

## El problema de la propagación del refinamiento en cuatro triángulos por la arista mayor

José P. Suárez

Departamento de Cartografía y Expresión Gráfica en la Ingeniería  
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria  
Campus de Tarifa Baja s/n  
35017 Las Palmas de Gran Canaria, España  
Tel.: 34-928-45 72 68; Fax: 34-928-45 18 72  
e-mail: jsuarez@dcegi.ulpgc.es

Ángel Plaza

Departamento de Matemáticas  
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, España  
Campus de Tarifa Baja s/n  
35017 Las Palmas de Gran Canaria, España  
Tel.: 34-928-45 88 27; Fax: 34-928-45 87 11  
e-mail: aplaza@dmat.ulpgc.es

Miguel Á. Padrón

Departamento de Ingeniería Civil  
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, España  
Campus de Tarifa Baja s/n  
35017 Las Palmas de Gran Canaria, España  
Tel.: 34-928-45 14 96; Fax: 34-928-45 18 79  
e-mail: mpadron@dic.ulpgc.es

### Resumen

En este artículo se introducen dos propiedades asintóticas asociadas al proceso iterativo del refinamiento de una malla de triángulos. Primeramente se desarrollarán resultados teóricos, que mostrarán, que la aplicación recursiva de la partición uniforme en cuatro triángulos por la arista mayor a una malla triangular arbitraria no estructurada produce mallas, en las que los pares de triángulos, que comparten la arista mayor, tienden a cubrir el área de toda la malla. Como consecuencia se demostrará también, que para el refinamiento local de un triángulo la zona de propagación se extiende asintóticamente en promedio a unos pocos triángulos vecinos. De esta forma se responde a la pregunta, de cómo la propagación del refinamiento local (para conformar la malla) afecta al tamaño de la triangulación. También se incluyen resultados numéricos, que están en concordancia con los resultados teóricos. Estos resultados son importantes en campos tales como la adaptabilidad de la malla para el método de los elementos finitos y técnicas de refinamiento para la mejora de la malla en gráficos por ordenador y CAGD.

**Palabras clave:** *refinamiento de mallas, arista mayor, camino de propagación.*

### THE PROPAGATION PROBLEM IN THE FOUR-TRIANGLE LONGEST-EDGE REFINEMENT

#### Summary

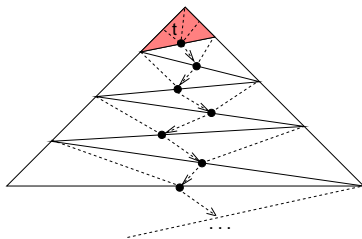
In this paper two asymptotic properties that arise in iterative mesh refinement of triangles are introduced. Firstly, we provide theoretical results showing that recursive application of the uniform four triangle longest-edge partition to an arbitrary unstructured triangular mesh produces meshes in which the triangle pairings sharing a common longest edge tend to cover the area of the whole mesh. As a consequence, we also shall prove that for the local refinement of a triangle, the propagation zone asymptotically extends on average to a few neighbor adjacent triangles. So, we answer how does local refinement propagation (to conform the mesh) affects the size of the triangulation. We also include numerical evidence which is in complete agreement with the theoretical study reported. The results are important issues to be addressed for example, in the adaptivity of the mesh for finite element method and refinement techniques for mesh enhancement in computer graphics and CAGD.

**Keywords:** *mesh refinement, longest edge, propagation path.*

## INTRODUCCIÓN

La generación de mallas juega un papel central en el método de los elementos finitos<sup>1,2,3</sup> y es una herramienta básica en otros muchos campos tales como la geometría computacional y gráficos por ordenador. También un problema de considerable interés es el relacionado con el refinamiento de una malla. El problema del refinamiento puede ser descrito como aquella técnica, que conlleva la inserción de vértices adicionales con la idea de producir mallas con unas características deseadas: triángulos de *buena calidad*, *conformidad de la malla* y *suavidad*. La presencia de triángulos delgados puede dar lugar a comportamientos no deseables, que afectarán tanto a la estabilidad de la solución numérica como a su exactitud. La conformidad de la malla hace referencia al hecho, de que la intersección de triángulos adyacentes es o un vértice común, o un lado entero. La suavidad de la malla implica, que la transición entre pequeños y largos elementos debe de ser gradual.

Determinados algoritmos de refinamiento basados en la arista mayor<sup>8,9</sup> garantizan la construcción de triangulaciones no estructuradas suaves y no degeneradas. En este sentido las aristas mayores se bisectan progresivamente y, por tanto, todos los ángulos en las subsecuentes triangulaciones refinadas son mayores o iguales a la mitad del ángulo más pequeño de la triangulación inicial<sup>9</sup>. Sin embargo, la extensión de refinamientos secundarios a elementos vecinos (los que comparten una arista) debida a la subdivisión de un elemento inicial, denominada aquí *propagación*, no es muy bien conocida<sup>4,8</sup>. Uno puede construir casos patológicos, donde el refinamiento de un único elemento se propaga a lo largo de toda la malla (Figura 1). Sin embargo, la experiencia en este artículo nos indica, que este caso es una excepción, y además la partición de un triángulo en cuatro por su arista mayor (*4T-LE*) hace que el refinamiento se propague en promedio a sólo unos pocos elementos vecinos. Nuestro objetivo aquí será estudiar la magnitud de la propagación.



**Figura 1.** Propagación del refinamiento basado en la arista mayor. Se indican con flechas las direcciones de propagación cuando se refina  $t$ . Las líneas discontinuas se introducen debido al refinamiento

En este sentido responderemos a la pregunta, de cómo es el tamaño de la zona de propagación de cada triángulo en promedio, cuando la partición *4T-LE* se aplica recursivamente a todos los elementos de una triangulación inicial.

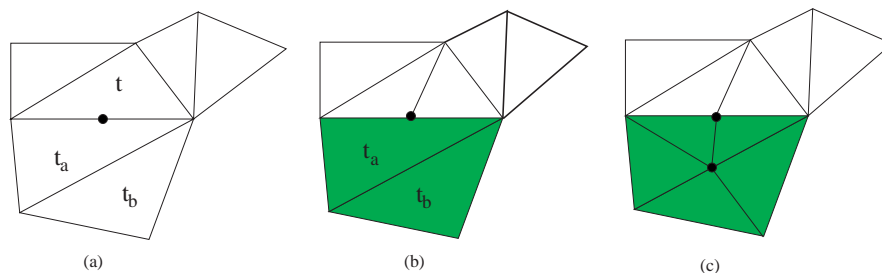
Primeramente desarrollaremos tanto resultados teóricos como empíricos, que muestren, que la aplicación iterativa de la partición *4T-LE* para el refinamiento uniforme de cualquier malla triangular no estructurada produce mallas, en las cuales los pares de triángulos, que tienen en común la arista mayor, tienden a cubrir el área de toda la malla.

Como consecuencia mostraremos, que la propagación en promedio para cada triángulo se reduce en cada paso de refinamiento y asintóticamente se aproxima a cinco triángulos vecinos. Aunque en la adaptación de una malla en el método de los elementos finitos los elementos, que necesitan ser refinados debido a un determinado indicador de error, pueden ser más de uno, el problema es de gran interés, ya que probará matemáticamente el comportamiento observado en la práctica.

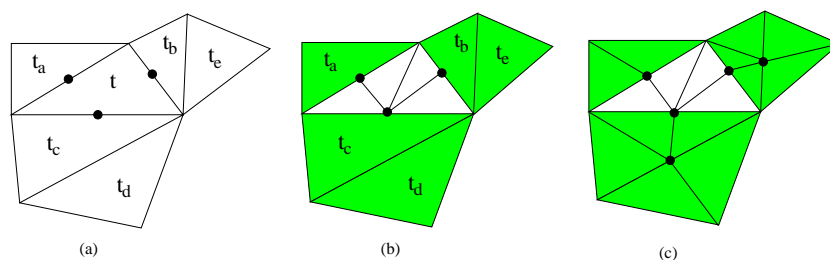
## PRELIMINARES. EL REFINAMIENTO Y EL PROBLEMA DE LA PROPAGACIÓN

Generalmente el refinamiento se divide en dos tipos: *uniforme* y *local*. Se entiende por refinamiento uniforme aquel, en el cual todos los triángulos de la malla se refinan siguiendo un patrón fijo de subdivisión. Si el refinamiento se realiza localmente para un solo triángulo o un grupo de ellos, entonces el refinamiento se denomina local.

El refinamiento local de mallas triangulares tiene dos pasos principales. El primer paso es la partición de los triángulos seleccionados, y el segundo, la propagación del refinamiento a los sucesivos triángulos vecinos para asegurar la conformidad. Se han estudiado distintas técnicas para la división de triángulos. La más simple es la *bisección* en dos subtriángulos por medio de la unión del punto medio de una de las aristas con el vértice opuesto. Si se escoge la arista mayor (*LE*) como arista de división, entonces se denomina *bisección por la arista mayor*. La *partición en cuatro triángulos por la arista mayor* *4T-LE*, divide un triángulo en cuatro subtriángulos, donde primero se divide el triángulo original por su arista mayor como antes y luego los dos triángulos restantes, uniendo el nuevo punto medio de la arista mayor a los puntos medios de las dos restantes aristas del triángulo original.



**Figura 2.** (a) Bisección de la arista mayor para refinar el triángulo  $t$ ; (b) el refinamiento *LE* de  $t$  y la propagación inducida en color oscuro; (c) refinamiento de  $t$  y de los triángulos vecinos



**Figura 3.** (a) Bisección de la arista mayor para refinar el triángulo  $t$ ; (b) el refinamiento *4T-LE* de  $t$  y la propagación inducida en color oscuro; (c) refinamiento de  $t$  y de los triángulos vecinos

A la hora de asegurar la conformidad de la malla en curso el refinamiento tiene que ser extendido a otros triángulos. Para el propósito de este artículo estos triángulos adicionales constituyen la zona de *propagación*. Esto se realiza por medio de la partición *4T-LE* y por el uso de patrones de divisiones parciales, los cuales dependen de las aristas divididas. Estos patrones de partición dividen siempre el triángulo por el punto medio de la arista mayor y a continuación, si fuera necesario uno o dos de los subtriángulos resultantes, también serán divididos (Figura 3). Para ilustrar el refinamiento *LE* y *4T-LE* de un triángulo dado

$t$  en una malla  $\tau$  (de ahora en adelante  $\tau$  denota una triangulación conforme en 2D) se desarrollarán los siguientes algoritmos<sup>7</sup>:

**Refinamiento  $LE$  ( $\tau, t$ )**

Se realiza el refinamiento  $LE$  de  $t$

**Para** cada punto no conforme  $P$  **hace**:

Encuentra al vecino  $t^*$  de  $t$  por la arista que contiene a  $P$

Refinamiento  $LE(\tau, t^*)$

**fin**

**Refinamiento  $4T-LE$  ( $\tau, t$ )**

Se realiza el refinamiento  $4T-LE$  de  $t$

**Para** cada punto no conforme  $P$  **hace**:

Encuentra al vecino  $t^*$  de  $t$  por la arista que contiene a  $P$

Refinamiento  $LE(\tau, t^*)$

**fin**

Con la partición  $4T-LE$  se logra un mayor refinamiento local, puesto que se introducen cuatro descendientes por elemento refinado. Además, con la extensión por conformidad del algoritmo (divisiones parciales) se asegura, cuántos descendientes directos de cada elemento aparecen tras lograr la conformidad, que son entre 0 y 4. Con la partición  $LE$  y su extensión por conformidad pura, es decir, basada sólo en el lado mayor y bisección por ese lado, no se sabe a priori, cuántos elementos aparecerán por cada triángulo.

Por otro lado, en cuanto a la no degeneración, los resultados son similares, pues la cota  $\alpha/2$  de Rivara se basa en el trabajo de Rosenberg y Stenger<sup>9</sup> sobre la bisección simple.

## GRADO DE BALANCEO EN EL REFINAMIENTO RECURSIVO $4T-LE$

Nuestro siguiente objetivo es probar, que la aplicación recursiva de la partición uniforme  $4T-LE$  a una malla triangular arbitraria no estructurada produce mallas, en las cuales los pares de triángulos, que comparten la arista mayor tienden a cubrir el área de la malla.

**Definición 1** (Pares de triángulos ‘terminales’) *Dos triángulos vecinos  $(t, t^*)$  se denominarán ‘par’ de triángulos ‘terminales’, si ambos comparten la arista mayor. Si un triángulo  $t$  no pertenece a un par de triángulos ‘terminales’, se dice que  $t$  es un triángulo ‘no emparejado’.*

**Definición 2** (Malla ‘balanceada’) *Una triangulación  $\tau$  se dice, que es ‘balanceada’, si está compuesta de pares de triángulos ‘terminales’. De lo contrario se dice, que es una malla ‘no balanceada’.*

**Definición 3** (Grado de balanceo) *Sea  $\tau$  una triangulación que contiene  $N$  triángulos, de los cuales  $T$  triángulos son pares de triángulos terminales. Entonces el grado de balanceo de  $\tau$ , denotado como  $B(\tau)$ , se define de la siguiente forma*

$$B(\tau) = \frac{T}{N} \quad (1)$$

Destacamos que  $0 \leq B(\tau) \leq 1$  y en el caso de que  $B(\tau) = 1$ , la malla está ‘balanceada’ (Figura 4). Si  $\tau$  es tal, que el grado de balanceo es 0, entonces el proceso de conformidad, cuando se refina cualquier triángulo  $t_0 \in \tau$ , se extiende hasta la frontera de  $\tau$  (Figura 1).

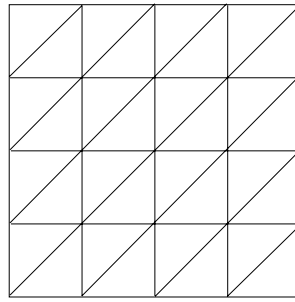


Figura 4. Ejemplo de malla balanceada

Puede destacarse, que si la partición  $4T-LE$  aplicada a un triángulo inicial  $t_0$  introduce un par de triángulos terminales  $t_1$ , entonces la aplicación iterativa de la partición  $4T-LE$  introduce un par de triángulos terminales con excepción de los triángulos localizados en la arista mayor. Es más, en este caso solamente se generan dos clases de triángulos similares, correspondientes a  $t_0$  y  $t_1$ , respectivamente<sup>6</sup> (Figura 5).

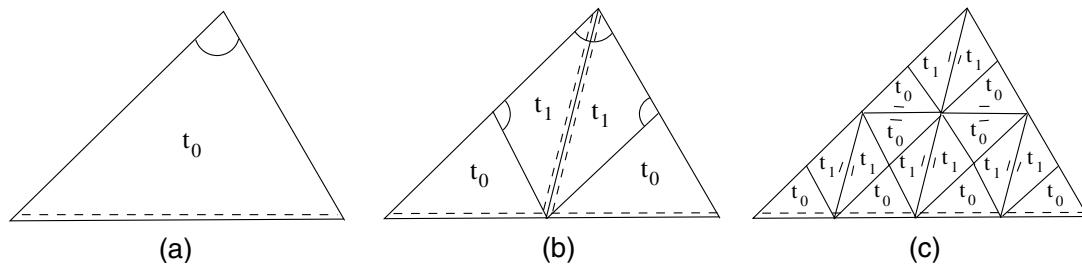


Figura 5. La partición  $4T-LE$ . Triángulo agudo. (Tanto aquí como en las siguientes figuras representaremos las aristas mayores con una línea discontinua)

Para demostrar que el refinamiento recursivo uniforme  $4T-LE$  da lugar a mallas con un número relativamente mayor de pares de triángulos terminales, consideraremos para una malla triangular arbitraria, triángulos rectos, agudos y obtusos respectivamente. Comenzaremos en la siguiente proposición con los casos de los triángulos rectos y agudos:

**Proposición 1** (*Casos de triángulos rectos y agudos*)

La aplicación de la partición  $4T-LE$  a un triángulo inicial recto o agudo  $t_0$  produce dos nuevos triángulos similares al original (localizados en la arista mayor de  $t_0$ ) y un par de triángulos terminales  $t_1$ . Estos triángulos  $t_1$  también son similares al original  $t_0$  en el caso de triángulo recto  $t_0$  y ambos son similares el uno al otro, pero no similares al original en el caso de triángulo agudo  $t_0$  (Figura 5). □

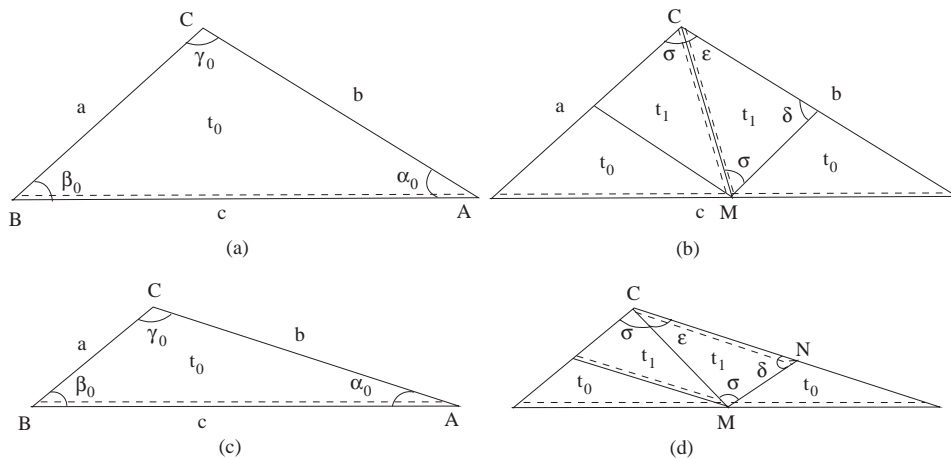
El caso del triángulo obtuso ofrece una situación diferente:

**Proposición 2** (*Caso del triángulo obtuso*)

La aplicación de la partición  $4T-LE$  a un triángulo inicial obtuso  $t_0$  produce dos nuevos subtriángulos similares al original (localizados en la arista mayor de  $t_0$ ) y un par de subtriángulos  $t_1$ . Estos subtriángulos  $t_1$  serán:

1. un par de triángulos terminales ( $t_0$  se denomina un triángulo obtuso Tipo 1), o
2. un par de triángulos similares, como se ve en la Figura 6b ( $t_0$  se denomina un triángulo obtuso Tipo 2).

□



**Figura 6.** (a) Triángulo obtuso  $t_0$  de Tipo 1; (b) La partición  $4T-LE$  de  $t_0$ ; (c) Triángulo obtuso  $t_0$  de Tipo 2. (d) La partición  $4T-LE$  de  $t_0$

Una demostración de la Proposición 2 se puede encontrar en la referencia 10.

En este punto cabe resaltar, que después de un número finito de aplicaciones de la partición  $4T-LE$  a un triángulo  $t_0$  y a sus sucesores se obtiene un triángulo no obtuso<sup>6</sup>.

Vistas las propiedades anteriores, se tiene que:

**Proposición 3** Sea  $\Gamma = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n\}$  una secuencia de mallas encajadas obtenidas por la aplicación iterativa de la partición  $4T-LE$  a una malla  $\tau_0$ . Entonces, el grado de balanceo de las mallas tiende a uno cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Prueba:

Para probar este resultado es suficiente estudiar el caso, en el cual la malla inicial  $\tau_0$  solamente contiene un único triángulo  $t_0$ . Entonces, el número de triángulos generados asociados con la partición  $4T-LE$  en el paso  $n$  de refinamiento es

$$N_n = 4^n \quad (2)$$

Primero probamos la proposición para triángulos iniciales rectos, agudos y obtuso Tipo 1. En este contexto el número de triángulos en pares de triángulos terminales  $T_n$  generados en el paso  $n$  de la partición  $4T-LE$  uniforme satisface

$$T_n = 4T_{n-1} + 2(N_{n-1} - T_{n-1}) = 2(T_{n-1} + N_{n-1}) \quad (3)$$

con  $N_0 = 1$  y  $T_0 = 0$ .

Resolviendo las relaciones de recurrencia (2) y (3) obtenemos

$$T_n = 4^n - 2^n \quad (4)$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(\tau_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{N_n} = 1$$

Para completar la prueba ahora consideramos el caso de un triángulo inicial  $t_0$  obtuso Tipo 2. La Tabla I presenta el número de distintos tipos de triángulos generados por el refinamiento iterativo del  $4T-LE$  a  $t_0$ . Denotamos por  $t_j^n$  el número de clases distintas de similaridad de triángulos  $t_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, k$  en el paso  $n$  del refinamiento. Por ejemplo, después del segundo refinamiento tenemos 4 triángulos similares a  $t_0$ , 8 triángulos similares a  $t_1$  y 4 nuevos triángulos similares a  $t_2$ .

Ref.	0	1	2	3	4	...	k	...	n
$t_0$	1	2	4	8	16	...	$t_0^k$	...	$t_0^n$
$t_1$		2	8	24	64	...	$t_1^k$	...	$t_1^n$
$t_2$			4	24	96	...	$t_2^k$	...	$t_2^n$
$t_3$				8	64	...	$t_3^k$	...	$t_3^n$
$t_4$					16	...	$t_4^k$	...	$t_4^n$
$\vdots$						$\ddots$	$\vdots$	...	$\vdots$
$t_k$							$t_k^k$	...	$t_k^n$

**Tabla I.** Evolución de triángulos en la partición  $4T-LE$

De la Proposición 2 y de la Figura 6 se obtiene la Tabla I, en la cual se dan las siguientes relaciones

$$t_j^n = 2(t_j^{n-1} + t_{j-1}^{n-1}), \quad j = 1, 2, 3, \dots, k \quad (5)$$

La solución de la ecuación (5) con la condición inicial  $t_0^0 = 1$  puede ser fácilmente expresada en términos de coeficientes de binomios como sigue

$$t_j^n = 2^n \binom{n}{j} \quad (6)$$

Por otra parte la partición iterativa del  $4T-LE$  a cualquier triángulo obtuso  $t_0$  da lugar a un número finito de triángulos distintos (en cuanto a similaridad)  $t_j^i$ ,  $0 < j \leq k$ . Después de  $k$  pasos de refinamiento no habrá ya nuevos triángulos distintos generados, diferentes de aquellos ya generados. Por consiguiente, el número de triángulos en pares de triángulos terminales  $T_n$  después de  $k$  pasos de refinamiento con  $n > k$  satisface

$$T_n \geq 2^n \sum_{m=k}^n \binom{n}{m}$$

De ello se sigue que

$$1 \geq B(\tau_n) \geq \frac{2^n \sum_{m=k}^n \binom{n}{m}}{2^n \sum_{m=0}^n \binom{n}{m}} = \frac{\sum_{m=k}^n \binom{n}{m}}{2^n}$$

Tomando límites:

$$1 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} B(\tau_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=k}^n \binom{n}{m}}{2^n}$$

Debido a que

$$\sum_{m=k}^n \binom{n}{m} = 2^n - \sum_{m=0}^{k-1} \binom{n}{m} \geq 2^n - \binom{n}{k-1} k$$

obtenemos

$$1 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} B(\tau_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - \binom{n}{k-1} k}{2^n} = 1$$

Así que,  $\lim_{n \rightarrow \infty} B(\tau_n) = 1$ .

En la próxima sección se demuestra, que para el refinamiento local de un único triángulo, la propagación del refinamiento se extiende asintóticamente por término medio a unos pocos triángulos adyacentes vecinos.

## PROPIEDADES DE PROPAGACIÓN PARA LA PARTICIÓN $4T$ -LE

El vecino de un triángulo  $t_0$  por la arista mayor es el triángulo vecino  $t_1$ , que comparte con  $t_0$  su arista mayor. El camino de propagación por el lado mayor (*LEPP*) de un triángulo  $t_0$  es la lista ordenada y finita de todos los triángulos adyacentes  $LEPP(t_0) = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ , tal que  $t_i$  es el triángulo vecino de  $t_{i-1}$  por su arista mayor<sup>7</sup>. Se dice, que un triángulo es de la *frontera*, si  $t$  tiene una arista que coincide con la frontera  $\partial\Omega$  del dominio  $\Omega$ . De lo contrario,  $t$  es un triángulo interior.

Para cualquier triángulo  $t_0$ , donde  $LEPP(t_0) = \{t_0, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ , entonces para el triángulo  $t_n$ , o bien: (i)  $t_n$  tiene su arista mayor coincidente con la frontera, o (ii)  $t_{n-1}$  y  $t_n$  son un par de triángulos terminales<sup>7</sup>.

Cuando se refina un triángulo  $t \in \tau$ , la propagación de  $t$  es el conjunto de triángulos en  $\tau^* = \tau - t$ , que tienen que ser refinados para asegurar el proceso de conformidad para  $t$ . Se denomina  $M1(t)$  al tamaño de la propagación de  $t$ . Para cada  $t \in \tau$   $M2(t)$  es la máxima longitud de los *LEPP* de los triángulos vecinos de  $t$  en la malla  $\tau^* = \tau - t$ .

Se destaca, que  $M1(t)$  mide la magnitud de la propagación de la zona de refinamiento para el triángulo  $t$  en número de triángulos. Así, para cada  $t \in \tau$   $M1(t)$  es la suma de las longitudes de los *LEPP* de los vecinos de  $t$  en la malla  $\tau^* = \tau - t$ .

La Figura 1 muestra, que siempre es posible construir mallas, en las cuales  $M1(t)$  es  $\mathcal{O}(N)$ , donde  $N$  es el número de elementos. Aquí el promedio de  $M1$  es  $\mu(M1) =$

$$\frac{\sum_t M1(t)}{N} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} k}{N} = \frac{\frac{N-1}{2} \cdot N}{N} = \frac{N-1}{2}. \text{ Por otra parte, si } B(\tau) = 1, \text{ entonces } M1(t) \leq 5 \forall t \in \tau.$$

Puesto que el proceso de conformidad se extiende por las tres aristas de  $t$ , la propagación define a lo sumo tres listas ordenadas de triángulos.  $M2(t)$  es el número máximo de triángulos de las tres listas resultantes. Por ejemplo, en la Figura 3  $M2(t) = 2$ , porque el número máximo de triángulos entre  $\{t_b, t_e\}$ ,  $\{t_c, t_d\}$ ,  $\{t_a\}$  es 2.



**Proposición 4** Sea  $\tau$  balanceada. Entonces, para cada triángulo interior  $t \in \tau$ ,  $M1(t) = 5$  y  $M2(t) = 2$ .

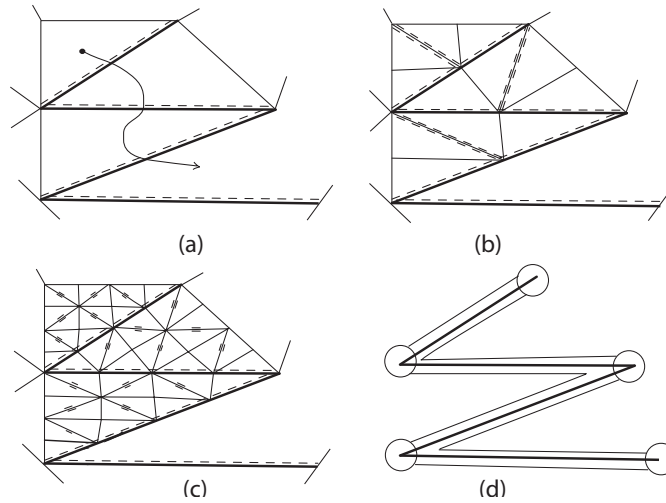
Destacamos, que si la partición  $4T-LE$  se usa para refinar un triángulo dado  $t$ , entonces el  $LEPP$  de los triángulos vecinos de  $t$  en la malla  $\tau^* = \tau - t$  proporciona la lista de triángulos, que van a ser refinados (Figura 3). Como consecuencia las  $LEPP$  proporcionan las principales listas de adyacencias usadas por el procedimiento del refinamiento local del  $4T-LE$ .

**Proposición 5** Para la aplicación iterativa del refinamiento uniforme del  $4T-LE$  a una malla triangular inicial  $\tau_0$  las medias del  $M1$  y del  $M2$  tienden a 5 y a 2, respectivamente, cuando el número de refinamientos tiende a infinito.

Prueba:

Si la malla inicial es ‘balanceada’, el resultado es trivial. Vamos a suponer que la malla inicial contiene triángulos no emparejados. En cualquiera de las subsecuentes mallas tendremos pares de triángulos terminales y triángulos no emparejados.

Primero probamos la proposición para cualquier triángulo no emparejado recto, agudo u obtuso Tipo 1 colocados de tal manera, que  $M1$  y  $M2$  son los más grandes. Esto es, todos los triángulos no emparejados constituyen un único  $LEPP$ . La Figura 7a reproduce una posible situación dentro de una malla. Después de unos pocos pasos de refinamiento se observa, que los nuevos triángulos no emparejados están localizados en las aristas mayores de los triángulos iniciales. Pintamos en negro las aristas mayores de los triángulos no emparejados, como se observa en la Figura 7d, y que denominamos *polilínea*.



**Figura 7.** (a) Triángulos no emparejados formando un  $LEPP$ ; (b)-(c) el refinamiento  $4T-LE$  de una triangulación en (a); (d) aristas mayores de triángulos en (a)

En la Figura 7d se muestran los triángulos no emparejados, que tienen sus aristas mayores sobre la polilínea. Estos triángulos no emparejados tienen  $6 \leq M1 \leq 7$  y  $2 \leq M2 \leq 3$ . Para un triángulo en un par terminal obtenemos, ó  $5 \leq M1 \leq 6$  ó  $2 \leq M2 \leq 3$ , si tiene un vértice sobre la polilínea o  $M1 = 5$  y  $M2 = 2$  en otro caso. Después de  $n$  pasos de refinamiento el número de triángulos no emparejados es  $X_n = 2^n X_0$  y el número de

triángulos totales es  $N_n = 4^n N_0$ . Para obtener unas cotas superior e inferior del promedio de  $M1$  se opera como sigue

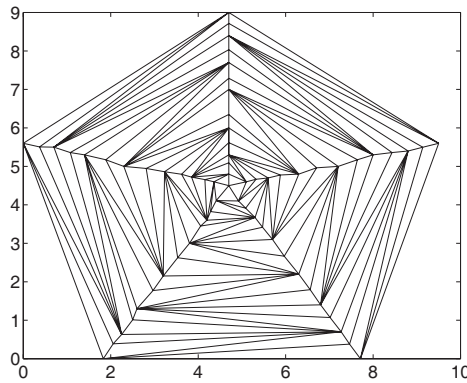
$$\frac{6X_n + 5(N_n - X_n)}{N_n} \leq M1 \leq \frac{7 \cdot 2X_n + 5(N_n - 2X_n)}{N_n}$$

Análogamente para  $M2$

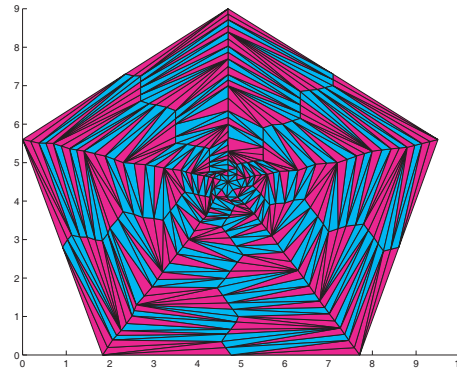
$$\frac{2X_n + 2(N_n - X_n)}{N_n} \leq M2 \leq \frac{3 \cdot 2X_n + 2(N_n - 2X_n)}{N_n}$$

Tomando límites encontramos, que las medias de  $M1$  y  $M2$  tienden a 5 y a 2, respectivamente, cuando el número de refinamientos  $n$  tiende a infinito.

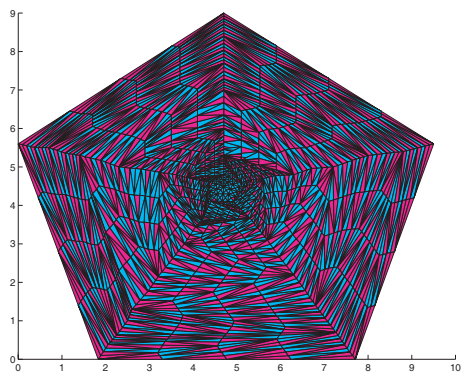
Para completar la prueba se debe también considerar el caso obtuso Tipo 2. Como se resaltó en la Proposición 2, en el refinamiento iterativo  $4T-LE$ , los ángulos mayores de los triángulos obtusos Tipo 2 claramente disminuyen y después de un número finito  $k$  de particiones  $4T-LE$  aparecen nuevos triángulos no obtusos. Entonces se aplica la primera parte de la prueba para los casos de triángulos rectos y agudos.



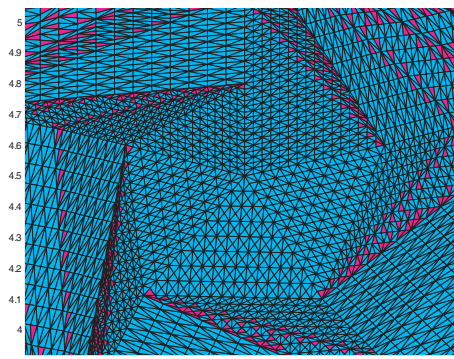
(a) Malla inicial: 0 triángulos terminales, 125 triángulos.



(b) 1 Paso de refinamiento: 246 triángulos terminales, (triángulos más claros), 500 triángulos.



(c) 2 Paso de refinamiento: 1088 triángulos terminales (triángulos más claros), 2000 triángulos totales.



(d) 3 Paso de refinamiento: 4778 triángulos terminales (triángulos más claros), 8000 triángulos (zoom interior).

**Figura 8.** Malla pentagonal. Refinamiento uniforme para el  $4T-LE$

## EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

En esta sección presentamos resultados numéricos, que muestran, que el comportamiento experimental de la partición  $4T-LE$  está en concordancia con los resultados teóricos recogidos en este trabajo, principalmente las Proposiciones 3 y 5. Se pueden encontrar algunos otros ejemplos numéricos en la referencia 10.

### Comportamiento asintótico para el refinamiento uniforme del $4T-LE$

A continuación consideramos una malla irregular pentagonal (Figura 8a) con cinco pasos de refinamiento uniforme. Es de destacar que para los triángulos del pentágono la media de los ángulos mínimos y de los ángulos máximos son 9,18 y 120,41 grados, respectivamente y  $B(\tau_0) = 0$ .

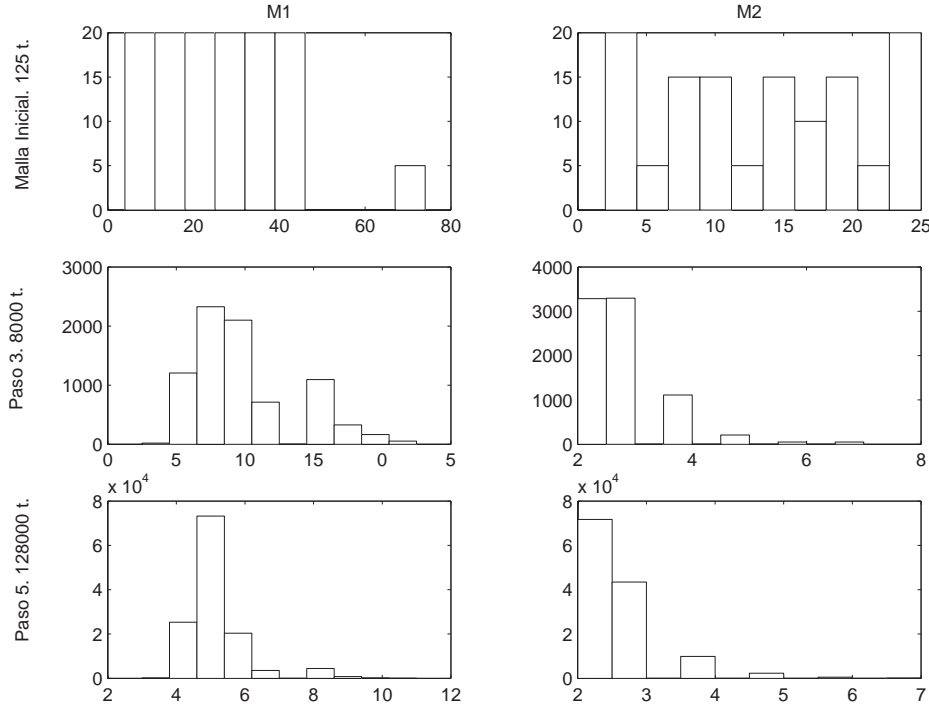
$R$	$T$	$N$	$B$
0	0	125	0
1	246	500	0,49200
2	1088	2000	0,54400
3	4778	8000	0,59725
4	21240	32000	0,66375
5	103970	128000	0,81230

**Tabla II.** Medidas estadísticas para el refinamiento de la malla pentagonal,  $R$  paso de refinamiento,  $T$  triángulos en pares terminales,  $N$  triángulos,  $B$  grado de balanceo

$R$	$N$	$\mu(M1)$	$\mu(M2)$	$\sigma(M1)$	$\sigma(M2)$
0	125	26,544	14,392	16,569	7,156
1	500	6,910	3,800	2,204	1,668
2	2000	6,200	3,048	1,699	1,103
3	8000	5,997	2,831	1,553	0,883
4	32000	5,482	2,412	1,122	0,800
5	128000	5,370	2,204	0,947	0,757

**Tabla III.** Medidas estadísticas del  $M1$  y  $M2$  para el refinamiento de la malla pentagonal. Promedio ( $\mu$ ) y desviación típica ( $\sigma$ )

Las mallas refinadas para el dominio pentagonal se muestran en la Figura 8. La evolución del grado de balanceo es recogida en la Tabla II. Destacamos, que el grado de balanceo tiende a 1, cuando el número de refinamientos se incrementa. La Tabla III recoge la media y la desviación típica de  $M1$  y  $M2$ , respectivamente, y los respectivos histogramas se recogen en la Figura 9.



**Figura 9.** Histogramas del  $M1$  y  $M2$  para el refinamiento de la malla pentagonal (Figura 8)

### Un ejemplo del refinamiento adaptable de la malla

Nuestros resultados tienen que ser tomados con cierta cautela en ejemplos prácticos del refinamiento de mallas adaptables, porque en algunos casos nos interesa la propagación de un porcentaje determinado de triángulos. Sin embargo, incluimos aquí un experimento, que adapta una malla para resolver una ecuación en derivadas parciales no lineal. El refinamiento de adaptación genera en cada paso una secuencia de soluciones sobre las sucesivas mallas más finas seleccionando y refinando aquellos elementos, que contribuyen a un error mayor. El problema del valor de la frontera es el siguiente

$$-\Delta + u \cdot u_x = f \text{ in } \Omega ; u = u_{ex} \text{ in } \Omega \quad (7)$$

sobre  $[0, 1] \times [0, 1]$  con  $f(x, y)$ , tal que  $u_{ex} = 10x^9$  es la solución exacta del problema.

Usamos como indicador de error la norma  $L_2$

$$\|\Delta(u - u_h)\| \leq \alpha \|hf\| + \beta D_h(u_h) \quad (8)$$

donde  $h = h(x)$  es el tamaño de la malla local y

$$D_h(v) = \left( \sum_{e \in E_1} h_e^2 \left[ \frac{\partial v}{\partial n_e} \right]^2 \right)^{1/2} \quad (9)$$

La cantidad entre corchetes en (9) es el salto de la derivada normal de  $v$  a través de la arista  $e$ ,  $h_e$  es la longitud de la arista  $e$ , y el sumatorio va desde  $E_i$  al conjunto de todas

las aristas interiores de la triangulación. Los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  son independiente de la triangulación. La Figura 10 presenta la evolución del error máximo.

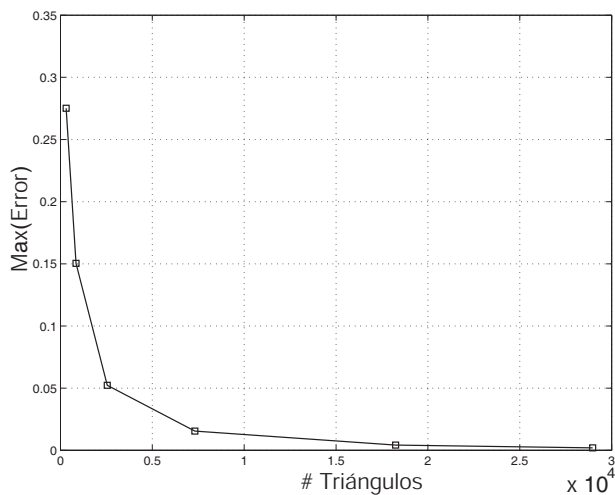


Figura 10. Evolución del error máximo

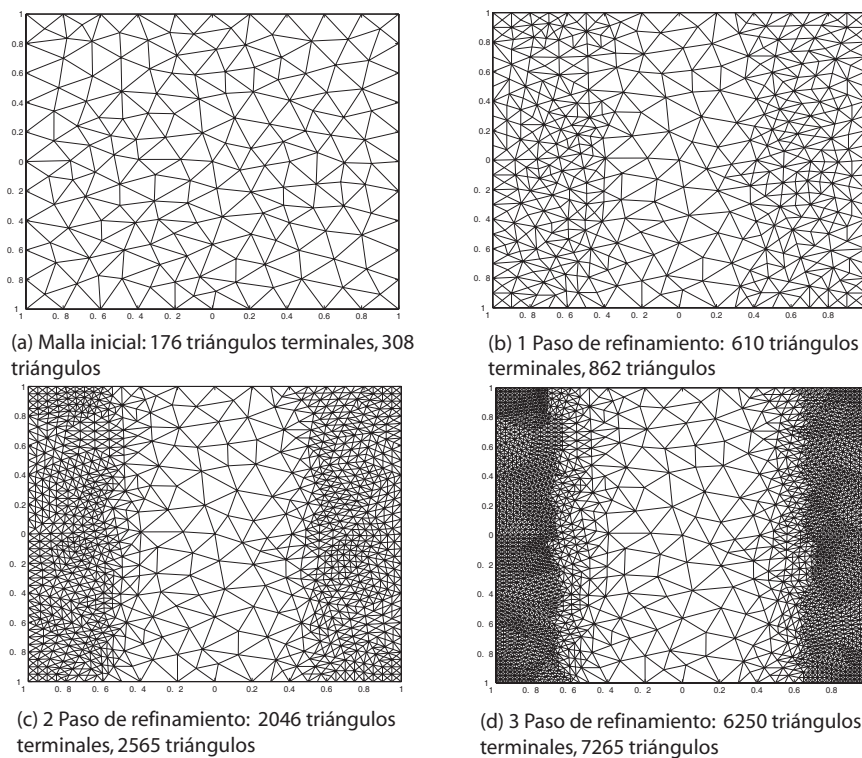


Figura 11. Malla adaptada usando el refinamiento local  $\mathcal{4}T$ -LE

La malla inicial es de tipo Delaunay con 308 triángulos y 175 nodos. La malla final tiene 27 662 triángulos, que se obtienen después de cinco pasos de refinamiento. Serán refinados todos aquellos elementos con un valor de indicador, que exceda una tolerancia dada por el usuario de  $5 \times 10^7$ .

$R$	$T$	$N$	$B$
0	176	308	0,5714
1	610	862	0,7077
2	2046	2565	0,7977
3	6250	7265	0,8603
4	16212	18221	0,8897
5	25282	27662	0,9140

**Tabla IV.** Datos estadísticos para mallas adaptadas:  $R$  paso de refinamiento,  $T$  triángulos en pares terminales,  $N$  triángulos,  $B$  grado de balanceo

$R$	$N$	$\mu(M1)$	$\mu(M2)$	$\sigma(M1)$	$\sigma(M2)$
0	308	5,4675	2,6364	1,5321	0,8016
1	862	5,3886	2,5278	1,3498	0,7718
2	2565	5,3107	2,4027	1,1181	0,7134
3	7265	5,2274	2,2823	0,9515	0,6240
4	18221	5,1782	2,1498	0,8274	0,5116
5	27662	5,1102	2,1019	0,7175	0,4041

**Tabla V.** Datos estadísticos del  $M1$  y  $M2$  para mallas adaptadas. Promedio ( $\mu$ ) y desviación típica( $\sigma$ )

## CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

En este artículo se han presentado y demostrado dos propiedades asintóticas en el refinamiento iterativo de una malla de triángulos. Primeramente se desarrollan tanto resultados teóricos como empíricos, que muestran, que la aplicación recursiva de la partición uniforme en cuatro triángulos por la arista mayor a una malla triangular arbitraria no estructurada produce mallas, en las cuales los pares de triángulos, que comparten la arista mayor, tienden a cubrir el área de toda la malla. Como consecuencia también se demostró, que para el refinamiento local de un triángulo la zona de propagación se extiende asintóticamente en promedio a unos pocos triángulos vecinos adyacentes.

Este resultado ha sido también demostrado numéricamente para diferentes refinamientos locales de triángulos no emparejados. Sin embargo, en el refinamiento de adaptación de una malla generalmente una pequeña fracción de los elementos son marcados en cada paso para ser refinados. Además existen diferentes estrategias para la elección de estos elementos. Por ejemplo, nuestros resultados se tienen que usar con cautela con una singularidad móvil punto/línea o usando técnicas de desrefinamiento en la adaptabilidad de la malla.

Cuando se aplican distintos refinamientos uniformes a una malla inicial triangular arbitraria, en promedio, el parámetro  $M1(t)$  tiende a 5 y el  $M2(t)$  tiende a 2. Esto implica, que para el refinamiento local en la práctica la propagación en término medio de refinamientos secundarios debidos a determinados refinamientos estará limitado a un número proporcionalmente pequeño de elementos. En vista de esto una estimación asintótica del coste se determina fácilmente teniendo en cuenta, que el coste del refinamiento de un triángulo

no emparejado es constante  $c$  y el número de triángulos de la vecindad conforme para cualquier triángulo es por término medio 5, por tanto, la estimación asintótica del coste del refinamiento de un triángulo es, obviamente,  $6c$ . En particular, si se toma una malla inicial y se refina localmente  $N$  triángulos, el coste en la generación de la nueva malla será  $6Nc$ . Obviamente, si el número de refinamientos sigue un comportamiento lineal, el coste total será también de orden lineal.

Estos resultados son también una medida global de la mejora de las mallas sobre el tamaño de la vecindad conforme, el cual es una medida de la mejora topológica de la malla.

El problema de la propagación en 3D necesita un estudio mucho más amplio, porque el número de patrones de conectividad es considerablemente mucho más alto que en 2D. Es de destacar que el refinamiento  $4T$ -LE utiliza tres patrones parciales de división, mientras que la extensión a dimensión tres, la partición  $8T$ -LE puede llegar a involucrar más de cincuenta divisiones parciales debido a la conformidad<sup>5</sup>. Se han realizado algunos estudios numéricos del comportamiento del  $LEPP$  para el refinamiento de mallas de tetraedros y este tema será objeto de un trabajo posterior.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de investigación ha sido parcialmente financiado por el Proyecto del Gobierno de Canarias PI2003/35 y por el Proyecto de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria UNI2003/16.

## REFERENCIAS

- 1 M. Bern y P.E. Plassmann, “*Mesh generation in handbook of computational geometry*”, pp. 291–332, (2000).
- 2 S.A. Canann, S. Saigal y S.J. Owen, “Special edition on unstructured mesh generation”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **1**, No 49, (2000).
- 3 G.F. Carey, “*Computational grids: generation, adaptation and solution strategies*”, Taylor & Francis, (1997).
- 4 M.T. Jones y P.E. Plassmann, “Parallel algorithms for adaptive mesh refinement”, *Journal in Scientific Computing*, Vol. **18**, pp. 686–708, (1997).
- 5 A. Plaza, M.A. Padrón y G.F. Carey, “A 3D refinement/derefinement combination to solve evolution problems”, *App. Num. Math.*, pp. 285–302, (2000).
- 6 A. Plaza, J.P. Suárez, M.A. Padrón, S. Falcón y D. Amieiro, “Mesh quality improvement and other properties in the four-triangles longest-edge partition”, *Comp. Aid. Geom. Design*, Vol.**21**, pp. 353–369, (2004).
- 7 M.C. Rivara, “New mathematical tools and techniques for the refinement and/or improvement of unstructured triangulations”, *Proceedings 5th International Meshing Roundtable’96. SANDIA Report SAND 96-2301*, pp. 77–86, (1996).
- 8 M.C. Rivara y M. Vemere, “Cost analysis of the longest-side (triangle bisection) refinement algorithm for triangulation”, *Engineering with Computers*, Vol. **12**, pp. 224–234, (1996).
- 9 I.G. Rosenberg y F. Stenger, “A lower bound on the angles of triangles constructed by bisecting the longest side”, *Mathematics of Computation*, Vol. **29**, pp. 390–395, (1975).
- 10 J.P. Suárez, A. Plaza y G.F. Carey, “Propagation path properties in iterative longest-edge refinement”, *Proceedings 12th International Meshing Roundtable’03. SANDIA Report SAND 2003-3030*, pp. 79–90, (2003).