

Un modelo numérico para la simulación de la evolución del fondo marino en la zona cercana a la costa

Joan Pau Sierra, Marius Tomé y Agustín Sánchez-Arcilla

Laboratori d'Enginyeria Marítima
Universitat Politècnica de Catalunya
Gran Capità s/n, Módulo D1
08034 Barcelona, España
Tel.: 34-93-401 64 68 , Fax: 34-93-401 73 57
e-mail: sierra@etsecpcb.upc.es

Isaac Azuz

Departamento de Estudios Estratégicos
Universidad CETYS
Apartado Postal 2727
Ensenada, B.C., México

Resumen

En este artículo se presenta un modelo numérico que simula la evolución del fondo marino en la zona cercana a la costa. El modelo está dividido en tres módulos que calculan la propagación del oleaje, las corrientes inducidas por oleaje y viento y el transporte de sedimentos y los cambios morfodinámicos asociados al mismo. Para calibrar y validar el modelo se han utilizado algunos ejemplos extraídos de la literatura, así como datos de campo. Los resultados del modelo muestran que éste estima adecuadamente tanto las magnitudes como las tendencias de la evolución del fondo marino bajo distintas condiciones hidrodinámicas, por lo que puede ser considerada una herramienta útil para propósitos ingenieriles.

A NUMERICAL MODEL FOR THE SIMULATION OF MARINE TOPOGRAPHY EVOLUTION IN THE NEARSHORE AREA

Summary

A numerical model is presented to simulate the bathymetric changes in the nearshore area. The model is divided in three modules, which compute the wave propagation, the wind and wave induced currents and the sediment transport and associated morphodynamic evolution. Some examples extracted from the literature as soon as field data are employed to calibrate and validate the model. The model results show accurate estimates of values and trends of sea bottom evolution under different hydrodynamic conditions and therefore it can be an useful tool for engineering purposes.

INTRODUCCIÓN

La zona cercana a la costa es una zona muy activa, donde ocurren diversos procesos dinámicos, entre los que pueden destacarse la acción de olas, corrientes, interacción olas-corrientes, transporte de sedimentos y cambios en la topografía del fondo marino. Dentro de la franja costera, el tramo más dinámico lo constituye la zona de rompientes, en la que se produce una gran disipación de energía, además de complejos patrones de circulación del fluido y un gran movimiento de sedimentos, lo que se traduce en cambios significativos en la batimetría.

Muchos de estos procesos y sus respuestas son no lineales y tienen gran variabilidad en el espacio y el tiempo, por lo que la predicción de la evolución de la zona costera (y en especial de las playas) por medio de un modelo numérico constituye una herramienta muy útil a la hora de planificar proyectos en dicha zona, dada su creciente importancia económica, social y ambiental.

En este artículo se describe un modelo numérico para simular los procesos de transporte de sedimentos y evolución de fondo anteriormente mencionados. Dicho modelo está estructurado como un modelo morfodinámico compuesto, en el que claramente pueden diferenciarse dos bloques. En el primero, se considera que el fondo marino permanece fijo y, bajo esta hipótesis, se determinan los campos de oleaje, corrientes y transporte de sedimentos. En la segunda fase se asume que las condiciones hidrodinámicas permanecen estacionarias y, teniendo en cuenta la divergencia del transporte de sedimentos, se evalúan los cambios en la topografía del fondo. Una vez estos cambios son de suficiente entidad como para alterar la situación hidrodinámica, la nueva batimetría se introduce en el modelo como un fondo fijo y el ciclo se inicia de nuevo.

El modelo que aquí se describe puede considerarse como un modelo a medio término⁷. Este tipo de modelos reproduce distintos fenómenos físicos incluyendo los procesos más relevantes en la zona cercana a la costa y generalmente se dividen en modelos de equilibrio y de no-equilibrio, según la forma de calcular el transporte sedimentario. El primer tipo asume que existe una respuesta instantánea a las condiciones de forzamiento, mientras que los modelos de no-equilibrio consideran la existencia de un desfase entre la fuerza movilizadora y el movimiento del sedimento. Este último tipo de modelos se emplea generalmente cuando el transporte de sedimentos en suspensión es predominante y se basan en la resolución de una ecuación advectiva-difusiva para obtener la distribución vertical de la concentración de sedimentos.

Los modelos de equilibrio, como el que se describe aquí, son más simples, ya que introducen una expresión para calcular el transporte de sedimentos al resolver la ecuación de la continuidad de la masa sedimentaria. No obstante, su desarrollo y aplicación es todavía muy reciente y queda mucho trabajo de investigación por realizar en esta línea.

ANTECEDENTES

El primer modelo desarrollado con el fin de simular la evolución del fondo en la zona costera involucraba la resolución práctica de un problema de aterramiento a la entrada de un puerto y fue presentado por Fleming y Hunt⁹. Coeffe y Péchon⁴ fueron los primeros que desarrollaron un modelo que mostraba la estructura conceptual característica de los modelos morfodinámicos compuestos de escala media. En dicho trabajo los autores reconocieron de forma implícita la diferencia entre las escalas de variación de la hidrodinámica y de la morfología del fondo.

Durante la década de los ochenta, la investigación en el campo de la evolución del fondo fue dinamizada por investigadores como Watanabe^{29,30}, Watanabe *et al.*³¹ y Horikawa¹⁰. Durante esta época se profundizó significativamente en el conocimiento de elementos teóricos del modelado, tanto a nivel numérico (análisis de estabilidad, discretización de las ecuaciones) como analítico (análisis de las ecuaciones constituyentes, criterios teóricos de estabilidad) a través de trabajos como los de Wang y Ribberink²⁸, Van Rijn²⁷ y De Vriend⁶. Por otro lado, también se avanzó en la estructura conceptual de los modelos morfodinámicos a la vez que se establecieron sus escalas temporales y espaciales de variación^{7,16}.

Un interesante ejercicio de colaboración, llevado a cabo en la Unión Europea en el marco de los programas MAST, permitió intercomparar diferentes módulos hidrodinámicos y modelos morfodinámicos compuestos^{8,15,17} al trabajar sobre los mismos casos test. De este modo se determinaron las capacidades y limitaciones de los distintos modelos, a la vez que se clarificaban diversos aspectos del proceso de modelado morfodinámico.

DESCRIPCIÓN DEL MODELO

En este capítulo se describe el modelo morfodinámico²³, que se estructura en tres módulos distintos, los cuales pueden actuar como modelos numéricos independientes. Estos módulos calculan distintos fenómenos físicos: el primero (PROPS) simula la propagación del oleaje resolviendo de forma acoplada la irrotacionalidad del vector número de onda y la ecuación de la conservación de la acción del oleaje; el segundo (CIRCO) determina el campo de corrientes 2DH mediante las ecuaciones de conservación de la masa y del momentum verticalmente integradas y temporalmente promediadas; el tercer módulo (LIMOS) calcula el transporte de sedimentos y los cambios en la topografía del fondo, resolviendo la ecuación de continuidad del transporte de sedimentos por medio de un esquema numérico tipo Lax-Wendroff de segundo orden.

El campo hidrodinámico es calculado sobre una batimetría fija, con la que se estiman las variaciones del fondo. Una vez estos cambios son de magnitud suficiente como para modificar la hidrodinámica, es necesario recalcular ésta para evaluar adecuadamente la evolución morfodinámica.

Propagación del oleaje

La simulación de la propagación del oleaje se basa en un modelo numérico^{19,21} que determina las características del oleaje en un dominio fluido arbitrario con batimetría irregular y en presencia de corrientes. El modelo puede reproducir los principales fenómenos físicos asociados a la propagación del oleaje: *shoaling*, refracción, difracción, interacción olas-corrientes, dispersión frecuencial no lineal, disipación de energía producida por fricción con el fondo y rotura del oleaje. Este modelo no considera la reflexión del oleaje y otros fenómenos no lineales como la dispersión por amplitud y las interacciones ola-ola.

La dirección de propagación α se obtiene a partir de la condición de irrotacionalidad del vector número de onda

$$\vec{\nabla} \times \vec{K} = 0 \quad (1)$$

con las siguientes relaciones (correspondientes a teoría lineal del oleaje)

$$\omega = \sigma + \vec{K} \vec{U} \quad (2)$$

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh) \quad (3)$$

$$|K|^2 = k^2 + \frac{\nabla(CC_g \nabla H)}{CC_g H} \quad (4)$$

donde \vec{K} es el vector número de onda, ω la frecuencia absoluta, σ la frecuencia intrínseca, \vec{U} el vector velocidad de la corriente, k el factor de separación, h la profundidad, $C = \sigma/k$ la celeridad de la onda, $C_g = \partial\sigma/\partial k$ la celeridad de grupo y H la altura de ola. Esta última se calcula a partir de la ecuación de conservación de la acción del oleaje, incluyendo los términos de disipación debidos a la rotura del oleaje (D_b) y a la fricción por fondo (D_f)

$$\nabla \left[(\vec{C}_g + \vec{U}) \frac{E}{\sigma} \right] + \frac{D_b}{\sigma} + \frac{D_f}{\sigma} = 0 \quad (5)$$

donde E/σ es la acción del oleaje y E la densidad de energía ($= \rho g H^2/8$ para olas regulares, $= \rho g H_{rms}^2/8$ para olas irregulares). Los términos de disipación de energía se evalúan a

partir de diversos submodelos ampliamente utilizados en la literatura: para rotura de oleaje regular⁵, para rotura de oleaje irregular (que depende de dos parámetros α y γ)² y para fricción con el fondo²⁵.

Circulación en la zona cercana a la costa

El módulo de circulación en la zona cercana a la costa se basa en un modelo numérico^{20,13,19} que calcula la circulación inducida por olas y viento, teniendo en cuenta los resultados de la propagación del oleaje del módulo anterior.

Este modelo está promediado en vertical, es decir, tiene una resolución 2DH, por lo que no da una descripción vertical de las corrientes. El código resuelve un sistema de ecuaciones, obtenidas a partir de la integración vertical y el promediado temporal de las ecuaciones de conservación de la masa y el momentum

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(d + \eta)U] + \frac{\partial}{\partial y}[(d + \eta)V] = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\rho(d + \eta)} \left[F_x + \tau_{w,x} - \tau_{b,x} + \left(\frac{\partial R_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial R_{xy}}{\partial y} \right) \right] \quad (7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\rho(d + \eta)} \left[F_y + \tau_{w,y} - \tau_{b,y} + \left(\frac{\partial R_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yy}}{\partial y} \right) \right] \quad (8)$$

donde η es la variación del nivel medio del agua (*set-up/set-down*), U, V son las componentes de la velocidad (verticalmente promediada), d la profundidad relativa al nivel del agua en reposo, g la aceleración de la gravedad, ρ la densidad del fluido, f_c el parámetro de Coriolis, F_x, F_y las tensiones inducidas por el oleaje, τ_w la tensión producida por el viento en la superficie libre, τ_b la tensión provocada por la fricción con el fondo y R_{ij} las componentes de las tensiones de Reynolds.

El sistema de ecuaciones necesita modelos de cierre adecuados para evaluar varios términos, tales como las tensiones debidas al oleaje (F), al viento (τ_w), a la fricción con el fondo (τ_b) y a la turbulencia (R).

Las tensiones inducidas por el oleaje se calculan a partir de los gradientes del tensor de radiación

$$F_i = - \left[\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial T_j}{\partial x_j} \right) \frac{\partial d}{\partial x_i} \right] \quad (9)$$

donde S es la tensión de radiación horizontal¹², que incorpora los efectos del *roller* (masa de gran energía cinética y gran turbulencia que está situada en la parte superior delantera de la ola rompiente) en la zona de transición²² y T el vector de la tensión de radiación vertical. Ambas se calculan a partir de teoría lineal.

La tensión tangencial producida por el viento en la superficie libre se estima a partir de una formulación cuadrática

$$\tau_{w,i} = \rho_a C_d |\vec{u}_{10}| u_{10,i} \quad (10)$$

donde ρ_a es la densidad del aire, C_d un coeficiente de arrastre y \vec{u}_{10} el vector velocidad del viento a una elevación de referencia (generalmente 10 m).

La tensión tangencial en el fondo debido a la acción de olas y corrientes se evalúa por medio de la siguiente formulación

$$\tau_{b,i} = \left\langle \frac{1}{2} \rho f_{wc} |\vec{U} + \vec{u}_{orb}| (U_i + u_{orb,i}) \right\rangle \quad (11)$$

donde la velocidad orbital se calcula a partir de la teoría lineal y el factor de fricción f_{wc} mediante la formulación de Nielsen¹⁴

$$f_{wc} = \exp \left[-6,3 + 5,5 \left(\frac{\sigma k_N}{u_{orb}} \right)^{0,2} \right] < 0,30 \quad (12)$$

donde $k_N = 2,5 D_{50}$ es el parámetro de rugosidad de Nikuradse y D_{50} el diámetro medio del sedimento.

Las tensiones turbulentas de Reynolds verticalmente integradas, temporalmente promediadas y asumiendo que son isótropas, se evalúan a partir de la expresión de Boussinesq

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \rho \nu_t (d + \eta) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (13)$$

donde $\nu_t = C_\mu \sqrt{\kappa} (d + \eta)$ es el coeficiente de viscosidad turbulenta y C_μ un coeficiente de orden $O(1)$.

La energía cinética turbulenta κ se determina a partir de la ecuación diferencial del transporte de dicha variable (verticalmente integrada y temporalmente promediada), incluyendo la advección, la difusión y términos de producción y de disipación¹¹

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + U \frac{\partial \kappa}{\partial x} + V \frac{\partial \kappa}{\partial y} = \frac{1}{\rho(d + \eta)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \kappa}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \kappa}{\partial y} \right) \right] + \text{Prod-Diss} \quad (14)$$

$$\text{Prod} = \frac{D}{\rho(d + \eta)} + \nu_t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (15)$$

$$\text{Diss} = C_D \frac{\kappa^{3/2}}{d + \eta} \quad (16)$$

donde σ_k es el número de Prandtl-Schmidt para la variable κ y C_D un parámetro de calibración, ambos de orden $O(1)$.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales descritos se resuelven mediante diferencias finitas. Las ecuaciones del módulo de propagación de oleaje tienen un carácter parabólico, por lo que se aplica un esquema numérico que avanza espacialmente. Esto tiene la ventaja de que no debe especificarse una condición de contorno en la última fila, como sucedería en el caso de que las ecuaciones fuesen elípticas o parabólicas.

El módulo de circulación resuelve las ecuaciones del flujo en la misma malla computacional por medio de un esquema numérico implícito tipo ADI. En dicha malla, algunas variables tienen una disposición no centrada (*staggered grid*). El modelo de turbulencia (ecuación κ) se resuelve por medio de un esquema implícito en diferencias centradas.

Morfodinámica

Una vez se conoce el campo hidrodinámico, el siguiente paso consiste en la activación del módulo morfodinámico, que consta de dos elementos internos: el primero calcula el campo de transporte sedimentario a partir de las variables hidrodinámicas (altura de ola, velocidades orbitales, magnitud y dirección de la corriente, etc.); el segundo estima los cambios en la topografía del fondo mediante la ecuación de conservación de la masa sedimentaria, que establece que los cambios en un volumen elemental están relacionados con la divergencia del flujo de sedimentos. La simulación numérica con el módulo morfodinámico continua (asumiendo condiciones hidrodinámicas estacionarias) hasta que los cambios son de suficiente magnitud como para requerir un nuevo cálculo de la hidrodinámica.

Para estimar el transporte de sedimentos existen numerosas formulaciones en la literatura, la mayoría de ellas deducidas empíricamente. En el modelo que aquí se describe se han introducido diversas expresiones del transporte de sedimentos con el fin de tener la posibilidad de utilizar la más adecuada en cada caso (por ejemplo casos con olas y corrientes o sólo con corrientes).

En cuanto a la ecuación de continuidad del sedimento, generalmente se efectúan algunas hipótesis simplificativas tales como sedimento de tamaño uniforme y forma esférica, tratamiento independiente de los distintos mecanismos de transporte sedimentario y escala de variación de los procesos morfodinámicos mucho más lenta que la de los hidrodinámicos. Teniendo en cuenta estas hipótesis, la ecuación puede escribirse como

$$(1-p) \frac{\partial Z_b}{\partial t} + \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (17)$$

o empleando operadores vectoriales

$$(1-p) \frac{\partial Z_b}{\partial t} + \nabla \vec{q} = 0 \quad (18)$$

Esta expresión simple de la ecuación se ve modificada cuando se introduce el efecto de las formas de fondo, es decir, la pendiente como un factor de corrección, ya que estas irregularidades del fondo introducen cambios en el flujo de transporte sedimentario como consecuencia de la acción de la gravedad sobre los granos del sedimento. Estos cambios, según Horikawa¹⁰ pueden expresarse como

$$q_x = q_{0_x} - \varepsilon |\vec{q}_\xi| \frac{\partial Z_b}{\partial x} \quad (19)$$

$$q_y = q_{0_y} - \varepsilon |\vec{q}_\xi| \frac{\partial Z_b}{\partial y} \quad (20)$$

donde q_0 es el transporte sedimentario calculado asumiendo fondo plano, ε un parámetro de magnitud $O(1)$ y $|\vec{q}_\xi|$ el transporte de sedimentos asociado a la dirección donde se calcula el transporte corregido. Estas expresiones pueden mejorarse, desde el punto de vista del significado físico de los términos añadidos, reemplazando $|\vec{q}_\xi|$ por el transporte total $|\vec{q}_0|$.

Introduciendo (19) y (20) en la ecuación de continuidad del sedimento, se obtiene la siguiente ecuación hiperbólica-parabólica¹

$$(1-p) \frac{\partial Z_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(q_{0_x} - \varepsilon |\vec{q}_0| \frac{\partial Z_b}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(q_{0_y} - \varepsilon |\vec{q}_0| \frac{\partial Z_b}{\partial y} \right) = 0 \quad (21)$$

o usando notación vectorial

$$(1 - p) \frac{\partial Z_b}{\partial t} + \nabla \vec{q}_0 - \nabla (\varepsilon |\vec{q}_0| \nabla Z_b) = 0 \tag{22}$$

La ecuación (21) o (22) puede considerarse como una ecuación advectiva-difusiva no homogénea, donde los términos fuente corresponden a la divergencia del campo sedimentario y que, a diferencia de la ecuación de continuidad de la masa sedimentaria inicial (17), presenta términos difusivos expresados por el laplaciano de la elevación del fondo. Para resolver esta ecuación, se requieren esquemas numéricos robustos y estables con el fin de minimizar las inexactitudes numéricas en la simulación de la evolución del fondo. Los más utilizados son del tipo Lax-Wendroff de segundo orden, de un solo paso³ o de paso doble (predictor-corrector), que han mostrado cumplir los requisitos anteriormente mencionados mejor que los de paso único^{18,3}.

Los esquemas tipo Lax-Wendroff de segundo orden implementados en el código morfodinámico consisten en un esquema en diferencias adelantado en el tiempo y centrado en el espacio, que se deduce utilizando un desarrollo de Taylor hasta segundo orden

$$\Delta Z_{b_{ij}} = \Delta t \left(\frac{\partial Z_b}{\partial t} \right)_{ij} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Z_b}{\partial t} \right)_{ij} \tag{23}$$

El segundo término de la ecuación (23) se desarrolla del siguiente modo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Z_b}{\partial t} \right)_{ij} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{(1-p)} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \right)_{ij} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{(1-p)} \frac{\partial q_x}{\partial t} \right)_{ij} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{(1-p)} \frac{\partial q_y}{\partial t} \right)_{ij} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{(1-p)} \frac{\partial q_x}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} \right)_{ij} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{(1-p)} \frac{\partial q_y}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} \right)_{ij} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{(1-p)} \frac{\partial q_x}{\partial h} \frac{\partial Z_b}{\partial t} \right)_{ij} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{(1-p)} \frac{\partial q_y}{\partial h} \frac{\partial Z_b}{\partial t} \right)_{ij} \end{aligned} \tag{24}$$

Apelando a una expresión simple de la tasa de transporte sedimentario puede extraerse

$$q = AU^{3,4} = A \left(\frac{Q}{h} \right)^{3,4} \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial h} = -\frac{3,4q}{h} \tag{25}$$

De este modo pueden definirse las celeridades del transporte en dirección x e y , como

$$C_x = \frac{1}{(1-p)} \frac{\partial q_x}{\partial h} = -\frac{3,4q_x}{(1-p)h} \tag{26}$$

$$C_y = \frac{1}{(1-p)} \frac{\partial q_y}{\partial h} = -\frac{3,4q_y}{(1-p)h} \tag{27}$$

Introduciendo estas dos ecuaciones en la ecuación (24) se llega a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Z_b}{\partial t} \right)_{ij} = \frac{\partial}{\partial x} (C_{x_{ij}} r_{ij}) + \frac{\partial}{\partial y} (C_{y_{ij}} r_{ij}) \tag{28}$$

donde r es la tasa de deposición, que se define más adelante.

Para introducir la pendiente del fondo en un esquema de este tipo, se modifica la expresión de la tasa de transporte de sedimentos del siguiente modo

$$q = q_0 \left(1 - \varepsilon \frac{\partial Z_b}{\partial s} \right) \quad (29)$$

donde s es la coordenada en la dirección del flujo. Siendo α el ángulo formado por las componentes u y v de la velocidad, las componentes de la tasa de transporte sedimentario modificadas por la influencia de la pendiente pueden escribirse

$$q_x = q_{0,x} \left[1 - \varepsilon \left(\frac{\partial Z_b}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial Z_b}{\partial y} \sin \alpha \right) \right] \quad (30)$$

$$q_y = q_{0,y} \left[1 - \varepsilon \left(\frac{\partial Z_b}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial Z_b}{\partial y} \sin \alpha \right) \right] \quad (31)$$

En consecuencia, la discretización de la ecuación de continuidad de la masa sedimentaria en este esquema es la siguiente

$$\begin{aligned} Z_{ij}^{n+1} = Z_{ij}^n - \frac{\Delta t}{(1-p)} \left[\left(\frac{q_{x_{i+1j}}^n - q_{x_{ij}}^n}{\Delta x} \right) + \left(\frac{q_{y_{ij+1}}^n - q_{y_{ij}}^n}{\Delta y} \right) \right] + \\ + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{(C_x r)_{i+1j}^n - (C_x r)_{ij-1j}^n}{2\Delta x} + \frac{(C_y r)_{ij+1}^n - (C_y r)_{ij-1}^n}{2\Delta y} \right] \end{aligned} \quad (32)$$

siendo las expresiones de C_x y C_y las correspondientes a las ecuaciones (26) y (27), mientras que r es

$$r = -\frac{1}{(1-p)} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial Z_b}{\partial t} \quad (33)$$

Finalmente, los esquemas tipo Lax-Wendroff de paso doble (predictor-corrector) que resuelven la ecuación de continuidad de la masa sedimentaria en su forma advectiva-difusiva (21), resultante de incluir el efecto local de la pendiente del fondo como factor corrector, utilizan la ecuación modificada del siguiente modo

$$\frac{\partial Z_b}{\partial t} = -\frac{1}{(1-p)} \left[\frac{\partial q_{0,x}}{\partial x} + \frac{\partial q_{0,y}}{\partial y} \right] + \frac{1}{(1-p)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon |\vec{q}_0| \frac{\partial Z_b}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon |\vec{q}_0| \frac{\partial Z_b}{\partial y} \right) \right] \quad (34)$$

Existen dos maneras distintas de tratar los términos difusivos (últimos en la ecuación anterior): desarrollados en diferencias finitas o desarrollados analíticamente y posteriormente discretizados.

El desarrollo en diferencias finitas es el siguiente

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon |\vec{q}_0| \frac{\partial Z_b}{\partial x} \right)_{ij} = \frac{(\varepsilon |\vec{q}_0| \frac{\partial Z_b}{\partial x})_{i+1/2j} - (\varepsilon |\vec{q}_0| \frac{\partial Z_b}{\partial x})_{i-1/2j}}{\Delta x} \quad (35)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon |\vec{q}_0| \frac{\partial Z_b}{\partial y} \right)_{ij} = \frac{(\varepsilon |\vec{q}_0| \frac{\partial Z_b}{\partial y})_{ij+1/2} - (\varepsilon |\vec{q}_0| \frac{\partial Z_b}{\partial y})_{ij-1/2}}{\Delta y} \quad (36)$$

donde el subíndice $i + \frac{1}{2}$ (y similares) significa discretizar variables centradas en los extremos de celda, tal como

$$\left(\varepsilon |\vec{q}_0| \frac{\partial Z_b}{\partial x} \right)_{i+1/2j} = \frac{\varepsilon (|\vec{q}_0|_{i+1j} + |\vec{q}_0|_{ij}) (Z_{b_{i+1j}} - Z_{b_{ij}})}{2\Delta x} \quad (37)$$

Los esquemas de este tipo con este desarrollo de los términos difusivos resuelven la ecuación de continuidad de la masa sedimentaria con los siguientes pasos:

- Paso predictor

$$\begin{aligned} ZP_{ij} = Z_{ij}^n &- \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{(1-p)} \left[\left(\frac{q_{0_{x_{i+1j}}}^n - q_{0_{x_{ij}}}^n}{\Delta x} \right) + \left(\frac{q_{0_{y_{ij+1}}}^n - q_{0_{y_{ij}}}^n}{\Delta y} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\Delta t \varepsilon}{(1-p)} \left[\frac{(|\vec{q}_0|_{i+1j}^n + |\vec{q}_0|_{ij}^n)(Z_{i+1j}^n - Z_{ij}^n) - (|\vec{q}_0|_{ij}^n + |\vec{q}_0|_{i-1j}^n)(Z_{ij}^n - Z_{i-1j}^n)}{2\Delta x^2} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\Delta t \varepsilon}{(1-p)} \left[\frac{(|\vec{q}_0|_{ij+1}^n + |\vec{q}_0|_{ij}^n)(Z_{ij+1}^n - Z_{ij}^n) - (|\vec{q}_0|_{ij}^n + |\vec{q}_0|_{ij-1}^n)(Z_{ij}^n - Z_{ij-1}^n)}{2\Delta y^2} \right] \end{aligned} \quad (38)$$

- Paso corrector

$$\begin{aligned} Z_{ij}^{n+1} = Z_{ij}^n &- \frac{\Delta t}{(1-p)} \left[\left(\frac{q_{0_{x_{i+1j}}}^{n_p} - q_{0_{x_{ij}}}^{n_p}}{\Delta x} \right) + \left(\frac{q_{0_{y_{ij+1}}}^{n_p} - q_{0_{y_{ij}}}^{n_p}}{\Delta y} \right) \right] + \\ &+ \frac{\Delta t \varepsilon}{(1-p)} \left[\frac{(|\vec{q}_0|_{i+1j}^{n_p} + |\vec{q}_0|_{ij}^{n_p})(ZP_{i+1j} - ZP_{ij}) - (|\vec{q}_0|_{ij}^{n_p} + |\vec{q}_0|_{i-1j}^{n_p})(ZP_{ij} - ZP_{i-1j})}{2\Delta x^2} \right] + \\ &+ \frac{\Delta t \varepsilon}{(1-p)} \left[\frac{(|\vec{q}_0|_{ij+1}^{n_p} + |\vec{q}_0|_{ij}^{n_p})(ZP_{ij+1} - ZP_{ij}) - (|\vec{q}_0|_{ij}^{n_p} + |\vec{q}_0|_{ij-1}^{n_p})(ZP_{ij} - ZP_{ij-1})}{2\Delta y^2} \right] \end{aligned} \quad (39)$$

donde el superíndice n_p implica que dichas variables han sido actualizadas en el paso predictor y calculadas con la nueva configuración del fondo a partir de ZP.

Por último, puede desarrollarse los términos difusivos del siguiente modo

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon |\vec{q}_0| \frac{\partial Z_b}{\partial x} \right)_{ij} = \varepsilon |\vec{q}_0|_{ij} \frac{\partial^2 Z_{b_{ij}}}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial |\vec{q}_0|_{ij}}{\partial x} \frac{\partial Z_{b_{ij}}}{\partial x} \quad (40)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon |\vec{q}_0| \frac{\partial Z_b}{\partial y} \right)_{ij} = \varepsilon |\vec{q}_0|_{ij} \frac{\partial^2 Z_{b_{ij}}}{\partial y^2} + \varepsilon \frac{\partial |\vec{q}_0|_{ij}}{\partial y} \frac{\partial Z_{b_{ij}}}{\partial y} \quad (41)$$

De esta forma, la ecuación de continuidad del sedimento se discretiza del siguiente modo

- Paso predictor

$$\begin{aligned} ZP_{ij} = Z_{ij}^n &- \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{(1-p)} \left[\left(\frac{q_{0_{x_{i+1j}}}^n - q_{0_{x_{ij}}}^n}{\Delta x} \right) + \left(\frac{q_{0_{y_{ij+1}}}^n - q_{0_{y_{ij}}}^n}{\Delta y} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\Delta t \varepsilon}{(1-p)} \left[\frac{(|\vec{q}_0|_{ij}^n (Z_{i+1j}^n - 2Z_{ij}^n + Z_{i-1j}^n))}{\Delta x^2} + \frac{(|\vec{q}_0|_{i+1j}^n - |\vec{q}_0|_{i-1j}^n)(Z_{i+1j}^n - Z_{i-1j}^n)}{4\Delta x^2} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\Delta t \varepsilon}{(1-p)} \left[\frac{(|\vec{q}_0|_{ij}^n (Z_{ij+1}^n - 2Z_{ij}^n + Z_{ij-1}^n))}{\Delta y^2} + \frac{(|\vec{q}_0|_{ij+1}^n - |\vec{q}_0|_{ij-1}^n)(Z_{ij+1}^n - Z_{ij-1}^n)}{4\Delta y^2} \right] \end{aligned} \quad (42)$$

• Paso corrector

$$\begin{aligned}
 Z_{ij}^{n+1} = & Z_{ij}^n - \frac{\Delta t}{(1-p)} \left[\left(\frac{q_{0x_{i+1j}}^{n_p} - q_{0x_{ij}}^{n_p}}{\Delta x} \right) + \left(\frac{q_{0y_{ij+1}}^{n_p} - q_{0y_{ij}}^{n_p}}{\Delta y} \right) \right] + \\
 & + \frac{\Delta t \varepsilon}{(1-p)} \left[\frac{(|\vec{q}_0|_{ij}^{n_p} (ZP_{i+1j} - 2ZP_{ij} + ZP_{i-1j}))}{\Delta x^2} + \frac{(|\vec{q}_0|_{i+1j}^{n_p} - |\vec{q}_0|_{i-1j}^{n_p}) (ZP_{i+1j} - ZP_{i-1j})}{4\Delta x^2} \right] + \\
 & + \frac{\Delta t \varepsilon}{(1-p)} \left[\frac{(|\vec{q}_0|_{ij}^{n_p} (ZP_{ij+1} - 2ZP_{ij} + ZP_{ij-1}))}{\Delta y^2} + \frac{(|\vec{q}_0|_{ij+1}^{n_p} - |\vec{q}_0|_{ij-1}^{n_p}) (ZP_{ij+1} - ZP_{ij-1})}{4\Delta y^2} \right] \quad (43)
 \end{aligned}$$

Calibrado y validación del modelo

Durante el desarrollo del modelo se han efectuado distintos tests para validarlo y calibrarlo. Los ejemplos iniciales incluyeron varios casos estudiados por otros autores³. Aquí se incluyen sólo algunos de los ejemplos analizados. Los otros pueden verse en las referencias^{23,26}. El primer caso test consiste en el estudio de la evolución de una duna de arena 1-D, en un canal con un fondo de forma sinusoidal, con un pico de 1 m de altura y una base de 140 m. La profundidad es de 10 m y el flujo viene dado por una corriente unidireccional estacionaria con una velocidad de 1 m/s. El tamaño de grano es uniforme, de 0,2 mm. El modelo se ha ejecutado durante un periodo de simulación de 150 horas y la batimetría actualizada se ha dibujado cada 10 horas, mostrando la evolución de la duna, bajo dos supuestos distintos: considerando o no el efecto de la pendiente del fondo. Los resultados se presentan en las Figuras 1 y 2, donde se comprueba que la simulación es mejor en el caso de considerar el efecto de la pendiente del fondo. La principal característica de la simulación cuando se considera este efecto de la pendiente es la elongación del extremo aguas arriba de la duna y la disminución de la altura inicial, tal como sería de esperar. En el caso de no considerar el efecto de la pendiente del fondo, la altura inicial se mantiene o aumenta ligeramente, mientras que el lado aguas abajo de la duna muestra un incremento de la pendiente y el lado aguas arriba tiene tendencia a la formación de una berma. Los resultados son similares a los presentados en la referencia³.

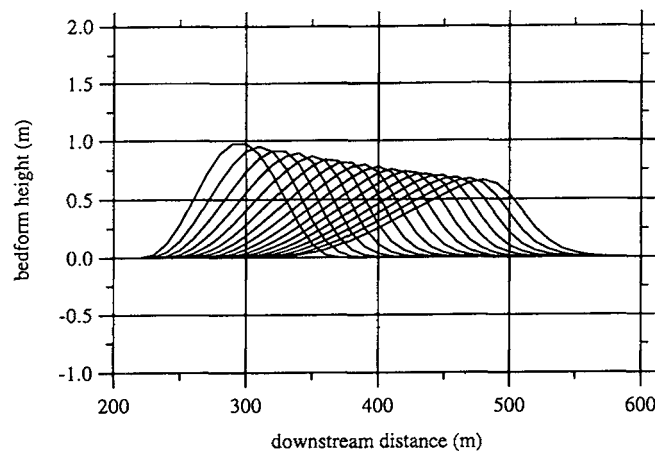


Figura 1. Caso de la duna 1-D. Efecto de la pendiente del fondo considerado

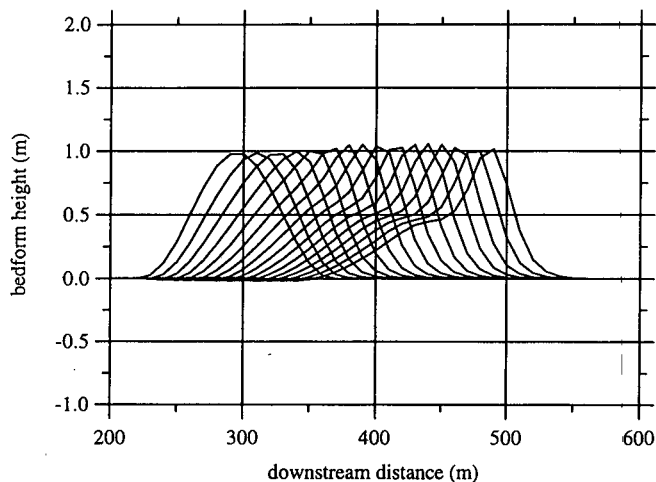


Figura 2. Caso de la duna 1-D. Efecto de la pendiente del fondo no considerado

El segundo caso test estudiado corresponde a un ejemplo analizado como ejercicio de intercomparación durante el programa de investigación europeo MAST-G6M. Se trata de una bahía semicircular (en un dominio de 240×280 m) sometida a la acción de un oleaje de 0,85 m de altura de ola significativa, 5 s de periodo de pico y con un ángulo de incidencia paralelo al eje x . El fondo marino está ocupado por un sedimento de tamaño uniforme, con un diámetro de 0,2 mm. En la Figura 3 se muestra la batimetría del área estudiada.

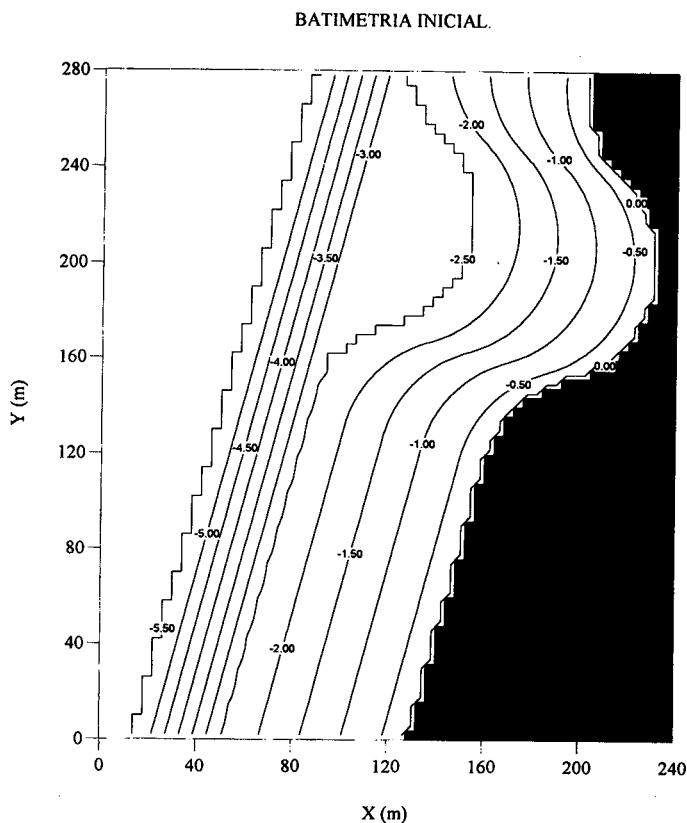


Figura 3. Caso de la bahía semicircular. Batimetría

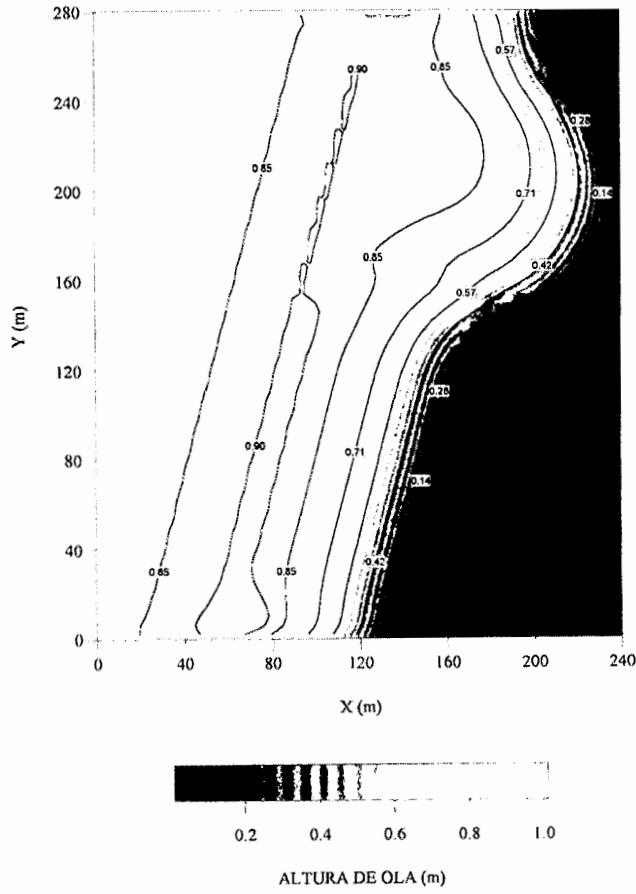


Figura 4. Caso de la bahía semicircular. Alturas de ola

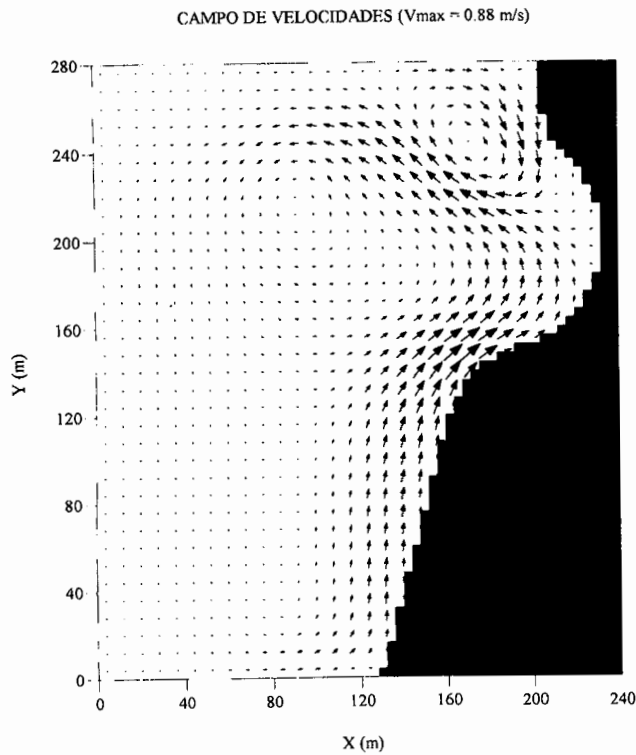


Figura 5. Caso de la bahía semicircular. Corrientes

En las Figuras 4 y 5 pueden verse las alturas de ola significantes y el campo de corrientes generados en todo el dominio por el oleaje incidente descrito anteriormente. Finalmente, en la Figura 6 se ha representado la evolución media diaria del fondo, pudiendo apreciarse que las zonas de erosión y depósito se concentran en los extremos de la bahía. Los resultados obtenidos son muy similares a los presentados en la referencia³.

El modelo aquí descrito también se ha aplicado a casos reales con el fin de obtener un calibrado bajo condiciones de campo. El caso simulado ha sido extraído de la referencia²⁴. Los datos de campo disponibles son el perfil inicial de la playa y distribuciones transversales de altura de ola y corriente longitudinal. No se dispone de datos de elevación del nivel medio y de evolución de la batimetría del perfil, por lo que estas últimas magnitudes no pueden compararse con los resultados del modelo. Las características del oleaje que se propaga sobre la playa son: altura de ola 0,60 m, ángulo de incidencia $9,0^\circ$, frecuencia 0,07 Hz y pendiente media del fondo 0,048.

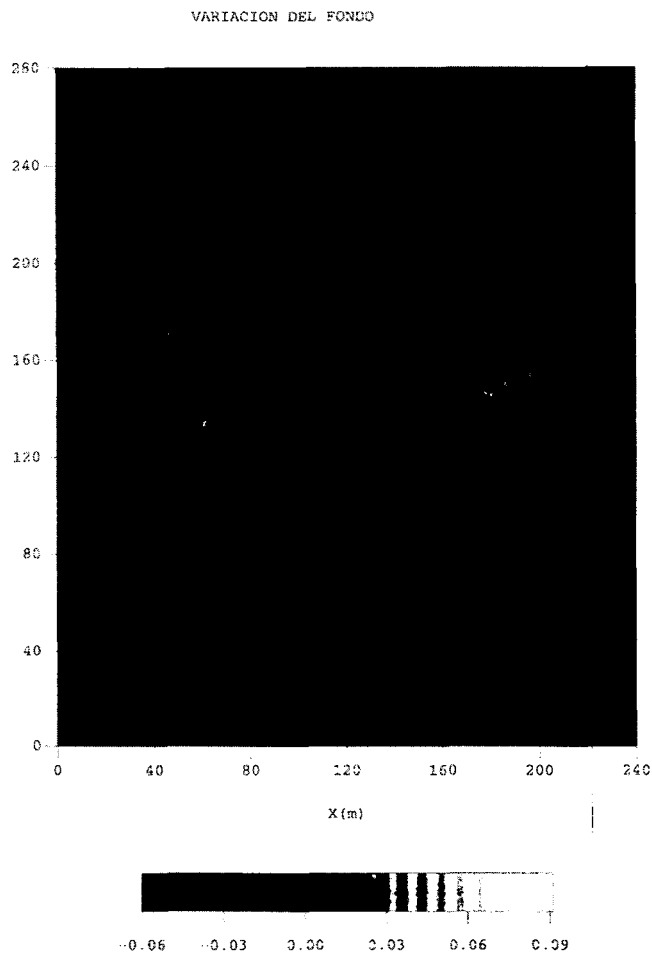


Figura 6. Caso de la bahía semicircular. Variación del fondo

El primer paso para un buen calibrado consiste en precisar el campo de oleaje, ya que es necesario ajustar los parámetros asociados a la disipación de energía α y γ . Se probaron distintos pares de valores de estos parámetros, llegándose a los mejores resultados para $\alpha = 0,5$ y $\gamma = 0,42$. En la Figura 7 se muestra la comparación entre alturas de ola

medidas y modeladas, pudiendo observarse una buena concordancia entre ambos, ya que las desviaciones de los resultados del modelo respecto a los datos experimentales son mínimas. Además, los resultados numéricos son exactamente iguales si se considera el efecto del *roller* o no. En la Figura 8 se comparan los resultados numéricos en ambos casos (sí se tiene en cuenta el efecto del *roller* o no) con los datos medidos de corriente longitudinal. Cuando se considera el efecto del *roller*, se consigue reproducir con bastante exactitud los datos de campo, mientras que si dicho efecto no es estimado en la simulación numérica, ésta subpredice ligeramente las corrientes medidas.

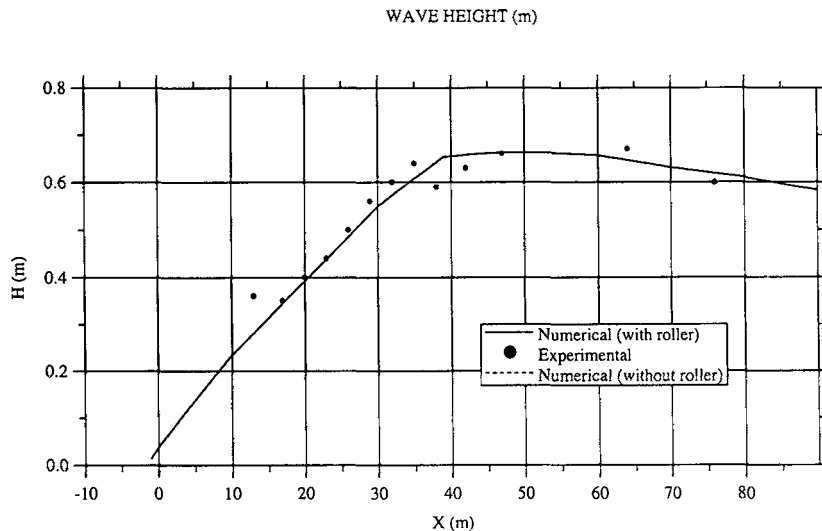


Figura 7. Comparación de alturas de ola. Caso de Thornton y Guza (1986)

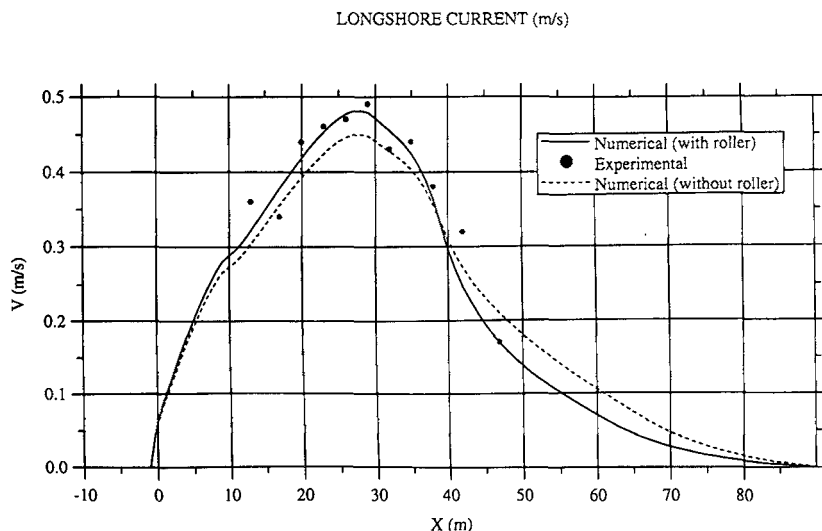


Figura 8. Comparación de corrientes longitudinales. Caso de Thornton y Guza (1986)

A pesar de que la evolución morfodinámica no se midió en este caso de campo, se efectuó una simulación numérica asumiendo que las condiciones hidrodinámicas anteriores permanecían estacionarias durante todo el periodo de simulación. La Figura 9 muestra los resultados de los cambios batimétricos dados por el modelo después de 150 horas de simulación.

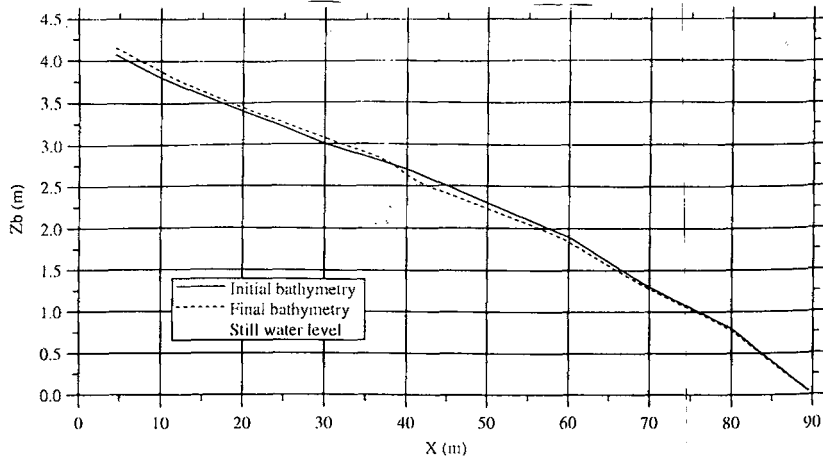


Figura 9. Evolución del fondo después de 150 horas. Caso de Thornton y Guza (1986)

Finalmente, el modelo se ha aplicado también al estudio de la evolución de la playa de Egmond (Holanda) durante un proceso erosivo que duró 2,5 días. Para ello se dispone de una serie de datos:

- el perfil inicial de la playa, con una longitud de alrededor de 1 km,
- el perfil final, con una longitud de alrededor de 250 m,
- elevaciones de la marea cada hora,
- alturas de ola cada hora,
- periodos del oleaje cada hora,
- direcciones del oleaje cada día.

En la Figura 10 se presentan la batimetría inicial y la final, además de la resultante de la simulación numérica, obtenida promediando las condiciones hidrodinámicas cada cuatro horas. Debe tenerse en cuenta que en este caso existían algunas lagunas en la información relativa a las características del oleaje, una al principio y otra hacia el final del suceso, que hacían que casi la mitad de estos datos se hubiesen perdido. Estas lagunas se rellenaron con interpolación (extrapolación al principio) de los datos necesarios, lo que implica introducir otro factor de incertidumbre en el proceso de modelado.

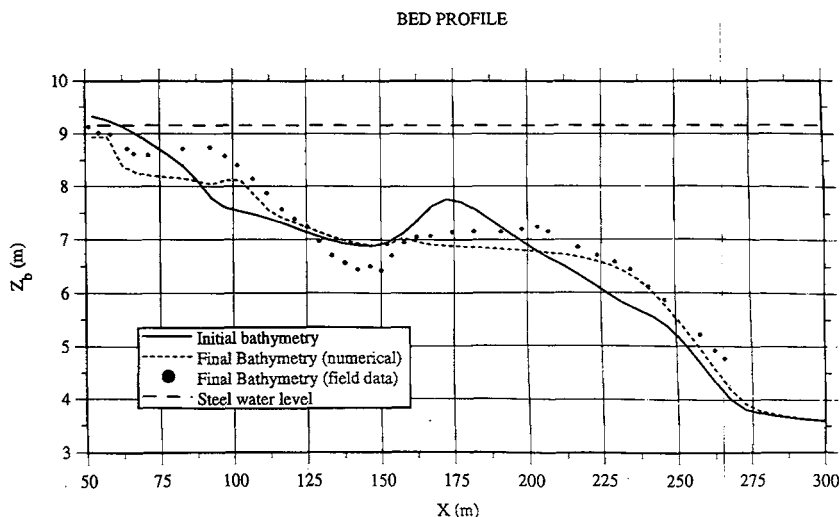


Figura 10. Playa de Egmond. Comparación de la evolución del fondo

Comparando los resultados del modelo con los perfiles batimétricos medidos, puede observarse que el modelo numérico reproduce cualitativamente la erosión en la línea de orilla y la acreción al principio del área de estudio del perfil. No obstante, en el tramo medio del perfil, el modelo numérico produce un suavizado excesivo de la batimetría, eliminando todas las singularidades (crestas, senos, etc.) y dando un fondo con una pendiente casi uniforme.

Varios factores pueden explicar las discrepancias existentes entre los resultados del modelo y los datos de campo. En primer lugar, la incertidumbre de las condiciones hidrodinámicas, ya que una parte importante de los datos de oleaje no existen y han tenido que ser estimados mediante interpolación y extrapolación. En segundo lugar, para modelar en este caso concreto, hubiese sido necesario tener resolución en vertical del campo de velocidades, ya que las variaciones transversales en perfil son debidas en gran parte al *undertow* o corriente de resaca. Dado que el modelo resuelve una hidrodinámica verticalmente integrada, esto ha obligado a utilizar fórmulas de cálculo del transporte de sedimentos que emplean una velocidad promediada, lo que introduce más discrepancias con la realidad física. Además, teniendo en cuenta sólo factores morfodinámicos, hay varios parámetros libres en las expresiones del transporte de sedimentos, que deben ser calibradas previamente. En un futuro próximo se espera disponer de una serie completa de datos que permita comprobar mejor las prestaciones del modelo, reduciendo el número de factores que introducen incertidumbre en el proceso de simulación.

El hecho de modelar un único perfil de la playa de Egmond se debe a que se considera que ésta es longitudinalmente uniforme. No obstante, al ser una playa con diversas barras en la zona cercana a la costa, periódicamente se encuentran zonas en las que la barra está rota, formándose corrientes de retorno (*rip currents*) al combinarse las discontinuidades batimétricas con condiciones de oleaje adecuadas. Por consiguiente, aunque la playa de Egmond es una playa rectilínea, con isobatas razonablemente rectas y paralelas, la presencia de estas brechas en las barras y las consiguientes corrientes de retorno sugiere que la hidrodinámica en esta zona tiene características no uniformes.

A partir de un perfil del fondo se generó una batimetría de la playa de Egmond, asumiendo que ésta es longitudinalmente uniforme a lo largo de 2 km, pero con un canal de 60 m de ancho en el centro de la playa, que rompe la barra *offshore*. En la Figura 11 puede verse una perspectiva de la batimetría así generada, mientras que las isobatas se han dibujado en la Figura 12.

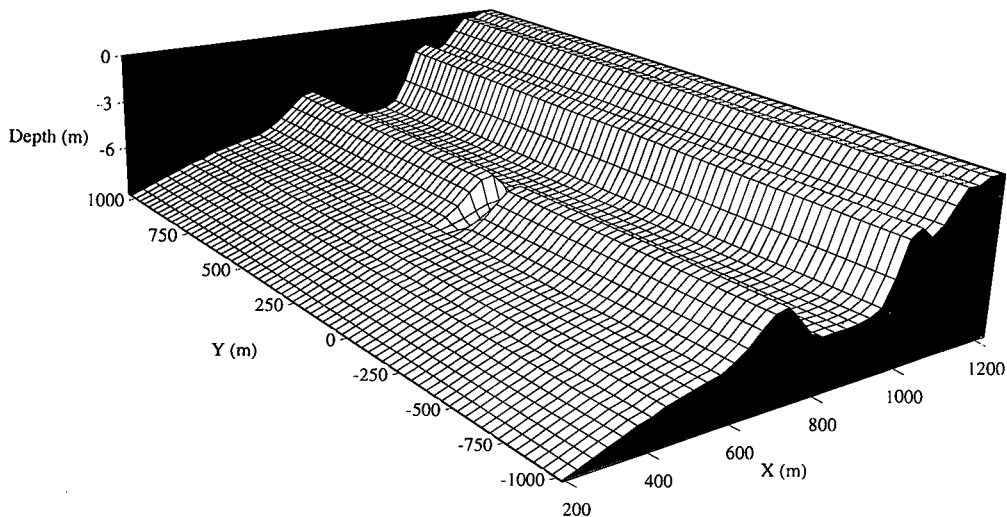


Figura 11. Perspectiva de la batimetría con un canal en la barra

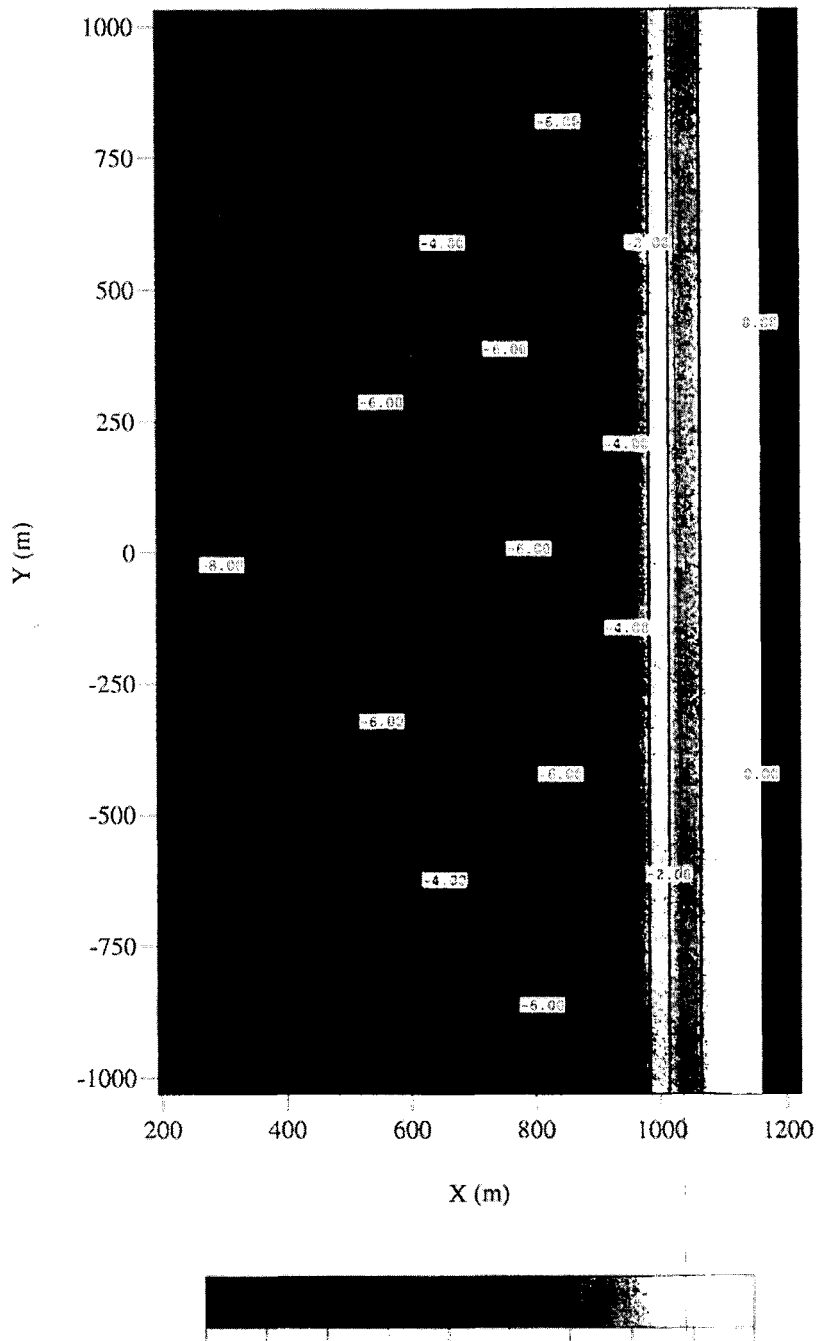


Figura 12. Batimetría con un canal en la barra *offshore*. Playa de Egmond

Sobre esta playa se propagó un oleaje con las siguientes características: altura de ola media cuadrática 1,98 m, periodo 7,42 s, dirección 15° con respecto a la normal a la playa y nivel del mar igual al nivel medio. Los parámetros de la discretización espacial fueron $\Delta_x = 5$ m y $\Delta_y = 10$ m.

Los resultados del campo de corrientes obtenido por el modelo se muestran en la Figura 13, pudiendo apreciarse la asimetría de las condiciones hidrodinámicas, así como la existencia de una corriente de retorno localizada en el canal.

Del análisis de distintos perfiles de alturas de ola transversales a la playa se concluye la existencia de no-uniformidad longitudinal de las condiciones hidrodinámicas en la playa, en la zona cercana al canal existente en la barra. Para las condiciones de simulación mencionadas, esta no-uniformidad se extiende hasta 315 m ms allá del centro del canal en la dirección de la corriente longitudinal y hasta 225 m en la dirección de la que proviene el oleaje y la corriente longitudinal. Esto significa que a lo largo de 540 m de litoral, la hipótesis de uniformidad longitudinal de la playa no es cierta. Esta cantidad, obviamente se incrementaría si el oleaje tuviese una incidencia más oblicua.

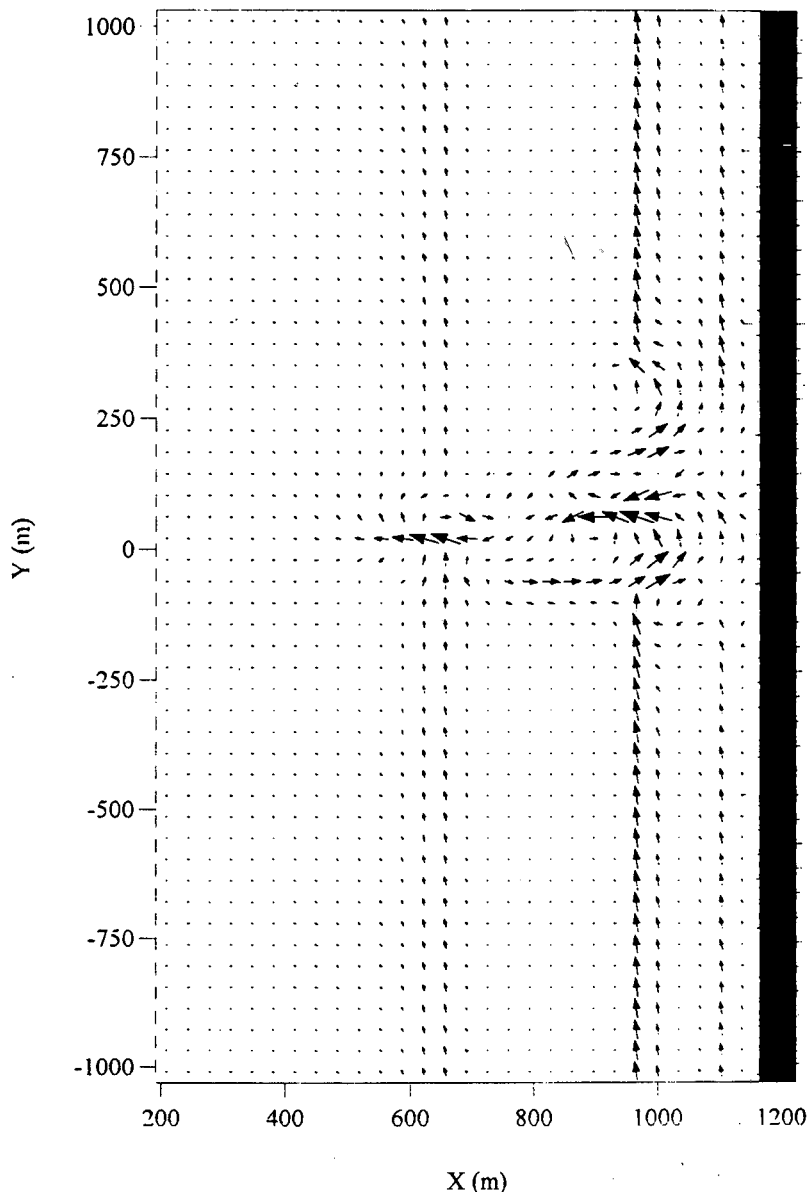


Figura 13. Campo de velocidades con un canal en la barra *offshore*. Playa de Egmond

CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un modelo 2 DH para simular el transporte de sedimentos y la evolución del fondo marino, basado en la resolución de la ecuación de continuidad de la masa sedimentaria mediante un esquema numérico tipo Lax-Wendroff de segundo orden. Este modelo se acopla con otros dos modelos de propagación del oleaje y circulación en la zona cercana a la costa, de modo que pueden funcionar como un sistema único, permitiendo la simulación hidro-morfodinámica bajo condiciones muy diversas, incluyendo oleaje, corrientes, viento, etc.

El modelo se ha validado y calibrado con varios ejemplos, incluyendo datos de campo, llegándose a las siguientes conclusiones:

- El campo hidrodinámico simulado muestra cierta dependencia de los parámetros α y γ asociados a la disipación de energía, especialmente en el cálculo de las corrientes, mientras que en la determinación de las alturas de ola, su influencia es menos importante.
- El modelo es 2DH por lo que no tiene resolución vertical. Esto significa que no puede calcular el *undertow* (corriente de resaca) y para calcular el transporte de sedimentos debe utilizar expresiones que trabajan con una velocidad media.
- Los resultados obtenidos, tanto desde el punto de vista hidrodinámico como morfodinámico, son lógicos y muestran un comportamiento coherente con la batimetría.
- La simulación de la evolución de un perfil de playa sobre la base de datos reales, ha sido satisfactoria desde el punto de vista cualitativo, ya que se reproducen las tendencias en distintas partes del perfil, pero los resultados obtenidos están demasiado suavizados con respecto a los realmente medidos. Las discrepancias entre el modelo y los datos de campo obedecen a distintas incertidumbres introducidas por los parámetros libres del modelo, que en este trabajo no se pudieron calibrar, así como a las lagunas existentes en los datos. No obstante, todavía se precisa mucho trabajo de desarrollo y mejora del modelo con el fin de obtener resultados más reales.
- La simulación 2DH muestra un largo tramo de playa (540 m en el ejemplo analizado) que no puede considerarse longitudinalmente uniforme si existe un canal en la barra, como es habitual en la playa analizada, por lo que la hipótesis de uniformidad longitudinal que generalmente se adopta, es cuanto menos cuestionable.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se llevó a cabo como parte del proyecto COAST-3D, financiado por el Programa de Ciencia y Tecnología Marinas de la U.E. (MAST-III) bajo contrato no. MAS3-CT97-0086. Los autores también agradecen al Dr. José Antonio Jiménez y a Francisco Rivero sus valiosas aportaciones.

REFERENCIAS

- 1 I.A. Azuz, "Modelo morfodinámico de evolución del fondo en zona costera", Ph. D. Thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España, (1997).
- 2 J.A. Battjes y J.P.F.M. Janssen, "Energy loss and set-up due to breaking of random waves", *Proc. of the 16th Coastal Engineering Conference*, ASCE, pp. 569-587, (1978).
- 3 T.J. Chesher, H.M. Wallace, I.C. Meadowcroft y H.N. Southgate, "PISCES. A morphodynamic coastal area model. First annual report", Report SR 337, HR Wallingford, United Kingdom, (1993).

- 4 Y. Coeffe y P. Pécnon, "Modelling of sea-bed evolution under waves action", *Proc. 18th Int. Coastal Eng. Conf.*, Cape Town, pp. 1149-1160, (1982).
- 5 W.R. Dally, R.G. Dean y R.A. Dalrymple, "Wave height variation across beaches of arbitrary profile", *Journal of Geophysical Research*, Vol. **90**, C6, pp. 11917-11927, (1985).
- 6 H.J. De Vriend, "2DH Mathematical modelling of morphological evolution in shallow water", *Coastal Engineering*, Vol. **11**, pp. 1-27, (1987).
- 7 H.J. De Vriend, "Mathematical modelling and large-scale coastal behaviour. Part 2: Predictive models", *J. Hydr. Res.*, Vol. **29**, pp. 727-740, (1991).
- 8 H.J. De Vriend, J. Zyserman, P. Pécnon, J.A. Roelvink, H.N. Southgate y J. Nicholson, "Medium-term 2DH coastal area modelling", *Coastal Engineering*, Vol. **21**, pp. 193-224, (1993).
- 9 C. Fleming y J. Hunt, "Application of a sediment transport model", *Proc. 15th Int. Coastal Eng. Conf.*, Honolulu, pp. 1184-1202, (1976).
- 10 K. Horikawa, "Nearshore dynamics and coastal processes", University of Tokyo Press, Tokyo, Japan, (1987).
- 11 B.E. Launder y D.B. Spalding, "Lectures in mathematical models of turbulence", Academic Press, (1972).
- 12 M.S. Longuet-Higgins y R.W. Stewart, "Radiation stress and mass transport in gravity waves, with application to surf beats", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. **10**, pp. 529-549, (1963).
- 13 G. Manresa, "Modelo 2DH de circulación inducida por el oleaje en zona de rompientes", Tesina de especialidad. Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España, (1992).
- 14 P. Nielsen, "Coastal bottom boundary layers and sediment transport", World Scientific Publishing Co., Singapore, (1992).
- 15 J. Nicholson, I. Broker, J.A. Roelvink, D. Price, J.M. Tanguy y L. Moreno, "Intercomparison of coastal area morphodynamic models", *Coastal Engineering*, Vol. **31**, pp. 97-123, (1997).
- 16 B. O'Connor, "Suspended sediment transport in the coastal zone", *Int. Symp. on the Transport of Suspended Sediments and its Mathematical Modelling*, Florence, pp. 17-63, (1991).
- 17 P. Pécnon, F. Rivero, H. Johnson, T. Chesher, B. O'Connor, J.M. Tanguy, T. Karambas, M. Mory y L. Hamm, "Intercomparison of wave-driven current models", *Coastal Engineering*, Vol. **31**, pp. 199-215, (1997).
- 18 F. Peltier, J. Duplex, B. Latteux, P. Pécnon y P. Chausson, "Finite element model for bed-load transport and morphological evolution", *Proc. Computer Modelling in Ocean Engineering 91*, Barcelona, pp. 227-233, (1991).
- 19 F.J. Rivero, M. Rodríguez y A. Sánchez-Arcilla, "Propagación del oleaje sobre fondo variable y en presencia de corrientes", *II Jornadas Españolas de Ingeniería de Puertos y Costas*, Gijón, pp. 187-204, (1993).
- 20 F.J. Rivero y A. Sánchez-Arcilla, "Modelo quasi-3D del flujo en la zona de rompientes", Programa de Clima Marítimo, publicación N°. **40**, MOPU, Madrid, (1991).
- 21 F.J. Rivero y A. Sánchez-Arcilla, "Propagation of linear gravity waves over slowly varying depth and currents", in *Waves'93*, O.T. Magoon y J.M. Hemsley (Eds.), *Proceedings of the 2nd International Symposium Ocean Wave Measurement and Analysis*, New Orleans, 1993, ASCE, New York, pp. 518-532, (1994).
- 22 F.J. Rivero, A. Sánchez-Arcilla y D. Beyer, "Comparison of a wave transformation model with LIP-11 data", *Proc. Coastal Dynamics '94*, Barcelona, ASCE, pp. 518-532, (1994).

- 23 J.P. Sierra, I. Azuz, F.J. Rivero, A. Sánchez-Arcilla y A. Rodríguez, "Morphodynamic modelling in the nearshore area", in *Computer Modelling of Seas and Coastal Regions III*, J.R. Acinas y C.A. Brebbia (Eds.), *Proceedings of Coastal Engineering 97*, La Coruña. *Computational Mechanics Publications*, pp. 433-442, (1997).
- 24 E.B. Thornton y R.T. Guza, "Surf zone longshore currents and random waves: field data and models", *Journal of Physical Oceanography*, Vol. **16**, 7, pp. 1165-1178, (1986).
- 25 H.L. Tolman, "An evaluation of expressions for wave energy dissipation due to bottom friction in the presence of currents", *Coastal Engineering*, Vol. **16**, pp. 165-179, (1992).
- 26 M. Tomé, J.P. Sierra, A. Sánchez-Arcilla y F.J. Rivero, "Modelo numérico morfodinámico (2DH) de la zona costera", Research Report RR-CIIRC/AHC-98-2, (1998).
- 27 L.C. Van Rijn, "Mathematical modelling of morphological processes in the case of suspended sediment transport", Ph. D. Thesis, Technische Univ. Delft, (1987).
- 28 Z. Wang and J. Ribberink, "The validity of a depth-integrated model for suspended sediment transport", *J. Hydr. Res.*, Vol. **24**, pp. 53-67, (1986).
- 29 A. Watanabe, "Numerical models of nearshore currents and beach deformation", *Coastal Eng. in Japan*, Vol. **25**, pp. 147-161, (1982).
- 30 A. Watanabe, "Three-dimensional predictive model of beach evolution around a structure". *Symp. Water Wave Research*, Hannover, pp. 122-141, (1985).
- 31 A. Watanabe, K. Maruyama, T. Shimizu y T. Sakakiyama, "Numerical prediction model of three-dimensional beach deformation around a structure", *Coastal Eng. in Japan*, Vol. **29**, pp. 179-194, (1986).