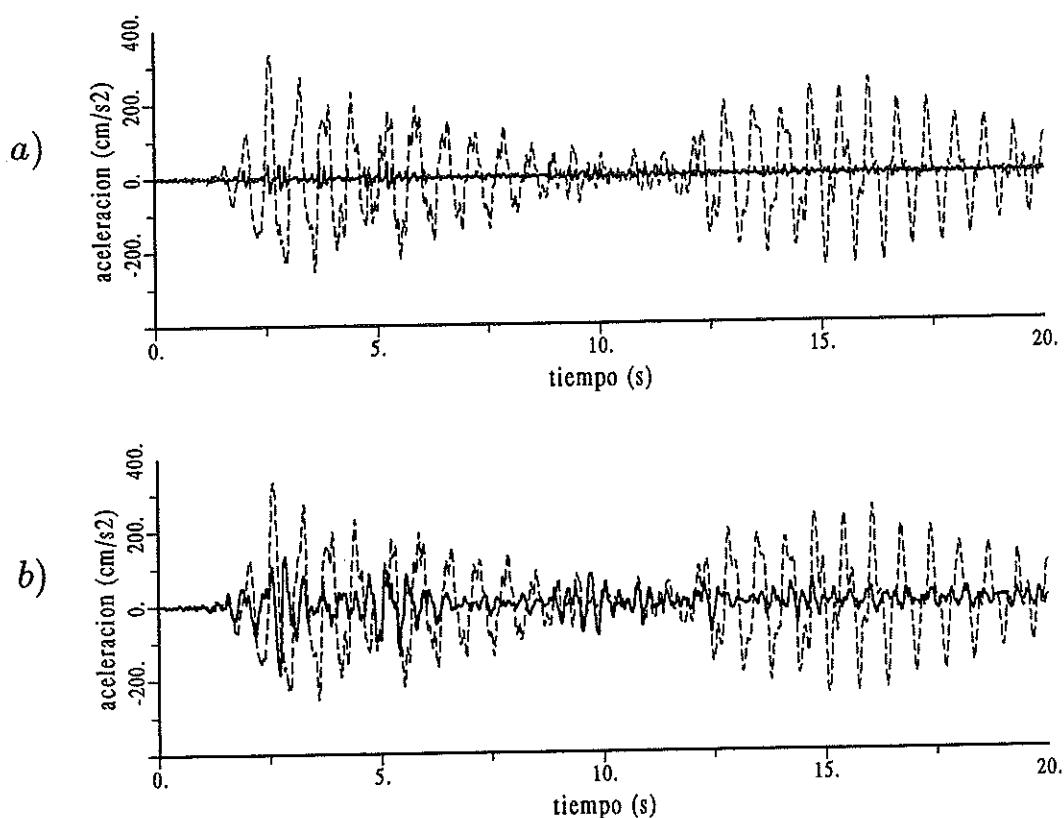
El caso A<sub>2</sub> corresponde a un caso extremo en el cual  $r/Q_d = 0$ . En términos generales, A<sub>2</sub> conduce a resultados de control similares que A<sub>1</sub> como se puede observar en las tablas 4.3 y 4.4.

El caso A<sub>3</sub> corresponde a otro caso extremo en el cual  $r/Q_d$  toma un valor mayor que el límite superior de la tabla 5.6. Bajo estas condiciones el control es ineficiente, ya que no modifica de forma importante las características dinámicas de la estructura y la respuesta se asimila a la del caso SC como se muestra en la tabla 4.4.

Los casos A<sub>4</sub>, A<sub>5</sub> y A<sub>6</sub> se proponen con el fin de obtener un compromiso entre disminución de respuesta y fuerzas de control requeridas, es decir buscar un nivel de reducción no tan importante como el que proporciona A<sub>1</sub> a cambio de obtener menores señales de control. En términos generales el caso A<sub>5</sub> se adecúa a este objetivo mejor que



**Figura 4.3** Módulo de la transformada discreta de Fourier del desplazamiento relativo del sexto piso. a) Caso SC b) Caso A1 c) Caso A5.



**Figura 4.4 Reducción de la aceleración relativa del sexto piso. Sismo de El Centro. a) Caso A<sub>1</sub> b) Caso A<sub>5</sub>.**

los casos A<sub>4</sub> y A<sub>6</sub>.

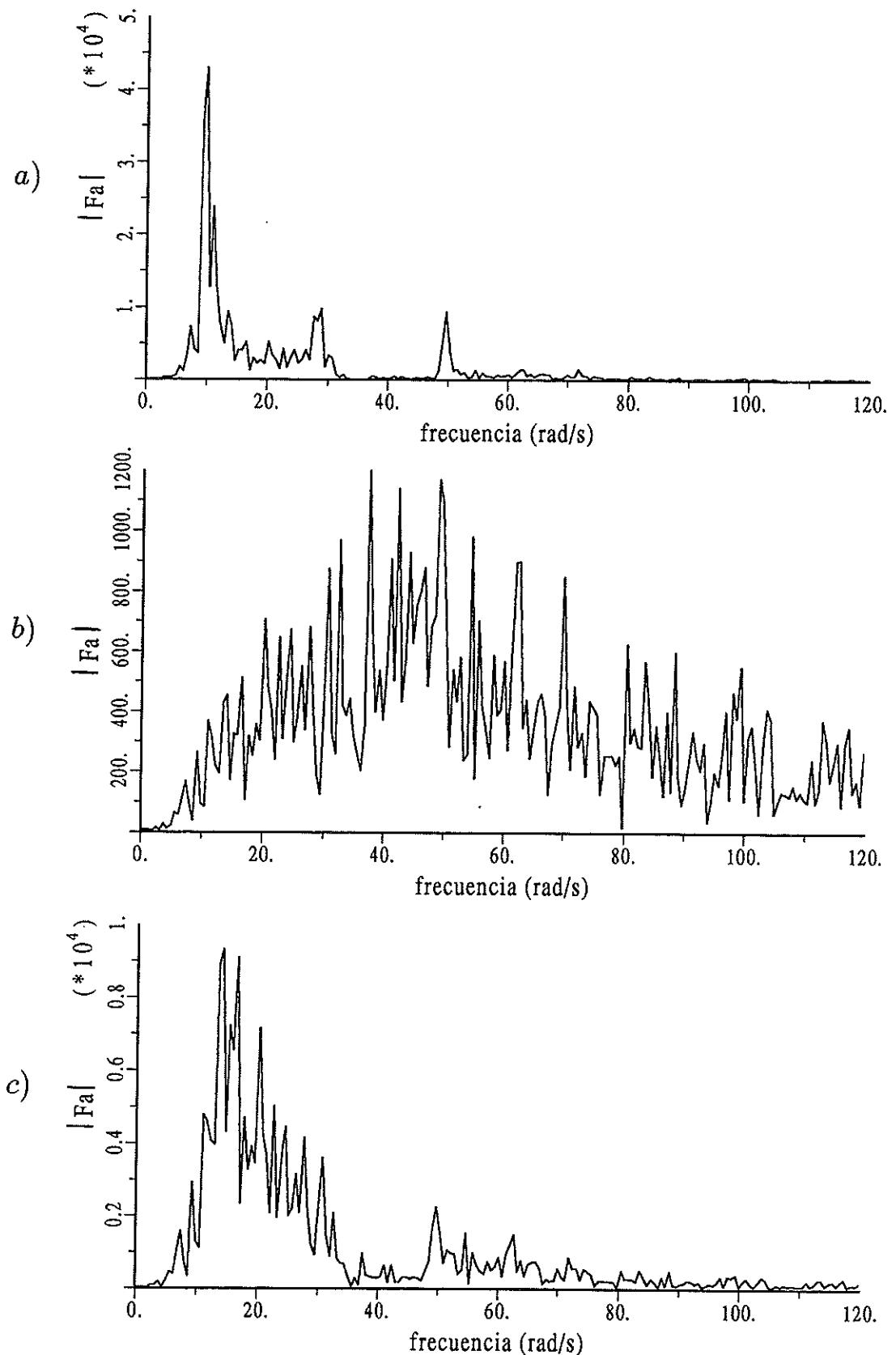
En el caso de control A<sub>7</sub> se considera un valor del horizonte de predicción ( $\lambda = 4$ ) común a todos los modos. En este caso los resultados del control son similares al caso A<sub>1</sub> por cuanto en ambos, para los primeros modos de vibración (que son los importantes) se mantienen las mismas condiciones de control.

Los casos A<sub>8</sub> y A<sub>9</sub> constituyen el estudio con retardos de sus homólogos A<sub>5</sub> y A<sub>1</sub>. El deterioro de la acción de control se refleja sobre todo en un aumento de los valores máximos y medios cuadráticos de las señales de control.

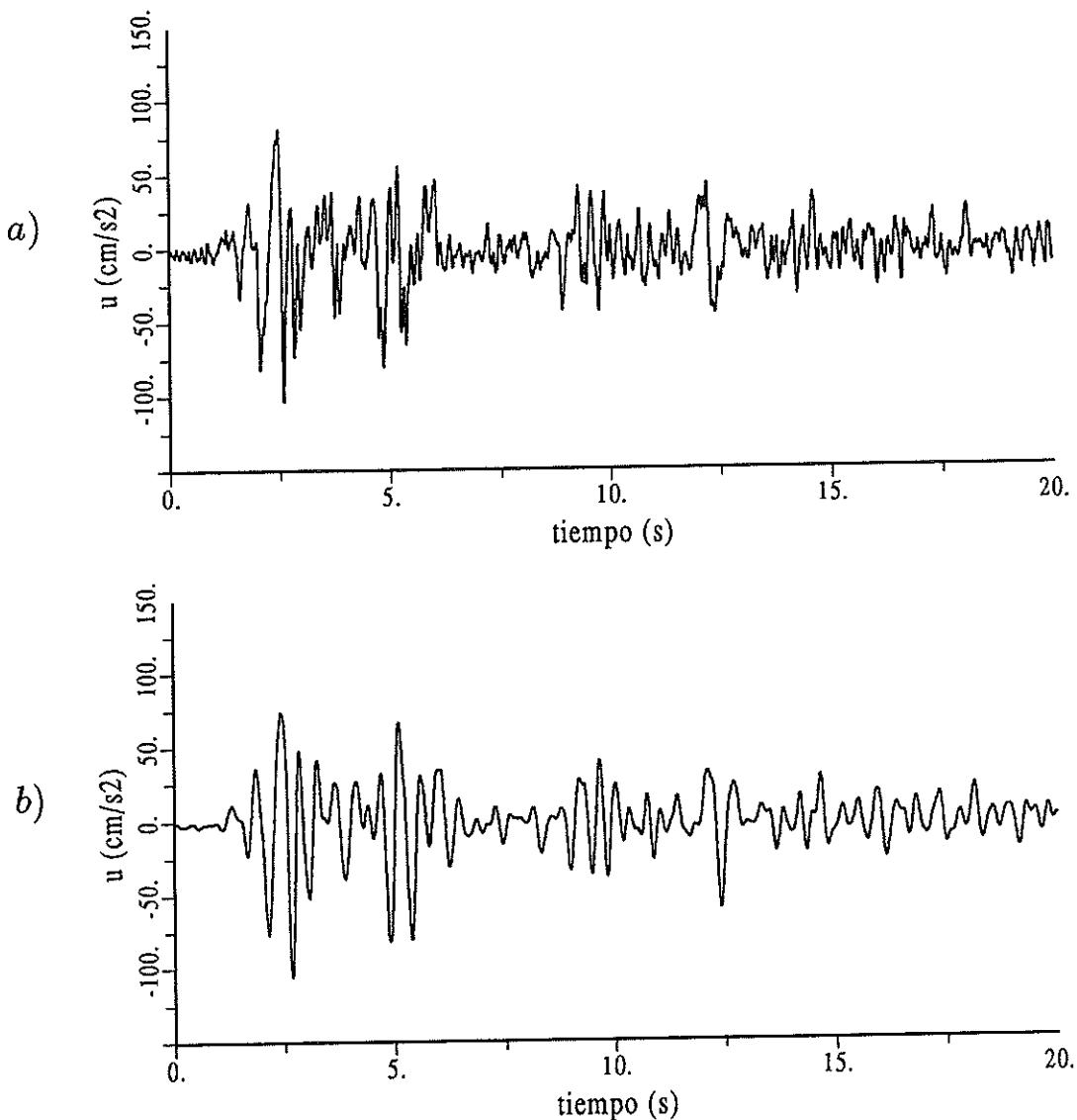
En las figuras 4.2 a 4.9 se comparan desde distintos puntos de vista los casos A<sub>1</sub> y A<sub>5</sub>. Dichos casos generan acciones de control eficientes. La principal diferencia es que con el caso A<sub>1</sub> se logran mayores reducciones de la respuesta aunque con fuerzas de control ligeramente superiores.

En las figuras en las que se superponen curvas correspondientes a casos con y sin control, las líneas de trazo continuo representan casos con control y las líneas de trazo discontinuo representan casos sin control.

En la figura 4.2 se presenta la comparación del desplazamiento relativo de la sexta



**Figura 4.5** Módulo de la transformada discreta de Fourier de la aceleración relativa del sexto piso. a) Caso SC b) Caso A<sub>1</sub> c) Caso A<sub>5</sub>.

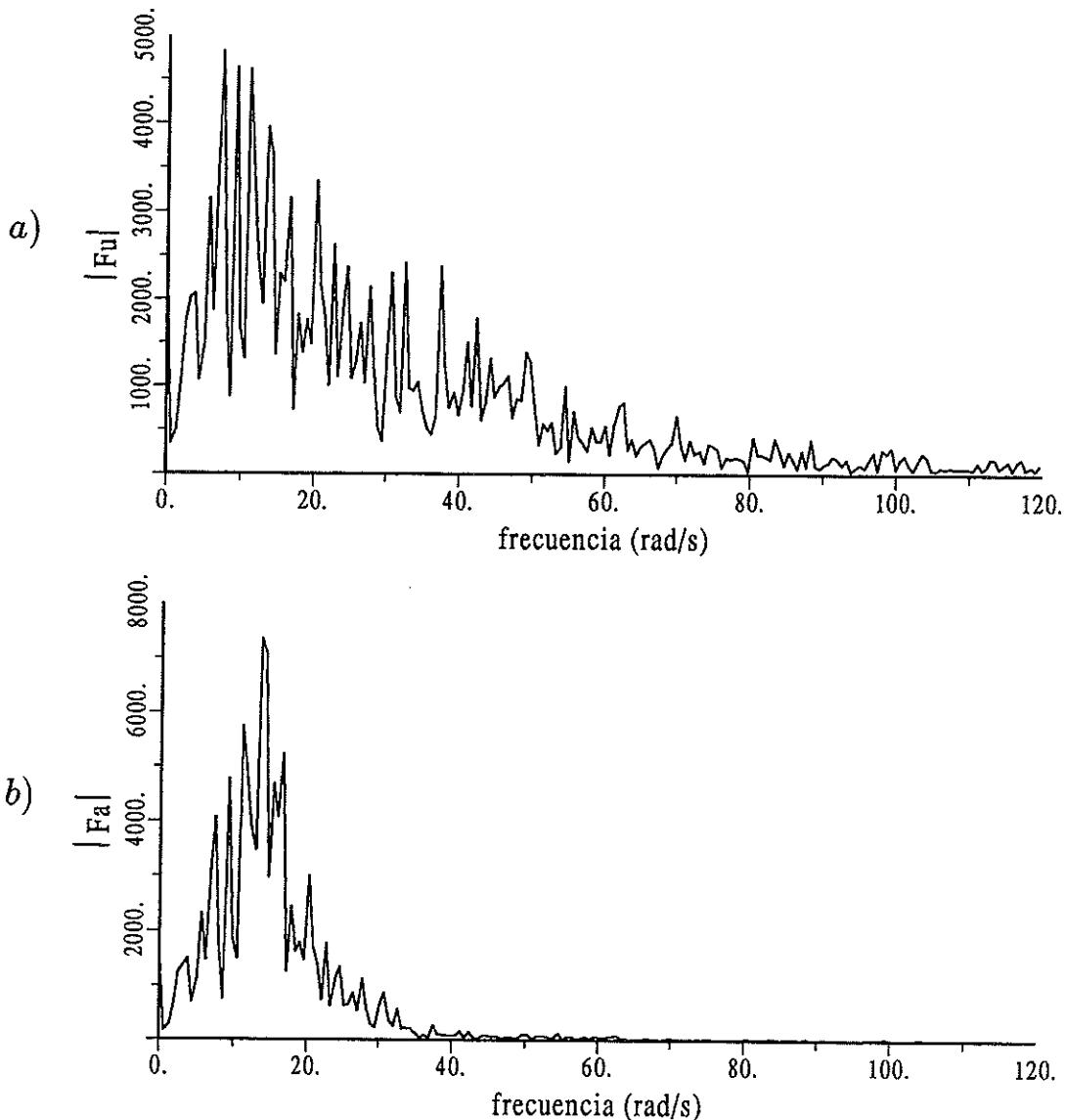


**Figura 4.6** Señales de control para el piso sexto. a) Caso A<sub>1</sub> b) Caso A<sub>5</sub>.

planta entre el caso sin control y los casos A<sub>1</sub> y A<sub>5</sub>. El caso A<sub>1</sub> produce mayor reducción de la respuesta. La figura 4.3 presenta los módulos de la transformada discreta de Fourier para los casos considerados en la figura 4.2. Los espectros de la figura 4.3 muestran que el caso A<sub>1</sub> los valores del espectro son menores y más uniformes que el caso A<sub>5</sub>. Ello confirma las conclusiones de la figura 4.2.

De forma similar a las figuras 4.2 y 4.3, las figuras 4.4 y 4.5 presentan las historias temporales y los módulos de la transformación de Fourier de la aceleración relativa del sexto piso para los casos anteriores. El caso A<sub>1</sub> proporciona una mayor reducción de respuesta (figura 4.4) y un espectro más uniforme y con valores más pequeños (figura 4.5).

La tabla 4.4 muestra que el valor de la fuerza máxima de control en la sexta planta  $u_6$  no disminuye para el caso A<sub>5</sub> respecto al caso A<sub>1</sub>. En la figura 4.6 se presenta la historia temporal de dichas señales de control  $u_6$  para ambos casos y en la figura 4.7 su

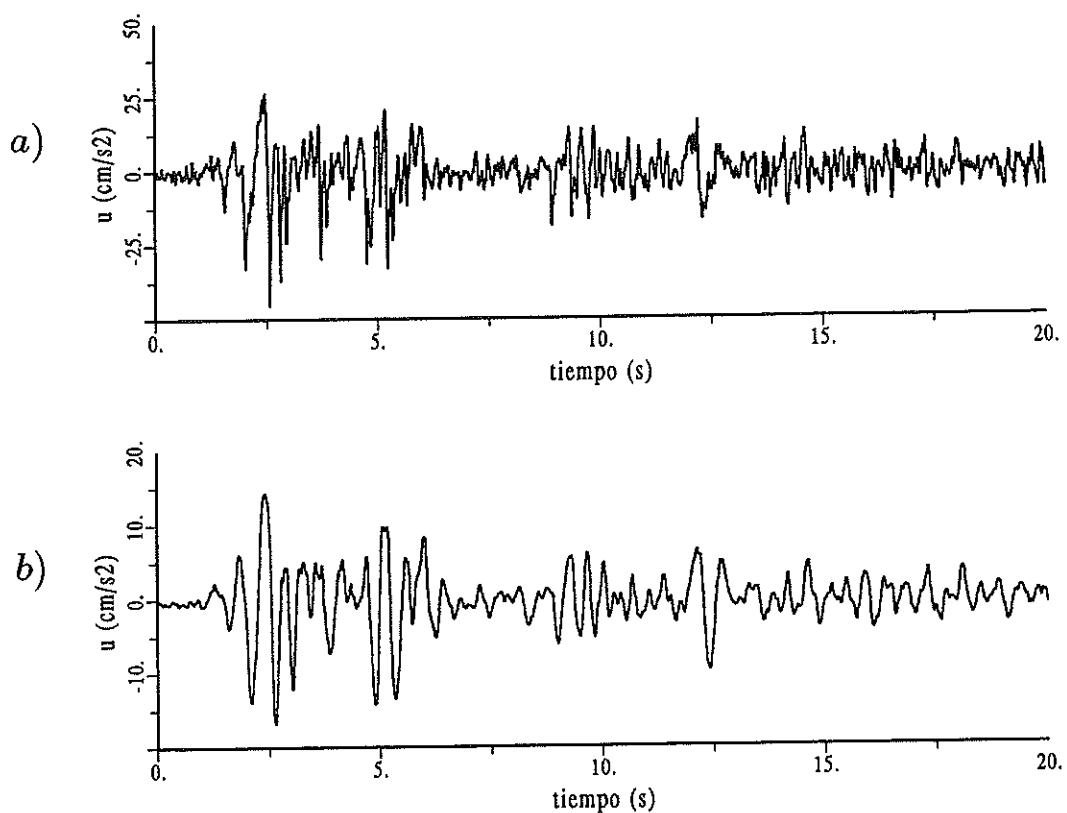


**Figura 4.7** Módulo de la transformada discreta de Fourier de la señal de control en el piso sexto. a) Caso A<sub>1</sub> b) Caso A<sub>5</sub>.

transformada de Fourier. Para el caso A<sub>1</sub> se aprecia que la fuerza de control tiene un contenido de frecuencias mucho más uniforme que en A<sub>5</sub>.

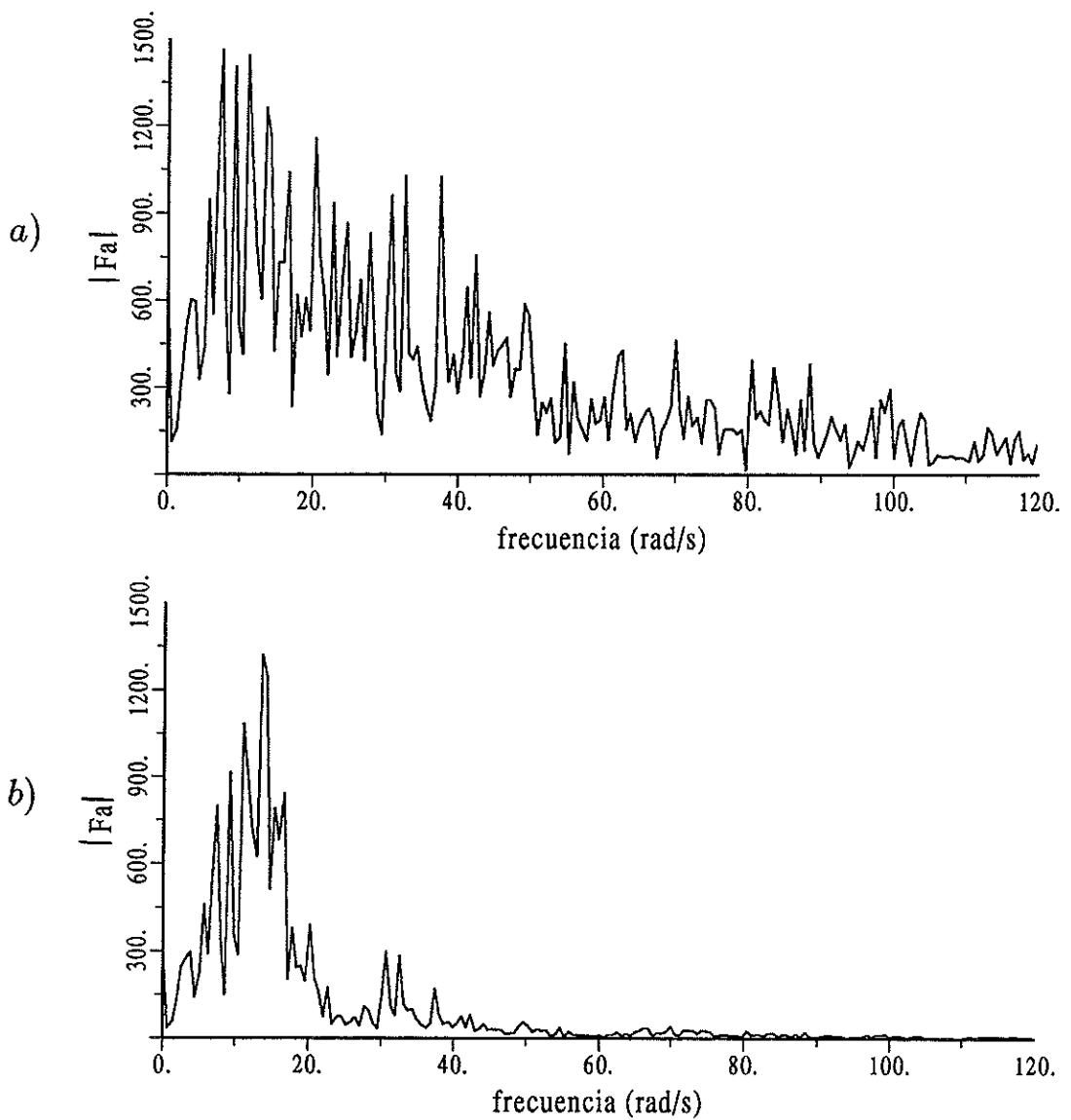
La diferencia entre las señales de control en el piso 1 es mucho más fácil de apreciar en la figuras 4.8, en la que el caso A<sub>1</sub> presenta una fuerza de control mucho más irregular que la generada en A<sub>5</sub>. El espectro de amplitudes de Fourier (figura 4.9) demuestra que la fuerza generada por A<sub>5</sub> prácticamente tiene contenido de frecuencias entre 0 y 50 rad/s mientras que la generada por A<sub>1</sub> tiene una banda mucho más ancha donde el contenido de frecuencias es más uniforme (0–40 rad/s) y además el resto de frecuencias (> 40 rad/s) tienen mucha representatividad.

En la tabla 4.5 se presenta un resumen de resultados para los dos casos de control seleccionados A<sub>1</sub> y A<sub>5</sub> para diferentes sismos. En ellos se verifica que la selección del



**Figura 4.8 Señales de control en el primer piso. a) Caso A<sub>1</sub> b) Caso A<sub>5</sub>.**

caso A<sub>1</sub> es la más adecuada ya que las fuerzas de control al tener un mayor contenido de frecuencias se adecúan mejor a los movimientos sísmicos. Con ello se confirma que optar por los valores de  $\lambda$  y  $r/Q_d$  recomendados en el capítulo 3 constituye en este caso una selección adecuada para generar las matrices de control modal.



**Figura 4.9** Módulo de la transformada discreta de Fourier de la señal de control en el primer piso. a) Caso A<sub>1</sub> b) Caso A<sub>5</sub>.

TABLA 4.5

**RESUMEN DE RESULTADOS. VALORES MÁXIMOS**  
 Estructura de la Universidad de Buffalo. Condiciones de control según tabla 4.2

	Sismo El Centro			Sismo Hachinohe			Sismo Miyagioki			Sismo Baeza		
	SC	$A_1$	$A_5$	SC	$A_1$	$A_5$	SC	$A_1$	$A_5$	SC	$A_1$	$A_5$
$d_1$	0.508	0.030	0.116	0.406	0.025	0.102	0.203	0.020	0.050	0.454	0.033	0.124
$d_2$	1.270	0.061	0.284	0.990	0.049	0.254	0.508	0.040	0.127	1.145	0.064	0.300
$d_3$	1.626	0.066	0.363	1.270	0.053	0.330	0.610	0.043	0.152	1.460	0.070	0.373
$d_4$	2.159	0.058	0.495	1.702	0.047	0.432	0.762	0.038	0.178	1.920	0.066	0.483
$d_5$	2.514	0.052	0.607	2.057	0.037	0.533	0.990	0.028	0.203	2.214	0.057	0.569
$d_6$	2.718	0.052	0.673	2.260	0.037	0.584	1.092	0.032	0.229	2.400	0.057	0.625
$u_1$	45.31	16.79		36.98	16.89		43.66	8.79		29.47	16.69	
$u_2$	85.22	41.93		70.48	40.61		66.34	20.09		61.58	42.01	
$u_3$	94.99	54.66		78.05	52.07		74.78	24.94		71.29	53.39	
$u_4$	103.32	76.12		81.73	71.75		78.02	30.33		85.27	69.34	
$u_5$	102.97	94.46		81.81	86.21		77.28	33.27		90.13	83.16	
$u_6$	103.15	105.92		83.08	94.94		80.60	38.23		91.16	91.77	

 $d_i$  en [cm] $u_i$  en [ $cm/s^2$ ]

#### 4.4 IMPLEMENTACION CON NUMERO REDUCIDO DE ACTUADORES

En este apartado se considera que se dispone únicamente de un número  $s$  de actuadores ( $s < n$ ). Para la generación de la señal de control  $\mathbf{u}$  de dimensión  $s$  se consideran dos operaciones: 1) generar  $n$  fuerzas modales independientes  $\mathbf{f}_c^*$  (una por cada modo) en las cuales se imponen condiciones de eficiencia; 2) transformar  $\mathbf{f}_c^*$  en el vector de control  $\mathbf{u}$  que es el que realmente se aplica a la estructura. La operación 1) se realiza de la forma descrita en el apartado anterior. A continuación se describe la problemática relacionada con la operación 2).

En el caso descrito en el apartado 4.3, la expresión (4.22) proporciona una relación biunívoca entre la señal de control  $\mathbf{u}$  y el vector de fuerzas modales  $\mathbf{f}_c^*$  a través de la matriz modal  $\Phi$ . En el caso de implementación que se considera en este apartado, el vector  $\mathbf{u}$  tiene  $s$  componentes y  $\mathbf{f}_c^*$  tiene  $n$  componentes por lo que, en general, no es posible hallar un valor de  $\mathbf{u}$  que genere el valor deseado de  $\mathbf{f}_c^*$ . En el subapartado 4.4.1 se presenta una expresión equivalente a (4.20) para el caso  $s < n$ . Ya que dicha ecuación no tiene solución en  $\mathbf{u}$ , en los subapartados 4.4.2 y 4.4.3 se presentan dos métodos de resolución aproximada de dicha ecuación. La no existencia de una relación biunívoca entre  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{f}_c^*$  hace que la selección de los valores de  $\lambda$  y  $r/Q_d$  de acuerdo con los criterios del capítulo 3 no sea una garantía suficiente de estabilidad y eficacia de la acción de control global. En el subapartado 4.4.4 se presentan criterios de evaluación de la estabilidad y la eficacia del control global. Por último en el subapartado 4.4.5 se utiliza la metodología propuesta en este apartado en el ejemplo ya considerado en el subapartado 4.2.2.

##### 4.4.1 Formulación

El vector de las  $n$  fuerzas de control en coordenadas generales  $\mathbf{f}_c$  se relaciona con el vector de las  $s$  señales de control  $\mathbf{u}$  mediante la expresión

$$\mathbf{f}_c(k) = \mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{u}(k) \quad (4.27)$$

donde la matriz  $\mathbf{J}$  (dimensión  $n \times s$ ) contiene en cada columna solamente un 1 y 0 en el resto; la localización del 1 corresponde al grado de libertad en el cual está localizado el actuador.

Las  $n$  fuerzas de control modal  $\mathbf{f}_c^*$  se obtienen mediante la relación (4.5d) que reemplazada en (4.27) proporciona

$$\mathbf{f}_c^*(k) = \Phi^t \mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{u}(k) \quad (4.28)$$

Se introduce la matriz  $\Lambda$  de dimensión  $n \times s$  dada por

$$\Lambda = \Phi^t \mathbf{M}\mathbf{J} \quad (4.29)$$

de tal forma que (4.28) se escribe de la forma

$$\mathbf{f}_c^*(k) = \mathbf{\Lambda} \mathbf{u}(k) \quad (4.30)$$

Para la implementación del control es necesario buscar una relación que permita obtener las señales de control  $\mathbf{u}$  en función de las fuerzas modales  $\mathbf{f}_c^*$  deseadas. Puesto que la relación inversa de (4.30) no existe ya que la matriz  $\mathbf{\Lambda}$  ni siquiera es cuadrada, es necesario buscar un vector  $\mathbf{u}(k)$  que aproxime la expresión (4.30). Para dicha aproximación se consideran dos criterios: minimización de una función de coste cuadrática y control de  $s$  modos despreciando el efecto sobre los restantes (López Almansa et al. 1991). Ambos procedimientos se describen, respectivamente, en los subapartados 4.4.2 y 4.4.3.

Ya que en ambos procedimientos (4.30) no se cumple, la selección de los valores de  $\lambda$  y  $r/Q_d$  (siguiendo las directrices del capítulo 3) para que generen acciones de control eficaces en cada modo no garantiza necesariamente que la acción de control global sea eficaz (ni siquiera estable). El análisis de la estabilidad y la eficiencia del control global se hace de forma numérica en el subapartado 4.4.5 a partir de un ejemplo concreto utilizando los criterios expuestos en el subapartado 4.4.4.

#### 4.4.2 Solución por mínimos cuadrados

Se trata de obtener el valor de  $\mathbf{u}$  que proporciona el menor error minimizando una función de coste  $J_{\Lambda}$  dada por

$$J_{\Lambda} = (\mathbf{f}_c^* - \mathbf{\Lambda} \mathbf{u})^t \Theta (\mathbf{f}_c^* - \mathbf{\Lambda} \mathbf{u}) \quad (4.31)$$

donde  $\Theta$  es una matriz de peso semidefinida positiva. Si, como es habitual, la matriz  $\Theta$  se elige diagonal el elemento  $\Theta_i$  de la diagonal principal representa la intensidad con que se desea controlar al modo  $i$ .

El vector  $\mathbf{u}$  que minimiza a  $J_{\Lambda}$  se obtiene anulando el gradiente en la dirección de  $\mathbf{u}$ . Derivando con respecto a  $\mathbf{u}$  en (4.31) resulta

$$\frac{\partial J_{\Lambda}}{\partial \mathbf{u}} = -\mathbf{\Lambda}^t \Theta (\mathbf{f}_c^* - \mathbf{\Lambda} \mathbf{u}) = 0 \quad (4.32)$$

de donde

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Gamma}_{\Lambda} \mathbf{f}_c^* \quad (4.33)$$

$\mathbf{\Gamma}_{\Lambda}$  es la matriz de dimensión  $s \times n$  dada por

$$\mathbf{\Gamma}_{\Lambda} = (\mathbf{\Lambda}^t \Theta \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{\Lambda}^t \Theta \quad (4.34)$$

Un caso particular es utilizar  $\Theta = I$  (cuando se pretende controlar a todos los modos con igual intensidad) con lo que  $\Gamma_\Lambda$  se reduce a la denominada seudo-inversa de  $\Lambda$

$$\Gamma_\Lambda = (\Lambda^t \Lambda)^{-1} \Lambda^t \quad (4.35)$$

Si además  $s = n$ , la matriz  $J$  es igual a la identidad y (4.29) y (4.3) muestran que  $\Lambda = \Phi^{-1}$ ; sustituyendo dicho resultado en (4.35) resulta que  $\Gamma_\Lambda = \Phi$  y la expresión (4.33) se convierte, para este caso particular en (4.22), es decir, la relación inversa de (4.20).

La expresión (4.33) es la que permite obtener las  $s$  señales de control aproximadas en coordenadas generales. Las  $n$  fuerzas modales de control  $f_c^*$  se obtienen al igual que en el apartado 4.3 por la expresión matricial (4.17). Premultiplicando (4.17) por  $\Gamma_\Lambda$ , haciendo uso de (4.2b) y de (4.30) se obtiene

$$\mathbf{u}(k) = -(\Gamma_\Lambda \hat{\mathbf{D}}_1^* \Phi^{-1} \quad \Gamma_\Lambda \hat{\mathbf{D}}_2^* \Phi^{-1}) \begin{pmatrix} \mathbf{d}(k) \\ \dot{\mathbf{d}}(k) \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{\hat{n}_r} \Gamma_\Lambda \hat{\mathbf{K}}_j^* \Lambda \mathbf{u}(k-j) \quad (4.36)$$

que se simplifica a

$$\mathbf{u}(k) = -(\hat{\mathbf{F}}_1 \quad \hat{\mathbf{F}}_2) \mathbf{x}(k) - \sum_{j=1}^{\hat{n}_r} \hat{\mathbf{P}}_j \mathbf{u}(k-j) \quad (4.37)$$

donde, utilizando (4.21b), se definen las matrices

$$\hat{\mathbf{F}}_1 = \Gamma_\Lambda \hat{\mathbf{D}}_1^* \Phi^t \mathbf{M} \quad (4.38a)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_2 = \Gamma_\Lambda \hat{\mathbf{D}}_2^* \Phi^t \mathbf{M} \quad (4.38b)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = (\hat{\mathbf{F}}_1 \quad \hat{\mathbf{F}}_2) \quad (4.38c)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_j = \Gamma_\Lambda \hat{\mathbf{K}}_j^* \Lambda \quad (4.38d)$$

La relación (4.37) es la que se utiliza para generar la acción de control que se aplica a la estructura en función de la respuesta medida en todos los grados de libertad.

Las matrices de ganancia  $\hat{\mathbf{F}}_1$  y  $\hat{\mathbf{F}}_2$  de dimensión  $s \times n$  se obtienen de acuerdo con (4.38) a partir de las matrices de ganancia modal  $\hat{\mathbf{D}}_1^*$  y  $\hat{\mathbf{D}}_2^*$ . Estas últimas se generan a partir de imponer condiciones de eficiencia sobre cada modo según las recomendaciones del capítulo 3.  $\hat{\mathbf{P}}_j$  son matrices de dimensión  $s \times s$  que asimismo se obtienen a partir de las matrices de memoria modales  $\hat{\mathbf{K}}_j^*$  según (4.38d).

Es importante insistir en que no es posible generar las  $n$  fuerzas originales de control modal  $\mathbf{f}_c^*$  dadas por (4.17) a partir de las  $s$  señales de control  $\mathbf{u}$  dadas por (4.37). Ello es debido al proceso de seudoinversión necesario para obtener las matrices  $\hat{\mathbf{F}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{F}}_2$  y  $\hat{\mathbf{P}}_j^*$ . Si en dicho proceso  $\Theta_{m+1} = \dots = \Theta_n = 0$ , es decir, se pretende controlar únicamente los  $m$  primeros modos, las fuerzas modales  $f_{c_{m+1}}^*, \dots, f_{c_n}^*$  no son nulas, es decir se produce una transferencia de excitación desde los  $m$  modos controlados a los  $n - m$  modos no controlados. Dicho fenómeno se conoce en lengua inglesa como *spillover* (Balas, 1978).

#### 4.4.3 Solución despreciando modos residuales

Si se pretende controlar únicamente  $s$  modos (generalmente los  $s$  primeros), las  $n - s$  últimas componentes del vector  $\mathbf{f}_c^*$  son nulas y la expresión (4.30) puede ser descompuesta en dos partes

$$\mathbf{f}_{c_s}^* = \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{u}(k) \quad (4.39a)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{\Lambda}_{n-s} \mathbf{u}(k) \quad (4.39b)$$

En donde

$$\mathbf{f}_{c_s}^*(k) = \begin{pmatrix} f_{c_1}^*(k) \\ \vdots \\ f_{c_s}^*(k) \end{pmatrix} \quad (4.40a)$$

$$\mathbf{\Lambda}_s = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_s \end{pmatrix} \mathbf{M} \mathbf{J} \quad (4.40b)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{n-s} = \begin{pmatrix} \Phi_{s+1} \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix} \mathbf{M} \mathbf{J} \quad (4.40c)$$

En (4.40b) y (4.40c)  $\Phi_i$  es la  $i$ -ésima columna de la matriz modal  $\Phi$ .

Puesto que, obviamente, la matriz cuadrada  $\mathbf{\Lambda}_s$  tiene rango  $s$  la expresión (4.39a) puede ser invertida para proporcionar el valor de  $\mathbf{u}(k)$ :

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{\Lambda}_s^{-1} \mathbf{f}_{c_s}^*(k) \quad (4.41)$$

Ya que la igualdad (4.39b) no se cumple, los modos residuales (los  $n - s$  modos superiores) se ven excitados apareciendo (al igual que en el método descrito en el

subapartado 4.4.2) transferencia de excitación desde los modos controlados a los no controlados.

A partir de (4.41) el procedimiento de control se implementa de forma similar al caso descrito en el apartado 4.3 (a partir de (4.33)).

#### 4.4.4 Estabilidad y eficacia

Tal como se comenta al final del subapartado 4.4.1, ya que (4.30) no se cumple, la elección de  $\lambda$  y  $r/Q_d$  para generar acciones de control estables y eficaces en cada modo no permite asegurar que la acción de control resultante sea estable y/o eficaz, de modo que puede ser preciso modificar dichos valores hasta obtener resultados satisfactorios. Los criterios de modificación de  $\lambda$  y  $r/Q_d$  son prácticamente empíricos.

En este subapartado se presentan herramientas de análisis de la estabilidad y la eficacia de la acción de control. La estabilidad se analiza según la metodología expuesta en el apartado 3.3 determinando el radio espectral de una matriz (módulo máximo de los valores propios). La eficiencia se evalúa de forma numérica a partir de, principalmente, las frecuencias y amortiguamientos equivalentes del sistema controlado. En el siguiente subapartado se aplican dichas herramientas a un caso concreto.

Puesto que la implementación del control se realiza en coordenadas generales, su estabilidad también se debe analizar en ese sistema de coordenadas, es decir, utilizando la ecuación del sistema en espacio de estado (2.55) donde la señal de control  $u$  se calcula por medio de (4.37).

Para este caso de implementación (con menor número de actuadores que de grados de libertad) la matriz  $B$  de (2.85) tiene la forma

$$B = P_1 L = P_1 \begin{pmatrix} 0 \\ J \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

donde  $P_1$  se calcula según (2.40c) y  $L$  es una matriz de dimensión  $2n \times s$  que contiene a las submatrices  $0$  y  $J$  de dimensiones  $n \times s$ . Nótese que en caso de considerar la solución descrita en el subapartado 4.4.2 y de acuerdo con la nomenclatura utilizada en (4.37) es preciso reemplazar las matrices  $\hat{D}$  y  $\hat{K}_j$  por sus similares  $\hat{F}$  y  $\hat{P}_j$  en las ecuaciones (3.20c), (3.21c) y (3.22c) que definen a la matriz ampliada  $\bar{A}$  sobre la que se estudia la estabilidad.

#### 4.4.5 Ejemplos de simulación numérica

El propósito de este subapartado es ilustrar cómo las condiciones de eficiencia impuestas al control independiente de cada modo se traducen en un control satisfactorio cuando éste se implementa con un número reducido de actuadores. Para ello se utiliza el procedimiento descrito en el subapartado 4.4.2 y se simulan numéricamente una serie de ensayos de control sobre el modelo estructural a escala 1:4 de la "State University of New York at

"Buffalo", cuyas características se describen en la tabla 4.1. De igual manera que en la implementación con 6 actuadores descrita en el subapartado 4.3.2, se somete la estructura a la acción del sismo de El Centro con  $0.075\ g.$  de aceleración máxima y duración 20 s. El valor del período de muestreo es  $T = 0.01\ s.$  En estas experiencias de control se pretende minimizar los desplazamientos relativos de la estructura.

En este ejemplo se considera el caso extremo de implementación con un único actuador ( $s = 1$ ). Se determina la ubicación óptima de éste para obtener un control lo más eficiente posible. En López Almansa (1988) se muestra que en una estructura tipo pórtico dúctil como ésta puede ser necesario colocar más de un actuador para lograr una acción de control eficiente. No obstante los resultados obtenidos en este subapartado muestran que es posible generar un control eficaz.

La metodología general de este estudio consiste en fijar una posición del actuador e intentar obtener la acción de control más eficaz siguiendo las recomendaciones del capítulo 3. Posteriormente se comparan las distintas ubicaciones con el fin de determinar la colocación más adecuada.

En la tabla 4.6 se describen los 11 casos de control estudiados ( $B_1$  a  $B_{11}$ ) indicando el grado de libertad en que se sitúa el actuador. En la tabla 4.7 se presentan los resultados del estudio del comportamiento equivalente del sistema sometido a acción de control obtenidos por medio de la metodología en tiempo discreto planteada en el apartado 4.5. En el caso  $B_{11}$  no es posible obtener las frecuencias y amortiguamientos equivalentes por existir retardos. En la tabla 4.8 se presentan los valores máximos de la respuesta y de la señal de control para los casos de control descritos en la tabla 4.6 y en ausencia de control (SC).

En los casos  $B_1$  y  $B_2$  se han impuesto las mismas condiciones de control seleccionadas en el subapartado 4.3.2 como las más adecuadas cuando el control se implementa con 6 actuadores. Estas condiciones fueron adoptadas en el caso  $B_1$  ajustándose lo más estrictamente posible a los valores recomendados en la tabla 3.4 y en  $B_2$  por valores que proporcionen un control satisfactorio con fuerzas de control moderadas. En la tabla 4.7 se observa que para estos dos casos de control, la colocación del actuador en la primera planta no produce una modificación sustancial de las características dinámicas de la estructura, ni una reducción apreciable de la respuesta (tabla 4.8).

El caso de control  $B_3$  pretende generar fuerzas de control mayores al no restringir el valor de  $r/Q_d$ . El objetivo no se cumple ya que el comportamiento de  $B_3$  es prácticamente igual al de  $B_1$ .

En el caso  $B_4$  se mantiene constante el valor del horizonte de predicción  $\lambda = 2$  para todos los modos. Bajo esta condición, de acuerdo con la tabla 4.7, se observa que existe un aumento de rigidez pero una disminución del amortiguamiento respecto al caso  $B_1$ . Con estas propiedades dinámicas la estructura, tal como se ve en la tabla 4.8, aumenta su aceleración relativa máxima y disminuye de manera poco considerable su desplazamiento relativo máximo. Las fuerzas de control máximas son mucho mayores que para el caso  $B_1$ .

TABLA 4.6

CONDICIONES DE CONTROL  
Estructura de la Universidad de Buffalo. Un actuador y seis sensores  
 $Q_v/Q_d = 0$

Modo	$B_1$ $\lambda \ r/Q_d$	$B_2$ $\lambda \ r/Q_d$	$B_3$ $\lambda \ r/Q_d$	$B_4$ $\lambda \ r/Q_d$	$B_5$ $\lambda \ r/Q_d$	$B_6$ $\lambda \ r/Q_d$	$B_7$ $\lambda \ r/Q_d$	$B_8$ $\lambda \ r/Q_d$	$B_9$ $\lambda \ r/Q_d$	$B_{10}$ $\lambda \ r/Q_d$	$B_{11}$ $\lambda \ r/Q_d$
1	4 1	4 500	4 0	2 1	4 1	4 500	4 1	4 1	4 1	4 1	4 1
2	4 1	4 500	4 0	2 1	4 1	4 500	4 1	4 1	4 1	4 1	4 1
3	3 1	3 500	3 0	2 1	3 1	3 500	3 1	3 1	3 1	3 1	3 1
4	2 1	2 500	2 0	2 1	2 1	2 500	2 1	2 1	2 1	2 1	2 1
5	2 1	2 500	2 0	2 1	2 1	2 500	2 1	2 1	2 1	2 1	2 1
6	2 1	2 500	2 0	2 1	2 1	2 500	2 1	2 1	2 1	2 1	2 1
gdl del actuador	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6	4

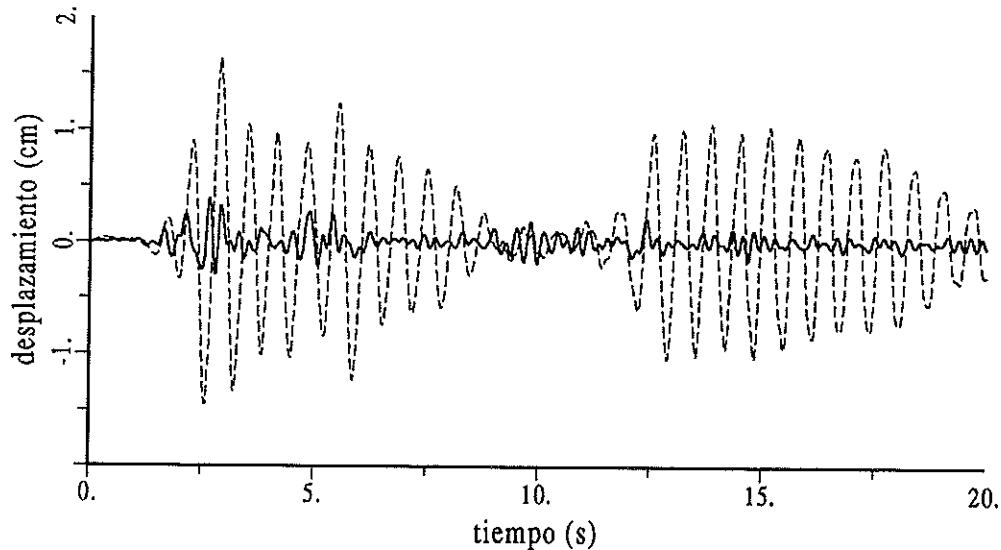
En los casos  $B_1$  a  $B_{10} \hat{n}_r = n_r = 0$

En el caso  $B_{11} \hat{n}_r = 2$  y  $n_r = 1$

**TABLA 4.7**  
**FRECUENCIAS EQUIVALENTES [rad/s] Y FACTORES DE AMORTIGUAMIENTO EQUIVALENTES [%]**  
 Estructura de la Universidad de Buffalo. Condiciones de control según tabla 4.6

Caso	$\omega'_1$	$\omega'_2$	$\omega'_3$	$\omega'_4$	$\omega'_5$	$\omega'_6$	$\xi'_1$	$\xi'_2$	$\xi'_3$	$\xi'_4$	$\xi'_5$	$\xi'_6$
$B_1$	10.34	29.18	50.03	69.48	79.08	83.00	3.68	1.81	1.32	1.83	23.72	1.94
$B_2$	9.87	28.90	49.72	65.81	71.91	84.08	2.56	0.94	0.74	2.49	0.96	1.14
$B_3$	10.34	29.19	50.04	69.45	80.35	82.89	3.67	1.79	1.29	1.77	26.10	1.87
$B_4$	11.34	30.01	50.47	69.51	79.85	82.98	3.12	1.49	1.09	1.77	24.75	1.89
$B_5$	12.82	32.11	50.51	65.89	72.87	84.23	7.31	13.11	5.88	2.47	2.15	12.79
$B_6$	10.21	29.34	49.75	65.66	71.86	84.11	3.59	3.29	1.01	2.17	0.84	1.26
$B_7$	14.57	31.90	49.74	67.84	72.20	84.43	9.72	15.28	0.90	4.38	1.52	14.45
$B_8$	18.56	29.35	52.97	66.08	72.17	83.13	17.52	3.49	13.74	2.70	10.40	2.73
$B_9$	21.32	29.18	50.31	68.20	73.63	83.88	21.52	6.19	2.96	19.55	2.50	1.31
$B_{10}$	22.14	33.00	48.90	65.83	71.20	84.06	10.76	27.00	11.42	5.51	2.72	1.15

En los casos de control  $B_5$  y  $B_6$  se utilizan las mismas condiciones de control de los casos  $B_1$  y  $B_2$  para una fuerza de control que actúe en el piso 2. Los resultados de la tabla 4.7 indican que se obtiene mayor aumento de amortiguamiento y rigidez para los primeros modos en el caso  $B_5$  que en el caso  $B_6$ . Ello repercute en una mayor disminución del desplazamiento relativo. Nótese que existe un aumento en la aceleración relativa máxima de la estructura. También el caso  $B_6$  se puede considerar, en términos generales, como poco eficiente para reducir la respuesta.



**Figura 4.10** Desplazamiento relativo del tercer piso. Sismo El Centro. Caso de control  $B_9$ .

En los casos de control  $B_7$  a  $B_{10}$  se mantienen los valores de  $\lambda$  y  $r/Q_d$  recomendados por el capítulo 3 (tablas 3.4 y 3.6) y se sitúa el actuador en distintos grados de libertad. Analizando las tablas 4.7 y 4.8 se destaca de manera general que cuanto más alto se coloca el actuador más efectivo es el control. Cuando la fuerza de control se aplica en las últimas plantas los valores máximos de desplazamiento relativo y aceleración relativa aparecen en pisos intermedios. La mejor ubicación de la fuerza de control parece ser la quinta planta (caso de control  $B_9$ ), ya que se obtienen los mayores amortiguamientos y frecuencias generándose la mejor acción de control sobre el primer modo de vibración.

Se presentan las figuras 4.10 y 4.11 correspondientes al caso de control seleccionado  $B_9$ . En la figura 4.10 se presenta la historia de desplazamiento relativo para el piso tercero, piso para el cual la acción de control  $B_9$  produce la mayor respuesta. La curva de trazo continuo corresponde al caso con control ( $B_9$ ) y la curva de trazo discontinuo corresponde al caso sin control (SC). En la figura 4.11 se presenta la fuerza de control aplicada en el quinto piso en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.

El caso de control  $B_{11}$  es homólogo al caso  $B_8$  pero con presencia de retardos. En este

TABLA 4.8

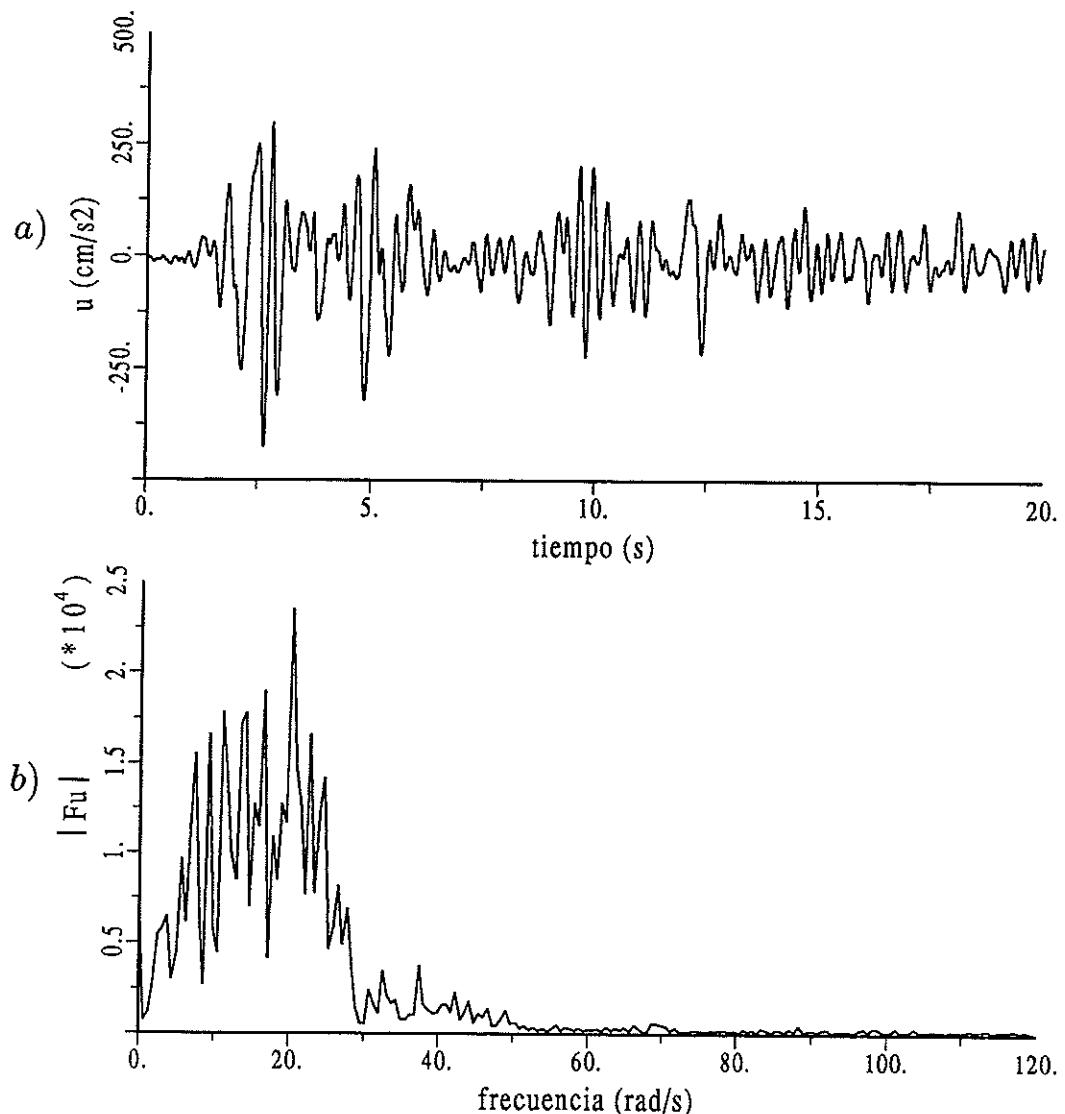
**RESULTADOS DEL CONTROL. Sismo El Centro**  
Estructura de la Universidad de Buffalo. Condiciones de control según tabla 4.6

Respuesta	SC	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$B_7$	$B_8$	$B_9$	$B_{10}$	$B_{11}$
$d$	max	2.72 (6)	2.51 (6)	2.67 (6)	2.51 (6)	2.51 (6)	1.78 (6)	2.54 (6)	1.12 (6)	0.58 (6)	0.38 (3)	0.48 (3)
	med	0.96	0.71	0.89	0.71	0.94	0.46	0.74	0.33	0.15	0.10	0.13
$\ddot{d}$	max	333.65 (6)	341.68 (6)	334.19 (6)	342.01 (6)	369.72 (6)	366.11 (6)	330.33 (6)	293.47 (6)	251.00 (6)	200.63 (3)	273.35 (3)
	med	97.97	84.12	92.40	84.35	125.60	75.79	82.32	68.30	50.60	40.31	53.14
$u$	max	501.57 (1)	68.88 (1)	505.74 (1)	1357.7 (1)	651.81 (2)	159.48 (2)	472.44 (2)	455.35 (3)	426.21 (4)	383.69 (5)	450.51 (4)
	med	136.37	21.26	137.29	495.55	186.31	42.06	164.11	116.48	103.10	105.87	107.24

 $d$  en [cm] $\ddot{d}$  en [ $cm/s^2$ ] $u$  en [ $cm/s^2$ ](·) grado de libertad de máxima respuesta ( $d$  o  $\ddot{d}$ ) o con actuador  $u$

caso se observa en la tabla 4.8 que existe un pequeño aumento de la fuerza máxima de control y también una pequeña disminución del valor cuadrático medio de dicha fuerza. La acción de control mantiene su eficacia.

De todo el estudio anterior se desprende que es de suma importancia la ubicación de las fuerzas de control, ya que de su colocación depende cuáles son los modos que modifican en mayor medida sus frecuencias y amortiguamientos. Dicha circunstancia es importante ya que para que el control sea efectivo es necesario que éste actúe con más intensidad sobre los modos que tienen más influencia en la respuesta, que generalmente son los primeros. También se concluye que ajustarse a los valores de  $\lambda$  y  $r/Q_d$  recomendados en el capítulo 3 hace que en general se obtengan mejores resultados que cuando no se hace así.



**Figura 4.11** Señal de control aplicada en el quinto piso para el caso B<sub>9</sub> a) En el dominio del tiempo b) En el dominio de la frecuencia.

## 4.5 IMPLEMENTACION CON UN NUMERO REDUCIDO DE SENSORES Y ACTUADORES

En este apartado se considera un número de sensores  $m$  y un número de actuadores  $s$  menores o iguales que el número de grados de libertad  $n$ . El número de actuadores debe ser menor o igual que el número de sensores, es decir  $s \leq m \leq n$ . El número de modos que se pretende controlar es igual al número de sensores  $m$ . Más adelante se justifican estas restricciones.

Al igual que en los casos descritos en los apartados 4.3 y 4.4 puesto que las fuerzas modales  $\mathbf{f}_c^*$  no son materializables ni las coordenadas modales  $\eta$  son medibles, para su implementación se requiere que éstas sean transformadas en señales de control  $u$  que se calculan a partir de coordenadas medibles  $d$  y  $\dot{d}$ .

En el subapartado 4.5.1 se describe el proceso de implementación. En el subapartado 4.5.2 se establecen criterios globales de evaluación de la estabilidad y la eficacia del control. En el subapartado 4.5.3 se presentan resultados numéricos sobre tres estructuras de edificación.

### 4.5.1 Implementación

El objetivo de este subapartado es formular un procedimiento que permita pasar de  $m$  fuerzas modales de control  $f_{c_i}^*$  a  $s$  señales de control  $u_i$  que son las que realmente se aplican a la estructura.

Suponiendo que los  $m$  modos a controlar son los primeros, las  $n - m$  últimas componentes del vector  $\mathbf{f}_c^*$  son nulas, dicho vector puede escribirse en la forma

$$\mathbf{f}_c^* = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{c_m}^* \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

donde  $\mathbf{f}_{c_m}^*$  agrupa a las  $m$  primeras fuerzas modales de control. La expresión (4.43) también puede escribirse como

$$\mathbf{f}_c^* = \Theta_m \mathbf{f}_{c_m}^* \quad (4.44)$$

donde

$$\Theta_m = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

siendo  $\mathbf{I}_m$  la matriz identidad de orden  $m$ .

La matriz  $\Theta_m$  es de dimensión  $n \times m$  y corresponde a una matriz identidad  $n \times n$  en la que se han eliminado las  $n - m$  últimas columnas. Dicha matriz refleja la eliminación de los modos no controlados. La matriz  $\Theta_m$  cumple la propiedad

$$\Theta_m^t \Theta_m = I_m \quad (4.46)$$

Las  $n$  fuerzas modales  $\mathbf{f}_c^*$  se expresan en función de las  $s$  señales  $\mathbf{u}$  a través de (4.28). Utilizando la propiedad (4.46) en (4.44) y sustituyendo en (4.28) se obtiene

$$\mathbf{f}_{cm}^* = \Theta_m^t \mathbf{f}_c^* = \Theta_m^t \Phi^t \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{u} \quad (4.47)$$

Se define la matriz  $\Lambda_m$  de acuerdo con

$$\Phi_m = \Phi \Theta_m \quad (4.48)$$

(4.45) muestra que en la matriz  $m \times n \Phi_m$  se contienen las  $m$  primeras columnas de  $\Phi$ . La expresión (4.47) se puede escribir en la forma

$$\mathbf{f}_{cm}^*(k) = \Lambda_m \mathbf{u}(k) \quad (4.49)$$

en donde la matriz  $\Lambda_m$  viene dada por

$$\Lambda_m = \Theta_m^t \Phi^t \mathbf{M} \mathbf{J} = \Theta_m^t \Lambda \quad (4.50)$$

La expresión (4.49) permite expresar las  $m$  fuerzas modales en función de las  $s$  señales de control. La implementación del sistema de control requiere conocer  $\mathbf{u}(k)$  a partir de  $\mathbf{f}_{cm}^*(k)$ , luego es necesario encontrar la relación inversa de (4.49), operación que no es posible realizar directamente por cuanto la matriz  $\Lambda_m$  no es, en general, ni siquiera cuadrada. Por tanto, de forma similar al subapartado 4.4.2, se busca un vector  $\mathbf{u}(k)$  que aproxime la expresión (4.49) mediante la minimización de una función de coste cuadrática. Si  $s \leq m$   $\mathbf{u}(k)$  puede obtenerse a partir de la seudo-inversa de  $\Lambda_m$  en la forma

$$\mathbf{u}(k) = \Gamma_{\Lambda_m} \mathbf{f}_{cm}^*(k) \quad (4.51)$$

donde la matriz  $\Gamma_{\Lambda_m}$  de dimensión  $s \times m$  se obtiene por la expresión

$$\Gamma_{\Lambda_m} = (\Lambda_m^t \Lambda_m)^{-1} \Lambda_m^t \quad (4.52)$$

En el caso particular de que existan igual número de modos controlados que de señales de control ( $s = m$ ), la matriz  $\Lambda_m$  es cuadrada e inversible. Por tanto, no es necesario el cálculo de la seudo inversa ya que la relación inversa de (4.49) es exacta y puede escribirse como

$$\mathbf{u}(k) = \Lambda_m^{-1} \mathbf{f}_{c_m}^*(k) \quad (4.53)$$

Las  $m$  fuerzas modales  $f_{c_i}^*$  se calculan por expresiones del tipo (4.15). Pueden ser agrupadas en una sola ecuación vectorial similar a (4.17) en la forma

$$\mathbf{f}_{c_m}^*(k) = -(\hat{\mathbf{D}}_1^* \quad \hat{\mathbf{D}}_2^*) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_m(k) \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_m(k) \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{n_r} \hat{\mathbf{K}}_j^* \mathbf{f}_{c_m}^*(k-j) \quad (4.54)$$

Las matrices  $\hat{\mathbf{D}}_1^*$ ,  $\hat{\mathbf{D}}_2^*$  y  $\hat{\mathbf{K}}_j^*$  tienen la estructura diagonal definida en (4.18) con la diferencia de que ahora tienen dimensión  $m \times m$ .  $\boldsymbol{\eta}_m$  y  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_m$  son los vectores que contienen las  $m$  primeras coordenadas modales y sus velocidades, respectivamente. La expresión (4.54) permite obtener las primeras  $m$  fuerzas modales de control en las que se imponen valores de  $\lambda$  y  $r/Q_d$  para reducir de forma eficiente la respuesta de cada modo.

Sustituyendo (4.54) en (4.51) se tiene

$$\mathbf{u}(k) = \Gamma_{\Lambda_m} \mathbf{f}_{c_m}^*(k) = -(\Gamma_{\Lambda_m} \hat{\mathbf{D}}_1^* \quad \Gamma_{\Lambda_m} \hat{\mathbf{D}}_2^*) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_m(k) \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_m(k) \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{n_r} \Gamma_{\Lambda_m} \hat{\mathbf{K}}_j^* \mathbf{f}_{c_m}^*(k-j) \quad (4.55)$$

Para obtener las  $m$  coordenadas modales  $\boldsymbol{\eta}_m$  y  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_m$  se requiere implementar como mínimo la medición de  $m$  coordenadas generales contenidas en los vectores  $\mathbf{d}_m$  y  $\dot{\mathbf{d}}_m$ . Esta es la razón por la cual el número de modos a controlar es igual al número de sensores.  $\mathbf{d}_m$  contiene los  $m$  desplazamientos medidos por los sensores situados en  $m$  grados de libertad seleccionados. El vector  $\mathbf{d}_m$  se relaciona con  $\mathbf{d}$  por la expresión

$$\mathbf{d}_m = \mathbf{L}_m \mathbf{d} \quad (4.56a)$$

donde la matriz  $\mathbf{L}_m$  es de dimensión  $m \times n$  y contiene un 1 en cada fila y el resto son 0. El 1 está ubicado en la posición correspondiente al grado de libertad en el que se coloca el sensor.

Análogamente, los grados de libertad no medidos (eliminados) se contienen en el vector  $\mathbf{d}_e$  que se relaciona con  $\mathbf{d}$  en la forma

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{L}_e \mathbf{d} \quad (4.56b)$$

donde la matriz  $\mathbf{L}_e$  tiene dimensión  $(n-m) \times n$  y contiene un 1 en cada fila correspondiente al grado de libertad donde no existe sensor y el resto 0. Las dos expresiones (4.56) pueden agruparse en una sola ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{d}}_m \\ \dot{\mathbf{d}}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_m \\ \mathbf{L}_e \end{pmatrix} \mathbf{d} \quad (4.57)$$

donde la matriz formada por las submatrices  $\mathbf{L}_m$  y  $\mathbf{L}_e$  es de dimensión  $n \times n$ . Sustituyendo (4.2a) en (4.57) se tiene

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{d}}_m \\ \dot{\mathbf{d}}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_m \\ \mathbf{L}_e \end{pmatrix} \Phi \boldsymbol{\eta} = \Psi \boldsymbol{\eta} \quad (4.58a)$$

donde la matriz  $\Psi$  contiene las mismas columnas que  $\Phi$  pero en distinto orden:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_m \\ \mathbf{L}_e \end{pmatrix} \Phi \quad (4.58b)$$

La matriz  $\Psi$  (dimensión  $n \times n$ ) es objeto de una partición en 4 bloques con el fin de que los vectores  $\mathbf{d}_m$  y  $\mathbf{d}_e$  se relacionen con los modos controlados  $\boldsymbol{\eta}_m$  y los modos no controlados (eliminados)  $\boldsymbol{\eta}_e$  separadamente. Es decir

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{d}}_m \\ \dot{\mathbf{d}}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{mm} & \Psi_{me} \\ \Psi_{em} & \Psi_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_m \\ \boldsymbol{\eta}_e \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

Las submatrices  $\Psi_{mm}$  y  $\Psi_{me}$  tienen dimensiones  $m \times m$  y  $m \times (n-m)$  respectivamente, mientras que las matrices  $\Psi_{em}$  y  $\Psi_{ee}$  son de dimensión  $(n-m) \times m$  y  $(n-m) \times (n-m)$  respectivamente. A partir de (4.58b) y de las características de  $\Phi$  es obvio que  $\Psi_{mm}$  y  $\Psi_{ee}$  son inversibles.

De igual manera que para los desplazamientos, se pueden definir unas matrices  $\mathbf{L}'_m$  y  $\mathbf{L}'_e$  que indiquen la selección de los grados de libertad en los que se han instrumentado sensores de velocidad, con lo que se tiene de forma análoga a (4.58a)

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{d}}_m \\ \dot{\mathbf{d}}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}'_m \\ \mathbf{L}'_e \end{pmatrix} \Phi' \dot{\boldsymbol{\eta}} = \Psi' \dot{\boldsymbol{\eta}} \quad (4.60)$$

La matriz  $\mathbf{L}'_m$  no debe coincidir necesariamente con  $\mathbf{L}_m$  por lo que la matriz  $\Psi$  pueden ser diferente a  $\Psi'$ . Haciendo una partición sobre la matriz  $\Psi'$  se obtiene una expresión similar a (4.59)

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{d}}_m \\ \dot{\mathbf{d}}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi'_{mm} & \Psi'_{me} \\ \Psi'_{em} & \Psi'_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_m \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_e \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

donde las cuatro submatrices de (4.61) tienen igual dimensión que sus similares de (4.59).  $\Psi_{me}$  y  $\Psi'_{me}$  representan la contribución de los modos no controlados a la respuesta medida. Si consideramos dicha participación poco significativa frente a la de los modos controlados, las expresiones (4.59) y (4.61) pueden aproximarse en la forma

$$\mathbf{d}_m = (\Psi_{mm} \quad \Psi_{me}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_m \\ \boldsymbol{\eta}_e \end{pmatrix} \approx \Psi_{mm} \boldsymbol{\eta}_m \quad (4.62a)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_m = (\Psi'_{mm} \quad \Psi'_{me}) \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_m \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_e \end{pmatrix} \approx \Psi'_{mm} \dot{\boldsymbol{\eta}}_m \quad (4.62b)$$

Ya que  $\Psi_{mm}$  y  $\Psi'_{mm}$  son regulares, de estas expresiones se obtienen las relaciones inversas

$$\boldsymbol{\eta}_m \approx \Psi_{mm}^{-1} \mathbf{d}_m \quad (4.63a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_m \approx \Psi'_{mm}^{-1} \dot{\mathbf{d}}_m \quad (4.63b)$$

que, sustituidas en (4.55) y haciendo uso adicional de (4.49), permiten obtener

$$\mathbf{u}(k) = -(\Gamma_{\Lambda_m} \hat{\mathbf{D}}_1^* \Psi_{mm}^{-1} \quad \Gamma_{\Lambda_m} \hat{\mathbf{D}}_2^* \Psi'_{mm}^{-1}) \begin{pmatrix} \mathbf{d}_m(k) \\ \dot{\mathbf{d}}_m(k) \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{\hat{n}_r} \Gamma_{\Lambda_m} \hat{\mathbf{K}}_j^* \Lambda_m \mathbf{u}(k-j) \quad (4.64)$$

Llamando

$$\hat{\mathbf{G}}_{r1} = \Gamma_{\Lambda_m} \hat{\mathbf{D}}_1^* \Psi_{mm}^{-1} \quad (4.65a)$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{r2} = \Gamma_{\Lambda_m} \hat{\mathbf{D}}_2^* \Psi'_{mm}^{-1} \quad (4.65b)$$

$$\hat{\mathbf{G}}_r = (\hat{\mathbf{G}}_{r1} \quad \hat{\mathbf{G}}_{r2}) \quad (4.65c)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_{rj} = \Gamma_{\Lambda_m} \hat{\mathbf{K}}_j^* \Lambda_m \quad (4.65d)$$

se obtiene finalmente la ecuación que hace posible implementar el cálculo de las señales de control en un ordenador digital

$$\mathbf{u}(k) = -(\hat{\mathbf{G}}_{r1} \quad \hat{\mathbf{G}}_{r2}) \begin{pmatrix} \mathbf{d}_m(k) \\ \dot{\mathbf{d}}_m(k) \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{\hat{n}_r} \hat{\mathbf{E}}_{rj} \mathbf{u}(k-j) \quad (4.66)$$

La matriz  $\hat{\mathbf{G}}_r$  de dimensión  $s \times 2m$  corresponde a la matriz reducida de ganancia en coordenadas generales que surge de imponer condiciones al lazo cerrado de control en coordenadas modales por medio de las matrices  $\hat{\mathbf{D}}_1^*$  y  $\hat{\mathbf{D}}_2^*$  que intervienen en (4.54).

#### 4.5.2 Estabilidad y eficacia

En este subapartado se exponen consideraciones análogas a las del subapartado 4.4.4. La estabilidad del lazo de control se estudia en coordenadas generales mediante los criterios del subapartado 3.3.1. Para que el sistema sea estable se requiere que los valores propios de la matriz ampliada  $\bar{\mathbf{A}}$  se encuentren dentro del círculo unidad. En las expresiones que definen a la matriz ampliada  $\bar{\mathbf{A}}$  ((3.20c), (3.21c) o (3.22c) según el número de retardos) se requiere reemplazar  $\hat{\mathbf{D}}$  por  $\hat{\mathbf{G}}_r$  y  $\hat{\mathbf{K}}_j$  por  $\hat{\mathbf{E}}_{rj}$  y las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  se obtienen por las ecuaciones (2.40b) y (4.42), respectivamente.

En este subapartado se muestra que cuando no existen retardos es posible realizar un análisis de estabilidad en coordenadas modales que permite analizar el efecto del control sobre cada modo. Dicho análisis se describe a continuación.

El estudio se basa en hacer una distinción entre los  $m$  modos controlados contenidos en  $\eta_m$  y los  $n - m$  modos no controlados (eliminados) contenidos en  $\eta_e$ .

Para generar las señales  $\mathbf{u}(k)$  se parte de imponer unos valores a las fuerzas modales  $f_{ci}^*$  ( $i = 1, \dots, m$ ) y  $f_{ci}^* = 0$  ( $i = m + 1, \dots, n$ ) pero cuando se implementa  $\mathbf{u}$  en el lazo cerrado de control en realidad se generan  $n$  fuerzas modales  $f_c'^*$  ( $i = 1, \dots, n$ ) que no coinciden en general con las impuestas. Esto es debido al cálculo aproximado de  $\mathbf{u}$  en el proceso de seudoinversión (4.52) y al cálculo también aproximado de  $\eta_m$  en función de  $\mathbf{d}_m$  en (4.63). La señal de control  $\mathbf{u}$  que se aplica a la estructura genera fuerzas modales reales de control  $f_c'^*$  que de acuerdo con (4.28) pueden escribirse como

$$\mathbf{f}_c'^*(k) = \Phi^t \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{u}(k) \quad (4.67)$$

donde  $\mathbf{u}(k)$  se calcula mediante (4.66).

Consecuentemente es necesario estudiar la estabilidad tanto en los modos controlados  $\eta_m$  como en los no controlados  $\eta_e$  ya que estos modos van estar sometidos también a una acción de control no nula. Cada modo responde a una ecuación de estado del tipo

$$\mathbf{Z}_i(k+1) = \mathbf{A}_i^* \mathbf{Z}_i(k) + \mathbf{B}_i^* f_{ci}^*(k) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.68)$$

donde  $f_{ci}^*$  es la fuerza modal real en el modo  $i$  que forma parte del vector  $\mathbf{f}_c'^*$  dado en (4.67). Las matrices  $\mathbf{A}_i^*$  y  $\mathbf{B}_i^*$  están definidas en (4.12a) y (4.14) respectivamente. Agrupando los vectores de estado de los modos controlados y no controlados en sendos vectores

$$\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_m \\ \zeta_e \end{pmatrix} \quad \zeta_m = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_m \end{pmatrix} \quad \zeta_e = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{m+1} \\ \mathbf{Z}_{m+2} \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_n \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

se tiene la ecuación matricial siguiente que rige el comportamiento del sistema completo:

$$\begin{pmatrix} \zeta_m(k+1) \\ \zeta_e(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_m^* & \\ & A_e^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_m(k) \\ \zeta_e(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_m^* & \\ & B_e^* \end{pmatrix} f_c'(k) \quad (4.70)$$

donde  $A_m^*$  es una matriz de dimensión  $2m \times 2m$  que contiene las  $m$  submatrices  $2 \times 2$   $A_i^*$  de los modos controlados. De igual forma  $A_e^*$  es una matriz que contiene las  $n - m$  submatrices  $A_i^*$  de los modos no controlados. Las matrices  $B_m^*$  (dimensión  $2m \times m$ ) y  $B_e^*$  (dimensión  $2(n - m) \times (n - m)$ ) contienen respectivamente las submatrices  $B_i^*$  de los modos controlados y no controlados.

Ya que en este caso no se consideran retardos, la señal de control dada en (4.66) se calcula mediante

$$u(k) = -\hat{G}_r \begin{pmatrix} d_m(k) \\ \dot{d}_m(k) \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

Las expresiones exactas de (4.62) pueden también escribirse en la forma

$$d_m = (\Psi_{mm} \quad \Psi_{me}) \begin{pmatrix} \eta_m \\ \eta_e \end{pmatrix} = \Psi_m \eta \quad (4.72a)$$

$$\dot{d}_m = (\Psi'_{mm} \quad \Psi'_{me}) \begin{pmatrix} \dot{\eta}_m \\ \dot{\eta}_e \end{pmatrix} = \Psi'_m \dot{\eta} \quad (4.72b)$$

donde las matrices  $\Psi_m$  y  $\Psi'_m$  son de dimensión  $m \times n$  y pueden obtenerse directamente por

$$\Psi_m = L_m \Phi \quad (4.73a)$$

$$\Psi'_m = L'_m \Phi \quad (4.73b)$$

Utilizando (4.66) y sustituyendo las expresiones (4.72) en (4.71) se obtiene

$$u = -(\hat{G}_{r1} \quad \hat{G}_{r2}) \begin{pmatrix} \Psi_m \eta \\ \Psi'_m \dot{\eta} \end{pmatrix} = -(\hat{G}_{r1} \Psi_m \quad \hat{G}_{r2} \Psi'_m) \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

donde  $\hat{G}_{r1} \Psi_m$  y  $\hat{G}_{r2} \Psi'_m$  son matrices de dimensión  $s \times n$ .

Existe una transformación lineal que permite escribir

$$\begin{pmatrix} \zeta_m \\ \zeta_e \end{pmatrix} = T_{\zeta\eta} \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

donde  $\mathbf{T}_{\zeta\eta}$  es la matriz  $2n \times 2n$  de dicha transformación dada por

$$\mathbf{T}_{\zeta\eta} = \left( \begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \quad (4.76)$$

Esta matriz es ortogonal es decir

$$\mathbf{T}_{\zeta\eta} \mathbf{T}_{\zeta\eta}^t = \mathbf{I}_{2n} \quad (4.77)$$

por lo que la relación inversa de (4.75) es

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{\zeta\eta}^t \begin{pmatrix} \boldsymbol{\zeta}_m \\ \boldsymbol{\zeta}_e \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

Sustituyendo (4.78) en (4.74) se tiene

$$\mathbf{u} = -(\hat{\mathbf{G}}_{r1} \Psi_m \quad \hat{\mathbf{G}}_{r2} \Psi'_m) \mathbf{T}_{\zeta\eta}^t \begin{pmatrix} \boldsymbol{\zeta}_m \\ \boldsymbol{\zeta}_e \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

Se define la matriz  $\hat{\mathbf{G}}_m$  de dimensión  $s \times 2n$  dada por

$$\hat{\mathbf{G}}_m = (\hat{\mathbf{G}}_{r1} \Psi_m \quad \hat{\mathbf{G}}_{r2} \Psi'_m) \mathbf{T}_{\zeta\eta}^t \quad (4.80a)$$

que es objeto de una partición en dos submatrices:  $\hat{\mathbf{G}}_{mm}$  de dimensión  $s \times 2m$  relacionada con los modos controlados y  $\hat{\mathbf{G}}_{me}$  de dimensión  $s \times 2(n-m)$  relacionada con los modos no controlados, es decir

$$\hat{\mathbf{G}}_m = (\hat{\mathbf{G}}_{mm} \quad \hat{\mathbf{G}}_{me}) \quad (4.80b)$$

Sustituyendo (4.80) en (4.79) se obtiene

$$\mathbf{u}(k) = -\hat{\mathbf{G}}_m \begin{pmatrix} \boldsymbol{\zeta}_m(k) \\ \boldsymbol{\zeta}_e(k) \end{pmatrix} = -(\hat{\mathbf{G}}_{mm} \quad \hat{\mathbf{G}}_{me}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\zeta}_m(k) \\ \boldsymbol{\zeta}_e(k) \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

Reemplazando (4.81) en la expresión de las fuerzas modales de control reales (4.67), resulta

$$\mathbf{f}_c^{l*}(k) = -\Phi^t \mathbf{M} \mathbf{J} \hat{\mathbf{G}}_m \begin{pmatrix} \zeta_m(k) \\ \zeta_e(k) \end{pmatrix} \quad (4.82)$$

Esta expresión es objeto de una partición en fuerzas modales reales que actúan sobre modos controlados y no controlados según

$$\mathbf{f}_c^{l*}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{cm}^{l*}(k) \\ \mathbf{f}_{ce}^{l*}(k) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \Phi_m^t \\ \Phi_e^t \end{pmatrix} \mathbf{M} \mathbf{J} (\hat{\mathbf{G}}_{mm} \quad \hat{\mathbf{G}}_{me}) \begin{pmatrix} \zeta_m(k) \\ \zeta_e(k) \end{pmatrix} \quad (4.83)$$

donde  $\Phi_m^t$  es de dimensión  $m \times n$  y corresponde a la transpuesta de  $\Phi_m$  definida en (4.48).  $\Phi_e^t$  de dimensión  $(n - m) \times n$  es la matriz complementaria de  $\Phi_m^t$ . La ecuación (4.83) puede escribirse en la forma

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_{cm}^{l*}(k) \\ \mathbf{f}_{ce}^{l*}(k) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{G}}_{tmm} & \hat{\mathbf{G}}_{tme} \\ \hat{\mathbf{G}}_{tem} & \hat{\mathbf{G}}_{tee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_m(k) \\ \zeta_e(k) \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

donde se han introducido las matrices

$$\hat{\mathbf{G}}_{tmm} = \Phi_m^t \mathbf{M} \mathbf{J} \hat{\mathbf{G}}_{mm} \quad (4.85a)$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{tme} = \Phi_m^t \mathbf{M} \mathbf{J} \hat{\mathbf{G}}_{me} \quad (4.85b)$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{tem} = \Phi_e^t \mathbf{M} \mathbf{J} \hat{\mathbf{G}}_{mm} \quad (4.85c)$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{tee} = \Phi_e^t \mathbf{M} \mathbf{J} \hat{\mathbf{G}}_{me} \quad (4.85d)$$

Sustituyendo (4.84) en (4.70) se obtiene la expresión recurrente que rige en espacio de estado el comportamiento del sistema

$$\zeta(k+1) = \begin{pmatrix} \zeta_m(k+1) \\ \zeta_e(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_m^* - \mathbf{B}_m^* \hat{\mathbf{G}}_{tmm} & -\mathbf{B}_m^* \hat{\mathbf{G}}_{tme} \\ -\mathbf{B}_e^* \hat{\mathbf{G}}_{tem} & \mathbf{A}_e^* - \mathbf{B}_e^* \hat{\mathbf{G}}_{tee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_m(k) \\ \zeta_e(k) \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{A}}^{l*} \zeta(k) \quad (4.86)$$

donde la matriz  $\bar{\mathbf{A}}^{l*}$  viene dada por

$$\bar{\mathbf{A}}^{l*} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_m^* - \mathbf{B}_m^* \hat{\mathbf{G}}_{tmm} & -\mathbf{B}_m^* \hat{\mathbf{G}}_{tme} \\ -\mathbf{B}_e^* \hat{\mathbf{G}}_{tem} & \mathbf{A}_e^* - \mathbf{B}_e^* \hat{\mathbf{G}}_{tee} \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

y condiciona la estabilidad del lazo cerrado de control. El sistema (4.86) es un sistema acoplado, es decir, en la respuesta de los modos controlados  $\zeta_m$  influye la respuesta de los modos no controlados  $\zeta_e$  y viceversa.

El término  $-\mathbf{B}_m^* \hat{\mathbf{G}}_{tme} \zeta_e(k)$  en el desarrollo de (4.86) puede interpretarse como una perturbación sobre los modos controlados inducida por los modos no controlados. El término  $-\mathbf{B}_e^* \hat{\mathbf{G}}_{tem} \zeta_m(k)$  provoca fenómenos de "spillover".

Si se escribe un sistema similar a (4.86) partiendo de la condición (4.43), se pueden analizar los cambios ocurridos debidos al proceso de seudoinversión (4.52) y al cambio aproximado de coordenadas (4.63). En este caso se requiere definir la matriz  $\hat{\mathbf{D}}_m^*$  (dimensión  $m \times 2m$ ) formada por las  $m$  submatrices  $\hat{\mathbf{D}}^{*i}$  de dimensión  $1 \times 2$  definidas en (4.16) que reflejan las condiciones de control impuestas a los  $m$  primeros modos.

$$\hat{\mathbf{D}}_m^* = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{D}}^{*1} & & \\ & \hat{\mathbf{D}}^{*2} & \\ & & \ddots \\ & & & \hat{\mathbf{D}}^{*m} \end{pmatrix} \quad (4.88)$$

Se considera ahora que los  $n - m$  modos residuales no tienen acciones de control. Por tanto el sistema de control respondería a la expresión

$$\zeta(k+1) = \begin{pmatrix} \zeta_m(k+1) \\ \zeta_e(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_m^* - \mathbf{B}_m^* \hat{\mathbf{D}}_m^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_e^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_m(k) \\ \zeta_e(k) \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{A}}^* \zeta(k) \quad (4.89)$$

donde la matriz  $\bar{\mathbf{A}}^*$  viene dada por

$$\bar{\mathbf{A}}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_m^* - \mathbf{B}_m^* \hat{\mathbf{D}}_m^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_e^* \end{pmatrix} \quad (4.90)$$

La comparación entre (4.86) y (4.89) muestra que en el proceso de implementación han aparecido términos en la matriz del sistema (4.87) que no están en (4.90) y que alteran la estabilidad original impuesta, ya que participan en la determinación de los valores propios del sistema.

Sin embargo si la relación dada en (4.63) es suficientemente aproximada, la matriz  $\hat{\mathbf{G}}_{me}$  definida en (4.80b) puede considerarse como nula y por tanto las matrices  $\hat{\mathbf{G}}_{tme}$  y  $\hat{\mathbf{G}}_{tee}$  según (4.85b) y (4.85d) lo serán también. En tal caso el sistema (4.86) se simplifica a la forma

$$\begin{pmatrix} \zeta_m(k+1) \\ \zeta_e(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_m^* - \mathbf{B}_m^* \hat{\mathbf{G}}_{tmm} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_e^* \hat{\mathbf{G}}_{tem} & \mathbf{A}_e^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_m(k) \\ \zeta_e(k) \end{pmatrix} \quad (4.91)$$

En este último sistema se observa que los modos no controlados se comportan sujetos a sus características dinámicas originales representadas por  $A_e^*$  pero se excitan por efecto de  $-B_e^* \hat{G}_{tem}$  aunque sin desestabilizarse, ya que este término no participa en la determinación de los valores propios, y por tanto se mantiene la estabilidad del sistema. Observando (4.91) se deduce también que en la respuesta de los modos controlados no influye la respuesta de los modos no controlados.

En el siguiente subapartado se estudia numéricamente la estabilidad del sistema a partir de (4.86).

#### 4.5.3 Ejemplos de simulación numérica

En este subapartado se presenta la simulación numérica del comportamiento dinámico de tres estructuras: a) un modelo a escala 1:4 de una estructura experimental de seis plantas que se encuentra en la "University of New York at Buffalo" (ya considerada en los subapartados 4.3.2 y 4.4.5); b) un modelo de laboratorio de un edificio dotado con un sistema de aislamiento de base existente en la "University of California at Berkeley" y c) un edificio de 6 plantas a escala real construido en Japón por la compañía Takenaka con fines de ensayos de campo de control activo de estructuras.

El objetivo general de este subapartado es diseñar un sistema de control para el caso c) a escala real utilizando las conclusiones obtenidas en los casos a) y b) a escala reducida.

##### a) Estructura de la Universidad de Buffalo

En este modelo experimental de estructura que se encuentra en SUNY/Buffalo y cuyas características se describen en la tabla 4.1 se hizo en los apartados anteriores la simulación de experiencias de control considerando en un caso la existencia de seis sensores y seis actuadores y en otro la aplicación de una única fuerza de control por medio de un actuador. En este subapartado se considera que no hay posibilidad de medir todo el estado de la estructura por existir un único sensor que mide el desplazamiento relativo y la velocidad relativa en un piso, medida a partir de la cual se calcula la secuencia de fuerzas de control que se aplican a la estructura por medio de un actuador. Se tiene, por tanto,  $s = m = 1$ . Ya que el número de sensores  $m$  coincide con el número de modos a controlar, en este ejemplo se pretende controlar tan sólo el primer modo.

El objetivo de este ejemplo de simulación es ilustrar cómo afecta a la respuesta de la estructura la colocación del actuador y del sensor en uno u otro grado de libertad. También se quiere ver si las condiciones de control recomendadas según el capítulo 3 como las más eficientes para el primer modo son capaces de generar una acción de control global estable y con un nivel de reducción de respuesta satisfactorio. El objetivo del control es minimizar los desplazamientos y velocidades relativos de la estructura.

En todas las experiencias de simulación numérica se toma como período de muestreo  $T = 0.01$  s., valor que también se adoptó en todos los ejemplos de los subapartados 4.3.2 y 4.4.5. La excitación a que se somete la estructura es el sismo de El Centro de amplitud

TABLA 4.9

**CONDICIONES DE CONTROL Y RESULTADOS. Sismo El Centro**  
 Estructura de la Universidad de Buffalo. Un actuador y un sensor  
 $\lambda = 4$        $r/Q_d = 1$        $Q_v/Q_d = 0$

Caso	gdl actuador	gdl sensor	d max	d med	$\ddot{d}$ max	$\ddot{d}$ med	u max	u med
SC	—	—	2.72 (6)	0.97	333.65 (6)	97.97	—	—
$C_1$	1	1	2.51 (6)	0.74	336.27 (6)	82.75	456.26	118.34
$C_2$	1	2	inestable				inestable	inestable
$C_3$	3	3	1.42 (6)	0.41	305.10 (6)	72.16	505.28	153.47
$C_4$	3	4	inestable		inestable		inestable	inestable
$C_5$	6	6	0.51 (4)	0.13	225.83 (4)	44.53	360.58	100.79
$C_6$	6	5	inestable		inestable		inestable	inestable
$C_7$	4	4	0.66 (6)	0.18	215.24 (6)	49.17	409.12	115.57
$C_8$	4	4	0.94 (6)	0.25	225.70 (6)	48.62	353.64	93.85

(\*) grado de libertad con máxima respuesta.

$d$  en [cm]

$\ddot{d}$  en [ $cm/s^2$ ]

$u$  en [ $cm/s^2$ ]

En los casos  $C_1$  a  $C_7$   $\dot{n}_r = n_r = 0$ . En el caso  $C_8$   $\dot{n}_r = 2$  y  $n_r = 1$

máxima 0.075 g. y duración 20 s.

En la tabla 4.9 se detallan las condiciones de control en lo referente  $\lambda$  y  $r/Q_d$  y se indican los grados de libertad en que se encuentran colocados el sensor y el actuador. En esta tabla también se dan los valores máximos y medios cuadráticos de la respuesta (especificándose el piso en que se producen) y de la señal de control.

Se proponen ocho casos de control ( $C_1$  a  $C_8$ ) en los que  $\lambda = 4$  y  $r/Q_d = 1$  según las recomendaciones de las tablas 3.4 y 3.6 (para un control eficiente del primer modo) y de los resultados del subapartado 4.4.5. Los 7 primeros casos no consideran la presencia de retardos. Los resultados de estas experiencias son comparados con los obtenidos en la simulación del comportamiento dinámico de la estructura sin acción de control (SC).

En la tabla 4.10 se estudia el comportamiento dinámico equivalente de la estructura utilizando la metodología en tiempo discreto descrita en el apartado 4.5.

En el caso  $C_1$  se coloca el actuador y el sensor en la primera planta, y de igual forma que lo ocurrido con la implementación con 6 sensores (caso  $B_1$ , tabla 4.8) la reducción de la respuesta es inapreciable. Existe un aumento considerable del amortiguamiento del sexto modo (tabla 4.10), pero éste no tiene participación apreciable en la respuesta total de la estructura (tabla 4.1).

En el caso  $C_2$ , manteniendo las mismas condiciones de control que en  $C_1$  se cambia únicamente la colocación del sensor al piso 2. En este caso el sistema es inestable y en la tabla 4.10 se detecta que el control introduce factores de amortiguamiento negativos en los últimos modos, por lo que se puede decir que se ha producido el efecto de "spillover" (transferencia de excitación de los modos controlados a los no controlados).

En el caso  $C_3$  el actuador y el sensor están ubicados en la tercera planta. En este caso existe un aumento en los valores equivalentes de frecuencia y amortiguamiento (tabla 4.10) para todos los modos. Este caso conduce a una reducción considerable de la respuesta según la tabla 4.9, no obstante, con otras colocaciones del sensor y del actuador pueden obtenerse mejores resultados.

En el caso  $C_4$ , manteniendo las mismas condiciones de control que en  $C_3$ , se cambia la colocación del sensor al piso 4. La diferencia de ubicación entre el sensor y el actuador, al igual que en  $C_2$ , produce inestabilidad en el sistema al introducir factores de amortiguamiento negativos en varios modos (tabla 4.10).

En el caso  $C_5$  el actuador y el sensor se colocan en la sexta planta. En la tabla 4.10 se aprecia un aumento considerable del amortiguamiento en todos los modos pero en especial en los tres primeros; en lo referente a frecuencias, existe un gran aumento para las tres primeras y una leve disminución para las otras tres. En general la acción de control es muy efectiva para la reducción de la respuesta como se ve en la tabla 4.9. La máxima respuesta ya no se da en la planta 6 (como en los casos anteriores) sino en la planta 4.

En el caso  $C_6$  el actuador se sitúa en el piso 6 y el sensor en el 5. Al igual que en  $C_2$  y

en  $C_4$ , la no coincidencia del sensor y del actuador en un mismo grado de libertad hace que el sistema sea inestable, detectándose en la tabla 4.10 la presencia de amortiguamientos negativos.

El caso de control  $C_7$  pretende buscar una solución intermedia entre  $C_3$  y  $C_5$ , es decir, buscar una colocación del actuador no tan alta como en  $C_5$  pero que aumente el nivel de eficacia respecto a  $C_3$ . Esta colocación hace que los modos sobre los que se actúa de forma más eficiente sean los intermedios tal como se observa en la tabla 4.10. La reducción de respuesta que se observa en la tabla 4.9 es significativa.

En el caso  $C_8$  las ubicaciones del sensor y del actuador son las mismas que en el  $C_7$  pero se consideran retardos. El análisis del comportamiento dinámico de la estructura no puede realizarse por la metodología planteada en el apartado 4.5 ya que existen retardos en el sistema. De manera general, la presencia de los retardos hace que el control disminuya su eficacia para reducir la respuesta de la estructura, aunque este deterioro no es muy significativo en este caso.

Comparando los resultados de la tabla 4.9 (casos  $C_3$ ,  $C_7$  y  $C_5$ ) con los resultados de la tabla 4.8 (casos  $B_7$ ,  $B_8$  y  $B_{10}$ ), se puede decir que de manera general la implementación con un solo sensor no produce un deterioro considerable de la eficacia del control predictivo para reducir la respuesta de la estructura, y por tanto se puede considerar como adecuada la forma de implementación ilustrada en este ejemplo.

En resumen, es necesario colocar el actuador y el sensor en un mismo grado de libertad, ya que de esta manera se garantiza la estabilidad del sistema, y cuanto más alto esté el actuador más efectivo será el control ya que actuará sobre los primeros modos de vibración (se quiere controlar sobre todo el primero). Con el uso de condiciones de control recomendadas en el capítulo 3 se generan acciones de control efectivas.

### b) Estructura de la Universidad de California (Berkeley)

En este ejemplo se analiza de forma numérica la viabilidad de sistemas de control predictivo como protección antisísmica suplementaria a los sistemas de aislamiento de base (Kelly, 1990). Tal como ha sido descrito en el capítulo 1 este sistema híbrido participa de las ventajas del control pasivo y del control activo. Al igual que en el ejemplo anterior se considera un único actuador y un solo sensor lo cual implica que se pretende controlar un modo (el primero). Se tiene, pues,  $s = m = 1$ .

Los sistemas de aislamiento de base permiten lograr un cierto grado de desacoplamiento entre los movimientos horizontales del edificio y del terreno. De esta manera, ante excitaciones sísmicas se puede lograr, al mismo tiempo, reducir los desplazamientos relativos (fuente de daños en la estructura) y las aceleraciones absolutas (peligrosas para las instalaciones del edificio). Diseñando adecuadamente las características de los aisladores se puede lograr resultados suficientemente satisfactorios; no obstante, puede haber situaciones en las que sea conveniente lograr una mayor reducción

TABLA 4.10

FRECUENCIAS EQUIVALENTES [rad/s] Y FACTORES DE AMORTIGUAMIENTO EQUIVALENTES [%]  
Estructura de la Universidad de Buffalo. Condiciones de control según tabla 4.9

Caso	$\omega'_1$	$\omega'_2$	$\omega'_3$	$\omega'_4$	$\omega'_5$	$\omega'_6$	$\xi'_1$	$\xi'_2$	$\xi'_3$	$\xi'_4$	$\xi'_5$	$\xi'_6$
$C_1$	10.27	29.60	50.39	69.56	82.83	85.96	3.46	2.06	1.27	1.86	2.14	28.23
$C_2$	12.21	35.97	49.21	63.07	76.71	78.46	6.75	15.98	18.77	4.84	-1.36	-16.65
$C_3$	13.32	36.18	49.85	68.14	72.24	90.28	7.73	17.13	1.08	4.43	1.49	19.11
$C_4$	17.60	31.66	49.64	65.39	72.78	79.76	15.97	22.54	-5.18	5.25	-3.54	-4.87
$C_5$	18.88	37.80	55.44	64.23	70.74	84.06	15.42	10.79	27.48	7.12	2.63	1.17
$C_6$	21.71	28.59	50.74	63.94	69.48	84.00	21.53	23.84	-9.35	-4.96	-0.46	1.05
$C_7$	16.82	29.93	60.34	66.32	73.97	82.66	14.20	3.22	10.99	2.85	20.47	3.25

de las aceleraciones absolutas, como en el caso de instalaciones especialmente sensibles. Sin embargo, en estos casos no es posible utilizar otros sistemas pasivos que complementen al aislamiento de base ya que dichos sistemas actúan cuando existen desplazamientos relativos importantes entre pisos contiguos y éstos ya han sido disminuidos por el sistema de aislamiento. Para producir este tipo de protección auxiliar pueden ser utilizados los sistemas activos.

La minimización de las aceleraciones absolutas se realiza por medio de la reducción de los desplazamientos absolutos de la estructura. Esto implica la necesidad de formular las ecuaciones del movimiento en coordenadas absolutas. A continuación se describe dicha formulación.

La ecuación del movimiento (4.1) bajo excitación sísmica puede escribirse en coordenadas relativas en la forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_r(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_r(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}_r(t) = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{d}_0(t) + \mathbf{f}_c(t - \tau_r) \quad (4.92)$$

donde el vector unitario  $\mathbf{1}$  contiene un 1 en cada grado de libertad:

$$\mathbf{1} = (1 \quad \dots \quad 1)^t \quad (4.93)$$

Los movimientos relativos se expresan en función de los movimientos absolutos (totales) mediante

$$\mathbf{d}_r(t) = \mathbf{d}_t(t) - \mathbf{1}d_0(t) \quad (4.94a)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_r(t) = \dot{\mathbf{d}}_t(t) - \mathbf{1}\dot{d}_0(t) \quad (4.94b)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_r(t) = \ddot{\mathbf{d}}_t(t) - \mathbf{1}\ddot{d}_0(t) \quad (4.94c)$$

Sustituyendo las expresiones (4.94) en (4.92) se tiene la ecuación del movimiento en coordenadas absolutas

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_t(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_t(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}_t(t) = \mathbf{C}\mathbf{1}\dot{d}_0(t) + \mathbf{K}\mathbf{1}d_0(t) + \mathbf{f}_c(t - \tau_r) \quad (4.95)$$

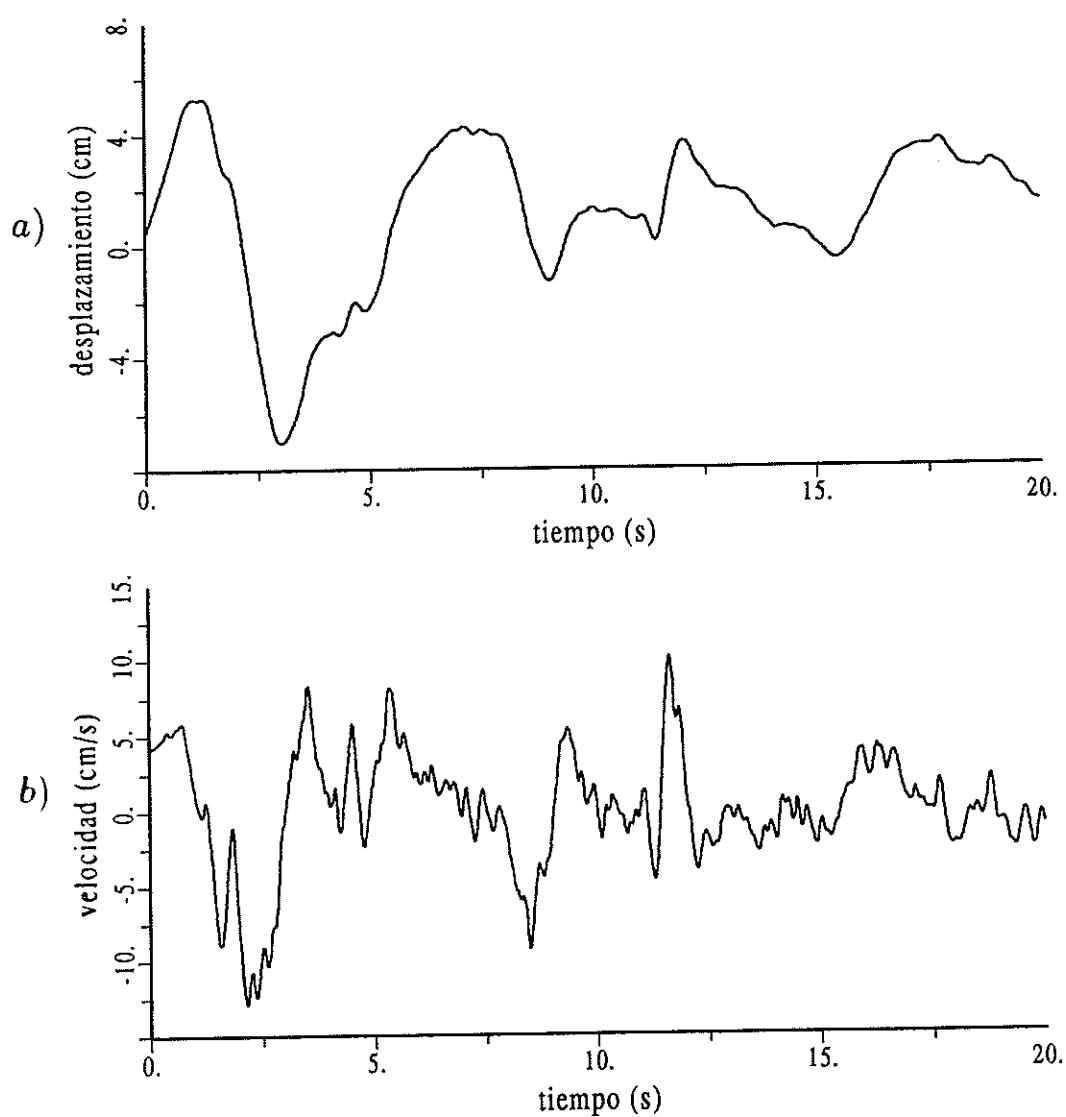
La expresión (4.95) muestra que para realizar la simulación numérica del comportamiento dinámico en coordenadas absolutas del modelo se requiere conocer el desplazamiento y la velocidad del suelo, es decir, en este caso las fuerzas de excitación son:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{C}\mathbf{1}\dot{d}_0(t) + \mathbf{K}\mathbf{1}d_0(t) \quad (4.96)$$

Al igual que en el ejemplo anterior el objetivo de este ejemplo es ilustrar la influencia de la colocación del actuador en distintos grados de libertad y analizar cómo modifica la estabilidad del sistema el ubicar el sensor en un grado de libertad diferente al del actuador.

Las experiencias de simulación numérica se realizan sobre el modelo de aislamiento de base del laboratorio de Ingeniería Sísmica de la "University of California at Berkeley".

Este modelo a escala 1:4 se somete a la excitación del sismo El Centro, considerando 0.075 de  $g$  como valor máximo de la aceleración y duración 20 s. En la simulación se utiliza como intervalo de muestreo  $T = 0.01$  s.



**Figura 4.12 Sismo El Centro. a) Registro de desplazamiento del suelo b) Registro de velocidad del suelo.**

TABLA 4.11

ESTRUCTURA DE LA UNIVERSIDAD DE BERKELEY						
Matriz de Masa [kg]	6800 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0	0.0 5897 0.0 5897 0.0 5897 0.0	0.0 0.0 5897 0.0 0.0 0.0 0.0	0.0 0.0 -57.0 107.0 -50.0 0.0	0.0 0.0 0.0 -50.0 88.0 -38.0	0.0 0.0 0.0 0.0 38.0 5897
Matriz de Amortiguamiento [kN s/m]	69.4 -67.0 0.0 0.0 0.0 0.0	-67.0 125.0 -58.0 0.0 0.0 0.0	0.0 -58.0 115.0 -57.0 0.0 0.0	0.0 0.0 -57.0 107.0 -50.0 0.0	0.0 0.0 0.0 -50.0 88.0 -38.0	0.0 0.0 0.0 0.0 38.0
Matriz de Rigidez [kN/m]	34932 -33732 0.0 0.0 0.0 0.0	-33732 62825 -29093 57714 -28621 0.0	0.0 -29093 57714 -28621 53575 0.0	0.0 0.0 -28621 53575 -24954 0.0	0.0 0.0 0.0 -24954 44013 -19059	0.0 0.0 0.0 0.0 -19059 19059
$\omega$ [rad/s]	5.59	34.94	64.91	92.59	115.67	133.94
$T_{est}/T$ ( $T = 0.01$ s)	112.40	17.98	9.68	6.79	5.43	4.69
$\xi$ [%]	0.56	3.49	6.47	9.22	11.54	13.34
Participación modal [%]	99.876	0.115	0.007	0.001	0.001	0.000
Matriz modal normalizada	0.157 0.161 0.166 0.169 0.171 0.173	0.208 0.164 0.073 -0.038 -0.155 -0.249	-0.179 -0.033 0.165 0.223 0.068 -0.224	0.147 -0.102 -0.214 0.050 0.251 -0.152	-0.128 0.213 0.031 -0.239 0.207 -0.066	-0.095 0.245 -0.251 0.174 -0.075 0.017

TABLA 4.12

**CONDICIONES DE CONTROL Y RESULTADOS. Sismo El Centro**  
 Estructura de la Universidad de Berkeley. Un actuador y un sensor  
 $\lambda = 4$        $r/Q_d = 1$        $Q_v/Q_d = 0$

Caso	gdl actuador	gdl sensor	max	$d_t$	med	max	$\ddot{d}_t$	med	max	$u$	med
SC	—	—	9.25	(6)	3.45	148.6	(6)	51.0	—	—	—
$D_1$	1	1	0.93	(6)	0.37	57.0	(1)	3.4	1103.0	443.0	
$D_2$	1	2	0.91	(6)	0.36	57.0	(1)	3.4	1112.0	445.0	
$D_3$	1	6	inestable			inestable			inestable		
$D_4$	3	3	1.41	(1)	0.57	57.0	(6)	5.5	1182.9	471.3	
$D_5$	6	6	2.05	(1)	0.82	57.0	(1)	9.6	1061.2	423.0	
$D_6$	1	1	1.91	(6)	0.73	57.0	(1)	5.4	992.7	383.7	
$D_7$	3	3	2.34	(1)	0.91	57.0	(1)	6.8	1050.2	404.9	

(·) grado de libertad con máxima respuesta

 $d_t$  en [cm] $\ddot{d}_t$  en [ $cm/s^2$ ] $u$  en [ $cm/s^2$ ]En los casos  $D_1$  a  $D_5$   $\hat{n}_r = n_r = 0$ . En los casos  $D_6$  y  $D_7$   $\hat{n}_r = 2$  y  $n_r = 0$ .

TABLA 4.18

FRECUENCIAS EQUIVALENTES [rad/s] X FACTORES DE AMORTIGUAMIENTO EQUIVALENTES [%]  
Estructura de la Universidad de Berkeley. Condiciones de control según tabla 4.12

Caso	$\omega'_1$	$\omega'_2$	$\omega'_3$	$\omega'_4$	$\omega'_5$	$\omega'_6$	$\xi'_1$	$\xi'_2$	$\xi'_3$	$\xi'_4$	$\xi'_5$	$\xi'_6$
$D_1$	13.46	41.97	68.92	94.88	117.40	134.77	13.28	18.11	15.97	14.24	14.89	15.17
$D_2$	14.69	39.99	65.01	91.87	112.15	131.13	16.88	22.85	8.76	5.24	7.50	11.94
$D_3$	17.45	31.06	69.65	90.17	116.78	133.72	45.35	-30.53	14.42	5.14	12.38	13.19
$D_4$	14.55	35.60	67.70	97.72	115.77	142.69	19.15	5.43	10.40	15.04	11.63	21.45
$D_5$	13.44	44.04	70.46	92.98	115.80	133.96	22.30	19.55	12.38	15.17	12.39	13.39

En la figura 4.12 se presentan los registros de desplazamiento y velocidad.

En la tabla 4.11 se presentan las características de esta estructura (Kelly et al. 1987). Es de destacar el notable peso del primer modo en la respuesta sísmica del sistema el cual representa prácticamente la respuesta total de la estructura, por lo que el comportamiento dinámico de la estructura cuando no existe control puede asimilarse al movimiento de un péndulo simple invertido. La observación de la primera columna de la matriz modal de la tabla 4.11 muestra que la configuración del primer modo es casi constante, es decir, los valores correspondientes a cada planta son notablemente parecidos. Esta circunstancia se da en la mayoría de estructuras de edificación con aislamiento de base (Kelly, 1990).

En la tabla 4.12 se describen 7 casos de control,  $D_1$  a  $D_7$ , en los cuales se mantienen constantes los valores de  $\lambda$  y  $r/Q_d$  los cuales han sido seleccionados de acuerdo con las recomendaciones del capítulo 3 para el modo 1. En los cinco primeros casos no hay retardos y se estudia la influencia de diferentes ubicaciones del sensor y del actuador. En los dos casos restantes hay retardos.

La tabla 4.12 contiene también los valores máximos y medios cuadráticos del desplazamiento absoluto, aceleración absoluta y señal de control indicando el piso para el cual se obtiene la respuesta máxima. El caso sin control es SC.

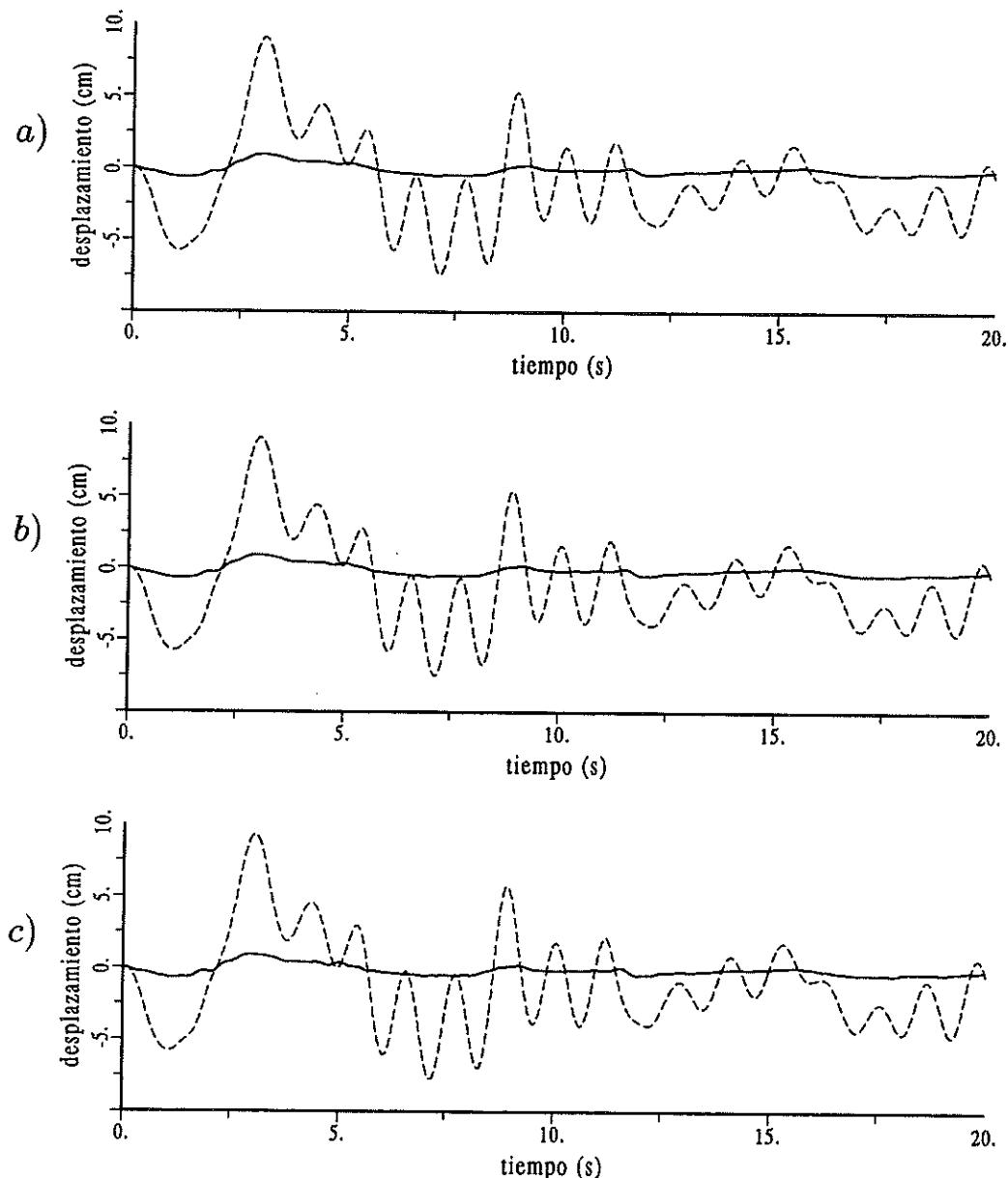
El estudio del comportamiento dinámico equivalente de la estructura se realiza por la metodología descrita en el apartado 4.5, y sus resultados se encuentran en la tabla 4.13.

En el caso  $D_1$  se imponen las condiciones de control recomendadas en la tabla 5.6 y el sensor y el actuador se colocan en el primer piso. Existe un aumento considerable en las frecuencias de los primeros modos, pero sobre todo un aumento sustancial y uniforme del amortiguamiento para todos los modos de vibración, tabla 4.13. A diferencia de la estructura de SUNY/Buffalo la colocación en el primer nivel produce una notable reducción de la respuesta como muestra la tabla 4.12.

En el caso  $D_2$  se utilizan las mismas condiciones de control que en  $D_1$  pero se cambia la ubicación del sensor a la segunda planta. En este caso el sistema sigue manteniendo estabilidad y eficacia para reducir la respuesta. En lo referente a frecuencias y amortiguamientos equivalentes (tabla 4.13), el control en este caso modifica de forma efectiva sólo los valores correspondientes a los primeros modos de vibración, pero la alteración que se obtiene con el caso  $D_2$  es de mayor importancia que en el caso  $D_1$ .

El caso de control  $D_3$  considera el caso extremo de calcular la señal de control a aplicar en el primer nivel en función de medir la respuesta en el último piso. En este caso el sistema es inestable, detectándose un amortiguamiento equivalente negativo del segundo modo en la tabla 4.13.

En función de los tres primeros casos de control analizados, se observa que a diferencia del modelo de SUNY/Buffalo, esta estructura admite la posibilidad de colocar el sensor y el actuador en plantas distintas, aunque sin llegar a situaciones extremas como en el caso  $D_3$ .



**Figura 4.13 Desplazamiento para los casos SC y D<sub>1</sub>. a) Planta 1 b) Planta 2 c) Planta 6.**

Ello se debe a que el primer modo propio es el único que interviene significativamente en la respuesta (tal como lo muestra la tabla 4.11) y a que en dicho modo los desplazamientos de todos los pisos son casi iguales.

En los casos D<sub>4</sub> y D<sub>5</sub> el sensor y el actuador se colocan respectivamente en los pisos 3 y 6. La comparación entre los casos D<sub>1</sub>, D<sub>4</sub> y D<sub>5</sub> muestra que la reducción de la aceleración es similar aunque los desplazamientos son mayores en D<sub>4</sub> y D<sub>5</sub>. Dichos tres casos son eficientes aunque D<sub>1</sub> parece más aconsejable.

Comparando los casos en los cuales se consideran retardos para un mismo piso de aplicación de la fuerza, D<sub>1</sub> con D<sub>6</sub> y D<sub>4</sub> con D<sub>7</sub>, se observa que existe un deterioro similar

en la reducción del desplazamiento y que no hay modificación de la aceleración. Para ambos casos  $D_6$  y  $D_7$  existe una ligera disminución de las fuerzas máximas de control.

De manera general se puede decir que la influencia en esta estructura de la ubicación del actuador es menor que en el modelo de SUNY/Buffalo, ya que en este sistema híbrido se logra reducir la aceleración absoluta en un 62% colocando en cualquier sitio el actuador, mientras que en el otro modelo una fuerza aplicada en el primer nivel no produce una acción de control eficiente. También se concluye que es posible colocar el sensor y el actuador en plantas distintas siempre que éstas no se encuentren excesivamente alejadas. La justificación de estos hechos parece estar en que el único modo con influencia apreciable en la respuesta es el primero y éste tiene una configuración similar a la del movimiento de un sólido rígido en que los movimientos de todas las plantas son iguales.

En la figura 4.13 se presentan las historias temporales de los desplazamientos absolutos de las plantas 1, 2 y 6 para los casos SC (sin control en trazo discontinuo) y  $D_1$  (trazo continuo). La comparación entre los desplazamientos sin control muestra que todas las plantas se mueven de la misma manera lo cual confirma la preponderancia del primer modo señalada en la tabla 4.11. La comparación entre los desplazamientos con control (caso  $D_1$ ) muestra que las plantas adyacentes (1 y 2) se comportan de manera parecida pero las plantas más alejadas presentan mayores diferencias. Esto explica por qué el caso de control  $D_2$  es eficiente mientras que  $D_3$  es inestable.

### c) Estructura experimental en Japón

La estructura considerada en este punto ha sido construida por la empresa Takenaka en Tokio y constituye uno de los primeros modelos a escala real sobre el que se realizan experiencias de campo del control activo. Es un edificio de 6 plantas con estructura metálica.

Aprovechando la experiencia adquirida en los ejemplos anteriores a) y b) el presente ejemplo de simulación numérica tiene como objetivos generales: i) buscar el número de fuerzas que proporcionen una acción de control adecuada; ii) seleccionar la ubicación más adecuada de los actuadores y de los sensores y iii) determinar unas condiciones de control que generen fuerzas de control de magnitud moderada con un nivel de reducción de respuesta satisfactorio.

En la tabla 4.14 se presentan las propiedades dinámicas de la estructura. La matriz de rigidez ha sido obtenida en ensayos de identificación (Takenaka Technical Research Laboratory, 1990). Las matrices de masa y amortiguamiento han sido estimadas directamente.

Una característica importante que se deduce de la tabla 4.14 es que en la respuesta sísmica del edificio tienen participación considerable los tres primeros modos de vibración. Bajo esta circunstancia se consideran tres grupos de casos de control (generados de acuerdo con la formulación descrita en el subapartado 4.5.1): en el primer grupo en que se utiliza

TABLA 4.14

## EDIFICIO EXPERIMENTAL EN JAPON

Matriz de Masa [kN s <sup>2</sup> /cm]	1.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0	1.00	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0	0.0	1.00	0.0	0.0	0.0
	0.0	0.0	0.0	1.00	0.0	0.0
	0.0	0.0	0.0	0.0	1.00	0.0
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.00
Matriz de Amortiguamiento [kN s/cm]	0.778	-0.234	0.003	-0.006	-0.002	-0.001
	-0.234	0.588	-0.213	-0.008	-0.008	-0.004
	0.003	-0.213	0.509	-0.183	-0.013	-0.010
	-0.006	-0.008	-0.183	0.437	-0.153	-0.018
	-0.002	-0.008	-0.013	-0.153	0.366	-0.131
	-0.001	-0.004	-0.010	-0.018	-0.131	0.216
Matriz de Rigidez [kN/cm]	1617.0	-783.7	133.0	-14.45	1.469	-0.0492
	-783.7	1091.0	-568.6	82.03	-7.421	0.6298
	133.0	-568.6	827.6	-413.8	48.01	-3.159
	-14.45	82.03	-413.8	608.8	-289.3	24.03
	1.469	-7.421	48.01	-289.3	428.6	-179.1
	-0.0492	0.6298	-3.159	24.03	-179.1	157.6
$\omega$ [rad/s]	4.11	10.99	18.35	25.88	34.63	47.90
$T_{est}/T$ ( $T = 0.01$ s)	152.87	57.17	34.24	24.28	18.14	13.12
$\xi$ [%]	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
Participación modal [%]	77.20	11.71	4.52	2.59	2.01	1.97
Matriz modal normalizada	0.210	0.564	0.876	1.138	1.528	2.246
	0.570	1.335	1.559	1.231	0.405	-1.895
	0.961	1.664	0.684	-0.916	-1.944	1.013
	1.349	1.167	-1.259	-1.418	1.701	-0.366
	1.696	-0.227	-1.619	1.908	-0.777	0.091
	1.953	-1.877	1.390	-0.708	0.175	-0.014

la nomenclatura  $I_i$  se considera la existencia de un actuador y de un sensor; en el segundo grupo (casos  $\Pi_i$ ) dos actuadores y dos sensores; y en el tercer grupo (casos  $\text{III}_i$ ) tres actuadores y tres sensores. En los casos  $I_i$  se pretende, pues, controlar un solo modo (el primero), en los casos  $\Pi_i$  se pretende controlar los modos primero y segundo y en los casos  $\text{III}_i$  se pretende controlar los tres primeros modos. Dichos tres grupos de casos de control

se describen más adelante en las tablas 4.15, 4.17 y 4.18, respectivamente.

Ya que en la respuesta participan de forma significativa más de un modo, de acuerdo con las consideraciones expuestas en los ejemplos a) y b) en todos los casos de control los sensores y los actuadores se colocan en las mismas plantas.

La estructura se somete a los sismos de El Centro, Miyagioki y Hachinohe. Por tratarse de una estructura a escala real la aceleración máxima se normaliza a  $0.10 g$ , la duración es de 20 s. y el período de muestreo es  $T = 0.01 s$ . Los resultados que se presentan en las tablas 4.15, 4.17 y 4.18 corresponden al sismo de Hachinohe.

Las tablas 4.15 y 4.16 contienen datos relativos al primer grupo de experiencias de control  $I_i$ . La metodología general seguida en este grupo de experiencias de control (al igual que en los grupos  $II_i$  y  $III_i$ ) es investigar, en primer lugar, cuál es la ubicación más adecuada del actuador, para posteriormente seleccionar una condición de control que genere una acción moderada que conduzca a una reducción satisfactoria de la respuesta de la estructura. En total se analizan 11 experiencias de control ( $I_1$  a  $I_{11}$ ) en este grupo.

En la tabla 4.15 se detallan las condiciones de control y los resultados máximos y medios cuadráticos del desplazamiento, aceleración y señal de control indicando la planta en que aparecen los dos primeros.

La tabla 4.16 contiene los resultados del análisis del comportamiento dinámico equivalente (frecuencias y amortiguamientos) por efecto del control. Estos valores han sido obtenidos por la metodología descrita en el subapartado 3.3.2. Para el caso  $I_{11}$  no es posible encontrar estos valores por cuanto se considera la presencia de retardos en el sistema.

Para los casos de control  $I_1$  a  $I_6$  se ubica la fuerza de control en pisos sucesivos. Los valores de  $r/Q_d$  y  $\lambda$  son los recomendados en las tablas 3.4 y 5.6 para un control eficiente sobre el primer modo.

Los casos de control  $I_1$  y  $I_2$  corresponden a la aplicación de la fuerza de control en los pisos 1 y 2 respectivamente. Estas dos ubicaciones del actuador y del sensor no conducen a una disminución del desplazamiento máximo de la estructura pero sí disminuyen la aceleración máxima (tabla 4.15). En lo referente a frecuencias y amortiguamientos (tabla 4.16), se produce un incremento para los últimos modos de vibración, modos que tienen poca importancia en la respuesta sísmica de la estructura.

Un efecto beneficioso tanto en la disminución del desplazamiento como de la aceleración se obtiene a partir de aplicar la fuerza de control sobre el piso 3 (caso  $I_3$ ). Sin embargo, cuando la acción de control se aplica en las últimas plantas (casos  $I_4$ ,  $I_5$  y  $I_6$ ), la respuesta máxima de la estructura se produce para pisos intermedios como se puede apreciar en la tabla 4.15.

En el caso  $I_3$  se observa en la tabla 4.16 una modificación considerable de las características dinámicas del segundo modo.

TABLA 4.15

**CONDICIONES DE CONTROL Y RESULTADOS. Sismo Hachinohe**  
**Edificio experimental en Japón. Un actuador y un sensor  $Q_v/Q_d = 0$**

Caso	$\lambda$	$r/Q_d$	gdl del sensor y del actuador	$d$ max	$d$ med	$\ddot{d}$ max	$\ddot{d}$ med	$u$ max	$u$ med
SC				6.56 (6)	3.00	378.33 (6)	127.04		
I <sub>1</sub>	7	1	1	6.78 (6)	3.80	264.41 (6)	93.97	267.6	116.7
I <sub>2</sub>	7	1	2	7.29 (6)	2.79	241.80 (6)	74.08	353.3	139.2
I <sub>3</sub>	7	1	3	5.29 (6)	1.81	230.14 (6)	66.42	420.9	124.3
I <sub>4</sub>	7	1	4	1.91 (6)	0.55	176.28 (6)	40.41	307.0	70.7
I <sub>5</sub>	7	1	5	2.42 (3)	0.61	376.8 (3)	77.83	385.1	94.3
I <sub>6</sub>	7	1	6	1.69 (4)	0.46	256.81 (4)	53.45	198.8	46.1
I <sub>7</sub>	7	0	6	1.69 (4)	0.46	256.79 (4)	53.47	198.9	46.1
I <sub>8</sub>	7	100	6	1.65 (4)	0.46	250.60 (4)	52.18	192.2	45.5
I <sub>9</sub>	4	100	6	1.74 (4)	0.48	264.32 (4)	53.52	209.9	48.9
I <sub>10</sub>	7	500	6	1.61 (4)	0.47	242.61 (4)	49.23	164.8	43.9
I <sub>11</sub>	7	500	6	1.80 (4)	0.49	247.48 (4)	48.75	169.0	43.2

(•) grado de libertad con máxima respuesta.

 $d$  en [cm] $\ddot{d}$  en [ $cm/s^2$ ] $u$  en [ $cm/s^2$ ]En los casos I<sub>1</sub> a I<sub>10</sub>  $\hat{n}_r = 0$ . En el caso I<sub>11</sub>  $\hat{n}_r = 2$  y  $n_r = 1$ .

TABLA 4.16

FRECUENCIAS EQUIVALENTES [rad/s] Y FACTORES DE AMORTIGUAMIENTO EQUIVALENTES [%]  
Edificio experimental en Japón. Condiciones de control según tabla 4.15

Caso	$\omega'_1$	$\omega'_2$	$\omega'_3$	$\omega'_4$	$\omega'_5$	$\omega'_6$	$\xi'_1$	$\xi'_2$	$\xi'_3$	$\xi'_4$	$\xi'_5$	$\xi'_6$
I <sub>1</sub>	4.26	11.45	19.20	27.24	37.37	50.06	1.60	2.71	3.56	4.41	7.18	22.64
I <sub>2</sub>	4.80	13.15	22.45	27.16	34.65	48.39	2.67	5.80	9.63	19.56	1.89	15.30
I <sub>3</sub>	5.68	15.92	18.95	26.90	36.95	47.16	3.86	13.52	7.80	4.74	25.29	4.29
I <sub>4</sub>	7.20	13.44	20.89	29.90	33.08	47.81	6.12	8.12	8.01	9.28	29.93	1.40
I <sub>5</sub>	9.61	11.11	21.46	29.84	34.04	47.90	11.75	2.21	5.74	42.31	2.56	1.03
I <sub>6</sub>	7.81	16.39	24.22	25.36	34.60	47.90	3.66	4.62	58.27	2.54	1.12	1.00
I <sub>7</sub>	7.82	16.39	24.24	25.36	34.60	47.90	3.66	4.61	58.36	2.54	1.12	1.00
I <sub>8</sub>	7.74	16.32	22.55	25.42	34.61	47.90	4.11	5.56	50.43	2.79	1.12	1.00
I <sub>9</sub>	7.83	16.13	25.25	26.26	34.62	47.90	2.28	3.78	3.47	31.08	1.15	1.00
I <sub>10</sub>	7.44	16.00	18.87	25.72	34.62	47.90	5.74	11.49	27.61	3.01	1.09	1.00

Una acción de control notablemente eficiente es aplicar la fuerza de control y colocar el sensor en el nivel 6 (caso I<sub>6</sub>), obteniéndose en comparación con los otros casos la menor magnitud de la señal de control (tabla 4.15).

La conclusión global de la comparación entre los casos I<sub>1</sub> a I<sub>6</sub> es que este último parece en general más eficiente. Consecuentemente, los casos de control I<sub>6</sub> a I<sub>10</sub> pretenden seleccionar una condición de control adecuada manteniendo el actuador y el sensor en el piso 6. Se trata fundamentalmente de obtener menores fuerzas de control conservando un nivel de reducción de respuesta satisfactorio.

El caso I<sub>6</sub> se enmarca dentro de los valores recomendados de la tabla 3.4. Sin embargo, el caso I<sub>7</sub> no restringe el valor de  $r/Q_d$  permitiendo que el sistema genere las fuerzas de control que requiera. Bajo estas dos condiciones de control se obtienen prácticamente los mismos resultados tanto en respuesta máxima y señal de control (tabla 4.15) como en frecuencias y amortiguamientos equivalentes (tabla 4.16), es decir, el efecto de  $r/Q_d$  en el caso I<sub>6</sub> es prácticamente inapreciable.

En el caso de control I<sub>8</sub> se selecciona  $\lambda = 7$  según la tabla 3.6 para la relación  $T_{est}/T$  (siendo  $T_{est}$  en este caso el período correspondiente al primer modo) y se toma  $r/Q_d = 100$  según la tabla 3.4. Bajo estas condiciones de control se obtiene mayor reducción de respuesta que en los casos I<sub>6</sub> y I<sub>7</sub> (tabla 4.15) y con fuerzas de control ligeramente menores.

En el caso de control I<sub>9</sub> se toma un valor de  $\lambda$  menor para que la acción de control sea más enérgica. Sin embargo, esta condición esperada no se cumple ya que aunque aumenta el valor de las fuerzas de control no hay una mayor reducción de respuesta que en el caso I<sub>8</sub> (tal como se observa en la tabla 4.15). En la tabla 4.16 se verifica que esta acción de control I<sub>9</sub> no es muy eficaz ya que está actuando principalmente sobre el cuarto modo al modificar sustancialmente su amortiguamiento.

El caso I<sub>10</sub> es muy similar al caso I<sub>8</sub>, se ha buscado un valor mayor de  $r/Q_d$  que esté dentro de los valores recomendados por la tabla 3.4 y que genere una acción de control eficaz con señal de control menor que las producidas en I<sub>8</sub>. En lo referente a señal de control, esta condición logra reducir los valores máximos en alrededor del 15% (tabla 4.15) manteniendo prácticamente los mismos valores de respuesta máxima. En relación a la modificación de frecuencias y amortiguamientos (tabla 4.16), I<sub>10</sub> respecto a I<sub>8</sub> tiene menores frecuencias pero los amortiguamientos para los primeros modos de vibración son notablemente mayores.

El caso de control I<sub>11</sub> considera la presencia de retardos manteniendo las mismas condiciones de control que en I<sub>10</sub>. Se observa que existe un aumento en los valores máximos de respuesta y un leve aumento del valor máximo de la señal de control. Es decir, en definitiva, se observa un ligero deterioro en la eficacia del control.

En resumen, los casos de control I<sub>8</sub> y I<sub>10</sub> (los que más se ajustan a las recomendaciones del capítulo 3) son los que proporcionan mayor rendimiento cuando el sistema se implementa con un solo sensor y un actuador. El caso I<sub>10</sub> parece ofrecer mejores resultados

que el caso I<sub>8</sub>.

Los resultados relativos al segundo grupo de experiencias de control (II<sub>1</sub> a II<sub>6</sub>) se presentan en las tablas 4.17 y 4.18. En estos seis casos, los valores de  $\lambda$  son recomendados en la tabla 3.6 de acuerdo a  $T_i/T$  siendo  $T_i$  el período de los dos primeros modos y los valores de  $r/Q_d$  se seleccionan partiendo de las tablas 3.4 y 3.5 y de los resultados previos de la simulación con un solo actuador (casos I<sub>1</sub> a I<sub>11</sub>). Los objetivos de este grupo de casos de simulación son: i) seleccionar la posición adecuada de los dos actuadores para obtener la mayor reducción de la respuesta con valores moderados de la señal de control y ii) comparar con los casos I<sub>i</sub> para un sensor y un actuador.

En la tabla 4.17 se presentan las condiciones de control y resultados (respuesta y señal de control máximas y medias cuadráticas) al considerar la implementación con dos sensores y dos actuadores. Ya que lo importante es determinar cuál debe ser la colocación de los actuadores para que el control modifique las características de vibración de los modos que tengan más peso en la respuesta total de la estructura, en esta tabla se detalla la colocación de éstos. Al igual que en los casos I<sub>i</sub> y III<sub>i</sub> los sensores están ubicados en el mismo grado de libertad que los actuadores.

En la tabla 4.18 se presentan los resultados del estudio del comportamiento dinámico equivalente de la estructura por acción de control. Este estudio se realiza mediante la metodología presentada en el subapartado 3.3.2. Ya que en el caso II<sub>6</sub> existen retardos no es posible obtener las frecuencias y amortiguamientos equivalentes.

En los casos II<sub>1</sub> a II<sub>4</sub> los valores de  $\lambda$  y  $r/Q_d$  son iguales y sólo se modifica la posición de los dos actuadores. Para el caso II<sub>1</sub> se obtienen los mayores incrementos de frecuencias y amortiguamientos con los valores más altos de señales de control de los cuatro casos. En el caso II<sub>4</sub> la colocación en posiciones extremas (pisos 1 y 6) de los actuadores proporciona el mayor nivel de reducción de respuesta con las menores señales de control, tal como se observa en la tabla 4.14. Las experiencias II<sub>2</sub> (actuadores en los pisos 3 y 5) y II<sub>3</sub> (actuadores en los pisos 2 y 6) son casos intermedios entre los dos anteriores que no proporcionan las mayores frecuencias y amortiguamientos ni el mayor nivel de reducción de respuesta.

En el caso II<sub>5</sub> manteniendo la misma ubicación de los actuadores que en II<sub>4</sub> se busca el valor de  $r/Q_d$  que proporcione el mismo nivel de respuesta que I<sub>10</sub> para poder comparar los casos con uno y dos actuadores. Se ha encontrado que el valor de  $r/Q_d$  que proporciona dicho nivel de reducción de respuesta equivalente es  $r/Q_d = 1000$ .

TABLA 4.17

**CONDICIONES DE CONTROL Y RESULTADOS. Sismo Hachinohe**  
 Edificio experimental en Japón. Dos actuadores y dos sensores  
 $Q_v/Q_d = 0$

Caso	Modo 1 $\lambda r/Q_d$	Modo 2 $\lambda r/Q_d$	gdl de los sensores y actuadores	$d$ max	$\ddot{d}$ med	$u_1$ max med	$u_2$ max med
SC				6.56 (6)	3.00	378.33 (6)	127.04
II <sub>1</sub>	7 500	5 500	3 6	1.66 (5)	0.38	292.6 (6)	51.21
II <sub>2</sub>	7 500	5 500	3 5	2.07 (6)	0.43	236.1 (6)	49.30
II <sub>3</sub>	7 500	5 500	2 6	1.77 (4)	0.39	292.9 (4)	50.15
II <sub>4</sub>	7 500	5 500	1 6	1.57 (4)	0.42	242.1 (6)	44.51
II <sub>5</sub>	7 1000	5 1000	1 6	1.63 (4)	0.44	239.9 (4)	44.91
II <sub>6</sub>	7 1000	5 1000	1 6	1.77 (4)	0.47	238.4 (4)	45.92

(\*) grado de libertad con máxima respuesta.

$d$  en [cm]

$\ddot{d}$  en [ $cm/s^2$ ]

$u_i$  en [ $cm/s^2$ ]

En los casos II<sub>1</sub> a II<sub>5</sub>  $\hat{n}_r = n_r = 0$ . En el caso II<sub>6</sub>  $\hat{n}_r = 2$  y  $n_r = 1$ .

TABLA 4.18

FRECUENCIAS EQUIVALENTES [ $\text{rad/s}$ ] Y FACTORES DE AMORTIGUAMIENTO EQUIVALENTE [%]  
Edificio experimental en Japón . Condiciones de control según tablas 4.17 y 4.19

Caso	$\omega'_1$	$\omega'_2$	$\omega'_3$	$\omega'_4$	$\omega'_5$	$\omega'_6$	$\xi'_1$	$\xi'_2$	$\xi'_3$	$\xi'_4$	$\xi'_5$	$\xi'_6$
II <sub>1</sub>	9.92	16.49	19.52	26.07	35.89	48.05	17.76	16.40	19.73	5.81	8.25	2.59
II <sub>2</sub>	9.29	13.22	20.31	27.63	36.14	48.08	15.91	13.26	6.79	17.60	9.28	2.46
II <sub>3</sub>	8.55	16.12	20.58	26.73	34.67	48.86	11.43	18.38	25.16	5.65	1.47	5.89
II <sub>4</sub>	7.74	15.21	19.84	26.61	35.63	49.31	11.88	8.05	26.25	2.83	4.88	7.79
II <sub>5</sub>	7.32	13.63	19.43	26.34	35.27	48.88	9.37	12.17	15.02	1.96	3.70	5.15
III <sub>1</sub>	11.97	16.24	20.25	27.51	35.41	48.80	28.79	19.28	13.47	9.69	7.86	4.98
III <sub>2</sub>	9.33	13.45	19.90	28.54	37.70	49.02	16.09	14.80	5.34	26.99	3.71	7.17
III <sub>3</sub>	10.16	14.40	19.65	26.88	35.27	48.51	25.18	14.88	7.62	6.44	5.30	3.36
III <sub>4</sub>	7.46	12.47	18.87	26.30	34.95	48.16	16.96	7.68	3.25	3.15	2.68	1.89

TABLA 4.19

**CONDICIONES DE CONTROL Y RESULTADOS. Sismo Hachinohe**  
**Edificio experimental en Japón. Tres actuadores y tres sensores**  
 $Q_s/Q_d = 0$

Caso	Modo 1 $\lambda$	Modo 2 $\lambda$	Modo 3 $\lambda$	gdl de los sensores y actuadores	$d$ max	$\ddot{d}$ med	$u_1$ max med	$u_2$ max med	$u_3$ max med
SC					6.56 (6)	3.00	378.33 (6)	127.04	
III <sub>1</sub>	7 500	5 500	4 500	2 4 6	1.11 (5)	0.22	243.3 (6)	36.07	129.0 26.0
III <sub>2</sub>	7 500	5 500	4 500	1 3 5	1.98 (6)	0.42	226.1 (6)	48.20	252.3 27.3
III <sub>3</sub>	7 1000	6 1000	4 1000	2 4 6	1.25 (5)	0.27	235.1 (6)	38.05	102.7 18.6
III <sub>4</sub>	7 3000	5 3000	4 3000	2 4 6	1.66 (6)	0.36	213.3 (3)	36.50	45.3 8.8
III <sub>5</sub>	7 3000	5 3000	4 3000	2 4 6	1.66 (6)	0.38	214.1 (3)	37.29	46.3 8.7

(\*) grado de libertad con máxima respuesta

$d$  en [cm]

$\ddot{d}$  en [ $cm/s^2$ ]

$u_i$  en [ $cm/s^2$ ]

En los casos III<sub>1</sub> a III<sub>4</sub>  $\hat{n}_r = n_r = 0$ . En el caso III<sub>5</sub>  $\hat{n}_r = 2$  y  $n_r = 1$ .

Comparando los casos  $\Pi_4$  y  $\Pi_5$  se observa que el aumento en la respuesta máxima en el caso  $\Pi_5$  con respecto a  $\Pi_4$  no es tan significativa como la disminución de los valores máximos de señal de control. Por tanto, el caso  $\Pi_5$  es más adecuado por generar menores fuerzas de control, manteniendo un nivel de reducción de respuesta adecuado.

El caso de control  $\Pi_6$  considera la presencia de retardos manteniendo las mismas condiciones de control que el caso  $\Pi_5$ . Tal como se observa en la tabla 4.17, en  $\Pi_6$  se produce un deterioro en la capacidad de reducción de respuesta en comparación con  $\Pi_5$ . No obstante, las señales de control no modifican sustancialmente sus valores máximos y medios cuadráticos.

De entre los casos  $\Pi_i$  el más adecuado es  $\Pi_5$ .

En las tablas 4.18 y 4.19 se muestran datos relativos al tercer grupo de experiencias de control (casos  $\text{III}_1$  a  $\text{III}_5$ ). En éstos se considera la implementación con tres actuadores y tres sensores. Los objetivos de este grupo de experiencias de simulación numérica son: i) seleccionar la posición más adecuada de los tres actuadores y ii) buscar las condiciones de control que conduzcan a un nivel adecuado de reducción de respuesta con señales de control de magnitud moderada (similares a  $I_{10}$  y  $\Pi_5$ ).

En la tabla 4.19 se presentan las condiciones de control para los casos  $\text{III}_i$ . De acuerdo con la formulación descrita en el subapartado 4.5.1 se seleccionan tres conjuntos de valores de  $\lambda$  y  $r/Q_d$  para controlar los tres primeros modos. Los resultados (respuesta y señales de control máximas y medias cuadráticas) corresponden a la excitación del sismo de Hachinohe. El piso en el cual se produce la respuesta máxima también se tabula.

En la tabla 4.18 se presentan las frecuencias y amortiguamientos equivalentes para los casos  $\text{III}_i$  obtenidos mediante la metodología del subapartado 3.3.2.

En los casos  $\text{III}_1$  y  $\text{III}_2$  se imponen para el primer modo las condiciones de control que condujeron a los mejores resultados en los casos  $I_i$  (caso  $I_{10}$ ). Para los modos segundo y tercero se eligen valores de  $\lambda$  y  $r/Q_d$  de acuerdo con las tablas 3.4 y 3.6. La ubicación de los actuadores en estos dos casos es distinta: en  $\text{III}_1$  los actuadores se ubican en los pisos pares y en  $\text{III}_2$  en los pisos impares. La tabla 4.19 muestra que es más eficiente la colocación en los pisos pares. En la tabla 4.18 se aprecia que en el caso  $\text{III}_1$  existe un mayor aumento del amortiguamiento y de las frecuencias para los primeros modos, mientras que en  $\text{III}_2$  el efecto del control se dirige hacia los modos intermedios.

En los casos  $\text{III}_3$  y  $\text{III}_4$  ubicando los actuadores en pisos pares se pretende seleccionar el valor de  $r/Q_d$  con el cual se obtiene un nivel de reducción de respuesta adecuado con fuerzas de control moderadas. Una disminución de respuesta similar a la de los casos  $I_{10}$  y  $\Pi_5$  se obtiene con  $r/Q_d = 3000$  en  $\text{III}_4$ , aunque este valor se aleja de las recomendaciones de la tabla 3.4.

El caso de control  $\text{III}_5$  utiliza las mismas condiciones de control que el caso  $\text{III}_4$  con la diferencia de que en éste se considera la presencia de retardos. Los resultados del control

TABLA 4.20

**RESUMEN DE RESULTADOS. VALORES MAXIMOS**  
Edificio experimental en Japón

	Sismo Hachinohe				Sismo Miyagioki				Sismo El Centro			
	SC	I <sub>10</sub>	II <sub>5</sub>	III <sub>4</sub>	SC	I <sub>10</sub>	II <sub>5</sub>	III <sub>4</sub>	SC	I <sub>10</sub>	II <sub>5</sub>	III <sub>4</sub>
$d_1$	1.07	0.46	0.25	0.34	0.32	0.27	0.12	0.13	1.03	0.95	0.48	0.48
$d_2$	2.77	0.86	0.71	0.66	0.80	0.56	0.42	0.30	2.61	2.47	1.56	1.13
$d_3$	4.17	1.40	1.26	1.02	1.09	0.78	0.70	0.41	3.98	3.79	2.64	1.67
$d_4$	4.84	1.61	1.63	1.15	1.24	0.97	0.94	0.59	4.82	4.37	3.27	1.86
$d_5$	5.00	1.35	1.61	1.54	1.35	0.82	0.87	0.69	5.45	3.67	3.28	2.34
$d_6$	6.56	0.62	0.91	1.66	1.79	0.41	0.56	0.62	7.36	1.65	1.85	2.68
$u_1$		164.83	128.72	45.29		105.37	71.40	19.07		398.11	239.90	62.63
$u_2$			151.27	115.06			88.33	47.23			278.87	183.09
$u_3$				116.18				44.17				186.15

 $d_i$  en [cm] $u_i$  en [ $cm/s^2$ ]

(tabla 4.19) muestran que prácticamente no existe deterioro de la eficacia de la acción de control.

Del grupo de experiencias III<sub>i</sub> se considera al caso III<sub>4</sub> como el más adecuado.

En la tabla 4.20 se presenta el resumen de resultados para los casos seleccionados de cada grupo I<sub>i</sub> (I<sub>10</sub>), II<sub>i</sub> (II<sub>5</sub>) y III<sub>i</sub> (III<sub>4</sub>) cuando la estructura se somete a la acción de los sismos Hachinohe, Miyagioki y El Centro.

Los casos I<sub>10</sub>, II<sub>5</sub> y III<sub>4</sub> han sido elegidos para lograr un nivel similar de reducción de la respuesta para el sismo de Hachinohe, siendo menor la fuerza de control conforme aumenta el número de actuadores y de sensores. Los resultados para los sismos de Miyagioki y El Centro confirman dichas circunstancias aunque se observa en general una mayor reducción en los casos II<sub>5</sub> y III<sub>4</sub>. Los desplazamientos máximos representados en la tabla 4.20 muestran que los desplazamientos relativos entre pisos adyacentes son menores conforme crece el número de actuadores; ello es un índice de mejor calidad de control (López Almansa, 1988).

En definitiva, estos ejemplos de simulación numérica ilustran que las recomendaciones de eficiencia dadas en el capítulo 3 basados en el estudio de sistemas de un grado de libertad parecen ser extensibles a sistemas con varios grados de libertad (Andrade 1992, López Almansa et al. 1994).

#### 4.6 CONCLUSIONES

La conclusión general de este capítulo y del trabajo en general es que las recomendaciones de eficiencia dadas en el capítulo 3 basadas en el estudio de sistemas de un grado de libertad parecen ser extensibles a sistemas con varios grados de libertad. Las conclusiones específicas de los apartados 4.3, 4.4 y 4.5 se presentan a continuación.

*Apartado 4.3.* En la implementación con igual número de sensores y actuadores que de grados de libertad, las fuerzas de control generadas con los valores de  $\lambda$  y  $r/Q_d$  recomendados en las tablas 3.4, 3.5 y 3.6 proporcionan acciones de control de buena calidad. El estudio de la estabilidad y de la eficacia del control puede ser desarrollado modo a modo de forma independiente analizando cómo los valores de los parámetros de control influyen en las frecuencias y amortiguamientos equivalentes.

*Apartado 4.4.* Para el caso de implementación con menor número de actuadores que de grados de libertad, utilizando los valores de  $\lambda$  y  $r/Q_d$  recomendados en el capítulo 3 se obtienen los mejores resultados de control. Es necesario realizar el estudio de estabilidad y eficacia en coordenadas generales. Es importante estudiar la localización de los actuadores, ya que de ésta depende cuáles son los modos que modifican sus frecuencias y amortiguamientos.

*Apartado 4.5.* En sistemas con un número reducido de sensores y actuadores los criterios de selección de  $\lambda$  y  $r/Q_d$  de el capítulo 3 generan buenas condiciones de control.

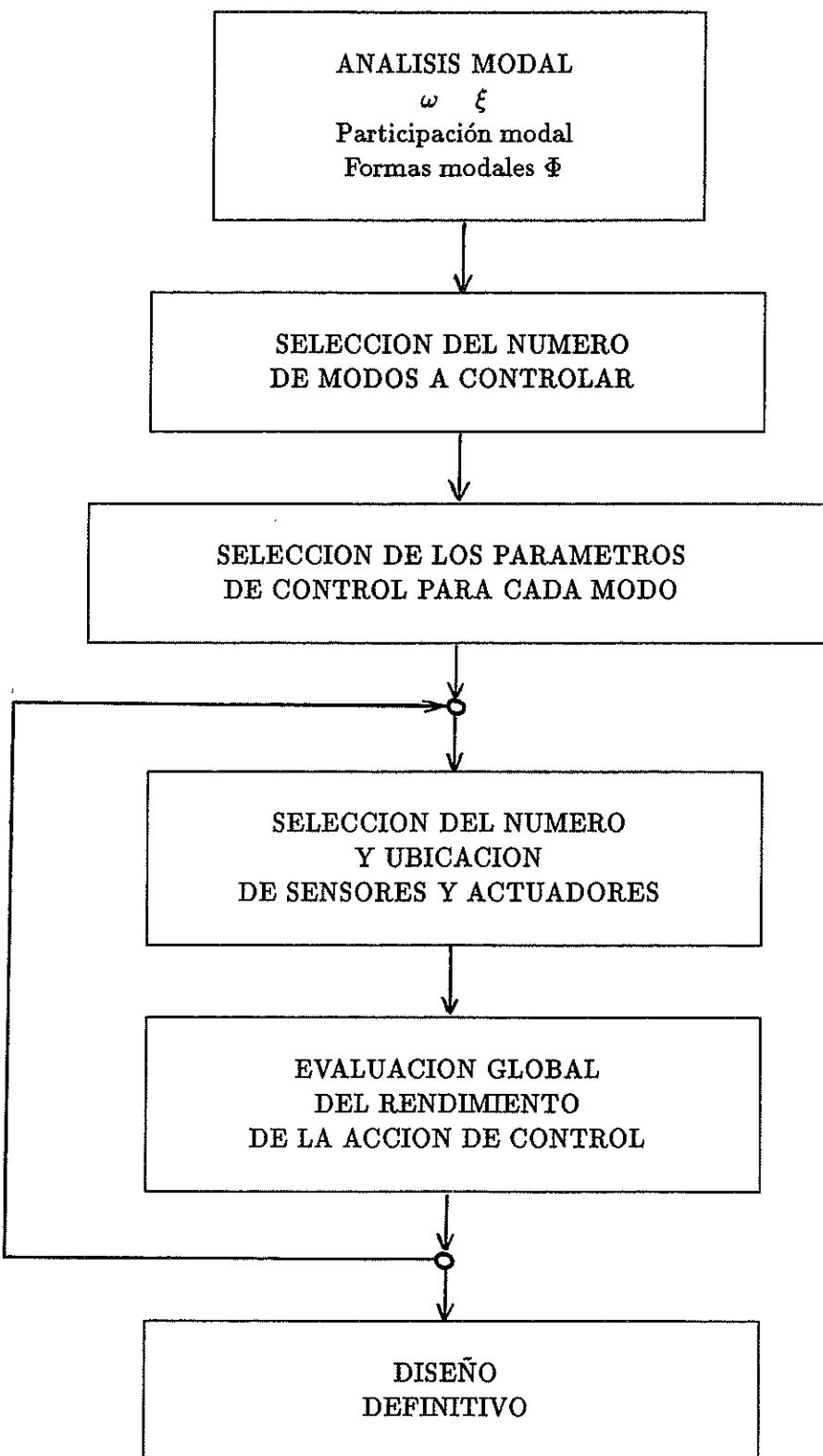


Figura 4.14 Diagrama de flujo de la metodología para la implementación del control predictivo en sistemas de protección sísmica de estructuras con número reducido de sensores y actuadores.

El estudio de estabilidad y eficacia puede hacerse en coordenadas generales o modales (en ausencia de retardos). En general, es conveniente la colocación de los sensores en los mismos grados de libertad que de los actuadores. De manera general la implementación con un menor número de sensores no produce un deterioro considerable de la eficacia del sistema de control con respecto a los sistemas considerados en el apartado 4.4. Es más adecuado implementar el control con un número de actuadores igual al número de modos que tienen peso significativo en la respuesta.

En la figura 4.14 se ilustra el diagrama de flujo de la metodología presentada por Andrade (1992) que permite la implementación del control predictivo en sistemas de protección sísmica con número reducido de sensores y actuadores que grados de libertad.

#### REFERENCIAS

- Andrade R.A.** (1992), Metodología para la implementación de sistemas de control predictivo de estructuras, *Tesis Doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya*.
- Balas M.J.** (1978). Active Control of Flexible Systems, *Journal of Optimization, Theory and Applications*, Vol.25, No.3, pp.415-436.
- Kelly J.M., Leitmann G. y Soldatos A.G.** (1987), Robust Control of Base-isolated Structures under Earthquake Excitation, *Journal of Optimization, Theory and Applications*, Vol.53, No.2, pp.159-180.
- Kelly J.M.** (1990), Base Isolation: Linear Theory and Desing, *Earthquake Spectra*, Vol.6, pp.223-244.
- López Almansa F.** (1988), Contribución al desarrollo de sistemas de control de estructuras de edificación mediante cables activos, *Tesis Doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya*.
- López Almansa F., Andrade R.A., Rodellar J. y Reinhorn A.M.** (1991), Modal Predictive Control of Structures, *Proceedings of the Eight VPI&SU Symposium on Dinamics and Control of Large Structures.*, Meirovitch editor.
- López Almansa F., Andrade R.A., Rodellar J. y Reinhorn A.M.** (1994), Modal Predictive Control of Structures, part II: Implementation, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, en prensa.
- Meirovitch L.** (1990), *Dynamics and Control of Structures*, Wiley Interscience, New York.
- Takenaka Technical Research Laboratory**, (1990), Identification Result of Earthquake Observation Frame.
- Wang Y.P.** (1991). A study of active tendon system. Experiment and design, *Ph.D. Tesis, State University of New York at Buffalo*.

