

Análisis de uniones atornilladas viga–pilar realizadas con chapa frontal a tope

Antonio Foces y José Antonio Garrido†

Aula UVA–CIMNE
ETS de Ingenieros Industriales, Universidad de Valladolid
Paseo del Cauce, s/n, 47011 Valladolid, España
Tel.: 34 983 423386; Fax: 34 983 423631
e-mail: foces@eis.uva.es

Alicia Moreno

Departamento de Ingeniería Industrial II
Escuela Politécnica Superior, Universidad de A Coruña
C/ Mendizábal, s/n, Esteiro, 15403 Ferrol, A Coruña, España
Tel.: 34 981 337400; Fax: 34 981 337410
e-mail: amoreno@cdf.udc.es

Resumen

Hoy en día está ampliamente reconocido que las uniones y los elementos de una estructura metálica presentan un comportamiento semirrígido y no lineal, teniendo los estudios actuales como objetivo incorporar tales conceptos en los métodos de diseño y análisis. El presente trabajo se centra en el estudio de las uniones atornilladas viga–pilar realizadas con chapa frontal a tope, tipo de unión ampliamente utilizada por ser de fácil fabricación y montaje, con el objetivo de predecir su comportamiento rotacional (curva momento–rotación) para que pueda ser incorporado en el análisis de la estructura. Para la determinación del comportamiento rotacional del mencionado tipo de unión se ha realizado un modelo tridimensional de elementos finitos para ser analizado mediante el paquete de software COSMOS/M[®]. Dicho modelo contempla la compleja interacción entre los diversos elementos que la componen. Así se han modelado la viga, la chapa frontal, los tornillos (pernos y tuercas) y el lado del pilar. Además, como ley de comportamiento del acero, tanto para los elementos a unir como para los tornillos, se utiliza el diagrama bilineal correspondiente a un comportamiento elástico–perfectamente plástico. Para la validación del modelo propuesto se han comparado los resultados que arroja con los deducidos teóricamente siguiendo las recomendaciones del Eurocódigo 3 (unión equivalente en T y Teoría de las Líneas de Rotura) y con los obtenidos experimentalmente.

Palabras clave: uniones viga–pilar, método de los elementos finitos, Eurocódigo 3.

ANALYSIS OF BEAM–TO–COLUMN BOLTED FLUSH END PLATE CONNECTIONS

Summary

Nowadays it is recognized that connections and members of steel frameworks have a semirigid and non-linear behaviour. One of the main concerns is how to incorporate the connection characteristics into an analysis. In the present study, beam–to–column bolted flush end plate connections, widely used because of the economy and simplicity of fabrication and assembly, are investigated for predicting their rotational behaviour (moment–rotation curve) that can be used in the frame analysis. In order to predict the rotational behaviour of this type of connection, a three–dimensional finite element model has been developed by the COSMOS/M[®] code. The proposed model takes into consideration the interaction between the various components that are comprised in the connection. Thus, the modelling domain includes the beam, end plate, bolts and nuts and the column. Besides, the analysis incorporates the effects of material nonlinearity, for the plates and bolts, using the elastic–perfectly plastic stress–strain relationship. The results obtained from the finite element analysis are evaluated and verified by comparing the numerically predicted results with those of the corresponding test carried out. The numerical results are also compared with a simplified theoretical model based on yield line analysis and the stub–tee analogy.

Keywords: beam–to–column joints, finite element method, Eurocode 3.

INTRODUCCIÓN

Hoy en día está ampliamente reconocido que las uniones de una estructura metálica presentan un comportamiento semirrígido y no lineal. Tradicionalmente, la práctica habitual era aproximar todas las uniones por articulaciones o empotramientos perfectos (Figura 1a, c), debido a la complejidad que suponía la consideración de su comportamiento real. Las normativas modernas (o proyectos de ellas) recogen la idea de que las uniones reales se comportan de una manera intermedia (Figura 1b) entre las correspondientes a los mencionados tipos extremos. Es decir, transmiten sólo una parte del momento flector y presentan una capacidad de rotación que contribuye a la distribución de esfuerzos en toda la estructura. Por ejemplo, el AISC (American Institute of Steel Construction) considera en la normativa ASD¹ el pórtico de nudos semirrígidos, donde las uniones pueden transmitir el esfuerzo cortante y también tienen capacidad de transmitir parte del momento flector, y en la LRFD² define el tipo de construcción PR (Partially Restrained), donde hay que tener en cuenta los efectos de la flexibilidad de la unión en los procedimientos de diseño y análisis de la estructura. Asimismo, los proyectos de norma europeo (Eurocódigo 3^{3,4}) y español (CTE DB-SEA⁵) admiten la existencia de uniones semirrígidas y dan pautas a seguir para predecir el comportamiento rotacional de algunas de ellas, esencialmente a través de sus curvas momento-rotación, en función de sus características mecánicas y geométricas y de los esfuerzos actuantes.

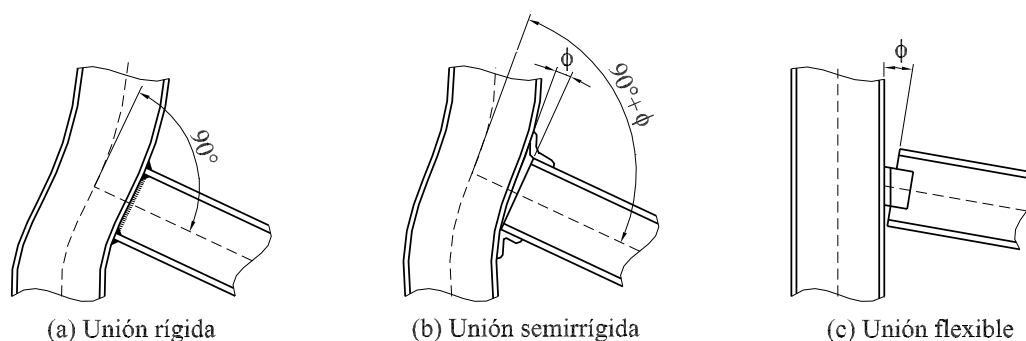


Figura 1. Tipos de unión según su comportamiento

Las herramientas matemáticas y la potencia de cálculo disponibles actualmente permiten la consideración del comportamiento real de las uniones en los métodos de cálculo. Por ello, las investigaciones actuales en este campo tienen el objetivo de desarrollar técnicas para predecir ese comportamiento y, más concretamente, para obtener la curva momento-rotación (Figura 2b) en el plano de flexión predominante, a fin de ser incorporada por los métodos de proyecto y cálculo de estructuras (la respuesta de las uniones utilizadas habitualmente ante los esfuerzos cortantes y el momento torsor –Figura 2a– es despreciable, sobre todo si se utilizan perfiles de sección abierta). La curva momento-rotación de cualquier unión, a partir de la cual se pueden deducir todas las variables de las que depende el comportamiento rotacional de la misma, se puede obtener por medio de ensayos experimentales y mediante modelos más o menos sencillos de tipo teórico, analítico, mecánico o numérico (básicamente de elementos finitos).

Como es lógico, los ensayos experimentales son el método más aproximado para obtener la mencionada curva. Sin embargo, debido a la imposibilidad de ensayar toda la casuística que puede darse en la práctica, su uso ha quedado relegado a la importante misión de validar los resultados obtenidos por cualquier otro método. Los numerosos ensayos de diversos tipos de uniones llevados a cabo en todo el mundo a lo largo del tiempo han permitido la creación de diversas bases de datos⁶⁻⁹. Para cada ensayo realizado, en ellas se

recopilan las propiedades geométricas y mecánicas (tipo de acero) de cada componente de la unión (vigas, columna y elementos que materializan la unión). También se recogen la curva momento-rotación obtenida, como principal resultado, y el nombre de los investigadores responsables del ensayo, así como las referencias oportunas. Es evidente que el uso de estas bases de datos sólo puede hacerse con fines de investigación, concretamente para validar modelos encaminados a predecir el comportamiento rotacional de un determinado tipo de unión. Su uso en la práctica para el diseño de estructuras está muy limitado, dada la baja probabilidad que existe de encontrar en ellas la unión concreta (detalles constructivos y materiales) que se va a utilizar.

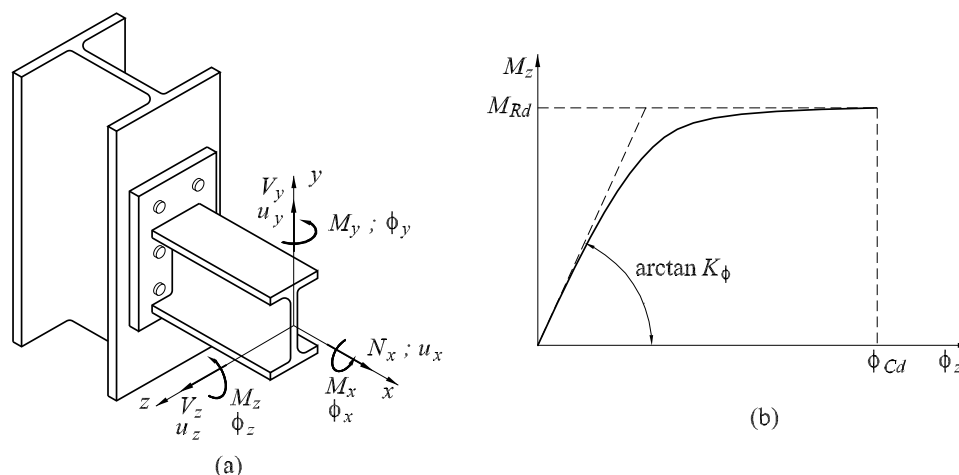


Figura 2. Esfuerzos que solicitan una unión y curva momento-rotación predominante

Los métodos teóricos y analíticos se basan en la aplicación de las reglas de la Mecánica y de la Resistencia de Materiales a modelos más o menos simplificados. Pretenden desarrollar reglas de diseño relativamente simples que puedan ser empleadas de forma rutinaria, aunque a mayor simplicidad se obtiene una menor exactitud. La principal ventaja de estos métodos es su facilidad para predecir los dos parámetros básicos del comportamiento rotacional de una unión: su rigidez inicial y el momento último resistido. En efecto, el primero puede ser predicho mediante un análisis elástico del modelo, mientras que el segundo se puede deducir a partir del análisis plástico de su mecanismo de colapso. Los primeros intentos de desarrollar una metodología de diseño para las uniones realizadas con chapa frontal se basan en el modelo de unión equivalente en T y la teoría de las líneas de rotura¹⁰⁻¹². Más recientemente, Chen¹³⁻¹⁵ y sus colaboradores han desarrollado modelos para el análisis de uniones materializadas con angulares.

Los modelos mecánicos se basan en la simulación de la unión mediante un conjunto de componentes rígidas y flexibles (a través de muelles). En estos modelos, la no linealidad de la respuesta rotacional real de la unión se obtiene adoptando leyes constitutivas no lineales para las componentes de la unión. Como precursores de estos modelos, cabe citar a Johnson y Law¹⁶ y a Yee y Melchers¹⁷. Estos últimos realizaron un completo estudio de las uniones con placa a tope extendida, incluyendo en él las deformaciones que se producen en el pilar. Reconocen cinco fuentes de deformación en la unión (flexión de la placa de tope, flexión del ala del pilar, alargamiento de los tornillos, deformación por cortante y deformación por compresión del alma del pilar) y seis posibles modos de fallo (rotura de los tornillos, formación de un mecanismo plástico en la placa o en la zona de tracción del ala del pilar y plastificación por cortante, aplastamiento y pandeo del alma del pilar), obtienen la rigidez rotacional de la unión combinando adecuadamente los desplazamientos elásticos

de las diferentes fuentes de deformación, para los cuales se obtiene su expresión analítica, y calculan el momento que agota la unión a partir de lo que resiste la parte más débil. Por ello, podría decirse que la metodología desarrollada por Yee y Melchers es el primer ejemplo de los hoy en día llamados "modelos de componentes", como es el recientemente propuesto por el Eurocódigo 3, sobre los que tratan las investigaciones desarrolladas por Faella^{18–20} y sus colaboradores.

Por último, los modelos numéricos (fundamentalmente de Elementos Finitos) proporcionan una forma relativamente sencilla y barata de llevar a cabo un amplio rango de estudios paramétricos que complementen los resultados experimentales ya existentes o que se hayan obtenido para la validación del propio modelo numérico. Para obtener un modelo numérico riguroso de una unión es necesario modelar, entre otros aspectos y además de la geometría, la no linealidad del material, la interacción (contacto) entre los distintos componentes, el pretensado de los tornillos y el rozamiento entre chapas en las uniones con tornillos pretensados. El empleo de elementos finitos es, en principio, la herramienta más adecuada para investigar su respuesta, ya que permite considerar todos y cada uno de los aspectos antes mencionados.

Apoiado en el desarrollo de los ordenadores, Krishnamurthy²¹ lleva a cabo gran número de análisis de elementos finitos de uniones con distintas configuraciones geométricas, obteniendo una curva momento–rotación y una metodología de diseño recogidas en el *AISC Manual of steel construction*. Tarpy y Cardinal²², basándose en ensayos y análisis lineales de elementos finitos, desarrollan una relación momento–rotación/resistencia para la unión con chapa frontal sin rigidizar. Murray y Kukreti^{23,24} investigan la unión con chapa frontal a tope y la unión con chapa frontal extendida y ocho tornillos, siendo básicamente una extensión del trabajo realizado por Krishnamurthy. Sherbourne y Bahaari²⁵ desarrollan un modelo de elementos finitos en 3D de uniones atornilladas con chapa frontal empleando el ANSYS®.

El comportamiento de la unión con chapa frontal es tridimensional y tales características deben ser investigadas mediante el empleo de elementos sólidos, de manera que los modelos de elementos finitos antes apuntados de Tarpy y Cardinal²², Murray y Kukreti^{23,24} y Sherbourne y Bahaari²⁵, que emplean elementos de tensión plana, elementos lámina y elementos sólidos, no detectan dicho comportamiento tridimensional. Por otro lado, en los modelos tridimensionales desarrollados por Krishnamurthy y Graddy²⁶ y Kukreti *et al.*²³, o bien se emplea una malla muy gruesa para investigar el comportamiento de la unión, o bien resultan elementos altamente distorsionados en las zonas en las que se emplea una malla más fina.

Más recientemente, Bursi and Jaspert^{27,28} desarrollan un modelo 3D empleando ABAQUS®, en el que modelan los tornillos como componentes individuales empleando una serie de hipótesis en cuanto a su rigidez, pero en el que no tienen en cuenta la deformación del ala del pilar, y Choi²⁹ confecciona un modelo para ser analizado con ADINA®, también 3D, en el que modela los componentes de la unión empleando un elemento sólido con un número variable de nudos para las zonas de transición del tamaño de la malla.

En el presente trabajo se avanza en el conocimiento del comportamiento rotacional de las uniones materializadas con chapa frontal a tope al desarrollar un modelo tridimensional de las mismas para ser analizado mediante el paquete COSMOS/M^I. La principal novedad aportada reside en que también se modela la parte del pilar utilizando elementos sólidos (otros investigadores lo consideran un plano rígido o lo modelan con elementos tipo lámina). El modelo desarrollado será aplicado a una unión previamente dimensionada según el Eurocódigo 3 y ensayada hasta su agotamiento resistente, a fin de obtener su validación por comparación de resultados. A fin de simplificar el modelo a desarrollar, sólo se considerarán

¹© Structural Research and Analysis Corporation, Los Ángeles, California.

uniones simétricas respecto de dos planos (Figura 9), uno paralelo a las alas del pilar que pasa por el centro de su alma y otro paralelo a las almas de las vigas y del pilar, perpendicular al anterior, que pasa por el plano medio de dichas almas. Asimismo, como el objetivo de los trabajos es la obtención de la curva momento–rotación (Figura 2b) en el plano de flexión predominante, la unión sólo estará sometida a un momento flector.

ANÁLISIS NUMÉRICO

En el presente apartado se describe el modelo realizado para el análisis numérico de las uniones con chapa frontal a tope mediante COSMOS/M³¹. La respuesta de cualquier unión es el resultado de la compleja interacción entre los distintos componentes de la misma. Por tanto, el dominio del modelo desarrollado incluye todas las partes que constituyen la unión: lado de la viga, tornillos (perno y tuerca) y lado del pilar. Aprovechando la simetría de las uniones que se pretenden analizar, tanto en la disposición geométrica como en las cargas, sólo se ha modelado la cuarta parte de las mismas a fin de obtener un modelo lo más simplificado posible. Asimismo, las longitudes de viga y de pilar que se han considerado son las suficientes como para que se puedan recoger todos los fenómenos que ocurren en el entorno de la unión sin que dichas longitudes afecten a los mismos. Así, los trozos de viga y de pilar considerados tienen una longitud como mínimo igual a un canto y a dos cantos, respectivamente, de la viga.

El modelo incluye una división de la geometría en una serie de volúmenes adecuados para que el mallado automático de los mismos genere una malla estructurada, en la que no haya ningún elemento con nudos colapsados que puedan presentar problemas de convergencia cuando se considera un comportamiento plástico de los materiales³¹. Debido a ello y por no complicar el mallado, no se han considerado ni los radios de acuerdo entre alas y almas ni los cordones de soldadura entre la viga y la chapa frontal.

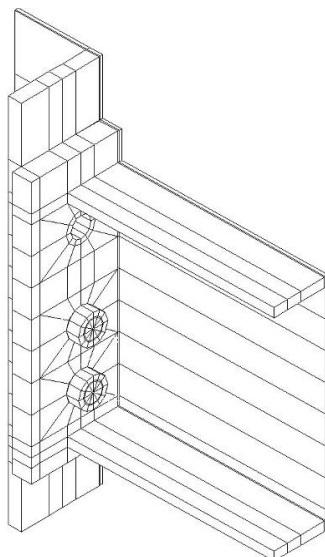


Figura 3. Modelo geométrico de la unión

En la Figura 3 se muestran las características antes apuntadas para la unión que aparece en la Figura 9, la cual se presenta como ejemplo de aplicación. Se trata de una unión típica, con cuatro tornillos en la zona de tracción y dos en la de compresión. Como se puede apreciar, el modelo no incluye los tornillos situados en la zona de compresión, pues

se considera que estos no trabajan ya que la compresión entre las chapas se transmite por contacto entre éstas. Asimismo, tampoco se han considerado las arandelas, ni en el lado de la cabeza de los pernos ni en el de las tuercas.

Para mallar el pilar, la chapa frontal, la viga y las cabezas y tuercas de los tornillos se utiliza el tipo de elemento denominado SOLID8 de la librería de COSMOS/M³¹. Se trata de un elemento isoparamétrico de 8 nodos e integración completa en $2 \times 2 \times 2$ puntos de Gauss. La chapa frontal y el ala del pilar se mallan de forma que existan nodos coincidentes en ambas superficies, entre los que se introducen los elementos de contacto (tipo GAP³¹), empleados para modelar la interacción entre las dos chapas. Por idéntica razón, también existen nodos coincidentes en las chapas y en las cabezas y tuercas de los tornillos, entre los que se establecen los correspondientes elementos de contacto.

Los elementos de contacto se definen inicialmente cerrados (chapas en contacto) y con capacidad de resistir compresión. De esta manera se permite que las chapas se separen en la zona a tracción de la unión, pero se impide que la chapa frontal “atravesase” el ala del pilar en la zona de compresión. No se considera la fricción entre las chapas, puesto que se supone que los tornillos trabajan a cortadura y a aplastamiento, pero no están pretensados. Con el fin de estabilizar las partes del modelo que sean inestables si se ignora el contacto se introduce una rigidez en la dirección perpendicular al plano de contacto, cuyo valor (k_y) sea como mínimo el necesario para soportar adecuadamente el modelo y evitar que se produzcan movimientos de sólido rígido, pero lo suficientemente pequeño como para no alterar significativamente los resultados. En los casos analizados se ha considerado $k_y = 10^3 \text{ kN/m}^2$.

Cada espiga de los tornillos (Figura 4) ha sido modelada empleando ocho elementos de los llamados TRUSS3D (barra tridimensional) en la librería de COSMOS/M³¹, distribuidos uniformemente en el perímetro del perno real. La razón por la que se utiliza este tipo de elemento es que permite introducir fácilmente en la espiga la fuerza de pretensado necesaria para simular el apriete del tornillo.

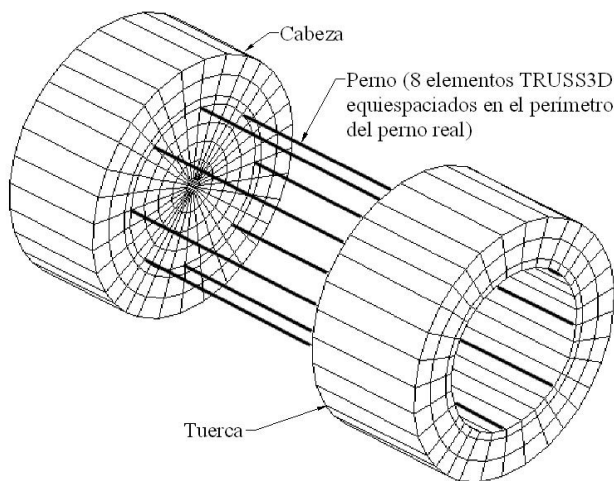


Figura 4. Modelado de los tornillos

En lo referente a las condiciones de contorno (Figura 5), la unión es sometida solamente a un momento flector aplicado en la sección extrema libre de la viga a través de una distribución de presiones que varía linealmente a lo largo de la línea media del alma y es constante en su espesor. Esta distribución se hace efectiva concentrándola en una serie de

fuerzas equivalentes aplicadas en los nodos de la discretización situados en la sección libre de la viga. Concretamente, la definición de la carga se realiza asociando dichas fuerzas nodales con una curva de tiempo, obteniéndose la carga aplicada en cada instante como el producto de la carga nominal por el valor de la curva asociada en ese instante. En cuanto a las condiciones de borde, se aplican las correspondientes a la existencia de simetría respecto a los planos anteriormente apuntados.

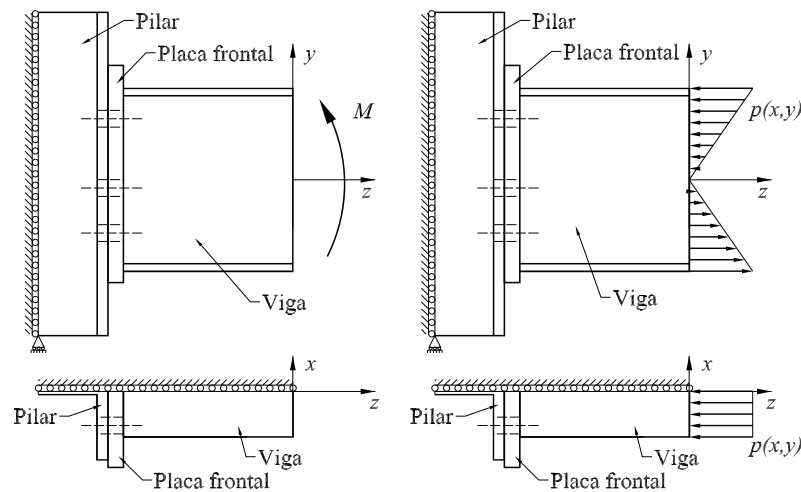


Figura 5. Condiciones de contorno

En lo referente al tipo de comportamiento del material adoptado, se utiliza el modelo de plasticidad de Huber–von Mises. El diagrama tensión–deformación empleado ha sido el elasto–plástico ideal sin endurecimiento por deformación plástica.

Como se puede apreciar el modelo desarrollado es altamente no lineal, ya que incluye la simulación del contacto entre la chapa frontal y el ala del pilar, entre la chapa frontal y la cabeza de los tornillos y entre el ala del pilar y las tuercas, además de considerar una ley de comportamiento del material no lineal. Para la resolución del problema se utiliza un método paso a paso con una técnica de control por fuerza, en el que la carga total está prescrita y donde se da un incremento de carga en cada paso. El sistema de ecuaciones no lineales al que se llega se resuelve mediante el método iterativo de Newton–Raphson, en el que la matriz de rigidez se actualiza en cada iteración dentro de cada paso, por ser el recomendado para el modelo de plasticidad empleado³¹ y porque además se ha comprobado que en este problema el empleo de otros métodos de resolución alternativos no supone una disminución apreciable del tiempo de cálculo.

De entre todas las técnicas implementadas en COSMOS/M para el control del tamaño del paso de carga, en el análisis del modelo desarrollado se ha empleado la técnica del paso adaptativo automático³¹, ya que proporciona la optimización del tamaño del mismo según la convergencia del problema, evita la convergencia hacia soluciones incorrectas producidas por grandes deformaciones unitarias dentro del campo plástico y ajusta el paso de integración para evitar la terminación del proceso de solución por exceder el número de iteraciones de equilibrio debido a la falta de convergencia del problema, por la no convergencia en las iteraciones de contacto y por la presencia de un término negativo en la diagonal de la matriz de rigidez, hecho que puede ser debido a un incremento de la carga demasiado grande bajo el método de control en fuerza.

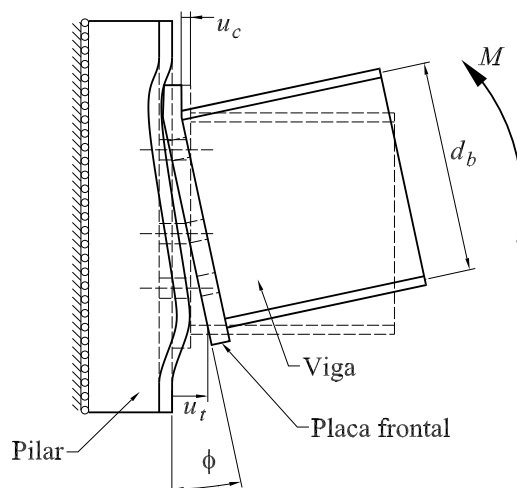


Figura 6. Deformada aproximada

En las uniones analizadas, la chapa frontal gira con el centro de rotación situado en el ala comprimida de la viga o en sus proximidades (Figura 6 y 12). Teniendo esto en cuenta, el giro de la unión en cada instante (ϕ) se calculará dividiendo la suma de la máxima separación de la chapa frontal a la altura del ala traccionada de la viga (u_t) y el aplastamiento máximo del ala del pilar en torno al centro de compresiones (u_c) entre la distancia que separa los planos medios de las alas de la viga (d_b), tal como hacen otros investigadores^{25,30}.

$$\phi = \frac{u_t + u_c}{d_b} \quad (1)$$

ANÁLISIS EXPERIMENTAL

A fin de validar el modelo numérico descrito en el apartado anterior, se ha realizado un protocolo para el ensayo experimental en laboratorio de las uniones consideradas. Aunque para conseguir el objetivo que se perseguía (obtención de la curva momento-rotación de la unión) lo ideal hubiese sido aplicar las cargas en la viga de modo que sólo trabajase a flexión, apoyar el pilar y disponer los instrumentos necesarios para obtener el giro introducido por las diversas componentes de la unión (medición directa de los desplazamientos en los tornillos, en la chapa frontal y en las alas de la viga, como mínimo), no se disponía ni de la máquina de ensayos ni de la instrumentación necesaria para ello. Debido a esas limitaciones técnicas, se optó por la realización de ensayos sobre montajes mucho más sencillos (cuyo esquema se muestra en la Figura 7) consistentes en apoyar articuladamente los extremos libres de las vigas, permitiendo el desplazamiento del pilar en su dirección axial (vertical). La carga se aplica verticalmente sobre éste último y se mide el desplazamiento del mismo en la dirección de dicha carga.

En cuanto a las condiciones de sustentación, las vigas se apoyaron en las proximidades de sus extremos libres sobre la sección central de sendos perfiles IPE-300, de 1 m de longitud y dispuestos perpendicularmente, que descansan sobre la cimentación. Con objeto de materializar una articulación, entre ambos se colocó un redondo fijado mediante un punto de soldadura. Al objeto de impedir el vuelco lateral de las vigas, en dichos apoyos articulados se colocó un dispositivo antivuelco.

El trozo de perfil dispuesto a modo de pilar era de longitud suficiente como para que ésta no influyera en los resultados. En su parte superior se soldó, previa preparación adecuada de superficies, un chapón de 25 mm de espesor y de dimensiones algo mayores que las del perfil para conseguir que la transmisión de la carga fuese lo más uniforme posible en todo el área del mismo (pilar trabajando únicamente a esfuerzo axial). A fin de evitar el vuelco del conjunto, se dispusieron unos topes laterales sobre los que deslizaba el pilar (no han sido dibujados en el esquema de la Figura 7). Para aplicar la carga se utilizó una célula hidráulica de compresión con una capacidad máxima de 23 toneladas. Ésta estaba montada sobre un bastidor suficientemente rígido y empujaba sobre la parte central del chapón de reparto. Dicha célula estaba equipada con la instrumentación necesaria para conocer en todo momento el valor de la carga que transmitía a la estructura.

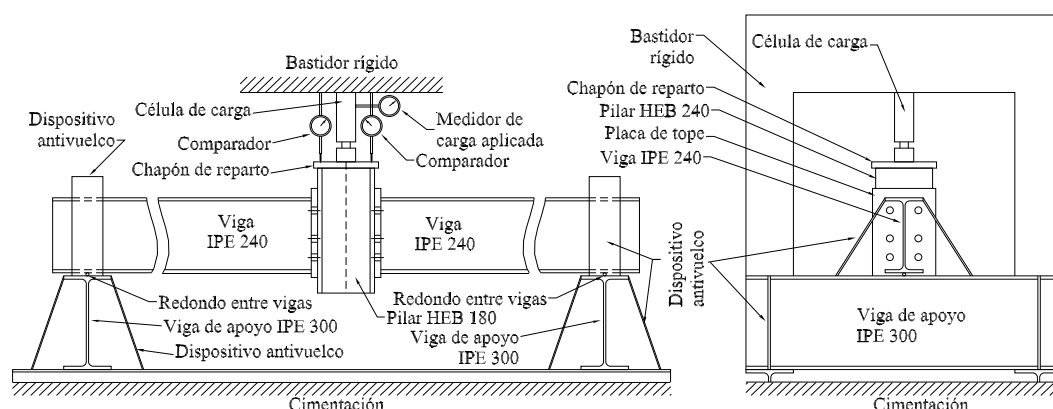


Figura 7. Esquema del montaje realizado

El desplazamiento vertical sufrido por el pilar durante los ensayos era medido mediante dos comparadores dispuestos al efecto, uno a cada lado de la célula de carga en la dirección de las vigas, sujetos al bastidor rígido y palpando sobre la parte superior del chapón. Durante la realización de los ensayos, la carga se aplicó de forma estática y progresiva en incrementos de 5 kN (media tonelada), procediéndose a registrar las lecturas de los comparadores una vez que sus valores se habían estabilizado. El desplazamiento vertical del pilar (δ_E) se calculó como el valor medio de las lecturas de ambos comparadores. De esta manera se obtuvieron directamente los datos necesarios para representar la curva carga aplicada frente a desplazamiento vertical del pilar.

Los ensayos se dieron por finalizados cuando se observó una desproporción muy acusada entre el incremento de carga aplicado y el desplazamiento producido, condición indicativa de la pérdida de rigidez por plastificación o rotura de algún componente de la unión o por plastificación de alguna zona de las vigas.

Para obtener la curva momento–rotación correspondiente a la unión ensayada es preciso realizar algunos cálculos teóricos. En este sentido, en la Figura 8a se muestra el modelo teórico de la viga simplificado por simetría. La unión semirrígida se modela mediante un muelle cuya rigidez secante (S) depende del momento solicitante (M). En dicha figura, L es la longitud de la viga comprendida entre la unión y el apoyo articulado, q el peso propio de la misma, P_g es el peso del pilar, tornillos y chapón de reparto, R_g y M_g son las cargas derivadas del peso propio del trozo de viga exterior en voladizo y P es la carga aplicada por la célula de carga. Como reacciones, se tienen R sobre la viga de apoyo y M sobre el pilar. Realizando un sencillo análisis estático en el que se consideren las deformaciones debidas al

esfuerzo cortante, se llega a:

$$M = \frac{1}{2} (P + P_g) L - M_g + \frac{1}{2} q L^2 \quad (2)$$

$$R = \frac{1}{2} (P + P_g) + q L + R_g \quad (3)$$

$$\delta = \delta_c + \frac{L^2}{24 E I} ((P + P_g) (4 + \alpha) L - 12 M_g + q L^2 (5 + \alpha)) + \frac{L}{S} \left(\frac{1}{2} (P + P_g) L - M_g + \frac{1}{2} q L^2 \right) \quad (4)$$

$$\phi = \frac{M}{S} = \frac{1}{S} \left(\frac{1}{2} (P + P_g) L - M_g + \frac{1}{2} q L^2 \right) \quad (5)$$

donde δ es el descenso del pilar, δ_c el descenso del apoyo articulado, ϕ la rotación en la unión, E el módulo de elasticidad de material, I el momento de inercia de la viga y

$$\alpha = \frac{12 E I}{G A_c L^2} \quad (6)$$

es el parámetro que incluye la deformación por cortante, siendo G el módulo de rigidez transversal y A_c el área a cortante de la viga.

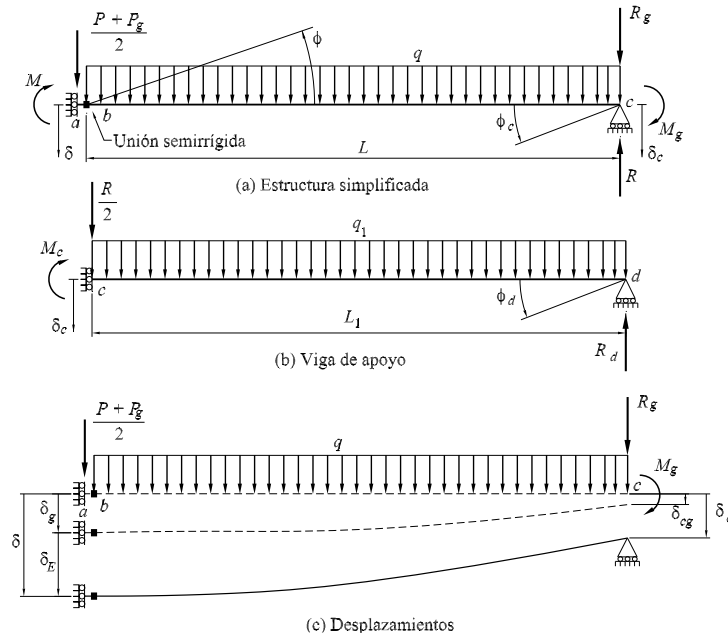


Figura 8. Modelo teórico del ensayo

Para el cálculo de δ_c se analizará el modelo, también simplificado por simetría, de la viga de apoyo representada en la Figura 8b. En ella, q_1 es su peso propio, L_1 la mitad de su longitud y M_c y R_d las reacciones. En dicho modelo

$$\delta_c = \frac{L_1^2}{24 E I_1} (R L_1 (4 + \alpha_1) + q_1 L_1^2 (5 + \alpha_1)) \quad (7)$$

con

$$\alpha_1 = \frac{12 E I_1}{G A_{c1} L_1^2} \quad (8)$$

siendo I_1 y A_{c1} el momento de inercia y el área a cortante de la sección transversal de la viga de apoyo, respectivamente.

Por lo tanto, para un nivel de carga P se puede despejar la rigidez S de la ecuación (4), haciendo uso previo de (7), y sustituir el resultado en (5), con lo que a partir de ésta y de la expresión (2) se podría dibujar la curva momento–rotación de la unión. Sin embargo, en los ensayos no se ha podido medir el desplazamiento total δ debido a las limitaciones técnicas de las instalaciones de que se disponía. En su lugar, para cada nivel de carga P se ha medido el desplazamiento δ_E desde la configuración estabilizada resultante de aplicar las cargas muertas (Figura 8c). Es decir, el desplazamiento δ_g que se produce una vez realizado el montaje, debido a q , q_1 , P_g y M_g , no ha podido ser medido. No obstante, asumiendo un comportamiento rígido de la unión ($S = \infty$) durante la aplicación de las cargas muertas, aproximación que puede hacerse debido al pequeño valor de dichas cargas, el desplazamiento δ_g debido a las mismas puede obtenerse de la ecuación (4) haciendo $S = \infty$ y $P = 0$:

$$\begin{aligned} \delta_g = & \frac{L^2}{24 E I} (P_g L (4 + \alpha) - 12 M_g + q L^2 (5 + \alpha)) + \\ & + \frac{L_1^2}{24 E I_1} \left(\left(\frac{1}{2} P_g + q L + R_g \right) (4 + \alpha_1) L_1 + q_1 L_1^2 (5 + \alpha_1) \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Como $\delta = \delta_g + \delta_E$ (Figura 8c), considerando las ecuaciones (4) y (9)

$$\delta_E = \delta - \delta_g = \frac{P L^3}{24 E I} \left((4 + \alpha) + \frac{1 L_1^3 I}{2 L^3 I_1} (4 + \alpha_1) \right) + \frac{1}{S} \left(\frac{1}{2} (P + P_g) L^2 - M_g L + \frac{1}{2} q L^2 \right) \quad (10)$$

de donde, despejando, se obtiene la rigidez secante de la unión, que sustituida en (5) permite hallar el giro buscado en función del desplazamiento medido en el ensayo:

$$\phi = \frac{\delta_E}{L} - \frac{1 P L^2}{24 E I} \left((4 + \alpha) + \frac{1 L_1^3 I}{2 L^3 I_1} (4 + \alpha_1) \right) \quad (11)$$

EJEMPLO

Como ejemplo de aplicación se presenta el análisis de la unión típica representada en la Figura 9. Como se aprecia, se trata de dos vigas con sección IPE–240 unidas a un pilar HEB–180, una por cada lado. El momento transmitido por ambas vigas es el mismo y de sentido contrario, por lo que la unión está equilibrada y no se induce cortante alguno en el alma del pilar. Tanto las vigas como el pilar están hechas de acero S275JR, de límite elástico igual a 275 MPa. Las chapas frontales tienen un espesor de 20 mm, se unen a la viga mediante cordones de soldadura en ángulo con gargantas abatidas de 8 mm en las alas y de 6 mm en el alma y también están hechas de acero S275JR. Los tornillos utilizados son de alta resistencia con 20 mm de diámetro y en calidad de acero 8.8, cuyo límite elástico y resistencia última son 640 y 800 MPa, respectivamente. Se disponen con una holgura de 2 mm y se colocan cuatro en la zona de tracción y dos en la de compresión, sin pretensar (se trata de tornillos trabajando a cortadura y aplastamiento, categoría D de uniones según el Eurocódigo 3).

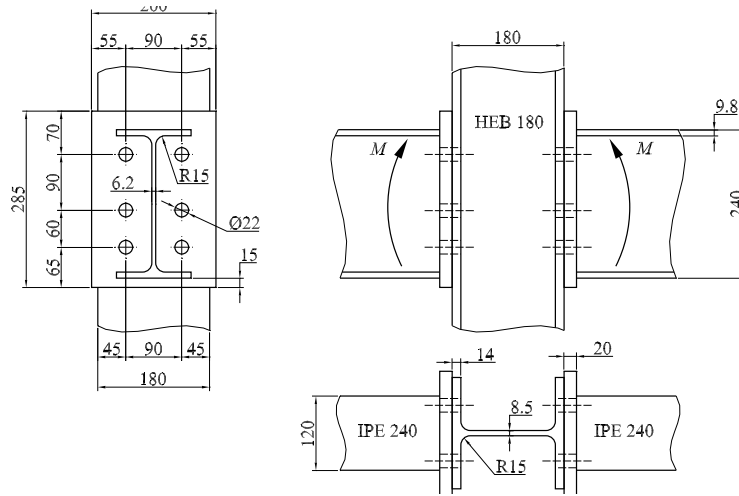


Figura 9. Geometría de la unión

En la Figura 13 se ha representado, entre otras, la curva momento–rotación de la unión considerada que se deduce de aplicar las recomendaciones dadas por el Anejo J del Eurocódigo 3⁴ haciendo todos los coeficientes de seguridad que intervienen en el cálculo iguales a la unidad. Según éstas, el momento resistido por la unión es $M_{Rd,EC3} = 61.683 \text{ kNm}$ y su rigidez inicial es $K_{\phi,EC3} = 14.286 \text{ MNm/rad}$, constante (comportamiento lineal de la unión) hasta que el momento alcanza el valor $M_{elástico,EC3} = 2 M_{RD,EC3}/3 = 41.122 \text{ kNm}$.

Para la realización del ensayo se dispusieron unas vigas de longitud total 1.25 m, siendo de 1.14 m la distancia entre el apoyo extremo y la chapa frontal. La longitud del pilar fue de 0.8 m. Con estos valores, considerando que $E=2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $G=8.077 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, $q=307 \text{ N/m}$, $q_1=422 \text{ N/m}$, $I=3890 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$, $I_1=8360 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$, $P_g=502.626 \text{ N}$, $A_c=10.2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ y $A_{c1}=16.263 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, resultan $R_g=33.77 \text{ N}$, $M_g=1857.35 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$, $\alpha = 0.916$ y $\alpha_1 = 6.415$. Con ello,

$$\delta_g = 368.445 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad (12)$$

$$M = 484.128 + 0.57 P \quad (13)$$

$$\phi = 877.193 \cdot 10^{-3} \delta_E - 339.392 \cdot 10^{-10} P \quad (14)$$

$$S = \frac{M}{\phi} = \frac{180.918 \cdot 10^5 + 21300.810 P}{32780.563 \delta_E - 126.830 \cdot 10^{-5} P} \quad (15)$$

donde los desplazamientos se consideran en metros, los ángulos en radianes y la rigidez en Nm/rad .

Se dio por agotada la capacidad resistente de la estructura con una carga de 130 kN, midiéndose un desplazamiento $\delta_E = 25.750 \text{ mm}$. A este nivel de carga le corresponde un momento flector en la unión $M_{Rd,ensayo} = 74.584 \text{ kNm}$, momento que también es el máximo que solicita la viga. Es interesante comentar el hecho de que al no superar durante el ensayo el momento elástico en ninguna sección, tanto de la viga unida ($M_{viga,elástico} = 89.146 \text{ kNm}$) como en la viga de apoyo ($M_{viga1,elástico} = 153.267 \text{ kNm}$), éstas recuperaron su posición original una vez retirada la carga. Una vez desmontada la unión, se pudo comprobar que el agotamiento de la misma se produjo por plastificación del ala del pilar (chapa de la unión

con menor espesor). En la chapa frontal y en los tornillos no se apreciaron deformaciones excesivas durante la realización del ensayo ni deformaciones permanentes una vez finalizado el mismo.

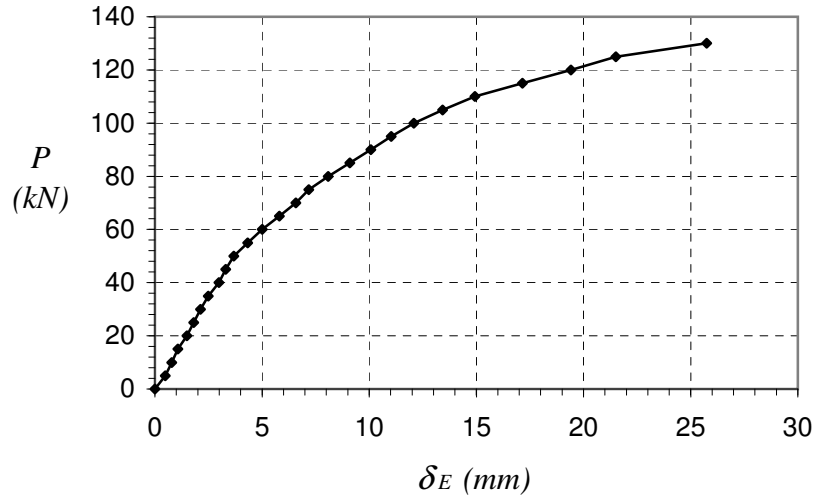


Figura 10. Curva carga-desplazamiento medido en el ensayo

En la Figura 10 se ha representado la curva desplazamiento medido en el ensayo frente a la carga aplicada. En ambas se aprecia un primer tramo aproximadamente lineal (desde 0 hasta 50 kN de carga aplicada) seguido de otro tramo (desde 50 kN hasta 130 kN) claramente no lineal. Además, la intersección entre ambos tramos tiene el aspecto de ser un “punto anguloso”, con una brusca disminución de la pendiente. Podría decirse que dicho punto marca el inicio del comportamiento no lineal de la unión. La curva momento-rotación correspondiente se ha representado en la Figura 13, junto con las obtenidas teóricamente mediante el Eurocódigo 3 y numéricamente con el modelo antes propuesto. De nuevo se observan en ella los dos tramos antes aludidos, lineal para momentos inferiores a $M_{elástico,ensayo} = 28.984 \text{ kNm}$ y no lineal para momentos superiores. Interpolando mediante una regresión de mínimos cuadrados, se obtiene que la recta que mejor se ajusta al tramo lineal es

$$M = 19.338 \phi - 0.117 \quad (16)$$

donde el momento se expresa en kNm y el giro en $mRad$. De la ecuación anterior se deduce que la rigidez inicial de la unión es $K_{\phi,ensayo} = 19.338 \text{ MNm/rad}$. La existencia de un término libre no nulo (el momento debería ser nulo para giro nulo) es debida al deslizamiento de las chapas durante el proceso de carga. Para eliminar el efecto que este deslizamiento produce en la curva hay que trasladarla hacia la izquierda un giro $\phi_0 = 0.117/19.338 = 0.006 \text{ mRad}$. La curva momento-rotación corregida de esta forma es la mostrada en la Figura 13.

Al igual que hacen otros investigadores (Faella *et al.*²⁰), para poder comparar con los resultados deducidos aplicando el Eurocódigo 3, se considerará, al igual que en éste, que el momento plástico resistido por la unión es el que corresponde a una rigidez secante de valor $S_{\phi,ensayo} = K_{\phi,ensayo}/3 = 19.338/3 = 6.446 \text{ MNm/rad}$. Interpolando linealmente entre los dos pares de datos correspondientes se obtiene que a esta rigidez secante le corresponden un momento $M_{Rd,ensayo} = 64.147 \text{ kNm}$ y un giro $\phi_{Rd,ensayo} = 9.952 \text{ mRad}$. Como se aprecia, según los resultados anteriores, el Eurocódigo 3 minora la resistencia de la unión un 3.8% y sin embargo, por el contrario, mayor el momento máximo de comportamiento elástico un 41.9%. En cuanto a la rigidez inicial, el Eurocódigo la minora un 26.1%.

A continuación se expondrá el análisis numérico realizado con COSMOS/M. El modelo de geometría considerado es el mostrado en la Figura 3. Incluye 1175 puntos, 2824 curvas y 424 volúmenes hexaédricos (146 en el pilar, 132 en la chapa frontal, 26 en la viga y 120 en los tornillos) que permiten realizar un mallado estructurado de forma automática. Para el análisis se consideró inicialmente una malla (Figura 11a) estructurada con 3782 nodos, 2428 elementos sólidos (SOLID8) y 684 elementos de contacto (GAP), además de los 16 lineales (TRUSS3D) que modelaban las espigas de los pernos. Cuando se logró la convergencia adecuada de la solución, se realizó un *afine* de la malla hasta agotar las prestaciones del ordenador de que se disponía, llegando a otra (Figura 11b) con 7300 nodos, 3497 elementos sólidos y 1213 elementos de contacto, además también de los 16 lineales antes apuntados.

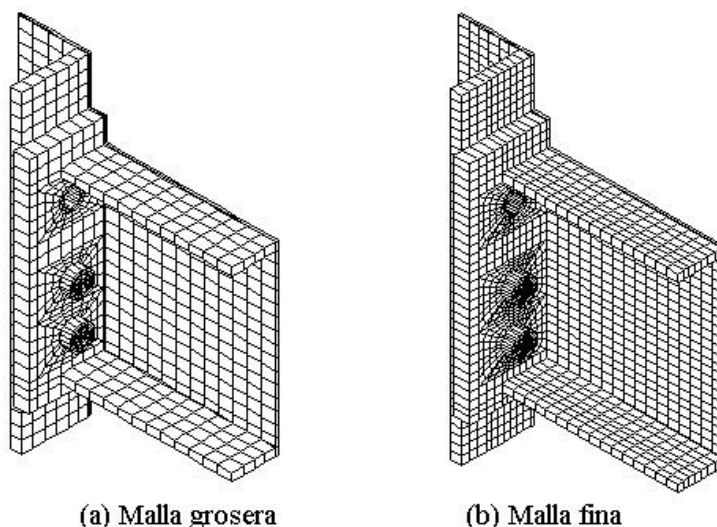


Figura 11. Mallas de elementos finitos

La deformada obtenida para la malla fina se ha dibujado en la Figura 12. En la Figura 13 se muestran las curvas momento-rotación obtenidas, tanto para la discretización gruesa como para la más refinada, junto con la obtenida teóricamente aplicando el Anejo J del Eurocódigo 3 y la deducida de los datos obtenidos en el ensayo. Como puede observarse, la solución correspondiente a la malla fina proporciona prácticamente la misma curva momento-rotación que los resultados experimentales hasta alrededor del 50% de la carga última. A medida que aumenta la carga, el modelo numérico resulta ser un poco más rígido que la unión ensayada.

En cuanto a la solución dada por el modelo de elementos finitos con malla gruesa, el coste computacional es significativamente menor con respecto al modelo refinado, pero no es aceptable en cuanto a la precisión en los valores de rotación obtenidos. Así, en el último paso de carga, los valores de deformación aumentan alrededor del 70% con el refinamiento de la malla.

Los estudios teóricos demuestran que la flexibilidad y la resistencia de la unión dependen del espesor de las chapas unidas. El efecto del espesor de la chapa frontal en el comportamiento de la unión se muestra en la Figura 14, donde se representan las curvas momento-rotación correspondientes a los modelos de elementos finitos con espesores de chapa frontal $t_{ep} = 15 \text{ mm}$, $t_{ep} = 20 \text{ mm}$ y $t_{ep} = 25 \text{ mm}$, todos ellos con espesor de ala del pilar $t_{fc} = 14 \text{ mm}$ (HEB 180). Aunque no se muestra la dependencia de la curva momento-rotación respecto del espesor del ala del pilar, se ha observado que, como era de esperar, a medida que aumenta éste, también aumenta la rigidez de la unión, aunque la sensibilidad es mayor a la variación del espesor de la chapa frontal.

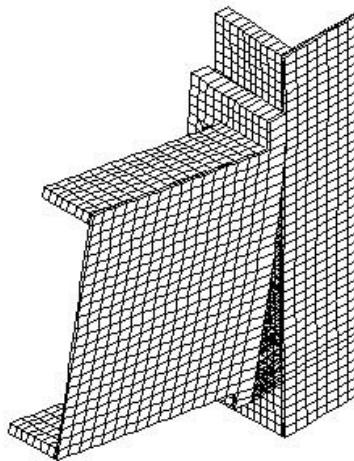


Figura 12. Deformada de la unión

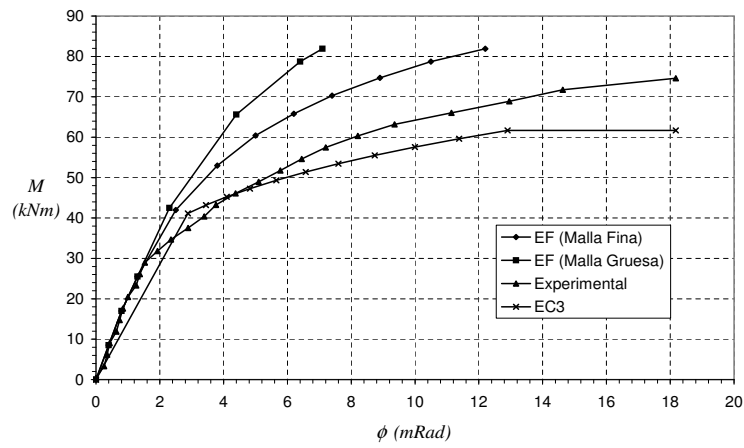


Figura 13. Curvas momento-rotación

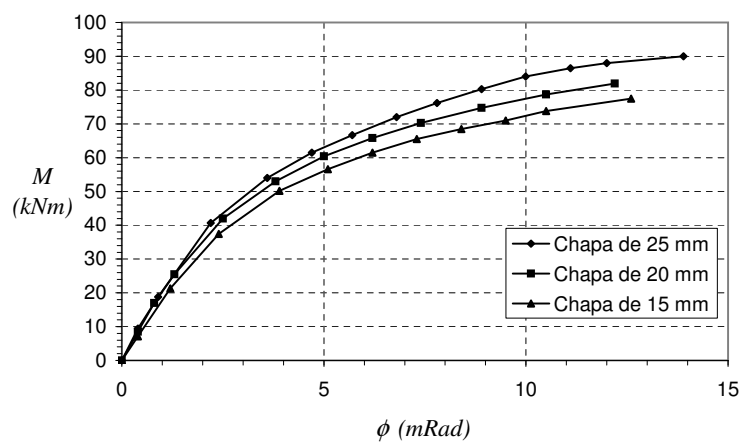


Figura 14. Efecto del espesor de la chapa frontal en la curva momento-rotación

En la Figura 15 se presentan las contribuciones de cada componente de la unión ensayada (chapa frontal, ala del pilar y tornillos) a la curva momento–rotación de la misma, calculadas según proponen Sherbourne²⁵ y Jenkins³⁰. Se observa que, al igual que en el resto de uniones analizadas numéricamente, el 80 ÷ 90% de la rotación total es producida por la flexión de la chapa frontal, mientras que el 3 ÷ 11% se debe a la flexión del ala del pilar y el 2 ÷ 7% a la elongación de los tornillos. Como se aprecia, estas dos últimas contribuciones son muy poco significativas, como ya habían deducido los investigadores antes aludidos.

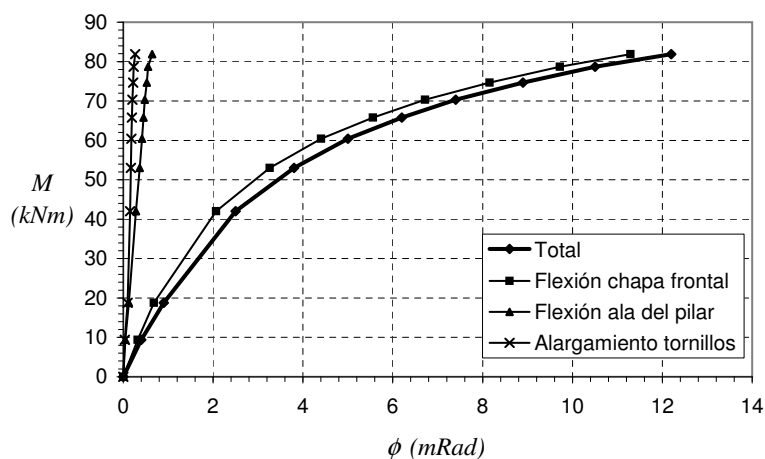


Figura 15. Contribución de cada componente de la unión ($t_{ep} = 20 \text{ mm}$ y $t_{fc} = 14 \text{ mm}$)

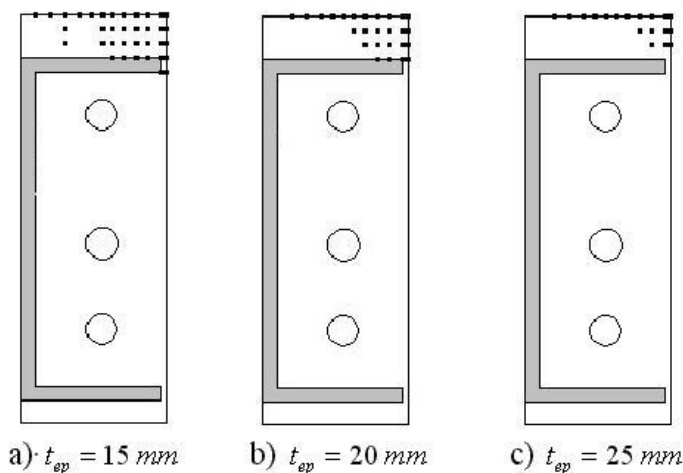


Figura 16. Zona de contacto entre las chapas ($t_{fc} = 14 \text{ mm}$)

La zona de contacto entre la chapa frontal y el ala del pilar correspondiente al último paso de carga en algunas de las uniones con chapa a tope que se han analizado se indica en la Figura 16, donde se muestran los pares de contacto cerrados. Se puede observar que dicha zona está situada sólo en la parte comprimida, despegándose toda la chapa en la zona a tracción de la unión. Por lo tanto, no se ha producido lo que se conoce como efecto de palanca (prying), que consiste en la aparición de una zona de contacto en los bordes de la zona traccionada entre la chapa y el ala del pilar y que es debido a la deformación a flexión de la chapa. Además, también se aprecia que el tamaño de la zona de contacto decrece al

aumentar el espesor de la chapa frontal, lo cual es lógico, pues con ello aumenta la rigidez a flexión de la misma.

Para finalizar, en la Figura 17 se muestran las distribuciones de tensiones de von Mises en la chapa frontal y en el ala del pilar, correspondientes al último paso de carga, para algunas de las uniones analizadas con el modelo numérico presentado. Se puede observar que la máxima tensión de tracción se alcanza entre las dos filas de tornillos, mientras que la máxima compresión se produce cerca del plano medio del alma. Asimismo se aprecia que en la chapa frontal disminuye ligeramente la extensión de la zona sometida a las máximas tracciones y mucho más acusadamente la de la sometida a las máximas compresiones a medida que aumenta el espesor de la chapa. Sin embargo, en el ala del pilar al ir aumentando el espesor de la chapa se aprecia un ligero aumento de ambas zonas sometidas a tensiones extremas.

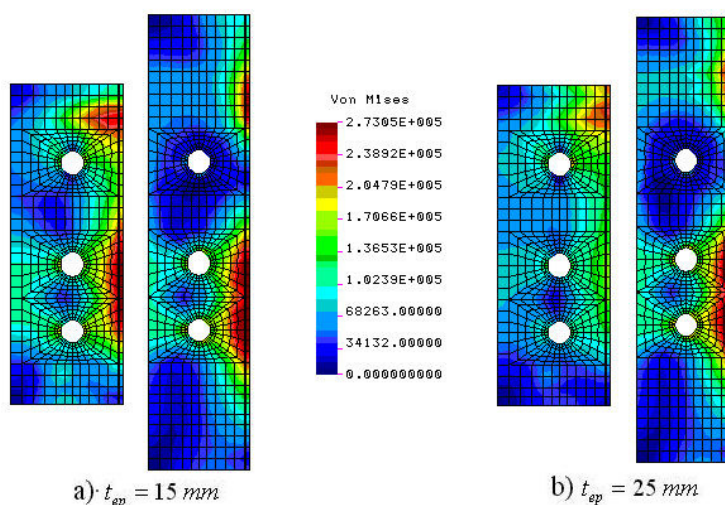


Figura 17. Tensiones de von Mises en kN/m^2 ($t_{fc} = 14 mm$)

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha desarrollado un modelo tridimensional de elementos finitos que simula el comportamiento real de uniones viga–pilar atornilladas materializadas con chapa frontal a tope. El modelo desarrollado se caracteriza por el empleo de elementos sólidos y una malla de elementos finitos razonablemente fina que conjuga la precisión de resultados con el coste computacional asociado al análisis. Ha sido necesario desarrollar un modelo tridimensional de la unión, ya que los modelos con elementos lámina propuestos por otros investigadores no pueden desarrollar ni recoger los efectos en dirección perpendicular a la superficie media de la lámina. El modelo destaca por su comportamiento altamente no lineal, ya que tiene en cuenta la compleja interacción (contacto) entre los diversos elementos que componen la unión y considera un comportamiento elástico–perfectamente plástico del acero. En cuanto a los resultados, se han obtenido y presentado la curva momento–rotación completa hasta el agotamiento de la unión, la distribución de tensiones de los distintos elementos y la contribución de cada uno de ellos a la flexibilidad de la unión.

Para la validación del modelo propuesto se ha realizado, en primer lugar, un estudio teórico de la unión, basado en la equivalencia de tramos o casquillos en T y en la Teoría de las Líneas de Ruptura, según propone el Eurocódigo 3. En segundo lugar, se ha realizado un ensayo en el que se carga la unión hasta producirse su agotamiento resistente. La

comparación de la curva momento–rotación proporcionada por el modelo de elementos finitos desarrollado con los resultados experimentales revela que el modelo propuesto puede simular adecuadamente el comportamiento real de las uniones con chapa frontal a tope.

El modelo tridimensional de elementos finitos presentado en este trabajo puede ser empleado para obtener un modelo matemático del comportamiento rotacional de las uniones con chapa frontal mediante la realización de estudios paramétricos más extensos, complementando y ampliando los resultados experimentales, que permita tener en cuenta los efectos de la flexibilidad de la unión en el análisis de la estructura, tal y como recogen en su filosofía de diseño las normativas modernas como el Eurocódigo 3.

AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan su agradecimiento a la Junta de Castilla y León por la financiación del presente trabajo a través de un proyecto subvencionado en la convocatoria del “Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación para proyectos a realizar por grupos de investigación y grupos de investigación noveles, a iniciar en el año 2006”.

REFERENCIAS

- 1 American Institute of Steel Construction (AISC), “Allowable Stress Design Specification for Structural Steel Buildings (ASD)”, American Institute of Steel Construction, Chicago, (1989).
- 2 American Institute of Steel Construction (AISC), “Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings (LRFD)”, American Institute of Steel Construction, Chicago (1986).
- 3 Comité Europeo de Normalización (CEN), “Eurocódigo 3: Proyecto de estructuras de acero. Parte 1–1: Reglas generales y reglas para edificación”, UNE–ENV 1993–1–1, (1996).
- 4 Comité Europeo de Normalización (CEN). “Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1–1: General rules and rules for buildings. Annex G, H, J revised, N and Z”, UNE–ENV 1993–1–1/A2, (1998).
- 5 Ministerio de Vivienda, Código Técnico de la Edificación, Gobierno de España,(2006).
- 6 A.V. Goverdan, “A collection of experimental moment–rotation curves and evaluation of prediction equations for semirigid connections”, M.S, Thesis, Vanderdilt University, Nashville Tennessee (1983).
- 7 D.A. Nethercot, “Steel beam to column connections: a review of test data and its applicability to the evaluation of joint behaviour in the performance of steel frames”. CIRIA Project Study, London, England, (1985).
- 8 N. Kishi, W.F. Chen, Y. Goto y K.G. Matsuoka ”Design aid of semi–rigid connections for frame analysis”, *Engrg. J., AISC*, 3rd Quarter, pp. 90–107, (1993).
- 9 K. Weinand, “SERICON – Databank of Joints in Building Frames”, Proceedings of the 1st COST C1 Workshop, Strasbourg, (1992).
- 10 B. Kato y W. Mcguire, “Analysis of T–stub flange–to–column connections”, *J. Struct. Div., ASCE*, Vol. **99**, N° 5, pp. 865–888, (1973).
- 11 H. Agerskov, “Analysis of bolted connections subject to prying”, *J. Struct. Div., ASCE*, Vol. **103**, N° ST11, pp. 2145–2163, (1977).
- 12 A.P. Mann y L.J. Morris, “Limit design of extended endplate connections”, *J. Struct. Div., ASCE*, Vol. **105**, N° 3, pp. 511–526, (1979).
- 13 N. Kishi y W.F. Chen, “Moment–rotation relations of semi-rigid connections with angles”, *J. Structural Engrg., ASCE*, Vol. **116**, N° 7, pp. 1813–1834, (1990).

- 14 W.F. Chen, N. Kishi y K.G. Matsuoka “Moment-rotation relation of top and seat angle with double web angle connections”, in *Connections in steel structures: behaviour, strength and design*, pp. 121–134, BJORHOVDE, BRAZETTI and COLSON (Eds.), Elsevier Applied Science, London, (1988).
- 15 N. Kishi, W.F. Chen, K.G. Matsuoka y S.G. Nomachi “Moment-rotation relation of single/double web angle connections”, in *Connections in steel structures: behaviour, strength and design*, pp. 135–146, R. BJORHOVDE, BRAZETTI and COLSON (Eds.), Elsevier Applied Science, London, (1988).
- 16 R.P. Johnson y C.L.C. Law, “Semirigid joints for composite frames”, in *Joints in structural steelwork*, pp. 3.3–3.19, Pentech Press, London, (1981).
- 17 Y.L. Yee y R.E. Melchers, “Moment-Rotation curves for bolted connections”. *J. Struct. Engrg., ASCE*, Vol. **112**, N° 3, pp. 615–635, (1986).
- 18 C. Faella y V. Piluso, “Proposals to improve Eurocode 3 approach for predicting the rotational stiffness of extended end plate connections”, Department of Civil Engineering, University of Salerno, Report N° 73, (1995).
- 19 C. Faella y V. Piluso, “A new method to design extended end plate connections and semi-rigid braced frames”, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. **41**, N° 1, pp. 61–91, (1997).
- 20 C. Faella, V. Piluso y G. Rizzano, “Structural steel semi-rigid connections: theory, design and software”, *CRC Press*, (1999).
- 21 N. Krishnamurthy, H.T. Huang, P.K. Jeffrey y L.K. Avery, “Analytical $M-\theta$ curves for endplate connections”, *J. Struct. Div., ASCE*, Vol. **105**, N° 1, pp. 133–145, (1979).
- 22 T.S. Tarpy y J.W. Cardinal, “Behaviour of semi-rigid beam-to-column end plate connections”, *Proc. Conf. on Joints in Struct. Steelwork*, pp. 2.3–2.25, Teesside Polytechnic, Middlesbrough, Cleveland, England, (1981).
- 23 A.R. Kukreti, T.M. Murray y A. Abolmaali, “End-Plate connection moment-rotation relationship”, *J. Construct. Steel Research*, Vol. **8**, pp. 137–157, (1987).
- 24 T.M. Murray y A.R. Kukreti, “Design of 8-bolt stiffened moment end plates”, *Engrg. J., AISC*, 2nd Quarter, pp. 45–53, (1988).
- 25 A.N. Sherbourne y M.R. Bahaari, “3D Simulation of end plate connections”. *J. Struct. Engrg., ASCE*, Vol. **120**, N° 11, pp. 3122–3136, (1994).
- 26 N. Krishnamurthy y D.E. Graddy, “Correlation between 2- and 3-dimensional finite element analysis of steel bolted end plate connections”, *Comp. & Struct.*, Vol. **6**, pp. 381–389, (1976).
- 27 O.S. Bursi y J.P. Jaspart, “Benchmarks for finite element modeling of bolted steel connections”, *J. Construct. Steel Res.*, Vol **43**, N° 1, pp. 17–42, (1997).
- 28 O.S. Bursi y J.P. Jaspart, “Calibration of a finite element model for isolated bolted end plate steel connections”, *J. Construct. Steel Res.*, Vol. **44**, N° 3, pp. 225–262, (1997).
- 29 C.K. Choi, “Refined three-dimensional finite element model for end plate connection”, *J. Struct. Engrg., ASCE*, Vol. **122**, N° 11, pp. 1307–1316, (1996).
- 30 W.M. Jenkins, C.S. Tong y A.T. Prescott, “Moment-transmitting end plate connections in steel construction, and a proposed basis for flush endplate design”, *Struct. Engrg.*, Vol. **64A**, N° 5, pp. 121–132, (1986).
- 31 Structural Research and Análisis Corporation, “COSMOS/M 2.0 Manuals Finite Element Analysis System”, Los Ángeles, California, USA, (1998).