

Condiciones absorbentes locales para la ecuación de Berkhoff sobre una frontera de forma general

Ruperto P. Bonet Chaple

Departamento de física Aplicada
Universidad Politécnica de Cataluña, Jordi Girona 1-3
Campus Nord-UPC, Edificio B4-B
08034 Barcelona, España
Tel.: 34-93-401 0989; Fax: 34-93-401 6090
e-mail: ruperto.bonet@fa.upc.es, www-fa.upc.es

Resumen

El propósito de este artículo es reflejar el desarrollo de las condiciones absorbentes locales en la resolución de modelos elípticos de propagación del oleaje monocromático. Las aproximaciones usuales derivadas para tales ecuaciones son revisadas y discutidas. Nuevas condiciones absorbentes sobre dominios circulares y sus generalizaciones a dominios no circulares son presentadas. Estas condiciones absorbentes permiten la solución aproximada de la ecuación de Berkhoff en un dominio infinito usando el método tradicional de los elementos finitos sobre dominios no circulares. La precisión de estas condiciones son investigadas para fronteras elípticas y circulares.

LOCAL ABSORBING BOUNDARY CONDITIONS OF BERKHOFF EQUATION WITH GENERAL BOUNDARY SHAPE

Summary

The purpose of this paper is to provide a summary of the development of local absorbing boundary conditions for monochromatic water wave propagation in elliptic models. The assumptions and approximations involved in these expressions will be reviewed and discussed. New absorbing boundary conditions on circular boundaries and its generalizations to non-circular domain will be presented. These boundary conditions allow the approximate solution of the Berkhoff's equation in an infinite domain using traditional finite element method on non-circular domains. The accuracy of these boundary conditions are investigated for elliptical and circular boundaries.

INTRODUCCIÓN

En la ingeniería oceánica y costera la dispersión/evolución de ondas sobre estructuras fijas o flotantes es un factor clave para su diseño. Estas presentan múltiples escalas en lo que se refiere a longitudes de ondas y celeridades. También los obstáculos pueden ser pequeños o grandes comparados con la longitud de onda; y poseer una geometría simple o extremadamente compleja. Por estos motivos, un amplio rango de interacciones entre estructuras y ondas han sido investigadas, necesariamente dando lugar a varios modelos de interacción básicos, los cuales en general representan alguna simplificación de las ecuaciones. Si el espectro de ondas incidente es conocido, una aproximación corriente a la carga ondulatoria de las estructuras asume que los efectos de arrastre viscosos y los efectos inerciales pueden ser superpuestos. Los efectos inerciales de la carga ondulatoria dominan los efectos viscosos cuando el tamaño relativo de la estructura es mayor que una longitud de

onda. Para una gran clase de problemas los efectos viscosos e inerciales pueden considerarse despreciables y el fluido puede ser considerado ideal. Una representación potencial del campo de velocidades en el fluido con una condición linealizada de la superficie libre, origina un modelo bidimensional que tiene que ser resuelto en un dominio que se supone infinito. Para estas ecuaciones linealizadas existen muchos resultados analíticos; sin embargo, la simulación numérica usando tales modelos es un problema difícil, aun en dos dimensiones, involucrando algoritmos complejos y que consumen mucho tiempo de cómputo. En general, el dominio se extenderá al infinito en direcciones horizontales. En este caso se requiere una condición de radiación en el infinito para garantizar el buen planteamiento matemático del problema de contorno no acotado. Esta condición establece que la solución corresponde a ondas salientes solamente y es conocida como condición de radiación de Sommerfeld^{22,67,65}.

La radiación de ondas al infinito representa una constante pérdida de energía y un modelo matemático del sistema físico tiene que ser capaz de describirlo. Por razones computacionales, sin embargo, es necesario reducir el dominio computacional a un mínimo, y, por tanto, el dominio del fluido será truncado a alguna distancia del área de interés por las fronteras artificiales. Para obtener un problema acotado bien planteado son necesarias condiciones de frontera también sobre las fronteras artificiales. También, dado que estas fronteras son artificiales, es importante disponer de una condición de frontera que simule el comportamiento de la parte excluida del dominio del fluido. Para el problema de la propagación de ondas superficiales este último requerimiento significa que las olas superficiales al aproximarse a una frontera artificial sean totalmente transmitidas (“absorbidas”) en la frontera. Esto significa que la frontera tiene que ser transparente y, por lo tanto, las ondas salientes no se reflejan en dicha frontera.

En la literatura han sido propuestos diversos métodos para absorber olas superficiales y algunos de éstos son revisados en la referencia 23. Daremos en lo que sigue una breve descripción de cada uno de estos métodos.

El empleo de condiciones de frontera periódicas ha sido favorecido en la mayoría de los modelos no lineales bidimensionales. La solución se supone periódica en el espacio. En el caso de dominios rectangulares bidimensionales, los valores de las incógnitas sobre una de las fronteras laterales pueden ser tomadas igual a aquéllas sobre las otras fronteras laterales del dominio. Este procedimiento es de fácil implementación, y las fronteras artificiales pueden ser seleccionadas a muy corta distancia del dominio de interés⁶³, sin embargo, su uso es limitado debido al requerimiento de la periodicidad.

La cuestión relativa a una condición de frontera más general no reflejante, eficiente y precisa para su uso en la solución numérica de problemas exteriores para modelos onduláticos, ha sido desarrollada desde principios de los años 1970 y ha recibido mucha atención en los últimos años. La necesidad de una tal condición de frontera aparece en muchos campos de aplicación de la ingeniería oceánica, incluyendo la acústica subacuática, la geofísica, etc.

Es bien conocido que las condiciones de frontera artificiales simplificadas producen reflexiones “espurias” de las ondas desde la frontera hacia el interior del dominio computacional, con lo que se originan grandes errores en la solución computada²⁷. La efectividad de la mayoría de estas condiciones mejora cuando la frontera artificial es alejada del dispersor hacia el infinito. En efecto, para resolver numéricamente un problema exterior ondulátorio dependiente del tiempo. Uno puede simplemente tomar la frontera tan lejos que las ondas no alcancen esta frontera en todos los intervalos de tiempo en el cual la solución es buscada. Sin embargo esta aproximación es altamente ineficiente debido al aumento del

coste computacional. Por tanto, la tendencia en los últimos años ha sido el empleo sobre la frontera artificial de una condición de frontera absorbente que sea suficientemente precisa cuando la frontera está localizada próxima al dispersor. La evolución de las condiciones absorbentes para la ecuación de onda en el caso transitorio y/o armónico en el tiempo, tuvo sus inicios en los trabajos de Engquist y Majda^{20,21} para ecuaciones hiperbólicas mediante el uso y representación de ecuaciones diferenciales parciales como condiciones de frontera absorbente. Ellos derivaron una secuencia de condiciones de frontera absorbente de orden creciente usando aproximaciones racionales (tipo Padé) del símbolo del operador seudo-diferencial obtenido sobre la frontera. De esta manera desarrollaron un método sistemático para obtener condiciones de frontera locales en la frontera artificial del dominio computacional.

Estas condiciones garantizan aproximaciones en diferencias estables y también minimizan las reflexiones artificiales (no físicas) que ocurren en la frontera. Tales condiciones son más efectivas para ondas que inciden normalmente sobre una frontera artificial plana. Estas ideas han sido desarrolladas posteriormente por muchos autores, como Wagatha y Higdon³¹, los cuales presentaron una extensión del método que les permite absorber ondas desde diferentes direcciones.

En el marco de la ingeniería oceánica y costera tales aproximaciones para ondas armónicas en el tiempo, fueron obtenidas mediante aproximaciones parabólicas de la ecuación “mild-slope”. La aproximación parabólica puede ser vista como una modificación de la teoría de rayos, la cual incluye los efectos de difracción¹³. La ventaja de la eficiencia numérica en la teoría de rayos es preservada en la aproximación parabólica. Varias aproximaciones de este tipo han sido derivadas por Radder⁶², Booij¹³, Kirby *et al.*^{42,41}, etc. Tales aproximaciones parabólicas tienen como limitaciones que las olas tienen que propagarse en una dirección dominante y la reflexión puede sólo ser incluida a través de un esquema iterativo debido a la dependencia del ángulo que forma la dirección de propagación del oleaje y la normal exterior al contorno. Durán⁵⁷ desarrolla una condición absorbente de primer orden mediante un esquema iterativo que depende del ángulo de incidencia al contorno.

Otra posibilidad de absorción de olas en una frontera artificial es el uso de soluciones simples del campo exterior. En el campo exterior las fronteras y las condiciones de frontera son simplificadas de tal forma que las soluciones analíticas puedan ser encontradas en forma cerrada, usualmente expresadas como expansiones de funciones propias. En la frontera artificial la solución analítica es entonces acoplada a la solución del dominio computacional. Estudios teóricos respecto a las propiedades de convergencia de este procedimiento han sido desarrollados en la referencia 47. Un ejemplo de esta técnica es el llamado método de ecuación integral híbrido, descrito por Lin y Abbaspoor⁶³ y aplicado para la difracción de ondas por un cilindro infinito. Estos autores resuelven el problema potencial en el problema interior con un método de ecuación integral y usan una solución analítica para el dominio exterior que satisface la condición linealizada de superficie libre y la condición de radiación de Sommerfeld en el infinito.

Berkhoff⁵ desarrolló una solución con potenciales de simple y doble capa para el problema de dispersión de una onda incidente debido a la presencia de obstáculos y de una profundidad variable en una región de interés. Tal método utiliza como función de la fuente la solución analítica exacta del problema exterior de Helmholtz en el dominio exterior. En la aplicación del método realizó una distribución de fuentes ondulatorias sobre la superficie de los obstáculos y el fondo variable. Dicho modelo expresa poco conocimiento de los

coeficientes de reflexión para ondas incidentes oblicuamente, y origina valores no reales para las alturas de las olas cercanas a las frecuencias resonantes en problemas de resonancia de puertos, debido a la imposibilidad del modelo matemático de describir la pérdida de energía en la solución computacional del dominio. En la aplicación del modelo a la descripción de la difracción de olas alrededor de una isla circular totalmente reflejante los patrones ondulatorios resultantes son muy sensibles a la interferencia de las ondas reflejadas.

Las soluciones numéricas a la ecuación de onda en dominios exteriores fueron buscadas originariamente sobre la base de la representación integral del problema asociado a la ecuación de ondas en el espacio de frecuencias, o sea mediante la ecuación de Helmholtz, relajando las cantidades sobre la frontera física del problema. Tales formulaciones son obtenidas mediante soluciones fundamentales como funciones de peso y empleo del teorema de Green (procedimiento que típicamente es válido en la resolución de problemas lineales, homogéneos e isótropos). Estas ecuaciones originan métodos de elemento de frontera directos e indirectos con el beneficio de la satisfacción de la condición de radiación en el infinito y la ventaja de seleccionar soluciones sobre un dominio, que es de una dimensión menor que la forma original del problema. Por otra parte, en este tipo de métodos se pueden encontrar dificultades tales como la no unicidad de la solución de las ecuaciones integrales de fronteras continuas en los números de onda característicos correspondientes pero físicamente no relacionados a problemas interiores. Ésta, en general no es una propiedad de las soluciones exactas del problema de valores-frontera y puede originar el mal condicionamiento de las ecuaciones discretas.

Los esfuerzos para resolver tal problemática han sido desarrollados mediante el método CHIEF de Schenck⁶⁴, en el que la formulación integral es modificada por ecuaciones adicionales que imponen que las soluciones se anulen en ciertos puntos del interior del dominio. En 1994 P. Juhl³⁸ mostró que el rango deficiente de la matriz de coeficientes BEM puede ser mayor que 1, cuando dos frecuencias características están cerca de la frecuencia de interés, y obtuvo una relación entre el número de puntos “buenos” CHIEF y la frecuencia de interés. Otros esfuerzos en resolver el problema de la no unicidad fueron realizados por Fang Q. Hu³⁴. Se basan en la implementación de un método espectral para remover singularidades y extraer la no suavidad del núcleo. Las formulaciones basadas en integrales de contorno están limitadas a un número de onda constante y dependen asimismo de la solución fundamental del operador en cuestión. Tales formulaciones son muy ventajosas, en particular para problemas con geometrías suaves, debido a que permiten reducir el coste computacional y, en particular, para problemas con geometrías suaves.

Otras soluciones acoplan elementos finitos con las soluciones analíticas exteriores mediante soluciones en series. Tales procedimientos han sido propuestos por Zienkiewicz *et al.*⁷⁶, Chen y Mei¹⁵, etc.

En las técnicas anteriormente mencionadas se usan expresiones explícitas de las soluciones del dominio exterior acopladas en la frontera artificial. Bayliss, Gunzburger y Turkel⁴ obtuvieron otra sucesión de condiciones de frontera absorbentes basadas en la solución asintótica de la ecuación de onda en grandes distancias. De esta manera derivaron un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales que pueden ser impuestas a una distancia finita sobre una frontera artificial. Los operadores eliminan los primeros m términos de la expansión y, por tanto, sustituyen de manera implícita estas expresiones explícitas. Los operadores de orden inferior de este conjunto de condiciones de radiación representan las condiciones de radiación aproximadas más usadas en el cálculo numérico. Las condiciones

de primer orden fueron obtenidas por Engquist y Majda^{20,21}. Estas condiciones han sido usadas en un esquema de elementos finitos por Bayliss⁴, Pinsky y Abboud^{61,2}. Higdon³¹ derivó una familia de condiciones de frontera locales que absorben todas las ondas con ángulos de incidencia específico. Condiciones de fronteras análogas en coordenadas circunferenciales han sido derivadas por Kriegsmann^{45,46} para ondas acústicas y por Bin Xi Yu y Panchang⁷ para ondas en el mar. Tales condiciones son parcialmente reflejantes, sobre todo en presencia de bajas reflexiones en los contornos interiores, y dependientes de la distancia al contorno en el campo cercano. Douglas Meade *et al.*^{49,52–54} han evaluado la relativa precisión de las condiciones absorbentes locales basadas en las condiciones de radiación de Bayliss y Turkel (*BT*).

Otra estrategia para la simulación de un campo exterior infinito a una distancia finita del dominio computacional es el uso de un amortiguamiento artificial, en particular en forma de una capa de esponja. En este método un término disipativo artificial es añadido (implícitamente o explícitamente) a las ecuaciones modelo cerca de las fronteras artificiales del dominio truncado, tales que las ondas salientes sean absorbidas con cierta reflexión. Este método ha sido empleado por Kosloff en la solución de la ecuación de Shrodinger⁴⁴. Un avance en este sentido fue desarrollado por Israeli y Orszag³⁵ mediante el uso de ciertas capas de esponjas en combinación con ecuaciones diferenciales parciales de primer orden. Una extensión de este método al campo de la ingeniería oceánica, en la cual son encontradas y caracterizadas las propiedades reflectivas de ciertas funciones esponjas para ángulos de incidencia, inclusive superiores a 70 grados, ha sido desarrollada por el autor¹⁰. Dicho método es de fácil implementación y posee buenas propiedades de reflexión para un amplio rango de frecuencias, pero la necesidad de ampliar el dominio computacional debido a la capa de esponja incrementa el coste computacional. Recientemente, F. Collino y P. Monk^{17,18} desarrollaron una capa de esponja de forma especial para las ecuaciones de Maxwell, básicamente mediante un cambio de variables de la capa de esponja de Bérenger. En este procedimiento el término disipativo es incluido en la variable independiente. Tal capa de esponja es optimizada en coordenadas rectangulares y extendida a coordenadas polares mediante una transformación de coordenadas. El proceso de optimización se realiza fijando el número de puntos de discretización de la capa en una longitud de onda, mediante el cual la resolución de la malla es variada para minimizar las reflexiones en el contorno interior. Este procedimiento controla las reflexiones emanadas de la capa de esponja sin un alto incremento del coste computacional.

En algunos problemas prácticos es conveniente, a veces usar el método de dominios ficticios a pesar del aumento del coste computacional. Florencio Millot y F. Collino⁵⁵ emplean este método para resolver un problema acústico no estacionario. Tal método consiste en expandir el dominio computacional (utilizando una malla uniforme en el exterior del dominio) e introducir una nueva variable definida sólo en la frontera del mismo.

Otra manera de extender el dominio computacional al infinito es el uso de elementos infinitos para resolver el problema exterior asociado a la ecuación de Helmholtz bidimensional. Experimentos numéricos en esta dirección han sido desarrollados por P. Bettess⁶ y Zienkiewicz⁷⁷. En la implementación computacional han seleccionado funciones de forma que satisfacen la ecuación de Laplace en el campo lejano y cuya solución se obtiene mediante la superposición de potencias de estas funciones. Para una precisión dada se reduce el procedimiento a la determinación de los parámetros que intervienen. En comparación con los métodos de integrales de frontera y las soluciones a series acopladas con elementos

finitos, estos métodos son más simples teóricamente y generan un tipo de elemento ligeramente diferente. Este método no destruye la simetría de las ecuaciones, o su estructura de banda, y ofrecen la posibilidad de tratar con ondas no lineales. No obstante, la obtención de la solución de un problema exterior inherente a una ecuación diferente de la ecuación de Laplace obliga al aumento del número de parámetros y, por lo tanto, al aumento del número de ecuaciones a resolver.

Avances recientes en el empleo de elementos infinitos han sido alcanzados mediante el uso de funciones de forma elipsoidales¹⁴ y el relajamiento de la condición de continuidad entre los elementos finitos e infinitos, así como el uso de funciones de forma de orden superior²⁹. Tales herramientas han sido extendidas a la solución de problemas exteriores armónicos según el tiempo para ondas acústicas en un medio 3D. Con estas nuevas tendencias se reduce considerablemente el coste computacional; no obstante, el carácter local del método, el uso de funciones de forma en un sistema de coordenadas predeterminado y la caracterización del comportamiento en el infinito por dicho elemento conservan la esencia de los elementos infinitos y con ello su carácter no perfectamente absorbente.

Una fuerte tendencia en el desarrollo de condiciones de radiación para problemas de ondas en dominios no acotados ha sido el desarrollo de un nuevo tipo de condiciones de frontera exacta en una frontera artificial para problemas cuyas propiedades son constantes en el infinito (o sea, las ecuaciones que las describen tienen coeficientes con límite finito en el infinito). Basado en el método de perturbación, Hagstrom²⁸ obtuvo una condición de frontera exacta para una amplia clase de problemas con esas características.

Una condición de frontera exacta y no local en el espacio, para la ecuación de onda armónica y/o dependiente del tiempo, ha sido derivada por Givoli y Keller²⁴ mediante el método DtN (método Dirichlet a Neumann). El método DtN constituye hoy en día la herramienta por excelencia en el medio continuo para la imposición de la condición de frontera de radiación en la solución de un problema de propagación de ondas en un medio no acotado. Sin embargo, se presentan ciertas limitaciones en la resolución de problemas concretos. La implementación de tales condiciones de frontera de radiación destruye el patrón de banda de la matriz de elementos finitos, aumenta ligeramente el coste computacional por almacenamiento y depende esencialmente de las soluciones fundamentales particulares del operador de onda 2D o 3D en cuestión, lo cual impone su generalización a otros operadores y su uso en forma automática.

Por su simplicidad y fácil implementación en un código de elementos finitos el desarrollo de metodologías que permitan derivar condiciones absorbentes locales más precisas sigue constituyendo un reto en el campo de la ingeniería oceánica.

En este trabajo son derivadas condiciones absorbentes locales de segundo orden sobre fronteras circulares y extendidas a dominios no circulares mediante la transformación de Jin³⁶. Tales condiciones de frontera representan aproximaciones parabólicas de la ecuación de Berkhoff en las geometrías respectivas. Empleando una aproximación asintótica de la función de Hankel hasta el orden dos son obtenidas nuevas condiciones absorbentes locales sobre fronteras circulares. La influencia de los términos de orden superior en dicha aproximación es también discutida. Las nuevas condiciones obtenidas comprobadas comparándolas con contra soluciones analíticas y soluciones obtenidas con otras condiciones absorbentes locales ya existentes.

El orden del trabajo es como sigue: En la próxima sección se presenta el problema de contorno para la ecuación de Berkhoff sobre un dominio no acotado. En la sección siguiente

se presenta una revisión de las condiciones de radiación locales sobre geometrías planas y circulares. En la tercera sección son desarrolladas ecuaciones parabólicas apropiadas para el uso con modelos elípticos de propagación del oleaje y las extensiones correspondientes a dominios no circulares. En la cuarta sección mediante la formulación usual por elementos finitos se realiza la verificación del modelo numérico en problemas de propagación del oleaje con soluciones analíticas y/o la comparación con otras soluciones existentes. Finalmente, algunas consideraciones concluyentes expuestas.

UN PROBLEMA DE CONTORNO PARA LA ECUACIÓN “MILD-SLOPE” SOBRE DOMINIOS NO ACOTADOS

En esta sección se formulan dos importantes problemas de valores-frontera para la ecuación de Berkhoff en dominios no acotados. Consisten en un problema de banda semi-infinita y un problema exterior. Un problema en una banda semi-infinita aparece en la propagación de olas en canales y un problema exterior está asociado con el espacio infinito exterior a un obstáculo o a un dispersor (tales como islas, rompeolas, etc.).

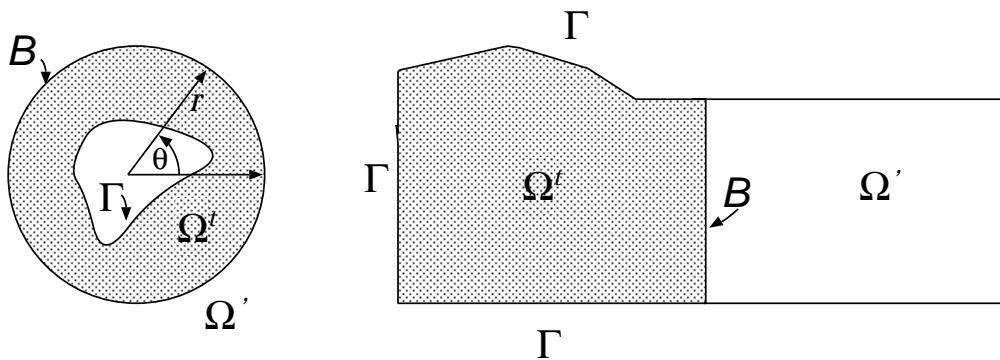


Figura 1. Un modelo de dominio no acotado para problemas de radiación y dispersión

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ una región no acotada del plano. Supongamos que la frontera de Ω , designada por Γ , es suave a trozos (Figura 1). El vector normal unitario exterior a Γ es designado por $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$. Asumimos que Γ admite la partición

$$\Gamma = \overline{\Gamma_g \cup \Gamma_h} \quad (1)$$

$$\emptyset = \Gamma_g \cap \Gamma_h \quad (2)$$

Deseamos estudiar la dispersión de ondas en una región con el empleo de la ecuación de Berkhoff. Sea \mathbf{B} una curva suave sobre la región Ω , introducida artificialmente para truncar este dominio, de tal manera que en la región no acotada (designada por Ω') el número de onda $k = \frac{\omega}{C}$ sea constante y tome el valor k_0 . Designemos por Ω^t la parte acotada de Ω , limitada por \mathbf{B} . El problema de valores-frontera para la ecuación “mild-slope” en un dominio no acotado se formula como sigue. Se trata de encontrar $\phi: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$, el potencial

de velocidades sobre el plano horizontal, tal que

$$L\phi = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (3)$$

$$\phi = g \quad \text{sobre } \Gamma_g \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = ik\tilde{h} \quad \text{sobre } \Gamma_h \quad (5)$$

$$+ \text{alguna condición de radiación} \quad \text{en el infinito} \quad (6)$$

donde $L\phi := \nabla(CC_g \nabla \phi) + k^2 CC_g \phi$ es el operador de Berkhoff, que en la región Ω' se reduce al operador de Helmholtz; $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \nabla \phi \cdot \mathbf{n}$ es la derivada normal y ∇ es el operador gradiente, $g : \Gamma_g \rightarrow \mathbb{C}$ y $\tilde{h} : \Gamma_h \rightarrow \mathbb{C}$ son los datos prescritos. Para el caso en que Ω sea una banda semi-infinita, tomamos $\tilde{h} = 0$. La condición de frontera de Neumann (5) representa un campo de velocidades prescrito sobre una porción de la frontera Γ , donde \tilde{h} es proporcional a la velocidad y la presencia del factor ik es una consecuencia de la diferenciación respecto al tiempo. Las condiciones de frontera de Neumann son, por tanto, muy comunes en situaciones físicas que indican radiación. Una condición de radiación al infinito para problemas bidimensionales definidos en todo el espacio infinito (o para problemas exteriores) adopta la forma

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{kr} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - ik\phi \right) = 0 \quad (7)$$

donde r es la distancia desde el origen. La ecuación (7) es la condición de radiación de Sommerfeld⁶⁵, la cual describe sólo aquellas soluciones con ondas salientes al infinito. Esta condición de frontera implica una forma integral, la condición de radiación Rellich-Sommerfeld³⁰

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{B}} \left| \frac{\partial \phi}{\partial r} - ik\phi \right|^2 d\Gamma = 0 \quad (8)$$

La condición de radiación (8) refleja que el flujo de energía en el infinito es positivo. Tal condición garantiza que el problema de frontera (3) - (7) tiene solución única y es un problema bien planteado. Una representación apropiada de esta condición es crucial para la precisión de alguna formulación numérica del problema. En la referencia 67 se hizo notar que para regiones no acotadas, que no coinciden con todo el espacio, las condiciones en el infinito pueden tener una forma distinta de las condiciones de Sommerfeld.

Una exitosa reformulación del problema no acotado (3) - (6) en un problema sobre un dominio acotado depende de la selección de una frontera artificial adecuada \mathbf{B} y un operador $\tilde{\mathcal{B}}$ sobre la frontera que sustituya la condición de radiación en el infinito. Tal condición de frontera debe tener la propiedad de dejar pasar las ondas salientes (que arriban a \mathbf{B}) a través de la frontera artificial \mathbf{B} sin generar reflexiones espurias hacia el interior del dominio truncado Ω^t .

El problema no acotado (3) - (6) reformulado sobre el dominio acotado Ω^t aparece ahora en la forma

$$\begin{aligned} \nabla(CC_g \nabla \phi) + k^2 CC_g \phi &= 0 & \text{en} & \Omega^t \\ \phi &= g & \text{sobre} & \Gamma_g \\ \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} &= ik\tilde{h} & \text{sobre} & \Gamma_h \\ \tilde{\mathcal{B}}\phi &= 0 & \text{sobre} & \mathcal{B} \end{aligned} \quad (9)$$

donde $\tilde{\mathcal{B}}$ es el operador sobre la frontera de radiación. Los trabajos de Givoli²³, Moore *et al.*⁵⁶ proveen un buen resumen de los diversos procedimientos empleados en la reformulación aproximada del problema (3)- (5) sobre un dominio acotado Ω^t . Existe una condición de frontera exacta con esta propiedad

$$\tilde{\mathcal{B}}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial n} - M \phi = 0 \quad (11)$$

donde M es un operador no local en el espacio. A. Majda y S. Osher⁵¹, L. Nirenberg⁵⁸ y M.E. Taylor⁶⁶ desarrollaron condiciones de frontera perfectamente absorbentes para clases generales de ecuaciones de ondas aplicando la teoría de reflexiones de singularidades para la solución de ecuaciones diferenciales²¹. Desafortunadamente, estas condiciones de frontera no son útiles para cálculos prácticos.

Recientemente, Givoli y Keller^{24,25,26} derivaron una condición de este tipo, donde M es la aplicación de Dirichlet a Neumann (DtN). Esta condición de frontera es fácilmente implementada en un método de elementos finitos. Sin embargo, debido a que el operador de frontera M es no local en el espacio, la matriz del sistema de ecuaciones resultante no es una matriz “banda”, lo cual redonda en un esfuerzo computacional extra para ensamblar y resolver el sistema de ecuaciones. Estos aspectos son detractores del uso de esta condición de frontera.

Por ahora, restringimos nuestra atención a condiciones de frontera locales (espacialmente) de diversos órdenes, las cuales aproximan a las condiciones de frontera teóricas no locales, desarrolladas por Engquist y Majda en la referencia 20. Tales condiciones de frontera locales, obtenidas mediante la parabolización de un operador elíptico (Radder⁶², Booij¹³, Kirby^{41,43} y Bing Yi Xu *et al.*⁷), son aproximadas y tienen un carácter parabólico. El orden de la condición de frontera de radiación (RBC) está relacionado con el número de términos de la expansión apropiada y la precisión asintótica de las soluciones aproximadas obtenidas.

CONDICIONES DE RADIACIÓN LOCALES

En esta sección se desarrolla una estrategia en la solución de la ecuación “mild-slope” sobre un dominio no acotado mediante el uso de condiciones de radiación locales (RBCS). Las condiciones de radiación locales han sido vastamente utilizadas en la ingeniería oceánica y costera. Un resumen de las condiciones de radiación locales planas y circulares más empleadas son presentadas así como la derivación de las aproximaciones de Radder⁶², Booij¹³,

(para el caso plano) y Bing Yi Xu⁷ (para el caso circunferencial). Una medida de la capacidad de absorción de estas condiciones viene dada mediante el cálculo del coeficiente de reflexión en el campo cercano.

Condición de frontera de radiación plana

Engquist y Majda^{20,21} acometieron algunos de los primeros trabajos sobre condiciones de frontera de radiación artificiales. Sus técnicas, basadas en la teoría de operadores seudo diferenciales, son las más efectivas para ondas incidentes normalmente sobre una frontera artificial plana. Estas ideas han sido extendidas y generalizadas en diversas maneras (Higdon³¹), con formas propias en el campo de la Hidrodinámica Costera, las cuales se resumen a continuación mediante el operador de frontera M

$$M\phi = ik \left(a_0\phi + \frac{a_1}{k^2}\phi_{yy} \right) - \frac{b_1}{k^2}\phi_{xyy} \quad (12)$$

La selección de los parámetros a_0 , a_1 y b_1 en la ecuación (12) expresan la dirección de apertura a ser considerada y el grado al cual la condición de transmisión exacta en incidencia normal es relajada. En la Tabla I aparecen listados los coeficientes de las condiciones de frontera plana de primero y segundo orden.

Tipo	a_0	a_1	b_1	Aproximación
Panchang ⁵⁹	1	0	0	inc. normal
Radder ⁶²	1	0,5	0	aprox. parabólica de bajo orden
Booij ¹³				
Kirby ⁴¹	1	0,75	0,25	aproximación Padé
Kirby ⁴²	0,9947	0,8901	0,4516	aprox. minimax (70°)

Tabla I. Coeficientes de reflexión de las condiciones de frontera de radiación (RBC) de primero y segundo orden para una frontera plana

La selección de los parámetros en la aproximación minimax⁴² garantiza la máxima apertura direccional a ser considerada. Los valores reflejados en la Tabla I no incluyen algún efecto de los errores de truncamiento asociados con el esquema en diferencias empleado para su implementación. Se trata ahora de conocer la capacidad teórica de absorción de las condiciones de frontera, reflejadas en la Tabla I, lo cual nos posibilitará un mejor uso de ellas. Por simplicidad, consideremos el problema para la ecuación de Berkhoff con profundidad constante en un semiplano

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + k^2\phi = 0, \quad x \leq x_0, \quad -\infty \leq y \leq \infty \quad (13)$$

Esta ecuación admite soluciones en la forma de onda plana propagándose en un ángulo θ_0 respecto al eje x . Para un ángulo dado θ_0 , el potencial de velocidades sobre el plano horizontal se expresa por

$$\phi(x, y : \theta_0) = \phi(x) e^{imy}; \quad m = k \sin \theta_0 \quad (14)$$

Sustituyendo la ecuación (14) en la ecuación (13), se obtiene

$$\phi_{xx} + l^2 \phi = 0$$

donde $l = k [1 - (m/k)^2]^{1/2}$. Seleccionamos una condición de frontera en $x = x_0$ ($x_0 > 0$), tal que minimice las reflexiones de ondas que viajan hacia la frontera desde $x < x_0$. Considerando la onda incidente de amplitud uno, escribimos ϕ como

$$\phi = e^{+il(x-x_0)} + R e^{-il(x-x_0)} \quad (15)$$

donde $|R|$ es el coeficiente de reflexión. Una condición de frontera de la forma

$$\phi_x - il\phi = 0; \quad x = x_0 \quad (16)$$

produce el resultado deseado $R = 0$ cuando sustituimos (15) en (16). Sin embargo, esta condición no puede ser generalmente alcanzada. En el caso de simultaneidad de varias ondas incidentes la condición de frontera seleccionada tiene que acomodarse a todas ellas simultáneamente. Kirby⁴³ expresó cada condición de frontera de radiación (1) en su expansión binomial, respecto a $\epsilon = m/k \ll 1$, produciendo l^* apropiados cada vez más próximos a l . Tales expresiones asintóticas son descritas a continuación. Una aproximación de bajo orden

$$l_1^* = k [1 + O(\epsilon)^2]^{1/2} = k + O(\epsilon)^2$$

corresponde a la condición simple de incidencia normal

$$\phi_x = ik\phi$$

seleccionada por Panchang *et al.*⁵⁹. Usando una expansión binomial, l^* , es mejor aproximado por

$$l_2^* = k \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 \right) + O(\epsilon)^4$$

Ésta corresponde a una aproximación parabólica de bajo orden (Radder⁶²)

$$\phi_x = ik \left(\phi + \frac{1}{2k^2} \phi_{yy} \right)$$

El uso de aproximante Padé (Booij¹³, Kirby^{42,40}) posibilita una importante mejoría en la aproximación a l mediante

$$l_3^* = k \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\epsilon^2}{1 - \frac{1}{4}\epsilon^2} + O(\epsilon)^4$$

Su representación operacional corresponde a la próxima aproximación parabólica de orden superior

$$\phi_x + \frac{1}{4k^2}\phi_{xyy} = ik \left(\phi + \frac{3}{4k^2}\phi_{yy} \right)$$

Kirby⁴² introdujo una aproximación minimax para ℓ^* , dada por

$$\ell_4^* = k \frac{a_0 - a_1 \epsilon^2}{1 - b_1 \epsilon^2}$$

la cual corresponde a la aproximación parabólica

$$\phi_x + \frac{b_1}{k^2}\phi_{xyy} = ik \left(a_0\phi + \frac{a_1}{k^2}\phi_{yy} \right)$$

Con este método se obtiene la más completa precisión respecto a la condición de incidencia normal con la máxima apertura direccional a ser considerada (tablas de los coeficientes para la variación de la apertura pueden ser encontradas en Kirby⁴², con un cambio de signo en la notación)). Una estimación de los coeficientes de reflexión correspondientes a las selecciones $\ell_1^* - \ell_4^*$ fue dada por Kirby⁴³, sustituyendo (15) en la ecuación diferencial correspondiente. La Figura 2 muestra gráficamente los coeficientes de reflexión ($|R|$) para las cuatro selecciones de ℓ^* . Nosotros apreciamos que el coeficiente de reflexión aumenta según aumenta el ángulo de incidencia al contorno. La condición ℓ_4^* muestra la mejor capacidad de absorción para ondas salientes del dominio computacional con un ángulo inferior a 70 grados.

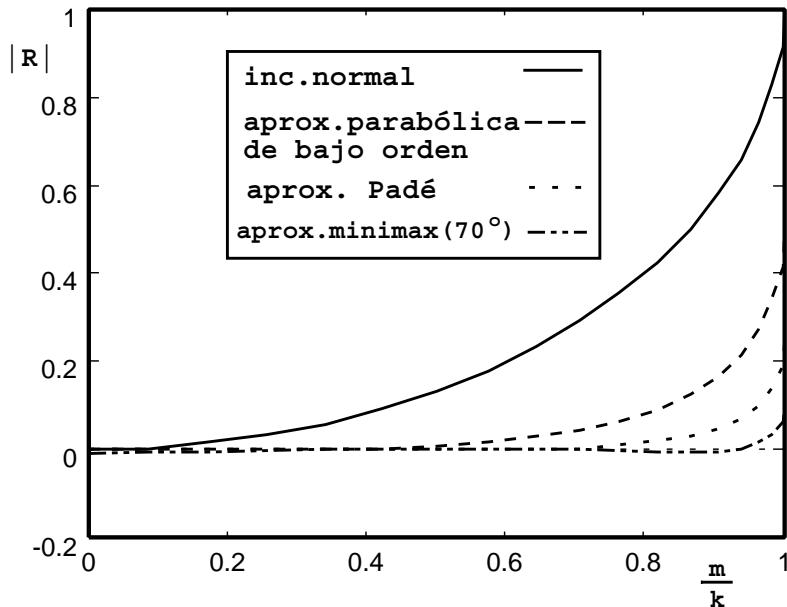


Figura 2. Coeficientes de reflexión de las condiciones de frontera de radiación (RBC) de primero y segundo orden para una frontera plana

Condiciones de radiación para una frontera artificial circular

Una forma común para aproximar condiciones de frontera de radiación sobre un círculo es considerar el operador de frontera $\tilde{\mathcal{B}}$ (ecuación (10)) en la forma

$$\tilde{\mathcal{B}}\phi = \phi_r - \alpha(r)\phi - \beta(r)\phi_{\theta\theta} \quad (17)$$

donde (r, θ) son las coordenadas polares y α y β son funciones radiales seleccionadas apropiadamente. Notemos que (17) es una condición de frontera local. Aún más, la implementación de esta condición de frontera empleando elementos finitos lineales es muy natural.

Tipo	α_1	β_1	α_2	β_2
Majda y Engquist ²¹ (ME)	$ik - \frac{1}{2r}$	-	$ik - \frac{1}{2r}$	$\frac{1}{2k^2r^3} + \frac{i}{2kr^2}$
Bayliss y Turkel ⁴ (BT)	$-ik - \frac{1}{2r}$	0	$-ik - \frac{1}{2r} + \frac{1}{8r(1+ikr)}$	$\frac{1}{2r(1+ikr)}$
Khebir, Ramahi y Mittra ³⁹ (KRM)	$-ik - \frac{1}{2r}$	0	$-ik - \frac{1}{2r} + \frac{1+(kr)^{-2}}{8r(1+ikr)}$	$\frac{1+(kr)^{-2}}{2r(1+ikr)}$
Li y Cendes ⁴⁸ (LC)	$\frac{-kH_1^1(kr)}{H_0^1(kr)}$	0	$\frac{-k^2r(g_2(kr)-1)}{(krg_1(kr)-1)}$	$\frac{1}{r(krg_1(kr)-1)}$
Bing Yi Xu y Panchang ⁷ (BYi-P)	$ik - \frac{1}{2r}$	-	$ik - \frac{1}{2r} + \frac{i}{8kr^2}$	$\frac{i}{2kr^2}$

Tabla II: Coeficientes de condiciones de frontera (RBC) de primero y segundo orden para una frontera circular

La selección de los coeficientes α y β se basa a veces en una expansión de la solución en el exterior de un círculo⁵² (Tabla II). Una sucesión de condiciones de frontera de radiación aproximadas, B_m , pueden ser construidas truncando la expansión en un número creciente de términos. Dos estrategias han sido desarrolladas en tal sentido:

- basadas sobre la expansión de la solución de la ecuación de Helmholtz; en el campo lejano (Bayliss-Turkel⁴, Douglas B. Meade⁵², Bing Yi Xu⁷, Li-Cendes⁴⁸, Mittra-Ramahi³⁹, o
- mediante el método de separación del campo ondulatorio en ondas que marchan “hacia adelante” y “hacia atrás”, dada la expresión operacional completa del operador²¹.

La precisión numérica de la solución computacional del problema acotado (10) está influenciada por la localización de la frontera exterior del dominio computacional, en la

cual es colocada la condición de frontera de radiación circular (17). Empleando la solución exacta del problema exterior asociado a la ecuación de Helmholtz, el campo de ondas saliente se representa por

$$\phi_s(r, \theta) = (H_n^{(1)}(kr) + RH_n^{(2)}(kr))e^{in\theta}$$

en el cual el coeficiente de reflexión teórico $| R |$ viene dado por la expresión

$$| R | = \frac{| (H_n^{(1)}(kr))'_r - (\alpha - n^2\beta)(H_n^{(1)}(kr)) |}{| (H_n^{(2)}(kr))'_r - (\alpha - n^2\beta)(H_n^{(2)}(kr)) |} \quad (18)$$

Aquí $H_n^{(1)}$ la función de Hankel de primer grado y orden n y $H_n^{(2)}$ la función de Hankel de segundo grado y orden n . La Figura 3 muestra las curvas de los coeficientes de reflexión $| R |$ en Db (o sea $20 \log_{10} | R |$) de las condiciones de radiación de segundo orden listadas en la Tabla II, donde el radio exterior del dominio computacional ha sido colocado a 2λ y 5λ longitudes de onda. Notemos que cuando la frontera exterior es alejada del dominio computacional, los coeficientes de reflexión disminuyen, observándose un mejor comportamiento en el caso de la condición de radiación *KRM*.

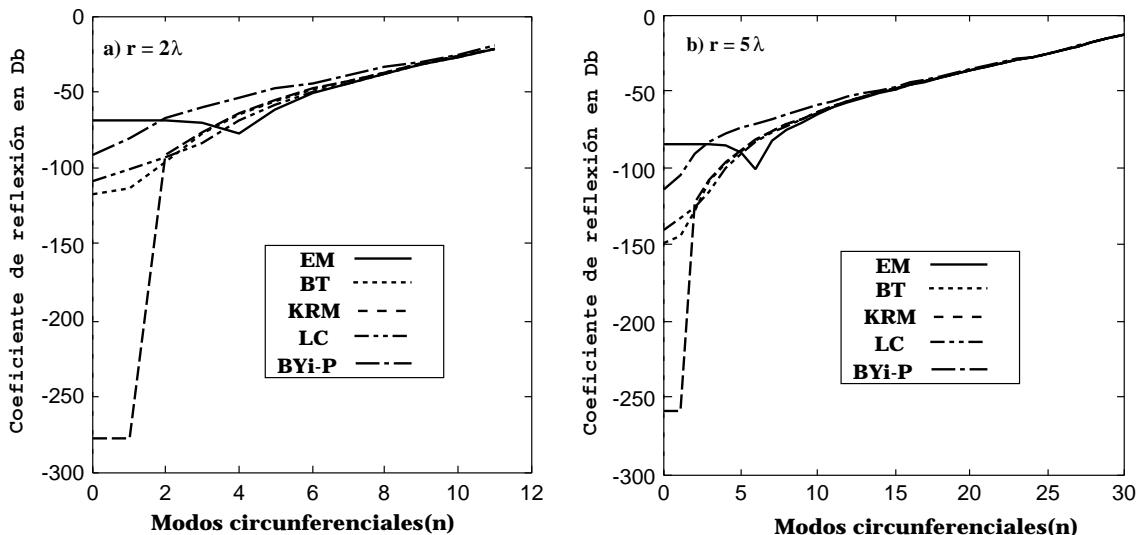


Figura 3. Coeficientes de reflexión de las condiciones de frontera de radiación (*RBC*) sobre una frontera circular de radio r (en Db, o sea $20 \log_{10}(| R |)$) a) $r = 2\lambda$, b) $r = 5\lambda$

APROXIMACIÓN PARABÓLICA PARA UNA CONDICIÓN DE FRONTERA ABSORBENTE

La contribución fundamental en el presente trabajo está relacionada con la derivación de una condición de frontera absorbente dependiente de la curvatura de la frontera del dominio computacional y su implementación en problemas de propagación del oleaje. Para obtener una aproximación parabólica de la ecuación de Berkhoff, transformamos ésta como sigue⁶²

$$\Delta\Phi + K^2\Phi = 0 \quad (19)$$

mediante las relaciones

$$\Phi = \sqrt{CC_g}\phi \quad \text{y} \quad K^2 = k^2 - \frac{\nabla\sqrt{CC_g}}{\sqrt{CC_g}} \quad (20)$$

Aproximaciones parabólicas para la ecuación de Helmholtz en sistemas de coordenadas no rectangulares han sido desarrolladas por Tsay y Liu⁶⁸, Isobe¹, Liu y Boissevain⁵⁰, Kirby⁴³, Meade *et al.*^{52,54,53,19,60} y X. Antoine *et al.*³. Sin embargo, sus desarrollos no son directamente aplicables a problemas de propagación del oleaje. Una aproximación parabólica para la simulación de oleaje en puertos y empleada como condición de frontera abierta ha sido derivada por Bing Yi Xu y Panchang⁷. Esta condición de frontera absorbente se basa en la asintótica de la función de Hankel en el campo lejano truncada en el término de orden cero. Esta aproximación de bajo orden incide en un comportamiento notoriamente oscilante de la solución numérica cuando la posición de la frontera abierta es ubicada cada vez más lejos del dominio físico de interés.

En esta sección, adoptando el método desarrollado por Bing Yi y Panchang obtendremos una condición de frontera circular basado en la asintótica de la función de Hankel truncada hasta el segundo orden, y, posteriormente, en base a la transformación de Jin presentaremos el cambio de variable para fronteras suaves de curvatura finita κ .

Para obtener una ecuación parabólica adecuada para las aplicaciones a lo largo de un segmento circular, la ecuación (19) es escrita en coordenadas polares

$$\Phi_{rr} + \frac{1}{r}\Phi_r + \frac{1}{r^2}\Phi_{\theta\theta} + K^2\Phi = 0 \quad (21)$$

Nuestro interés es caracterizar el campo de ondas dispersadas por una isla, un rompeolas, o un puerto, o sea el campo de ondas salientes del dominio computacional, cuya representación en el campo lejano adopta la forma siguiente

$$\Phi(r, \theta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\theta) f^m(k_0 r) \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \exp\left\{i[k_0 r - (n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}]\right\} \quad (22)$$

donde k_0 se refiere a la profundidad constante en el campo lejano, lo que significa que $K = k_0$ en el exterior del dominio computacional y m representa el orden de truncamiento en la expansión asintótica de la función de Hankel de primer tipo y orden n . Para retener la forma de (22) en aplicaciones más generales, seleccionamos la solución en la forma siguiente

$$\Phi(r, \theta) = \Psi(r, \theta) \frac{f^m(k_0 r)}{\sqrt{k_0 r}} e^{ik_0 r} \quad (23)$$

para los valores de $m = 0, 1, 2$ y los respectivos coeficientes reflejados en la Tabla III. Esta selección se reduce a la solución propuesta por Bing Yi Xu y Panchang para $m = 0$, en la

cual k_0 puede ser definido por el número de onda característico a lo largo de la frontera abierta. Sustituyendo (23) en (21) y poniendo $g_r^m = \frac{f_r^m}{f^m}$, $g_{rr}^m = \frac{f_{rr}^m}{f^m}$, tenemos

$$\Psi_{rr} + (2ik_0 + 2k_0g_r^m)\Psi_r + \frac{1}{r^2}\Psi_{\theta\theta} + (K^2 - k_0^2 + 2ik_0^2g_r^m + k_0^2g_{rr}^m + \frac{1}{4r^2})\Psi = 0 \quad (24)$$

La aproximación parabólica deseada puede ser obtenida eliminando el término Ψ_{rr} (al igual que Kirby *et al.*, Bing Yi Xu y Panchang ⁷), lo cual significa asumir que los efectos de difracción son débiles en la dirección radial. Despreciando además las variaciones de la batimetría local a lo largo del arco circular, se obtiene la siguiente ecuación en las variables primitivas

$$\phi_r + p\phi + q\phi_{\theta\theta} = 0 \quad (25)$$

donde los coeficientes p y q adoptan la forma

$$p = \frac{K^2r^2 + k_0^2r^2 + ik_0r + \frac{1}{4}}{2ik_0r^2 + 2k_0r^2g_r^m} + (k_0r)^2 \frac{g_{rr}^m - 2(g_r^m)^2 + \frac{g_r^m}{k_0r} - 2ig_r^m}{2ik_0r^2 + 2k_0r^2g_r^m} \quad (26)$$

$$q = \frac{1}{2ik_0r^2 + 2k_0r^2g_r^m} \quad (27)$$

Para evaluar las condiciones de fronteras desarrolladas anteriormente, examinamos el error absoluto entre la condición de frontera aproximada y la derivada normal exacta de la función de Hankel de primer tipo y orden n para los modos circunferenciales $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y en el rango de una longitud de onda desde el dispersor.

m	$f^m(k_0r)$	$f_r^m(k_0r)$	$f_{rr}^m(k_0r)$
0	1	0	0
1	$1 + \frac{1}{8ik_0r}$	$\frac{i}{8(k_0r)^2}$	$-\frac{i}{4(k_0r)^3}$
2	$1 + \frac{1}{8ik_0r} - \frac{9}{64(k_0r)^2}$	$\frac{i}{8(k_0r)^2} + \frac{9}{32(k_0r)^3}$	$-\frac{i}{4(k_0r)^3} - \frac{27}{32(k_0r)^4}$

Tabla III: Términos dependientes de (k_0r) en la expansión asintótica de la función de Hankel de primer tipo y orden n

El comportamiento de estas aproximaciones sobre diferentes fronteras circulares es mostrado en la Figura 4. Podemos apreciar que la condición desarrollada para $m = 1$ tiene el mejor comportamiento en general, que resulta muy notable en el caso de incidencia normal. Todas las condiciones examinadas tienen un comportamiento muy similar para los modos de orden superior. Esta comparación revela la posibilidad de mejorar la precisión de la expansión asintótica de la función de Hankel en el término de orden $m = 1$. Es nuestro interés en este trabajo extender las condiciones absorbentes para una frontera circular ya desarrolladas a una frontera suave de forma general. Para ello emplearemos una sustitución directa, basada en la transformación de Jin³⁶

$$\frac{\partial}{\partial r} \mapsto \frac{\partial}{\partial \nu} \quad (28)$$

$$\frac{1}{r} \mapsto \mathcal{C} \quad (29)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mapsto \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (30)$$

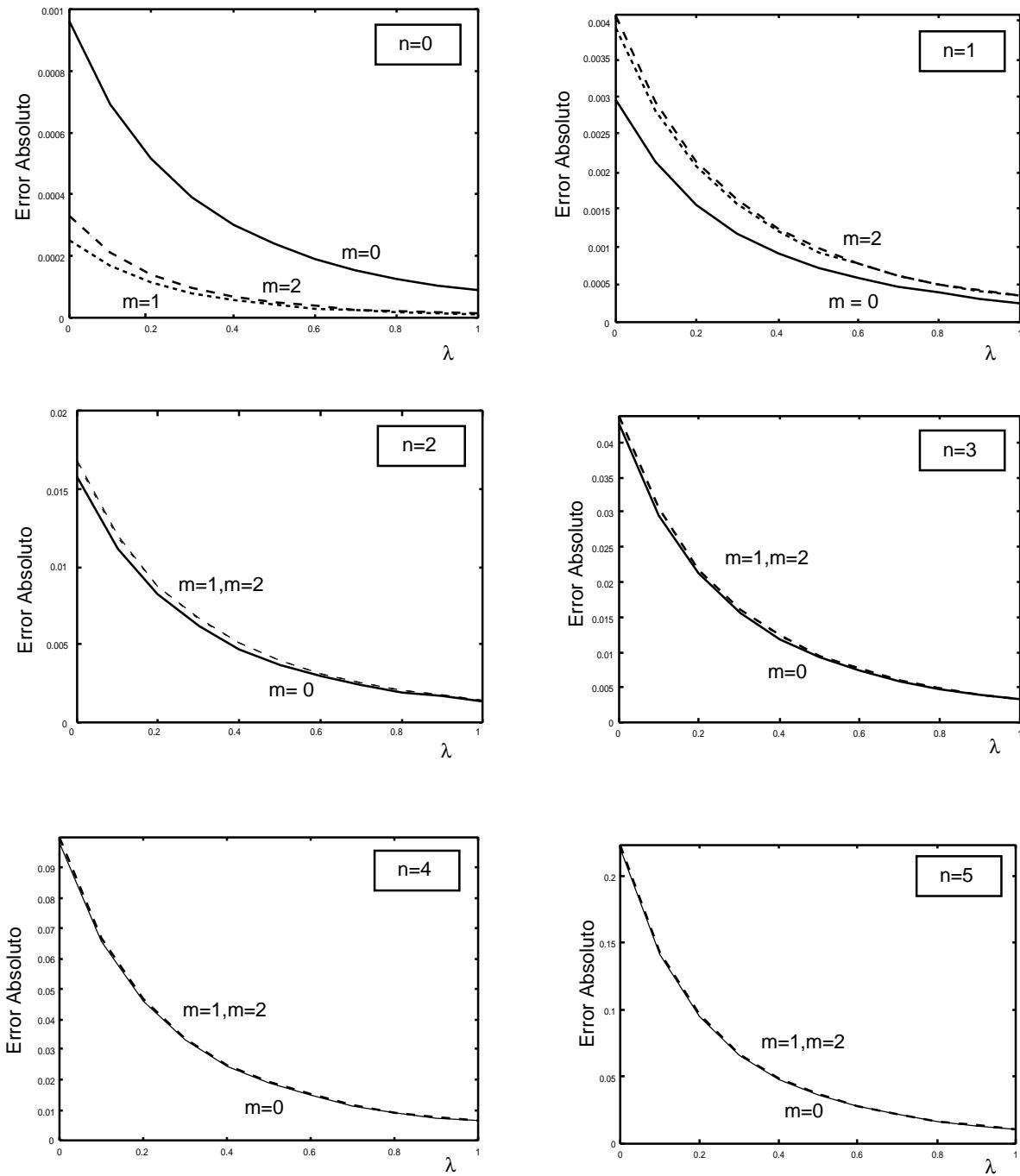


Figura 4. Comparación de condiciones de frontera absorbente para la ecuación de Berkhoff sobre un fondo plano con $k_0 = 2 * \pi$ cuando la frontera artificial es un círculo

lo cual representa un cambio de coordenadas del sistema de coordenadas polares (r, θ) a un nuevo sistema de coordenadas (ν, τ) , definido en la región exterior del dominio computacional. Usando esta sustitución (28), se obtiene la condición de frontera absorbente sobre una frontera no circular

$$\phi_\nu + p\phi + (q\phi_\tau)_\tau = 0 \quad (31)$$

con coeficientes p y q dependientes localmente de la curvatura del arco de curva seleccionado y de las propiedades físicas locales tales como la profundidad h y el número de onda k_0 . Dichos coeficientes para $m = 0$ y para $m = 1$ son dados a continuación:

para $m = 0$ se tiene

$$p = -\left(i\frac{(K^2 + k_0^2)}{2k_0} - \frac{C}{2} + i\frac{C^2}{8k_0}\right) \quad (32)$$

$$q = -\frac{i}{2k_0} \quad (33)$$

y para $m = 1$

$$p = -\left(i\frac{(K^2 + k_0^2)}{2k_0} - \frac{C}{2} + i\frac{C^2}{8k_0} - \frac{C^2}{2k_0} * \frac{10 + i(16 + \frac{C^2}{k_0^2})}{(\frac{C}{k_0} + 8i)^2}\right) * \left(1 - \frac{C^2}{8k_0^2 + C^2 - ik_0C}\right) \quad (34)$$

$$q = -\left(\frac{i}{2k_0}\right) * \left(1 - \frac{C^2}{8k_0^2 + C^2 - ik_0C}\right) \quad (35)$$

Deseamos hacer notar que las condiciones absorbentes derivadas son de fácil implementación en un código usual de elementos finitos, ya que en esencia su formulación débil mantiene la misma estructura de las condiciones absorbentes de segundo orden usuales⁸, originando una matriz de contorno global tridiagonal para elementos finitos lineales. También las nuevas expresiones para los coeficientes p y q no representan un sustancial incremento del coste computacional, ya que son evaluados directamente.

PROBLEMAS DE PROPAGACIÓN DEL OLEAJE

Para ilustrar la aplicación práctica de las condiciones desarrolladas se abordan dos problemas de propagación del oleaje relacionados con la dispersión de ondas largas superficiales por la presencia de islas circulares.

Dispersión de ondas por una isla circular localizada sobre un fondo parabólico

La predicción de los patrones de ondas largas superficiales que viajan en un océano de profundidad constante y son modificadas por un área de profundidad variable, representa un problema de particular interés para describir el comportamiento de ondas largas como, por ejemplo, “tsunamis” en las proximidades de las costas.

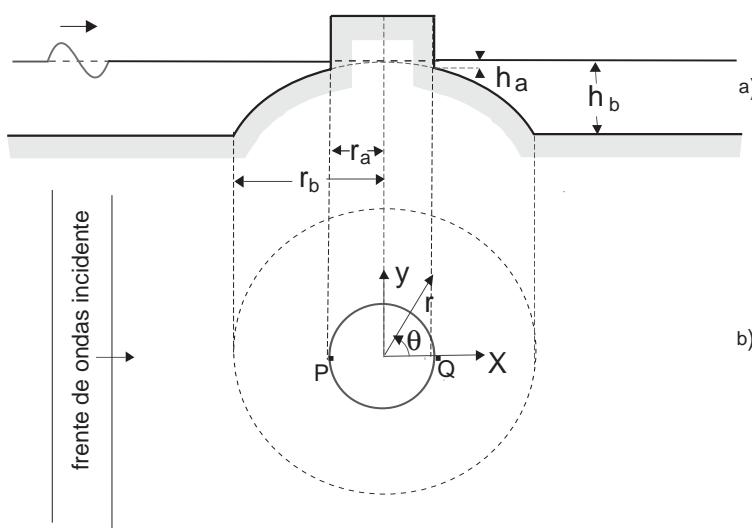


Figura 5. Diagrama de una isla idealizada sobre una elevación parabólica del fondo con $h = ar^2$; a) vertical, b) horizontal

El caso de estudio aquí seleccionado consiste en una isla circular localizada sobre una elevación parabólica del fondo, en un océano infinito de profundidad constante y que es atacada por un tren de ondas largas monocromáticas de pequeña amplitud (Figura 5). La profundidad es $h = ar^2$, para $r_a \leq r \leq r_b$ y $h = h_b$ para $r_b \leq r \leq +\infty$, para $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$. El subíndice a designa el valor en la línea de costa y el subíndice b el valor en la frontera exterior de la elevación.

El campo de ondas alrededor de la isla es calculado de acuerdo con la teoría de difracción^{9,12,11}. La batimetría para este caso es mostrada en la Figura 5. Este tipo de isla es considerada como representativo de casos reales (Homma³², Vastano y Reid^{70,71}, Jonsson³⁷).

En aguas poco profundas el problema de difracción tiene solución analítica. Para este caso Homma³² resolvió un conjunto infinito de problemas de frontera lineales unidimensionales y basado en el principio de superposición representó la solución mediante una serie.

Sobre un fondo variable el cálculo de la difracción de ondas en el mar basado en el método de los elementos finitos fue hecho inicialmente por Berkhoff, Chen y Mei^{15,16}. Chen y Mei usaron una expansión de Fourier-Bessel como una solución exterior en un problema de difracción de ondas, y una formulación variacional especialmente desarrollada para compatibilizar la solución exterior con las soluciones por elementos finitos en el interior del dominio. Zienkiewicz *et al.*⁷²⁻⁷⁶ hicieron una importante contribución en este campo mediante la proposición de una metodología general para la solución de este tipo de problemas. En esta dirección fueron desarrolladas diversas estrategias, que permitieron compatibilizar las soluciones por elementos finitos con algún tipo de solución del problema exterior asociado a la ecuación de Helmholtz(analítica, series, o integrales de frontera). Este problema ha sido resuelto también por P. Bettes, Tsay y Liu⁶⁹, Houston³³, Bing Yi Xu⁷ y Bonet⁹, quien incorporó la condición de radiación exacta en el infinito en un esquema numérico por medio de un filtro de esponjas.

Un estudio comparativo del comportamiento de las condiciones de fronteras circulares y no circulares desarrolladas en la sección anterior para las aproximaciones asintóticas $m = 0$ y $m = 1$ es presentado a continuación. Diversas soluciones numéricas han sido obtenidas usando el método de los elementos finitos en combinación con condiciones absorbentes locales de segundo orden sobre fronteras circulares o elípticas. Una malla de elementos finitos empleada para el cálculo con condiciones absorbentes sobre una frontera elíptica de radios $\frac{ry}{rx} \approx 2,5$ puede ser apreciada en la Figura 6.

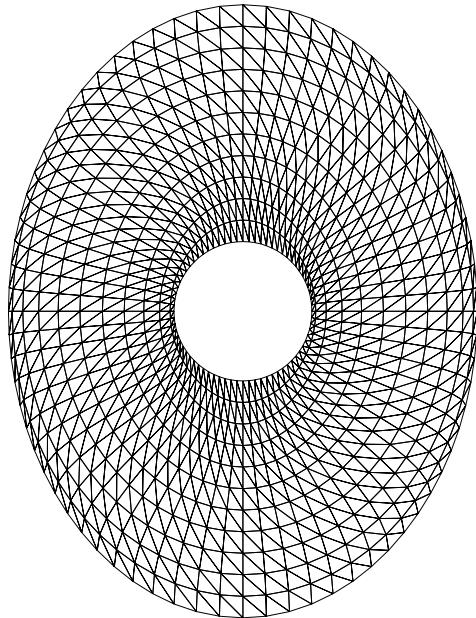


Figura 6. Malla de elementos finitos para el cálculo empleando condiciones de frontera absorbente sobre una frontera en forma de elipse

En el dominio computacional mostrado en la Figura 6 fueron empleadas las condiciones de frontera absorbentes elípticas de aproximación asintótica $m = 0$ (em0) y $m = 1$ (em1), las cuales son comparadas con sendas condiciones de frontera absorbentes tipo Byaliss-Turkel propuestas recientemente en la literatura por X. Antoine y H. Barucq³ y llamadas *eEM* y *eBT* respectivamente. Estas condiciones absorbentes para ondas acústicas propagadas en medios con fronteras no circulares pueden ser aplicables a la ingeniería oceánica sólo en el caso de considerar el fondo horizontal en la región exterior al dominio computacional elegido. La solución numérica por elementos finitos empleando diversas condiciones de frontera de segundo orden es mostrada en la Figura 7. Tales soluciones numéricas fueron obtenidas colocando la frontera absorbente a 5 y 9 longitudes de onda de la línea de costa en los dominios circular y elíptico respectivamente.

La Figura 7 refleja las curvas de amplitud relativa A/A_i en $r = r_a$ respecto al azimut θ . Las amplitudes relativas en la línea de costa (con un radio de $r_a = 10$ km) corresponden a los resultados reproducidos en otros trabajos^{32,33} para un periodo de $T = 240$ s.

Estas curvas tienen la misma forma de las curvas obtenidas por Zienkiewicz *et al.*, pero existe una discrepancia con las amplitudes relativas reportadas por ellos, debido a la diferencia en los parámetros geométricos relativos al fondo parabólico. Nosotros notamos

que para el mismo período, un aumento del parámetro α origina un crecimiento de la amplitud relativa en la isla. En la Figura 7 se puede apreciar cierta discrepancia al describir los máximos y un comportamiento semejante en todas las soluciones numéricas mostradas, siendo un índice favorable del buen comportamiento de las nuevas condiciones absorbentes propuestas en este trabajo.

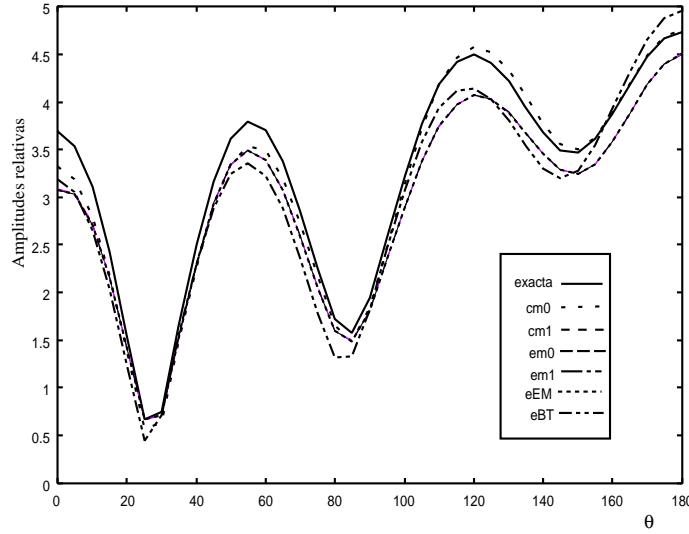


Figura 7. Relative amplitude A/A_i vs. azimuth θ

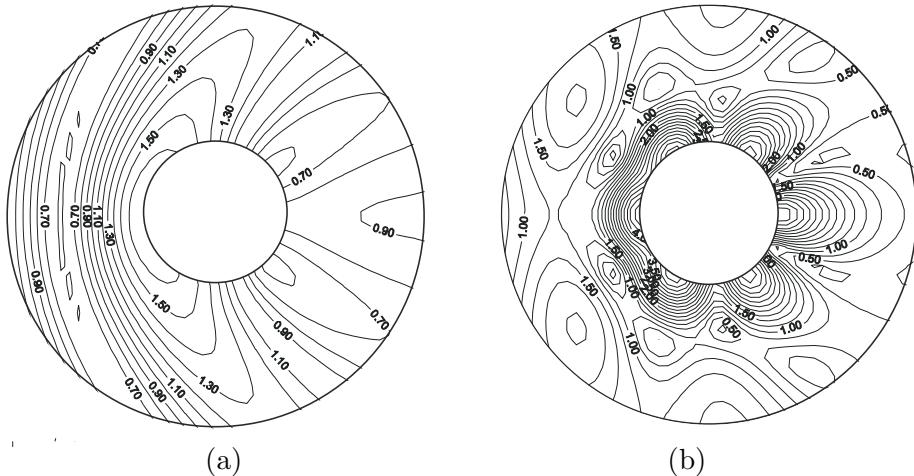


Figura 8. Dispersión de una onda plana (en $\theta = 0$) debido a una isla circular: a) localizada sobre un océano constante; b) localizada sobre una elevación parabólica

La Figura 8 representa la influencia de la elevación del fondo en las ondas dispersadas. En ella podemos notar que la elevación del fondo ha retardado el campo de ondas “no perturbado”, originando una nueva área de “sombra geométrica”. En la aproximación de aguas someras la elevación del fondo actúa como una “guía de onda”, dado que la velocidad de fase es proporcional a la distancia desde el centro de la elevación. Tal comportamiento ha sido descrito empleando condiciones de frontera absorbente circulares.

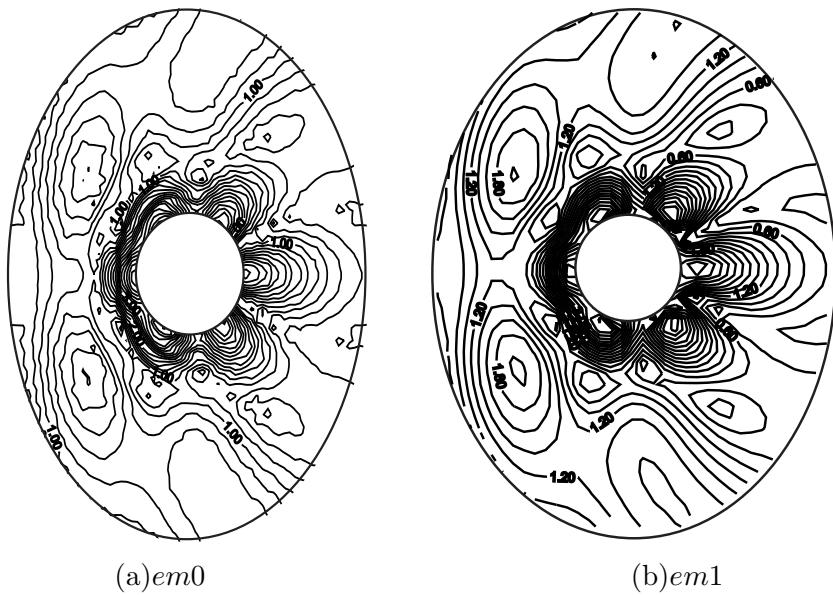


Figura 9. Dispersión de una onda plana (en $\theta = 0$) debido a una isla circular localizada sobre una elevación parabólica empleando condiciones de frontera absorbentes de segundo orden sobre una frontera no circular

La Figura 9 muestra el campo ondulatorio dispersado por la presencia de la isla circular sobre el fondo parabólico, calculado empleando las condiciones de frontera elípticas $em0$ y $em1$, correspondientes a la aproximación asintótica $m = 0$ y $m = 1$. Notemos en la figura que el comportamiento cualitativo es semejante entre ambos cuadros, al igual que respecto al mostrado en la figura anterior para una frontera circular.

Con el objetivo de demostrar las ventajas del uso de condiciones de frontera absorbentes sobre fronteras no circulares, presentamos un segundo caso de prueba relativo a la dispersión de una onda plana debido a la presencia de dos islas circulares, donde el eje de simetría es paralelo al frente de ondas de la onda plana incidente.

Dispersión de ondas por dos islas circulares localizadas sobre un fondo plano

El presente problema describe la dispersión de una onda plana por dos islas circulares de 10 km de radio, localizadas sobre un fondo plano, cuya profundidad es de 4 km. En particular nos interesa estudiar la dispersión de un frente de ondas plano que viaja paralelamente al eje de simetría de las islas (de izquierda a derecha). Las islas fueron colocadas a una distancia de cuatro longitudes de ondas, de manera que el efecto de interacción en la dispersión de las ondas fuera menos significativo.

La Figura 10 muestra los dominios computacionales elegidos para el estudio. A la izquierda se ha seleccionado un dominio circular de aproximadamente 2,7 longitudes de ondas de radio, que está cubierto por una malla de elementos finitos de 5988 elementos triangulares lineales y 3227 nodos. A la derecha, se muestra un dominio limitado por una elipse de dimensiones rx y ry ($\frac{ry}{rx} = 2,4834$) y cubierta por una malla de elementos finitos triangulares lineales de 2208 elementos y 1231 nodos. El dominio elíptico representa un 40% del dominio circular, lo cual es notablemente apreciable en la figura. Se realizaron varias corridas empleando las condiciones de frontera absorbente de segundo orden, $cm0$

(para una frontera circular), y $em0$ y $em1$ (para una frontera elíptica). Los resultados numéricos obtenidos son mostrados en la Figura 11. Como se aprecia en la misma, se obtiene una excelente correspondencia entre las soluciones numéricas resultantes con el empleo de las condiciones de frontera absorbentes no circulares $em0$ y $em1$ respectivamente. Tales resultados numéricos muestran, en general una buena correspondencia con la solución numérica debido al uso de la condición de frontera circular $cm0$. Aquí se confirma el uso de condiciones de frontera absorbentes no circulares, sin necesidad de sacrificar la precisión de la solución numérica. Los resultados numéricos discrepan de la solución analítica para el caso de dispersión de una onda plana por una isla circular sobre un fondo plano, hecho que atribuimos a la presencia del efecto de interacción en la dispersión de las ondas.

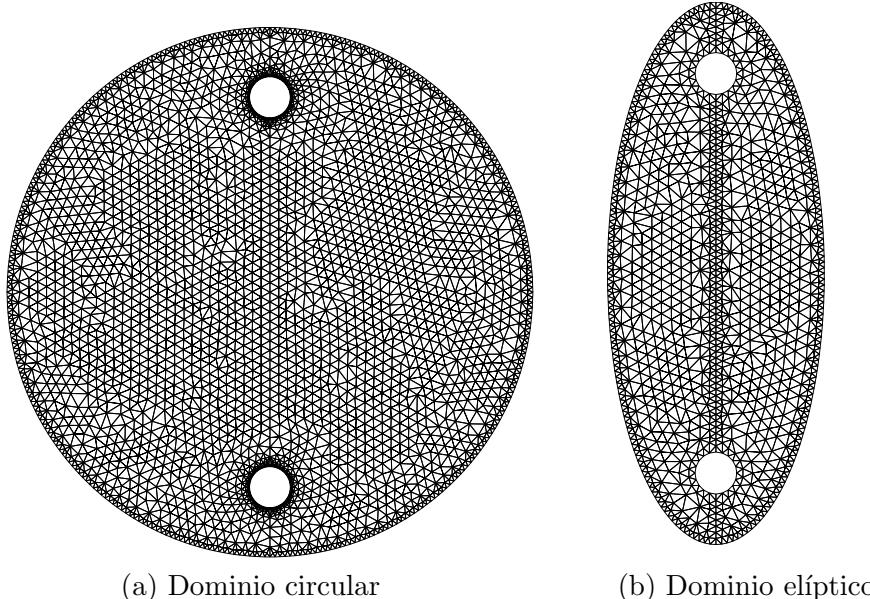


Figura 10. Malla de elementos finitos para el cálculo empleando la condiciones de frontera absorbente de segundo orden

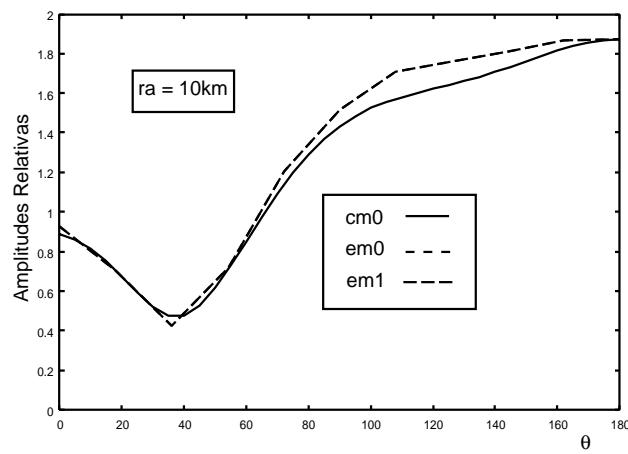


Figura 11. Amplitud relativa en la línea de costa de una isla A/A_i vs. azimut θ (isla ubicada en la parte superior del dominio)

La Figura 12 muestra los mapas de isoalturas alrededor de una isla circular (relativos a la isla ubicada en la parte superior del dominio computacional). Como se aprecia en la figura, el campo ondulatorio alrededor de las islas y muy próximo a ellas resulta ser muy semejante cualitativamente, manteniendo una buena correspondencia con el campo ondulatorio mostrado por la Figura 8 a) para el caso de dispersión de ondas alrededor de una sola isla.

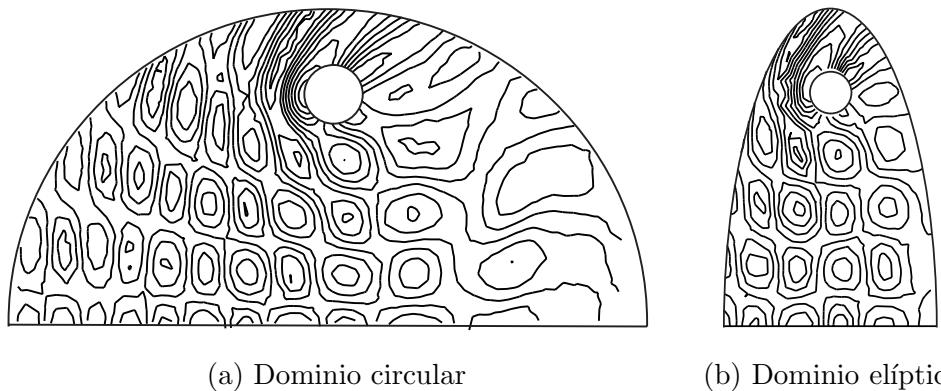


Figura 12. Mapa de isoalturas empleando las condiciones de frontera absorbente de segundo orden (izquierda) circular, (derecha) no circular

Deseamos notar que este caso muestra las ventajas y conveniencia del uso de condiciones de frontera no circulares, demostrando la obtención de soluciones computacionales con buena precisión y un ahorro de un 60% en el área del dominio computacional y, por tanto, en una reducción drástica del coste computacional, aspecto de crucial importancia en la simulación de problemas costeros empleando modelos elípticos de propagación del oleaje.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos propuesto nuevas condiciones de frontera absorbentes locales en el marco de la ingeniería oceánica y costera para el empleo de modelos elípticos de propagación del oleaje. Los resultados numéricos muestran la posibilidad de flexibilizar el uso de las condiciones de frontera absorbentes circulares en dependencia de la forma del dominio físico de interés. Tales condiciones absorbentes sobre fronteras no circulares son dependientes de la curvatura de la curva dada por la frontera artificial del dominio de interés. El uso de las condiciones de frontera absorbentes locales no circulares derivadas en este trabajo permiten en determinadas situaciones prácticas una reducción importante del coste computacional sin sacrificar demasiado la precisión, lo cual representa un aspecto importante en la simulación numérica de problemas de propagación del oleaje en regiones costeras y favorece la incorporación en el modelo de diversos dispersores y su interacción, así como el estudio en zonas costeras extensas. Nuevas investigaciones en este sentido se desarrollarán para la incorporación de sensibles variaciones del fondo en las aproximaciones aquí presentadas.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha recibido financiamiento del Ministerio de Ciencia y Tecnología (España) a través del Programa Ramon y Cajal y de la Universidad Politécnica de Cataluña (Barcelona, España). Hemos hecho uso extensivo de códigos distribuidos libremente / GNU-Proyect: Linux ELF-OS, Octave, Tgif from William C. Cheng así como códigos con licencia, tales como el compilador Lahey Fortran.

Nomenclatura

Lista de símbolos	Descripción
k	número de onda
ω	frecuencia angular del movimiento ondulatorio
λ	longitud de onda
H	altura de la onda
(x,y,z)	coordenadas rectangulares del espacio \mathbb{R}^3
∇	operador gradiente horizontal
∂	símbolo de derivada parcial
g	aceleración gravitatoria
h	profundidad local de la capa de líquido
Δ	laplaciano
C	celeridad de fase
C_g	celeridad de grupo
$\partial\Omega$	frontera de Ω
Γ_g	frontera tipo Dirichlet
$\frac{\partial\phi}{\partial n}$	derivada de ϕ en la dirección normal
r	distancia al origen en coordenadas polares
$\text{Re}\phi$	parte real de ϕ
$\text{Im}\phi$	parte imaginaria de ϕ
\mathbf{M}	matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones lineal
$\tilde{\mathbf{K}}$	matriz de rigidez global modificada
\mathbf{F}	matriz <i>DNL</i>
\mathbf{I}	matriz identidad
h_θ	longitud de un elemento e en la dirección θ
$\dot{\phi}, \ddot{\phi}$	primera y segunda derivadas de ϕ
ϕ_r, ϕ_{rr}	1ra y 2da derivadas de ϕ respecto a r
$i = \sqrt{-1}$	unidad imaginaria
\Im	parte imaginaria de un número complejo
i, j	subíndices
\mathbf{A}^j	matriz correspondiente a la capa $j + 1$
\mathbf{B}^j	matriz correspondiente a la capa j
\mathbf{F}^j	matriz <i>DNL</i> en la capa j
\mathbf{C}^j	matriz correspondiente a la capa $j - 1$
\mathbf{B}	curva suave sobre la región Ω
Ω	dominio computacional
Ω'	dominio semi-infinito
ϕ	potencial de velocidades
\mathcal{L}	operador de Berhoff
$\mathbf{H}_\nu^{(n)}$	funciones de Hankel de orden ν y grado n
$\mathbf{H}_0^{(')}$	derivadas de la función de Hankel de orden cero
$O()$	orden de magnitud
$\bar{\mathbf{B}}, \mathbf{M}$	operadores no locales sobre la frontera
∞	infinito
$ R $	coeficiente de reflexión
\mathbf{R}_i	coeficiente de reflexión
$l_{1,2}^*$	aproximación racional según Padé
N_{lay}	número de nodos sobre la dirección transversal

REFERENCIAS

- 1 “A parabolic refraction-diffraction equation in the ray-front coordinate system”, *Proc. 20th Int. Conf. Coast. Engng.*, pp. 306–317, Taipei, Taiwan, (1986).
- 2 N.N. Abbound y P.M. Pinsky, “Finite element solution and dispersion analysis for the transient structural acoustics problem”, *Appl. Mech. Rev.*, Vol. **43**, pp. 381–388, (1990).
- 3 X. Antoine y H. Barucq, “Bayliss-Turkel-like Radiation Conditions on Surfaces of Arbitrary Shape”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. **229**, pp. 184–211, (1999).
- 4 A. Bayliss, M. Gunzburger y E. Turkel, “Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions”, *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. **42**, N° 2, pp. 430-451, (1982).
- 5 J.C.W Berkhoff, “Mathematical models for simple harmonic linear water waves. Wave diffraction and refraction”, Technical Report Public, N° 163, Delft Hydraulic Laboratory, (1976).
- 6 P. Bettess y O.C. Zienkiewicz, “Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **11**, pp. 1271–1290, (1977).
- 7 Bing Yi Xu, V.G. Panchang y Z. Demirbilek Z., “Exterior Reflections in Elliptic Harbor Wave Models”, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, pp. 118–125, mayo, (1996).
- 8 R.P. Bonet Chaple, “Finite elements in unbounded domains for the water waves refraction-diffraction problem”, Ph. D. Thesis, Univ. Nac. del Litoral, Santa Fe, Argentina, (1998).
- 9 R.P. Bonet Chaple, N. Nigro y M.A. Storti, “Open boundary conditions for water waves propagation elliptic models”, *CIMAF'97, IV Simposio de matemática*, La Habana, 24–28 de marzo, (1997).
- 10 R.P. Bonet Chaple, N. Nigro y M.A. Storti, “Solution of Berkhoff’s equation with approximate radiation conditions”, *RIMNE*, Vol. **13**, N° 4, pp. 547–557, (1997).
- 11 R.P. Bonet Chaple, N. Nigro y S.R. Idelsohn, “Discrete non-local (DNL) outgoing boundary condition for diffraction of surface waves”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. **14**, pp. 849–861, (1998).
- 12 N. Booij, “Gravity waves on water with non-uniform depth and current”, Delft University of Technology, N° 8, (1998).
- 13 D.S. Burnett y R.L. Holford, “Prolate and oblate spheroidal acoustic infinite elements”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. **158**, pp. 117–141, (1998).
- 14 H.S. Chen y C.C. Mei, “Oscillations and wave forces in an offshore harbor: applications of hybrid finite element method to water-wave scattering”, Report N° 190, Ralph M. Parsons Laboratory for Water Resources and Hydrodynamics, Mass. Inst. Tech, (1974).
- 15 H.S. Chen y C.C. Mei, “Hybrid-element method for water waves”, *Proceedings of the Modelling Techniques Conference (Modelling 1975)*, San Francisco, 3–5 septiembre, Vol. **1**, pp. 63-81, (1975).
- 16 F. Collins y P. Monk, “Optimizing the perfectly matched layer”, (1976).

- 17 F. Collins y P. Monk, "The perfectly matched layer in curvilinear coordinate, Theme 4, Simulation et optimisation des systemes couplees", Project Ondes, Rapport des recherche, N° 3049, p. 49, (1996).
- 18 J. Dougl Jr. y B. Meade Douglas, "Second-order transmission conditions for the Helmholtz equations", *DD9 Proceedings*, P. Bjorstad, M. Espedal y D. Keys (eds.), setiembre, (1996).
- 19 B. Engquist y A. Majda, "Radiation boundary conditions' for acoustic and elastic calculations", *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. **32**, pp. 313–357, (1979).
- 20 B. Engquist y A. Majda, "Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves", *Mathematics of Computation*, Vol. **31**, N° 139, pp. 629–651, (1977).
- 21 G.J. Fix y M.C. Gunzburger, "On numerical methods for acoustic problems", *Comp and Maths. with Appl.*, Vol. **6**, pp. 265–278, (1980).
- 22 D. Givoli, "Non-reflecting boundary conditions: a review", *J. Comput. Phys.*, Vol. **94**, pp. 1–29, (1991).
- 23 D. Givoli y J.B. Keller, "A finite element method for large domains", *Computational Methods in Appl. Engng.*, Vol. **76**, pp. 41–66, (1989).
- 24 D. Givoli y J.B. Keller, "Non-reflecting boundary conditions for elastic waves", *Wave Motion*, Vol. **12**, pp. 261–279, (1990).
- 25 D. Givoli, I. Patlashenko y J.B. Keller, "High-order boundary conditions and finite elements for infinite domains", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. **143**, pp. 13–39, (1997).
- 26 D. Givoli, "A spatially exact non-reflecting boundary condition for time dependent problems", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. **95**, pp. 97–113, North-Holland, (1992).
- 27 T. Hagstrom y H.B. Keller, "Exact boundary conditions at an artificial boundary for partial differential equations in cylinders", *Siam J. Math. Anal.*, Vol. **17**, N° 2, (1986).
- 28 I. Harari, R. Shalom, M. Slavutin y P.E. Barbone, "Boundary infinite elements for acoustics", *WCCMIV-ABSTRACTS*, Vol. **I**, CERIDE, Buenos Aires, Argentina, 29 junio–2 julio, (1998).
- 29 I. Harari, "Computational methods for problems of acoustics with particular reference to exterior domains", Ph.D. Thesis, Stanford University, (1991).
- 30 R.L. Higdon, "Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multi-dimensional wave equations", *Math. Comput.*, Vol. **47**, pp. 437–459, (1986).
- 31 S. Homma, "On the behaviour of seismic sea waves around circular island", *Geophys. Mag.*, Vol. **21**, pp. 199–208, (1950).
- 32 J.R. Houston, "Combined refraction and diffraction of short waves using the finite element method", *Appl. Ocean Res.*, Vol. **3**, pp. 163–170, (1981).
- 33 Q. Hu Fang, "A spectral boundary integral equation method for the 2-D Helmholtz equation", Report 94-15, pp. 23, Institute for Computer Applications in Science and Engineering, Mail Stop 132C, NASA Langley Research Center Hampton, VA 237801-0001, marzo, (1994).
- 34 M. Israeli y S.A. Orszag, "Approximation of radiation boundary conditions", *Journal of Computational Physics*, Vol. **41**, pp. 115–135, (1981).
- 35 J.M. Jin, "The finite element method in electromagnetics", John Wiley & Sons, (1993).

- 36 I.G. Jonsson, O. Skovgaard y O. Brink-Kjaer, "Diffraction and refraction calculations for waves incident on an island", *Journal of Marine Research*, Vol. **34**, Nº 3, (1976).
- 37 P. Juhl, "A numerical study of the coefficient matrix of the boundary element method near characteristic frequencies", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **175**, Nº 1, pp. 39–50, (1994).
- 38 A. Khebi, O. Ramahi y R. Mittra, "An efficient partial differential equation technique for solving the problem of scattering by objects of arbitrary shape", *Microwave and Optical Tech. Lett.*, Vol. **2**, pp. 229–233, (1989).
- 39 J.T. Kirby, "Open boundary condition in parabolic equation method", *Journal of Water Way. Port, Coastal and Ocean Engineering*, Vol. **112**, Nº 3, pp. 460–465, (1986).
- 40 J.T. Kirby, "Rational approximations in the parabolic equation method for water waves", *Coastal Engineering*, Vol. **10**, pp. 375–378, (1986).
- 41 J.T. Kirby, "A note on parabolic radiation boundary conditions for elliptic wave calculations", *Coastal Engineering*, Vol. **13**, Nº 3, pp. 211–218, (1989).
- 42 R. Kosloff y D. Kosloff, "Absorbing boundaries for wave propagation problems", *Journal of Computational Physics*, Vol. **63**, pp. 363–376, (1986).
- 43 G.A. Kriegsmann, title = "Radiation conditions for wave guide problems", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. **3**, Nº 3, setiembre, (1982).
- 44 G.A. Kriegsmann y C.S. Morawetz, "Solving the equation for exterior problems with variable index of refraction: I", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. **1**, Nº 3, pp. 371–383, (1980).
- 45 M. Lenoir y A. Tounsi, "The localized finite element method and its application to the two-dimensional sea-keeping problem", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **25**, Nº 4, (729–752).
- 46 Y. Li y Z.J. Cendes, "Modal expansion absorbing boundary conditions for two-dimensional electromagnetic scattering", *IEEE Trans. Magnetics*, Vol. **29**, pp. 1835–1838, (1993).
- 47 B. Lichtenberg, Y. Liu, J. Reynolds, K. Webb y D. Meade, "Applications and performance of a local conformal radiation boundary condition", "Digest for IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium", Vol. GA, pp. 406–409, (1994).
- 48 P.L.F. Liu y Boissevain, "Wave propagation between two breakwaters", *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, Vol. **114**, pp. 237–247, (1988).
- 49 A. Majda y S. Osher, "Reflection of singularities at the boundary", *J. Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. **28**, pp. 479–499, (1975).
- 50 D.B. Meade, A.F. Peterson y C. Piellusch-Castle, "Derivation and comparison of radiation boundary condition for two-dimensional Helmholtz equation with non-circular artificial boundaries", "W. Motion and Numerical Aspects", pp. 506–514, (1995).
- 51 D.B. Meade, G.W. Slade, A.F. Peterson y K.J. Webb, "Analytical evaluation of the accuracy of several conformable local absorbing boundary conditions", *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, Chicago, Illinois, USA, 20–24 julio, (1992).
- 52 D.B. Meade, G.W. Slade, A.F. Peterson y K.J. Webb, "Comparison of local radiation boundary conditions for the scalar Helmholtz equation with general boundary shapes", *IEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. **43**, Nº 1, pp. 506–514, (1995).

- 53 F. Millot, F. Collino y P. Joly, "Fictitious Domain Method for Unsteady Problems: Application to Electromagnetic Scattering", *W. Motion and Numerical Aspects*, pp. 261–267, (1995).
- 54 T.G. Moore, J.G. Glaschak, A. Taflove y G.A. Kriegsmann, "Theory and application of radiation boundary operators", *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, Vol. **36**, pp. 1797–1811, (1988).
- 55 J. Moreno Durán, "Modelo de propagación de oleaje direccional basado en la ecuación mild-slope", Tesis de Máster, ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, (1996).
- 56 L. Nirenberg, "Lectures on Linear Partial Differential Equations", *C.B.M.S. Regional Conf. Ser. in Math.*, N° 17, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1973).
- 57 V.G. Panchang, B. Cushman-Roisin y B.R. Pearce, "Combined refraction-diffraction of short-waves in large coastal regions", *Coastal Engineering*, Vol. **12**, pp. 133–156, (1988).
- 58 C. Piellusch-Castle, Y. Lin, B. Lichtenberg, D.B. Meade y J.K. Webb, "A comparison of radiation boundary conditions strategies for Helmholtz equations", *14th World Congress on Computations and Applied Mathematics*, Vol. GA, pp. 886–889, Atlanta, (1994).
- 59 P.M. Pinsky y N.N. Abbound, "Finite element solution of the transient exterior structural acoustics problem based on the use of radially asymptotic boundary operators", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. **85**, pp. 311–348, (1991).
- 60 A.C. Radder, "On the parabolic equation method for water-wave propagation", *J. Fluid Mech.*, Vol. **95**, parte 1, pp. 159–176, (1979).
- 61 J.E. Romate, "Absorbing boundary conditions for free surface waves", *Journal of Computational Physics*, Vol. **99**, pp. 135–145, (1992).
- 62 H.A. Schenk, "Improved integral formulation for acoustic radiation problems", *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol. **44**, pp. 41–58, (1968).
- 63 A. Sommerfeld, "Partial differential equations in physics", Academic Press, New York, (1949).
- 64 M.E. Taylor, "Reflection of singularities of solutions to systems of differential equations", *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. **28**, pp. 457–478, (1975).
- 65 A.N. Tijonov y A.N. Samarsky A.N., "Ecuaciones de la física matemática", Editorial MIR, Moscú (traducción al español), (1980).
- 66 T.K. Tsay y P.L.F. Liu, "Numerical solution of water-wave refraction and diffraction problems in the parabolic approximation", *J. Geophys. Res.*, Vol. **87**, N° C10, (1982).
- 67 T.K. Tsay y P.L.F. Liu, "A finite element model for wave refraction and diffraction", *Appl. Ocean Res.*, Vol. **5**, pp. 30–37, (1983).
- 68 A.C. Vastano y R.O. Reid, "A numerical study of the tsunami response at an island", Project 471, Ref. 66-26T, Dep. of Oceanography, Texas A & M Univ. A., (1966).
- 69 A.C. Vastano y R.O. Reid, "Tsunami response for islands: Verification of a numerical procedure", *J. Mar. Res.*, Vol. **25**, pp. 129–139, (1967).

- 70 O.C. Zienkiewicz, "The finite element method and boundary solution procedures as general approximation methods for field problems", *World Congress on Finite Element Methods in Structural Mechanics*, Bournemouth, 12–17 octubre, (1975).
- 71 O.C. Zienkiewicz y P. Bettess, "Infinite elements in the study of fluid-structure interaction problems", *2nd International Symposium on Computing Methods in Applied Science and Engineering*, Versailles, Francia, 15–17 diciembre, (1975).
- 72 O.C. Zienkiewicz, P. Bettess y D.W. Kelly, "The finite element method for determining fluid loading on rigid structures: two and three - dimensional formulations", "Numerical Methods in Offshore Engineering", Cap. 4, O.C. Zienkiewicz, R.W. Lewis y K.G. Stagg Wiley (eds.), (1978).
- 73 O.C. Zienkiewicz, D.W. Kelly y P. Bettess, "Marriage á la mode or the best of both worlds. Boundary integrals and finite element procedures", *Conf. on Innovative Methods of Numerical Computation*, Versailles, Francia, mayo, (1977).
- 74 O.C. Zienkiewicz, D.W. Kelly y P. Bettess, "The coupling of the finite element method and boundary solution procedures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **11**, Nº 2, pp. 355–375, (1977).
- 75 O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor, "El método de los elementos finitos. Mecánica de sólidos y fluidos. Dinámica y no linealidad", Vol. 2, Parte II§§15.7–15.14, McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A., (1994).