

# **Un Modelo de Fallo Material en el Hormigón Armado, mediante la Metodología de Discontinuidades Fuertes de Continuo y la Teoría de Mezclas**

D.L. Linero  
X. Oliver  
A. Huespe

# **Un Modelo de Fallo Material en el Hormigón Armado, mediante la Metodología de Discontinuidades Fuertes de Continuo y la Teoría de Mezclas**

D.L. Linero  
X. Oliver  
A. Huespe

# **Un Modelo del Fallo Material en el Hormigón Armado mediante la Metodología de Discontinuidades Fuertes de Continuo y la Teoría de Mezclas**

D.L. Linero  
X. Oliver  
A.E. Huespe

Monografía CIMNE N<sup>o</sup>-101, 2007

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA  
Edificio C1, Campus Norte UPC  
Gran Capitán s/n  
08034 Barcelona, España  
[www.cimne.upc.es](http://www.cimne.upc.es)

Primera edición:2007

**UN MODELO DE FALLO MATERIAL EN EL HORMIGÓN ARMADO MEDIANTE LA METODOLOGÍA  
DE DISCONTINUIDADES FUERTES DE CONTINUO Y LA TEORÍA DE MEZCLAS**

Monografía CIMNE M101

© Los autores

ISBN: 978-84-96736-09-2

Depósito legal: B-52501-2007



# Índice

Índice .....	i
Lista de Símbolos .....	v
Resumen .....	xiii
Capítulo 1. Introducción.....	1
1.1. Motivación .....	1
1.1.1. Aplicación del modelo .....	3
1.1.2. Modelo unidimensional de material compuesto .....	3
1.2. Comportamiento mecánico del hormigón armado.....	7
1.2.1. Respuesta estructural y fisuración del hormigón armado .....	7
1.2.2. Pérdida de adherencia hormigón – acero .....	9
1.2.3. Acción pasador.....	10
1.3. Algunas aproximaciones a la mecánica de la fractura para materiales homogéneos .....	11
1.3.1. Modelos de fisura cohesiva.....	12
1.3.2. Modelos de fisura distribuida.....	12
1.3.3. Metodología de discontinuidad fuerte.....	13
1.4. Simulación del fallo material del hormigón armado.....	16
1.4.1. Escalas de análisis del hormigón armado.....	16
1.4.2. Modelos analíticos del material hormigón armado.....	17
1.4.3. Modelos de pérdida de adherencia hormigón – acero.....	18
1.4.4. Simulación numérica del material hormigón armado .....	19
1.5. El hormigón armado descrito como un material compuesto.....	22
1.5.1. Definición del material compuesto .....	22
1.5.2. Análisis del material compuesto como un problema en varias escalas	23
1.5.3. Teoría de mezclas.....	24
1.5.4. Modelo de fibra con diámetro despreciable .....	26
1.5.5. Método del campo promedio .....	27
1.5.6. Deslizamiento fibra - matriz.....	28
1.6. Objetivos .....	28

1.7.	Modelo adoptado.....	29
1.8.	Contenido.....	30
Capítulo 2.	Formulación del modelo.....	33
2.1.	Consideraciones básicas.....	33
2.2.	Modelos constitutivos de los materiales componentes .....	35
2.2.1.	Comportamiento de la matriz de hormigón .....	35
2.2.2.	Comportamiento axial de las fibras o barras de acero: modelo de fibra deformable .....	37
2.2.3.	Efecto del deslizamiento acero - hormigón.....	39
2.2.4.	Modelo de fibra deslizante.....	42
2.2.5.	Acción pasador.....	45
2.3.	Modelo constitutivo del material compuesto .....	48
2.4.	Aplicación de la metodología de discontinuidades fuertes de continuo a materiales compuestos .....	53
2.4.1.	Descripción cinemática del material compuesto.....	54
2.4.2.	Condiciones de equilibrio en el material compuesto .....	56
2.4.3.	Análisis de discontinuidad fuerte en el material compuesto.....	57
2.5.	Análisis de bifurcación en el material compuesto .....	60
2.5.1.	Criterio de bifurcación .....	61
2.5.2.	Estrategia de cálculo .....	63
2.5.3.	Ejemplos en un punto material.....	63
2.6.	Implementación de la formulación en el método de los elementos finitos. Elementos con discontinuidades embebidas .....	68
2.6.1.	Cinemática de la deformación del material compuesto .....	70
2.6.2.	Condiciones de equilibrio del material compuesto .....	72
2.6.3.	Matriz de rigidez del elemento finito.....	73
2.6.4.	Vector de tasa de tensiones del material compuesto.....	74
2.6.5.	Matriz del operador constitutivo tangente del material compuesto .....	74
2.6.6.	Matriz de localización del material compuesto.....	75
2.6.7.	Algoritmo de cálculo.....	76
2.7.	Recapitulación.....	79
Capítulo 3.	Ejemplos de simulación numérica.....	81
3.1.	Consideraciones generales .....	81
3.2.	Separación entre fisuras y longitud de la zona de deslizamiento.....	84
3.2.1.	Definición de la zona de deslizamiento .....	84
3.2.2.	Panel heterogéneo con refuerzo elástico en el centro .....	87
3.2.3.	Comparación de resultados para mallas de diferente densidad.....	94
3.2.4.	Panel heterogéneo con refuerzo elasto-plástico en el centro .....	95
3.3.	Simulación numérica del ensayo de un panel heterogéneo de hormigón armado sometido a tracción .....	97

3.3.1.	Malla de elementos finitos no homogénea de densidad media.....	99
3.3.2.	Comparación entre mallas no homogéneas de diferente densidad.....	102
3.4.	Vigas de tres puntos ligeramente reforzadas.....	107
3.4.1.	Viga I (cuantía de refuerzo del 0.13%).....	109
3.4.2.	Viga II (cuantía de refuerzo del 0.065%).....	113
3.5.	Vigas fuertemente armadas.....	114
3.6.	Paneles sometidos a tensión cortante.....	122
3.6.1.	Panel reforzado en una dirección sometido a cortante puro.....	122
3.6.2.	Efecto de la acción pasador en paneles sometidos a cortante puro....	128
3.6.3.	Panel reforzado en dos direcciones sometido a cortante puro.....	129
3.6.4.	Panel reforzado en una dirección sometido a tensión normal y tangencial.....	135
3.7.	Recapitulación.....	138
Capítulo 4.	Conclusiones.....	143
4.1.	Conclusiones generales.....	144
4.2.	Conclusiones derivadas de la formulación e implementación del modelo.....	145
4.3.	Conclusiones derivadas de la simulación numérica.....	146
Anexo A.	Modelos de daño y plasticidad.....	149
A.1.	Modelo constitutivo de daño escalar.....	149
A.1.1.	Fenomenología del modelo de daño (Lemaitre 1992).....	149
A.1.2.	Ecuación constitutiva del modelo de daño.....	151
A.1.3.	Ingredientes del modelo de daño.....	153
A.1.4.	Modelo de daño con tracción y compresión diferenciada.....	154
A.2.	Modelo constitutivo unidimensional de plasticidad.....	158
Anexo B.	Teoría de mezclas para materiales compuestos.....	161
B.1.	Hipótesis básicas.....	161
B.2.	Energía libre del material compuesto.....	162
B.3.	Ecuación constitutiva tangente del material compuesto.....	163
Anexo C.	Metodología de discontinuidades fuertes de continuo.....	165
C.1.	Cinemática de la discontinuidad fuerte.....	166
C.1.1.	Descripción unidimensional.....	166
C.1.2.	Descripción bi- o tridimensional.....	167
C.2.	Problema de valores de contorno en una discontinuidad fuerte.....	170
C.3.	Análisis de bifurcación material.....	171
C.4.	Análisis de discontinuidad fuerte para modelos de daño continuo.....	173
C.5.	Análisis de discontinuidad fuerte para modelos unidimensionales de plasticidad.....	176
Anexo D.	Trazado de líneas de discontinuidad.....	179
D.1.	Generalidades.....	179



D.2.	Estrategia local .....	180
D.3.	Estrategia global.....	181
D.3.1.	Consideraciones generales .....	181
D.3.2.	Envolvente del campo vectorial de propagación .....	182
D.3.3.	Implementación en el método de los elementos finitos .....	183
Anexo E.	Esquema de integración implícito-explicito.....	185
E.1.	Esquema de integración para un modelo de daño tracción y compresión diferenciado.....	185
E.1.1.	Esquema de integración implícito. Operador algorítmico tangente consistente.....	185
E.1.2.	Esquema de integración implícito-explicito. Operador algorítmico tangente efectivo. ....	187
E.2.	Esquema de integración para un modelo de plasticidad unidimensional. ....	188
E.2.1.	Esquema de integración implícito. Operador algorítmico tangente consistente.....	188
E.2.2.	Esquema de integración implícito-explicito. Operador algorítmico tangente efectivo. ....	189
Anexo F.	Notación .....	193
F.1.	Notación de Voigt en dos dimensiones.....	193
F.2.	Funciones especiales .....	194
Referencias	.....	197

# Lista de Símbolos

$[\mathbf{B}^{(e)}], [\mathbf{G}^{(e)}]$	matrices deformación-desplazamiento.	$\{\dot{\mathbf{F}}_{ext}^{(e)}\}$	vector de la tasa de fuerzas externas en el elemento finito.
$[\mathbf{C}_{tg}^{dr}]$	matriz del operador constitutivo tangente del modelo de fibra deslizante paralela al vector $\mathbf{r}$ , en notación de Voigt.	$[\mathbf{K}^{(e)}]$	matriz de rigidez del elemento finito.
$[\mathbf{C}_{tg}^{ds}]$	matriz del operador constitutivo tangente del modelo de fibra deslizante paralela al vector $\mathbf{s}$ , en notación de Voigt.	$[\mathbf{Q}_{tg}^{dr}]$	matriz de localización del modelo de fibra deslizante paralela al vector $\mathbf{r}$ .
$[\mathbf{C}_{tg}^{fz}]$	matriz del operador constitutivo tangente del modelo de la acción pasador, en notación de Voigt.	$[\mathbf{Q}_{tg}^{ds}]$	matriz de localización del modelo de fibra deslizante paralela al vector $\mathbf{s}$ .
$[\mathbf{C}_{tg}^m]$	matriz del operador constitutivo tangente de la (componente) matriz en notación de Voigt.	$[\mathbf{Q}_{tg}^{fz}]$	matriz de localización del modelo de la acción pasador.
$[\mathbf{C}_{tg}]$	matriz del operador constitutivo tangente del material compuesto en notación de Voigt.	$[\mathbf{Q}_{tg}^m]$	matriz de localización de la (componente) matriz.
$\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$	vector de la tasa de deformación del material compuesto en notación de Voigt.	$[\mathbf{Q}_{tg}]$	matriz de localización del material compuesto.
$[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]]$	diferencia entre la tasa de deformación dentro y fuera de la superficie de discontinuidad	$\{\dot{\mathbf{i}}^{(e)}\}$	vector de la tasa de fuerzas residuales asociado a los grados de libertad del salto del desplazamiento en el elemento finito.
		$\{\dot{\mathbf{R}}^{(e)}\}$	vector de la tasa de fuerzas residuales asociado a los grados de libertad compatibles en el elemento finito.
		$\{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\}$	vector de la tasa de tensión del material compuesto en notación de Voigt.

$\{\dot{\sigma}^{f\tau}\}$	vector de la tasa de tensión del modelo de la acción pasador, escrito en notación de Voigt.	$\delta^i$	deslizamiento en el extremo de una barra en el ensayo de arrancamiento.
$\{\dot{\sigma}^{fr}\}$	vector de la tasa de tensión de las fibras en dirección $\mathbf{r}$ , escrito en notación de Voigt.	$\delta_S^k$	función delta de Dirac regularizada.
$\{\dot{\sigma}^{fs}\}$	vector de la tasa de tensión de las fibras en dirección $\mathbf{s}$ , escrito en notación de Voigt.	$\delta_S$	función delta de Dirac en la superficie de discontinuidad.
$\{\dot{\sigma}^m\}$	vector de la tasa de tensión de la matriz en notación de Voigt.	$\boldsymbol{\varepsilon}$	tensor de deformación del material compuesto.
$[[\dot{\mathbf{u}}]]$	salto de la tasa de desplazamiento en un punto de material compuesto.	$\boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega \setminus S}$	tensor de deformación en el material compuesto en $\Omega \setminus S$ .
$\alpha^{f\tau}$	variable interna tipo deformación del modelo que representa la acción pasador.	$\varepsilon_{rr}^d$	deformación de la fibra deslizante paralela al vector $\mathbf{r}$ .
$\alpha^{fr}$	variable interna tipo deformación en el modelo de plasticidad del comportamiento axial de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .	$\varepsilon_{ss}^d$	deformación de la fibra deslizante paralela al vector $\mathbf{s}$ .
$\bar{\alpha}^{f\tau}$	variable interna discreta del modelo de acción pasador.	$\varepsilon_p^{fr}$	deformación axial plástica de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$\bar{\alpha}^{fr}$	variable interna discreta de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .	$\varepsilon_{rr}^f$	deformación axial de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$\bar{\alpha}^{fs}$	variable interna discreta de las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ .	$\varepsilon_p^{ir}$	deformación plástica del modelo de deslizamiento matriz – fibra en $\mathbf{r}$ .
$\bar{\alpha}^m$	variable interna discreta en la matriz.	$\varepsilon_{rr}^i$	deformación por deslizamiento en la interfaz entre las fibras en $\mathbf{r}$ y la matriz.
$\boldsymbol{\beta}^{(e)}$	vector de saltos de desplazamientos de un elemento finito en dos dimensiones.	$\varepsilon_{ss}^i$	deformación en la interfaz entre la matriz y las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ .
$\delta^\tau$	desplazamiento relativo entre las caras de una fisura, perpendicular al eje longitudinal de la fibra, producido por la acción pasador.	$\boldsymbol{\varepsilon}^m$	tensor de deformación de la matriz.
		$\varepsilon_{rr}^m, \varepsilon_{ss}^m, \gamma_{rs}^m$	componentes de la deformación en la matriz en la base $rs$ .
		$\varepsilon_{ss}^f$	deformación axial de las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ .
		$\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{ss}, \gamma_{rs}$	componentes de la deformación en el material compuesto en la base $rs$ .
		$\boldsymbol{\varepsilon}_S$	tensor de la tasa deformación del material compuesto en $S$ .

$\phi$	parámetro de amplificación de la norma de deformaciones del modelo de daño con tracción y compresión diferenciados.	$\theta_{loc}$	ángulo conformado entre la dirección principal $l$ en deformaciones y el vector $\mathbf{n}_{loc}$ , o ángulo de localización.
$\gamma$	campo admisible de deformaciones.	$\theta_n$	ángulo conformado entre la dirección principal $l$ en deformaciones y el vector $\mathbf{n}$ .
$\gamma_p^f$	deformación plástica en el modelo que representa la acción pasador.	$\sigma$	tensor de tensión del material compuesto
$\gamma_{rs}^f$	deformación angular de las fibras en el plano $rs$ .	$\sigma_{\Omega \setminus S}$	tensor de tensión del material compuesto en $\Omega \setminus S$ .
$\varphi$	función continua arbitraria	$\sigma_{rr}^d$	tensión de la fibra deslizante paralela al vector $\mathbf{r}$ .
$\varphi_{fr}$	ángulo conformado entre el vector $\mathbf{r}$ de las fibras y el eje $x$ .	$\sigma_{adh}^{ir}$	tensión de pérdida total de adherencia entre la matriz y las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$\varphi_{fs}$	ángulo conformado entre el vector $\mathbf{s}$ de las fibras y el eje $x$ .	$\sigma_{rr}^f$	tensión axial de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$\lambda^{f\tau}$	multiplicador plástico del modelo que representa la acción pasador.	$\sigma_{rr}^f(\Omega \setminus S)$	tensión normal de la fibra paralela al vector $\mathbf{r}$ , en $\Omega \setminus S$ .
$\lambda^{fr}$	multiplicador plástico del comportamiento axial de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .	$\sigma_y^{fr}$	tensión de fluencia de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$\lambda^{fs}$	multiplicador plástico del comportamiento axial de las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ .	$\sigma_{ss}^f(\Omega \setminus S)$	tensión normal de la fibra paralela al vector $\mathbf{s}$ , en $\Omega \setminus S$ .
$\lambda^{ir}$	multiplicador plástico del modelo de deslizamiento matriz – fibra en $\mathbf{r}$ .	$\sigma_{ss}^f(S)$	tensión normal de la fibra paralela al vector $\mathbf{s}$ , en $S$ .
$\lambda^m$	multiplicador de daño en el modelo de la matriz.	$\sigma_y^f$	tensión de fluencia del acero de refuerzo.
$\Gamma_\sigma$	contorno del sólido donde se prescribe la tasa de tracción.	$\sigma_{rr}^i$	tensión en la interfaz entre la matriz y las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$\nu^f$	relación de Poisson del acero de refuerzo.	$\sigma_{ss}^i$	tensión en la interfaz entre la matriz y las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ .
$\nu^m$	relación de Poisson de la matriz.	$\sigma^m$	tensor de tensión en la matriz.
$\eta'$	desplazamientos discontinuos	$\sigma_{\Omega \setminus S}^m$	tensor de tensión de la matriz en $\Omega \setminus S$ .
$\bar{\eta}$	desplazamientos regulares admisibles	$\sigma_u^m$	resistencia a tracción de la matriz.

$\sigma_{u(c)}^m$	resistencia a compresión de la matriz.	$\mathbf{v}_t$	vector unitario normal al contorno del sólido.
$\sigma_{ss}^d$	tensión de la fibra deslizante paralela al vector $\mathbf{s}$ .	$\mathbf{1}$	tensor identidad de segundo orden.
$\sigma_{(S)}^m$	tensor de tensión de la matriz en $\underline{S}$ .	$\mathbf{A}$	tensor de segundo orden definido como $\mathbf{A} = \mathbf{C}^m : \partial_{\underline{\sigma}} \phi$
$\sigma_S$	tensor de tensión del material compuesto en $S$ .	$A^f$	área de la sección transversal de una barra circular de diámetro $d$ .
$\sigma_{rr}, \sigma_{ss}, \sigma_{rs}$	componentes de tensión del material compuesto en la base $rs$ .	$\mathbf{b}$	vector de fuerzas de cuerpo en el sólido.
$\bar{\sigma}^m$	tensor de tensión efectiva en la matriz.	$\mathbf{C}^m$	tensor constitutivo elástico de la matriz.
$\bar{\sigma}_i^m$	tensión efectiva de la matriz en la dirección principal $i$ .	$\mathbf{C}_{tg}^m$	tensor constitutivo tangente de la matriz
$\bar{\sigma}_r^m$	distancia entre el origen y el punto que representa el estado tensional sobre el círculo de Mohr.	$\mathbf{C}_{tg}$	tensor constitutivo tangente del material compuesto.
$\bar{\sigma}_{xx}^m, \bar{\sigma}_{yy}^m, \bar{\sigma}_{xy}^m$	componentes de la tensión efectiva de la matriz en el plano $xy$ .	$d$	diámetro de una barra de refuerzo.
$\tau_{e(tc)}$	norma de deformaciones del modelo de daño con tracción y compresión diferenciada.	$\mathbf{d}_i$	vector de desplazamientos compatible en el nudo $i$ de un elemento finito en dos dimensiones.
$\tau_{rs}^f$	tensión cortante de las fibras en el plano $rs$ .	$E_{tg}^{dr}$	operador constitutivo tangente del modelo de fibra deslizante paralela al vector $\mathbf{r}$ .
$\tau_{rs(\Omega \setminus S)}^f$	tensión cortante de la fibra en $\Omega \setminus S$ .	$E_{tg}^{ds}$	operador constitutivo tangente del modelo de fibra deslizante paralela al vector $\mathbf{s}$ .
$\tau_y^f$	tensión cortante equivalente en la barra de fluencia asociada a la acción pasador	$E^f$	módulo de Young del acero de refuerzo.
$\tau_{rs(S)}^f$	tensión cortante de la fibra en $S$ .	$E^{fr}$	módulo de Young de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$\Omega$	dominio del sólido.	$E_{tg}^{fr}$	operador constitutivo tangente del comportamiento axial de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$\Omega^+, \Omega^-$	parte del dominio delimitada por el contorno y la superficie de discontinuidad, en el sentido del vector $\mathbf{n}$ , y contrario a él, respectivamente.	$E^{fs}$	módulo de Young de las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ .
$\Psi$	energía libre en el modelo de daño de la matriz.		

$E_{tg}^{fs}$	operador constitutivo tangente del comportamiento axial de las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ .	$H^{fs}$	parámetro de ablandamiento del modelo de plasticidad de la fibra paralela al vector $\mathbf{s}$ .
$E^{ir}$	módulo elástico del modelo de deslizamiento matriz – fibra en $\mathbf{r}$ .	$H^m$	parámetro de ablandamiento del modelo de daño de la matriz
$E_{tg}^{ir}$	operador constitutivo tangente del modelo de deslizamiento matriz – fibra en $\mathbf{r}$ .	$\mathcal{H}_s$	función de Heaviside en la superficie de discontinuidad.
$E^{is}$	módulo elástico del modelo de deslizamiento matriz – fibra en $\mathbf{s}$ .	$\bar{H}^{f\tau}$	parámetro de ablandamiento discreto del modelo de acción pasador.
$E_{tg}^{is}$	operador constitutivo tangente del modelo de deslizamiento matriz – fibra en $\mathbf{s}$ .	$\bar{H}^{fr}$	parámetro de ablandamiento discreto de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$E^m$	módulo de Young de la matriz.	$\bar{H}^{fs}$	parámetro de ablandamiento discreto de las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ .
$f^{f\tau}$	función de fluencia del modelo que representa la acción pasador.	$\bar{H}^m$	parámetro de ablandamiento discreto en la matriz.
$f^{fr}$	función de fluencia del modelo de plasticidad de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .	$I^f$	momento de inercia de la barra.
$f^{ir}$	función de fluencia del modelo de deslizamiento matriz – fibra en $\mathbf{r}$ .	$k^{fr}$	coeficiente de participación volumétrica de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$f^m$	función de daño de la matriz.	$k^{fs}$	coeficiente de participación volumétrica de las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ .
$G^f$	energía de fractura de la matriz.	$k^m$	coeficiente de participación volumétrica de la matriz.
$G^{f\tau}$	módulo cortante equivalente en la barra asociado a la acción pasador.	$l^\tau$	apertura de una fisura paralela al eje longitudinal de la fibra, que representa la luz libre de una barra doblemente empotrada sometida a flexión (acción pasador).
$G_{tg}^{f\tau}$	operador constitutivo tangente del modelo que representa la acción pasador.	$L^i$	longitud de la barra embebida en el hormigón en el ensayo de arrancamiento.
$H^{f\tau}$	parámetro de ablandamiento del modelo que representa la acción pasador.	$M$	momento flector máximo en la barra producido por la acción pasador.
$H^{fr}$	parámetro de ablandamiento del modelo de plasticidad de la fibra paralela al vector $\mathbf{r}$ .	$\mathcal{M}_s$	función elemental de salto unitario en el continuo

$M_y$	momento plástico en una barra asociado con la acción pasador.	$q_s^{fs}$	variable interna tipo tensión de las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ , definida la superficie $S$ .
$\mathbf{n}$	vector unitario normal a la superficie de discontinuidad.	$q_{s(SD)}^{fs}$	variable interna tipo tensión de las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ , definida en $S$ y para el instante de discontinuidad fuerte.
$n_\sigma$	cociente entre la resistencia a compresión $\sigma_{u(c)}^m$ y a tracción $\sigma_u^m$ de la matriz.	$q^m$	variable interna tipo tensión del modelo de daño de la matriz.
$N_i$	funciones de forma de un elemento finito triangular lineal.	$\mathbf{Q}^m$	tensor de localización elástico de la matriz.
$\mathbf{n}_{loc}$	vector unitario normal a la superficie de discontinuidad en el instante de bifurcación.	$q_s^m$	variable interna tipo tensión de la matriz en $S$ .
$P^i$	fuerza aplicada al extremo de una barra en el ensayo de arrancamiento.	$q_{s(SD)}^m$	variable interna tipo tensión de la matriz en $S$ y para el instante de discontinuidad fuerte
$P_{max}^i$	carga máxima alcanzada en la barra en el ensayo de arrancamiento.	$\mathbf{Q}_{tg}^m$	tensor de localización de la matriz.
$q^{f\tau}$	variable interna tipo tensión del modelo que representa la acción pasador.	$\mathbf{Q}_{tg}$	tensor de localización del material compuesto
$q_s^{f\tau}$	variable interna tipo tensión del modelo de acción pasador, definida la superficie $S$ .	$\mathbf{r}$	vector unitario paralelo al eje longitudinal del primer grupo de fibras.
$q_{s(SD)}^{f\tau}$	variable interna tipo tensión del modelo de acción pasador., definida en $S$ y para el instante de discontinuidad fuerte.	$r^m$	variable interna tipo deformación del modelo de daño de la matriz.
$q^{fr}$	variable interna tipo tensión en el modelo de plasticidad de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .	$r_S^m$	variable interna tipo deformación de la matriz en $S$ .
$q_s^{fr}$	variable interna tipo tensión de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ , definida la superficie $S$ .	$r_x, r_y$	componentes del vector $\mathbf{r}$ en la base $xy$ .
$q_{s(SD)}^{fr}$	variable interna tipo tensión de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ , definida en $S$ y para el instante de discontinuidad fuerte.	$\mathbf{s}$	vector unitario paralelo al eje longitudinal del segundo grupo de fibras. se considera que $\mathbf{s}$ es perpendicular a $\mathbf{r}$ .
		$S$	superficie de discontinuidad en el interior del sólido.
		$s_x, s_y$	componentes del vector $\mathbf{s}$ en la base $xy$ .

$\mathbf{t}^*$	vector de tracciones preescritas en el sólido.
$\mathbf{t}_{\Omega \setminus S}$	vector de tracciones del material compuesto en $\Omega \setminus S$ .
$t_B$	paso de carga en el cual se produce la bifurcación material o instante de bifurcación.
$\mathbf{t}_S$	vector de tracciones del material compuesto en $S$ .
$\mathbf{u}$	desplazamiento en un punto de material compuesto.
$\dot{\mathbf{u}}$	tasa de desplazamiento en un punto de material compuesto.
$\ddot{\mathbf{u}}$	parte continua de la tasa de desplazamiento en un punto de material compuesto.
$V$	fuerza cortante en la barra producida por la acción pasador.
$V^{fr}$	volumen de las fibras paralelas al vector $\mathbf{r}$ .
$V^{fs}$	volumen de las fibras paralelas al vector $\mathbf{s}$ .
$V^m$	volumen de matriz en un punto material.
$\bar{V}$	volumen total del material compuesto.
$V_y$	fuerza cortante de fluencia en la barra asociada con la acción pasador.





# Resumen

En este trabajo se desarrolla, implementa y valida una formulación bidimensional que describe el proceso de fractura en el hormigón armado, utilizando la *metodología de discontinuidades fuertes de continuo* (Oliver 1996a) para reproducir la formación de fisuras y la *teoría de mezclas* (Truesdell & Toupin 1960) para definir el modelo constitutivo de material compuesto.

El material compuesto está conformado por uno o dos grupos de fibras largas ortogonales que representan al acero de refuerzo, embebidas en una matriz que define al hormigón en masa. A su vez, cada material componente está representado mediante un modelo constitutivo particular: el hormigón, con un modelo de daño de tracción y compresión diferenciado (Oliver, Cervera et al. 1990) y el acero, con un modelo de plasticidad unidimensional (Simó & Hughes 1998). Además se incluyen los fenómenos de acción pasador (Park & Paulay 1975) y de pérdida de adherencia entre hormigón y acero, descritos por modelos adicionales. La aparición y propagación de fisuras, entendida como un proceso de localización de la deformación, se describe por medio de la *metodología de discontinuidades fuertes de continuo*. Asimismo, se propone un análisis de bifurcación del material compuesto, como criterio para establecer el instante y la dirección de propagación de las fisuras.

El modelo ha sido implementado en un programa de análisis bidimensional con elementos finitos, considerando no linealidad material y deformaciones infinitesimales. El uso del esquema de integración del modelo constitutivo *implícito-explicito* (Oliver, Huespe et al. 2004b; Oliver, Huespe et al. 2006), garantiza el carácter positivo definido de la matriz de rigidez algorítmica del problema, aumentando sustancialmente la robustez y estabilidad de la solución. Por otro lado, se logra la coincidencia de la trayectoria de la discontinuidad entre los elementos mediante un algoritmo de *trazado de las líneas de discontinuidad* (Samaniego 2002; Oliver & Huespe 2004a).

De acuerdo con la formulación propuesta, en cada punto del sólido se describen los campos de deformación y de tensión del material compuesto tipo hormigón armado, lo cual ofrece las siguientes ventajas. Primero, facilita la implementación en el método de los elementos finitos, dado que permanecen muchos de los ingredientes del procedimiento numérico convencional. Y segundo, permite el análisis del problema en la *escala macroscópica*, con lo cual se elude la discretización de cada material componente y de sus efectos de interacción, evitando así un alto coste computacional.

El modelo puede reproducir dos estados diferentes de fisuración en el hormigón armado. Inicialmente, en una etapa estable de fisuración distribuida, varias fisuras mantienen una separación y apertura constante, proporcionada por la capacidad del refuerzo y la adherencia en la interfaz. A continuación, en la etapa de fisuración localizada, se impone una o pocas fisuras mientras decae la capacidad de estructural.

Los resultados de la simulación numérica de piezas de hormigón armado sometidas a tracción, flexión y cortante, se compararon con la respuesta estructural y la distribución de fisuras documentadas en algunos ensayos experimentales (Leonhardt 1965; Collins, Vecchio et al. 1985; Ouyang & Shah 1994; Ruiz, Elices et al. 1998). La correlación obtenida entre los resultados numéricos utilizando la formulación propuesta y los resultados reales es cualitativa y cuantitativamente satisfactoria.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

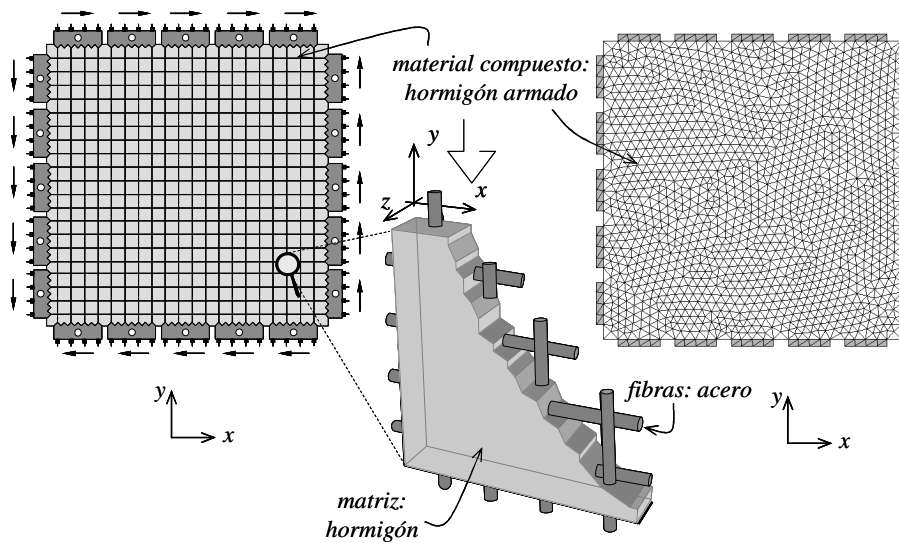
La masiva utilización del hormigón armado en la construcción de obras civiles hace que su comportamiento sea tema permanente de estudio, tanto en el campo experimental como en la simulación numérica.

La integración de un material cuasi-frágil, como el hormigón, con otro dúctil como el acero, ofrece una respuesta estructural compleja principalmente durante el proceso de fractura. La rigidez, la capacidad de carga y la formación de fisuras dependen de las propiedades mecánicas de los dos materiales y de los efectos de interacción entre ambos.

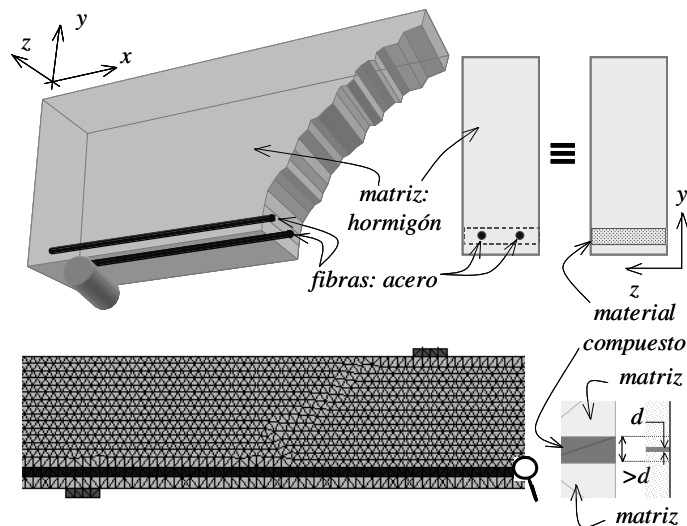
Para representar el comportamiento del hormigón armado durante el proceso de fractura es necesaria una técnica capaz de capturar la formación y propagación de fisuras en todos los puntos del sólido, a partir de las propiedades particulares del hormigón en masa y del acero. Diferentes aproximaciones permiten alcanzar esta meta.

En algunos casos se puede modelar a un nivel de escala suficientemente pequeño o mesoscópico, de tal modo que cada punto material del dominio de análisis responde solo a uno de los materiales constituyentes. La desventaja de esta técnica está en el alto coste computacional. La formulación propuesta en este trabajo pretende reducir tal costo, utilizando un modelo macroscópico homogenizado, donde un punto material puede representar el comportamiento del compuesto tipo hormigón armado, a través de un modelo que contenga las leyes constitutivas de cada material componente y de sus efectos de interacción.

El fenómeno de localización de la deformación, producto de la aparición de una fisura, se puede representar en la mecánica del medio continuo, enriqueciendo la cinemática convencional, de manera que describa el salto producido en el campo de las deformaciones.



**Figura 1.1.** Simulación numérica de muros de cortante de hormigón armado.



**Figura 1.2.** Simulación numérica de vigas de hormigón armado.

Si el modelo constitutivo del material compuesto considera que el campo de deformaciones de los materiales que lo conforman es común, la cinemática preparada para capturar discontinuidades en materiales simples se puede aplicar de igual manera en el material compuesto. Lo anterior constituye una ventaja importante aprovechada por la formulación que aquí se presenta.

La implementación de la formulación en el método de los elementos finitos permitirá la simulación numérica en dos dimensiones de estructuras de hormigón armado en general.

### 1.1.1. Aplicación del modelo

El modelo propuesto describe el proceso de fractura en sólidos de material compuesto tipo hormigón armado, incluyendo resultados tan importantes como la respuesta estructural o la formación y propagación de las fisuras.

En vigas de gran altura y en muros o paneles a cortante, es común que el acero de refuerzo esté distribuido en toda la estructura como se muestra en la Figura 1.1. La formulación permite simular estos problemas como un medio homogéneo de material compuesto, donde todo punto contiene un porcentaje de hormigón y otro de acero.

En el caso de estructuras reforzadas en zonas específicas, como la viga ilustrada en la Figura 1.2, se considera un conjunto de puntos de hormigón en masa en la porción superior del elemento y otro grupo de puntos de material compuesto tipo hormigón armado en la zona reforzada.

### 1.1.2. Modelo unidimensional de material compuesto

Como parte de la motivación al problema, se presenta a continuación el modelo constitutivo de un material compuesto, suponiendo un comportamiento exclusivamente axial de la matriz y de las fibras, y admitiendo una condición de adherencia perfecta entre ambos componentes.

Un punto de material compuesto conformado por una fracción de volumen  $k^m$  de matriz y  $k^f$  de fibra, está sometido a tracción como se indica en la Figura 1.3(a). De las condiciones de compatibilidad y del equilibrio de fuerzas en el compuesto, se establece una deformación igual a  $\varepsilon = \varepsilon^m = \varepsilon^f$  y una tensión correspondiente a  $\sigma = k^m \sigma^m + k^f \sigma^f$ , donde  $\varepsilon^m$  y  $\varepsilon^f$  son las deformaciones en la matriz y en la fibra, mientras que  $\sigma^m$  y  $\sigma^f$  determinan la tensión en cada material componente. Asimismo, la tasa de deformación y de tensión del compuesto es igual a:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^m = \dot{\varepsilon}^f \quad (1.1)$$

$$\dot{\sigma} = k^m \dot{\sigma}^m + k^f \dot{\sigma}^f \quad (1.2)$$

Las ecuaciones anteriores representan el caso especial de la *teoría o regla de mezclas* (Truesdell & Toupin 1960) aplicada en una dimensión.

El comportamiento de la matriz se puede representar con un modelo de daño unidimensional (Figura 1.3(b)), cuyos ingredientes se resumen en el siguiente cuadro (Oliver, Huespe et al. 2002), siendo  $E^m$  el módulo de Young,  $\bar{\sigma}^m$  la tensión efectiva,  $H^m$  el parámetro de endurecimiento/ablandamiento,  $r^m$  y  $q^m$  las variables internas tipo deformación y tensión.

$$\psi(\varepsilon^m, r^m) = \frac{q^m}{2r^m} E^m (\varepsilon^m)^2 \quad (\text{energía libre}) \quad (1.3)$$

$$\sigma^m = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^m} = \frac{q^m}{r^m} E^m \varepsilon^m = \frac{q^m}{r^m} \bar{\sigma}^m \quad (\text{ecuación constitutiva}) \quad (1.4)$$

$$\dot{r}^m = \lambda^m, \quad r^m \geq r_{t=0}^m = \sigma_u^m \quad (\text{ley de evolución}) \quad (1.5)$$

$$f^m(\sigma^m, q^m) = |\sigma^m| - q^m \quad (\text{criterio de daño}) \quad (1.6)$$

$$\left. \begin{array}{l} f^m \leq 0, \quad \lambda^m \geq 0, \quad \lambda^m f^m = 0 \\ \lambda^m \dot{f}^m = 0 \quad (f^m = 0) \end{array} \right\} \quad (\text{condiciones de carga y descarga}) \quad (1.7)$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{q}^m = H^m(r) \dot{r}^m, \quad H^m = \frac{dq^m}{dr^m} \leq 0 \\ 0 \leq q^m \leq r_{t=0}^m, \quad q_{t=0}^m = r_{t=0}^m \end{array} \right\} \quad (\text{ley de ablandamiento}) \quad (1.8)$$

**Cuadro 1.1.** Ingredientes de un modelo de daño isótropo escalar.

A partir de las expresiones anteriores se puede establecer la ecuación constitutiva tangente de la matriz como:

$$\dot{\sigma}^m = E_{tg}^m \dot{\varepsilon}^m \quad \text{donde} \quad E_{tg}^m = \begin{cases} E^m & \text{régimen elástico/descarga} \\ E^m H^m & \text{carga inelástica} \end{cases} \quad (1.9)$$

Por otro lado, el comportamiento de las fibras se representa con un modelo de plasticidad unidimensional (Figura 1.3(c)), definido por las siguientes expresiones (Simó & Hughes 1998):

$$\sigma^f = E^f (\varepsilon^f - \varepsilon_p^f) \quad (\text{ecuación constitutiva}) \quad (1.10)$$

$$\dot{\varepsilon}_p^f = \lambda^f \text{sign}(\sigma^f) \quad (\text{regla de flujo}) \quad (1.11)$$

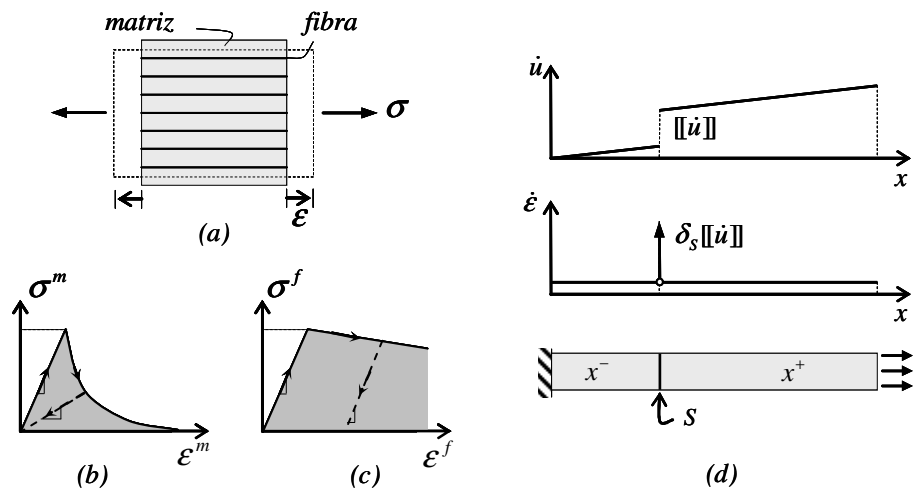
$$\dot{\alpha}^f = \lambda^f \quad (\text{ley de evolución}) \quad (1.12)$$

$$f^f(\sigma^f, \alpha^f) = |\sigma^f| - (q^f + \sigma_y^f) \quad (\text{criterio de plasticidad}) \quad (1.13)$$

$$\dot{q}^f = H^f \dot{\alpha}^f \quad (\text{ley de ablandamiento}) \quad (1.14)$$

$$\left. \begin{array}{l} f^f \leq 0; \lambda^f \geq 0; \lambda^f f^f = 0 \\ \lambda^f \dot{f}^f = 0 \quad (f^f = 0) \end{array} \right\} \quad (\text{condiciones de carga-descarga}) \quad (1.15)$$

**Cuadro 1.2.** Ingredientes de un modelo de plasticidad unidimensional que describe el comportamiento axial de la fibra



**Figura 1.3.** Modelo unidimensional de material compuesto: (a) representación de un punto material, (b) curva tensión-deformación de la matriz, (c) curva tensión-deformación de la fibra, (d) distribución de las tasas de desplazamiento y deformación en una barra sometida a tracción.

En la fibra,  $E^f$  es el módulo de Young,  $\varepsilon_p^f$  corresponde a la deformación plástica,  $H^f$  es el parámetro de endurecimiento/ablandamiento,  $q^f$  y  $\alpha^f$  son las variables internas tipo tensión y deformación. La ecuación constitutiva tangente obtenida a partir de las expresiones anteriores es igual a:



$$\dot{\sigma}^f = E_{tg}^f \dot{\epsilon}^f \text{ siendo } E_{tg}^f = \begin{cases} E^f & \text{régimen elástico/descarga} \\ \frac{E^f H^f}{E^f + H^f} & \text{carga inelástica} \end{cases} \quad (1.16)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (1.9) y (1.16) en la Expresión (1.2), y reemplazando las deformaciones de cada componente de acuerdo con la Ecuación (1.1), se obtiene la ecuación constitutiva del compuesto,

$$\dot{\sigma} = E_{tg} \dot{\epsilon} \quad (1.17)$$

cuyo operador constitutivo tangente es igual a:

$$E_{tg} = k^m E_{tg}^m + k^f E_{tg}^f \quad (1.18)$$

La deformación común entre los componentes indicada en la Ecuación (1.1), permite establecer la cinemática del problema de forma macroscópica sin discriminar entre matriz y fibra.

De acuerdo con la *metodología de discontinuidades fuertes de continuo* (Oliver 1996a), la presencia de una discontinuidad  $S$  que divide al medio continuo en los dominios  $x^+$  y  $x^-$  (Figura 1.3(d)), se describe como un salto de la tasa de desplazamientos  $[[\dot{u}]] = \dot{u}|_{x_s^+} - \dot{u}|_{x_s^-}$  y en consecuencia surge una singularidad en la tasa de deformaciones. Esta última se puede dividir en una parte regular (acotada)  $\dot{\epsilon}$  y otra singular (no acotada)  $\delta_S [[\dot{u}]]$ , como:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon} + \delta_S [[\dot{u}]] \quad (1.19)$$

donde  $\delta_S$  es la función delta de Dirac en la superficie de discontinuidad  $S$ .

Además se establece como condición de compatibilidad interna de tracciones en una dimensión que  $[[\sigma]] = \sigma|_{x_s^+} - \sigma|_{x_s^-} = 0$ . Sustituyendo las Ecuaciones (1.18) y (1.19) en la expresión anterior, se obtiene que:

$$E_{tg} [[\dot{u}]] = 0 \quad (1.20)$$

Por lo tanto, cuando  $[[\dot{u}]] \neq 0$ , debe cumplirse que  $E_{tg} = 0$  para la misma condición de carga inelástica. Se puede demostrar que valores negativos de  $E_{tg}$  producen la bifurcación material considerando carga inelástica en la discontinuidad y descarga elástica fuera de ella (Runesson, Ottosen et al. 1991). De acuerdo a lo anterior, la condición necesaria para que ocurra la bifurcación a partir de la formación de una discontinuidad en el campo de la deformación es:

$$E_{tg} \leq 0 \quad (1.21)$$

Se observa que los parámetros de cada material componente y su participación volumétrica determinan la aparición de discontinuidades sobre el material compuesto en una escala macroscópica.

La condición de bifurcación del material compuesto para los diferentes comportamientos de la matriz y de la fibra es la siguiente:

- Durante el régimen elástico de la matriz y de la fibra, la condición de bifurcación establece que  $k^m E^m + k^f E^f \leq 0$ , lo cual no puede ocurrir debido al carácter positivo de los módulos elásticos y los coeficientes de participación.
- Cuando comienza el daño en la matriz y la fibra aún está en régimen elástico, la condición de bifurcación  $k^m E^m H^m + k^f E^f \leq 0$  depende del parámetro de ablandamiento de la matriz  $H^m$ , sin embargo, es común que la cuantía del acero mantenga el carácter positivo de  $E_{tg}$ .
- En un estado de daño en la matriz y plasticidad en el acero, la localización de la deformación se produce cuando  $k^m E^m H^m + (k^f E^f H^f / (E^f + H^f)) \leq 0$ . Tal condición se cumple fácilmente, más aún, si el acero presenta plasticidad perfecta ( $H^f = 0$ ).

## 1.2. Comportamiento mecánico del hormigón armado

### 1.2.1. Respuesta estructural y fisuración del hormigón armado

El proceso de fractura en el hormigón armado durante el incremento de las cargas, revela diferentes etapas relacionadas directamente con la formación de fisuras. A continuación se recopilan las tendencias típicas de los ensayos de vigas con poco refuerzo y de probetas sometidas a tracción, dados en (Ruiz, Elices et al. 1998) y en (Ouyang, Wollrab et al. 1997), respectivamente. En el primero, el refuerzo se presenta solamente a lo largo de la banda cercana a la tracción máxima de la viga, en cambio, en el segundo ensayo, las barras se distribuyen en toda la sección transversal de la probeta.

En vigas de hormigón ligeramente reforzadas, la curva que relaciona la carga aplicada con el desplazamiento en la mitad de la luz indicada en la Figura 1.4(a), muestra la siguiente tendencia (Ruiz & Planas 1994; Ruiz, Elices et al. 1998):

- *Etapa no fisurada.* Describe el comportamiento elástico de hormigón y se desarrolla durante el tramo OL de la curva.
- *Etapa de inicio de la fisuración.* Después del régimen elástico de ambos materiales, comienza la rotura del recubrimiento mientras aumenta la carga hasta alcanzar el valor pico M.
- *Etapa de propagación de la fisura en el hormigón.* A partir del instante anterior decae la curva debido a la propagación de una sola fisura en la mitad de la viga. El valor mínimo N al cual llega la carga depende de la cantidad de refuerzo y del nivel de adherencia hormigón-acero.
- *Etapa elástica del refuerzo.* A medida que la tensión en el hormigón tiende a cero, el aporte del acero de refuerzo a la respuesta estructural de la viga es más notorio. La capacidad elástica de las barras incrementa la rigidez de la pieza hasta el límite de fluencia del acero en el instante P.
- *Etapa plástica del refuerzo.* La posición de la rama de plastificación del acero depende de la cuantía del refuerzo, mientras que su tendencia decreciente es debida al ablandamiento del hormigón fisurado. Este tramo tiende a una asíntota horizontal (si el acero no endurece por deformación), que se alcanza cuando la fisura está completamente abierta.

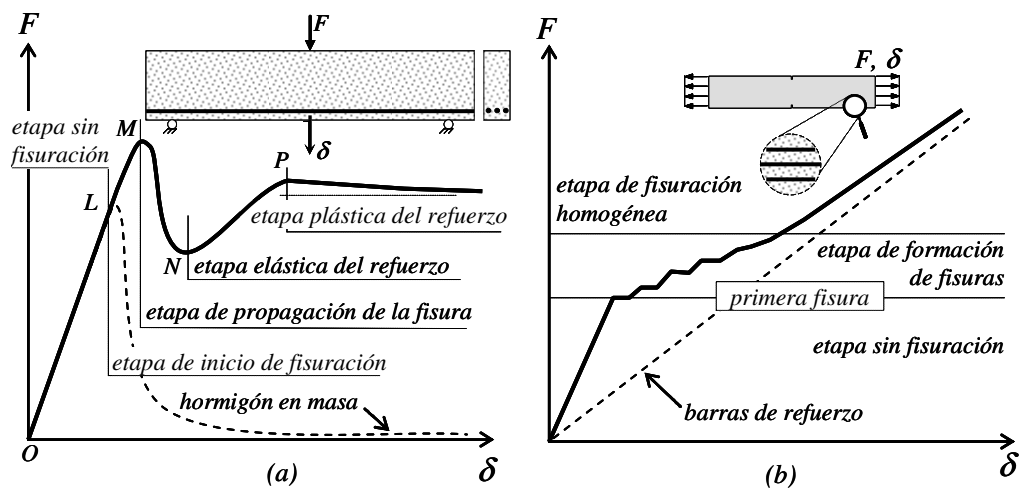
En probetas de hormigón armado con refuerzo homogéneo sometidas a tracción como las presentadas en (Beeby & Narayanan 1995; Ouyang, Wollrab et al. 1997), la relación carga-desplazamiento en el extremo de la pieza (Figura 1.4(b)), describe las siguientes etapas:

- *Etapa sin fisuración.* Durante los primeros incrementos de carga, cuando el hormigón aún no se ha fisurado, el comportamiento de ambos materiales es elástico y por lo tanto la curva carga-desplazamiento es lineal.
- *Etapa de formación de fisuras.* La primera fisura se forma cuando se alcanza la resistencia de la sección transversal debilitada, produciendo una redistribución local de las tensiones. La rigidez de la probeta decae gradualmente con la aparición de cada fisura adicional. Durante esta etapa, la rigidez del hormigón ar-

mado es menor que la rigidez propia de las barras de acero, incluso, podría ser negativa tal como ocurre en probetas con muy poco refuerzo.

- *Etapa de fisuración homogénea.* La formación de nuevas fisuras está limitada por la capacidad de transferencia de tensiones entre refuerzo y hormigón. Cuando la probeta llega a esta condición de saturación de fisuras, el incremento en la carga produce mayor apertura de las fisuras existentes sin la aparición de fisuras adicionales. Para desplazamientos mayores, la contribución del hormigón fisurado es mínima comparada con el aporte dado por el refuerzo, de ahí que la respuesta estructural del hormigón armado tienda a la curva del acero elástico.

Este ensayo considera que el refuerzo permanece en régimen elástico, por lo tanto, no se observa el comportamiento estructural después de alcanzado el límite de fluencia del acero.



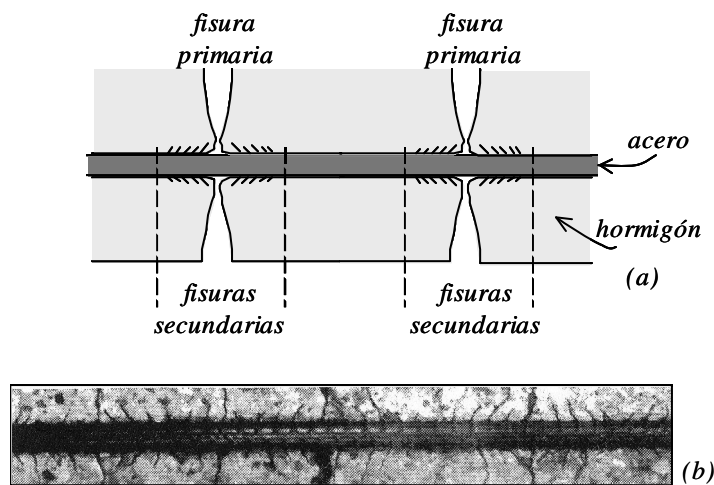
**Figura 1.4.** Esquema de la respuesta estructural típica en hormigón armado: (a) en vigas con poco refuerzo (Ruiz, Elices et al. 1998), (b) en probetas con refuerzo homogéneo sometidas a tracción (Ouyang, Wollrab et al. 1997).

### 1.2.2. Pérdida de adherencia hormigón – acero

La adherencia entre el hormigón y el acero está determinada principalmente por la fricción entre ambos materiales, la cual depende de las características geométricas de la superficie de las barras de refuerzo, por ejemplo, las varillas corrugadas proporcionan una alta capacidad de adherencia debido a la trabazón entre los resaltos del refuerzo y el

hormigón circundante. Para niveles de carga bajos, la adhesión química entre hormigón y acero también contribuye a la adherencia (Park & Paulay 1975).

La pérdida de adherencia está relacionada con diferentes mecanismos como el aplastamiento del hormigón en frente de cada resalto, la aparición de fisuras horizontales en los extremos y la presencia de fisuras transversales secundarias. De los tres, el mecanismo más importante que induce la pérdida de adherencia es la formación de *fisuras secundarias*, las cuales se producen en la vecindad de una *fisura primaria* (Figura 1.5(a)), y se propagan de forma radial desde cada uno de los resaltos de la barra corrugada. La Figura 1.5(b) muestra la trayectoria de las fisuras primarias y secundarias obtenidas experimentalmente por Goto y Otsuka (1979).



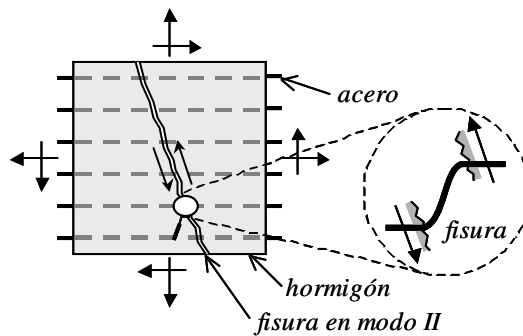
**Figura 1.5.** Trayectoria de las fisuras primarias y secundarias: (a) esquema, (b) resultado experimental en (Goto & Otsuka 1979).

Este fenómeno ha sido estudiado a través de diferentes tipos de ensayos como los presentados en (Eligehausen, Popov et al. 1983; Gambarova, Rosati et al. 1989; Malvar 1992), de los cuales se obtiene una relación característica entre la tensión de adherencia media y el deslizamiento entre hormigón y acero. De igual manera, algunos ensayos de arrancamiento proporcionan una curva entre la carga aplicada y el deslizamiento en el extremo de una barra embebida en el hormigón, como se indica en (Naaman, Namur et al. 1991; Ruiz, Elices et al. 1998).

### 1.2.3. Acción pasador

En una pieza de hormigón armado donde las fisuras se abren principalmente en modo II de fallo por cortante, parte de la fuerza de corte es resistida por el trabazón interno entre

las partículas de agregado del hormigón. Sin embargo, el aporte más importante a la capacidad a cortante lo dan las barras de acero que cruzan las caras de una fisura (Park & Paulay 1975). Este fenómeno conocido como *acción pasador*, se produce por un mecanismo de flexión de las barras en la luz libre dejada por la apertura de la fisura o por corte directo en la sección transversal del acero de refuerzo que atraviesa la misma (Figura 1.6).



**Figura 1.6.** Esquema del efecto de la acción pasador sobre una pieza de hormigón armado fisurado en modo II.

Algunos autores (Kollegger & Mehlhorn 1990; Belletti, Cerioni et al. 2001; Pietruszczak & Winnicki 2003), han incluido la acción pasador en sus modelos numéricos, como un aporte adicional de las barras al comportamiento global del hormigón armado.

### 1.3. Algunas aproximaciones a la mecánica de la fractura para materiales homogéneos

El proceso de fractura en un material homogéneo como el hormigón se puede describir mediante un *modelo de fisura cohesiva*, en la cual toda la zona de fisuración es concentrada en una superficie caracterizada por una ley de tracción-salto del desplazamiento, o por un *modelo de fisura distribuida*, donde la deformación inelástica en la zona de proceso de fractura está difundida sobre una banda de ancho definido (Bazant & Planas 1998). Otros modelos como la *metodología de discontinuidad fuerte* establece un vínculo entre las formulaciones continuas y discretas. A continuación se indican brevemente estos modelos.

### 1.3.1. Modelos de fisura cohesiva

Los *modelos de fisura cohesiva*<sup>1</sup> inicialmente formulados por Dugdale (1960) y Barenblatt (1962), describen el proceso de fractura introduciendo fuerzas cohesivas entre las caras de la una fisura preexistente, considerando la disipación de energía asociada al fenómeno de propagación de la fisura. Basado en este modelo, Hillerborg y otros (Hillerborg, Modeer et al. 1976; Hillerborg 1985) desarrollaron el denominado *modelo de fisura ficticia*, en cual, la fisura cohesiva se puede formar y propagar en cualquier lugar, sin necesidad de la existencia de una fisura previa.

En este tipo de aproximaciones, después de cumplido el criterio de fallo se impone una línea de discontinuidad controlada por una relación tracción-apertura que describe la naturaleza cohesiva de la fisura.

La implementación del modelo de fisura cohesiva en el método de los elementos finitos, se puede realizar de diferentes maneras. Una forma consiste en imponer las caras de la fisura como parte del contorno del elemento finito y obtener las fuerzas cohesivas por medio de condiciones de borde mixtas no-lineales o utilizando elementos de interfaz que conecten los nudos a ambos lados de la fisura (Carol, Prat et al. 1992; Carol & Prat 1997; Carol, López et al. 2001), lo cual requiere un proceso de remallado salvo en los casos donde se conoce previamente su trayectoria (Ortiz & Quigley 1991). Otra forma considera, que la discontinuidad cruza el elemento, como se ilustra en los trabajos (Ortiz, Leroy et al. 1987; Dvorking, Cuitino et al. 1990) y recientemente en (Belytschko, Moes et al. 2001; Sancho, Planas et al. 2007).

### 1.3.2. Modelos de fisura distribuida

Los *modelos de fisura distribuida*<sup>2</sup> representan el proceso de fractura difuminado en una región. Rashid (1968; Sancho, Planas et al. 2007) considera infinitas fisuras paralelas de apertura infinitamente pequeña distribuidas en todo el dominio del elemento finito. Esto se puede modelar convenientemente reduciendo la rigidez y la resistencia en la dirección normal a la fisura después de alcanzada la tensión pico del material. La evolución del proceso de fractura implica deformaciones inelásticas por ablandamiento, es decir, reducción de la tensión post-pico mientras aumenta la deformación.

Los modelos de fisura distribuida mostraron inicialmente ciertas dificultades, como la inestabilidad por localización y la sensibilidad al tamaño y orientación de los elementos finitos.

El problema de inestabilidad material provocada por la localización de la deformación por ablandamiento en una región arbitrariamente pequeña, ha sido resuelto a través

---

<sup>1</sup> Cohesive crack models

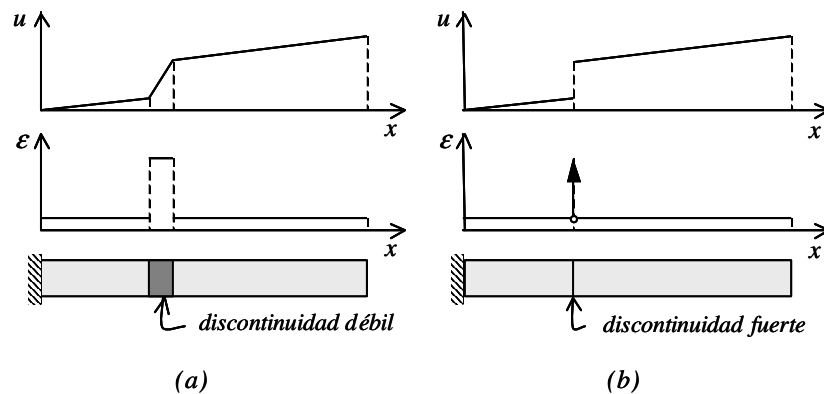
<sup>2</sup> Smeared crack models.

del *modelo de banda de fisuración*<sup>3</sup> propuesto en (Bazant 1976) y ampliamente desarrollado en (Bazant & Cedolin 1983; Bazant & Oh 1983). Este modelo proporciona una relación constitutiva con ablandamiento asociada a un ancho específico de la banda de fisuración, el cual es tratado como una propiedad material.

De acuerdo con la evolución de la dirección de la fisura distribuida adoptada en el algoritmo de cálculo se han desarrollado dos aproximaciones diferentes. El *modelo de dirección fija de fisura*<sup>4</sup> supone que la fisura permanece fija en la dirección dada por el estado inicial de fisuración durante la evolución de la deformación (Cervenka 1985). En cambio, el *modelo de fisura rotante*<sup>5</sup>, permite que la dirección de las fisuras evolucione siguiendo el cambio en la dirección de la deformación principal máxima, conservando además, la misma dirección principal entre los estados de tensión y deformación durante el proceso de carga (Gupta & Akbar 1984). Esta última aproximación es más apropiada en problemas donde se espera la formación de una nueva familia de fisuras de orientación diferente (Vecchio 2000; Pietruszczak & Winnicki 2003).

### 1.3.3. Metodología de discontinuidad fuerte

Se entiende como *discontinuidad fuerte* al salto en el campo del desplazamiento desarrollado sobre una superficie material del sólido. En contraste, la *discontinuidad débil* está definida como el salto en el campo de las deformaciones que preserve la continuidad del campo de los desplazamientos, sobre una zona o banda del sólido. Por lo tanto, los modelos de fisura cohesiva exhiben una discontinuidad fuerte, mientras que los modelos de fisura distribuida presentan una discontinuidad débil (Figura 1.7).



**Figura 1.7.** Distribución del desplazamiento axial y de la deformación en una barra sometida a tracción: (a) modelo de fisura cohesiva, (b) modelo de banda de fisuración.

<sup>3</sup> Band crack models.

<sup>4</sup> Fixed crack models.

<sup>5</sup> Rotating crack models.



Las fuerzas de interacción entre las caras de la fisura para la simulación numérica de las discontinuidades fuertes se pueden clasificar en discretas y continuas. Las *metodologías discretas* suponen una relación entre el vector de tracción y el salto del desplazamiento que caracteriza el comportamiento cohesivo en la discontinuidad, mientras que se utiliza una ecuación constitutiva regular tensión-deformación (generalmente elástica), para la parte continua del cuerpo. En cambio, las *metodologías continuas* consideran al sólido por completo en el contexto de la mecánica del continuo, de tal forma que, el concepto de deformación no solo está definido en la parte continua del cuerpo, sino también en la discontinuidad, permitiendo aplicar ecuaciones constitutivas convencionales en cualquier punto del sólido (Oliver 1996a).

Esta última metodología se denomina *metodología de discontinuidades fuertes de continuo (CSDA)*<sup>6</sup> (Oliver 1996a), la cual establece la existencia de un salto en el campo de desplazamientos a través de la superficie de fallo, capaz de generar valores no acotados (en sentido distribucional) en el campo de las deformaciones.

En el modelo numérico se utilizan elementos finitos que puedan capturar dichos saltos agregando *modos enriquecidos de deformación* (Simó & Rifai 1990), los cuales están controlados por grados de libertad adicionales. Estos elementos especiales equipados en su interior con discontinuidades del desplazamiento se denominan *elementos finitos con discontinuidades embebidas* (Ortiz 1987; Larsson, Runnesson et al. 1993; Simó, Oliver et al. 1993; de Borst 2001). Adicionalmente, cada elemento finito tiene soporte elemental de la discontinuidad o *enriquecimiento elemental*, permitiendo la condensación a nivel del elemento de los grados de libertad relacionados con el salto.

El concepto de *análisis de discontinuidad fuerte* introducido en (Simó, Oliver et al. 1993), es utilizado como puente entre las aproximaciones continuas y discretas. Su objetivo es identificar, en un contexto independiente del método de simulación numérica, las características cualitativas esenciales que hacen a la ecuación constitutiva convencional consistente con la aparición de la discontinuidad fuerte. En particular, el análisis proporciona una ecuación constitutiva discreta, es decir, una relación tensión versus salto del desplazamiento entre las caras de la discontinuidad, que es consistente con la ecuación constitutiva continua escogida.

Durante el proceso de fractura se pueden distinguir, en el mismo punto material, tres etapas sucesivas presentadas en la Figura 1.8. Asimismo, para un paso de carga  $t$ , es posible observar cada fase en diferentes puntos, como lo muestra la Figura 1.9. La primera, denominada *zona de fallo difuso*, exhibe una concentración de la deformación sin mostrar una discontinuidad aparente. A continuación, la *zona de discontinuidad débil* muestra un campo de deformación discontinuo acotado en una banda definida, manteniendo continuo el campo de desplazamientos. Finalmente, la *zona de disconti-*

---

<sup>6</sup> (CSDA) Continuum Strong Discontinuity Approach.

nidad fuerte presenta un salto del desplazamiento apreciable y por tanto, un campo de deformación no acotado en una banda de ancho cero (Oliver & Huespe 2004a).

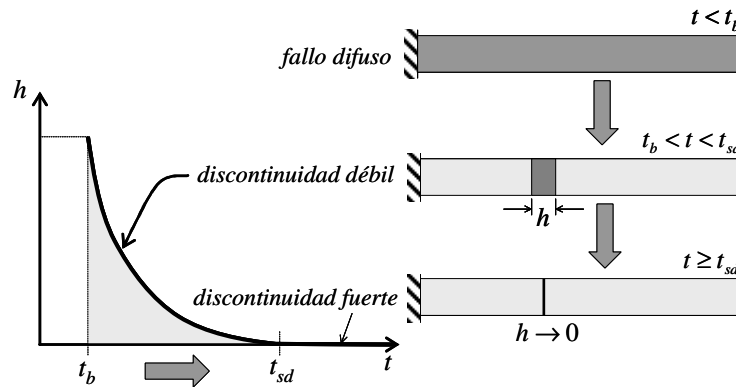


Figura 1.8. Evolución de la banda de fisuración en la metodología de discontinuidad fuerte.

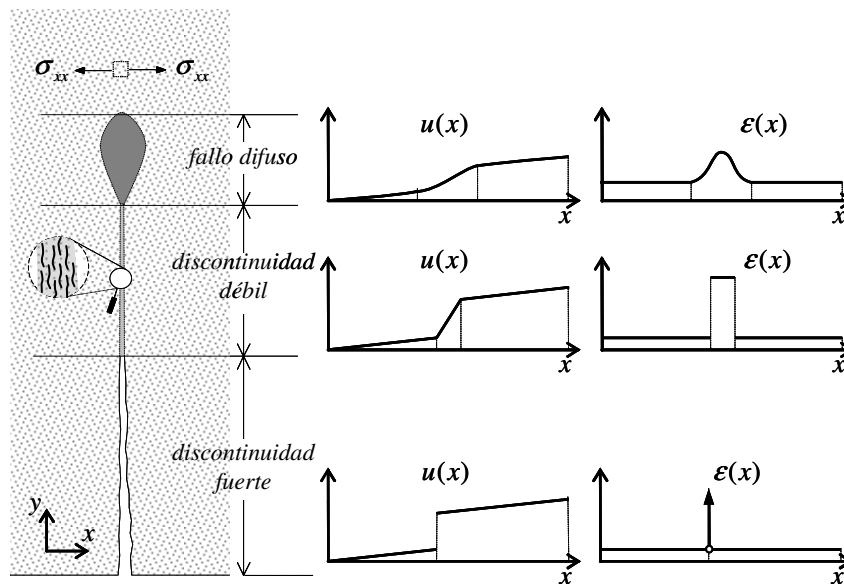


Figura 1.9. Zonas de proceso de fractura.

## 1.4. Simulación del fallo material del hormigón armado

Diferentes autores han desarrollado metodologías de cálculo que permiten predecir el comportamiento del hormigón armado considerando la presencia del hormigón y del acero de refuerzo, y de los efectos de interacción entre ellos.

Además de modelar elementos estructurales, es de gran interés la simulación de ensayos que describan la pérdida de adherencia entre el acero y el hormigón circundante, siendo uno de los mecanismos de fallo material más importantes.

En algunas aproximaciones se presentan modelos analíticos aplicables a casos particulares como por ejemplo: vigas con poco refuerzo o paneles sometidos a cortante puro. Para problemas más generales, se utilizan formulaciones considerando el comportamiento no lineal dado por las leyes constitutivas de cada material.

### 1.4.1. Escalas de análisis del hormigón armado

El hormigón armado se puede modelar numéricamente en una de las tres escalas de análisis que se indica a continuación (Cox & Hermann 1998):

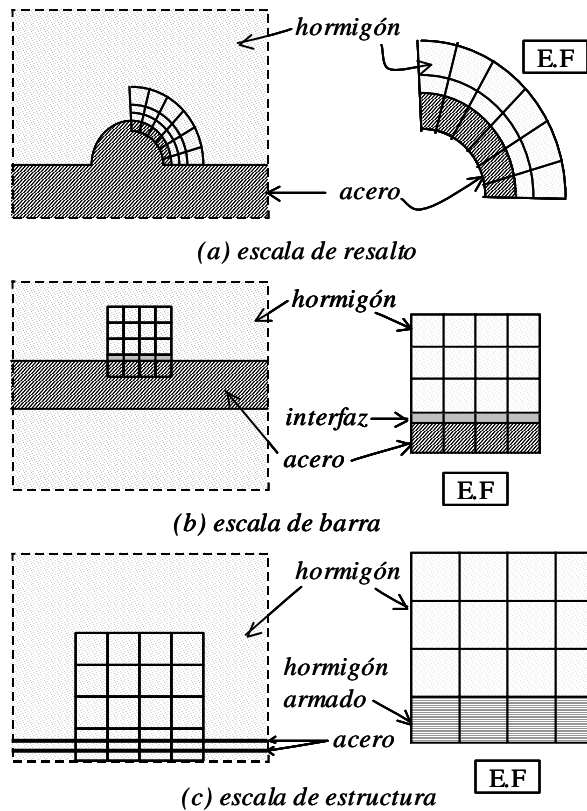
- En la *escala de resalto* (Figura 1.10(a)), se realiza una discretización explícita del corrugado de las barras. Una de las dificultades de esta escala se presenta porque su tamaño puede ser mucho menor que el *elemento de volumen representativo (RVE)*<sup>7</sup> del hormigón y en consecuencia la hipótesis del hormigón como material homogéneo se pierde.
- En una escala intermedia, denominada *escala de barra o meso-escala*<sup>8</sup> (Figura 1.10(b)), la interacción mecánica de los resaltos se hace homogénea, idealizando el fenómeno de adherencia a una capa de elementos finitos adyacente a la barra.
- En la *escala de estructura o macro-escala* (Figura 1.10(c)), cada punto material es una unidad estructural compuesta por hormigón, acero e interfaz. Es típico en esta escala que el refuerzo tenga comportamiento unidimensional y que la ley

---

<sup>7</sup> (RVE) Representative Volume Element. El elemento de volumen representativo corresponde a la región mínima donde un material se puede definir como homogéneo.

<sup>8</sup> En el contexto de la micromecánica existen diferentes interpretaciones de los términos meso-escala y macro-escala. En este trabajo se han utilizado tales términos, para distinguir entre la simulación en la escala de barra y de estructura.

de adherencia esté definida por un modelo caracterizado por los ensayos de arrancamiento.



**Figura 1.10.** Escalas de análisis del hormigón armado (Cox & Hermann 1998): (a) escala de resalto, (b) escala de barra y (c) escala de estructura.

#### 1.4.2. Modelos analíticos del material hormigón armado

Una forma de estudiar el comportamiento de vigas ligeramente reforzadas, donde la trayectoria de la única fisura se conoce *a priori*, es mediante modelos analíticos. Dos ejemplos de ello se observan los trabajos de (Ruiz 2001) y (Carpinteri, Ferro et al. 2003).

En (Ruiz 2001) se analiza la propagación de la fisura cohesiva en vigas de hormigón con poca armadura, donde el comportamiento estructural está controlado principalmente por una fisura por flexión en la sección central. El refuerzo se representa mediante una barra de deslizamiento libre, anclada a ambas caras de la fisura y separadas a una distancia denominada *longitud efectiva de deslizamiento*. Esta longitud se obtiene haciendo que la barra de deslizamiento libre sea mecánicamente equivalente al verdadero re-

fuerzo adherido. Este modelo es capaz de reproducir aproximadamente resultados experimentales (Ruiz, Elices et al. 1998) teniendo en cuenta la influencia del tamaño, la cantidad de refuerzo y las variaciones en la adherencia.

En (Carpinteri, Ferro et al. 2003) se desarrolla una formulación adimensional con los modelos de fisura cohesiva (Bazant & Planas 1998) y de fisura vinculada, con el fin de reproducir el comportamiento a flexión de elementos de hormigón armado. La no-linealidad de la matriz se modela considerando la contribución de fuerzas cercanas a las caras de la fisura que aumentan la resistencia a la fractura de la sección transversal. La particularidad de estos modelos consiste en la imposición de las condiciones de equilibrio y compatibilidad en el elemento fisurado.

Los trabajos de (Vecchio & Collins 1986) presentan un modelo analítico que predice la respuesta estructural en paneles rectangulares de hormigón armado sometidos a tensión cortante y normal contenidas en su plano. Las ecuaciones constitutivas y las condiciones de equilibrio y compatibilidad están definidas en términos de tensiones y deformaciones medias; sin embargo, considera una condición adicional entre las tensiones locales sobre la fisura. El modelo supone adhesión total entre el hormigón y el acero, y distribución uniforme de las barras de refuerzo sobre toda la pieza. El comportamiento del hormigón se representa mediante un modelo de fisura distribuida, considerando dirección variable de la fisura y despreciando la historia de carga. La dirección de las fisuras es ortogonal a la deformación principal mayor y la separación entre ellas se establece *a priori* mediante expresiones empíricas.

En (Ouyang, Wollrab et al. 1997) se obtiene la curva carga-desplazamiento de paneles de hormigón armado sometidos a tracción, mediante un modelo analítico basado en la energía de fractura del hormigón con múltiples fisuras y teniendo en cuenta los efectos del deslizamiento entre hormigón y acero. Para predecir el comportamiento durante el proceso de fisuración se establece el balance entre la energía de deformación, de despegue y de deslizamiento en la interfaz.

### 1.4.3. Modelos de pérdida de adherencia hormigón – acero

El efecto del deslizamiento entre las barras de acero y el hormigón circundante ha sido modelado numéricamente, tanto en la escala de resalto, como en la escala de barra. A continuación se indican algunos de estos trabajos.

En (Ingraffea, Gerstle et al. 1984) se modela numéricamente el fenómeno de deslizamiento de una barra de acero embebida en una matriz de hormigón, considerando que el mecanismo de pérdida de adherencia se basa en la propagación de fisuras secundarias radiales. Esta aproximación establece una ley tensión-deslizamiento de los elementos de interfaz mediante la simulación de un ensayo de arrancamiento. Además, utiliza un *modelo de fisura ficticia* (Hillerborg, Modeer et al. 1976) predefiniendo la trayectoria de las fisuras. Durante el proceso de remallado asociado con el cambio en la fisura, se

insertan elementos de interfaz dentro de la misma para modelar el efecto causado por el deslizamiento acero-hormigón.

Los trabajos realizados por Reinhardt y otros (1984) modelan una capa de hormigón alrededor de la superficie con resaltos de la barra de refuerzo, utilizando un modelo de plasticidad con ablandamiento a tracción y el criterio de fallo de Mohr-Coulomb. Fuera de esta capa considera un comportamiento elástico del hormigón.

En (Cox & Hermann 1998; Cox & Herrmann 1999) se ha desarrollado y validado un modelo de plasticidad no asociado para describir la adherencia entre los resaltos de las barras de acero corrugado y el hormigón adyacente. Ese modelo relaciona el promedio del deslizamiento local y de la dilatación radial con el promedio de la tensión cortante de adherencia. En él definen una longitud característica asociada con la forma de los resaltos de las barras, que ayuda a cuantificar la interacción acero-hormigón. Finalmente, el modelo calibrado reproduce aceptablemente los resultados experimentales presentados en (Eligehausen, Popov et al. 1983).

#### 1.4.4. Simulación numérica del material hormigón armado

La simulación numérica de estructuras de hormigón armado se puede realizar en la escala de la barra (meso-escala) discretizando por separado cada uno de los materiales o en la escala de estructura (macro-escala) considerando un modelo constitutivo del material compuesto. En los siguientes apartados se resumen algunas de las formulaciones desarrolladas en los últimos años.

##### 1.4.4.1. Modelado a nivel de la meso-escala (escala de barra)

El análisis en la meso-escala puede describir con precisión la topología del problema dado que cada una de las barras de refuerzo y sus respectivos elementos de interfaz son discretizados de forma independiente. Este tipo de análisis suele ser costoso, principalmente en problemas con materiales reforzados por muchos grupos de fibras orientadas en varias direcciones.

Una manera clásica pero aún vigente de abordar el problema, consiste en discretizar el hormigón con elementos finitos bi o tri-dimensionales, el acero con barras de armadura unidimensional y la interfaz como un elemento especial que compatibilice los desplazamientos de los nudos comunes de los elementos de hormigón y acero. Para representar el proceso de fractura algunas aproximaciones utilizan un modelo de fisura distribuida (Kwak & Filippou 1997; Chen & Baker 2003; Chong, Gilbert et al. 2004), en cambio otras emplean modelos de fisura discreta cohesiva (Yu & Ruiz 2004; Yu & Ruiz 2005; Ruiz, Carmona et al. 2006).

En el análisis matricial de estructuras conformadas por barras, algunos modelos consideran un elemento finito tipo viga, constituido por un grupo de filamentos de hormi-

gón y de acero dispuestos a largo del elemento (Buckle & Jackson 1981; Lin 1997; Marí 2000). Esto permite definir con precisión la geometría y la ubicación del refuerzo en la sección transversal del elemento. La rigidez a la flexión alrededor del eje de referencia se obtiene de la suma de la contribución axial de cada uno de los filamentos de hormigón y de acero.

#### **1.4.4.2. Modelado a nivel de la macro-escala (escala de estructura)**

En la macro-escala se pueden utilizar elementos finitos cuyo modelo constitutivo describe el comportamiento en conjunto del material compuesto conformado por hormigón y una cuantía específica de acero, considerando además el posible deslizamiento entre ambos.

Los trabajos de Vecchio y otros (Vecchio 2000; Vecchio 2001; Vecchio, Lai et al. 2001) muestran la implementación en el método de los elementos finitos del modelo constitutivo descrito en (Vecchio & Collins 1986), proporcionando un tratamiento adecuado de la tensión cortante en la superficie de fisura y permitiendo la reorientación de la deformación y de la tensión principal mayor.

La formulación presentada en (Belletti, Cerioni et al. 2001; Belletti, Bernardi et al. 2003) considera un comportamiento del hormigón armado elástico lineal antes de la fisuración y un comportamiento ortótropo después de ella, donde las fisuras tienen una dirección fija y se distribuyen uniformemente con una separación constante evaluada con métodos basados en la longitud de transmisión de fuerzas en la interfaz (CEB-FIB 2000). La cinemática del problema está definida por el desplazamiento relativo normal y tangencial entre los labios de la fisura, y la deformación en el hormigón normal a la orientación de la misma. Las condiciones de equilibrio incluyen algunos fenómenos como: la acción pasador, el trabazón de los agregados y el ablandamiento del hormigón por compresión.

En (Feenstra & de Borst 1995) se considera que la tensión total del hormigón armado es la suma de las contribuciones individuales del hormigón en masa, el acero de refuerzo y de los efectos de interacción entre ambos. El comportamiento del hormigón en masa está definido por un modelo de fisura distribuida controlado por la energía de fractura. Este modelo supone que en presencia del refuerzo, la energía de fractura se distribuye en un área tributaria dada por la separación media entre fisuras según el (CEB-FIB 1990).

El modelo constitutivo presentado en (Pietruszczak & Winnicki 2003) describe el comportamiento del hormigón y dos grupos de fibras ortogonales, durante los modos de fisuración homogénea y localizada. Este último se determina mediante una aproximación similar al modelo de discontinuidades embebidas presentado en (Pietruszczak & Xu 1995), empleando una ley tracción-salto propia para cada material constituyente. La formulación considera que la tensión y la deformación media del hormigón armado están definidas por la integración sobre un volumen representativo, como lo indica la

*método del campo promedio* (Hill 1963). Además, el inicio y dirección de la localización están regulados por el criterio de fractura a tensión y por la dirección ortogonal a la tensión principal mayor en la matriz, respectivamente.

La formulación descrita en (Car 2000; Oller 2003) presenta un modelo constitutivo general de material compuesto, considerando grandes deformaciones y efectos del deslizamiento entre fibras y matriz, el cual se aplica, en uno de sus ejemplos, al hormigón armado. De forma similar, en el trabajo (Luccioni, Lopez et al. 2005) se propone un modelo de material compuesto constituido por una matriz de hormigón y un grupo de fibras largas de acero basado en la teoría de mezclas (Truesdell & Toupin 1960). Allí, el efecto de pérdida de adherencia entre fibra y matriz se presenta como una deformación inelástica adicional en el modelo constitutivo de la fibra, determinada de acuerdo al modelo de la interfaz hormigón – acero propuesto por Cox y Hermann (1998).

Los modelos presentados en este apartado describen adecuadamente el comportamiento del hormigón armado, sin embargo, muestran las siguientes limitaciones:

- Prescinden de un algoritmo que describa la trayectoria de las fisuras independientemente de la orientación de la malla de elementos finitos.
- Iniciado el proceso de fractura, pierden el contexto de la mecánica del medio continuo, necesitando, en consecuencia, relaciones adicionales *ad hoc* que definan el comportamiento mecánico entre las caras de una fisura.
- A diferencia del análisis de bifurcación material, los criterios utilizados para establecer la formación de una fisura, son independientes explícitamente de la condición de existencia del salto en el desplazamiento.
- En algunos casos (Feenstra & de Borst 1995; Vecchio 2000; Belletti, Cerioni et al. 2001; Vecchio 2001; Vecchio, Lai et al. 2001; Belletti, Bernardi et al. 2003) se considera un estado de fisuración distribuida a partir del régimen inelástico del hormigón, en el cual, las fisuras mantienen una separación constante evaluada de forma analítica. En consecuencia, la formación de una macro-fisura localizada en el material compuesto no puede ser capturada.
- El modelo presentado en (Pietruszczak & Winnicki 2003), describe por completo el proceso de fractura del hormigón armado mediante un modelo discreto, considerando una cinemática enriquecida que contempla la presencia discontinuidades en el medio. Sin embargo, a diferencia de los modelos continuos, requiere explícitamente relaciones tracción-salto, tanto de la matriz, como de las fibras. Además, establece el inicio y la dirección de la fisuración en función de



las propiedades de la matriz exclusivamente, despreciando la influencia de la capacidad, cantidad y dirección del refuerzo.

## 1.5. El hormigón armado descrito como un material compuesto

Muchos materiales utilizados en la industria y la construcción, así como la mayoría de los observados en la naturaleza, están constituidos a su vez por un grupo de materiales componentes, esta característica los define como materiales compuestos. Este apartado describe brevemente una de las metodologías que permite representar el modelo constitutivo de un material compuesto tipo hormigón armado.

### 1.5.1. Definición del material compuesto

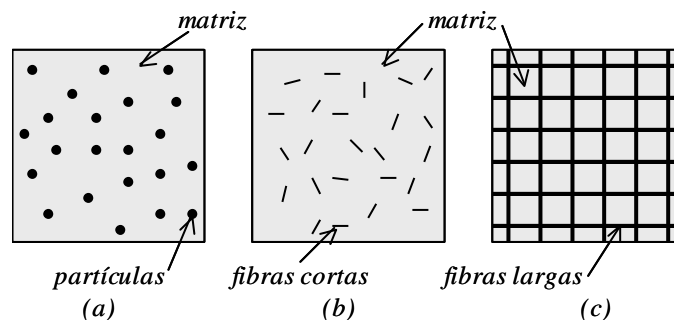
En general, se denomina material compuesto a aquél que está constituido por dos o más componentes distinguibles en la escala de estudio. Cada uno de estos componentes tiene orientación material y propiedades mecánicas particulares, asimismo, podría ser un material compuesto en una escala menor.

Los materiales compuestos se pueden clasificar de diferentes maneras, una de ellas es según el tipo y forma de sus componentes, como (Vasiliev & Morozov 2001):

- *Materiales llenados.* Se conforman por una matriz cuyas propiedades mecánicas son mejoradas con la inclusión de un porcentaje de partículas (Figura 1.11(a)). Pueden ser tratados como materiales homogéneos e isótropos, cuyas propiedades están gobernadas principalmente por la matriz, a pesar que hayan sido modificadas por las partículas.
- *Materiales reforzados.* Se constituyen por fibras cortas o largas distribuidas uniformemente en la matriz y orientadas de forma específica o aleatoria (Figura 1.11(b)-(c)). Normalmente, las fibras ofrecen niveles de rigidez y resistencia muy superiores a los presentados por la matriz. Se consideran fibras largas aquellas que de forma continua alcanzan el contorno del material compuesto, las cuales están orientadas en direcciones específicas. En cambio, las fibras cortas son pequeños segmentos totalmente embebidos en la matriz, distribuidos comúnmente de forma aleatoria en el interior de compuesto.

El hormigón armado es un material compuesto conformado por uno o varios grupos de fibras largas de acero embebidas en una matriz de hormigón en masa (Figura 1.11(c)), la cual a su vez, está constituida por agregados gruesos y mortero.

En general y tal como se realiza en este trabajo, se puede considerar al hormigón como un material homogéneo, sin embargo, algunos modelos micro-mecánicos describen su comportamiento mediante un *elemento de volumen representativo*, conformado por una matriz de mortero y un grupo de partículas de agregado en su interior (Carol, López et al. 2001).



**Figura 1.11.** Clasificación de los materiales compuestos: (a) materiales llenados, (b) materiales reforzados con fibras cortas y (c) materiales reforzados con fibras largas.

### 1.5.2. Análisis del material compuesto como un problema en varias escalas

En muchos casos, el comportamiento del compuesto en cada punto material se describe a partir de la respuesta mecánica de sus materiales constituyentes, lo cual requiere dos escalas de análisis diferentes. Una de ellas, presentada en el interior de un punto material, describe la acción de todos los componentes y obtiene como resultado el campo de las tensiones y de las deformaciones del material compuesto. La otra, representa la respuesta mecánica en el dominio del sólido, de acuerdo con las condiciones de contorno y el modelo constitutivo del material establecido en la escala anterior.

El estudio del compuesto en la escala del punto material se puede realizar de diferentes maneras. Una forma *global o macroscópica*, solo considera la participación volumétrica de las fibras o partículas incluidas en la matriz, despreciando su geometría. En cambio, una forma *local o microscópica*, representa una porción típica de material compuesto denominada *elemento de volumen representativo*, que describe su estructura interna dada por la geometría de los materiales componentes (Sanchez-Palencia & Zaoui 1987). En esta escala las metodologías de solución pueden ser analíticas, como

el *método del campo promedio* o la *teoría mezclas*, en cuyo caso se presenta una forma *global* de análisis, o también pueden ser procedimientos numéricos donde se resuelve un *elemento de volumen representativo* de forma *local* con el método de los elementos finitos.

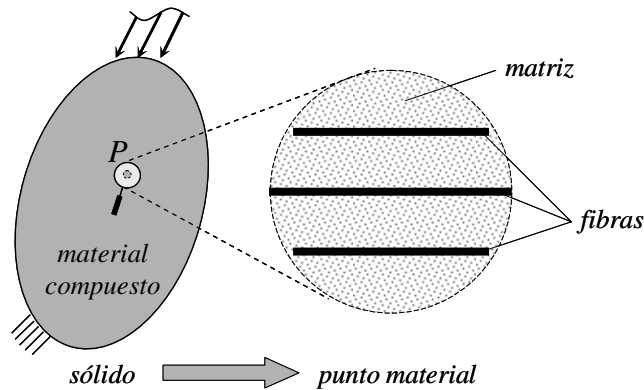


Figura 1.12. Escalas de análisis del material compuesto.

### 1.5.3. Teoría de mezclas

Una forma de representar el comportamiento de un punto de material compuesto a partir de los modelos constitutivos de sus materiales componentes es mediante *la teoría o regla de mezclas* (Truesdell & Toupin 1960), la cual se basa en las siguientes hipótesis:

- En cada volumen infinitesimal de material compuesto participa el conjunto de los materiales constituyentes.
- Cada componente aporta al comportamiento del material compuesto en proporción con su participación volumétrica.
- El volumen ocupado por cada componente es menor que el volumen total del compuesto.
- Todos los materiales componentes tienen la misma deformación (ecuación de compatibilidad).

De acuerdo a las dos primeras hipótesis, existe una distribución homogénea de todas las sustancias en cada punto del compuesto, determinada por el coeficiente de participación volumétrica  $k^c$ , expresado como:

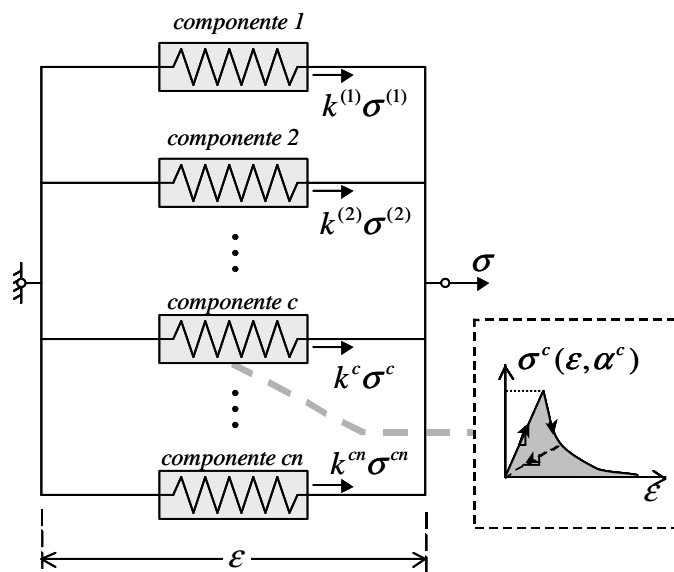
$$k^c = \frac{dV^c}{d\bar{V}} \quad (1.22)$$

siendo  $d\bar{V}$  y  $dV^c$  el volumen infinitesimal de material compuesto y de la componente  $c$ , respectivamente.

La última hipótesis establece que la ecuación de compatibilidad de deformaciones sea de la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \dots = \boldsymbol{\varepsilon}^c = \dots = \boldsymbol{\varepsilon}^{cn} \quad (1.23)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}^{cn}$  representan a la deformación del material compuesto y del  $n$ -ésimo componente.



**Figura 1.13.** Teoría de mezclas representada como un modelo reológico en paralelo.

También considera que la energía libre de un material compuesto está dada por la suma de las energías libres de cada uno de los materiales componentes, ponderadas de acuerdo a su volumen de participación en el compuesto. De acuerdo a lo anterior y aplicando el método de Coleman a la desigualdad de Clausius-Duhem (Lublinter 1990), como se muestra en las referencias (Oller, Oñate et al. 1996; Car 2000; Luccioni & Lopez 2002; Oller 2003) y en el Anexo B, se obtiene el tensor de tensiones del material compuesto como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{c=1}^{cn} k^c \boldsymbol{\sigma}^c(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}^c) \quad (1.24)$$

donde  $\sigma^c(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha^c)$  es el tensor de tensiones calculado de la ecuación constitutiva de la componente  $c$ , expresada en términos de la deformación común  $\boldsymbol{\varepsilon}$  y las variables internas  $\alpha^c$ .

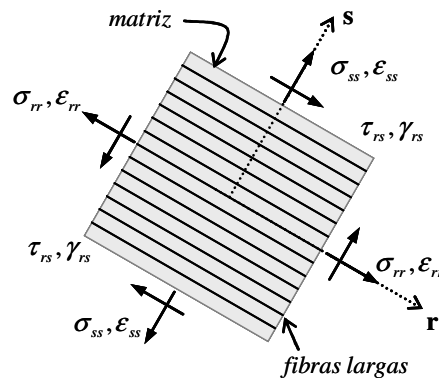
Se observa que cada componente puede tener una ley de comportamiento particular expresada en función de sus variables internas y de la deformación del compuesto. Por ejemplo, en el hormigón armado, la matriz de hormigón en masa se puede representar con un modelo de daño isótropo y las fibras a través de un modelo de plasticidad.

En una dimensión, la teoría de mezclas se puede presentar como un modelo reológico de  $cn$  componentes en paralelo que aportan tensión al compuesto de acuerdo con su coeficiente de participación volumétrica (Figura 1.13).

#### 1.5.4. Modelo de fibra con diámetro despreciable

En (Dvorak & Bahei-el-Din 1982) se desarrolla un modelo constitutivo para materiales reforzados por fibras largas cilíndricas, cuyo diámetro se considera despreciable a pesar que su volumen represente una fracción finita del compuesto. Esta aproximación se conoce como *modelo de fibra con diámetro despreciable*<sup>9</sup>.

La anterior hipótesis implica que la fibra no interactúa con las demás componentes de deformación de la matriz y que la carga en la dirección de la fibra se reparte entre ambos materiales. Por lo tanto, en la dirección axial de la fibra la deformación de los dos materiales es común y la tensión del compuesto corresponde a la suma ponderada de las tensiones de matriz y fibra. En las demás componentes, la deformación del compuesto es igual a la suma ponderada de las deformaciones de los materiales, mientras que las tensiones de matriz y fibra son las mismas.



**Figura 1.14.** Modelo de fibra con diámetro despreciable. Estado tensorial en un elemento diferencial de material compuesto.

<sup>9</sup> Vanishing fiber diameter model

En consecuencia, el modelo establece que en un plano  $rs$  (Figura 1.14), las condiciones de equilibrio y compatibilidad entre la matriz y un grupo de fibras orientadas en la dirección  $r$ , son:

$$\dot{\epsilon}_{rr} = \dot{\epsilon}_{rr}^m = \dot{\epsilon}_{rr}^f \quad ; \quad \dot{\sigma}_{rr} = k^m \dot{\sigma}_{rr}^m + k^f \dot{\sigma}_{rr}^f \quad (1.25)$$

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{ss} = k^m \dot{\epsilon}_{ss}^m + k^f \dot{\epsilon}_{ss}^f \\ \dot{\gamma}_{rs} = k^m \dot{\gamma}_{rs}^m + k^f \dot{\gamma}_{rs}^f \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \dot{\sigma}_{ss} = \dot{\sigma}_{ss}^m = \dot{\sigma}_{ss}^f \\ \dot{\tau}_{rs} = \dot{\tau}_{rs}^m = \dot{\tau}_{rs}^f \end{cases} \quad (1.26)$$

### 1.5.5. Método del campo promedio<sup>10</sup>

Este método permite obtener los valores macroscópicos de los campos de tensión y deformación, a partir de los valores promedio de dichos campos en la escala microscópica (Hill 1967). Dado un volumen representativo  $V$ , los valores macroscópicos de la tensión y la deformación son iguales a:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{V} \int_V \hat{\boldsymbol{\sigma}} dV \quad ; \quad \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{V} \int_V \hat{\boldsymbol{\epsilon}} dV \quad (1.27)$$

donde  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  y  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ , corresponden a los valores microscópicos de la tensión y la deformación, respectivamente.

Considerando que la matriz y las fibras mantienen tensiones y deformaciones constantes en el volumen representativo de un material reforzado, la tensión del compuesto  $\boldsymbol{\sigma}$  es igual a la suma ponderada de las tensiones de cada componente. Asimismo, la deformación media  $\boldsymbol{\epsilon}$  corresponde a la suma ponderada de las deformaciones de matriz y refuerzo. Esto conlleva a las siguientes condiciones (Hill 1963):

$$\boldsymbol{\sigma} = k^m \boldsymbol{\sigma}^m + k^f \boldsymbol{\sigma}^f \quad ; \quad \boldsymbol{\epsilon} = k^m \boldsymbol{\epsilon}^m + k^f \boldsymbol{\epsilon}^f \quad (1.28)$$

donde los factores de participación volumétrica  $k^m, k^f$ , los tensores de tensión  $\boldsymbol{\sigma}^m, \boldsymbol{\sigma}^f$  y de deformación  $\boldsymbol{\epsilon}^m, \boldsymbol{\epsilon}^f$ , están asociados a la matriz y al refuerzo, respectivamente.

La Ecuación (1.28) presenta de forma general la tensión y la deformación en el material compuesto. Aplicando algunas restricciones adicionales de equilibrio o de compatibilidad se pueden obtener las condiciones dadas en el *modelo de fibra con diámetro despreciable* o incluso en la *teoría de mezclas*.

<sup>10</sup> Mean field methods.

### 1.5.6. Deslizamiento fibra - matriz

La deformación común de los componentes en la teoría de mezclas limita el modelo a materiales con componentes perfectamente adheridos. En materiales reforzados con fibras largas, una estrategia que permite mantener una deformación común, considerando al mismo tiempo el deslizamiento entre fibra y matriz, consiste en modificar el modelo constitutivo de la fibra (Car 2000; Oller 2003). Como producto del despegue aparece una diferencia entre la deformación de la matriz y de las fibras que se puede indicar como una deformación por deslizamiento en la interfaz. En (Luccioni & Lopez 2002) esta deformación se introduce a la ecuación constitutiva de las fibras y se describe mediante el modelo elasto-plástico desarrollado para hormigón armado en (Cox & Hermann 1998).

## 1.6. Objetivos

Este trabajo tiene como principal objetivo desarrollar, implementar y validar un modelo numérico basado en la metodología de discontinuidades fuertes de continuo y la teoría de mezclas, que describa el proceso de fractura del hormigón armado representado como un material compuesto.

Este propósito se puede desglosar en los objetivos específicos presentados a continuación.

- Revisar el estado del conocimiento acerca de las metodologías de simulación numérica del fallo material en estructuras de hormigón armado.
- Desarrollar un modelo constitutivo de material compuesto de acuerdo a la *teoría de mezclas* que represente el comportamiento del hormigón armado a partir de leyes constitutivas particulares para el hormigón, el acero y los efectos de interacción entre ambos.
- Incorporar al modelo de material compuesto los ingredientes de la *metodología de discontinuidades fuertes de continuo* que permitan capturar la formación y propagación de fisuras durante el proceso de fractura.
- Implementar tal formulación en el contexto del método de los elementos finitos para problemas estáticos bidimensionales.

- Validar la formulación propuesta mediante la simulación numérica y la comparación de resultados con algunos ensayos experimentales.

## 1.7. Modelo adoptado

El modelo adoptado en este trabajo describe el proceso de fractura en estructuras de hormigón armado durante su comportamiento elástico e inelástico, tanto en estados de fisuración distribuida, como localizada. En (Oliver, Huespe et al. 2004b; Linero, Oliver et al. 2005; Oliver, Huespe et al. 2005b; Oliver, Huespe et al. 2005c; Oliver, Huespe et al. 2005d; Linero, Oliver et al. 2006) se presentan algunos de los trabajos preliminares que han conducido a esta formulación.

Las características generales del modelo de fallo material son las siguientes:

- El hormigón armado se representa como el material compuesto resultante de la aplicación de la *teoría de mezclas* (Truesdell & Toupin 1960), conformado por una matriz de hormigón y dos grupos de fibras largas de acero perpendiculares entre sí.
- La *regla de mezclas* permite que cada material componente al igual que los efectos de interacción, tengan su propio modelo constitutivo. La formulación considera el comportamiento bidimensional del hormigón y axial de las fibras, como también, los fenómenos de pérdida de adherencia hormigón – acero y de la denominada acción pasador (Park & Paulay 1975).
- El hormigón en masa se representa mediante un modelo de daño continuo escalar isótropo, cuyo criterio de daño está determinado por una norma de deformaciones y limitado por la resistencia a tracción y a compresión (Oliver, Cervera et al. 1990).
- El comportamiento axial del acero se describe a través de un modelo de plasticidad unidimensional (Simó & Hughes 1998), particular para cada grupo de barras paralelas entre sí.
- El efecto de pérdida de adherencia se presenta como la relación entre la tensión axial de la fibra y una deformación ficticia producida por el desplazamiento relativo entre hormigón y acero, la cual, sumada con la deformación de la fibra corresponde a la deformación común (compartida con la matriz). Las propiedades



de este modelo se caracterizan por medio de algunos resultados de ensayos de arrancamiento.

- La acción pasador se representa como una relación constitutiva entre tensión cortante y deformación angular, determinada por la rigidez y capacidad a flexión o a cortante de las barras de acero entre las caras de una fisura.
- La aparición y propagación de fisuras, entendida como un proceso de localización de la deformación del material compuesto, se captura mediante un modelo de discontinuidades embebidas, específicamente la metodología de discontinuidades fuertes de continuo (Oliver 1996b; Oliver 1996a; Oliver 2000; Oliver, Huespe et al. 2003; Oliver & Huespe 2004a; Huespe, Oliver et al. 2006; Oliver, Huespe et al. 2006).
- El inicio de la inestabilidad material y la dirección de propagación de las fisuras se determina mediante el análisis de bifurcación del material compuesto.
- El *método de integración implícito-explicito* (Oliver, Huespe et al. 2004a; Oliver, Huespe et al. 2006) se utiliza en los modelos constitutivos de daño y plasticidad de los materiales componentes.
- La simulación numérica del problema se realiza en la macro-escala a través de un análisis no lineal bidimensional considerando deformaciones infinitesimales y cargas estáticas. La fuente de no linealidad es proporcionada por los modelos constitutivos de los materiales componentes.

## 1.8. Contenido

En el capítulo 2 se describe la formulación del modelo de material compuesto y su implementación en el método de los elementos finitos. En particular, se definen los modelos constitutivos de cada componente y del compuesto tipo hormigón armado, seguido de la metodología de discontinuidades fuertes de continuo y el análisis de bifurcación aplicados a materiales compuestos, terminando con la presentación de las matrices características del elemento finito y el algoritmo de cálculo.

A continuación, el capítulo 3 muestra la respuesta obtenida de la simulación numérica de algunos ensayos de probetas de hormigón armado sometidas a tracción, flexión y

cortante, y su comparación con los respectivos resultados experimentales obtenidos en diferentes trabajos.

Finalmente, en el capítulo 4 se indican las conclusiones y aportes del trabajo, así como las futuras líneas de investigación desprendidas del mismo.

En los anexos se presentan los ingredientes indispensables para el desarrollo de la formulación propuesta como: los conceptos básicos de los modelos de daño y plasticidad, la metodología de discontinuidades fuertes de continuo, la teoría de mezclas en materiales compuestos, el método de integración del modelo constitutivo implícito-explicito y el trazado de líneas de discontinuidad.



# Capítulo 2

## Formulación del modelo

En este capítulo se describen los elementos esenciales de la formulación presentada, empezando por las consideraciones básicas adoptadas y los modelos constitutivos tanto de cada material componente, como del compuesto. Posteriormente se establece la cinemática del compuesto mediante la *metodología de discontinuidades fuertes de continuo* (CDSA) y se analiza el fenómeno de bifurcación material. Finalmente se presentan los ingredientes más importantes de la implementación del modelo numérico con el método de los elementos finitos.

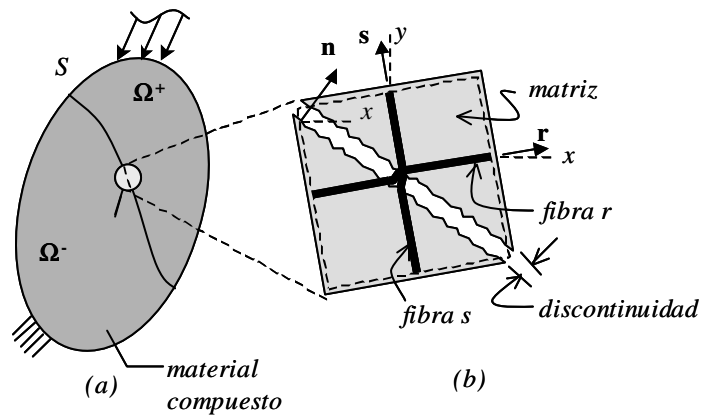
### 2.1. Consideraciones básicas

Las consideraciones básicas generales establecidas como punto de partida de la formulación aquí presentada se pueden resumir en los siguientes ítems:

- Se utiliza la *teoría de mezclas clásica* (Truesdell & Toupin 1960) para establecer el modelo constitutivo del material compuesto, y la *metodología de discontinuidades fuertes de continuo* (Oliver 1996b; Oliver 1996a; Samaniego 2002; Oliver, Huespe et al. 2005a), para capturar las superficies de discontinuidad en un compuesto tipo hormigón armado.
- Cada punto del medio continuo obedece al comportamiento de un material compuesto conformado por una matriz de hormigón y dos paquetes de fibras largas de acero de refuerzo, perpendiculares entre sí, orientadas en las direcciones  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{s}$ , respectivamente (Figura 2.1). Asimismo, el campo de desplazamientos y en

consecuencia el campo de deformaciones están definidos en la escala del compuesto.

- A pesar de que muchas de las ecuaciones indicadas en los siguientes apartados están generalizadas para un espacio tridimensional, el modelo fue implementado para estado plano de tensiones o plano de deformaciones. Por lo tanto, las acciones externas y los desplazamientos, así como también, la matriz y las fibras están orientadas dentro del plano de análisis, mostrando el mismo comportamiento en el espesor del elemento estructural.
- La formulación permite el análisis no lineal con deformaciones infinitesimales en problemas bidimensionales cuasi-estáticos. Las acciones externas se aplican progresivamente en intervalos denominados pasos de carga o instantes de pseudo-tiempo  $t$ .



**Figura 2.1.** Material compuesto con discontinuidad: (a) sólido con superficie de discontinuidad  $S$ , (b) punto material del compuesto.

## 2.2. Modelos constitutivos de los materiales componentes

### 2.2.1. Comportamiento de la matriz de hormigón

Los modelos de daño han sido utilizados para describir el comportamiento del hormigón y de otros materiales cuasi-frágiles. La diferencia entre la capacidad resistente a compresión y a tracción del hormigón se puede representar mediante el modelo de daño propuesto por (Oliver, Cervera et al. 1990), desarrollado a partir del trabajo de (Simó & Ju 1987). La formulación presentada utiliza este modelo de daño para problemas bidimensionales, descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^m, r^m) = \frac{q^m}{r^m} \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^m : \mathbb{C}^m : \boldsymbol{\varepsilon}^m \right) \quad (\text{energía libre}) \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^m = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^m} = \frac{q^m}{r^m} \mathbb{C}^m : \boldsymbol{\varepsilon}^m = \frac{q^m}{r^m} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^m \quad (\text{ecuación constitutiva}) \quad (2.2)$$

$$\dot{r}^m = \lambda^m, \quad r^m \geq r_{t=0}^m = \sigma_u^m / \sqrt{E^m} \quad (\text{ley de evolución de la variable interna}) \quad (2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}^m &= H^m(r) \dot{r}^m, \quad H^m = \frac{dq^m}{dr^m} \leq 0 \\ 0 &\leq q^m \leq r_{t=0}^m, \quad q_{t=0}^m = r_{t=0}^m \end{aligned} \right\} \quad (\text{ley de ablandamiento}) \quad (2.4)$$

**Cuadro 2.1.** Ingredientes de un modelo de daño isótropo escalar.

El superíndice  $m$  se utiliza en las variables propias de la matriz. El punto encima de una variable indica su derivada material, es decir,  $\dot{\phi} = d\phi/dt$ .

En la matriz, los tensores de tensión y deformación se indican como  $\boldsymbol{\sigma}^m$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ . La tensión efectiva es igual a  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^m = \mathbb{C}^m : \boldsymbol{\varepsilon}^m$ , donde  $\mathbb{C}^m$  es el tensor constitutivo elástico de la matriz expresado en el Anexo A.1.  $\sigma_u^m$  es la resistencia a tracción de la matriz,  $H^m$  es el parámetro de ablandamiento,  $\lambda^m$  es el multiplicador de daño,  $r^m$  y  $q^m$  son las variables internas tipo deformación y tipo tensión respectivamente. El criterio de daño en el espacio de las deformaciones y las condiciones de carga-descarga se pueden escribir como:

$$f^m(\boldsymbol{\varepsilon}^m, \mathbf{r}^m) = \tau_{\varepsilon(tc)} - r^m \quad (2.5)$$

$$f^m \leq 0, \quad \lambda^m \geq 0, \quad \lambda^m f^m = 0, \quad \lambda^m \dot{f}^m = 0 \quad (f^m = 0) \quad (2.6)$$

donde  $\tau_{\varepsilon(tc)}$  es la norma de deformaciones, que para el modelo de daño con tracción y compresión diferenciado es igual a:

$$\tau_{\varepsilon(tc)} = \phi \sqrt{\bar{\boldsymbol{\sigma}}^m : (\mathbf{C}^m)^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}^m} \quad (2.7)$$

siendo,

$$\phi = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \bar{\sigma}_i^m \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\bar{\sigma}_i^m|} \left( 1 - \frac{1}{n_\sigma} \right) + \frac{1}{n_\sigma} \quad (2.8)$$

$\bar{\sigma}_1^m, \bar{\sigma}_2^m, \bar{\sigma}_3^m$  corresponden a las tensiones efectivas de la matriz en las direcciones principales 1, 2 y 3 respectivamente. El factor  $n_\sigma$  es el cociente entre la resistencia a compresión  $\sigma_{u(c)}^m$  y a tracción  $\sigma_u^m$  de la matriz, es decir  $n_\sigma = \sigma_{u(c)}^m / \sigma_u^m$ . El paréntesis de Mac-Auley corresponde a  $\langle \phi \rangle = 0.5(\phi + |\phi|)$ .

Para un estado tensional bidimensional donde: ( $\bar{\sigma}_1^m < 0, \bar{\sigma}_2^m < 0$ ), el dominio elástico es  $n_\sigma$  veces más grande que el definido para el caso de ( $\bar{\sigma}_1^m > 0, \bar{\sigma}_2^m > 0$ ) como se observa en la Figura 2.2(a). Cuando  $\bar{\sigma}_1^m$  es positivo y  $\bar{\sigma}_2^m$  es negativo o viceversa se produce una transición aproximada definida por el factor  $\phi$  en la Ecuación (2.8).

A diferencia de los modelos de plasticidad, en el modelo de daño utilizado no es necesario que el dominio elástico sea convexo para conservar unicidad en la solución, por tanto, los cambios de pendiente de la superficie de daño mostrada en la Figura 2.2(a), son admisibles para este modelo constitutivo.

Al expresar la relación entre la tasa de deformación y la tasa de tensión en la matriz se llega a una ecuación constitutiva tangente de la forma:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^m = \mathbf{C}_{tg}^m : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^m \quad (2.9)$$

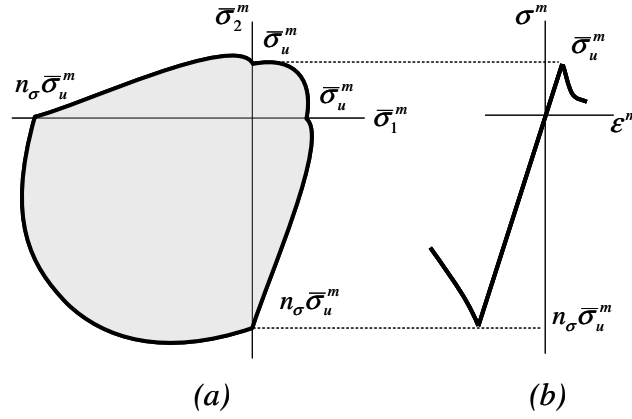
Para la cual el tensor constitutivo tangente en condición de carga elástica o descarga es igual a:

$$\mathbf{C}_{tg}^m = \frac{q}{r^m} \mathbf{C}^m \quad (2.10)$$

y para carga inelástica es:

$$\mathbb{C}_{tg}^m = \frac{q^m}{r^m} \mathbb{C}^m - \left( \frac{q^m - H^m r^m}{(r^m)^3} \right) \cdot \left[ \frac{(r^m)^2}{\phi} (\bar{\boldsymbol{\sigma}}^m \otimes \mathbf{A}) + \phi^2 (\bar{\boldsymbol{\sigma}}^m \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}}^m) \right] \quad (2.11)$$

El tensor de segundo orden  $\mathbf{A} = \mathbb{C}^m : \partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \phi$  esta definido en el Anexo A.1.



**Figura 2.2.** Modelo de daño con degradación diferenciada a compresión y tracción: (a) Superficie de daño, (b) curva tensión-deformación uniaxial.

### 2.2.2. Comportamiento axial de las fibras o barras de acero: modelo de fibra deformable

El comportamiento axial de las fibras se representa en un espacio unidimensional mediante un modelo de plasticidad con endurecimiento isótropo lineal (Simó & Hughes 1998), denominado *modelo de fibra deformable*. Para un grupo de fibras paralelas al vector  $\mathbf{r}$ , los ingredientes del modelo constitutivo se indican en el Cuadro 2.2, donde,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{rr}^{fr}$  es la deformación total,  $\boldsymbol{\varepsilon}_p^{fr}$  es la deformación plástica,  $\lambda^{fr}$  es el multiplicador plástico,  $E^{fr}$  es el módulo de Young,  $\sigma_{rr}^{fr}$  es la tensión axial de la fibra en  $\mathbf{r}$  y  $\sigma_y^{fr}$  es la tensión de fluencia. El ablandamiento está determinado por el módulo  $H^{fr} < 0$  y por las variables internas  $\alpha^{fr}$  tipo deformación y  $q^{fr}$  tipo tensión. Las variables asociadas al modelo de fibra deslizante en dirección  $\mathbf{r}$ , se indican con el superíndice  $fr$ .

La ecuación constitutiva tangente que relaciona las tasas de tensión y de deformación para los estados de carga o descarga inelástica se puede escribir de la forma:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{rr}^{fr} = E_{tg}^{fr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{rr}^{fr} \quad (2.12)$$

donde el operador constitutivo tangente de la fibra es igual a:



$$E_{tg}^{fr} = \begin{cases} E^{fr} & \text{si } \lambda^{fr} = 0 \\ \frac{E^{fr} H^{fr}}{E^{fr} + H^{fr}} & \text{si } \lambda^{fr} > 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\sigma_{rr}^{fr} = E^{fr} (\epsilon_{rr}^{fr} - \epsilon_p^{fr}) \quad (\text{ecuación constitutiva}) \quad (2.14)$$

$$\dot{\epsilon}_p^{fr} = \lambda^{fr} \text{sign}(\sigma_{rr}^{fr}) \quad (\text{regla de flujo}) \quad (2.15)$$

$$\dot{\alpha}^{fr} = \lambda^{fr} \quad (\text{ley de evolución}) \quad (2.16)$$

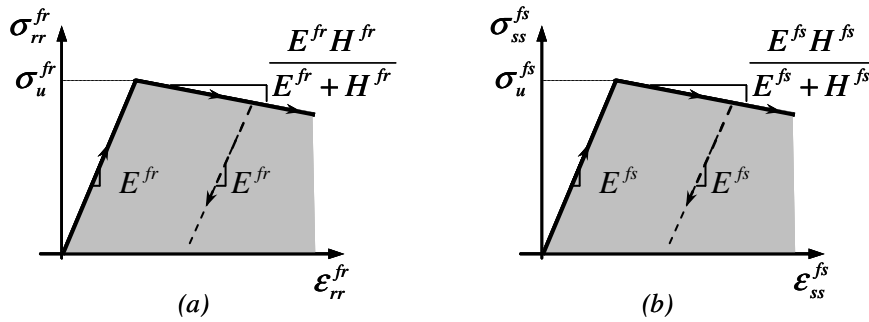
$$f^{fr}(\sigma_{rr}^{fr}, \alpha^{fr}) = |\sigma_{rr}^{fr}| - (q^{fr} + \sigma_y^{fr}) \quad (\text{criterio de plasticidad}) \quad (2.17)$$

$$\dot{q}^{fr} = H^{fr} \dot{\alpha}^{fr} \quad (\text{ley de ablandamiento}) \quad (2.18)$$

$$\left. \begin{aligned} f^{fr} \leq 0; \lambda^{fr} \geq 0; \lambda^{fr} f^{fr} = 0 \\ \lambda^{fr} \dot{f}^{fr} = 0 \quad (f^{fr} = 0) \end{aligned} \right\} \quad (\text{condiciones de carga-descarga y complementariedad}) \quad (2.19)$$

**Cuadro 2.2.** Ingredientes de un modelo de plasticidad unidimensional que describe el comportamiento axial de la fibra

La Figura 2.3(a) muestra la relación tensión deformación unidimensional para el modelo de plasticidad empleados en el comportamiento de la fibra a tracción o compresión.



**Figura 2.3.** Modelo unidimensional de plasticidad: (a) fibra en dirección  $r$ , (b) fibra en dirección  $s$ .

El comportamiento axial de un grupo de fibras orientadas en la dirección  $s$  (Figura 2.3(b)), se puede describir de la misma manera como se ha indicado en las Ecuaciones

(2.12) a (2.13) para las fibras en  $\mathbf{r}$ . En particular, la ecuación constitutiva del comportamiento axial las fibras en  $\mathbf{s}$ , es:

$$\dot{\sigma}_{ss}^{fs} = E_{tg}^{fs} \cdot \dot{\epsilon}_{ss}^{fs} \quad , \quad E_{tg}^{fs} = \begin{cases} E^{fs} & \text{si } \lambda^{fs} = 0 \\ \frac{E^{fs} H^{fs}}{E^{fs} + H^{fs}} & \text{si } \lambda^{fs} > 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

La tasa de tensiones y de deformaciones de la fibra en  $\mathbf{s}$  corresponden a  $\dot{\sigma}_{ss}^{fs}$  y  $\dot{\epsilon}_{ss}^{fs}$ , y los operadores constitutivos elástico y tangente son iguales a  $E^{fs}$  y  $E_{tg}^{fs}$ . El parámetro de ablandamiento y el multiplicador plástico se indican como  $H^{fs}$  y  $\lambda^{fs}$ .

### 2.2.3. Efecto del deslizamiento acero - hormigón

La pérdida de adherencia entre el acero y el hormigón circundante produce un efecto de deslizamiento en la zona de contacto entre ambos materiales. Tal fenómeno será representado mediante el *modelo de deslizamiento* detallado a continuación. Al igual que en el apartado anterior, el modelo se describe para las fibras en la dirección  $\mathbf{r}$ , aunque es aplicable de igual manera para las fibras paralelas al vector  $\mathbf{s}$ .

#### 2.2.3.1. Modelo de deslizamiento

En esta formulación se utiliza un modelo simplificado, en el cual se define una deformación por deslizamiento asociada a un comportamiento elasto-plástico. Se considera que el desplazamiento diferencial producto de la pérdida de adherencia en la interfaz acero-hormigón (fibra-matriz), genera una diferencia entre la deformación de los componentes denominada *deformación por deslizamiento*  $\epsilon_{rr}^{ir}$ .

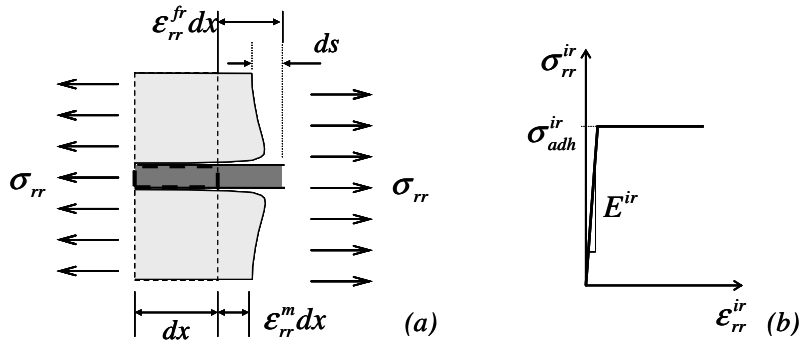
En un elemento infinitesimal  $dx$  de material compuesto sometido a una tensión axial  $\sigma$ , la matriz se desliza con respecto a la fibra una cantidad  $ds$  como lo indica la Figura 2.4(a). La ecuación de compatibilidad que relaciona la deformación de la matriz  $\epsilon_{rr}^m$  y de la fibra  $\epsilon_{rr}^{fr}$  incluyendo los efectos del deslizamiento se puede expresar de la forma:

$$\epsilon_{rr}^{fr} dx - \epsilon_{rr}^m dx = -ds \quad (2.21)$$

Por lo tanto, la variación del deslizamiento con respecto a  $x$  se define como la *deformación por deslizamiento* en la interfaz:

$$\epsilon_{rr}^{ir} = \frac{ds}{dx} = \epsilon_{rr}^m - \epsilon_{rr}^{fr} \quad (2.22)$$

**Observación 2.1** Cuando existe adherencia perfecta en la interfaz la deformación  $\epsilon_{rr}^{ir}$  desaparece manteniendo iguales las deformaciones de matriz y fibra.



**Figura 2.4.** Efecto de deslizamiento acero-hormigón: (a) deslizamiento en un elemento infinitesimal de hormigón armado, (b) relación constitutiva del efecto de deslizamiento.

Se utiliza un modelo elastoplástico perfecto unidimensional para describir el deslizamiento en la interfaz. La Figura 2.4(b) muestra la relación entre la tensión en la interfaz  $\sigma_{rr}^{ir}$  y la deformación por deslizamiento  $\epsilon_{rr}^{ir}$ . La pendiente de la rama elástica se define con el módulo  $E^{ir}$  y la tensión límite denominada *tensión de pérdida total de adherencia* se indica como  $\sigma_{adh}^{ir} \leq \sigma_y^{fr}$ . Los ingredientes básicos de este modelo son los siguientes:

$$\sigma_{rr}^{ir} = E^{ir} (\epsilon_{rr}^{ir} - \epsilon_p^{ir}) \quad (\text{ecuación constitutiva}) \quad (2.23)$$

$$\dot{\epsilon}_p^{ir} = \lambda^{ir} \text{sign}(\sigma_{rr}^{ir}) \quad (\text{regla de flujo}) \quad (2.24)$$

$$f^{ir}(\sigma_{rr}^{ir}) = |\sigma_{rr}^{ir}| - \sigma_{adh}^{ir} \quad (\text{criterio de plasticidad}) \quad (2.25)$$

$$\left. \begin{array}{l} f^{ir} \leq 0; \lambda^{ir} \geq 0; \lambda^{ir} f^{ir} = 0 \\ \lambda^{ir} \dot{f}^{ir} = 0 \quad (f^{ir} = 0) \end{array} \right\} \quad (\text{condiciones de carga-descarga y complementariedad}) \quad (2.26)$$

**Cuadro 2.3.** Ingredientes de un modelo de plasticidad unidimensional que describe el efecto del deslizamiento fibra – matriz.

En las ecuaciones anteriores,  $\epsilon_p^{ir}$  es la deformación plástica y  $\lambda^{ir}$  es el multiplicador plástico en el modelo de la interfaz. La ecuación constitutiva tangente se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{rr}^{ir} &= E_{tg}^{ir} \cdot \dot{\epsilon}_{rr}^{ir} \quad \text{donde,} \\ E_{tg}^{ir} &= \begin{cases} E^{ir} & \lambda^{ir} = 0 \\ 0 & \lambda^{ir} > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.27)$$

siendo  $E_{tg}^{ir}$  el operador constitutivo tangente y  $\dot{\sigma}_{rr}^{ir}$  y  $\dot{\epsilon}_{rr}^{ir}$ , las tasas de tensión y de deformación de la interfaz fibra – matriz en  $\mathbf{r}$ , respectivamente.

**Observación 2.2** Dado que los valores del módulo elástico  $E^{ir}$  suelen ser bastante grandes comparados con el módulo de Young de la fibra, este modelo de deslizamiento se puede simplificar considerando que  $E^{ir} \rightarrow \infty$ , en cuyo caso, se reduce a un modelo rígido-plástico caracterizado por la tensión de pérdida total de adherencia  $\sigma_{adh}^{ir}$ .

El efecto pérdida de adherencia entre el hormigón y las fibras orientadas en  $\mathbf{s}$ , se puede describir de forma análoga al modelo de deslizamiento de la fibra en  $\mathbf{r}$  presentado en las Ecuaciones (2.21) a (2.27). En particular, la ecuación constitutiva tangente del modelo de deslizamiento fibra – matriz en  $\mathbf{s}$ , es:

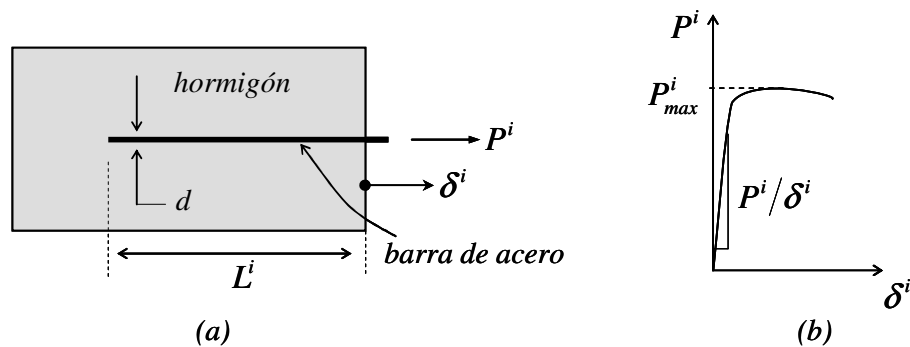
$$\dot{\sigma}_{ss}^{is} = E_{tg}^{is} \cdot \dot{\epsilon}_{ss}^{is} \quad \text{donde,} \quad (2.28)$$

$$E_{tg}^{is} = \begin{cases} E^{is} & \lambda^{is} = 0 \\ 0 & \lambda^{is} > 0 \end{cases}$$

donde  $E_{tg}^{is}$  es el operador constitutivo tangente, mientras que  $\dot{\sigma}_{ss}^{is}$  y  $\dot{\epsilon}_{ss}^{is}$  corresponden a la tasa de tensión y de deformación de la interfaz fibra – matriz en  $\mathbf{s}$ , respectivamente.

### 2.2.3.2. Caracterización del modelo de deslizamiento

En el hormigón armado los ensayos de arrancamiento pueden proporcionar los parámetros del modelo de deslizamiento. En algunos de estos experimentos, una barra de diámetro  $d$  y área de sección  $A^f = \pi d^2/4$  está embebida en el hormigón una distancia  $L^i$  como se muestra en la Figura 2.5(a).



**Figura 2.5.** Efecto de deslizamiento acero – hormigón. Ensayo de arrancamiento: (a) esquema descriptivo, (b) curva experimental carga aplicada versus deslizamiento.

La curva experimental entre la fuerza aplicada en el extremo libre de la barra  $P^i$  y el deslizamiento producido  $\delta^i$  (Figura 2.5(b)), se puede utilizar para caracterizar la relación tensión de la fibra versus deformación por deslizamiento ( $\sigma_{rr}^{ir} - \varepsilon_{rr}^{ir}$ ) de la Figura 2.4(b), teniendo en cuenta las siguientes suposiciones:

- La tensión de pérdida de adherencia es igual a  $\sigma_{adh}^{ir} = P_{max}^i / A^f$ , por lo tanto se considera que el régimen elástico del modelo de deslizamiento coincide con la primera rama de la curva experimental para  $P^i = [0, P_{max}^i]$ . Mientras que el estado de plasticidad perfecta en el modelo se consigue después de alcanzada la carga  $P_{max}^i$  en el ensayo.
- En el régimen elástico del modelo de deslizamiento donde  $\sigma_{rr}^{ir} = E^{ir} \varepsilon_{rr}^{ir}$ , se considera que  $\sigma_{rr}^i = P^i / A^f$  y  $\varepsilon_{rr}^{ir} = \delta^i / L^i$ .

De acuerdo a lo anterior, el módulo de elasticidad del modelo de deslizamiento y la tensión de pérdida de adherencia se pueden caracterizar como:

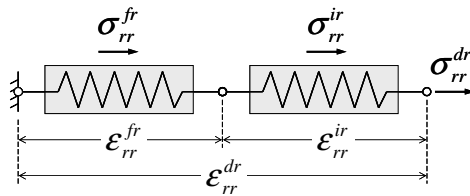
$$E^{ir} = \left( \frac{P^i}{\delta^i} \right) \cdot \left( \frac{L^i}{A^f} \right), \quad \sigma_{adh}^{ir} = \frac{P_{max}^i}{A^f} \quad (2.29)$$

#### 2.2.4. Modelo de fibra deslizante

El comportamiento axial de la fibra descrito en el apartado 2.2.2 y el efecto de deslizamiento fibra - matriz mostrado en el apartado 2.2.3, se acoplan en el denominando *modelo de fibra deslizante* que se describe a continuación.

De acuerdo con la Ecuación (2.22) para las fibras paralelas a  $\mathbf{r}$ , la deformación de la matriz corresponde a  $\varepsilon_{rr}^m = \varepsilon_{rr}^{fr} + \varepsilon_{rr}^{ir}$ . Si se considera que la deformación del modelo de fibra deslizante es igual a la deformación de la matriz:  $\varepsilon_{rr}^{dr} = \varepsilon_{rr}^m$ , se tiene que:

$$\varepsilon_{rr}^{dr} = \varepsilon_{rr}^{fr} + \varepsilon_{rr}^{ir} \quad (2.30)$$



**Figura 2.6.** Modelo de fibra deslizante definido como un sistema en serie de la capacidad axial de la fibra  $fr$  y la acción del deslizamiento en la interfaz  $ir$ .

Ahora se puede interpretar que la fibra y los efectos de pérdida de adherencia constituyen un modelo reológico en serie de fibra e interfaz como el indicado en la Figura 2.6, cuya deformación es la suma de la deformación axial de la fibra  $\varepsilon_{rr}^{fr}$  (descrita en el Apartado 2.2.2), más la deformación por deslizamiento de la interfaz  $\varepsilon_{rr}^{ir}$  (definida en el Apartado 2.2.3). Asimismo, la tensión de este sistema en serie  $\sigma_{rr}^{dr}$  es igual a la tensión de la fibra  $\sigma_{rr}^{fr}$  y de la interfaz  $\sigma_{rr}^{ir}$ , como lo indica la siguiente ecuación:

$$\sigma_{rr}^{dr} = \sigma_{rr}^{fr} = \sigma_{rr}^{ir} \quad (2.31)$$

El *modelo de fibra deslizante* está definido por las Ecuaciones (2.30) y (2.31), las cuales indican la deformación y la tensión de la fibra incluyendo los efectos del deslizamiento en la interfaz. Este sistema en serie se describe en forma incremental como:

$$\dot{\varepsilon}_{rr}^{dr} = \dot{\varepsilon}_{rr}^{fr} + \dot{\varepsilon}_{rr}^{ir} \quad (2.32)$$

$$\dot{\sigma}_{rr}^{dr} = \dot{\sigma}_{rr}^{fr} = \dot{\sigma}_{rr}^{ir} \quad (2.33)$$

Las tasas de deformación  $\dot{\varepsilon}_{rr}^{fr} = \dot{\sigma}_{rr}^{fr} / E_{tg}^{fr}$  y  $\dot{\varepsilon}_{rr}^{ir} = \dot{\sigma}_{rr}^{ir} / E_{tg}^{ir}$  dadas en las Ecuaciones (2.12) y (2.27), se sustituyen en la ecuación (2.32). Aplicando la Ecuación (2.33) y despejando la tasa de tensiones, se obtiene la ecuación constitutiva del modelo de fibra deslizante en  $\mathbf{r}$  como:

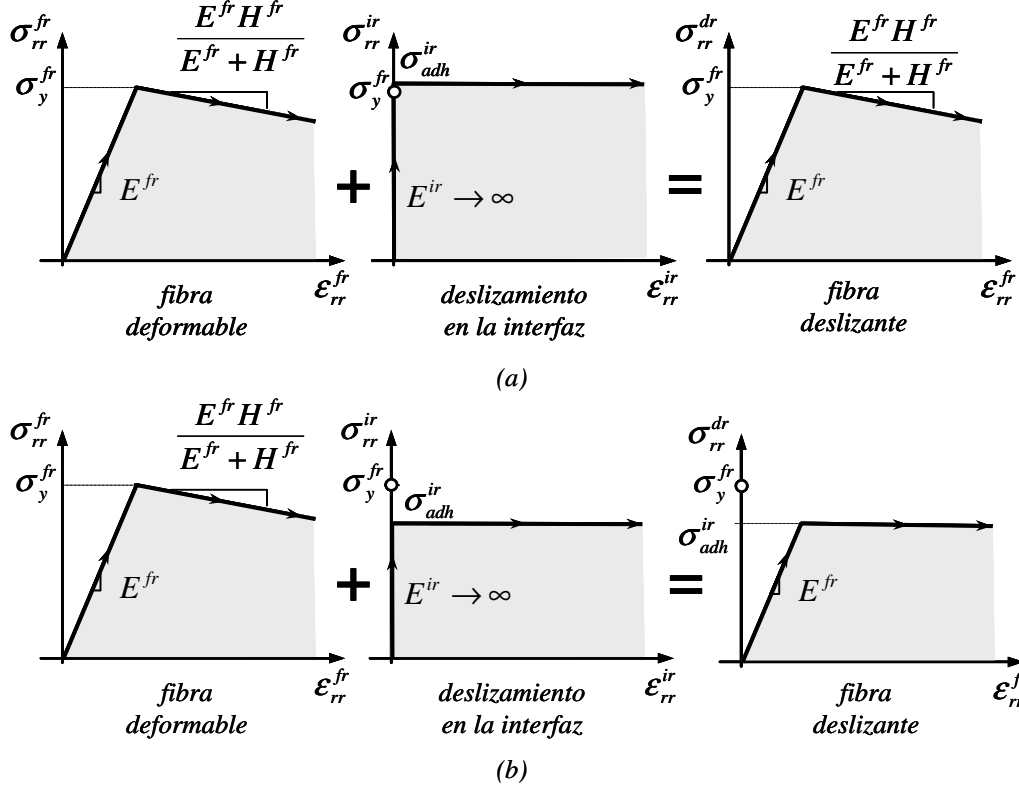
$$\dot{\sigma}_{rr}^{dr} = E_{tg}^{dr} \cdot \dot{\varepsilon}_{rr}^{dr} \quad \text{donde,} \quad E_{tg}^{dr} = \frac{1}{1/E_{tg}^{fr} + 1/E_{tg}^{ir}} = \frac{E_{tg}^{fr} E_{tg}^{ir}}{E_{tg}^{fr} + E_{tg}^{ir}} \quad (2.34)$$

siendo  $E_{tg}^{dr}$  el operador constitutivo tangente, mientras que  $\dot{\sigma}_{rr}^{dr}$  y  $\dot{\varepsilon}_{rr}^{dr}$  son las tasas de tensión y deformación de la fibra deslizante en  $\mathbf{r}$ . Recordando que  $E_{tg}^{ir}$  está definido por el modelo de deslizamiento en la Ecuación (2.27), y  $E_{tg}^{fr}$  por el modelo de fibra deformable en la Ecuación (2.13).

**Observación 2.3** *Condición de adherencia perfecta:* si el módulo de deslizamiento  $E_{tg}^{ir}$  tiende a infinito ( $E_{tg}^{ir} \rightarrow \infty \Rightarrow E_{tg}^{dr} = E_{tg}^{fr}$ ), y la tensión de pérdida de adherencia  $\sigma_{adh}^{fr}$  es igual a la tensión de fluencia del material  $\sigma_y^{fr}$ , el modelo de fibra deslizante mantiene el comportamiento axial de la fibra, y en consecuencia, se obtiene la condición de adherencia perfecta (Figura 2.7(a)).

**Observación 2.4** *Modelo de deslizamiento rígido-plástico:* al considerar un modelo rígido-plástico para describir el deslizamiento fibra-matriz, es decir,  $E_{tg}^{ir} \rightarrow \infty$  y  $\sigma_{adh}^{fr} < \sigma_y^{fr}$ , la curva tensión-deformación del modelo de fibra mues-

tra dos ramas: una elástica limitada por  $\sigma_{adh}^{fr}$  y otra de plasticidad perfecta (Figura 2.7(b)).



**Figura 2.7.** Curva tensión-deformación resultante en el modelo de fibra deslizante, para dos casos especiales: (a) condición de adherencia perfecta ( $E_{tg}^{ir} \rightarrow \infty$ ;  $\sigma_{adh}^{ir} = \sigma_y^{fr}$ ), (b) modelo de deslizamiento rígido-plástico ( $E_{tg}^{ir} \rightarrow \infty$ ;  $\sigma_{adh}^{ir} < \sigma_y^{fr}$ ).

De forma análoga, para el grupo de fibras paralelas al vector  $s$  se pueden reescribir las Ecuaciones (2.32) y (2.33), como:

$$\dot{\epsilon}_{ss}^{ds} = \dot{\epsilon}_{ss}^{fs} + \dot{\epsilon}_{ss}^{is} \quad , \quad \dot{\sigma}_{ss}^{ds} = \dot{\sigma}_{ss}^{fs} = \dot{\sigma}_{ss}^{is} \quad (2.35)$$

siendo  $\dot{\sigma}_{ss}^{ds}$  y  $\dot{\epsilon}_{ss}^{ds}$  las tasas de tensión y de deformación de la fibra deslizante en  $s$ . La ecuación constitutiva del modelo de fibra deslizante en  $s$  se puede escribir como:

$$\dot{\sigma}_{ss}^{ds} = \dot{\sigma}_{ss}^{fs} = E_{tg}^{ds} \cdot \dot{\epsilon}_{ss}^{ds} \quad , \quad E_{tg}^{ds} = \frac{E_{tg}^{fs} E_{tg}^{is}}{E_{tg}^{fs} + E_{tg}^{is}} \quad (2.36)$$

donde el operador constitutivo tangente del modelo de fibra deslizante en  $s$  es igual a  $E_{tg}^{ds}$ .

### 2.2.5. Acción pasador

Los elementos estructurales tipo barra tienen una dimensión mucho mayor que las otras dos, comportándose principalmente a tracción o a compresión normal a su eje longitudinal. Sin embargo, un efecto asociado con la apertura de fisura en el hormigón requiere de su capacidad a cortante, como se describe en este apartado.

En una pieza de hormigón armado donde las fisuras abren en modo II de fallo, la fuerza cortante es resistida por el trabazón interno entre las partículas de agregado del hormigón y por la capacidad del acero de refuerzo al cortante en las caras de una fisura. Este último efecto se denomina *acción pasador* y se produce por alguno de los mecanismos citados en los Apartados 2.2.5.1 y 2.2.5.2 (Park & Paulay 1975). Asimismo, este fenómeno se representa mediante el modelo constitutivo descrito en el Apartado 2.2.5.3.

#### 2.2.5.1. Mecanismos que producen la acción pasador: Flexión de las barras entre las caras de la fisura

El comportamiento a flexión de las barras entre las caras de la fisura se debe a un desplazamiento relativo  $\delta^f$  perpendicular a su eje, cuando la luz libre entre las caras de una fisura  $l^f$  es grande con respecto a su diámetro  $d$  (Figura 2.8(a)). En este caso se supone que el desplazamiento paralelo al plano de la fisura se transmite a una viga doblemente empotrada de luz igual a la apertura de la misma.

De acuerdo con la teoría de vigas de Timoshenko (Timoshenko & Young 1965), en el rango elástico el desplazamiento  $\delta^f$  genera una fuerza cortante  $V$  en la barra igual a:

$$V = \frac{12E^f I^f}{(l^f)^3} \delta^f \quad (2.37)$$

donde el área y el segundo momento de inercia para una sección transversal circular de diámetro  $d$  son iguales a  $A^f = \pi d^2/4$  y  $I^f = \pi d^4/64$  respectivamente.  $E^f$  y  $\sigma_y^f$  corresponden al módulo de Young y a la tensión de fluencia del acero.

El comportamiento elástico de la viga ocurre siempre y cuando el momento flector máximo  $M = Vl/2$  sea inferior al momento plástico  $M_y = (d^3/6)\sigma_y^f$ . Por lo tanto, la fuerza cortante en el límite elástico es igual a:

$$V_y = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{d}{l^f} \cdot A^f \sigma_y^f \quad (2.38)$$

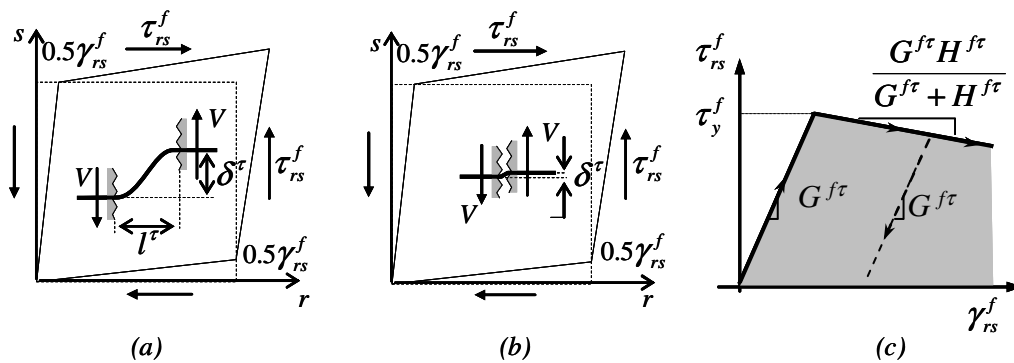


Las fuerzas cortantes  $V$  y  $V_y$  también se pueden escribir en términos de un módulo de cortante equivalente  $G^{f\tau}$  y de una tensión cortante equivalente de fluencia  $\tau_y^f$ , de la forma:

$$V = \frac{G^{f\tau} A^f}{l^\tau} \delta^\tau \quad , \quad V_y = A^f \tau_y^f \quad (2.39)$$

Igualando las Ecuaciones (2.37) y (2.38) en las Expresiones (2.39) se obtiene:

$$G^{f\tau} = E^f \cdot \frac{3d^2}{4(l^\tau)^2} \quad , \quad \tau_y^f = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{d}{l^\tau} \sigma_y^f \quad (2.40)$$



**Figura 2.8.** Acción pasador: (a) flexión de una barra entre las caras de una fisura, (b) corte directo en la barra que atraviesa una fisura, (c) relación tensión cortante versus deformación angular en el modelo constitutivo.

### 2.2.5.2. Mecanismos que producen la acción pasador: Corte directo en las barras que atraviesan la fisura

El corte directo en las barras que atraviesan la fisura ocurre cuando la apertura normal de la fisura es muy pequeña comparada con el deslizamiento tangencial, en otras palabras, cuando el modo II de apertura de fisura domina con respecto al modo I (Figura 2.8(b)). En este caso la fuerza cortante transmitida por el refuerzo es igual a:

$$V = \frac{G^{f\tau} A^f}{l^\tau} \delta^\tau \quad ; \quad G^{f\tau} = \frac{E^f}{2(1+\nu^f)} \quad (2.41)$$

En este mecanismo,  $G^{f\tau}$  corresponde al módulo elástico a cortante y  $\nu^f$  es la relación de Poisson del acero. Aplicando el criterio de fluencia de von Mises para un estado de cortante puro se obtiene una fuerza cortante de fluencia igual a:

$$V_y = \frac{\sigma_y^f}{\sqrt{3}} A^f \quad (2.42)$$

El resultado de igualar la Ecuación (2.39) con la ecuación anterior define a la tensión cortante equivalente de fluencia así:

$$\tau_y^f = \frac{\sigma_y^f}{\sqrt{3}} \quad (2.43)$$

### 2.2.5.3. Modelo constitutivo de la acción pasador

Basado en las consideraciones anteriores, el efecto dovela se representa mediante un modelo de plasticidad unidimensional equivalente, similar al modelo mencionado en el Apartado 2.2.2. Este modelo relaciona la deformación angular  $\gamma_{rs}^f$  con la tensión cortante de la fibra  $\tau_{rs}^f$  en el plano  $rs$  (Figura 2.8(c)) y está definido por los siguientes ingredientes:

$\tau_{rs}^f = G^{f\tau} (\gamma_{rs}^f - \gamma_p^f)$ (ecuación constitutiva)	(2.44)
$\dot{\gamma}_p^f = \lambda^{f\tau} \text{sign}(\tau_{rs}^f)$ (regla de flujo)	(2.45)
$\dot{\alpha}^{f\tau} = \lambda^{f\tau}$ (ley de evolución)	(2.46)
$f^{f\tau}(\tau_{rs}^f, \alpha^{f\tau}) =  \tau_{rs}^f  - (\tau_y^f + q^{f\tau})$ (criterio de plasticidad)	(2.47)
$\dot{q}^{f\tau} = H^{f\tau} \dot{\alpha}^{f\tau}$ (ley de ablandamiento)	(2.48)
$f^{f\tau} \leq 0, \lambda^{f\tau} \geq 0, \lambda^{f\tau} f^{f\tau} = 0,$ $\lambda^{f\tau} \dot{f}^{f\tau} = 0 (f^{f\tau} = 0)$ (condiciones de carga-descarga y complementariedad)	(2.49)

**Cuadro 2.4.** Ingredientes de un modelo de plasticidad unidimensional que describe la acción pasador en las fibras.

En las ecuaciones anteriores,  $\gamma_p^f$  es la deformación angular plástica,  $G^{f\tau}$  es el módulo de cortante equivalente y  $\tau_y^f$  es la tensión cortante de fluencia equivalente. El ablandamiento está determinado por el módulo  $H^{f\tau}$  y las variables internas tipo deformación y tipo tensión  $\alpha^{f\tau}$  y  $q^{f\tau}$ . La ecuación constitutiva tangente será de la forma:

$$\dot{\tau}_{rs}^f = G_{ig}^{f\tau} \dot{\gamma}_{rs}^f \quad (2.50)$$

donde el operador constitutivo tangente es igual a:

$$G_{ig}^{f\tau} = \begin{cases} G^{f\tau} & \lambda^{f\tau} = 0 \\ \frac{G^{f\tau} H^{f\tau}}{G^{f\tau} + H^{f\tau}} & \lambda^{f\tau} > 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

El módulo  $G^{f\tau}$  se calcula con la Ecuación (2.40) o (2.41) dependiendo de cual de los dos mecanismos de la acción pasador (Apartados 2.2.5.1 y 2.2.5.2), sea el dominante. De igual manera, la tensión  $\tau_y^f$  se define con la Ecuación (2.40) o (2.43) según sea el caso.

**Observación 2.5** *Generalmente se puede considerar que la tensión cortante en el acero en el rango inelástico del modelo permanece constante, es decir, que el módulo de endurecimiento  $H^{f\tau}$  es nulo.*

**Observación 2.6** *Como lo describen los Apartados 2.2.4 y 2.2.5, el comportamiento de cada paquete de las barras de refuerzo se define mediante dos modelos constitutivos desacoplados: uno asociado al comportamiento a cortante  $\tau_{rs}^f(\gamma_{rs}^f)$  y otro relacionado con el comportamiento axial  $\sigma_{rr}^{fr}(\epsilon_{rr}^{fr} + \epsilon_{rr}^{ir})$ . Este último es el resultado de un modelo en serie que incluye la capacidad del acero y los efectos de deslizamiento en la interfaz fibra-matriz.*

## 2.3. Modelo constitutivo del material compuesto

Como se ha indicado anteriormente, el hormigón armado se presenta como un material compuesto conformado por una matriz de hormigón definida por un modelo de daño y dos paquetes de fibras largas de acero perpendiculares entre sí, cuyo comportamiento axial está caracterizado por modelos de plasticidad unidimensional, despreciado su rigidez transversal. Además, se considera la pérdida de adherencia como la relación entre la tensión axial de la fibra y una deformación ficticia producida por el desplazamiento relativo entre hormigón y acero, la cual, sumada con la deformación de la fibra corresponde a la deformación del *modelo de fibra deslizante*. También se incluye la acción pasador como una relación constitutiva entre tensión cortante y deformación angular, determinada por la rigidez y capacidad a flexión o a cortante de las barras de acero entre las caras de una fisura.

El modelo constitutivo del material compuesto requiere un vínculo entre su deformación y las deformaciones de los materiales constituyentes, así como también, entre su tensión y las tensiones de la matriz y las fibras (Hill 1963). Basándose en la *teoría o regla de mezclas* (Truesdell & Toupin 1960) descrita en el Apartado 1.5.3 y en el Anexo B, se establecen las relaciones necesarias entre el compuesto y los materiales constituyentes.

Las hipótesis consideradas en el modelo son:

- La tasa de deformación en la matriz  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^m$  es igual al tensor de la tasa de deformación común  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  definido en un espacio bi o tridimensional.
- El comportamiento axial de la *fibra deslizante* en dirección  $\mathbf{r}$  está definido por la componente  $rr$  del tensor de la tasa de deformación del compuesto  $\dot{\epsilon}_{rr}^{dr}$ .
- El comportamiento axial de la *fibra deslizante* en  $\mathbf{s}$  está determinado por la componente  $ss$  de la tasa de deformación del compuesto  $\dot{\epsilon}_{ss}^{ds}$ .
- La capacidad a cortante de las fibras está asociada con la tasa de deformación angular en el plano  $rs$  indicada como  $\dot{\gamma}_{rs}^f$ .

De acuerdo a lo anterior, las condiciones de compatibilidad de deformaciones presentadas como la relación entre la tasa de deformación de cada material componente y del material son:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^m = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{deformación en la matriz}) \quad (2.52)$$

$$\dot{\epsilon}_{rr}^{dr} = \dot{\epsilon}_{rr} = \mathbf{r} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{r} \quad (\text{deformación en fibra deslizante en } \mathbf{r}) \quad (2.53)$$

$$\dot{\epsilon}_{ss}^{ds} = \dot{\epsilon}_{ss} = \mathbf{s} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{s} \quad (\text{deformación en fibra deslizante en } \mathbf{s}) \quad (2.54)$$

$$\dot{\gamma}_{rs}^f = \dot{\gamma}_{rs} = 2 \mathbf{r} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{s} \quad (\text{deformación angular en las fibras en } rs) \quad (2.55)$$

**Cuadro 2.5.** Tasa de deformación de cada componente en términos de la tasa de deformación del material compuesto.

Como lo indica la *teoría de mezclas*, se considera que la tasa de tensión del material compuesto corresponde a la suma de las tasas de tensiones de matriz y fibras multiplicadas por sus respectivos coeficientes de participación volumétrica, lo cual se puede escribir como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = k^m \dot{\boldsymbol{\sigma}}^m + k^{fr} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{rr}^{fr} + k^{fs} (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ss}^{fs} + 2(k^{fr} + k^{fs}) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})^S \dot{\boldsymbol{\tau}}_{rs}^f \quad (2.56)$$

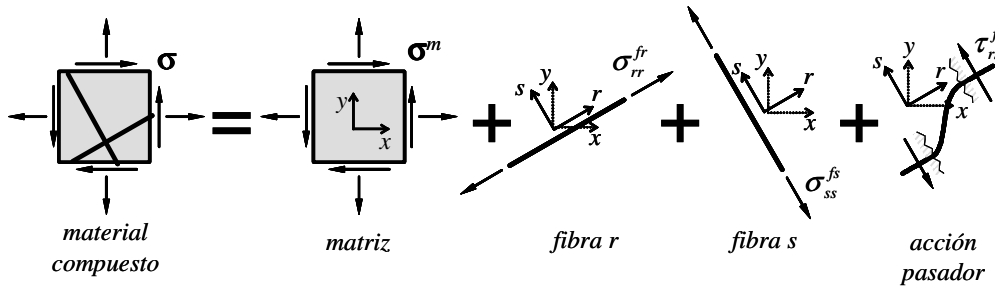
donde los factores  $k^m, k^{fr}, k^{fs}$  corresponden a la fracción de volumen de cada material componente, es decir:

$$k^m = \frac{V^m}{\bar{V}}, \quad k^{fr} = \frac{V^{fr}}{\bar{V}}, \quad k^{fs} = \frac{V^{fs}}{\bar{V}}, \quad k^m + k^{fr} + k^{fs} = 1 \quad (2.57)$$

siendo  $\bar{V}$  es el volumen total de material compuesto,  $V^m$  es el volumen de matriz,  $V^{fr}$  y  $V^{fs}$  son los volúmenes de las fibras orientadas en la dirección  $\mathbf{r}$  y en  $\mathbf{s}$  respectivamente.

En el modelo se considera un comportamiento axial de las fibras que desprecia su aporte a la tensión del compuesto en la dirección perpendicular a su eje longitudinal, es decir, la tensión normal en dirección  $\mathbf{s}$  de las fibras paralelas al vector  $\mathbf{r}$  es nula ( $\sigma_{ss}^{fr} = 0$ ), al igual que la tensión normal en  $\mathbf{r}$  de las fibras paralelas al vector  $\mathbf{s}$  ( $\sigma_{rr}^{fs} = 0$ ).

La Figura 2.9 indica la tensión de cada componente en su sistema coordenado local.



**Figura 2.9.** Modelo constitutivo del material compuesto. Tensiones en los materiales componentes.

**Observación 2.7** En la base  $rs$ , la tasa del tensor de tensiones del compuesto tendrá las siguientes componentes:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{rr} &= k^m \dot{\sigma}_{rr}^m + k^{fr} \dot{\sigma}_{rr}^{fr} \\ \dot{\sigma}_{ss} &= k^m \dot{\sigma}_{ss}^m + k^{fs} \dot{\sigma}_{ss}^{fs} \\ \dot{\tau}_{rs} &= k^m \dot{\tau}_{rs}^m + (k^{fr} + k^{fs}) \dot{\tau}_{rs}^f \end{aligned} \quad (2.58)$$

Asimismo, las componentes de la tasa de deformación indicadas en las Ecuaciones (2.52) a (2.55), se pueden reescribir de la forma:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{rr}^m &= \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{rr}^{dr} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{rr} \\
\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ss}^m &= \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ss}^{ds} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ss} \\
\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{rs}^m &= \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{rs}^f = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{rs}
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Las Ecuaciones (2.58) y (2.59), demuestran la aplicación de la teoría de mezclas a tres sistemas en paralelo, como se representa en la Figura 2.10. El primero está constituido por la componente  $rr$  de la matriz y la fibra deslizante en dirección  $\mathbf{r}$ , el segundo está conformado por la componente normal  $ss$  de la matriz y la fibra deslizante en  $\mathbf{s}$ , el tercero lo define la capacidad a cortante de la matriz y de las fibras (acción pasador) en el plano  $rs$ .

**Observación 2.8** El método del campo promedio descrito en el Apartado 1.5.5, supone que las tasas de tensión y de deformación del compuesto corresponden a:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = k^m \dot{\boldsymbol{\sigma}}^m + k^{fr} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{fr} + k^{fs} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{fs} \rightarrow \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{rr} = k^m \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{rr}^m + k^{fr} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{rr}^{fr} + k^{fs} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{rr}^{fs} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ss} = k^m \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ss}^m + k^{fr} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ss}^{fr} + k^{fs} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ss}^{fs} \\ \dot{\boldsymbol{\tau}}_{rs} = k^m \dot{\boldsymbol{\tau}}_{rs}^m + (k^{fr} + k^{fs}) \dot{\boldsymbol{\tau}}_{rs}^f \end{cases} \tag{2.60}$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = k^m \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^m + k^{fr} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{dr} + k^{fs} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{ds} \rightarrow \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{rr} = k^m \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{rr}^m + k^{fr} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{rr}^{dr} + k^{fs} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{rr}^{ds} \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ss} = k^m \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ss}^m + k^{fr} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ss}^{dr} + k^{fs} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ss}^{ds} \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{rs} = k^m \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{rs}^m + (k^{fr} + k^{fs}) \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{rs}^f \end{cases} \tag{2.61}$$

donde los factores de participación volumétrica  $k^m, k^{fr}, k^{fs}$ , las tasas de tensión  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^m, \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{fr}, \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{fs}$  y de deformación  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^m, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{dr}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{ds}$ , están asociados a la matriz, a la fibra deslizante en  $\mathbf{r}$  y en  $\mathbf{s}$ , respectivamente. Si además se impone que la deformación es común entre los materiales, como lo establece la regla de mezclas, es decir,  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^m = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{dr} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{ds} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ , y que la capacidad de las fibras perpendicular a su eje longitudinal es despreciable y por tanto  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ss}^{fr} = 0, \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{rr}^{fs} = 0$ , las Ecuaciones (2.60) y (2.61) se transforman en las Ecuaciones (2.58) y (2.59) respectivamente, más las expresiones adicionales  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{rr}^m = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{rr}^{ds} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{rr}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ss}^m = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ss}^{dr} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ss}$ , que no intervienen en la evaluación de la tensión del compuesto.

Las tasas de tensión obtenidas de las ecuaciones constitutivas de cada componente presentadas anteriormente se resumen en el siguiente cuadro:

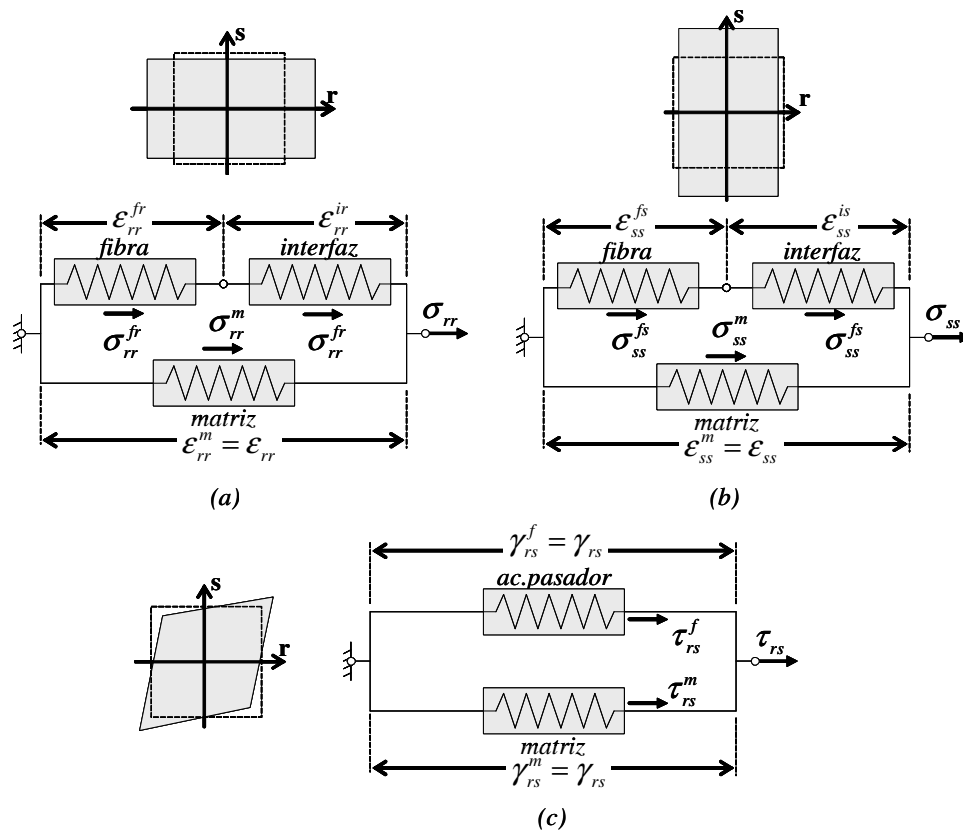
$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^m = \mathbb{C}_{tg}^m : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{tasa de tensión en la matriz}) \quad (2.62)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{rr}^{fr} = E_{tg}^{dr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{rr} \quad (\text{tasa de tensión normal en la fibra } r) \quad (2.63)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ss}^{fs} = E_{tg}^{ds} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ss} \quad (\text{tasa de tensión normal en la fibra } s) \quad (2.64)$$

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}_{rs}^f = G_{tg}^{f\tau} \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{rs} \quad (\text{tasa de tensión cortante en las fibras}) \quad (2.65)$$

**Cuadro 2.6.** Ecuación constitutiva tangente de cada componente.



**Figura 2.10.** Modelo constitutivo del material compuesto. Modelo reológico considerado en la componente: (a) normal en  $r$ , (b) normal en  $s$ , (c) cortante en el plano  $rs$ .

En virtud de la compatibilidad de las deformaciones entre los componentes se puede definir la ecuación constitutiva tangente del material compuesto como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}_{tg} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.66)$$

El tensor constitutivo tangente  $\mathbb{C}_{tg}$  se puede evaluar sustituyendo las ecuaciones constitutivas de los componentes (2.62) a (2.65) en la Ecuación (2.56) e igualando este resultado con la Ecuación (2.66), obteniendo:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{tg} = & k^m \mathbb{C}_{tg}^m + k^{fr} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \otimes (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) E_{tg}^{dr} + \\ & + k^{fs} (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \otimes (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) E_{tg}^{ds} + \\ & + (k^{fr} + k^{fs}) (4(\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})^s \otimes (\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})^s) G_{tg}^{fr} \end{aligned} \quad (2.67)$$

## 2.4. Aplicación de la metodología de discontinuidades fuertes de continuo a materiales compuestos

En algunos ensayos de probetas de hormigón armado, después de agotar el régimen elástico del hormigón, se observa un estado no lineal que comienza con la microfisuración distribuida o *zona de fallo difuso* y termina con la formación de fisuras de apertura apreciable (Vecchio, Lai et al. 2001). Estos fenómenos pueden ser representados por un modelo de material compuesto tipo hormigón armado, que capture la localización de la deformación a partir del comportamiento de sus componentes (matriz de hormigón y fibras de acero).

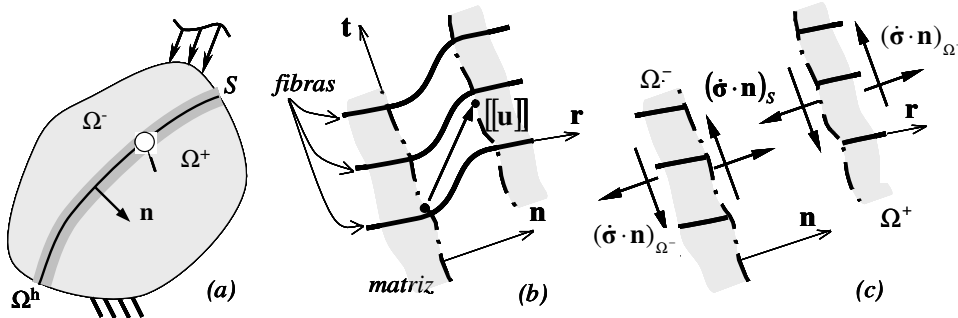
La metodología de discontinuidades fuertes de continuo (CSDA) describe el mecanismo de fallo estructural, identificando el comportamiento elástico, el proceso de fractura y el colapso general, mediante una cinemática enriquecida dentro de la mecánica del continuo (Oliver 1996a). El Anexo C resume las características generales de esta formulación a partir de los trabajos realizados por Oliver y colaboradores (Oliver 1996a; Oliver 1996b; Oliver, Huespe et al. 2003; Oliver & Huespe 2004a; Oliver & Huespe 2004b). A continuación se aplica esta metodología al material compuesto.



### 2.4.1. Descripción cinemática del material compuesto

En la CSDA se establece la existencia de un salto en el campo de desplazamientos a través de la superficie de fallo, capaz de generar valores no acotados (en sentido distribucional) en el campo de las deformaciones.

**Hipótesis 2.1** Como se indicó en el Apartado 2.3, el campo de deformaciones está definido sobre el material compuesto como una cantidad común para todos los constituyentes. Al obtener las deformaciones a partir del campo de los desplazamientos se puede asegurar que este último también está determinado en la escala del compuesto. Por lo tanto, la cinemática enriquecida definida en la CSDA se aplica a un material compuesto de la misma forma que se utiliza en un material homogéneo.



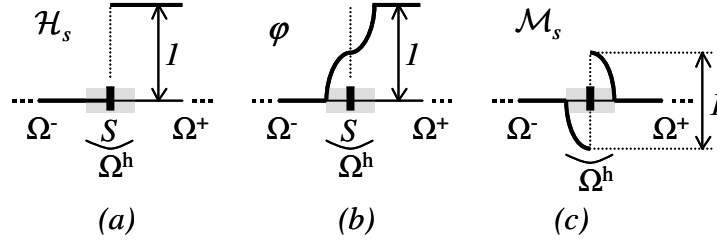
**Figura 2.11.** Aplicación de la CSDA a materiales compuestos: (a) sólido con discontinuidad, (b) salto de desplazamiento en un punto material y (c) continuidad de tracciones en un punto material.

#### 2.4.1.1. Cinemática de la discontinuidad fuerte

Sea un cuerpo  $\Omega$  de material compuesto que exhibe una discontinuidad fuerte sobre la superficie  $S$  de normal  $\mathbf{n}$ , la cual divide al cuerpo en los dominios  $\Omega^+$  y  $\Omega^-$  como lo muestra la Figura 2.11(a). Se define la tasa de desplazamiento en un punto material  $\mathbf{x}$  y para un instante  $t$  como (Oliver, Huespe et al. 2003):

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{M}_S(\mathbf{x}) \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]](t) \quad (2.68)$$

donde  $\ddot{\mathbf{u}}$  y  $[[\dot{\mathbf{u}}]]$  corresponden a la parte continua y el salto de la tasa de desplazamiento (Figura 2.11(b)), respectivamente. La función elemental de salto unitario en el continuo esta definida como  $\mathcal{M}_S(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_S(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})$ , donde  $\mathcal{H}_S(\mathbf{x})$  es la función de Heaviside y  $\varphi(\mathbf{x})$  es una función continua arbitraria limitada en una pequeña banda  $\Omega^h$  contenida en  $S$ , como se indica en la Figura 2.12.



**Figura 2.12.** Aplicación de la CSDA a materiales compuestos: (a) función de Heaviside, (b) función  $\varphi$  y (c) función salto unitario

La siguiente expresión indica el valor de la función de Heaviside y de la función continua  $\varphi(\mathbf{x})$  fuera de la banda  $\Omega^h$  donde su valor no es arbitrario.

$$\mathcal{H}_S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \\ 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{cases} \quad \text{y} \quad \varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- / \Omega^h \\ 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ / \Omega^h \end{cases} \quad (2.69)$$

El campo tasa de deformaciones se evalúa aplicando el operador gradiente simétrico sobre el campo de velocidad, de tal forma que la tasa de deformación se puede dividir en una parte compatible en función de la velocidad en el continuo y una parte mejorada en términos del salto de la tasa de desplazamiento. Dado que el gradiente (en el sentido generalizado), de la función de Heaviside determina una función singular, la tasa de deformación se puede expresar como la suma de una parte regular acotada más una parte singular (no acotada), como se indica a continuación.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla^s \dot{\mathbf{u}} = \underbrace{\overbrace{\nabla^s \dot{\mathbf{u}}}^{\text{compatible}} - \overbrace{(\nabla \varphi \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]])^s}^{\text{mejorada acotada}}}_{\text{regular } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \underbrace{(\delta_s \mathbf{n} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]])^s}_{\text{singular } [[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]]} \quad (2.70)$$

donde  $\delta_s$  es la función delta de Dirac actuando sobre  $\Omega$ . En general el salto del campo ( $\bullet$ ) se indica de la forma  $[[\bullet]] = \bullet|_{\Omega^+/S} - \bullet|_S$ .

De acuerdo con la ecuación anterior la diferencia entre la tasa deformación dentro y fuera de la superficie de discontinuidad  $S$  es igual a:

$$[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\Omega^+/S} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_S = \delta_s (\mathbf{n} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]])^s \quad (2.71)$$

### 2.4.1.2. Aplicación al material compuesto

Las Ecuaciones (2.72) a (2.75) indican la parte regular y singular de las componentes de la tasa de deformación utilizada por cada material constituyente del compuesto, donde los escalares  $(\mathbf{r} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket)$  y  $(\mathbf{s} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket)$  corresponden a las componentes de la tasa del salto del desplazamiento en la dirección  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{s}$ , respectivamente.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^m = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + (\delta_s \mathbf{n} \otimes \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket)^s \quad (\text{deformación en la matriz}) \quad (2.72)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{rr}^{dr} = \mathbf{r} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{r} + \delta_s (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket) \quad (\text{deformación fibra en } \mathbf{r}) \quad (2.73)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ss}^{ds} = \mathbf{s} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{s} + \delta_s (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{s} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket) \quad (\text{deformación fibra en } \mathbf{s}) \quad (2.74)$$

$$\dot{\gamma}_{rs}^f = 2 \mathbf{r} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{s} + \delta_s [(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket) + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{s} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket)] \quad (\text{deformación angular fibra}) \quad (2.75)$$

**Cuadro 2.7.** Componentes de la tasa de deformación de los materiales constituyentes.

**Observación 2.9** De la Ecuación (2.73) se deduce que cuando la discontinuidad es paralela a las fibras en dirección  $\mathbf{r}$ , es decir  $(\mathbf{n} \perp \mathbf{r})$ , la tasa de deformación de las mismas en la superficie  $S$  coincide con la parte regular  $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{rr}^{dr} = \mathbf{r} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{r})$ . Este resultado indica que físicamente la apertura de una fisura paralela a una fibra no genera ninguna deformación sobre la misma, como es esperable. En cambio, cuando  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{r}$  son paralelas, la parte singular de la tasa de deformaciones adquiere un valor máximo  $\delta_s (\mathbf{r} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket)$ . También se nota que la componente del salto normal al eje de las fibras no produce deformación axial sobre ellas. De manera análoga ocurre con el comportamiento de las fibras orientadas en  $\mathbf{s}$ , como se puede observar en la Ecuación (2.74).

**Observación 2.10** En un punto material, la tasa de deformación  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t)$  está dada por la cinemática de CSDA indicada en la Ecuación (2.70), mientras que la tasa de tensión  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t)$  se calcula en el material compuesto mediante la teoría de mezclas con la Ecuación (2.56).

### 2.4.2. Condiciones de equilibrio en el material compuesto

**Hipótesis 2.2** Dado que el campo de las tensiones en un punto material está definido en la escala del material compuesto como se indicó en la Observación 2.10, las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de continuidad de tracciones

*utilizadas en la CSDA sobre materiales homogéneos se pueden aplicar directamente a materiales compuestos.*

Las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de continuidad de tracciones en el medio continuo de material compuesto se expresan en el Cuadro 2.8, donde  $\mathbf{b}$  es el vector de fuerzas de cuerpo,  $\mathbf{t}^*$  es el vector de tracciones prescritas y  $\mathbf{v}_t$  es la normal al contorno  $\Gamma_\sigma$ . El subíndice  $\Omega^{(\bullet)} \setminus S$  indica que la cantidad en cuestión es evaluada en un punto perteneciente a  $\Omega^{(\bullet)}$  pero fuera de la superficie  $S$ . La superficie de discontinuidad divide el dominio  $\Omega$  en dos partes:  $\Omega^+$  y  $\Omega^-$ , donde el vector  $\mathbf{n}$  apunta hacia  $\Omega^+$  como lo indica la Figura 2.11(a).

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\mathbf{b}} = 0 \quad (\text{equilibrio interno en } \Omega \setminus S) \quad (2.76)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_t = \dot{\mathbf{t}}^* \quad (\text{equilibrio en el contorno } \Gamma_\sigma) \quad (2.77)$$

$$[[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]]_{\Omega \setminus S} \cdot \mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^- \setminus S} \cdot \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+ \setminus S} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{continuidad de tracciones en } \Omega \setminus S) \quad (2.78)$$

$$[[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]] \cdot \mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S \cdot \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+ \setminus S} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{continuidad de tracciones en } S) \quad (2.79)$$

**Cuadro 2.8.** Ecuaciones de equilibrio y condiciones de continuidad en el material compuesto.

Es imprescindible obtener valores acotados de la tensión en  $S$ , para que se cumpla la condición de continuidad interna de tracciones expresada en la Ecuación (2.79). Por esto, la metodología de discontinuidades fuertes de continuo permite evaluar un campo de tensiones acotadas con el mismo modelo constitutivo del continuo, tanto en la superficie de discontinuidad  $S$ , como fuera de ella, a pesar del carácter no acotado de las deformaciones en  $S$ .

### 2.4.3. Análisis de discontinuidad fuerte en el material compuesto

El análisis de discontinuidad fuerte establece las condiciones necesarias para mantener la consistencia entre las tensiones y las deformaciones cuando el salto de desplazamiento es diferente de cero ( $[[\dot{\mathbf{u}}]] \neq 0$ ). Bajo estas circunstancias la tasa de la deformación en la discontinuidad no está acotada, sin embargo, las tensiones del material compuesto y de sus componentes tienen sentido físico sólo si son acotadas. Esto se logra mediante la regularización de algunos parámetros y variables internas del modelo constitutivo.

En el instante de pseudo-tiempo  $t=t_{SD}$  a partir del cual se presenta una discontinuidad fuerte, la deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega \setminus S}$  y su variación respecto al tiempo  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\Omega \setminus S}$ , mantienen un valor

acotado definido por la parte regular de la Ecuación (2.70). Del modelo de daño utilizado en la matriz se obtiene una tensión  $\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}^m(\boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega \setminus S}, \alpha^m)$  acotada a partir de la deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega \setminus S}$ , asimismo, en los modelos de plasticidad unidimensional utilizados en las demás constituyentes del material compuesto, se puede encontrar una tensión acotada en función de una de las componentes del tensor de deformación. La tensión normal en las fibras orientadas en la dirección  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{s}$ ,  $\sigma_{rr(\Omega \setminus S)}^{fr}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega \setminus S} \cdot \mathbf{r}, \alpha^{fr})$  y  $\sigma_{ss(\Omega \setminus S)}^{fs}(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega \setminus S} \cdot \mathbf{s}, \alpha^{fs})$  respectivamente, son acotadas, al igual que la tensión tangencial  $\tau_{rs(\Omega \setminus S)}^f(2\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega \setminus S} \cdot \mathbf{s}, \alpha^{fs})$  producida en la fibra por el efecto pasador. Además se puede indicar que las tasas de tensiones  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{(\Omega \setminus S)}^m, \dot{\sigma}_{rr(\Omega \setminus S)}^{fr}, \dot{\sigma}_{ss(\Omega \setminus S)}^{fs}, \dot{\tau}_{rs(\Omega \setminus S)}^f$ , también son cantidades acotadas.

Dado que la suma entre valores acotados es igual a otro valor acotado, la tasa de tensiones en el compuesto  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S}$  definida en la Ecuación (2.80), será también un valor acotado, al igual que la tasa del vector de tracción  $\dot{\mathbf{t}}_{\Omega \setminus S} = (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} \cdot \mathbf{n})$ .

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} = & k^m \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S}^m + k^{fr} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \dot{\sigma}_{rr(\Omega \setminus S)}^{fr} + k^{fs} (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \dot{\sigma}_{ss(\Omega \setminus S)}^{fs} + \\ & + 2(k^{fr} + k^{fs}) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})^s \dot{\tau}_{rs(\Omega \setminus S)}^f \end{aligned} \quad (2.80)$$

De acuerdo con la hipótesis básica de continuidad interna de la tasa de tracciones en la discontinuidad  $S$ , descrita por la Ecuación (2.79), la tasa del vector de tracción del material compuesto en la discontinuidad  $S$ ,  $\dot{\mathbf{t}}_S = (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_S \cdot \mathbf{n})$ , mantiene un valor acotado, al igual que la tasa de tensiones  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_S$ . Dicha tasa de tensiones está definida de acuerdo con la teoría de mezclas de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S = & k^m \underbrace{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_S^m}_{\text{acotado}} + k^{fr} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \underbrace{\dot{\sigma}_{rr(S)}^{fr}}_{\text{acotado}} + k^{fs} (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \underbrace{\dot{\sigma}_{ss(S)}^{fs}}_{\text{acotado}} + \\ & + 2(k^{fr} + k^{fs}) (\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})^s \underbrace{\dot{\tau}_{rs(S)}^f}_{\text{acotado}} \end{aligned} \quad (2.81)$$

recordando que  $k^m, k^{fr}, k^{fs}, \mathbf{r}$  y  $\mathbf{s}$  son parámetros acotados.

Dado que un valor acotado se puede expresar como la suma de varios valores acotados, la tasa de tensiones de cada uno de los componentes en  $S$  es también un valor acotado.

**Observación 2.11** *Una conclusión importante del análisis de discontinuidad fuerte establece que la tasa de tensiones en  $S$  de los componentes y en consecuencia del compuesto, son valores acotados a pesar que la tasa de deformaciones  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_S$  no lo sea.*

De acuerdo a lo anterior, en el modelo constitutivo continuo de cada componente, una tasa de deformación no acotada genera una tasa de tensión acotada. Esto se consi-

que a través de la regularización de algunos parámetros y variables internas, como se describe a continuación.

### 2.4.3.1. Regularización del modelo constitutivo de la matriz

La regularización del modelo de la matriz se establece a partir del análisis de discontinuidad fuerte para modelos de daño presentado en (Oliver 2000; Samaniego 2002; Oliver & Huespe 2004a), como se muestra en el Anexo C.4.

Una condición suficiente para regularizar el modelo consiste en redefinir el parámetro  $H^m$  del modelo constitutivo de la matriz como un parámetro de ablandamiento discreto  $\bar{H}^m$ , de la forma:

$$\frac{1}{H^m} = \delta_S \frac{1}{\bar{H}^m} \quad (2.82)$$

donde  $\delta_S$  es la función delta de Dirac en la superficie de discontinuidad definida en el Anexo F. De igual manera, la variable interna  $r_S^m$  en la superficie  $S$ , se regulariza a través de una variable interna discreta acotada  $\bar{\alpha}^m$ , así:

$$\dot{r}_S^m = \delta_S \dot{\bar{\alpha}}^m \quad (2.83)$$

Sustituyendo el resultado anterior en la Ecuación (2.4) se obtiene la ley de ablandamiento discreto, expresada como:

$$\dot{q}^m = \bar{H}^m \dot{\bar{\alpha}}^m ; \quad q_s^m = q_{s(SD)}^m + \bar{H}^m \Delta \bar{\alpha}^m \quad (2.84)$$

donde  $\Delta \bar{\alpha}^m = \bar{\alpha}^m(t_{SD}) - \bar{\alpha}^m(t)$ , siendo  $t_{SD}$  el instante de discontinuidad fuerte.

### 2.4.3.2. Regularización de los modelos constitutivos de las fibras

La regularización para los demás componentes se obtiene a través del análisis de discontinuidad fuerte aplicado a un modelo de plasticidad unidimensional según (Simó, Oliver et al. 1993), como se describe en el Anexo C.5. Los ingredientes indicados a continuación son aplicables al comportamiento axial de las fibras en  $\mathbf{r}$  y en  $\mathbf{s}$ , así como también al modelo de acción pasador, dado que estos tres efectos están definidos por un modelo del mismo tipo.

Al igual que en el modelo de daño, la variable interna, la condición de regularización del parámetro de ablandamiento y la ley de ablandamiento, para el modelo discreto de plasticidad de cada fenómeno en particular se definen como:

$$\left. \begin{aligned} \lambda^{fr} &= \dot{\alpha}_s^{fr} = \delta_s \dot{\bar{\alpha}}^{fr} \quad ; \quad \frac{1}{H^{fr}} = \delta_s \frac{1}{\bar{H}^{fr}} \\ q_s^{fr} &= q_{s(SD)}^{fr} + \bar{H}^{fr} \Delta \bar{\alpha}^{fr} \end{aligned} \right\} \text{(fibra axial en } \mathbf{r} \text{)} \quad (2.85)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda^{fs} &= \dot{\alpha}_s^{fs} = \delta_s \dot{\bar{\alpha}}^{fs} \quad ; \quad \frac{1}{H^{fs}} = \delta_s \frac{1}{\bar{H}^{fs}} \\ q_s^{fs} &= q_{s(SD)}^{fs} + \bar{H}^{fs} \Delta \bar{\alpha}^{fs} \end{aligned} \right\} \text{(fibra axial en } \mathbf{s} \text{)} \quad (2.86)$$

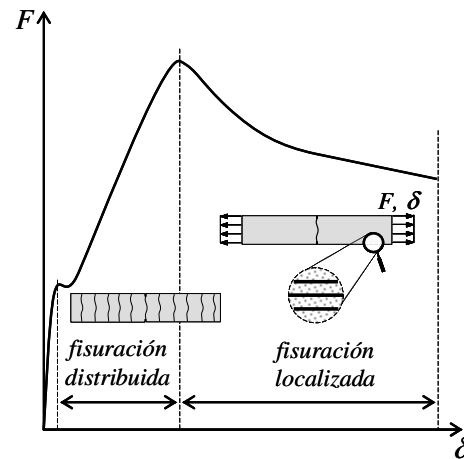
$$\left. \begin{aligned} \lambda^{f\tau} &= \dot{\alpha}_s^{f\tau} = \delta_s \dot{\bar{\alpha}}^{f\tau} \quad ; \quad \frac{1}{H^{f\tau}} = \delta_s \frac{1}{\bar{H}^{f\tau}} \\ q_s^{f\tau} &= q_{s(SD)}^{f\tau} + \bar{H}^{f\tau} \Delta \bar{\alpha}^{f\tau} \end{aligned} \right\} \text{(acción dovela } r\mathbf{s} \text{)} \quad (2.87)$$

**Cuadro 2.9.** Ecuaciones de regularización de los modelos constitutivos de las fibras.

donde los superíndices  $fr$ ,  $fs$  y  $f\tau$ , indican los parámetros asociados a los modelos de fibra axial en  $\mathbf{r}$ , fibra axial en  $\mathbf{s}$  y acción pasador, respectivamente.

## 2.5. Análisis de bifurcación en el material compuesto

En los ensayos donde el refuerzo está repartido uniformemente en toda la probeta, se distinguen las siguientes dos etapas posteriores al régimen elástico del hormigón. Una primera etapa de fisuración distribuida bastante prolongada en virtud de la capacidad del acero y de la adherencia hormigón - acero, en la cual se presentan muchas fisuras de poca apertura y de separación constante. Y una segunda fase de fallo discontinuo o localizado, presente cuando la apertura de pocas fisuras se impone sobre las demás y decae la capacidad estructural (Figura 2.13). En el contexto de la mecánica del continuo, el análisis de bifurcación material permite determinar el comienzo y la dirección de las fisuras en la etapa de fallo localizado.



**Figura 2.13.** Esquema de la respuesta estructural de una probeta de material compuesto tipo hormigón armado sometida a tracción.

### 2.5.1. Criterio de bifurcación

En materiales compuestos donde las fibras embebidas en la matriz se distribuyen uniformemente, se puede considerar que la dirección y el instante de bifurcación estarán determinados por las propiedades mecánicas de todos los constituyentes.

**Hipótesis 2.3.** *En un punto material, el campo de velocidades, la tasa de deformaciones y la tasa de tensiones (obtenida de la relación constitutiva tangente mostrada en la Ecuación (2.66)), están definidos en la escala del compuesto. Esto permite suponer que el análisis de bifurcación discontinua utilizado en materiales homogéneos (Rice 1976; Runesson, Ottosen et al. 1991) es aplicable al material compuesto tipo hormigón armado que aquí se presenta.*

Considerando el tensor constitutivo tangente del compuesto en  $\Omega_+$  igual que en  $\Omega_-$ , y sustituyendo la ecuación constitutiva del compuesto (Ecuación (2.66)), en la condición de continuidad de tracciones (Ecuación (2.78)), se obtiene:

$$[[\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}]] = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{tg} : [[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = \mathbf{0} \quad (2.88)$$

reemplazando la Expresión (2.71) del salto de la tasa de deformación,

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{tg} \cdot \mathbf{n}) \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] = \mathbf{0} \quad (2.89)$$

Se define al *tensor de localización del material compuesto*, como:



$$\mathbf{Q}_{tg}(t, \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{tg} \cdot \mathbf{n} \quad (2.90)$$

El criterio clásico de bifurcación establecido por (Hill 1962) se escribe de la forma:

$$\mathbf{Q}_{tg}(t, \mathbf{n}) \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] = \mathbf{0} \quad \forall t \quad (2.91)$$

De acuerdo con la cinemática descrita anteriormente, un salto en el campo de las velocidades diferente de cero,  $[[\dot{\mathbf{u}}]] \neq \mathbf{0}$ , es una condición suficiente para la existencia de un modo de discontinuidad fuerte y por tanto, para cumplir la Ecuación (2.91), el tensor de localización debe ser nulo en el instante  $t_B$  y en la dirección  $\mathbf{n}$ , de tal forma que:

$$\mathbf{Q}_{tg}(t_B, \mathbf{n}) = \mathbf{0} \rightarrow \det[\mathbf{Q}_{tg}(t_B, \mathbf{n})] = 0 \quad (2.92)$$

Sustituyendo la Ecuación (2.67) en la Ecuación (2.90) se puede expresar el tensor de localización del material compuesto como:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{tg} = & k^m \mathbf{Q}_{tg}^m + k^{fr} E_{tg}^{dr} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})^2 (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) + \\ & + k^{fs} E_{tg}^{ds} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{s})^2 (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) + \\ & + 4(k^{fr} + k^{fs}) G_{tg}^f [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})^s \otimes (\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})^s \cdot \mathbf{n}] \end{aligned} \quad (2.93)$$

Donde  $\mathbf{Q}_{tg}^m = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{tg}^m \cdot \mathbf{n}$  es el tensor de localización de la matriz para un modelo de daño isótropo de tracción y compresión diferenciada, obtenido a partir de la Ecuación (2.11) de la forma:

$$\mathbf{Q}_{tg}^m = \frac{q^m}{r^m} \mathbf{Q}^m - \left( \frac{q^m - H^m r}{(r^m)^3} \right) \left( \frac{(r^m)^2}{\phi} (\bar{\mathbf{t}}^m \otimes \bar{\mathbf{t}}^A) + \phi^2 (\bar{\mathbf{t}}^m \otimes \bar{\mathbf{t}}^m) \right) \quad (2.94)$$

siendo  $\bar{\mathbf{t}}^m = \mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}^m$  y  $\bar{\mathbf{t}}^A = \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$ . El *tensor de localización elástico o tensor acústico* de la matriz, definido como  $\mathbf{Q}^m = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^m \cdot \mathbf{n}$  (Hill 1962), se expresa como:

$$\mathbf{Q}^m = \frac{E^m}{1 - (\nu^m)^2} \left[ \left( \frac{1 + \nu^m}{2} \right) (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \left( \frac{1 - \nu^m}{2} \right) \mathbf{1} \right] \quad (\text{tensión plana}) \quad (2.95)$$

$$\mathbf{Q}^m = \frac{E^m}{(1 + \nu^m)(1 - \nu^m)} \left[ \left( \frac{1}{2} \right) (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \left( \frac{1 - 2\nu^m}{2} \right) \mathbf{1} \right] \quad (\text{deformación plana}) \quad (2.96)$$

El escalar  $\phi$  y el tensor  $\mathbf{A}$  indicados en la ecuación anterior están definidos por el modelo de daño para problemas bidimensionales, descrito en el Anexo A.1.

## 2.5.2. Estrategia de cálculo

El instante de localización y la dirección de la discontinuidad se calculan mediante un proceso de búsqueda (en cada instante de pseudo-tiempo), de los valores mínimos del determinante de  $[\mathbf{Q}_{tg}]$  con respecto a  $\mathbf{n}$ . Este procedimiento puede ser muy costoso en problemas tridimensionales, sin embargo, en el caso bidimensional el coste es mucho menor, primero, porque el determinante a calcular es de orden dos y segundo, porque el vector  $\mathbf{n}$  se puede definir a partir del ángulo  $\theta_n$ .

Como convención se toma  $\theta_n$  como el ángulo conformado entre la dirección principal  $l$  en deformaciones y el vector  $\mathbf{n}$ . Esta notación asegura que los valores mínimos del  $\det[\mathbf{Q}_{tg}]$  se presentan entre  $\theta_n=-90^\circ$  y  $\theta_n=+90^\circ$ , lo cual es importante en el procedimiento numérico.

**Observación 2.12** *La anisotropía del compuesto producida por la orientación de las fibras implica que las direcciones principales sean diferentes en deformación y en tensión.*

Para cada instante  $t$  se buscan los valores mínimos de  $\det(\mathbf{Q}_{tg}(t, \theta_n))$  en función del ángulo  $\theta_n$ . Cuando el  $\det(\mathbf{Q}_{tg}(t_B, \theta_{loc})) = 0$  los valores de  $t$  y  $\theta_n$  corresponden al instante de bifurcación  $t_B$  y al ángulo de localización  $\theta_{loc}$ . Desde la Figura 2.14 hasta la Figura 2.17, se representa gráficamente este procedimiento mediante la curva entre  $(\det(\mathbf{Q}_{tg})/\det(\mathbf{Q}^m))$  y el ángulo  $\theta_n$ , siendo  $\mathbf{Q}^m$  el tensor de localización elástico de la matriz. Cada mínimo relativo en esta curva se denomina *indicador de bifurcación* y está definido como:

$$\zeta_i = \min[\det(\mathbf{Q}_{tg}(t, \theta_i))/\det(\mathbf{Q}^m(t, \theta_i))] \quad i \in \{1,2\} \quad (2.97)$$

## 2.5.3. Ejemplos en un punto material

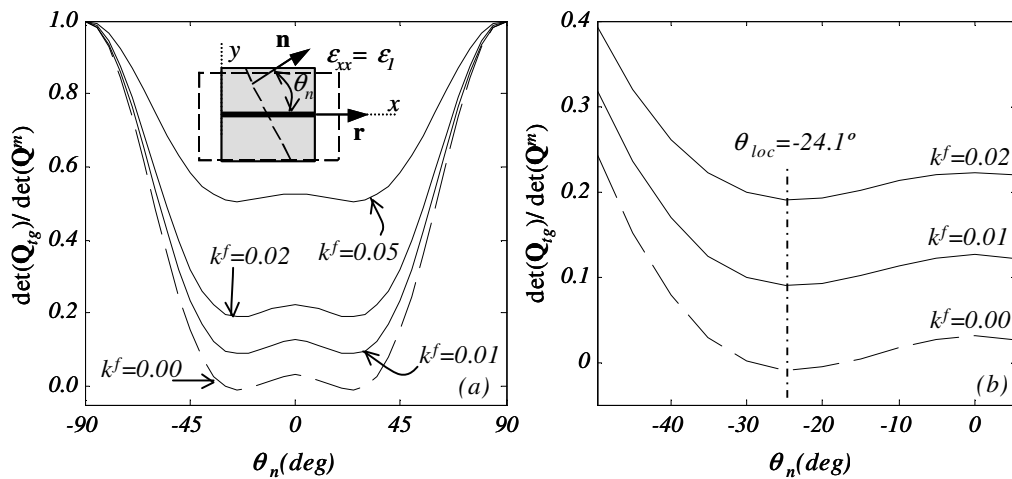
Se analiza un punto de material compuesto tipo hormigón armado para el estado de carga que produciría bifurcación en un material homogéneo tipo hormigón en masa. Se considera un estado tensional en el cual ocurre una deformación axial  $\varepsilon_{xx}$ , siendo  $\varepsilon_{yy} = \gamma_{xy} = 0$ . Las propiedades del hormigón son:  $E^m=20.0\text{GPa}$ ,  $\nu^m=0.2$ ,  $G^f=100.\text{N/m}$ ,  $\sigma_u^m=2.00\text{Mpa}$ , y el módulo elástico del acero es  $E^{fr}=200.0\text{GPa}$ . Los coeficientes de participación de las fibras  $k^{fr}$  y  $k^{fs}$ , y sus direcciones  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{s}$ , cambian de acuerdo al ejemplo, pero las propiedades de cada material y el estado tensional indicado anteriormente es común (excepto en el Apartado 2.5.3.4). En los Apartados 2.5.3.1 a 2.4.3.2, se estudia primero la influencia de la cantidad del refuerzo, después la influencia de la dirección de la fibra y finalmente la intervención de dos grupos de

fibras perpendiculares entre sí. En el Apartado 2.5.3.4 se realiza el análisis de bifurcación en un punto material con fibras en dos direcciones sometido a cortante.

### 2.5.3.1. Influencia de la cantidad de refuerzo en la localización del compuesto

En el análisis de bifurcación del hormigón en masa representado por la línea a trazos en la Figura 2.14, los indicadores de bifurcación  $\zeta_1^m, \zeta_2^m$  son aproximadamente iguales a cero y establecen el instante de bifurcación del material homogéneo  $t_B^m$ .

Para el paso de carga dado en el instante  $t_B^m$ , se comparan tres materiales compuestos constituidos por una matriz y un grupo de fibras con diferentes cuantías, orientadas en la dirección de la tracción ( $\mathbf{r} = [1, 0]^T$ ). Se observa en la Figura 2.14(a) que el aumento en la cantidad de refuerzo incrementa los indicadores  $\zeta_1, \zeta_2$  y retrasa el instante de bifurcación del compuesto  $t_B$ , sin embargo se conserva la dirección de localización, como se muestra en la Figura 2.14(b).



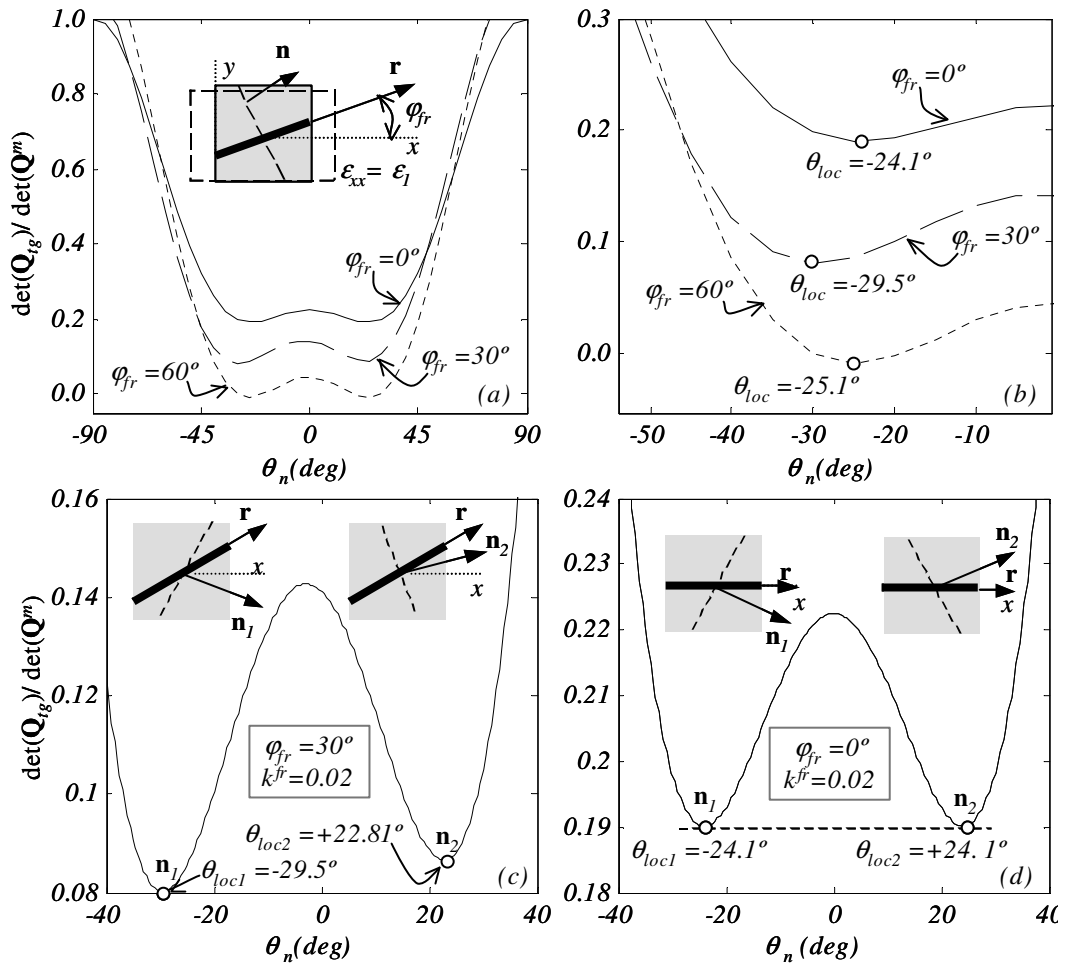
**Figura 2.14.** Análisis de bifurcación en el material compuesto. Influencia de la cantidad de refuerzo. Relación  $\det[\mathbf{Q}_{ig}]/\det[\mathbf{Q}^m]$  versus dirección de la discontinuidad  $\theta_n$  en un estado tensional de tracción axial. Propiedades del hormigón:  $E^m = 20.0$  GPa,  $\nu = 0.2$ ,  $G^f = 100$  N/m,  $\sigma_u = 2.00$  MPa,  $\sigma_{u(c)} = 20.00$  MPa y del acero:  $E^f = 200.0$  GPa,  $\varphi_r = 0^\circ$ : (a) gráfica completa, (b) acercamiento en uno de los mínimos del  $\det[\mathbf{Q}_{ig}]$ .

### 2.5.3.2. Influencia de la dirección de un grupo de fibras en la localización del compuesto

Se presenta en la Figura 2.15(a) y (b), la comparación entre tres materiales, cada uno reforzado en una dirección distinta con un grupo de fibras paralelas que representan el 2% del volumen del compuesto. Los resultados muestran el indicador de bifurcación y la dirección de localización en función de la orientación de la fibra.

Como lo demuestra el segundo término de la Ecuación (2.93), influye tanto la relación entre  $\mathbf{r}$  y la dirección de la tracción  $x$ , como la relación entre  $\mathbf{r}$  y la normal de la discontinuidad  $\mathbf{n}$ .

En un material reforzado con fibras inclinadas  $30^\circ$  con respecto a  $x$  (Figura 2.15(c)), los dos indicadores de bifurcación son diferentes, lo cual establece una sola dirección de localización en el instante  $t = t_B$ .

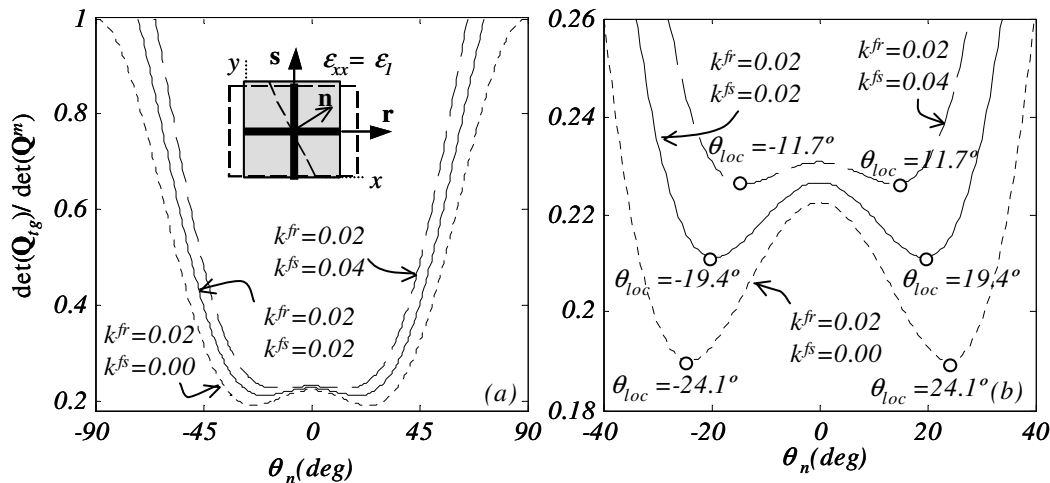


**Figura 2.15.** Análisis de bifurcación en el material compuesto. Influencia de la dirección de las fibras. Relación  $\det[\mathbf{Q}_{ig}]/\det[\mathbf{Q}^m]$  versus dirección de la discontinuidad  $\theta$  en un estado tensional de tracción axial. Propiedades del hormigón:  $E^m = 20.0$  GPa,  $\nu = 0.2$ ,  $G^f = 100$  N/m,  $\sigma_u = 2.00$  MPa, y del acero:  $E^f = 200.0$  GPa,  $k^{fr} = 0.02$ : (a) gráfica completa de la comparación entre diferentes direcciones de fibra  $\varphi_{fr}$ , (b) acercamiento de la comparación entre diferentes  $\varphi_{fr}$ , (c) comparación entre los valores mínimos de  $\det[\mathbf{Q}_{ig}]$  para  $\varphi_{fr} = 30^\circ$ , (d) comparación entre los valores mínimos de  $\det[\mathbf{Q}_{ig}]$  para  $\varphi_{fr} = 0^\circ$ .

En casos especiales en los cuales la dirección de la fibra y de las cargas mantienen la simetría del problema, se obtienen dos indicadores de bifurcación iguales tal como ocurre en un material homogéneo (Anexo C.3). Un ejemplo de ello, es el material compuesto reforzado en la dirección de la tracción ( $\mathbf{r}$  paralelo a la dirección principal 1), cuyo resultado se observa en la Figura 2.15(d).

### 2.5.3.3. Influencia de segundo grupo de fibras ortogonales

A continuación se comparan tres materiales reforzados con diferentes cuantías en dirección  $y$  ( $\mathbf{s}=[0,1]^T$ ) y con un 2% en la dirección  $x$  ( $\mathbf{r}=[1,0]^T$ ). La presencia de un segundo grupo de fibras en dirección  $y$ , retrasa el instante de bifurcación y cambia el ángulo crítico de localización (Figura 2.16), a pesar que el tensor de tensiones sólo tiene componente en  $x$ . El aporte de la segunda fibra al tensor de localización se anula cuando la normal a la discontinuidad  $\mathbf{n}$  es perpendicular a  $\mathbf{s}$ , como se puede observar en el tercer término de la Ecuación (2.93).



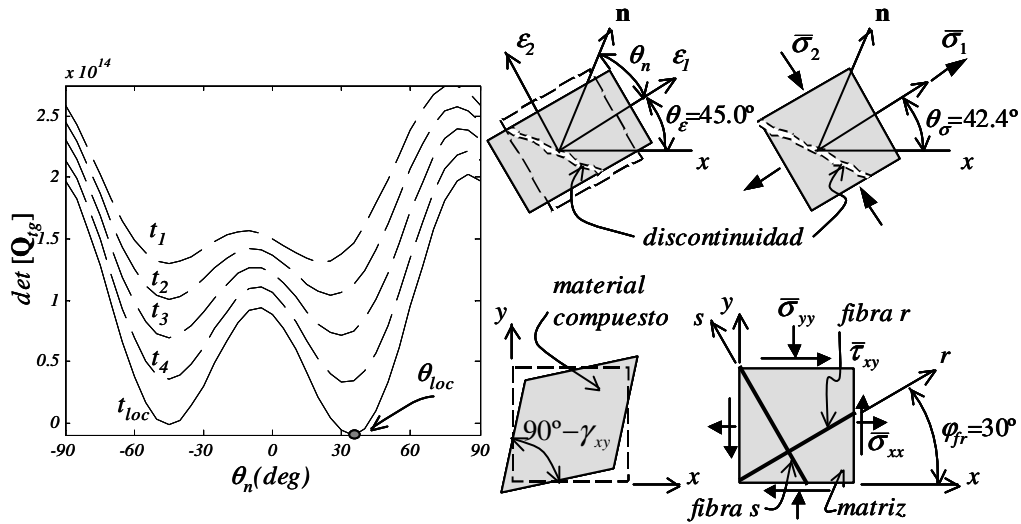
**Figura 2.16.** Análisis de bifurcación en el material compuesto. Influencia de dos grupos de fibras perpendiculares entre sí. Relación  $\det[\mathbf{Q}_{ig}]/\det[\mathbf{Q}^m]$  versus dirección de la discontinuidad  $\theta$  en un estado tensional de tracción axial. Comparación entre diferentes cantidades de refuerzo en  $s$ . Propiedades del hormigón:  $E^m=20.0$  GPa,  $\nu=0.2$ ,  $G^f=100$  N/m,  $\sigma_{ti}=2.00$  MPa, y del acero:  $E^f=200.0$  GPa,  $k^fr=0.02$ . (a) gráfica completa, (b) acercamiento.

**Observación 2.13** La condición de bifurcación depende del estado tensional, de las propiedades mecánicas de la matriz y de las fibras, como también de la cantidad y dirección de éstas últimas en el compuesto.

**2.5.3.4. Punto material con fibras en dos direcciones sometido a cortante**

A un punto de material compuesto con dos grupos de fibras orientadas con respecto a  $x$   $30^\circ$  y  $120^\circ$ , respectivamente, se le impone un desplazamiento tal que produce una deformación angular  $\gamma_{xy}$  (siendo  $\epsilon_{xx}=0$  y  $\epsilon_{yy}=0$ ), en diferentes pasos de carga ( $t_1, t_2, t_3, t_4$ ) hasta conseguir el instante de bifurcación  $t = t_B$ . La matriz de hormigón tiene módulo elástico  $E^m=20.0$  GPa, relación de Poisson  $\nu^m=0.2$ , energía de fractura  $G^f=100$  N/m, tensión última a tracción  $\sigma_u=2.0$  Mpa y a compresión  $\sigma_{u(c)}=20.0$  Mpa. Las fibras de acero tienen un módulo elástico  $E^f=200.0$  GPa, una cuantía igual en  $r$  y en  $s$  de  $k^{fr} = k^{fs} = 0.02$ .

La Figura 2.17 muestra la variación del determinante de  $[Q_{lg}]$  con respecto al ángulo  $\theta_n$ . Aquí se observan dos valores diferentes del indicador de bifurcación, incluso para niveles de deformación previos al instante de bifurcación, que traen como consecuencia un solo ángulo  $\theta_{loc}$ .



**Figura 2.17.** Análisis de bifurcación en el material compuesto.  $\det[Q_{lg}]$  para diferentes niveles de deformación angular  $\gamma_{xy}$  (siendo  $\epsilon_{xx}=0$  y  $\epsilon_{yy}=0$ ) y posibles direcciones de la discontinuidad  $\theta_n$ . Propiedades del hormigón:  $E^m= 20.0$  GPa,  $\nu = 0.2$ ,  $G^f=100$  N/m  $\sigma_u=2.00$  MPa,  $\sigma_{u(c)}=20.00$  MPa y del acero:  $E^f=200.0$  GPa,  $\phi_{fr}=30^\circ$ ,  $k^{fr}=k^{fs}=0.02$ .

## 2.6. Implementación de la formulación en el método de los elementos finitos. Elementos con discontinuidades embebidas

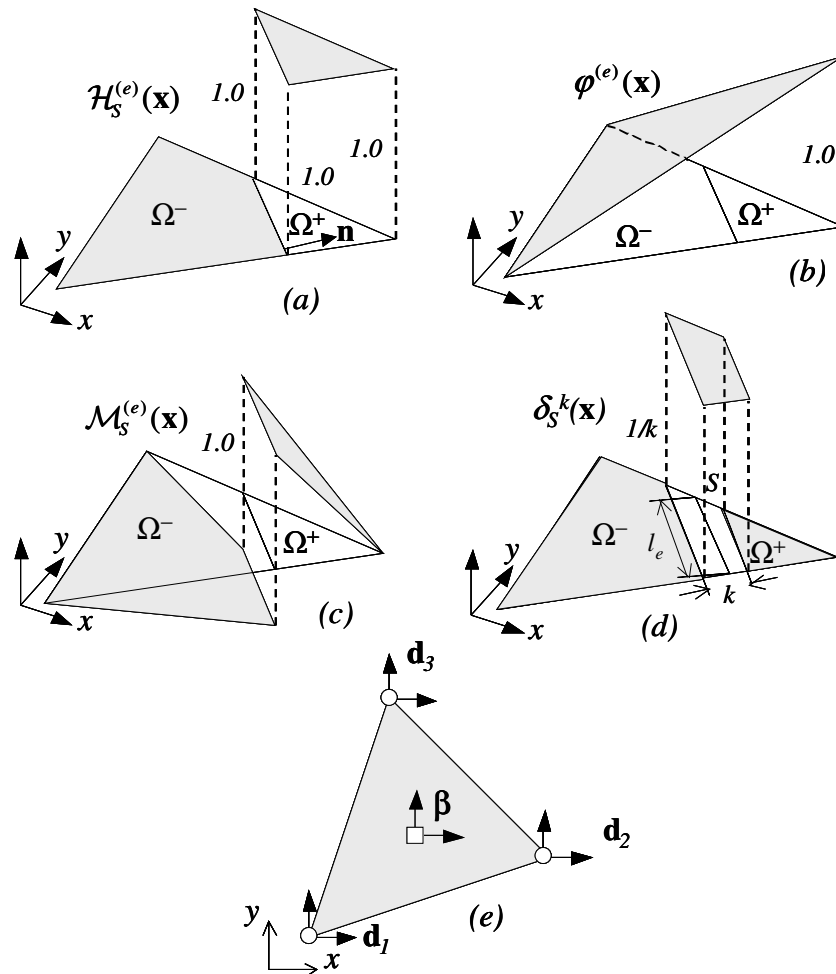
La formulación presentada en los apartados anteriores ha sido implementada en un programa de análisis bidimensional con elementos finitos, considerando no linealidad material y deformaciones infinitesimales (Cervera, Agelet et al. 2001). En general, se ha adicionado un nuevo modelo constitutivo para un material compuesto tipo hormigón armado equipado con la CSDA (Oliver, Huespe et al. 2004a; Oliver, Huespe et al. 2005a; Blanco 2006), que cuenta con las siguientes características:

- En el modelo numérico se utilizan elementos finitos que puedan capturar los saltos agregando modos enriquecidos de deformación, los cuales están controlados por grados de libertad adicionales. Estos elementos especiales capaces de incluir la discontinuidad del desplazamiento en su interior se denominan *elementos finitos con discontinuidades embebidas* (Figura 2.18) (Simó, Oliver et al. 1993). Cada elemento tiene soporte elemental de la función de enriquecimiento, permitiendo la condensación a nivel del elemento, de los grados de libertad relacionados con el salto.
- Se considera que la cinemática captura el movimiento de cuerpo rígido de las partes del elemento separadas por la línea de discontinuidad, pero al mismo tiempo, busca mantener la simetría de la matriz de rigidez, produciendo condiciones de continuidad de tracciones aproximadas. Estas consideraciones describen al *elemento simétrico cinemáticamente consistente* (Jirasek 2000).

**Observación 2.14** *En un elemento simétrico cinemáticamente consistente la matriz de rigidez pierde su simetría si el operador constitutivo tangente no es simétrico. En la formulación presentada esto ocurre cuando el tensor  $\mathbf{A}$  del modelo constitutivo de la matriz es diferente de cero (Ecuación (2.11)).*

- El uso del algoritmo de integración implícito de modelos constitutivos equipados con deformaciones por ablandamiento, permite obtener una buena solución con pasos de tiempo grandes. A pesar de esto, el mal condicionamiento de la matriz de rigidez del problema dificulta su convergencia. Por esta razón, la formulación presentada utiliza el esquema de integración *implícito-explicito* propuesto en (Oliver, Huespe et al. 2004a; Oliver, Huespe et al. 2005a), el cual garantiza el carácter positivo definido de la matriz de rigidez algorítmica del

problema, aumentando sustancialmente la robustez y estabilidad de la solución. El Anexo E describe esta forma de integrar el modelo constitutivo.

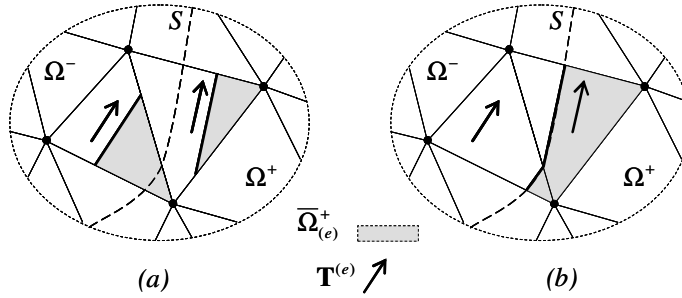


**Figura 2.18.** Implementación de la formulación en el MEF. Elemento triangular lineal con discontinuidades embebidas: (a) función de Heaviside. (b) función  $\varphi$ . (c) función elemental de salto unitario, (d) función Delta de Dirac regularizada, (e) grados de libertad (desplazamientos compatibles y saltos).

- Del análisis de bifurcación material se obtiene la dirección de la discontinuidad en un elemento finito, pero se ignora cuál es su posición dentro de él (Figura 2.19(a)). Se requiere entonces, un algoritmo que establezca el lugar geométrico de la línea de discontinuidad en el interior de cada elemento, de tal forma que asegure la continuidad entre los segmentos que conforman la trayectoria de discontinuidad del sólido (Figura 2.19(b)). La estrategia global del *trazado de las líneas de discontinuidad* descrita en (Samaniego 2002; Oliver & Huespe 2004a) y utilizada en este trabajo cumple ese objetivo, como se indica en el Anexo D.



Otros autores (Sancho, Planas et al. 2004; Sancho, Planas et al. 2005; Sancho, Planas et al. 2007) han desarrollado algoritmos locales sin necesidad de establecer la continuidad interelemental de la fisura, considerando un modelo cohesivo de fuerzas centrales y una dirección de propagación normal a la tensión principal mayor.



**Figura 2.19.** Implementación de la formulación en el MEF. Trazado de las líneas de discontinuidad: (a) posición aleatoria de la línea de discontinuidad en el interior de dos elementos finitos, (b) alineación entre las trayectorias de discontinuidad de dos elementos finitos.

### 2.6.1. Cinemática de la deformación del material compuesto

Para un elemento triangular lineal (Figura 2.18(e)), la tasa de desplazamientos de un punto  $\mathbf{x}$  en su interior, se obtiene de la discretización espacial de la Ecuación (2.68), como:

$$\dot{\mathbf{u}}^{(e)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^3 N_i^{(e)}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{d}}_i(t) + \mathcal{M}_S^{(e)}(\mathbf{x}) \dot{\boldsymbol{\beta}}^{(e)}(t) \quad (2.98)$$

donde  $N_i^{(e)}(\mathbf{x})$  es la función de forma del elemento en el nodo  $i$ ,  $\dot{\mathbf{d}}_i$  es el vector de tasa de desplazamiento compatible del nudo  $i$ ,  $\dot{\boldsymbol{\beta}}^{(e)}$  es el vector de saltos de la tasa de desplazamiento. En un espacio bidimensional  $\dot{\mathbf{d}}_i = [\dot{u}_i \quad \dot{v}_i]^T$  y  $\dot{\boldsymbol{\beta}}^{(e)} = [\dot{\beta}_x \quad \dot{\beta}_y]^T$ .

Siendo  $\zeta$  el conjunto de elementos finitos que han sido cruzados por una superficie de discontinuidad  $S$ , la función elemental discreta de salto unitario para un elemento triangular lineal  $\mathcal{M}_S^{(e)}(\mathbf{x})$  (Figura 2.18), será:

$$\mathcal{M}_S^{(e)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \forall e \notin \zeta \\ \mathcal{H}_S^{(e)}(\mathbf{x}) - \varphi^{(e)}(\mathbf{x}) & \forall e \in \zeta \end{cases} \quad (2.99)$$

donde,

$$\mathcal{H}_S^{(e)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \\ 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{cases} \quad \text{y} \quad \varphi^{(e)}(\mathbf{x}) = N_{i+}^{(e)}(\mathbf{x}) \quad (2.100)$$

$N_{i+}^{(e)}(\mathbf{x})$  es la función de forma del nudo  $i+$  perteneciente a la parte  $\Omega^+$  del elemento finito.

Derivando la Expresión (2.98) se obtiene la tasa del campo de deformaciones en un punto  $\mathbf{x}$  dentro de un elemento finito y en un instante  $t$ , así:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}}^{(e)} = \sum_{i=1}^3 (\nabla N_i^{(e)} \otimes \dot{\mathbf{d}}_i)^s - (\nabla \varphi \otimes \dot{\boldsymbol{\beta}}^{(e)})^s + \delta_S^k(\mathbf{n} \otimes \dot{\boldsymbol{\beta}}^{(e)})^s \quad (2.101)$$

Por propósitos computacionales es necesario regularizar la función delta de Dirac  $\delta_S^k$  en términos del parámetro  $k$  de la forma:

$$\delta_S^k(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow 0} \left( \mu_S(\mathbf{x}) \frac{1}{k} \right); \quad \mu_S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in S^k \\ 0 & \mathbf{x} \notin S^k \end{cases} \quad (2.102)$$

donde  $S^k$  es una banda de espesor de espesor  $k$  alrededor de  $S$ . La Figura 2.18(d) ilustra esta función para un elemento triangular lineal.

**Observación 2.15** *Los tensores de segundo orden como la tensión y la deformación se representan en notación de Voigt en dos dimensiones mediante un vector de la forma  $\{\bullet\} = [(\bullet)_{xx}, (\bullet)_{yy}, (\bullet)_{xy}]^T$ . Sin embargo, el tensor de localización de la Ecuación (2.93) se transforma en una matriz cuadrada.*

En forma matricial y en el contexto del método de los elementos finitos (Hughes 2000), la tasa de deformaciones en dos dimensiones se expresa como:

$$\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = [\mathbf{B}^{(e)}] \{\dot{\mathbf{d}}^{(e)}\} + [\mathbf{G}^{(e)}] \{\dot{\boldsymbol{\beta}}^{(e)}\} \quad \text{o} \quad \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = [\mathbf{B}^{(e)}, \mathbf{G}^{(e)}] \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{d}}^{(e)} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \text{donde} \quad (2.103)$$

$$\dot{\mathbf{d}}^{(e)} = [\dot{\mathbf{d}}_1, \dot{\mathbf{d}}_2, \dot{\mathbf{d}}_3]^T \quad \dot{\mathbf{d}}_i = [\dot{u}_i, \dot{v}_i]^T \quad \dot{\boldsymbol{\beta}}^{(e)} = [\dot{\beta}_x, \dot{\beta}_y]^T \quad \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = [\dot{\varepsilon}_{xx}, \dot{\varepsilon}_{yy}, \dot{\gamma}_{xy}]^T$$

Comparando la Ecuación (2.101) que define la deformación de forma tensorial, con la Ecuación matricial (2.103), se obtienen las matrices características del elemento finito  $\mathbf{B}^{(e)}$  y  $\mathbf{G}^{(e)}$ , así:

$$[\mathbf{B}_i] = \begin{bmatrix} \partial_x N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & \partial_y N_i^{(e)} \\ \partial_y N_i^{(e)} & \partial_x N_i^{(e)} \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{B}^{(e)}] = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3] \quad (2.104)$$

$$[\mathbf{G}^{(e)}] = \begin{bmatrix} (\delta_S^k n_x - \partial_x \varphi^{(e)}) & 0 \\ 0 & (\delta_S^k n_y - \partial_x \varphi^{(e)}) \\ (\delta_S^k n_y - \partial_y \varphi^{(e)}) & (\delta_S^k n_x - \partial_x \varphi^{(e)}) \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

## 2.6.2. Condiciones de equilibrio del material compuesto

Las ecuaciones de equilibrio se pueden expresar en forma débil mediante una formulación variacional que asegure la simetría de la matriz de rigidez indicada a continuación (Samaniego 2002; Oliver, Huespe et al. 2003). Sea un campo de variaciones admisibles de la deformación del tipo:

$$\boldsymbol{\gamma} = \underbrace{\nabla^s \bar{\boldsymbol{\eta}}}_{\text{parte compatible}} + \underbrace{\nabla^s \boldsymbol{\eta}'}_{\text{parte mejorada}} \quad ; \quad \bar{\boldsymbol{\eta}} \in \mathcal{V}_u \quad ; \quad \boldsymbol{\eta}' \in \mathcal{V}'_u \quad (2.106)$$

donde  $\bar{\mathcal{V}}_u, \bar{\mathcal{V}}_\varepsilon$  son los espacios funcionales para los desplazamientos regulares admisibles  $\bar{\boldsymbol{\eta}}$ , y los desplazamientos discontinuos  $\boldsymbol{\eta}' = \mathcal{M}_S \tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ , respectivamente. Se cumple que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega/S} \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \bar{\boldsymbol{\eta}} d\Omega - G_{ext}(\bar{\boldsymbol{\eta}}) &= 0 \quad \forall \bar{\boldsymbol{\eta}} \in \bar{\mathcal{V}}_u \\ G_{ext}(\bar{\boldsymbol{\eta}}) &= \int_{\Omega} \dot{\mathbf{b}} \cdot \bar{\boldsymbol{\eta}} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \dot{\mathbf{t}}^* \cdot \bar{\boldsymbol{\eta}} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \boldsymbol{\eta}' d\Omega - G_{ext}(\boldsymbol{\eta}') &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}' \in \bar{\mathcal{V}}'_u \\ G_{ext}(\boldsymbol{\eta}') &\approx 0 \end{aligned} \quad (2.108)$$

Se puede demostrar que el formato variacional expresado en las ecuaciones anteriores es equivalente a una formulación variacional *estáticamente consistente* (Samaniego 2002). El gradiente de la tasa de desplazamiento admisible es igual a:

$$\{\nabla^s \boldsymbol{\eta}\} = [\mathbf{B}^{(e)}] \{\bar{\boldsymbol{\eta}}\} + [\mathbf{G}^{(e)}] \{\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\} \quad (2.109)$$

Por lo tanto, la expresión incremental de fuerzas residuales en un elemento finito es de la forma:

$$\int_{\Omega^e} [\mathbf{B}^{(e)}]^T \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\} d\Omega - \{\dot{F}_{ext}^{(e)}\} = \{\dot{R}^{(e)}\} \quad (2.110)$$

$$\int_{\Omega} [\mathbf{G}^{(e)}]^T \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\} d\Omega = \{\dot{r}^{(e)}\} \quad (2.111)$$

El vector incremental de fuerzas externas en el elemento es  $\{\dot{F}_{ext}^{(e)}\}$ , y el vector de la tasa de tensión del material compuesto en dos dimensiones es:

$$\{\dot{\sigma}\} = [\dot{\sigma}_{xx} \quad \dot{\sigma}_{yy} \quad \dot{\sigma}_{xy}]^T \quad (2.112)$$

### 2.6.3. Matriz de rigidez del elemento finito

La ecuación constitutiva tangente del material compuesto indicada en la expresión (2.66) se puede escribir en notación matricial como:

$$\{\dot{\sigma}\} = [C_{tg}] \{\dot{\varepsilon}\} \quad (2.113)$$

donde  $[C_{tg}]$  es el operador constitutivo tangente del material compuesto en notación de Voigt en el caso bidimensional.

Sustituyendo la Ecuación (2.113) en las Expresiones (2.110) y (2.111) se puede obtener la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} K_{dd}^{(e)} & K_{d\beta}^{(e)} \\ K_{\beta d}^{(e)} & K_{\beta\beta}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}}^{(e)} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}^{(e)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{F}_{ext}^{(e)} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{R}}^{(e)} \\ \dot{\mathbf{r}}^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (2.114)$$

donde,

$$\begin{aligned} K_{dd}^{(e)} &= \int_{\Omega^e} [\mathbf{B}^{(e)}]^T [C_{tg}] [\mathbf{B}^{(e)}] d\Omega \\ K_{d\beta}^{(e)} &= \int_{\Omega^e} [\mathbf{B}^{(e)}]^T [C_{tg}] [\mathbf{G}^{(e)}] d\Omega \\ K_{\beta d}^{(e)} &= \int_{\Omega^e} [\mathbf{G}^{(e)}]^T [C_{tg}] [\mathbf{B}^{(e)}] d\Omega \\ K_{\beta\beta}^{(e)} &= \int_{\Omega^e} [\mathbf{G}^{(e)}]^T [C_{tg}] [\mathbf{G}^{(e)}] d\Omega \end{aligned} \quad (2.115)$$

**Observación 2.16** De la Ecuación (2.115) se concluye que la rigidez tangente del material compuesto  $[\mathbf{K}^{(e)}]$  se expresa mediante una matriz simétrica, siempre que la matriz constitutiva tangente  $[C_{tg}]$  también lo sea.

El enriquecimiento elemental permite incluir los grados de libertad asociados al salto de los desplazamientos en la ecuación matricial de equilibrio del elemento, como lo muestra la Expresión (2.114). Asimismo, se puede reducir el tamaño de la matriz de rigidez mediante un proceso de condensación de esos grados de libertad.

### 2.6.4. Vector de tasa de tensiones del material compuesto

La tasa de tensión de la matriz obtenida del modelo de daño es el vector indicado en la Ecuación (2.117). El tensor  $(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})\dot{\sigma}_{rr}^f$  que indica la tasa de tensión de la fibra en  $\mathbf{r}$  está representado por el vector de la Ecuación (2.118). De igual manera, los tensores  $(\mathbf{s} \otimes \mathbf{s})\dot{\sigma}_{ss}^f$  y  $2(\mathbf{r} \otimes \mathbf{s})\dot{\tau}_{rs}^f$  se representan matricialmente en las Ecuaciones (2.119) y (2.120). La tasa de tensión del compuesto indicada en la Ecuación (2.56) se puede escribir notación de Voigt como:

$$\{\dot{\sigma}\} = k^m \{\dot{\sigma}^m\} + k^{fr} \{\dot{\sigma}^{fr}\} + k^{fs} \{\dot{\sigma}^{fs}\} + (k^{fr} + k^{fs}) \{\dot{\sigma}^{fr\tau}\} \quad (2.116)$$

Los vectores de la tasa de tensión de cada componente se presentan en el Cuadro 2.10.

$\{\dot{\sigma}^m\} = [\dot{\sigma}_{xx}^m \quad \dot{\sigma}_{yy}^m \quad \dot{\sigma}_{xy}^m]^T \quad (\text{matriz}) \quad (2.117)$
$\{\dot{\sigma}^{fr}\} = [r_x^2 \quad r_y^2 \quad r_x r_y]^T \dot{\sigma}_{rr}^{fr} \quad (\text{fibra deslizante en } \mathbf{r}) \quad (2.118)$
$\{\dot{\sigma}^{fs}\} = [s_x^2 \quad s_y^2 \quad s_x s_y]^T \dot{\sigma}_{ss}^{fs} \quad (\text{fibra deslizante en } \mathbf{s}) \quad (2.119)$
$\{\dot{\sigma}^{fr\tau}\} = 2[r_x s_x \quad r_y s_y \quad \phi_{rs}]^T \dot{\tau}_{rs}^f \quad (\text{acción pasador}) \quad (2.120)$
$\phi_{rs} = 0.5(r_x s_y + r_y s_x)$

**Cuadro 2.10.** Vector de tasa de tensiones en cada componente.

### 2.6.5. Matriz del operador constitutivo tangente del material compuesto

El operador constitutivo tangente del material compuesto indicado en la Ecuación (2.66) como un tensor de cuarto orden, se representa a continuación en notación de Voigt mediante una matriz  $[C_{tg}]$ , de la forma:

$$[C_{tg}] = k^m [C_{tg}^m] + k^{fr} [C_{tg}^{dr}] + k^{fs} [C_{tg}^{ds}] + (k^{fr} + k^{fs}) [C_{tg}^{fr\tau}] \quad (2.121)$$

El operador constitutivo tangente de la matriz esta dado directamente por el modelo de daño, y en cambio la matriz constitutiva de los demás componentes en una base ortogonal  $xy$  es igual a:

$$[C_{tg}^{dr}] = E_{tg}^{dr} \begin{bmatrix} r_x^2 r_x^2 & r_x^2 r_y^2 & r_x^3 r_y \\ & r_y^2 r_y^2 & r_x r_y^3 \\ sim & & r_x^2 r_y^2 \end{bmatrix} \quad (\text{fibra deslizando en } \mathbf{r}) \quad (2.122)$$

$$[C_{tg}^{ds}] = E_{tg}^{ds} \begin{bmatrix} s_x^2 s_x^2 & s_x^2 s_y^2 & s_x^3 s_y \\ & s_y^2 s_y^2 & s_x s_y^3 \\ sim & & s_x^2 s_y^2 \end{bmatrix} \quad (\text{fibra deslizando en } \mathbf{s}) \quad (2.123)$$

$$[C_{tg}^{f\tau}] = 4G_{tg}^{f\tau} \begin{bmatrix} r_x^2 s_x^2 & r_x s_x r_y s_y & r_x s_x \phi_{rs} \\ & r_y^2 s_y^2 & r_y s_y \phi_{rs} \\ sim & & \phi_{rs}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{acción pasador}) \quad (2.124)$$

**Cuadro 2.11.** Matriz del operador constitutivo tangente en cada componente.

## 2.6.6. Matriz de localización del material compuesto

Finalmente, el tensor de localización mostrado en la Ecuación (2.93), se representa mediante una matriz cuadrada de orden dos en un espacio bidimensional, como lo indica la siguiente ecuación, de tal forma que el determinante de dicha matriz permita establecer la condición de bifurcación.

$$\mathbf{Q}_{tg} \equiv [\mathbf{Q}_{tg}] = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.125)$$

La matriz de localización del material compuesto se puede escribir como la suma ponderada de las contribuciones de los componentes, así:

$$[\mathbf{Q}_{tg}] = k^m [\mathbf{Q}_{tg}^m] + k^{fr} [\mathbf{Q}_{tg}^{dr}] + k^{fs} [\mathbf{Q}_{tg}^{ds}] + (k^{fr} + k^{fs}) [\mathbf{Q}_{tg}^{f\tau}] \quad (2.126)$$

donde,

$$[\mathbf{Q}_{tg}^{dr}] = E_{tg}^{dr} \phi_m^2 \begin{bmatrix} r_x^2 & r_x r_y \\ r_x r_y & r_y^2 \end{bmatrix} \quad (2.127)$$

$$[\mathbf{Q}_{tg}^{ds}] = E_{tg}^{ds} \phi_{sn}^2 \begin{bmatrix} s_x^2 & s_x s_y \\ s_x s_y & s_y^2 \end{bmatrix} \quad (2.128)$$

$$[\mathbf{Q}_{tg}^{f\tau}] = G_{tg}^{f\tau} \begin{bmatrix} (\phi_{sn} r_x + \phi_{rn} s_x)^2 & (\phi_{sn} r_x + \phi_{rn} s_x)(\phi_{sn} r_y + \phi_{rn} s_y) \\ (\phi_{sn} r_x + \phi_{rn} s_x)(\phi_{sn} r_y + \phi_{rn} s_y) & (\phi_{sn} r_y + \phi_{rn} s_y)^2 \end{bmatrix} \quad (2.129)$$

$$\phi_{rn} = (r_x n_x + r_y n_y) \quad , \quad \phi_{sn} = (s_x n_x + s_y n_y)$$

### 2.6.7. Algoritmo de cálculo

El procedimiento de cálculo en el modelo constitutivo del material compuesto consiste en:

- Evaluar las componentes de deformación en la base  $rs$  como lo indican las Ecuaciones (2.52) a (2.55).
- Calcular la tensión y el módulo tangente de cada modelo constituyente a partir de la componente de deformación y de las variables internas particulares.
- Evaluar el tensor de tensiones del material compuesto con la Ecuación (2.56) y el tensor constitutivo tangente con la Ecuación (2.67).
- Realizar un análisis de bifurcación del material compuesto, en el cual se busca el primer paso de carga y la dirección de la superficie de discontinuidad, cuando el determinante del tensor de localización (Ecuación (2.93)) es igual a cero.

En el diagrama de flujo presentado en la Figura 2.20, se observa que la deformación del compuesto y las variables internas de los componentes, son los parámetros de entrada, mientras que la tensión, el operador constitutivo tangente, el instante y la dirección de localización del material compuesto son las variables de salida.

El modelo de fallo material del hormigón armado presentado en este trabajo, incorpora la metodología de discontinuidades fuertes de continuo y la teoría de mezclas de materiales compuestos, principalmente a nivel del elemento finito, como lo muestra la Figura 2.21. Sin embargo, el trazado de las líneas de discontinuidad detallado en el Anexo D, está definido a nivel global.

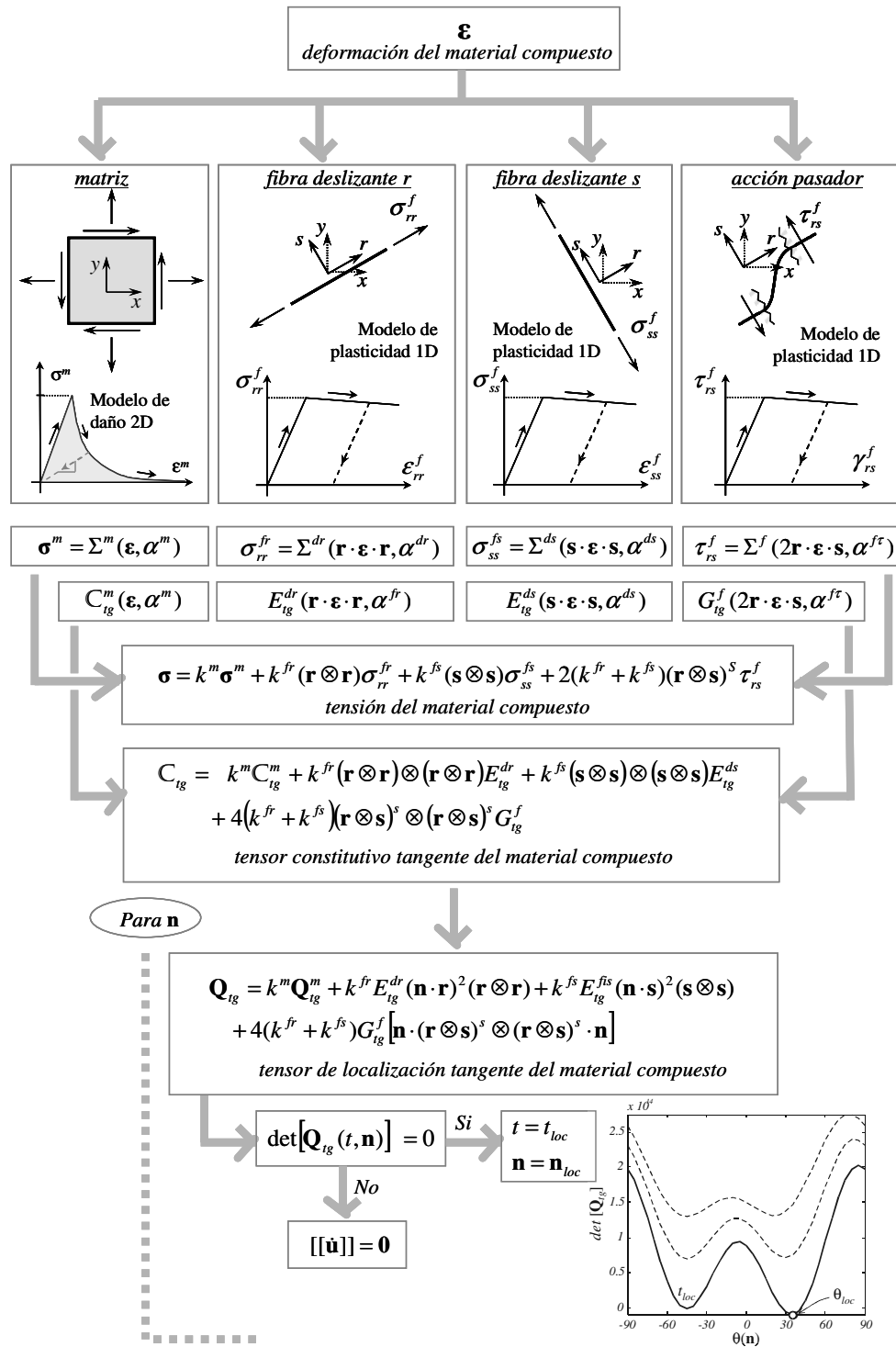


Figura 2.20. Modelo constitutivo del material compuesto. Diagrama de flujo del cálculo del tensor de tensiones, el tensor constitutivo tangente y el análisis de localización.



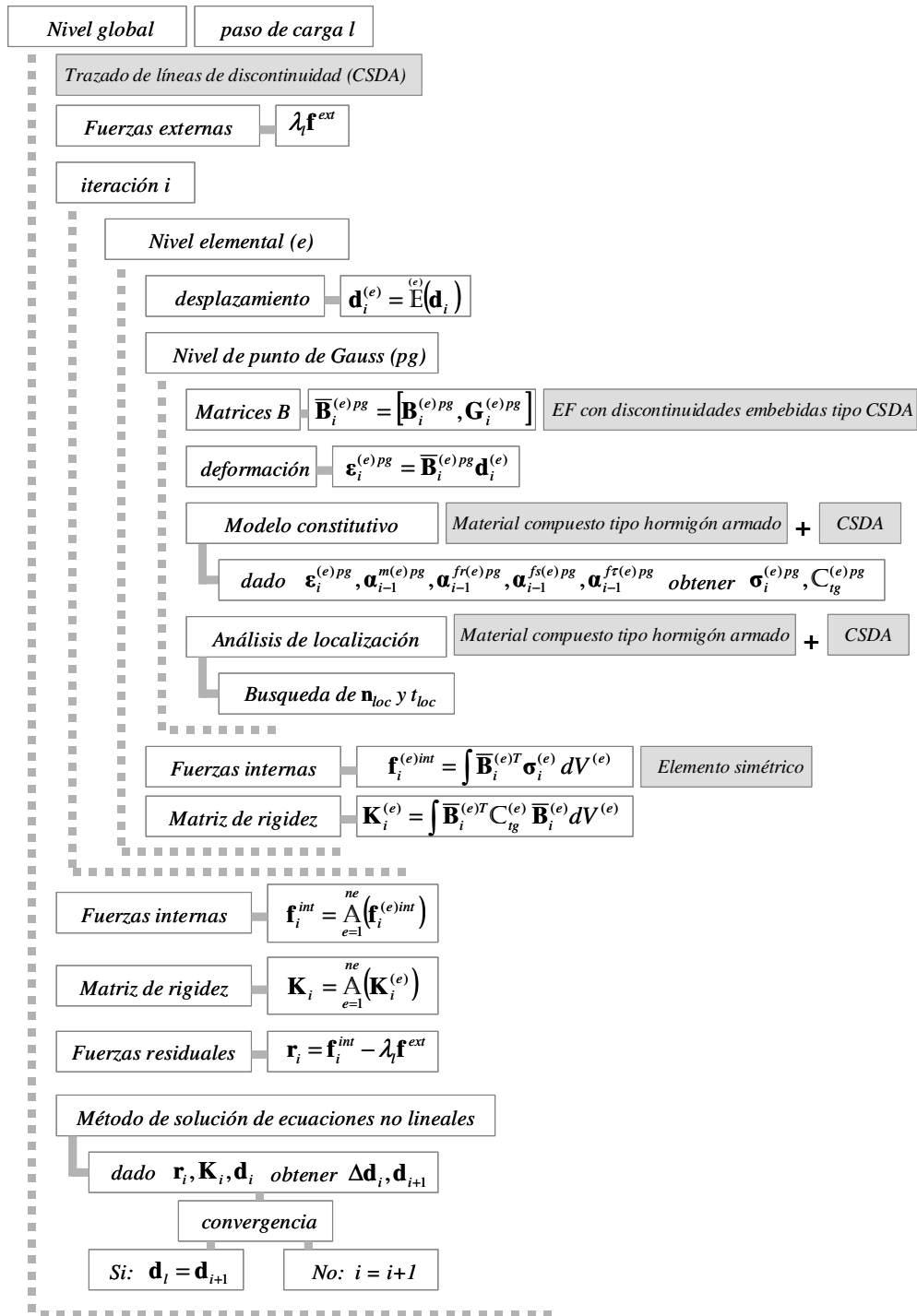


Figura 2.21. Diagrama de flujo del análisis con elementos finitos.

## 2.7. Recapitulación

A continuación se resume la formulación del modelo presentado en este capítulo, con el fin de recordar los elementos más importantes expresados en los apartados anteriores.

- La formulación presentada describe el proceso de fractura en sólidos de hormigón armado, utilizando la *metodología de discontinuidades fuertes de continuo* (CSDA) (Oliver 1996b; Oliver 1996a; Samaniego 2002; Oliver, Huespe et al. 2005a), para representar la formación y propagación de discontinuidades en el medio y la *teoría de mezclas* para definir el modelo constitutivo de material compuesto tipo hormigón armado.
- Cada punto del medio continuo obedece al comportamiento de un material compuesto conformado por una matriz de hormigón y dos paquetes de fibras largas de acero de refuerzo, perpendiculares entre sí, orientadas en las direcciones  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{s}$ , respectivamente.
- El comportamiento de la matriz de hormigón y de las fibras de acero, como también, la acción pasador y la pérdida de adherencia entre hormigón y acero, se representan mediante modelos constitutivos particulares. La matriz se representa con un modelo de daño escalar con tracción y compresión diferenciada (Oliver, Cervera et al. 1990), y los demás comportamientos se describen mediante modelos de plasticidad unidimensional (Simó & Hughes 1998).
- El campo de deformaciones está definido sobre el material compuesto como una cantidad común para la matriz y las fibras, como se muestra en las Ecuaciones (2.52) a (2.55). Al obtener las deformaciones a partir del campo de los desplazamientos se puede asegurar que este último también está determinado en la escala del compuesto. Por lo tanto, la cinemática enriquecida definida en la CSDA se aplica a un material compuesto de la misma forma que se utiliza en un material homogéneo como se muestra en las Ecuaciones (2.68) y (2.70).
- La tensión del material compuesto evaluada en la Ecuación (2.56), es el resultado de la suma ponderada de las tensiones de los componentes. Dado que el campo de tensiones de un punto material está definido en la escala del compuesto, las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de continuidad de tracciones coinciden con las presentadas para material homogéneo, como lo indican las Expresiones (2.76) a (2.79).

- La característica anterior, permite suponer que el análisis de bifurcación discontinua utilizado en materiales homogéneos es aplicable al compuesto tipo hormigón armado, evaluando el tensor de localización del material compuesto presentado en la Ecuación (2.93). De esta manera, la inestabilidad material y la dirección de la discontinuidad dependen del comportamiento y cantidad de los constituyentes del compuesto.
- En el análisis de bifurcación del material compuesto se presenta un algoritmo de búsqueda del indicador de bifurcación para problemas bidimensionales, entendido como el valor mínimo del determinante del tensor de localización del compuesto en función de la dirección de la discontinuidad.
- En la implementación de la formulación en el método de los elementos finitos se utilizan *elementos finitos con discontinuidades embebidas* (Simó, Oliver et al. 1993), los cuales cuentan con soporte elemental de la función de enriquecimiento, permitiendo la condensación a nivel del elemento, de los grados de libertad relacionados con el salto.

# Capítulo 3

## Ejemplos de simulación numérica

La validación de la formulación propuesta se realiza mediante la simulación numérica de diferentes ensayos. En este capítulo se presentan los resultados del modelado de probetas de hormigón armado sometidas a tracción, flexión y cortante. Asimismo, se compara la respuesta estructural y la distribución de fisuras calculada, con los resultados experimentales encontrados en referencias específicas.

### 3.1. Consideraciones generales

La simulación numérica de ensayos de hormigón armado desarrollada en este trabajo, presenta las siguientes características:

- En el problema se consideran deformaciones infinitesimales, estado plano de tensiones y no linealidad del material.
- El análisis numérico utiliza elementos finitos triangulares lineales con discontinuidades embebidas.
- La simulación se ejecutó hasta niveles de carga superiores a los previstos en los experimentos de referencia, debido al interés en la respuesta estructural de las probetas por encima de los límites de adherencia o, en algunos casos, de fluencia del acero de refuerzo.
- La trayectoria de las fisuras para los diferentes estados de carga se ha establecido a partir de las líneas de iso-desplazamiento. La formación de una fisura ocu-

re debido a un proceso de localización de las deformaciones, el cual se puede observar en las zonas donde hay menos separación entre líneas de iso-desplazamiento.

- En algunos ensayos el acero de refuerzo no está distribuido en todo el volumen de la pieza, ubicándose en una o varias franjas delgadas que ocupan una pequeña porción del espécimen. En estos casos se discretiza el medio con elementos finitos asociados a dos tipos de materiales. En las zonas reforzadas de la probeta se utilizan elementos de material compuesto de acuerdo con la formulación presentada en los capítulos precedentes, constituidos por los correspondientes porcentajes en volumen de matriz de hormigón y de uno o dos grupos de fibras de acero. En el resto de la pieza se usan elementos de material homogéneo tipo hormigón en masa representados por el modelo de daño con tracción y compresión diferenciada ilustrado en el Apartado 2.2.1.
- A diferencia de los modelos mesoscópicos donde se describe el problema en la escala del tamaño de la fibra, la banda de material compuesto puede tener una altura mayor al diámetro de las barras sin pérdida de aproximación de la respuesta de la estructural.
- Cuando el acero de refuerzo está distribuido uniformemente por todo el volumen del elemento estructural, es decir, la cuantía y la disposición de las barras en la pieza son constantes, todos los elementos finitos de la malla están asociados al mismo material compuesto.

El comportamiento del material compuesto tipo hormigón armado se caracteriza de la siguiente manera:

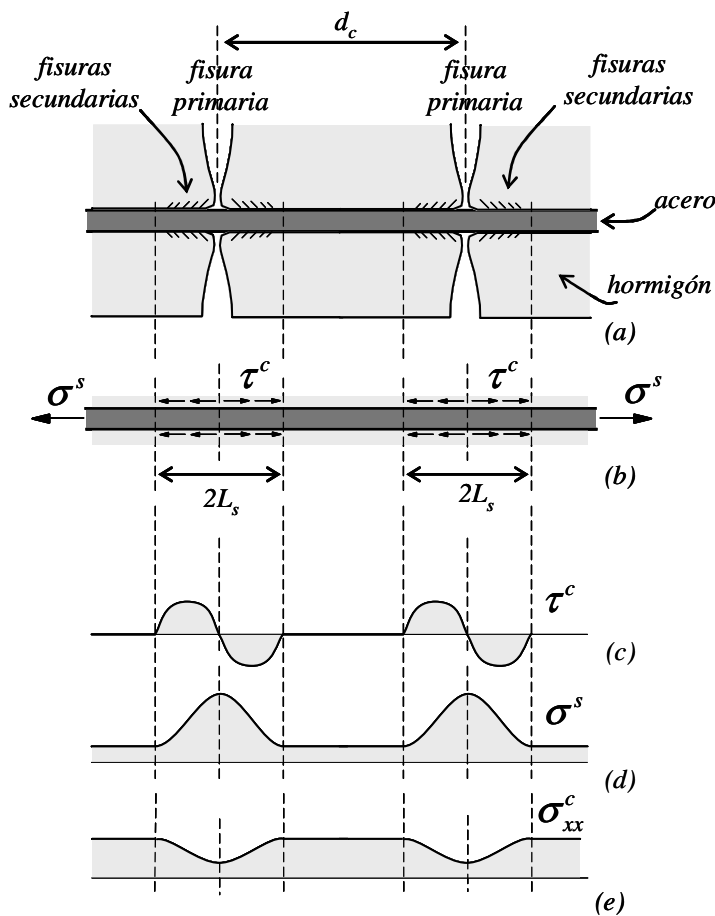
- La matriz de hormigón obedece a un modelo de daño escalar isótropo definido por el módulo de Young  $E^m$ , la relación de Poisson  $\nu^m$ , la energía de fractura  $G^f$ , la resistencia uniaxial a tracción  $\sigma_u^m$  y a compresión  $\sigma_{u(c)}^m$ .
- El paquete de fibras de acero en la dirección  $\mathbf{r}$  responden a un modelo de plasticidad unidimensional descrito por el módulo de Young  $E^{fr}$ , la tensión de fluencia  $\sigma_y^{fr}$ , y el parámetro de endurecimiento  $H^{fr}$ . La cantidad y dirección de las fibras en el compuesto se determinan mediante el coeficiente de participación  $k^{fr}$  y el ángulo formado entre el eje  $x$  y el vector  $\mathbf{r}$ , respectivamente.

- De la misma forma indicada anteriormente, el grupo de barras de refuerzo orientadas en una dirección  $\mathbf{s}$  (perpendicular a  $\mathbf{r}$ ), está definida por los parámetros mecánicos  $E^{fs}$ ,  $\sigma_y^{fs}$  y  $H^{fs}$ , así como por el coeficiente de participación  $k^{fs}$ .
- Los efectos del deslizamiento entre la fibra en  $\mathbf{r}$  y la matriz se caracterizan a partir de la curva fuerza-desplazamiento obtenida en algunos ensayos de arranque, donde se extrae una barra de diámetro  $d$  embebida en el hormigón una longitud  $L^i$ . La rigidez ( $P^i/\delta^i$ ) y la carga máxima  $P_{max}^i$  conseguida en el ensayo definen el módulo de deslizamiento  $E^{ir}$  y la tensión de pérdida de adherencia  $\sigma_{adh}^{ir}$  de un modelo unidimensional con plasticidad perfecta, como lo indica el Apartado 2.2.3. De igual manera, para las fibras en dirección  $\mathbf{s}$ , se establecen los parámetros  $E^{is}$  y  $\sigma_{adh}^{is}$ .
- En los ensayos en los cuales se impone el modo I de fallo, los efectos producidos por la capacidad a cortante de las barras en las caras de una fisura o acción pasador se consideran despreciables.
- En las simulaciones de paneles a cortante, el mecanismo por el cual se produce la acción pasador, corresponde al corte directo en las barras que atraviesan la fisura. Este fenómeno se caracteriza mediante un modelo elasto-plástico que relaciona la deformación angular y la tensión cortante equivalente en la fibra (Apartado 2.2.5), para el cual, el operador elástico es igual al módulo a cortante del acero  $G^{fr} = E^f/2(1+\nu^f)$  y la tensión cortante de fluencia corresponde a  $\tau_y^f = \sigma_y^f/\sqrt{3}$  de acuerdo con el criterio de Von Mises para un estado de corte puro. En general se considera plasticidad perfecta en este modelo, es decir,  $H^{fr} = 0$ .
- El coeficiente de participación volumétrica de las fibras se obtiene como el cociente entre el volumen de las barras de acero y el volumen total de la zona considerada de material compuesto.

## 3.2. Separación entre fisuras y longitud de la zona de deslizamiento

### 3.2.1. Definición de la zona de deslizamiento

La longitud de la zona de deslizamiento alrededor de una fisura o simplemente *longitud de deslizamiento*  $2L_s$  se define como aquella distancia en la cual se presenta un desplazamiento relativo entre el hormigón y el acero de refuerzo (Bazant & Cedolin 1980).



**Figura 3.1.** Efectos del deslizamiento hormigón-acero a los lados de fisuras primarias: (a) Esquema, (b) tensiones sobre la barra, (c) tensión cortante en el hormigón que rodea a la barra, (d) tensión axial en el acero de refuerzo, (e) tensión normal en el hormigón.

En ensayos de hormigón armado sometido a tracción se presenta una fisura importante o *fisura primaria*, que induce la formación de pequeñas fisuras alrededor de ella o

*fisuras secundarias* (Goto & Otsuka 1979). La región definida a cada lado de una fisura primaria donde se presentan fisuras secundarias se considera la zona de deslizamiento hormigón-acero, como se muestra en la Figura 3.1(a). Allí mismo también se observa la distancia entre dos fisuras primarias consecutivas  $d_c$  denominada en general *separación entre fisuras*.

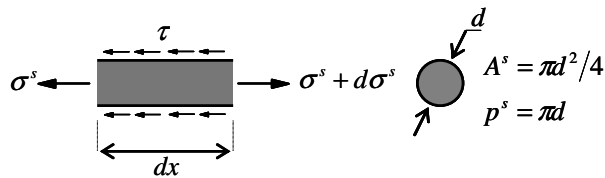
Dado que las fisuras secundarias alrededor de dos fisuras principales consecutivas se propagan sin superponerse, la separación entre ellas  $d_c$  debe ser mayor o a lo sumo igual a la longitud de la zona de deslizamiento a ambos lados de una discontinuidad  $2L_s$ , es decir,  $d_c \geq 2L_s$  (Figura 3.1(a)).

El fenómeno de deslizamiento ocasiona una tensión cortante adicional en la superficie de interfaz, debido a la fricción entre la barra y el hormigón circundante (Figura 3.1(b)), denominada *tensión cortante de adherencia*  $\tau^c$ .

Estableciendo el equilibrio de fuerzas en una porción infinitesimal de barra de refuerzo, donde se produce un deslizamiento hormigón-acero (Figura 3.2), se obtiene que,

$$\tau = \frac{A^s}{p^s} \left( \frac{d\sigma^s}{dx} \right) = \frac{d}{4} \left( \frac{d\sigma^s}{dx} \right) \quad (3.1)$$

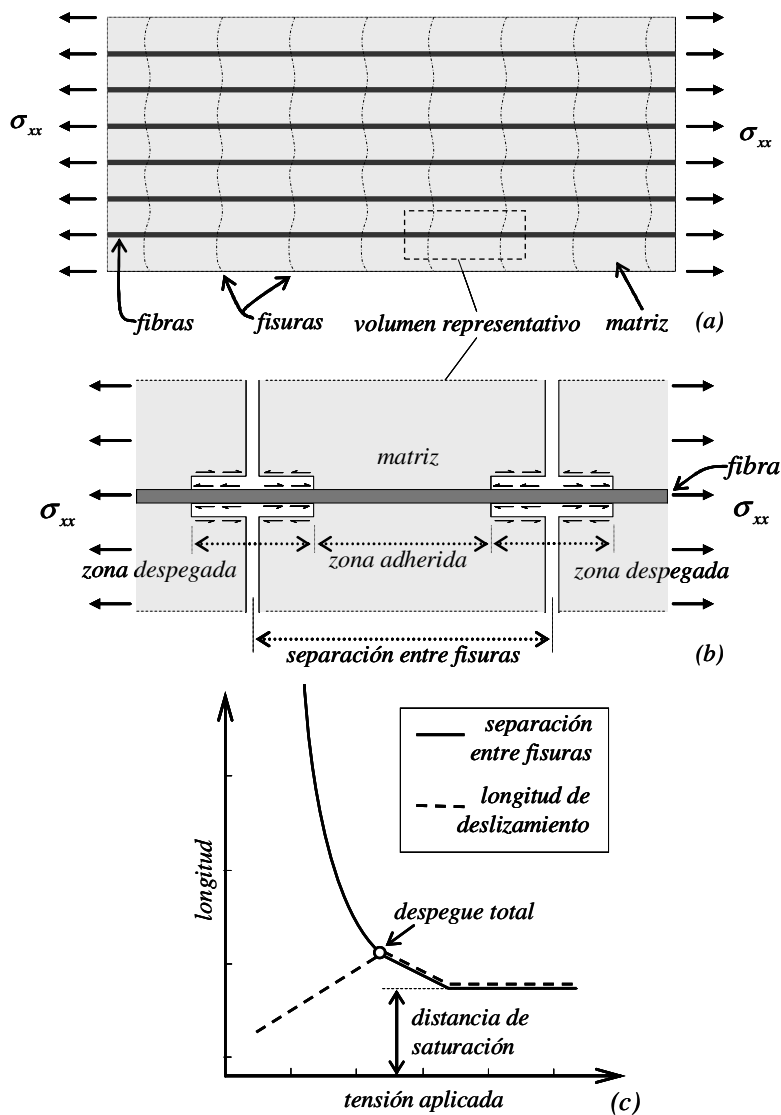
Si la única tensión transferida a la barra es debida a la fricción por deslizamiento, en la ecuación anterior,  $\tau$  corresponderá a  $\tau^c$ , que a su vez será igual a la tensión cortante en el hormigón circundante al refuerzo. En tal caso, la *tensión cortante de adherencia*  $\tau^c$  es proporcional a la variación de la tensión axial en el acero  $\sigma^s$  con respecto a  $x$ . La Figura 3.1(c)-(d) indican la tensión cortante en el hormigón vecino a la barra y la tensión axial en el acero de refuerzo. Allí se observa que  $\tau^c$  actúa en una distancia  $2L_s$  por cada fisura y que en la zona de adherencia perfecta entre ambos materiales  $\tau^c = 0$  mientras  $\sigma^s$  permanece constante.



**Figura 3.2.** Diagrama de cuerpo libre de un elemento infinitesimal de barra de refuerzo.

En una probeta de hormigón armado donde se impone un desplazamiento horizontal igual en toda la sección transversal de uno de sus extremos, manteniendo fijo el otro (Figura 3.4(a)), la tensión cortante en el hormigón es el resultado del efecto del deslizamiento del refuerzo.





**Figura 3.3.** Material compuesto sometido a tracción: (a) esquema general, (b) volumen representativo, (c) relación entre la longitud de deslizamiento fibra-matriz y la separación entre fisuras transversales en la matriz en función de la tensión aplicada, según (Liao & Reifsnider 2000).

En (Hutchinson & Jensen 1990; Okabe, Komotori et al. 1999; Liao & Reifsnider 2000; Ogasawara, Ishikawa et al. 2001), se presenta un modelo para evaluar la resistencia última de un material compuesto reforzado con fibras unidireccionales, observando la distancia entre fisuras transversales en la matriz y la longitud de la zona de deslizamiento a medida que se incrementa la carga. Ellos utilizan un modelo probabilista que representa un material compuesto fisurado sometido a tracción (Figura 3.3(a)), a través de un volumen representativo (Figura 3.3(b)), que incluye el plano de fisura de la matriz, la zona de despegue y la zona que permanece adherida. La Figura 3.3(c) muestra

la relación de ambas distancias versus la tensión aplicada para un problema unidimensional. Aquí se observa, un nivel de carga en el cual se produce el despeque total entre fibra y matriz cuando la separación entre fisuras es igual a la longitud de deslizamiento. Para cargas mayores ambas longitudes permanecen constantes e iguales a la *distancia de saturación de fisuras*, debido a la imposibilidad de transferencia de tensiones entre matriz y fibras.

### 3.2.2. Panel heterogéneo con refuerzo elástico en el centro

A continuación se describen los resultados de la simulación numérica de una probeta de hormigón armado sometida a tracción, que tiene una longitud de  $L=500\text{mm}$  y una sección transversal cuadrada de  $h=50\text{mm}$  de lado, como lo muestra la Figura 3.4(a). El desplazamiento impuesto en el extremo libre  $\delta$  está asociado a la fuerza  $F$  que corresponde a la sumatoria de todas las fuerzas presentes en los puntos de ese mismo extremo. El refuerzo consiste en una barra de acero de  $d=10\text{mm}$  de diámetro situada en el centro de la pieza. La entalla, ubicada en el extremo derecho de la probeta, tiene como finalidad inducir la aparición de la primera fisura en un lugar específico, dado el estado homogéneo inicial del campo de las deformaciones.

Las propiedades mecánicas del hormigón se resumen en el siguiente cuadro:

<i>Hormigón</i>	
módulo de Young: $E^m = 27.35 \text{ GPa}$	energía de fractura: $G_f = 100\text{N/m}$
relación de Poisson: $\nu^m = 0.2$	resistencia a tracción: $\sigma_u^m = 3.19\text{MPa}$
<i>Acero</i>	
módulo de Young: $E^f = 191.58 \text{ GPa}$	

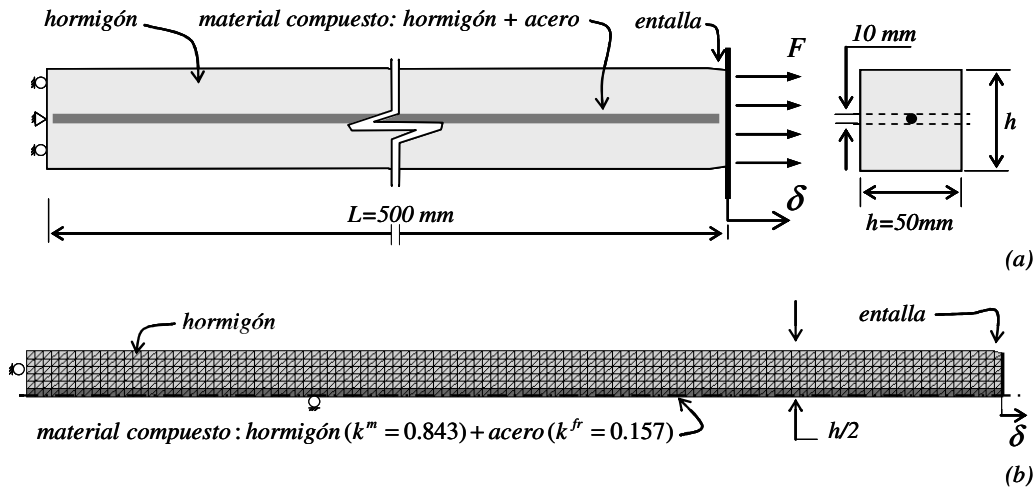
**Cuadro 3.1.** Propiedades mecánicas de los materiales componentes.

La longitud de la probeta y el nivel de carga aplicado, elegidos para este ejemplo, permiten distinguir tanto separación entre fisuras, como la longitud de deslizamiento.

La zona de deslizamiento alrededor de cada fisura está determinada por la distribución de la tensión cortante de adherencia en la interfaz hormigón-acero. Al imponer un desplazamiento común del hormigón y del acero en los extremos de la probeta, se asegura que la tensión cortante de adherencia corresponda a la tensión cortante del hormigón que circunda la barra de refuerzo.

Con el fin de observar la mayor cantidad de fisuras que pueden desarrollarse en una probeta de gran longitud, se ha considerado comportamiento elástico del acero y adherencia perfecta fibra-matriz en el material compuesto ( $E_{tg}^{ir} \rightarrow \infty$ ).

Por otro lado, en ensayos a tracción como este, el estado tensional no produce fisuras en modo II de fractura, y por lo tanto la acción pasador desaparece ( $\gamma_{rs}^f = 0$ ).



**Figura 3.4.** Simulación numérica de un ensayo a tracción con refuerzo en el centro: (a) esquema descriptivo, (b) malla de elementos finitos.

El problema se reduce a un espacio bidimensional al considerar que una banda de hormigón armado de 10mm x 50mm x 500mm (Figura 3.4(a)), se representa en el plano  $xy$  mediante un modelo de material compuesto. De esta manera, el campo de las tensiones en el material homogéneo y en el material compuesto está contenido en el plano  $xy$ , con lo cual, se tiene una condición plana de tensiones con un espesor 50mm.

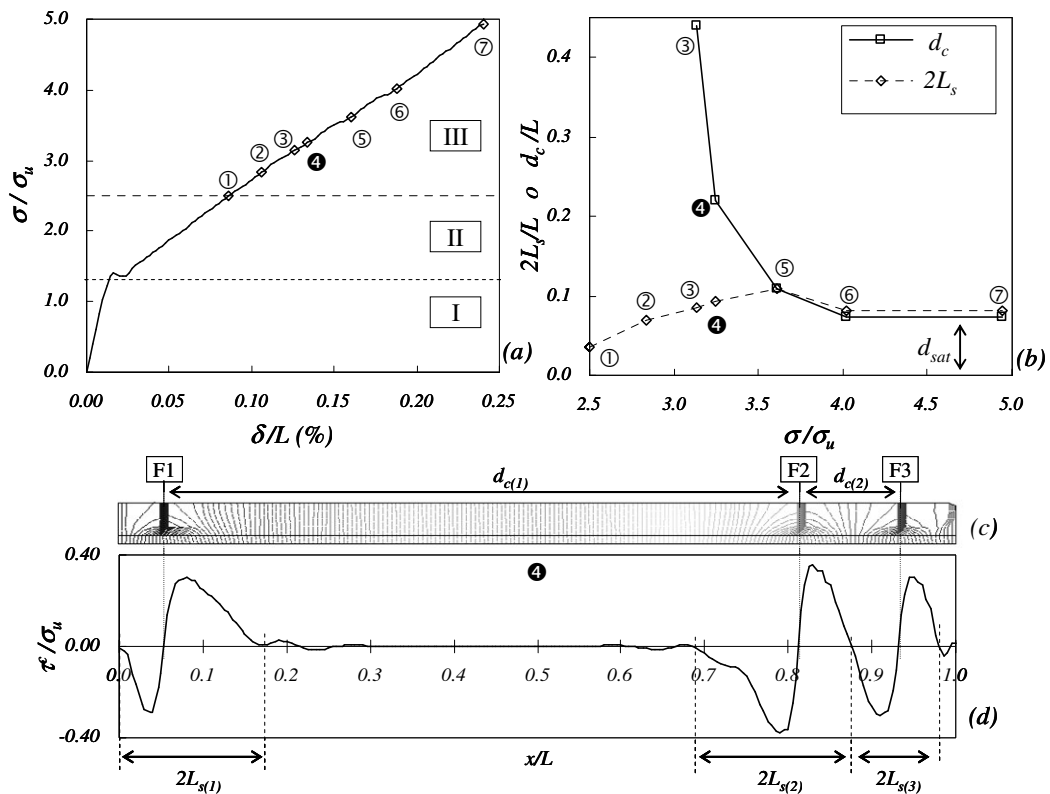
Aprovechando la simetría del problema, se modeló la mitad de la pieza con una malla estructurada de 1000 elementos finitos triangulares lineales de 5mm de lado. En la Figura 3.4(b), el tono claro corresponde a los elementos de hormigón en masa representados por un modelo de daño escalar isótropo, en cambio, el tono oscuro corresponde a los elementos de material compuesto constituidos por matriz de hormigón y fibras de acero, modelados de acuerdo a la formulación presentada.

El coeficiente de participación del acero  $k^{fr}$  en la banda de material compuesto de altura  $h_{mc} = d$ , se obtiene como el cociente entre el volumen de la barra de refuerzo  $V^f = L\pi d^2/4$  y el volumen total de la franja de material compuesto  $V = L \cdot h \cdot h_{mc}$ . Por lo tanto,  $k^{fr} = \pi d/4h = 0.157$ .

La respuesta estructural de la probeta se representa en la Figura 3.5(a), como la relación entre la tensión media equivalente  $\sigma = F/h^2$  dividida en la resistencia a tracción del hormigón  $\sigma_u^m$  y el desplazamiento en el extremo libre  $\delta$  dividido en la longitud de la probeta  $L$ . En esta figura se distinguen las siguientes tres etapas:

- *Etapa I.* Régimen elástico de ambos materiales representado por la pendiente inicial de la curva.

- *Etapa II.* Degradación del hormigón sin localización de la deformación en virtud de la presencia del acero.
- *Etapa III.* Clara localización de la deformación en la zona de hormigón en masa de la probeta. Se desarrolla entre los instantes de carga 1 al 7.



**Figura 3.5.** Simulación numérica de un ensayo a tracción con refuerzo en el centro: (a) relación (tensión equivalente/ resistencia del hormigón) versus (desplazamiento en el extremo / longitud de la probeta), (b) evolución de la longitud de la zona de deslizamiento y distancia entre fisuras en función de la tensión equivalente, (c) líneas de igual de desplazamiento y separación entre fisuras para el instante 4, (d) tensión cortante a lo largo de la pieza en la zona de material compuesto y longitud de la zona de despegue en el instante 4.

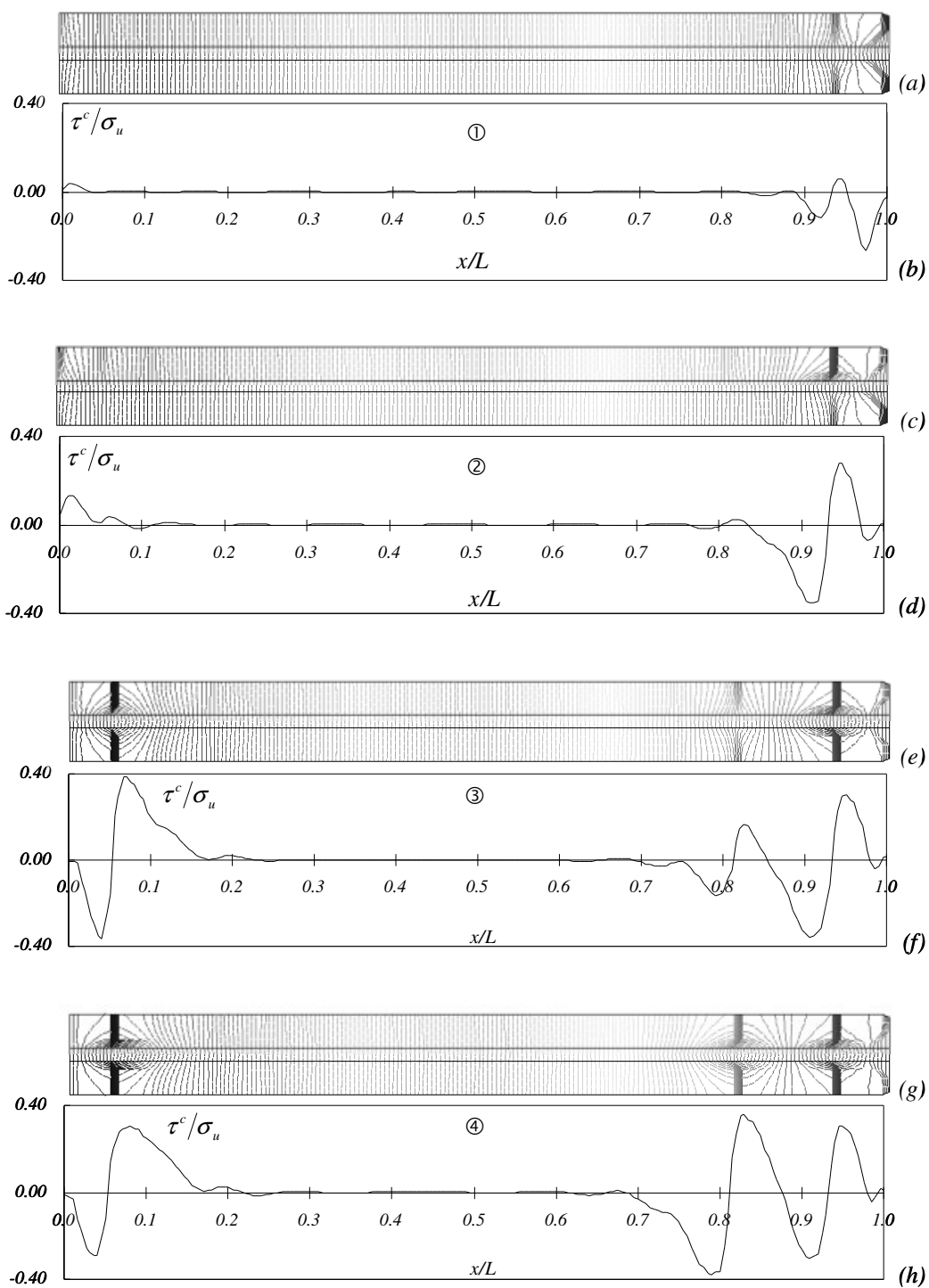
En los resultados del modelo numérico, se calcula la separación entre fisuras  $d_c$ , como la distancia entre dos zonas consecutivas donde se han concentrado las líneas de iso-desplazamiento, es decir, donde se ha producido localización de la deformación. La Figura 3.5(c) indica las distancias  $d_{c(1)}$  y  $d_{c(2)}$  como la separación entre las fisuras F1 y F2, y entre las fisuras F2 y F3, respectivamente. En cambio, la longitud de la zona de deslizamiento se puede medir observando la distribución de la tensión cortante del hormigón en la interfaz (sobre los elementos finitos de material compuesto), a izquierda y

derecha de cada fisura:  $2L_{s(1)}$  y  $2L_{s(2)}$ , como lo muestra la Figura 3.5(d). El valor medio de esta distancia en un instante de carga específico, corresponde a la sumatoria de longitudes de deslizamiento  $2L_{s(i)}$  divididas entre el número de fisuras.

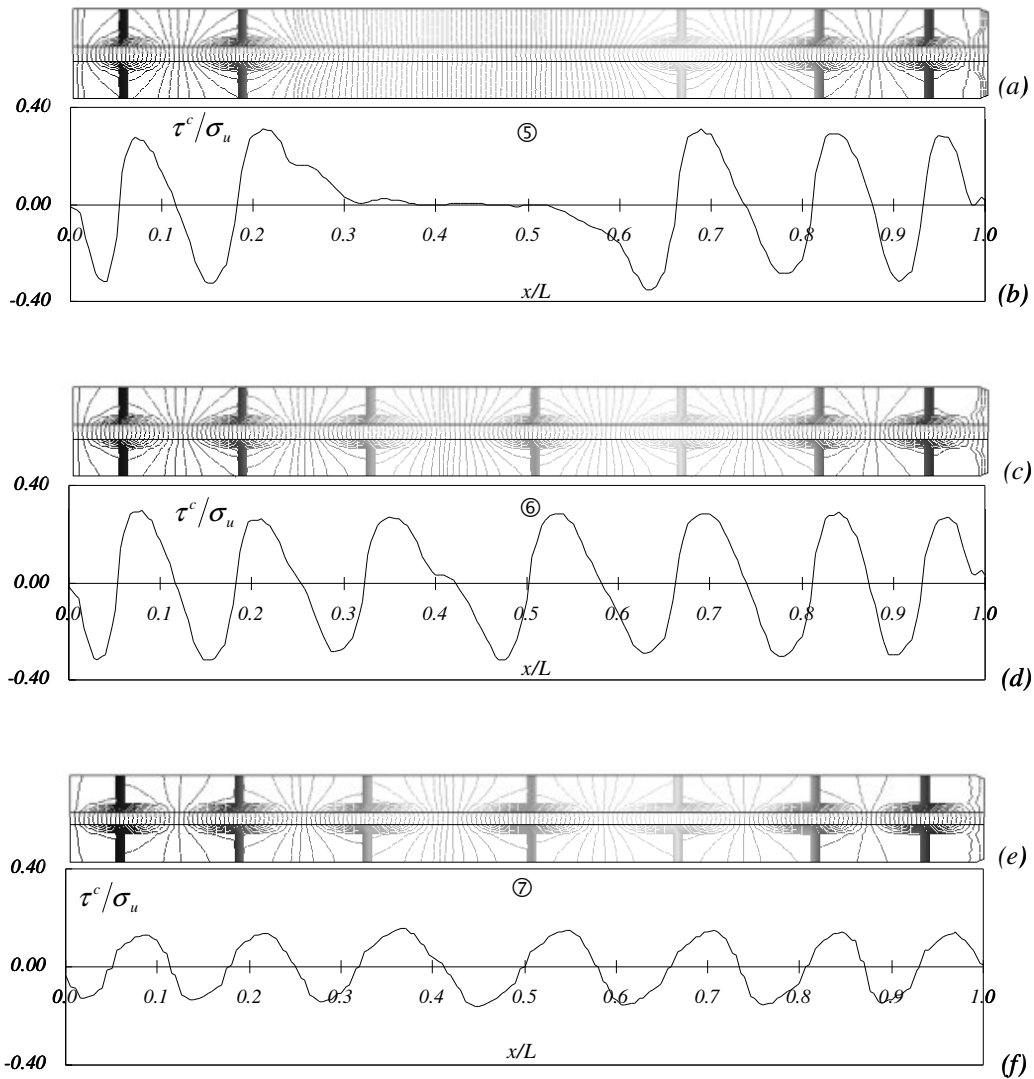
La Figura 3.5(b) muestra la evolución de la longitud de la zona de deslizamiento a ambos lados de una fisura y de la separación entre ellas, medida a partir del mapa de líneas de iso-desplazamiento (Figura 3.6) y del diagrama de tensión cortante del hormigón vecino al refuerzo (Figura 3.7), tomando siete instantes de referencia. La distancia  $d_c$  presentada en esta gráfica corresponde máximo de la colección de valores  $d_{c(i)}$ , siendo  $i+1$  el número de fisuras. La línea continua indica la variación del valor promedio de la zona de deslizamiento a ambos lados de una fisura  $2L_s$  y la línea a trazos describe la evolución de la separación entre fisuras  $d_c$ , en función de la tensión equivalente  $\sigma = F/h^2$ . Se observa que  $d_c$  se reduce hasta una asíntota inferior llamada *distancia de saturación entre fisuras*  $d_{sat}$  (Liao & Reifsnider 2000), dada en los instantes 6 y 7. Lo anterior significa, que a pesar del aumento del nivel de carga se forma un número máximo de fisuras. Por otro lado, la zona de deslizamiento crece progresivamente hasta alcanzar el mismo valor de la separación entre fisuras en el paso de carga número 5. A partir de este momento, es decir, durante los instantes 5 al 7, las dos distancias permanecen aproximadamente iguales hasta conseguir la condición de saturación de fisuras, esto coincide con el comportamiento indicado en la Figura 3.3(c).

**Observación 3.1** *Durante el proceso de fallo de una probeta a tracción de hormigón reforzada en el centro, tanto la cantidad de fisuras como la zona de deslizamiento entre ellas, aumenta progresivamente. Sin embargo, después de ocurrido el despegue total entre ambos materiales, la pérdida de transferencia de tensiones impide la formación de nuevas discontinuidades en el hormigón, manteniendo constante la separación entre las fisuras existentes. Esta etapa se denomina condición de saturación de fisuras.*

En los instantes 1 y 2 se produce una sola fisura, para la cual se mide una zona de despegue a su alrededor, a pesar que aún no exista una distancia entre fisuras (Figura 3.6(a)-(d)). A partir del instante 3 y durante los instantes 4 y 5, se activan más fisuras desde los extremos hacia el centro de la probeta como lo indica la Figura 3.6(e)-(h) y Figura 3.7(a)-(b). La distribución de las fisuras se mantiene constante desde el instante 6, momento en el cual la zona de despegue de una fisura limita con la de fisura vecina, como lo indica el comportamiento periódico de la tensión cortante en la Figura 3.7(c)-(f).



**Figura 3.6.** Ensayo a tracción con refuerzo en el centro. Líneas de iso-desplazamiento y tensión cortante a lo largo de la pieza en la zona de material compuesto: (a) y (b) para el instante 1, (c) y (d) para el instante 2, (e) y (f) para el instante 3, y (g) y (h) para el instante 4.



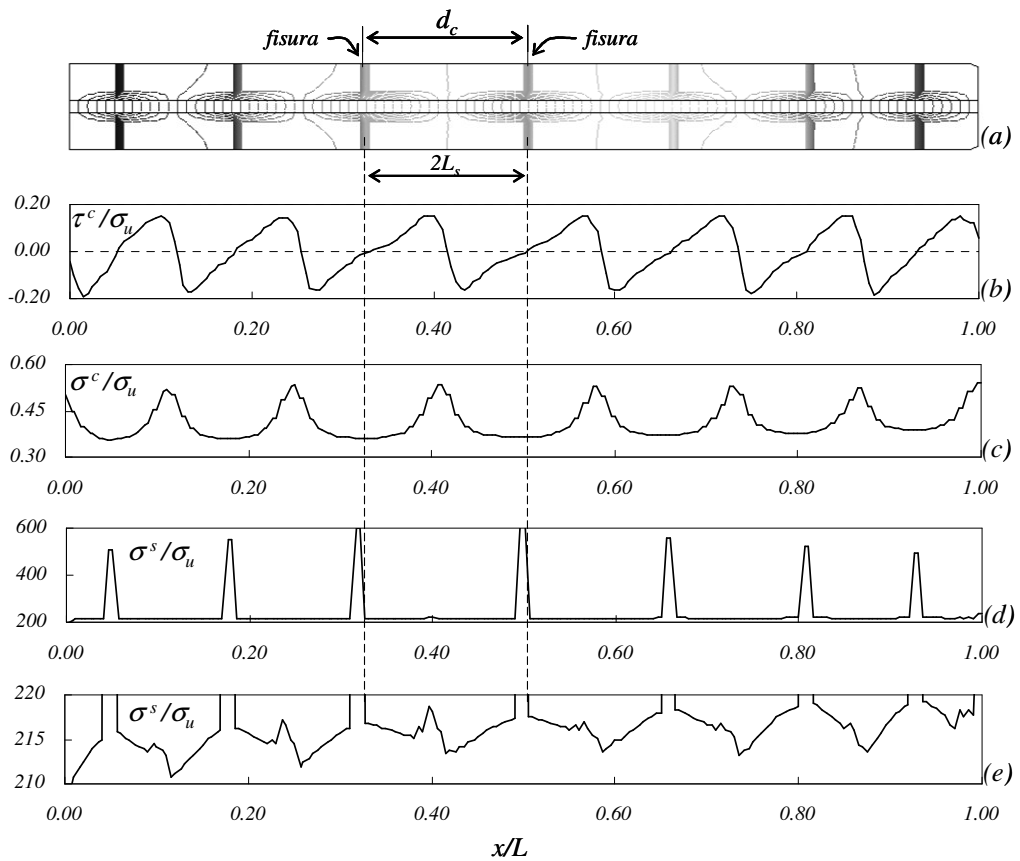
**Figura 3.7.** Simulación numérica de un ensayo a tracción con refuerzo en el centro. Líneas de iso-desplazamiento y tensión cortante a lo largo de la pieza en la zona de material compuesto (continuación): (a) y (b) para el instante 5, (c) y (d) para el instante 6, y (e) y (f) para el instante 7.

Las distancias estudiadas en este apartado evolucionan de forma cualitativamente similar tanto en el modelo presentado en (Hutchinson & Jensen 1990; Okabe, Komotori et al. 1999; Liao & Reifsnider 2000; Ogasawara, Ishikawa et al. 2001) e ilustrado en la Figura 3.3, como en el resultado numérico mostrado en la Figura 3.5(b).

**Observación 3.2** *El proceso de localización comienza en la sección entallada como se indica en el instante 1, sin embargo rápidamente se producen fisuras en otros lugares de la probeta, aliviando la concentración de la deformación en la entalla. Esto indica que la separación entre fisuras no depende de la posición de la perturbación.*

El material compuesto de la franja central de la probeta no muestra indicios de localización de la deformación, debido a la presencia de una fracción de acero de refuerzo en régimen elástico que retrasa el instante de bifurcación del compuesto, como se mostró en el Apartado 2.5.

Para los instantes 5, 6 o 7 en los cuales  $d_c \cong 2L_s$ , la distribución de la tensión del hormigón y del acero en la franja de material compuesto se representan en la Figura 3.8.



**Figura 3.8.** Simulación numérica de un ensayo a tracción con refuerzo en el centro, para un nivel de carga en el cual  $d_c$  es igual a  $2L_s$ : (a) líneas de iso-desplazamiento, (b) nivel de tensión de corte en el hormigón, (c) nivel de tensión axial en el hormigón, (d) nivel de tensión axial en el acero, (e) vista cercana del nivel de tensión axial en el acero.

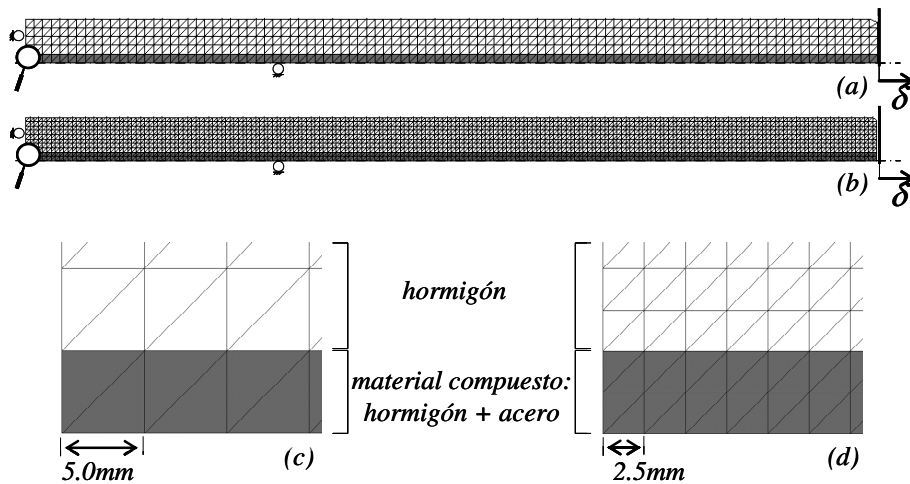


La separación casi constante entre las fisuras produce resultados periódicos de las tensiones. La tensión normal en el hormigón  $\sigma^c$  es menor en las zonas próximas a cada fisura, mostrando además una variación suave (Figura 3.8(c)). En cambio, la tensión del acero  $\sigma^s$  en esa misma zona es bastante alta (Figura 3.8(d)), como producto del fuerte aumento de la deformación en la discontinuidad del hormigón en masa por encima de la franja de material compuesto.

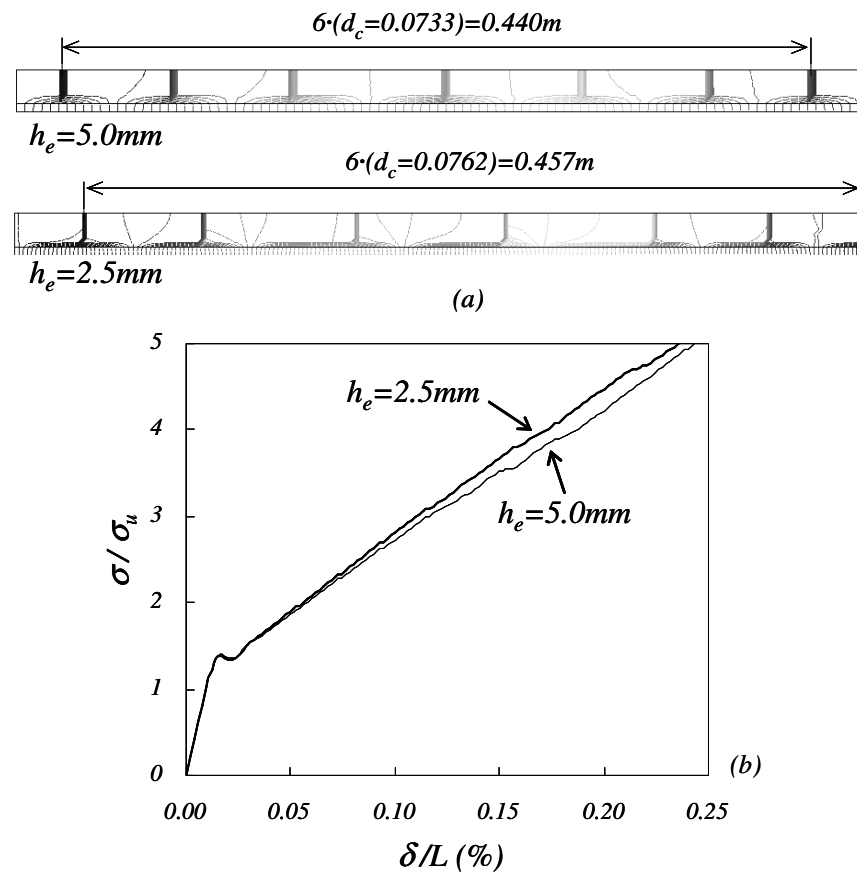
A cierta distancia  $0 < x \leq L_s$ , medida desde una fisura, la tensión normal del hormigón crece hasta adquirir un valor máximo, mientras que en el acero la tensión se reduce llegando al mínimo (Figura 3.8(e)). Se observa, en un estado de fisuración saturada como éste, que la zona de adherencia entre ambos materiales desaparece y en consecuencia no existe una región en la cual sus tensiones permanezcan constantes.

### 3.2.3. Comparación de resultados para mallas de diferente densidad

Con el fin de establecer la independencia del modelo con respecto al tamaño del elemento, se simuló la pieza descrita en el apartado anterior con una malla de 4000 elementos finitos de 2.5mm de lado, que corresponden a la mitad del tamaño de los elementos de la malla anterior, como se indica en la Figura 3.9.



**Figura 3.9.** Simulación numérica de un ensayo a tracción con refuerzo en el centro. Vista general y detalle para mallas de diferente densidad: (a) y (c) malla de 1000 elementos, (b) y (d) malla de 4000 elementos.



**Figura 3.10.** Simulación numérica de un ensayo a tracción con refuerzo en el centro. Resultados con mallas de diferente densidad: (a) líneas de iso-desplazamiento y separación media entre fisuras, (b) respuesta estructural.

La distribución de las fisuras observada en el último paso de carga, establece una separación media entre ellas, casi igual para ambas mallas, con una diferencia del 3.8%, como lo muestra la Figura 3.10(a), mediante las líneas de iso-desplazamiento.

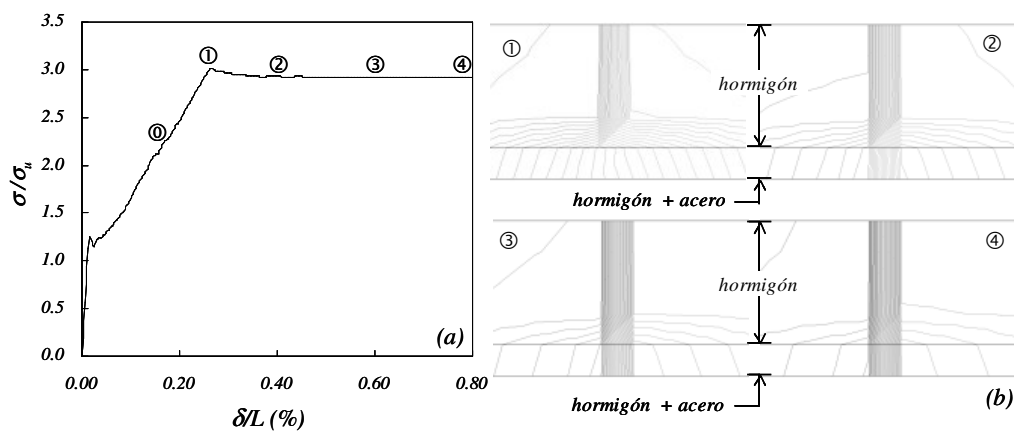
Asimismo, la relación entre el desplazamiento impuesto en el extremo derecho de la probeta y la sumatoria de fuerzas en el mismo lugar dividida entre el área de la sección (o también denominado tensión media), es bastante similar para las mallas en cuestión (Figura 3.10(b)).

### 3.2.4. Panel heterogéneo con refuerzo elasto-plástico en el centro

En este apartado se muestran los resultados de un ensayo similar al anterior para estados de carga que producen deformación plástica en el acero.

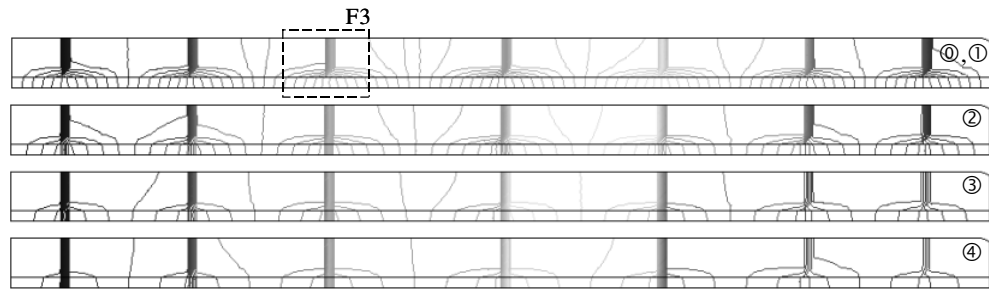
Además de las características mecánicas dadas en el Cuadro 3.1, en el acero se considera una tensión de fluencia  $\sigma_y = 508$  MPa, y un módulo de ablandamiento nulo ( $H^f = 0$  MPa, plasticidad perfecta).

En la Figura 3.11(a) se distinguen las diferentes etapas del comportamiento de la probeta a través de la relación entre el desplazamiento impuesto y la tensión equivalente en el extremo libre. Posterior al régimen elástico de ambos materiales, se desarrollan de forma secuencial las fisuras en el hormigón, tal como se indicó en el ensayo anterior. Entre los instantes 0 y 1 la separación entre fisuras se mantiene constante (Figura 3.12). Después del instante 1 se pierde la rigidez de la probeta a causa de la localización de la deformación en la franja de material compuesto, como lo ilustran la Figura 3.11(b) y la Figura 3.12.

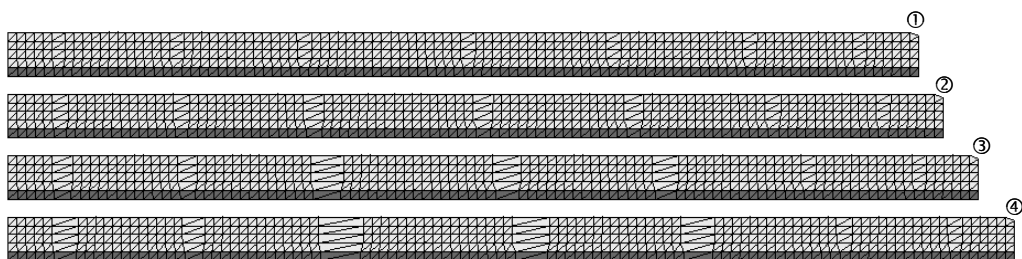


**Figura 3.11.** Simulación numérica de un ensayo a tracción con refuerzo en el centro, considerando comportamiento elasto-plástico: (a) relación (tensión equivalente/ resistencia del hormigón) versus (desplazamiento en el extremo / longitud de la probeta), (b) líneas de igual de desplazamiento para diferentes instantes en el tramo F3 (Figura 3.12).

En el instante 2 se observa localización de deformaciones en la zona de material compuesto debajo de cada fisura del hormigón en masa, manteniendo aproximadamente la misma abertura para las 7 fisuras consolidadas anteriormente (Figura 3.13). En el instante 3, se descargan dos de las fisuras en la zona de material compuesto, haciendo mayor la abertura de las otras cinco fisuras. Para el nivel de carga 4, la tercera fisura desde el extremo izquierdo (F3), muestra mayor abertura que las demás, sin embargo, se mantienen activas las mismas cinco fisuras del instante anterior. Este comportamiento se conserva en estados de carga mayores en virtud del régimen de plasticidad perfecta del acero.



**Figura 3.12.** Simulación numérica de un ensayo a tracción con refuerzo en el centro, considerando comportamiento elasto-plástico. Líneas de igual de desplazamiento en media probeta para diferentes instantes.



**Figura 3.13.** Simulación numérica de un ensayo a tracción con refuerzo en el centro, considerando comportamiento elasto-plástico. Deformada de media probeta para diferentes instantes.

Después de obtenida la distancia de saturación de fisuras, no se conforman nuevas discontinuidades, incluso en el régimen plástico de las fibras, en cuyo caso, algunas fisuras toman mayor abertura que otras.

### 3.3. Simulación numérica del ensayo de un panel heterogéneo de hormigón armado sometido a tracción

A continuación se presentan los resultados de la simulación numérica con varias mallas de un panel de hormigón armado sometido a tracción ensayado en (Ouyang & Shah 1994; Ouyang, Wollrab et al. 1997). La pieza tiene 686 mm de longitud, 127 mm x 50.8 mm de sección transversal rectangular, y una entalla en el centro como se muestra en la Figura 3.14. El panel está reforzado con tres barras de acero de 9.5 mm de diáme-

tro embebidas completamente en el hormigón y distribuidas de forma homogénea en la sección transversal.

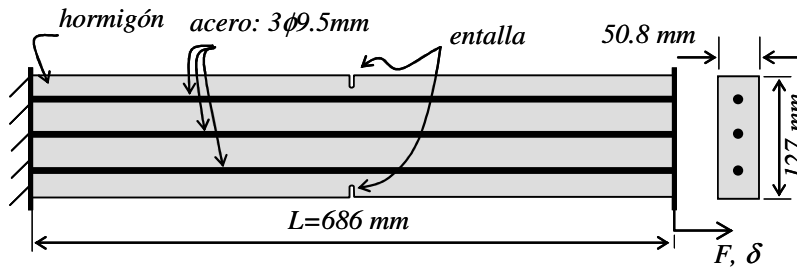


Figura 3.14. Simulación numérica de un panel sujeto a tracción. Esquema descriptivo

Como propiedades mecánicas de los materiales componentes se tienen las siguientes:

<i>Hormigón</i>	
módulo de Young: $E^m = 27.35 \text{ GPa}$	energía de fractura: $G_f = 100 \text{ N/m}$
relación de Poisson: $\nu^m = 0.2$	resistencia a tracción: $\sigma_u^m = 3.19 \text{ MPa}$
<i>Acero:</i>	
módulo de Young: $E^{fr} = 191.6 \text{ GPa}$	tensión de fluencia $\sigma_y^{fr} = 508.0 \text{ MPa}$
módulo de ablandamiento: $H^{fr} = 0 \text{ GPa}$	

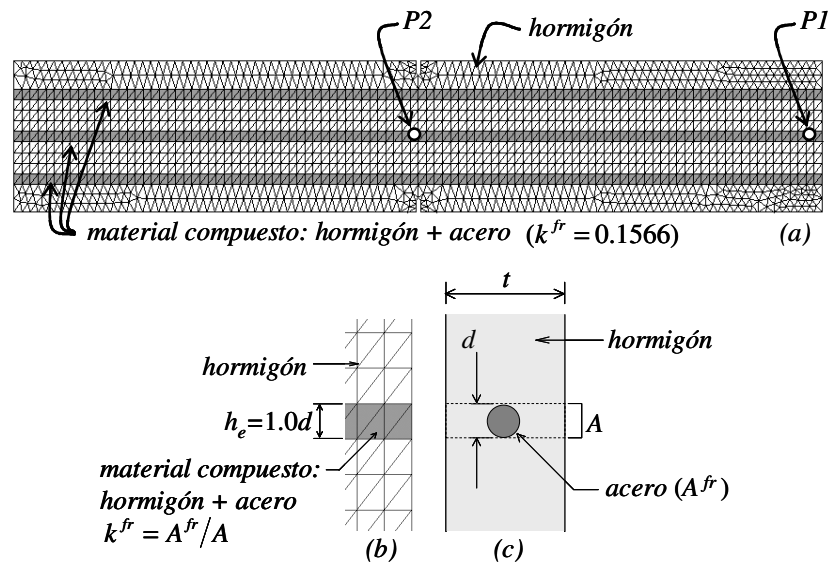
Cuadro 3.2. Propiedades mecánicas de los materiales componentes.

El fenómeno de adherencia entre la matriz y las fibras se caracteriza a partir de los resultados obtenidos en un ensayo de arrancamiento de fibras de 0.5mm de diámetro y 25.4mm de longitud embebida (Naaman, Namur et al. 1991). Para este experimento la pendiente aproximada ( $P^i/\delta^i$ ) de la relación fuerza-desplazamiento esta entre 8.01kN/mm (45000lb/pul) y 9.26kN/mm (52000lb/pul), y la fuerza máxima  $P_{max}^i = 0.061 \text{ kN}$ . De acuerdo con el modelo de deslizamiento fibra – matriz descrito en el Apartado 2.2.3, el valor del módulo de deslizamiento  $E^{ir}$  estará entre 1111.GPa y 1283.GPa, y la tensión de pérdida de adherencia será igual a  $\sigma_{adh}^{ir} = 311.1 \text{ MPa}$ . Por lo tanto, el módulo tangente en régimen elástico del modelo de fibra deslizante  $E^{dr}$  estará entre  $0.85E^{fr}$  y  $0.87E^{fr}$ . En el siguiente apartado se presentan los resultados obtenidos para ambas condiciones de adherencia.

Dado el carácter axial de este ensayo donde se impone el modo I de fallo, se considera despreciable la acción pasador.

### 3.3.1. Malla de elementos finitos no homogénea de densidad media

La malla se compone de elementos finitos triangulares lineales de dos tipos como lo muestra la Figura 3.15(a). En tono oscuro se indican los elementos que representan al material compuesto modelado con la formulación propuesta, el cual está conformado por un 84.34% de hormigón y un 15.67% de fibras de acero. Los elementos en tono claro describen el hormigón en masa, como un material homogéneo que obedece a un modelo isótropo de daño escalar.

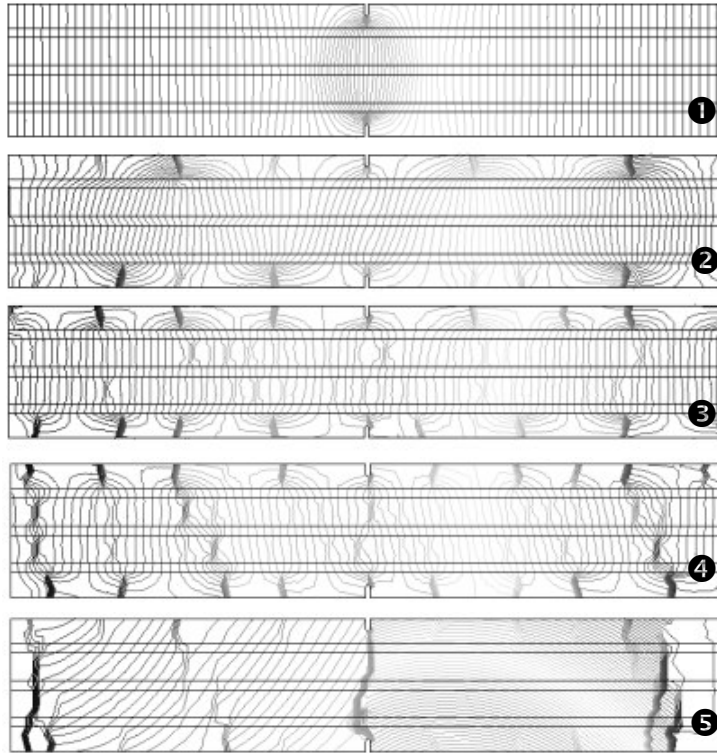


**Figura 3.15.** Simulación numérica de un panel sujeto a tracción. Malla no homogénea de densidad media: (a) red de elementos finitos, (b) detalle de una franja de elementos finitos de material compuesto, (c) detalle de la sección transversal de la probeta en la zona circundante a una barra de refuerzo.

Con fines comparativos esta discretización se ha denominado *malla no homogénea de densidad media*, en la cual, la altura de los elementos finitos de material compuesto es igual al diámetro de la barra (Figura 3.15(b)-(c)), es decir,  $h_e = 1.0d$ .

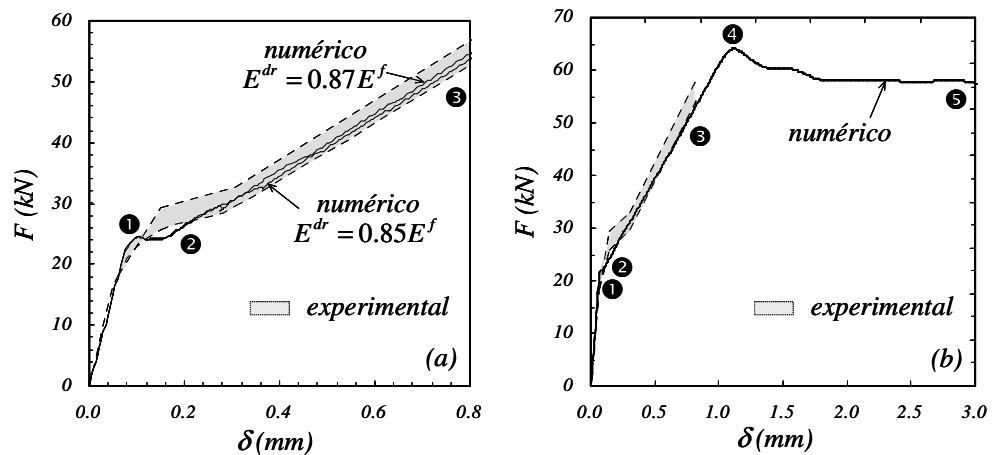
La Figura 3.16 muestra las líneas de iso-desplazamiento para diferentes niveles de carga indicada en la curva fuerza – desplazamiento de la Figura 3.17. El instante 1 marca el comienzo de la localización de la deformación alrededor de la entalla, sin embargo, después de pocos incrementos de carga, en el instante 2, aparecen nuevas zonas de localización a lo largo del panel. En el instantes 3 se desarrollan fisuras en la zona superior e inferior del panel, manteniendo una separación característica entre ellas. Hasta este paso de carga, no se percibe localización en las zonas de hormigón entre las bandas de material compuesto, lo cual indica un efecto de confinamiento dado por el

refuerzo circundante. La pérdida de rigidez estructural observada a partir del instante 4 está asociado con la pérdida de adherencia entre las barras de acero y el hormigón, modificando la distribución de las fisuras en el panel. De hecho, en el paso 4 aparecen nuevas fisuras en las zonas donde el hormigón está enmarcado por el material compuesto. En la última etapa se observan tres fisuras de las cuales una de ellas, la ubicada bajo la entalla, atraviesa completamente la probeta.



**Figura 3.16.** Simulación numérica de un panel sujeto a tracción. Líneas de iso-desplazamiento en diferentes instantes.

La respuesta estructural obtenida del análisis numérico se aproxima a los resultados experimentales como lo muestra la Figura 3.17. La región gris indica la zona de valores experimentales y las dos líneas continuas corresponden a los resultados numéricos para módulo elástico de fibra deslizante con operador constitutivo elástico de 85% y de 87% del módulo de Young del acero.



**Figura 3.17.** Simulación numérica de un panel sujeto a tracción. Relación fuerza - desplazamiento: (a) vista cercana, (b) curva completa.

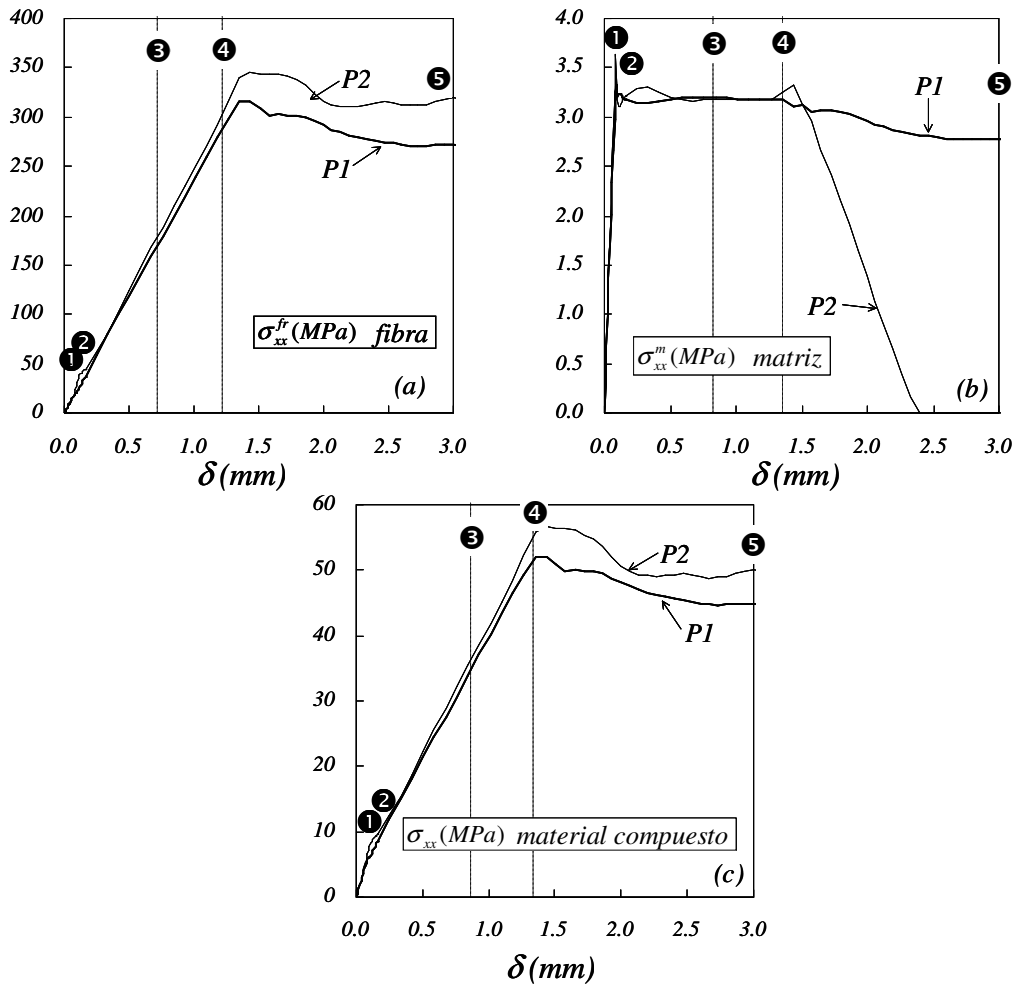
El hormigón en masa muestra una etapa de daño estable donde varias fisuras mantienen una separación y abertura constante, proporcionada por la capacidad del refuerzo y la adherencia en la interfaz. En cuanto se pierde tal adherencia (o en algunos casos cuando comienza el régimen plástico del acero), decae la capacidad de estructural mientras se impone la abertura de una sola fisura.

La evolución de la tensión de la matriz y de las fibras en la zona de material compuesto es descrita mediante las curvas tensión-desplazamiento presentadas en la Figura 3.18 para los puntos  $P1$  y  $P2$  de la pieza (Figura 3.15). El punto  $P1$  ubicado en el extremo derecho de la probeta, no presenta localización de la deformación, en cambio, el punto  $P2$  situado en la sección transversal reducida, hace parte de una de las fisuras formada en el instante 5 (Figura 3.16).

La tensión normal en dirección  $x$  en la matriz (Figura 3.18(b)) se conserva casi constante desde el comienzo del daño en el paso de carga 1, hasta la carga pico de la probeta en el instante 4 aproximadamente, debido a la rigidez elástica proporcionada por las fibras que congelan la degradación de la matriz del compuesto. Para valores mayores del desplazamiento  $\delta$ , se reduce tal tensión de forma muy suave en el punto  $P1$  y de forma muy fuerte, en el punto  $P2$ , hasta alcanzar un valor nulo. Esta diferencia se produce por localización de la deformación presente en  $P2$  y ausente en  $P1$ .

En la fibra (Figura 3.18(a)), la tensión axial aumenta hasta la condición de la pérdida total de adherencia en el del acero (o hasta la condición de fluencia en el caso de adherencia perfecta), a partir de la cual, la tensión permanece casi constante. La diferencia entre las tensiones en los puntos  $P1$  y  $P2$  después del instante 4, obedece a la variación del estado tensional en la probeta inducido por la entalla y por el fenómeno de localización de la deformación. Esto se refleja en la tensión del material compuesto presentada en la Figura 3.18(c).



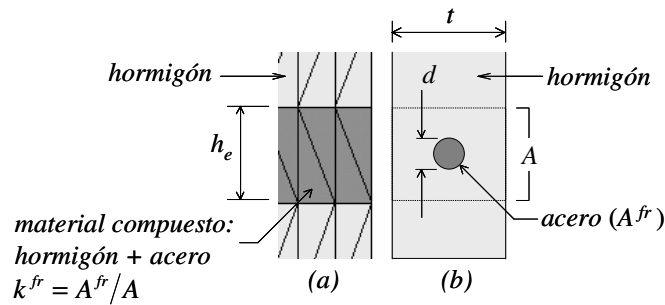


**Figura 3.18.** Simulación numérica de un panel sujeto a tracción. Evolución de la tensión en la matriz de hormigón y en las fibras de acero en los puntos *P1* y *P2* de la zona de material compuesto: (a) tensión axial de la fibra, (b) tensión normal en dirección *x* de la matriz, (c) tensión normal en *x* del material compuesto.

### 3.3.2. Comparación entre mallas no homogéneas de diferente densidad

La probeta sometida a tracción mostrada en la Figura 3.14(a), se modela con cuatro mallas estructuradas de elementos triangulares lineales de altura media  $h_e$  igual a  $2.8d$ ,  $2.0d$ ,  $1.0d$  y  $0.5d$ . Las zonas reforzadas en la probeta se representan con franjas de

elementos finitos donde el coeficiente de participación volumétrica del acero depende de la altura de la franja  $h_e$  como se indica en la Figura 3.19.



**Figura 3.19.** Simulación numérica de un panel sujeto a tracción: (a) detalle de una franja de elementos finitos de material compuesto, (b) detalle de la sección transversal de la probeta en la zona circundante a una barra de refuerzo.

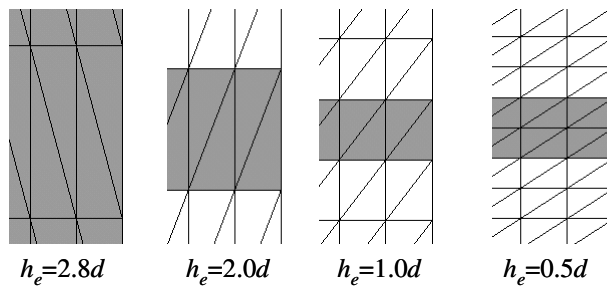
La Figura 3.20 y el Cuadro 3.3 muestran el detalle de la franja central de elementos finitos de material compuesto para las diferentes mallas y las características generales de las mismas, respectivamente.

<i>malla</i>	<i>elementos</i>	<i>nudos</i>	$h_e/d$	$k^{fr}$	$F_{max}$ (kN)
muy gruesa	1026	622	2.8	0.0542	77.2
gruesa	1430	826	2.0	0.0783	75.0
media	2872	1558	1.0	0.1566	72.6
fina	4746	2508	0.5	0.1566 <sup>11</sup>	70.7

**Cuadro 3.3.** Simulación numérica de un panel sujeto a tracción. Características de las mallas

En la malla muy gruesa, una franja de tres elementos finitos de material compuesto incluye a las tres barras de la probeta, lo cual hace casi homogéneo al material representado (Figura 3.21(a)).

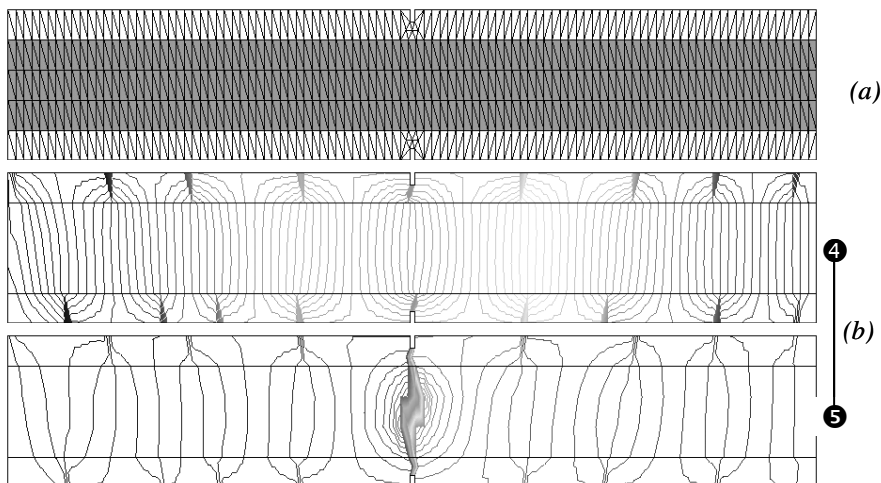
<sup>11</sup> El coeficiente de participación volumétrica es el mismo en la malla media y fina porque la altura de la franja del material compuesto es común, a pesar que la malla fina contenga dos filas de elementos y la malla media solo uno.



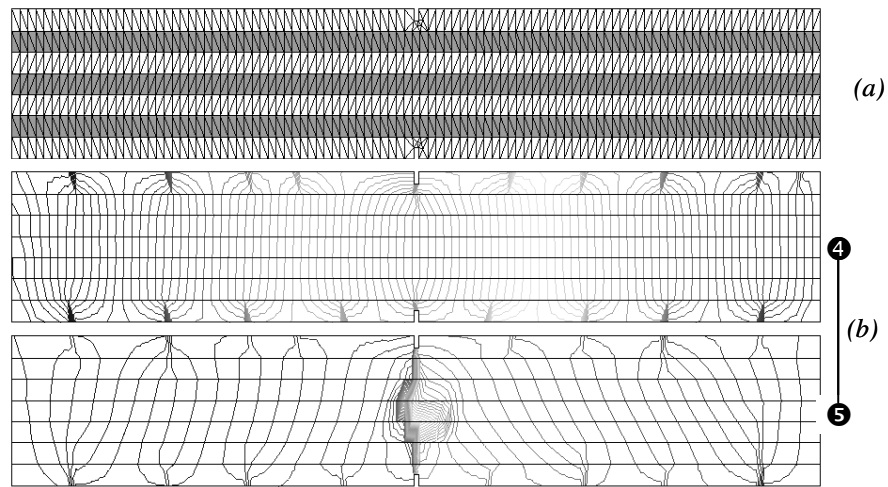
**Figura 3.20.** Simulación numérica de un panel sujeto a tracción. Detalle de la franja central de elementos finitos de material compuesto para las diferentes mallas.

Tal como se observó en la simulación anterior, las líneas de desplazamientos para la mallas de  $h_e$  igual a  $2.8d$ ,  $2.0d$  y  $0.5d$ , presentadas en la Figura 3.21(b), Figura 3.22(b) y Figura 3.23(b), respectivamente, muestran las siguientes dos etapas:

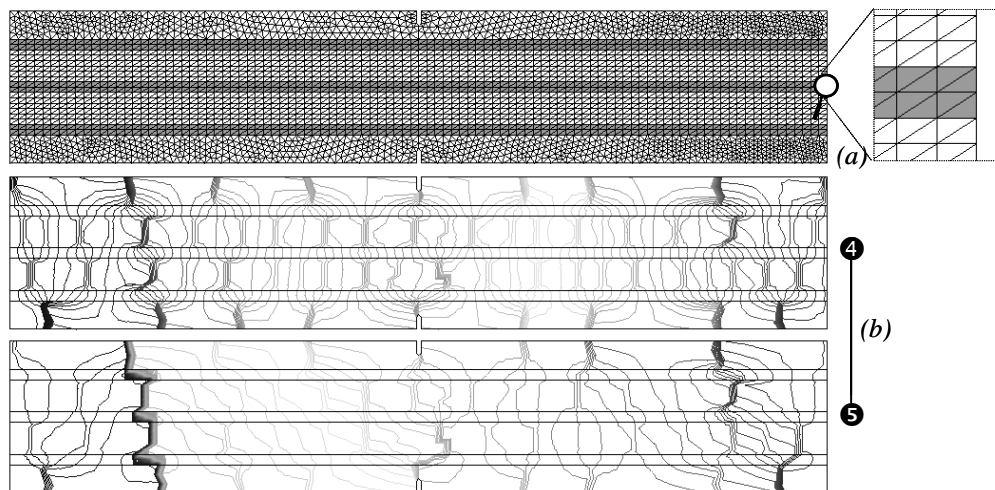
- En la primera, se forman sucesivamente varias fisuras en el hormigón en masa hasta alcanzar una separación característica entre ellas. Esta etapa termina antes de alcanzar la carga pico de la probeta (instante 4 en la Figura 3.24).
- En la segunda, se presenta la localización en diferentes puntos del material compuesto hasta conformar una sola fisura que cruza transversalmente la probeta. Esta fase comienza con una fuerte pérdida de rigidez estructural posterior a la carga pico y mantiene el mismo patrón de fisuras cuando tal rigidez tiende a ser cero (instante 5 en la Figura 3.24).



**Figura 3.21.** Simulación numérica de un panel sujeto a tracción. Modelado con elementos finitos de  $h_e=2.8d$ : (a) esquema de la malla, (b) líneas de iso-desplazamiento en los instantes 4 y 5.



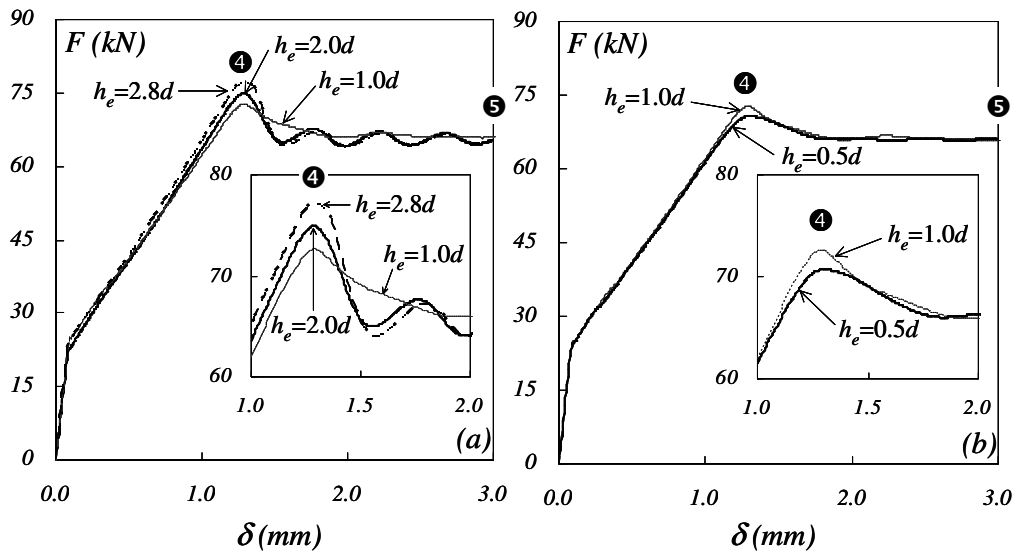
**Figura 3.22.** Simulación numérica de un panel sujeto a tracción. Modelado con elementos finitos de  $h_e=2.0d$ : (a) esquema de la malla, (b) líneas de iso-desplazamiento en los instantes 4 y 5.



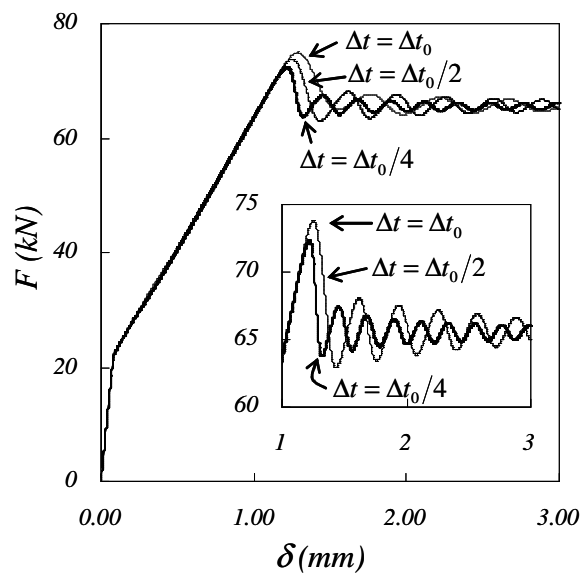
**Figura 3.23.** Simulación numérica de un panel sujeto a tracción. Modelado con elementos finitos de  $h_e=0.5d$ : (a) esquema de la malla, (b) líneas de iso-desplazamiento en los instantes 4 y 5.

La Figura 3.24 muestra la respuesta estructural de la probeta, obtenida de la simulación numérica del problema con las cuatro mallas descritas anteriormente. Las oscilaciones en la curva fuerza-desplazamiento, entre los instantes 4 y 5, observadas en las mallas más gruesas, obedecen al uso de elementos finitos de mayor tamaño que la longitud característica del material compuesto (Huespe, Oliver et al. 2006). Sin embargo, la

soluciones dadas por las mallas de  $h_e=2.8d$ ,  $h_e=2.0d$ , convergen a la curva dada por las redes de elementos más finas.



**Figura 3.24.** Simulación numérica de un panel sujeto a tracción. Comparación de la respuesta estructural para mallas de diferente densidad: (a) mallas con  $h_e=2.8d$ ,  $h_e=2.0d$  y  $h_e=1.0d$ , (b) mallas con  $h_e=1.0d$  y  $h_e=0.5d$ .



**Figura 3.25.** Simulación numérica de un panel sujeto a tracción con una malla de  $h_e=2.0d$ . Comparación de la respuesta estructural para diferentes tamaños de paso de pseudo-tiempo.

Para la malla donde el tamaño medio del elemento es  $h_e=2.0d$ , la Figura 3.25 indica la leve reducción en la amplitud de dichas oscilaciones en función del tamaño del paso de pseudo-tiempo.

Por otro lado, la carga máxima sufre pequeñas variaciones, de acuerdo a la discretización, que no superan el 9%, como se indica en el Cuadro 3.3.

Finalmente, la comparación entre mallas de diferente densidad permite demostrar la independencia de los resultados con respecto al tamaño medio del elemento finito.

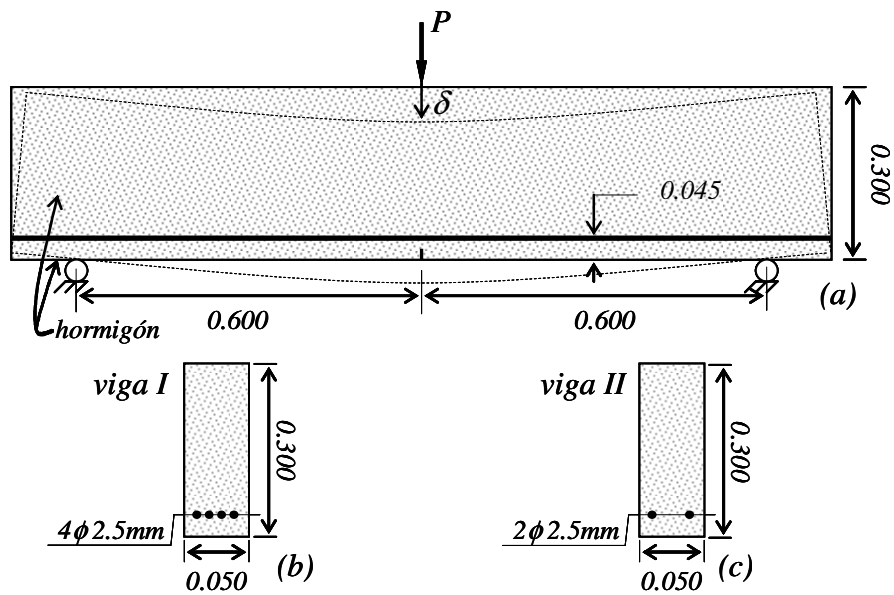
### 3.4. Vigas de tres puntos ligeramente reforzadas

En este trabajo fue modelada numéricamente una viga de poco refuerzo para dos cuantías diferentes ensayada en (Ruiz, Elices et al. 1998), teniendo en cuenta el nivel de adherencia de la interfaz, caracterizado por un ensayo de arrancamiento incluido en la misma referencia.

Una viga simplemente apoyada de 1200mm de luz y 50mm x 300mm de sección transversal, se carga con una fuerza  $P$  en la mitad de la luz como lo indica la Figura 3.26. La viga I reforzada con cuatro barras de acero corrugado de 2.5mm de diámetro que representan un 0.13% de cuantía (Figura 3.26(b)). En cambio la viga II tiene dos barras del mismo diámetro y por tanto una cuantía del 0.065% (Figura 3.26(c)). Las características del hormigón y del acero se presentan en el Cuadro 3.4.

<i>Hormigón</i>	
módulo de Young: $E^m = 29.0$ GPa	energía de fractura: $G_f = 62.5$ N/m
relación de Poisson: $\nu^m = 0.2$	resistencia a tracción: $\sigma_u^m = 3.80$ MPa
resistencia a compresión: $\sigma_u^m = 38.0$ MPa	
<i>Acero</i>	
módulo de Young: $E^{fr} = 162.0$ GPa	tensión de fluencia $\sigma_y^{fr} = 587.0$ MPa
módulo de ablandamiento: $H^{fr} = 0$ GPa	

**Cuadro 3.4.** Simulación numérica de ensayos de vigas de tres puntos con poco refuerzo. Propiedades mecánicas de los materiales componentes.



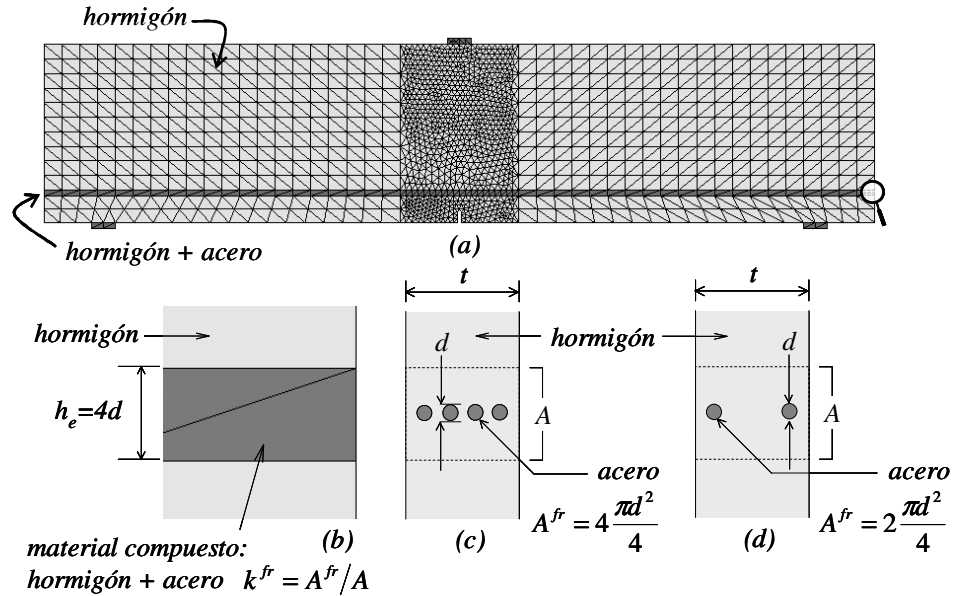
**Figura 3.26.** Simulación numérica de ensayos de vigas de tres puntos con poco refuerzo. Esquema descriptivo: (a) geometría y cargas sobre la viga, (b) sección transversal de la viga I (0.13% de cuantía de refuerzo), (c) sección transversal de la viga II (0.065% de cuantía de refuerzo).

Las propiedades mecánicas de la interfaz se determinan a partir del ensayo de arrancamiento (Ruiz, Elices et al. 1998), para el cual se extrae una barra corrugada embebida en un bloque de hormigón de 2.5mm de diámetro y 150mm de longitud. La curva experimental que relaciona a la fuerza en la fibra y el deslizamiento, se aproxima a una línea recta con pendiente ( $P^i/\delta^i$ ) igual a 20.0 kN/mm, hasta una carga máxima  $P_{max}=2.8$ kN. De acuerdo con el modelo de deslizamiento fibra – matriz descrito en el Apartado 2.2.3, el valor del módulo de deslizamiento  $E^{ir}$  será igual a 611.1GPa y la tensión de pérdida de adherencia será de  $\sigma_{adh}^{ir}=570.4$ MPa. El módulo tangente en régimen elástico del modelo de fibra deslizante será  $E^{dr} = 128.1$ GPa.

En la simulación numérica se utiliza un modelo de daño de tracción y compresión diferenciada (Apartado 2.2.1), para representar los elementos de hormigón en masa y la formulación presentada para materiales compuestos, en la zona del refuerzo. Como se muestra en la Figura 3.27(a), la viga se discretiza con elementos triangulares lineales de material simple indicados en tono claro y con material compuesto en una banda de tono oscuro.

Con esta formulación es posible utilizar elementos de material compuesto mas grandes que el diámetro real de las fibras sin perder aproximación en la respuesta estructural del problema. En este caso la banda de elementos finitos de hormigón armado es 4 veces más alta que el diámetro del refuerzo como se muestra en la Figura 3.27(b)-(d).

**Observación 3.3** *A pesar de la simetría del problema se modeló la viga completa evitando que las condiciones de contorno en el eje de simetría queden sobre de la trayectoria de la discontinuidad.*



**Figura 3.27.** Simulación numérica de ensayos de vigas de tres puntos con poco refuerzo: (a) malla de elementos finitos, (b) detalle de un elemento finito de material compuesto, (c) y (d) detalle de la zona reforzada de la sección transversal de la viga I y II, respectivamente.

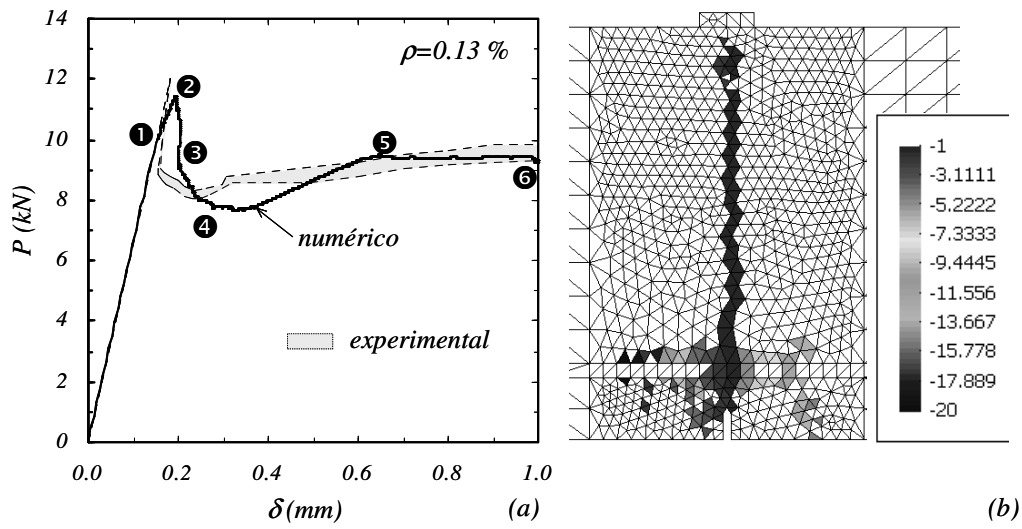
### 3.4.1. Viga I (cuantía de refuerzo del 0.13%)

Las cuatro barras de refuerzo de la viga I representan el 0.13% de la sección transversal, al igual que determinan un coeficiente de participación volumétrica de las fibras en los elementos finitos de material compuesto  $k^{fr} = 0.0393$  (Figura 3.27(c)).

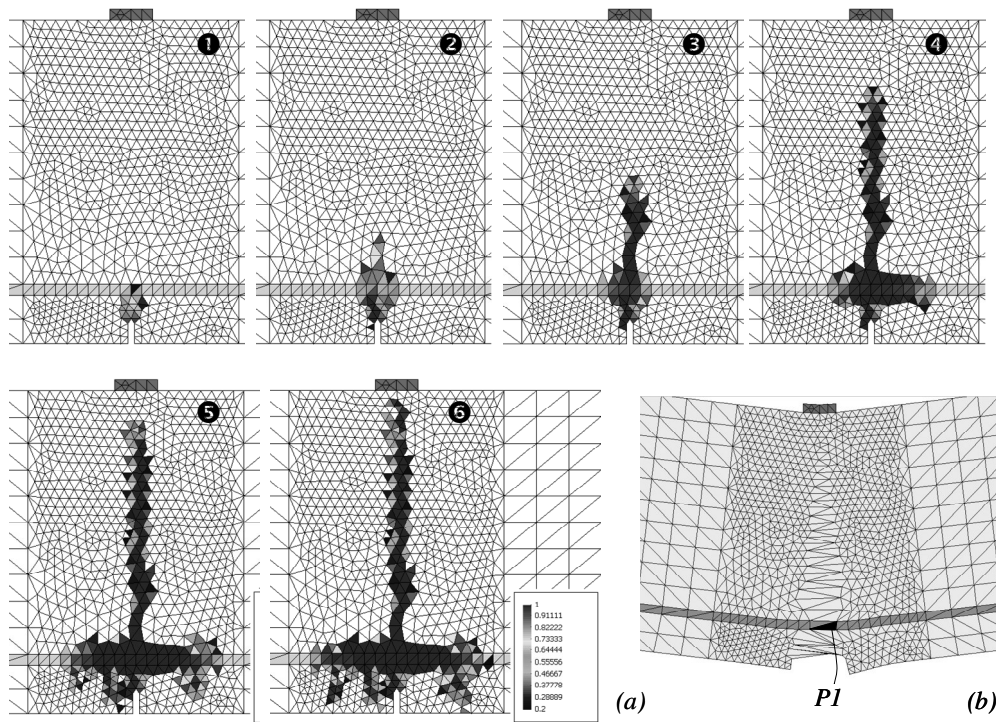
La respuesta estructural es representada en la Figura 3.28(a), como la relación entre la carga aplicada en la mitad de la luz y el desplazamiento en ese mismo punto. La región gris delimita los resultados experimentales y la línea continua describe la solución numérica obtenida.

Los elementos finitos pertenecientes a diferentes caminos de fisura al final del proceso de carga se observan la Figura 3.28(b). El valor de  $-1$  corresponde a los elementos que son los cruzados por la fisura principal y los demás enteros negativos del  $-2$  al  $-20$ , indican los elementos asociados con pequeñas fisuras secundarias que se presentan alrededor de la zona reforzada.



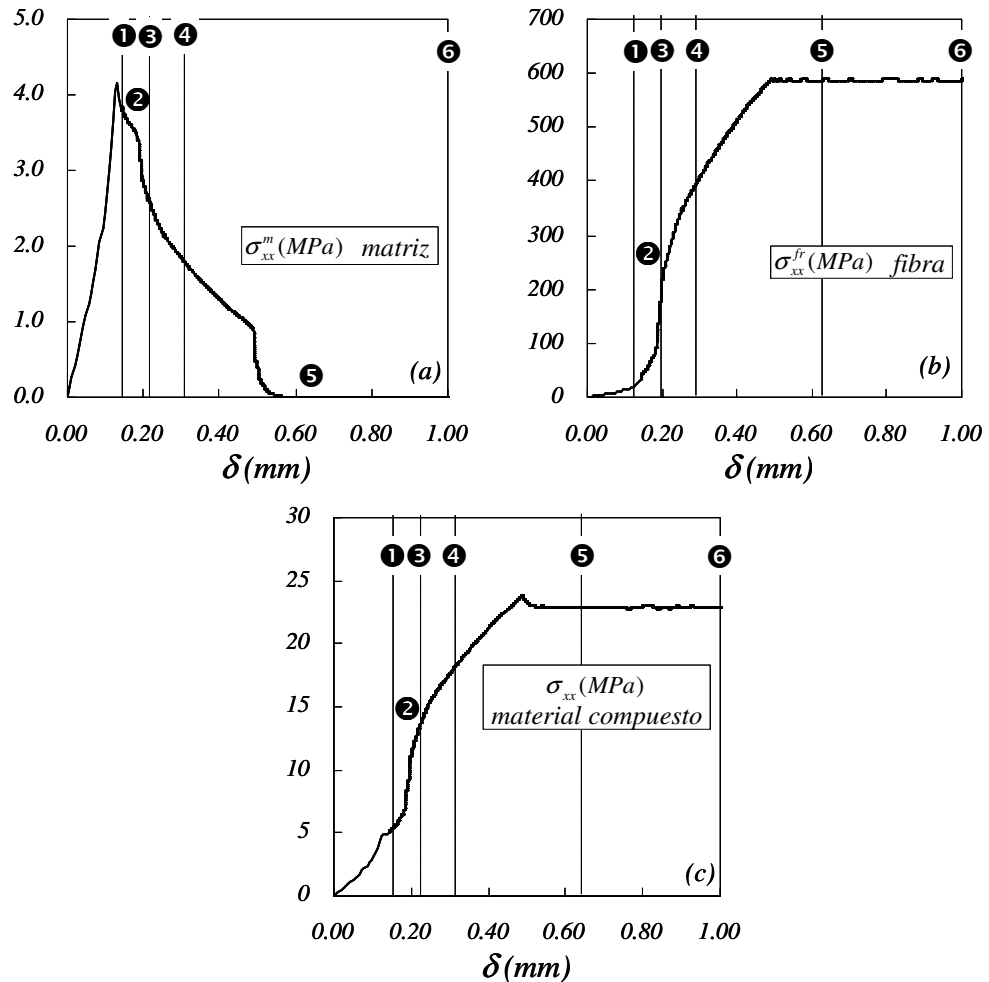


**Figura 3.28.** Simulación numérica de ensayos de vigas de tres puntos con poco refuerzo. (a) respuesta estructural, curva carga – desplazamiento en la mitad de la luz, (b) elementos bifurcados pertenecientes a diferentes caminos de fisura en el último paso de carga (cada entero negativo entre  $-1$  y  $-20$  indica un camino de fisura).



**Figura 3.29.** Vigas con poco refuerzo. (a) evolución de la variable de daño en el hormigón en los instantes del 1 al 6, (b) detalle de la deformada en la mitad de la luz.

A continuación se describe la evolución del fallo material de la viga en 6 pasos de carga de acuerdo con la respuesta estructural mostrada en la Figura 3.28(a), la variable de daño del hormigón indicada en la Figura 3.29(a) y las líneas de iso-desplazamiento dibujada en la Figura 3.31.



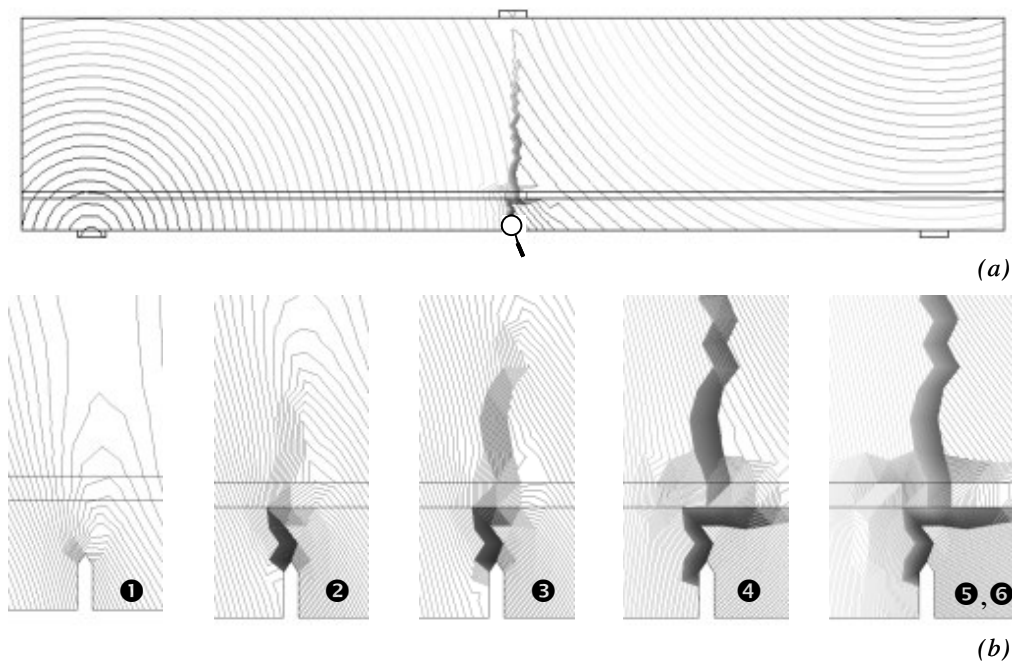
**Figura 3.30.** Simulación numérica de ensayos de vigas de tres puntos con poco refuerzo. Evolución de la tensión en la matriz de hormigón y en las fibras de acero en el puntos *PI* de la zona de material compuesto: (a) tensión normal en dirección *x* de la matriz, (b) tensión axial de la fibra, (c) tensión normal en *x* del material compuesto.

La Figura 3.30 ilustra la evolución de las tensiones normales en la dirección *x*, sobre el elemento *PI* de material compuesto (Figura 3.29(b)), discriminando el comportamiento de la matriz de hormigón y de las fibras de acero.

Desde el paso 1 comienza la localización de la deformación sobre la entalla hasta el instante 2 en el cual la fisura se propaga hacia la cara inferior de la zona de material compuesto y se alcanza la carga máxima de la viga. A partir de este paso se observa pendiente negativa en la curva fuerza-desplazamiento de la probeta, producto de la degradación de la matriz en los elementos de material compuesto que conforman la fisura, como lo muestra la Figura 3.30(a).

En el instante 3, la fisura ya ha cruzado el refuerzo, sin embargo, la localización en el material homogéneo por encima de la banda de material compuesto es mucho menor que por debajo de ella, asimismo, se distinguen dos zonas de daño máximo en el hormigón: el extremo de la fisura y la vecindad de la barra de refuerzo.

En el paso 4, tanto la localización de la deformación como los niveles más altos de daño ocurren en la vertical a la entalla indicando la fisura primaria y en la zona de hormigón armado representado a las fisuras secundarias. Desde este instante la viga recupera parte de su rigidez, como consecuencia de la degradación total del hormigón en masa sobre la trayectoria de fisura (Figura 3.29(a)) y el comportamiento aún elástico del acero de refuerzo (Figura 3.30(b)), proporcionando una rigidez diferencial positiva.



**Figura 3.31.** Simulación numérica de ensayos de vigas de tres puntos con poco refuerzo: (a) líneas de iso-desplazamiento en toda la viga para el último paso de carga, (b) detalle de las líneas de iso-desplazamiento para los instantes 1 a 6 indicados en la Figura 3.28(a).

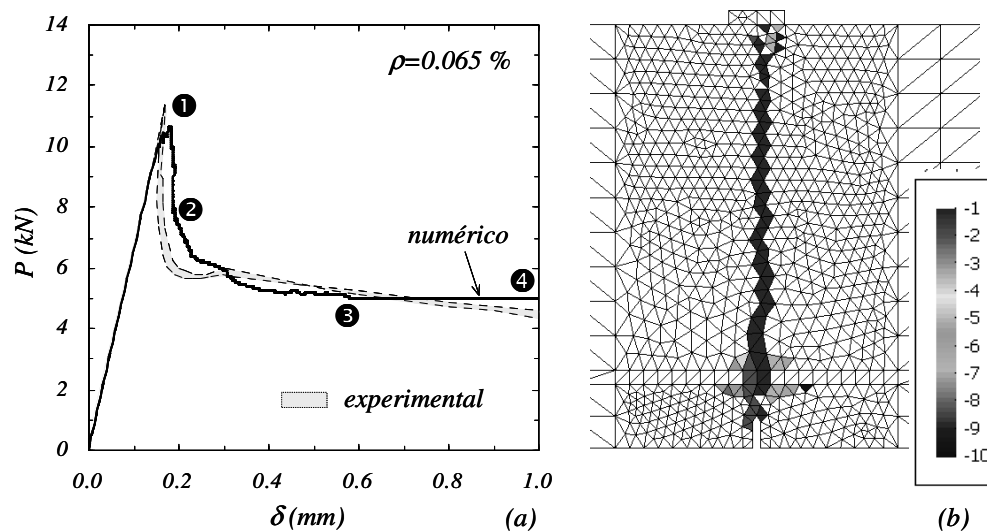
En el paso 5, la tensión del modelo de fibra deslizante llega al valor pico determinado por las condiciones de adherencia, produciendo una fuerte localización en la zona de material compuesto cruzada por la fisura principal (Figura 3.31(b)). Además, los niveles máximos de daño se propagan sobre la banda de hormigón armado a los lados de la fisura primaria. Esta condición se conserva hasta el instante 6.

### 3.4.2. Viga II (cuantía de refuerzo del 0.065%)

En un segundo análisis se modeló una viga con las mismas características del ensayo anterior a excepción de la cuantía de refuerzo. En este caso, la probeta tiene dos barras de 2.5mm de diámetro que representan el 0.065% del área de la sección transversal (Figura 3.26(b)) y un coeficiente de participación volumétrica  $k^{fr} = 0.0196$  (Figura 3.27(d)).

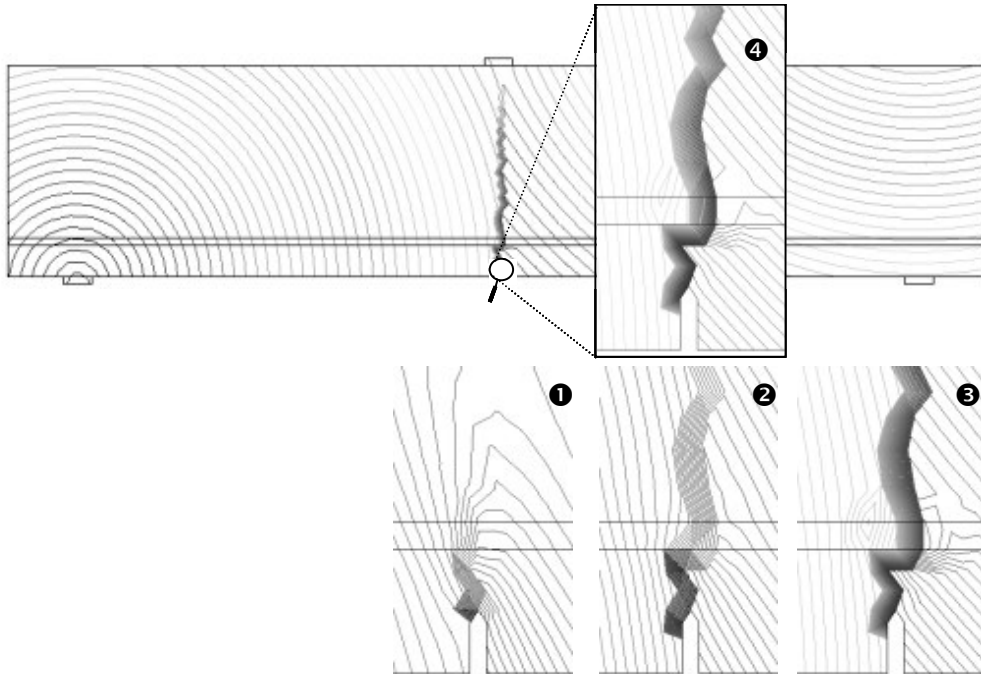
La respuesta estructural de la viga se presenta en la Figura 3.32(a), donde la región en color gris indica el resultado experimental (Ruiz, Elices et al. 1998) y línea continua establece la solución numérica.

En el último paso de carga se observa un camino de fisura primario que asciende verticalmente desde la zona reforzada, indicado como -1 en la Figura 3.32(b), las demás trayectorias de fisura alrededor del refuerzo se propagan muy poco en comparación con el ensayo con 0.13% de refuerzo.



**Figura 3.32.** Simulación numérica de ensayos de vigas de tres puntos con cuantía de refuerzo del 0.065%: (a) respuesta estructural, curva carga – desplazamiento en la mitad de la luz, (b) elementos bifurcados pertenecientes a diferentes caminos de fisura en el último paso de carga (cada entero negativo entre -1 y -10 indica un camino de fisura).

Las líneas de desplazamiento dibujadas en la Figura 3.33 muestran como la fisura principal cruza la zona reforzada sin que se produzca una localización importante de la deformación a los lados de la discontinuidad, a diferencia de lo observado en la Figura 3.31(b) del ensayo anterior.



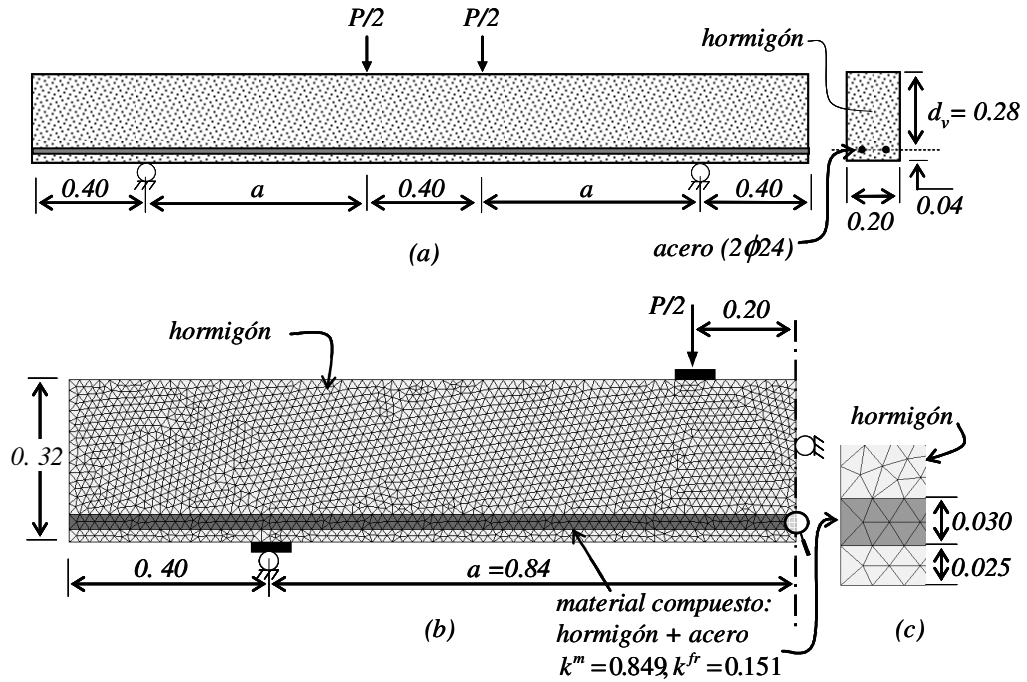
**Figura 3.33.** Simulación numérica de ensayos de vigas de tres puntos con cuantía de refuerzo del 0.065%. Líneas de iso-desplazamiento para el último paso de carga en toda la viga y vista cercana en la zona de la entalla para los instantes 1-3 indicados en la Figura 3.32(a).

La curva fuerza – desplazamiento y la trayectoria de la fisura principal corresponden aproximadamente con los resultados experimentales en las vigas con cuantía de refuerzo del 0.13% y del 0.065%.

### 3.5. Vigas fuertemente armadas

A continuación se modela un conjunto de vigas de hormigón armado similares a las ensayadas por Leonhardt y Walther (Leonhardt 1965). Además se compara cualitativamente la trayectoria de las fisuras experimentales con las líneas de discontinuidad resultantes de la modelación.

A una viga simplemente apoyada de 2.08m de luz se le aplican dos cargas puntuales como se indica en la Figura 3.34(a). La probeta está reforzada longitudinalmente por dos barras de acero de 24mm de diámetro ubicadas a una distancia  $d_v=0.28\text{m}$  de la cara superior de la viga. Las propiedades mecánicas del hormigón y del acero de refuerzo se resumen en el Cuadro 3.5.



**Figura 3.34.** Simulación numérica de ensayos de vigas fuertemente armadas: (a) esquema descriptivo, (b) malla de elementos finitos de media viga, (c) vista cercana de la zona de material compuesto.

Hormigón	
módulo de Young: $E^m = 20.0 \text{ GPa}$	energía de fractura: $G_f = 60.0 \text{ N/m}$
relación de Poisson: $\nu^m = 0.2$	resistencia a tracción: $\sigma_u^m = 2.00 \text{ MPa}$
resistencia a compresión: $\sigma_u^m = 20.0 \text{ MPa}$	
Acero:	
módulo de Young: $E^{fr} = 200.0 \text{ GPa}$	tensión de fluencia: $\sigma_y^{fr} = 456.0 \text{ MPa}$
módulo de ablandamiento: $H^{fr} = 0 \text{ GPa}$	relación de Poisson: $\nu^{fr} = 0.2$

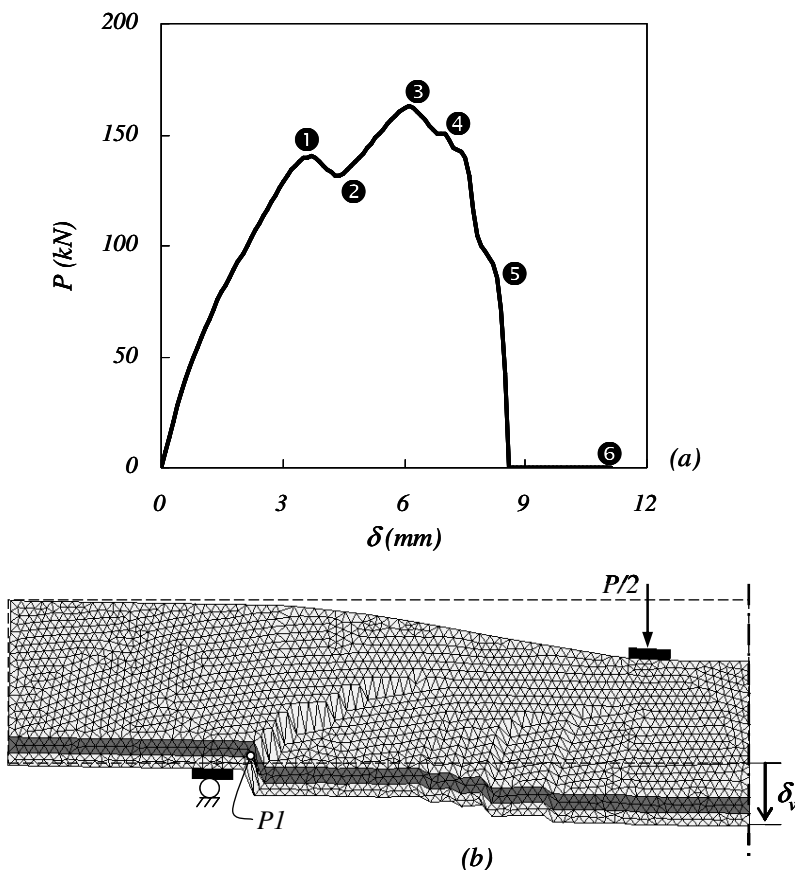
**Cuadro 3.5.** Vigas fuertemente armadas. Propiedades mecánicas de los materiales componentes.

Se han considerado los resultados del ensayo de arrancamiento en (Naaman, Namur et al. 1991), para determinar los parámetros del modelo de deslizamiento, obteniendo un

módulo elástico  $E^{ir}=1111\text{GPa}$  y una tensión de pérdida de adherencia  $\sigma_{adh}^{ir}=311.1\text{MPa}$ .

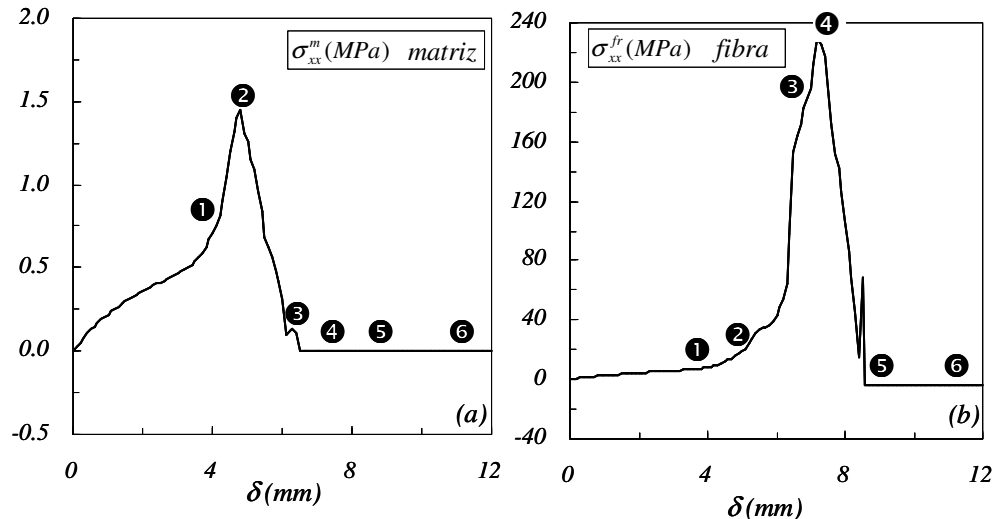
En la simulación se incluyen los posibles efectos de la acción pasador caracterizados por el módulo elástico equivalente  $G^{fr}=E^{fr}/2(1+\nu^{fr})=83.33\text{GPa}$ , la tensión cortante de fluencia equivalente  $\tau_y^f=\sigma_y^{fr}/\sqrt{3}=263.3\text{MPa}$  y un módulo de ablandamiento nulo  $H^{fr}=0$ .

La discretización del problema se muestra en la Figura 3.34(b), donde los elementos en tono claro indican hormigón en masa representado con un modelo de daño de tracción y compresión diferenciado (Apartado 2.2.1), mientras que los elementos en tono oscuro corresponden al material compuesto tipo hormigón armado descrito por la formulación desarrollada. A pesar que el diámetro de las barras es de 24mm, se ha considerado que una altura de la banda de los elementos de material compuesto de 30mm, como lo indica la Figura 3.34(c), donde el coeficiente de participación del acero correspondiente es  $k^{fr}=0.151$ .



**Figura 3.35.** Simulación numérica de ensayos de vigas fuertemente armadas: (a) relación carga aplicada versus desplazamiento vertical en la mitad de la luz, (b) deformada exagerada del modelo numérico en el instante 4.

**Observación 3.4** En vigas fuertemente armadas se propagan varias fisuras entre los apoyos de forma simétrica, por lo tanto se puede modelar la mitad de la pieza. En este caso las condiciones de borde en el eje de simetría no están sobre la trayectoria de una discontinuidad.



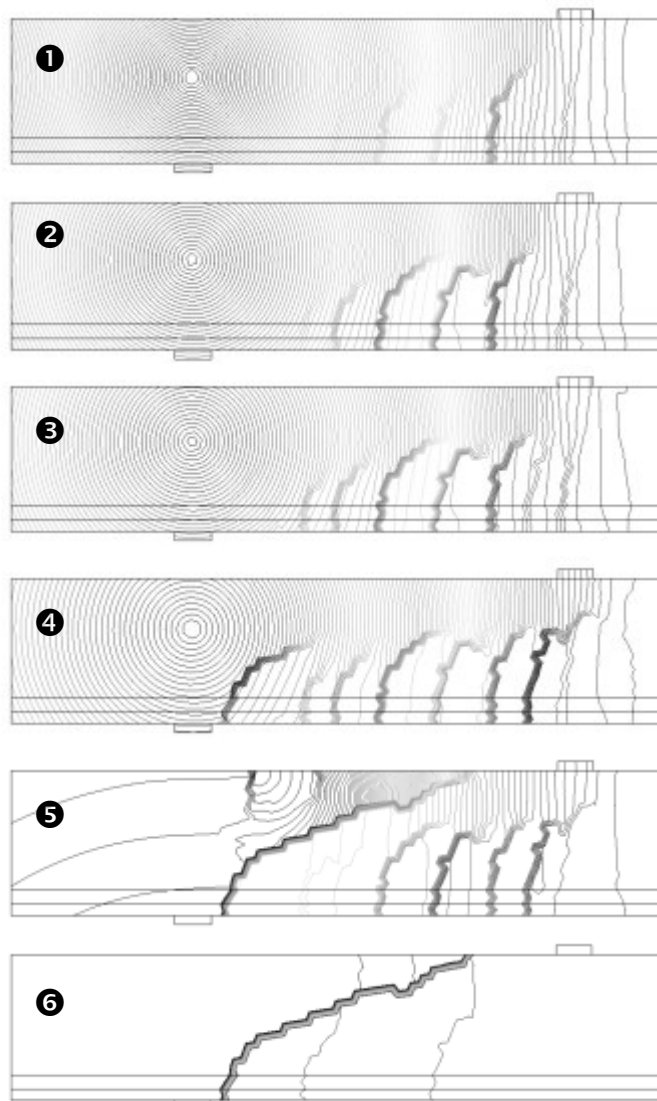
**Figura 3.36.** Simulación numérica de ensayos de vigas fuertemente armadas. Evolución de las tensiones en los constituyentes del material compuesto en el punto  $P1$  (Figura 3.35(b)): (a) tensión normal en  $x$  de la matriz de hormigón, (b) tensión axial de las fibras de acero.

Para los instantes indicados en la curva carga aplicada  $P$  versus desplazamiento vertical en la mitad de la luz  $\delta$  de la Figura 3.35(a), la Figura 3.37 muestra las líneas de iso-desplazamiento, mientras que la Figura 3.38 y la Figura 3.39 presentan los elementos en carga inelástica y con índice de daño igual a 1, respectivamente.

La Figura 3.36 describe la evolución de las tensiones en el hormigón y en el acero en el punto  $P1$  de material compuesto (Figura 3.35(b)). Aquí se observa que la tensión en el hormigón, normal en dirección  $x$ , aumenta hasta el instante 2, a partir del cual comienza el régimen inelástico (Figura 3.38) y se reduce la carga alcanzando la degradación total en los instantes 4, 5 y 6. En las fibras de acero se presenta una descarga elástica desde el instante 4, como consecuencia de la pérdida total de rigidez de la viga después de la formación de la fisura diagonal mostrada en la Figura 3.37. El pequeño pico cerca al instante 5 de la Figura 3.36(b), se debe posiblemente a inestabilidades causadas por la localización de la deformación en la cara superior de la viga.

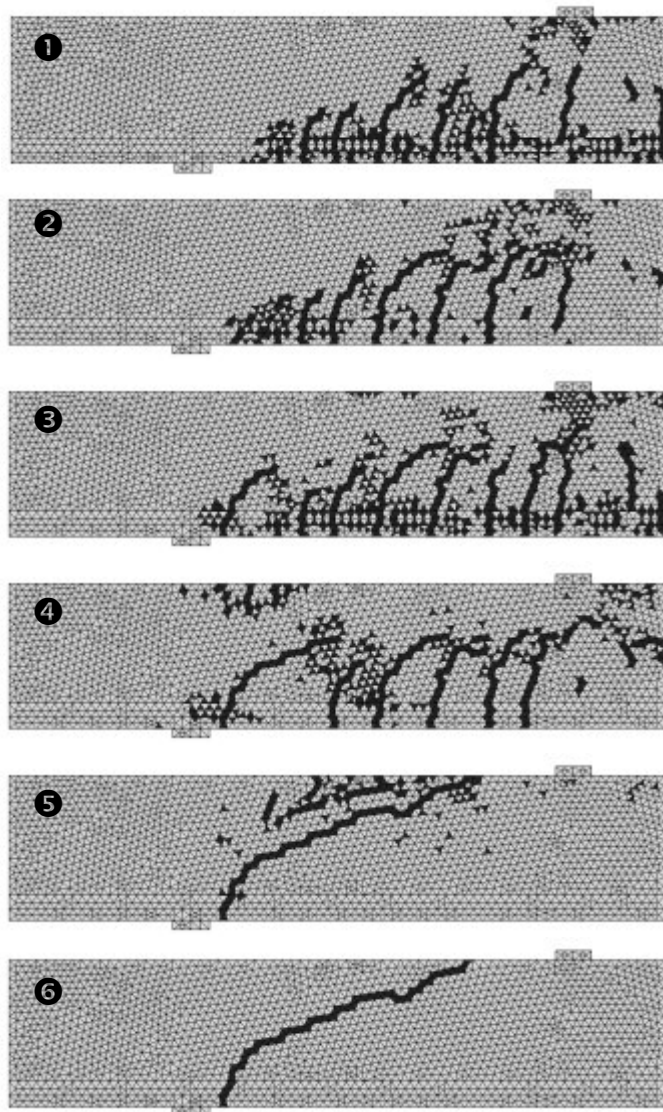
Con respecto a la visualización de los resultados, la concentración de líneas de desplazamiento (Figura 3.37), y la condición de carga inelástica en los elementos (Figura 3.38), son procesos reversibles, por ejemplo, una zona localizada y en carga del instante 5, se transforma en una región no localizada y en descarga en el instante 6. En otras palabras, estos resultados indican las fisuras activas en cada instante de carga.





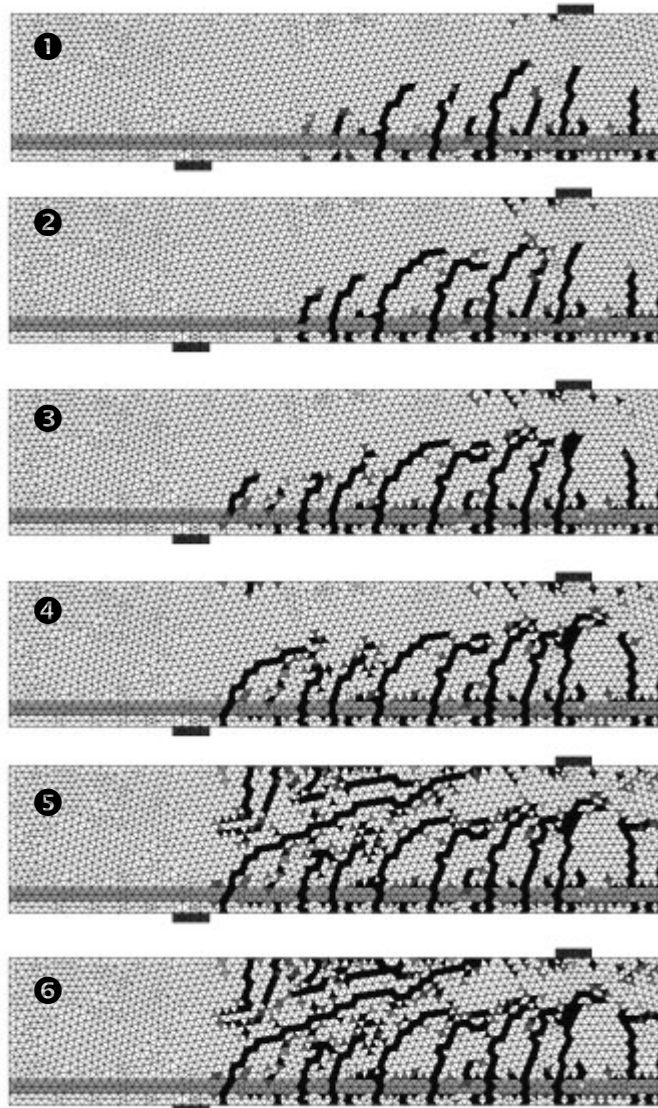
**Figura 3.37.** Simulación numérica de ensayos de vigas fuertemente armadas. Líneas de iso-desplazamiento para los instantes 1 a 6.

Los elementos finitos con índice de daño igual a 1, mostrados en la Figura 3.39, pretenden proporcionar una imagen acumulada de la trayectoria de fisuras equivalente a la observable en las fotografías del experimento en un instante específico. Por lo tanto, en el último paso de carga se obtiene el mapa de fisuras activas e inactivas que se formaron durante toda la historia de la viga.



**Figura 3.38.** Simulación numérica de ensayos de vigas fuertemente armadas. Elementos en carga inelástica para los instantes 1 a 6.

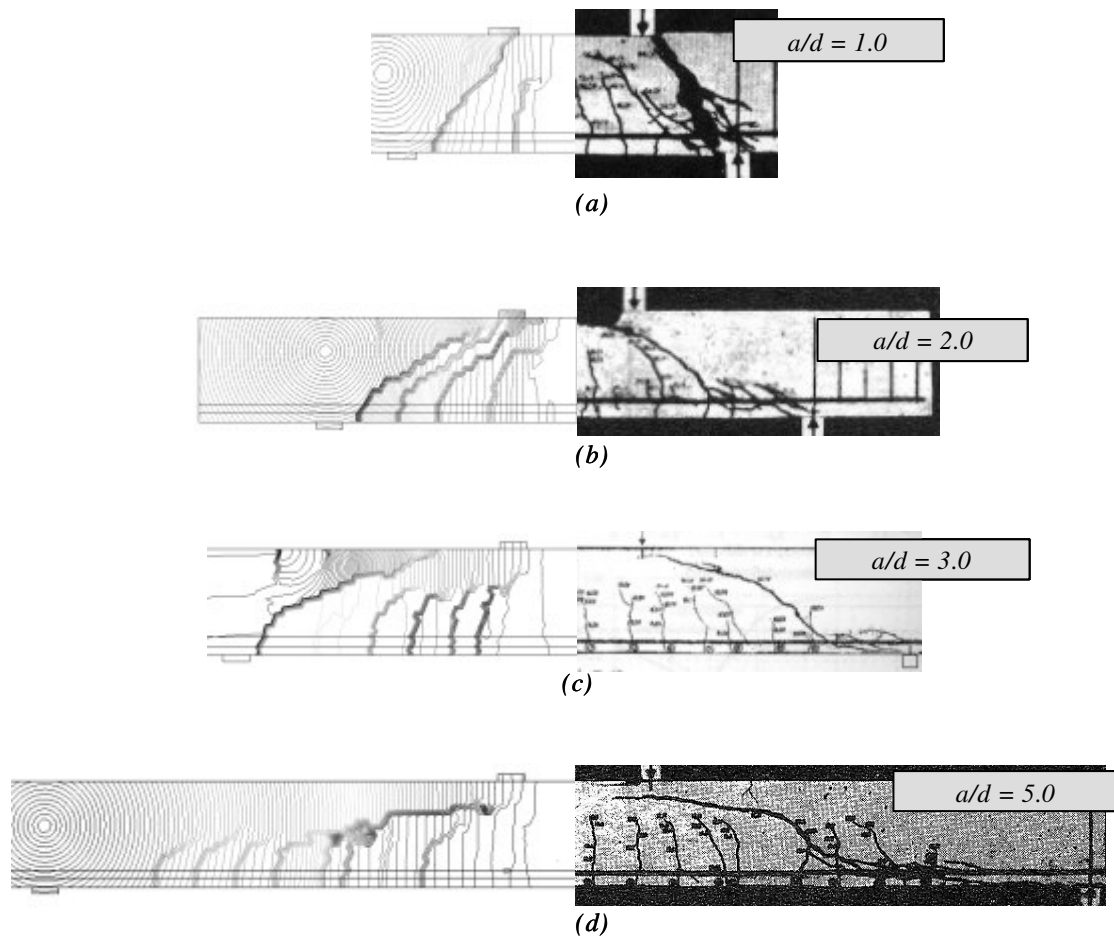
En los instantes 1 y 2 aparecen las primeras fisuras ubicadas entre el punto de aplicación de la carga y el apoyo, extendiéndose por tres cuartas partes de la altura de la viga. En el paso de carga 3 aumenta el número de fisuras y se alcanza la carga pico de la respuesta estructural. Desde este momento la carga decae mientras se propaga una nueva fisura más inclinada que las demás denominada *fisura diagonal*, como lo muestra el instante 4 y 5. Finalmente, en el instante 6, cuando capacidad de la viga es nula se observa una sola banda de localización y de carga inelástica que describe la trayectoria de la fisura diagonal.



**Figura 3.39.** Simulación numérica de ensayos de vigas fuertemente armadas. Elementos totalmente dañados en los instantes 1 a 6.

Con las mismas características descritas anteriormente se modelaron 3 vigas de igual altura y diferentes luces, donde el factor  $a_v/d_v$  es igual a 1 , 2 y 5, respectivamente. A continuación se compara la trayectoria de fisuras calculada y experimental.

La Figura 3.40 muestra la concentración de líneas de iso-desplazamiento en el instante de carga de mayor presencia de fisuras activas, y el mapa real de fisuración de la viga después de la carga pico.



**Figura 3.40.** Simulación numérica de ensayos de vigas fuertemente armadas. Comparación entre las trayectorias de fisura experimentales y modeladas para vigas de diferentes luces: (a)  $a_v/d_v=1.0$ , (b)  $a_v/d_v=2.0$ , (c)  $a_v/d_v=3.0$ , y (d)  $a_v/d_v=5.0$ .

En general, el estado final de fisuración corresponde cualitativamente con el comportamiento tomado de los ensayos experimentales. El modelo captura tanto el grupo de fisuras paralelas como la fisura diagonal relacionada con el colapso total de la viga.

**Observación 3.5** *La modelación demuestra que la cantidad de acero de refuerzo de una viga determina la aparición y propagación de fisuras y en consecuencia su capacidad estructural. En vigas ligeramente armadas la carga pico ocurre poco después del inicio del daño en el hormigón, presentando una fisura principal en la mitad de la luz. En cambio, en vigas fuertemente armadas, el acero de refuerzo aumenta la capacidad estructural e induce inicialmente la aparición varias fisuras perpendiculares al eje de las barras. El colapso gene-*

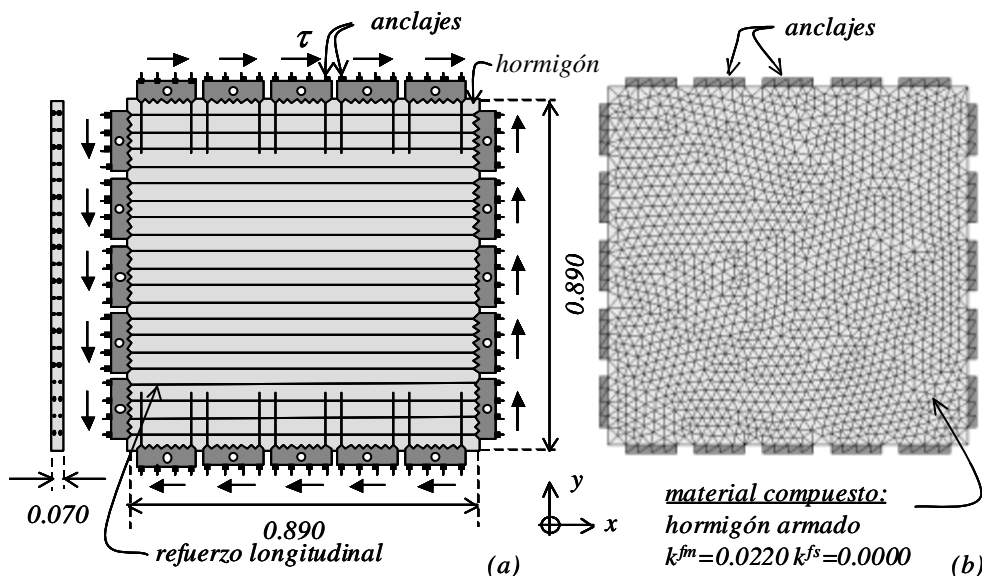
ral se produce con la formación de una fisura diagonal asociada con la tensión normal y cortante producida en la viga.

## 3.6. Paneles sometidos a tensión cortante

### 3.6.1. Panel reforzado en una dirección sometido a cortante puro

A continuación se presentan los resultados de la simulación numérica de un panel de hormigón armado sometido a corte puro denominado PB18 en los ensayos experimentales presentados en (Bhide & Collins 1989).

El panel de 890mm por 890mm y 70mm de espesor, está reforzado por 40 barras de 6mm de diámetro orientadas en  $x$ , que representan el 2.2% del volumen total de la probeta, como se indica en la Figura 3.41(a). Se aplica un cortante puro en el plano  $xy$  mediante un juego de 5 anclajes por cada cara que están adheridos al hormigón y al acero.



**Figura 3.41.** Panel reforzado en una dirección sometido a cortante puro: (a) esquema descriptivo y (b) malla de elementos finitos.

Dada la distribución de las barras de refuerzo en el interior del panel, es válido suponer que el hormigón armado es un material compuesto conformado por fibras de ace-

ro distribuidas uniformemente en una matriz de hormigón. Las propiedades mecánicas de ambos materiales componentes se resumen en el Cuadro 3.6.

<i>Hormigón</i>	
módulo de Young: $E^m = 20.0$ GPa	energía de fractura: $G_f = 100.0$ N/m
relación de Poisson: $\nu^m = 0.2$	resistencia a tracción: $\sigma_u^m = 2.00$ MPa
resistencia a compresión: $\sigma_u^m = 20.0$ MPa	
<i>Acero</i>	
módulo de Young: $E^{fr} = 200.0$ GPa	tensión de fluencia: $\sigma_y^{fr} = 402.0$ MPa
módulo de ablandamiento: $H^{fr} = 0$ GPa	relación de Poisson: $\nu^{fr} = 0.2$

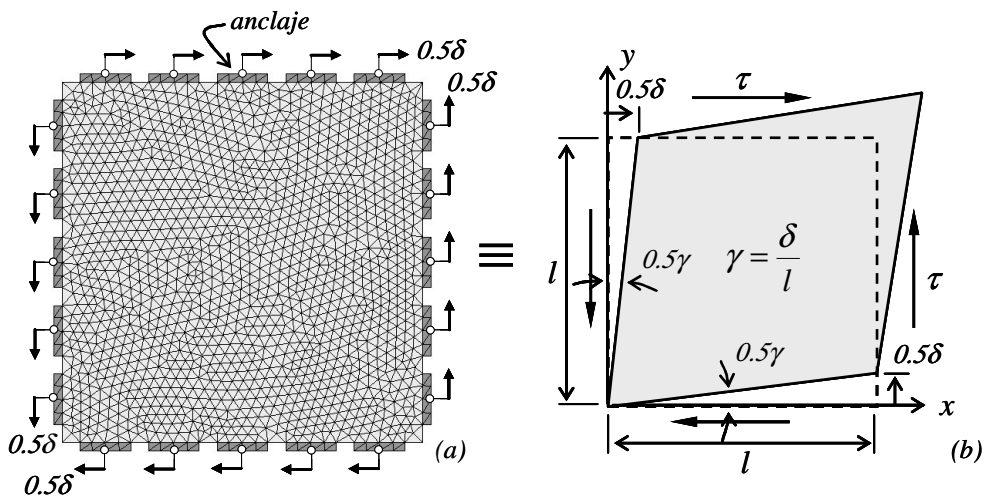
**Cuadro 3.6.** Paneles sometidos a tensión cortante. Propiedades mecánicas de los materiales componentes.

La simulación numérica supone una elevada adherencia entre el hormigón y las barras de acero, así como también, un importante efecto de la acción pasador, caracterizado por un módulo elástico equivalente  $G^{fr} = E^{fr}/2(1 + \nu^{fr})$  igual a 83.33GPa, una tensión cortante de fluencia equivalente  $\tau_y^f = \sigma_y^{fr}/\sqrt{3} = 263.3$ MPa y un módulo de ablandamiento nulo  $H^{fr} = 0$ .

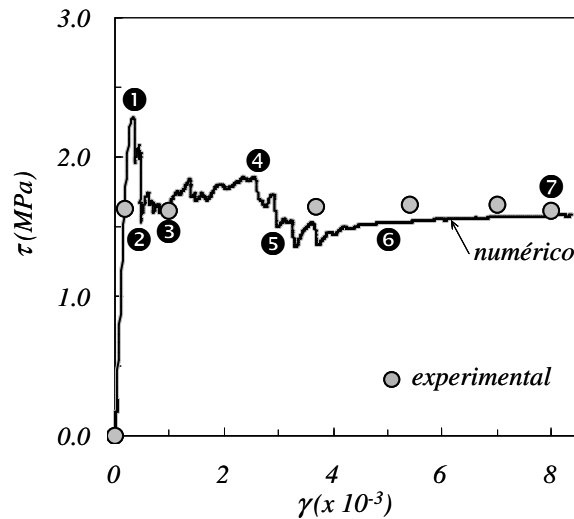
El problema se considera en estado plano de tensiones y se discretiza con la malla de 2736 elementos finitos triangulares lineales mostrada en la Figura 3.41(b), en la cual, el tono oscuro representa los anclajes de aplicación de carga y el tono claro representa el hormigón armado. Se supone que los anclajes son rígidos y que todos los elementos finitos del panel tiene material compuesto constituido por un 97.8% de matriz (hormigón) y un 2.2% de fibras (acero) en dirección  $x$ .

En el modelo numérico se impone un desplazamiento en cada anclaje, como lo indica la Figura 3.42, que generan en conjunto un estado de cortante puro sobre el panel.

La respuesta estructural mostrada en la Figura 3.43, se define mediante la relación entre la deformación angular media ( $\gamma = \delta/l$ ) y la tensión cortante media en una de las caras del panel, obtenida como la sumatoria de las reacciones en cada anclaje  $F_i$  dividida en el área de la cara ( $\tau = \sum F_i/(l \cdot t)$ ). En la gráfica, los resultados experimentales se indican con puntos y los numéricos con una línea continua. La solución propuesta muestra cierta diferencia con la carga pico de la respuesta experimental, sin embargo, el resto de la curva indica una aproximación satisfactoria. Tales diferencias pueden ser causadas por algunas condiciones de contorno del problema real desconocidas y despreciadas en el modelo numérico.



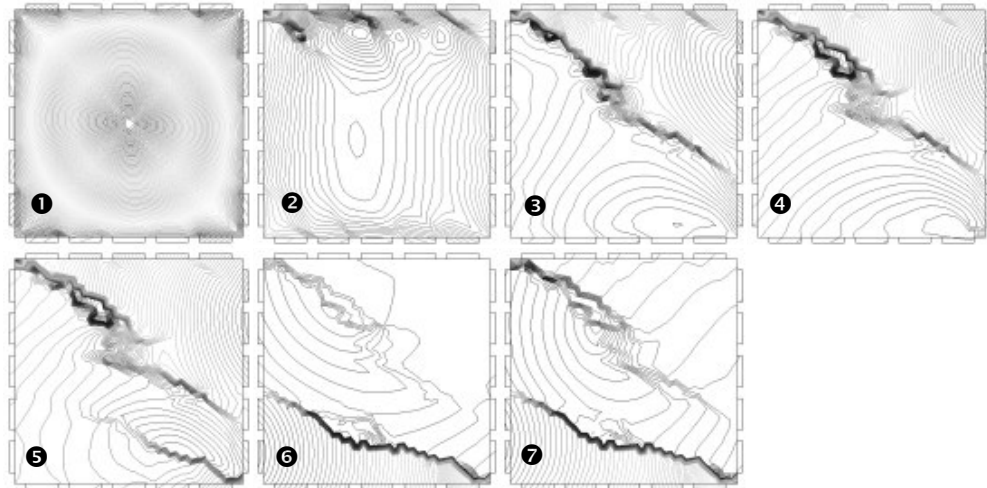
**Figura 3.42.** Panel reforzado sometido a cortante puro: (a) condiciones de contorno en la simulación numérica y (b) tensión y deformación producida sobre el panel.



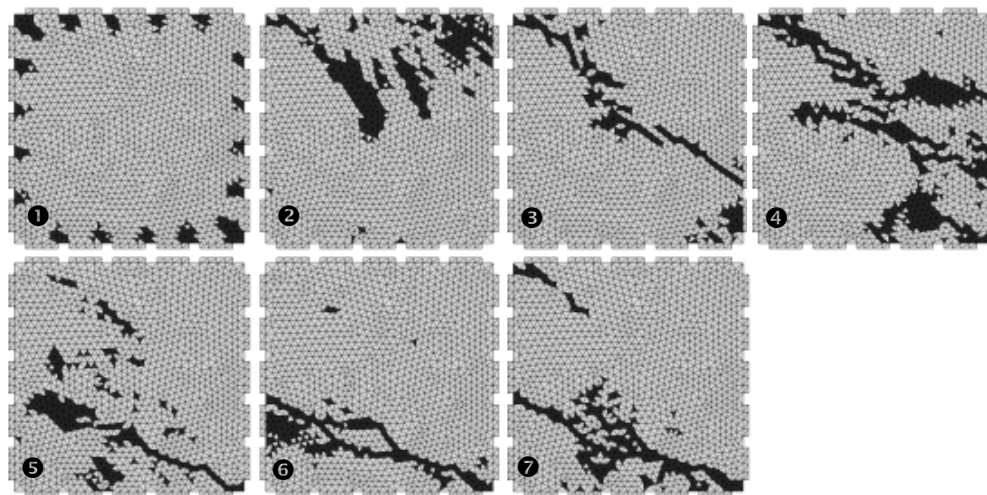
**Figura 3.43.** Panel reforzado en una dirección sometido a cortante puro. Curva deformación angular media versus tensión cortante aplicada.

Las líneas de iso-desplazamiento dibujadas en la Figura 3.44 representan las trayectorias de fisura en los instantes 1 a 7 mostrados en la Figura 3.43(a). Si se produce la bifurcación material aumentan las deformaciones en un punto en carga inelástica y disminuyen en un punto vecino en descarga, manteniendo la continuidad de tracciones. Por lo tanto, los elementos en condición de carga inelástica rodeados de zonas en descarga son un indicador de la región fisurada, como lo muestra la Figura 3.45. Los elementos en tono oscuro están en carga inelástica y en tono claro en descarga.

En la Figura 3.46, se presenta una fotografía del panel ensayado en la referencia (Bhide & Collins 1989) y se compara con los elementos en condición de carga inelástica y las líneas de iso-desplazamiento obtenidas de la simulación numérica, para el paso de carga número 3. De igual forma se hace para el instante 7 en la Figura 3.47.



**Figura 3.44.** Panel reforzado en una dirección sometido a cortante puro. Líneas de iso-desplazamiento para los instantes 1 a 7.



**Figura 3.45.** Panel reforzado en una dirección sometido a cortante puro. Elementos en condición de carga inelástica para los instantes 1 a 7.

La Figura 3.48 muestra los valores aproximados del ángulo que conforman las fisuras con respecto a la horizontal, en los resultados experimentales y numéricos.

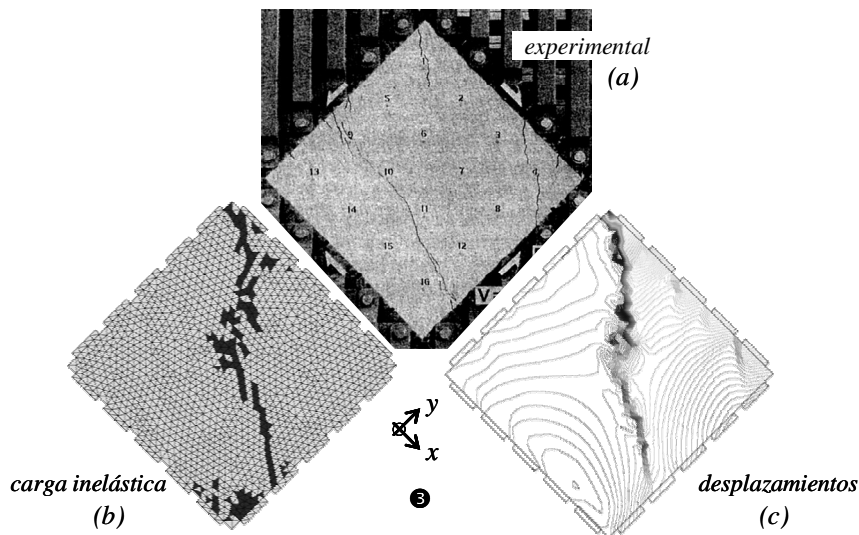


Hasta el instante 1 no se observa localización de la deformación en la probeta, a pesar que inmediatamente después cae la tensión cortante.

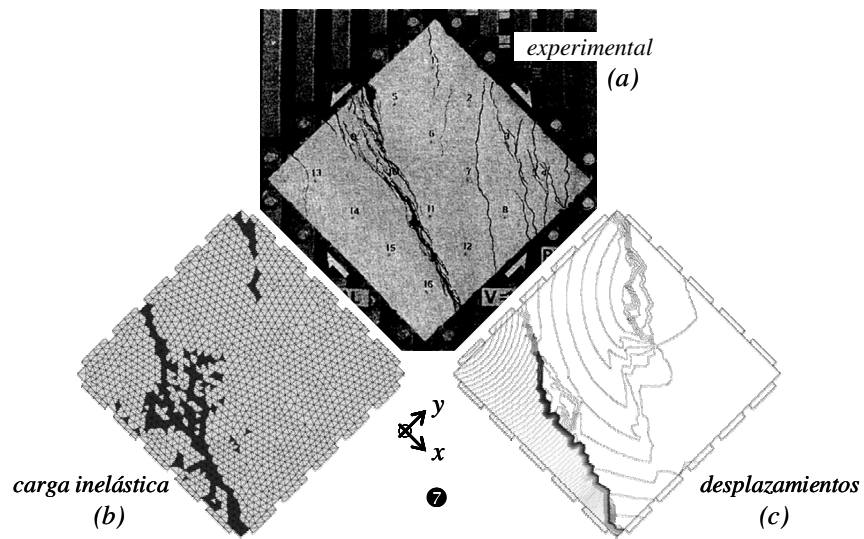
En la etapa 2 se observan pequeñas concentraciones de las líneas de desplazamiento en la cara superior de la probeta y descarga en el resto de ella. Poco después, en el estado 3, se presentan dos trayectorias de localización: una que parte del extremo superior izquierdo y otra que comienza entre dos anclajes de la cara derecha. De acuerdo con los resultados experimentales observados en esta etapa (Figura 3.46(a) y Figura 3.48), la primera trayectoria de localización de la deformación coincide aproximadamente con una de las fisuras en la probeta inclinada  $45^\circ$  con respecto a  $x$  (normal a la dirección principal mayor), sin embargo, la segunda trayectoria tiene una dirección incorrecta con respecto al resultado experimental.

En el paso 4 las líneas de iso-desplazamiento se empiezan a concentrar en el extremo inferior derecho de la probeta mientras se descargan los elementos de las fisuras anteriores.

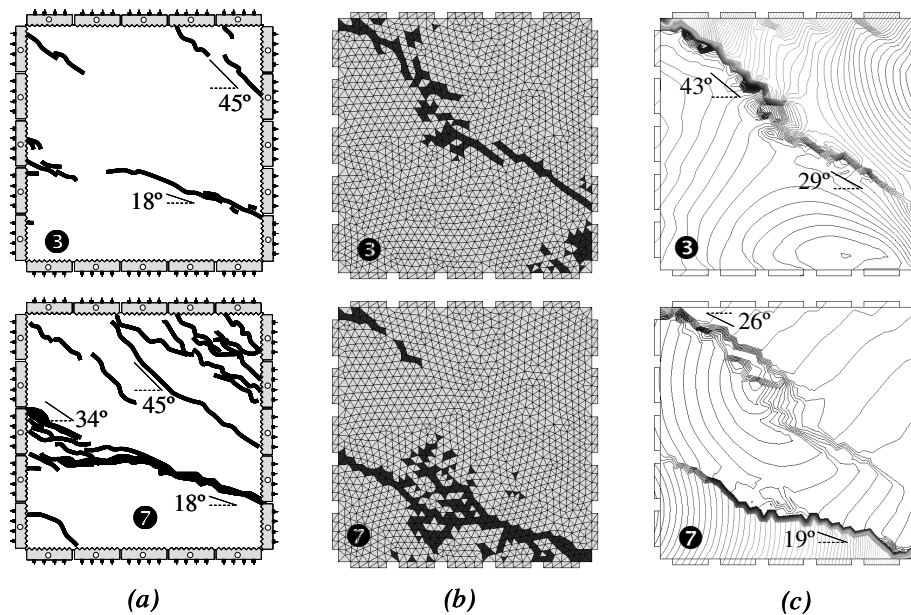
En los instantes 5 y 6 se presenta una clara localización de la deformación en la parte inferior del panel, que se conserva hasta el paso 7 coincidiendo con los resultados experimentales (Figura 3.47).



**Figura 3.46.** Panel reforzado en una dirección sometido a cortante puro. Comparación entre las trayectorias de fisura en el instantes 3: (a) resultado experimental (Bhide & Collins 1989), (b) elementos en condición de carga inelástica, (c) líneas de iso-desplazamiento.



**Figura 3.47.** Panel reforzado en una dirección sometido a cortante puro. Comparación entre las trayectorias de fisura en el instantes 7: (a) resultado experimental (Bhide & Collins 1989), (b) elementos en condición de carga inelástica, (c) líneas de iso-desplazamiento.



**Figura 3.48.** Panel reforzado en una dirección sometido a cortante puro. Comparación entre las direcciones de fisura en los instantes 3 y 7: (a) reproducción de los resultados experimentales (Bhide & Collins 1989), (b) elementos en condición de carga inelástica, (c) líneas de iso-desplazamiento.

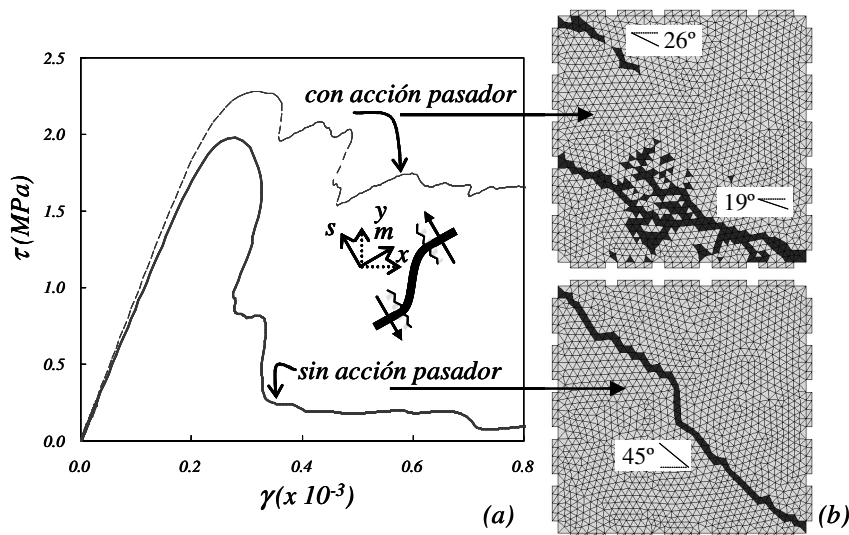
Por la naturaleza homogénea del ensayo se supone aleatorio el punto de iniciación de la fisura, por lo tanto, se considera correcto encontrar en la simulación una disconti-

nuidad paralela a la fisura experimental a pesar de su posición en el panel como se observa en el instante 7.

### 3.6.2. Efecto de la acción pasador en paneles sometidos a cortante puro

En este apartado se presentan los resultados de la simulación del mismo panel del ejemplo anterior despreciando la rigidez dada por la acción pasador.

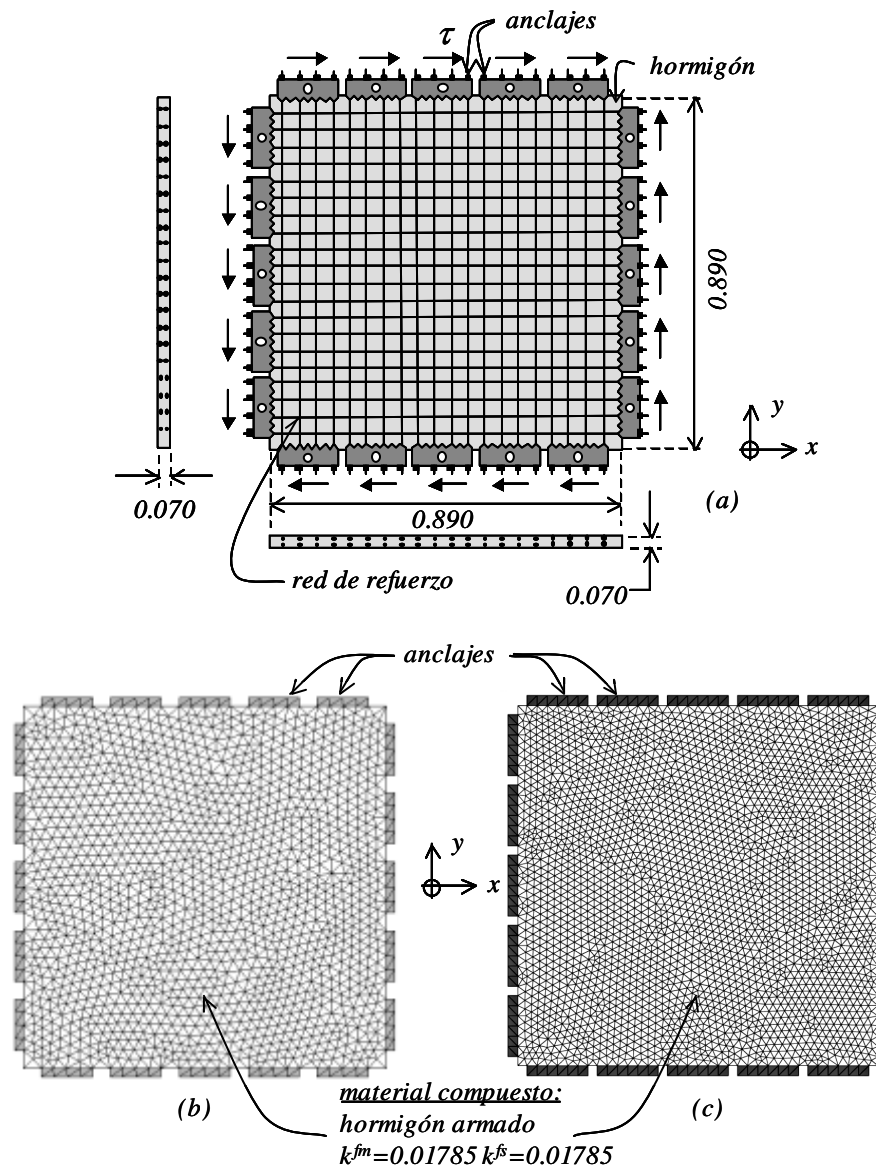
La capacidad a cortante a través de las barras de acero proporciona un aporte importante a la respuesta de estructuras de hormigón armado sometidas a tensiones de cortante. La Figura 3.49 compara los resultados entre incluir o no la acción pasador. Dado que el panel está sometido a cortante puro en el plano  $xy$ , cuando se desprecia la acción pasador, la capacidad axial de las barras en dirección  $x$  no genera ningún aporte a la capacidad a cortante del compuesto, por esta razón, la trayectoria de la fisura y la respuesta estructural muestran un comportamiento similar al esperado en un panel de hormigón en masa.



**Figura 3.49.** Panel reforzado en una dirección sometido a cortante puro. Comparación de resultados entre incluir o no la acción pasador: (a) curva deformación angular media vs tensión cortante aplicada, (b) elementos en condición de carga inelástica y dirección de las fisuras en el instante final.

### 3.6.3. Panel reforzado en dos direcciones sometido a cortante puro

Este apartado muestra los resultados numéricos de la simulación del ensayo de un panel reforzado en dos direcciones sometido a cortante puro desarrollado en (Collins, Vecchio et al. 1985).

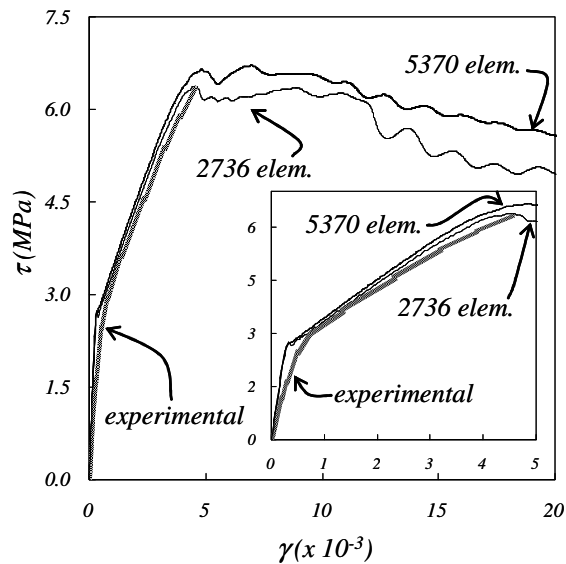


**Figura 3.50.** Panel reforzado en dos direcciones sometido a cortante puro: (a) esquema descriptivo, (b) malla de 2736 elementos, (c) malla de 5370 elementos.

En este panel las barras de refuerzo están orientadas en  $x$  y en  $y$  de manera uniforme, con coeficientes de participación iguales a  $k^{fr} = k^{fs} = 0.01785$ . Las demás características coinciden con las presentadas en el ensayo anterior. En la Figura 3.50(a) se muestra un esquema descriptivo del problema.

Se han utilizado dos mallas de elementos finitos: la primera con 2736 elementos finitos de 0.026m de tamaño medio (Figura 3.50(b)) y la segunda con 5370 elementos de 0.019m de tamaño medio (Figura 3.51(c)).

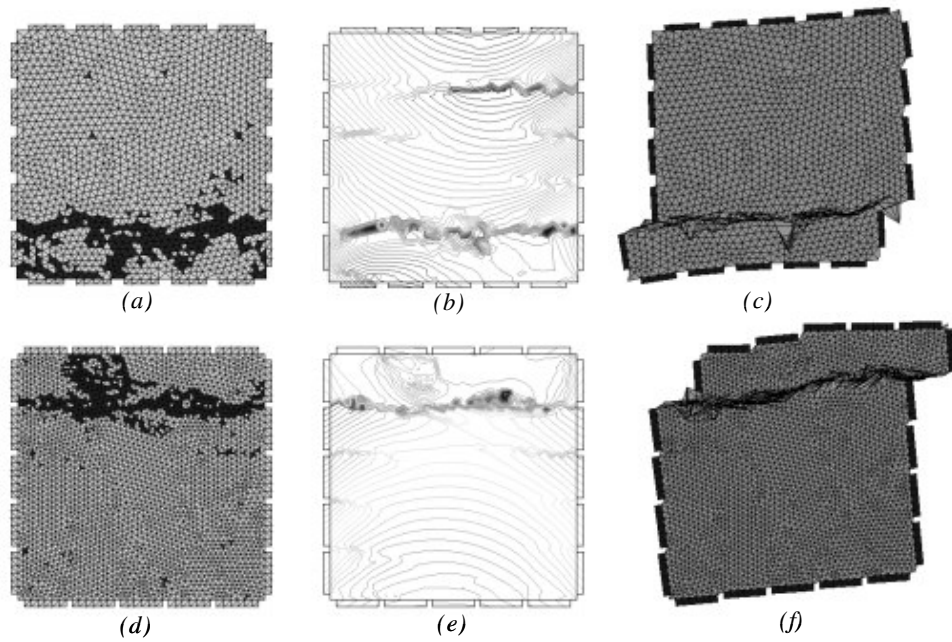
La Figura 3.51 muestra la relación entre la deformación angular media y la tensión cortante aplicada para las dos mallas. Asimismo en la Figura 3.52 se indican los elementos finitos en carga inelástica, las líneas de iso-desplazamiento y la deformada para el último paso de carga.



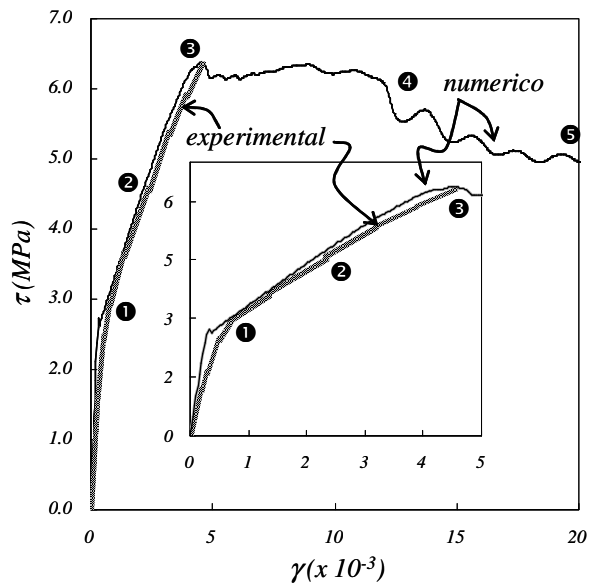
**Figura 3.51.** Panel reforzado en dos direcciones sometido a cortante puro. Relación entre deformación angular media y tensión cortante aplicada para dos mallas diferentes.

De la comparación de resultados entre ambas mallas se puede indicar que la respuesta estructural es similar y que la trayectoria de las fisuras mantiene la misma dirección y forma a pesar que aparece en lugares diferentes del panel. Se considera que para una condición de tensión uniforme la posición de la fisura es aleatoria, por lo tanto, esta diferencia en el resultado es aceptable.

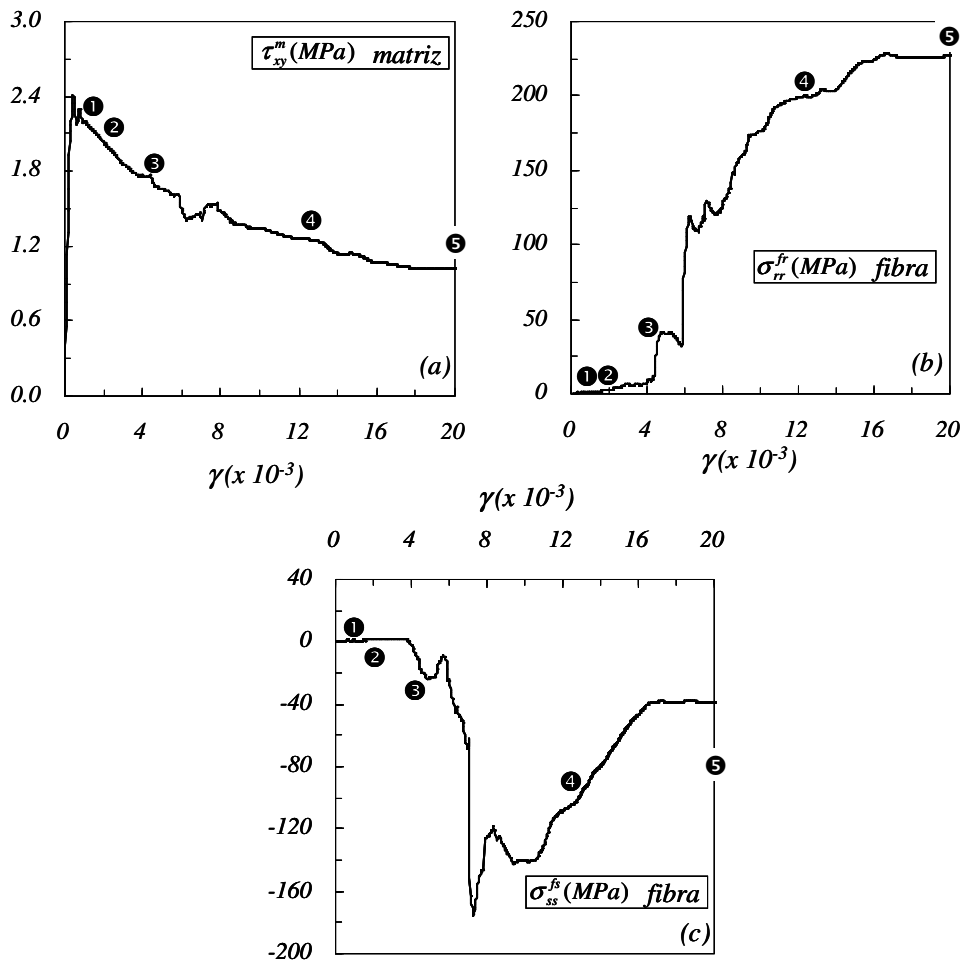
A continuación se describen los resultados obtenidos con la malla de 2736 elementos y sus comparación con los valores experimentales. En la Figura 3.53 se muestra la relación entre la deformación angular media y la tensión cortante aplicada al panel, donde la línea delgada corresponde al resultado numérico y la línea gruesa a los valores experimentales.



**Figura 3.52.** Panel reforzado en dos direcciones sometido a cortante puro. Elementos en carga inelástica, líneas de iso-desplazamiento y deformada de dos mallas diferentes en el instante final: (a), (b) y (c) en la malla de 2736 elementos, (d), (e) y (f) en la malla de 5730 elementos..



**Figura 3.53.** Panel reforzado en dos direcciones sometido a cortante puro. Relación entre deformación angular media y tensión cortante aplicada para diferentes instantes de carga.



**Figura 3.54.** Panel reforzado en dos direcciones sometido a cortante puro. Evolución de las tensiones en el hormigón y el acero en el punto P1: (a) tensión cortante en la matriz, (b) tensión en la fibra en dirección r, (c) tensión en la fibra en dirección s.

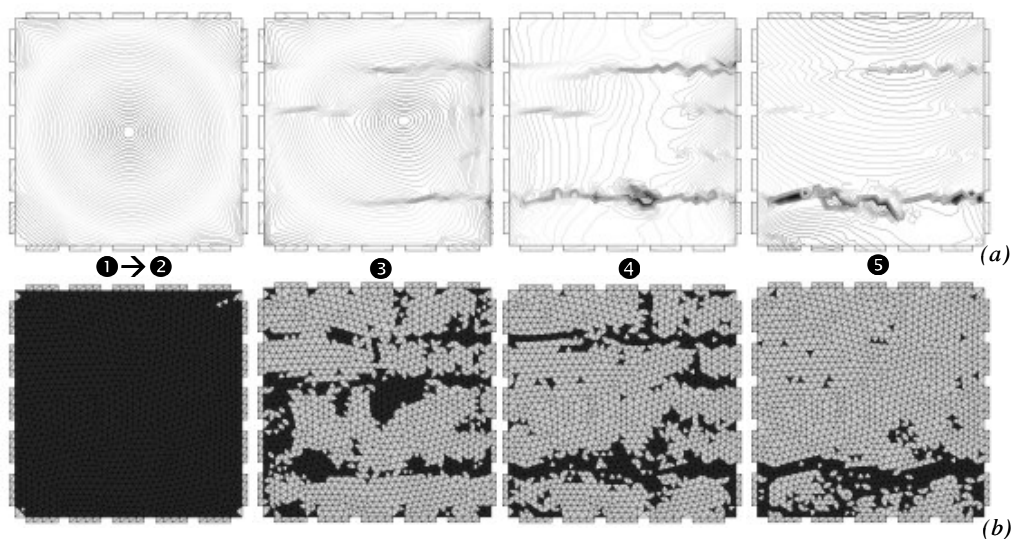
La Figura 3.54 presenta la evolución de la tensión en los materiales componentes sobre un punto *P1* ubicado en el centro del panel (Figura 3.50). El proceso de localización de deformación cambia el estado de cortante puro inicial actuante en el panel antes del instante 1, en el cual la tensión cortante es soportada esencialmente por la matriz. A partir del inicio del daño (instante 1), la tensión cortante en la matriz de hormigón se reduce, mientras las fibras en dirección *r* mantienen un comportamiento elástico con una tensión axial creciente. La tensión de compresión en las fibras orientadas en *s* aumenta hasta un valor de -155 MPa entre los instantes 3 y 4, y posteriormente se reduce

hasta un valor  $-40\text{MPa}$  aproximadamente, esto refleja una diferencia importante en la contribución de cada paquete de fibras en el comportamiento del compuesto.

Los elementos en carga inelástica y las líneas de iso-desplazamiento para algunos pasos de carga se ilustran en la Figura 3.55.

Durante los instantes 1 y 2 se observa un estado de carga inelástica de todo el panel sin localización de la deformación, esto significa que a pesar del daño producido en la matriz no se produce una activación del salto de desplazamientos y por lo tanto determinante del tensor de localización tangente es positivo. Es importante recordar que en el cálculo de este tensor interviene la rigidez de la matriz, de las fibras y de los efectos de interacción entre ambas. En esta fase del experimento se observan muchas fisuras en la dirección principal de poca abertura y distribuidas por todo la probeta.

En el instante 3 comienza la localización de la deformación en tres zonas de la probeta. En el paso 4 solo se conforman dos fisuras y en el instante final queda una sola discontinuidad en dirección  $x$  en la zona inferior del panel. El ensayo indica que la fisura principal también es paralela a  $x$  pero se produce en la parte superior de la probeta. Dado el estado homogéneo del panel y de las acciones aplicadas se considera que esta fisura aparece a cualquier altura de la muestra.



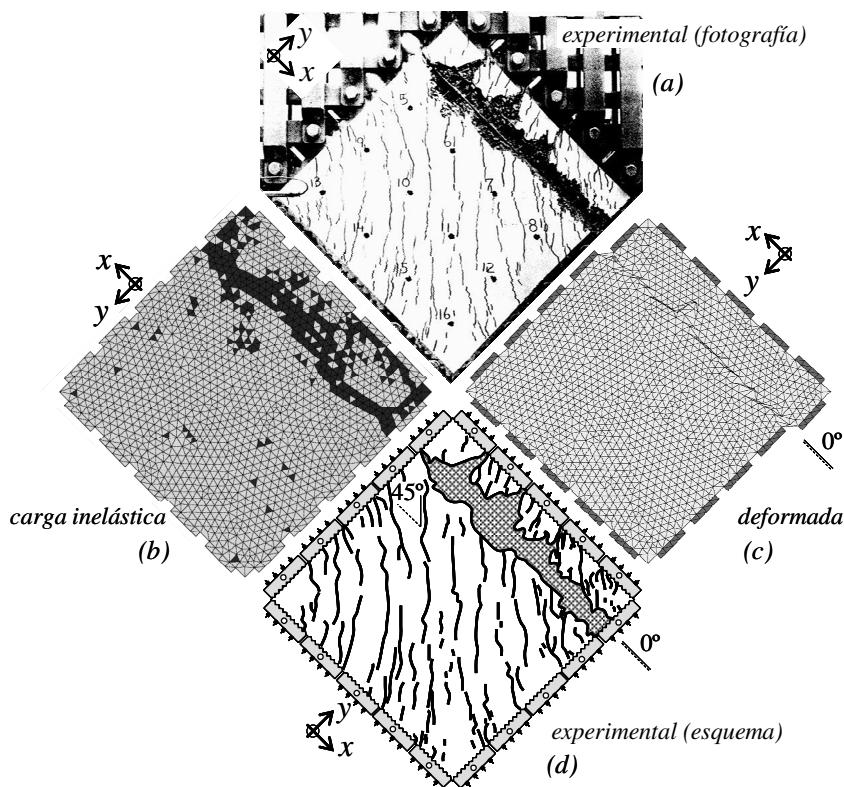
**Figura 3.55.** Panel reforzado en dos direcciones sometido a cortante puro: (a) líneas de iso-desplazamiento para los instantes 1 a 5, (b) elementos en régimen de carga inelástica para los instantes 1 a 5.

La superposición de las trayectorias de localización observadas en el modelo numérico durante todo el proceso de carga se ajusta al distribución real de fisuras en el estado final. La Figura 3.56(a)-(d) muestra la trayectoria de fisuras al final del experimento



tomada de la referencia (Collins, Vecchio et al. 1985), rotada de tal manera que facilite la comparación con el mapa de elementos en carga inelástica (Figura 3.56(b)) y la deformada resultante de la modelación numérica (Figura 3.56(c)).

**Observación 3.6.** *Estado de fisuración distribuida:* cuando se generan muchas fisuras paralelas entre sí, repartidas por el panel, es decir, en un estado de fisuración distribuida, no hay un proceso claro de localización en la escala de estudio. En este caso, la simulación numérica mostrará una condición de carga inelástica sobre la probeta y una distancia constante entre líneas de iso-desplazamiento, como lo indican los instantes 1 y 2 en la Figura 3.55.

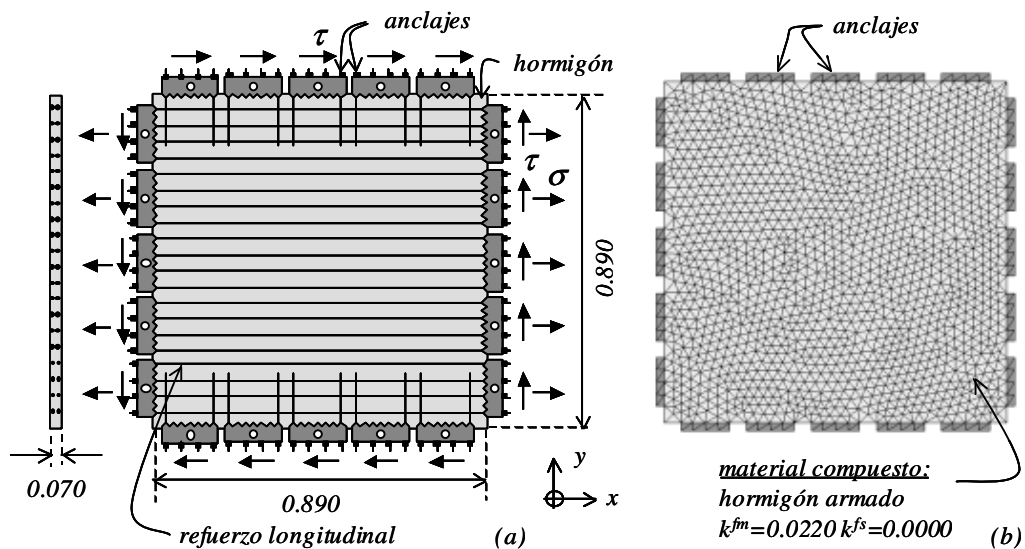


**Figura 3.56.** Panel reforzado en dos direcciones sometido a cortante puro. Instante final de carga: (a) fotografía del resultado experimental (Collins, Vecchio et al. 1985), (b) elementos en régimen de carga inelástica, (c) deformada exagerada, (d) reproducción del resultado experimental y dirección de las fisuras.

### 3.6.4. Panel reforzado en una dirección sometido a tensión normal y tangencial

A continuación se presentan los resultados de la simulación numérica de un panel de hormigón armado con barras de refuerzo en la dirección  $x$ , que soporta la combinación de una tensión normal en la dirección  $x$  de magnitud  $3.1\tau$  y a una tensión cortante  $\tau$  en el plano  $xy$ . Este problema se ha tomado de los ensayos experimentales de la referencia (Bhide & Collins 1989).

El panel cuenta con la misma geometría y propiedades mecánicas dadas en el ensayo descrito en el Apartado 3.6.1, tan solo cambian las cargas aplicadas como lo muestra la Figura 3.57(a). La malla de elementos finitos es la misma que se ha utilizado para modelar el primer ensayo (Figura 3.57(b)).



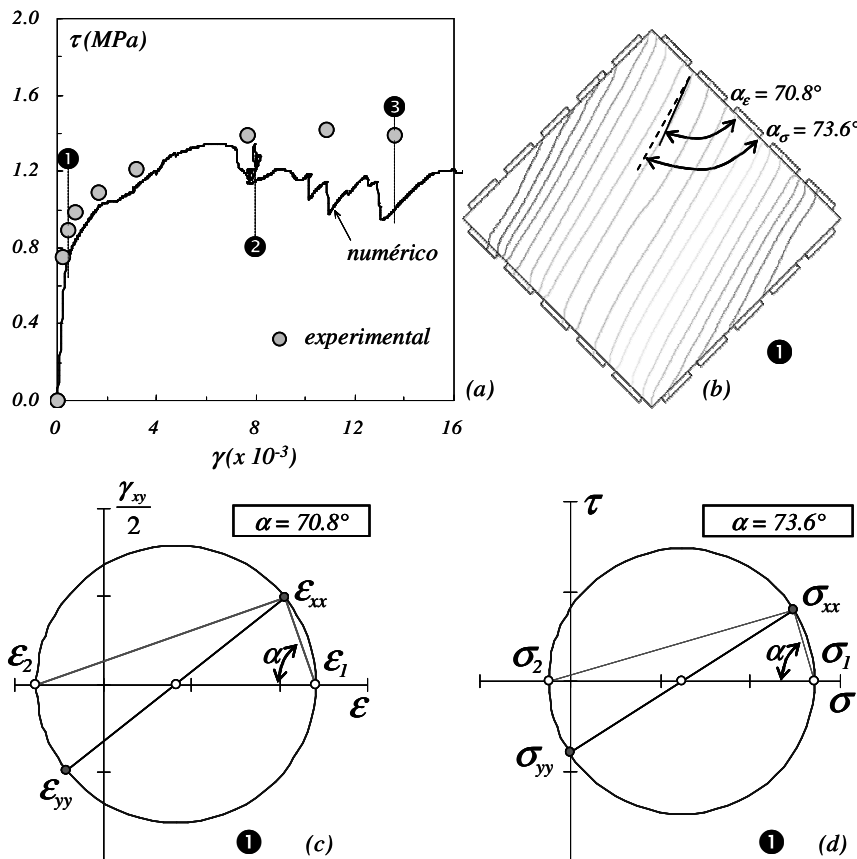
**Figura 3.57.** Panel reforzado en una dirección sometido a tensión normal y cortante: (a) esquema descriptivo, (b) malla de elementos finitos.

La respuesta estructural se define mediante la relación entre la deformación angular media y la tensión cortante aplicada como lo muestra la Figura 3.58. Los puntos indican el resultado experimental y la línea continua la modelación numérica. Se observa una buena correlación entre los resultados numéricos y experimentales excepto en los últimos pasos de carga, debido posiblemente a diferencias entre la acción de los anclajes sobre el panel.

En el instante 1 el experimento muestra múltiples fisuras a  $71^\circ$  con respecto a  $x$ , repartidas en toda su extensión (Figura 3.59(a)). Esta orientación de fisuración distribuida coincide con la dirección principal en el campo de las deformaciones Figura 3.58(b).

La ortotropía del material compuesto inducida por la presencia de un grupo de fibras orientadas en dirección  $x$ , hace que las direcciones principales de tensión y de deformación no son exactamente las mismas como lo indica la Figura 3.58(c)-(d).

En la simulación numérica el panel tiene carga inelástica en la mayoría de sus elementos y no presenta localización de deformaciones describiendo una etapa de fisuración distribuida (Figura 3.59(b)-(c)).

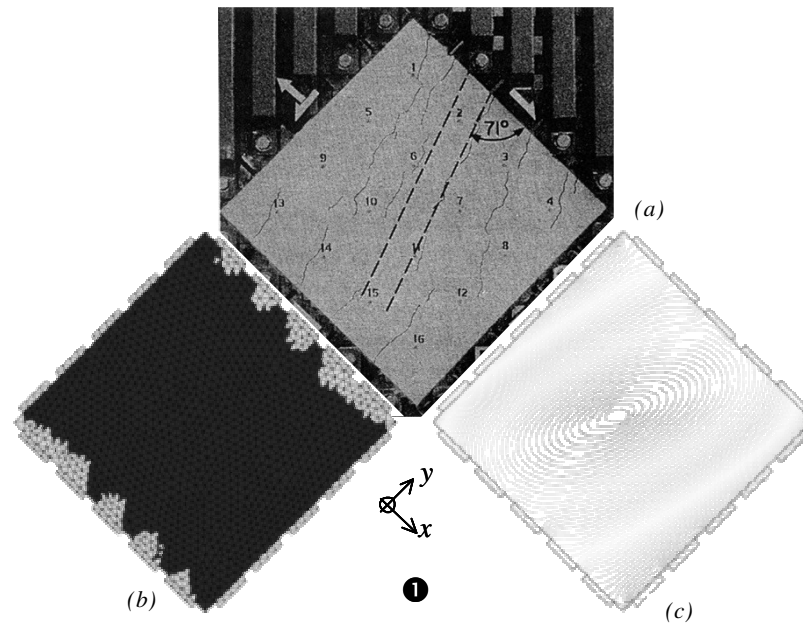


**Figura 3.58.** Panel reforzado en una direcciones sometido a tensión normal y tangencial: (a) relación entre deformación angular media y tensión cortante aplicada para diferentes instantes de carga, (b) dirección de localización sobre el panel en el instante 1, (c) círculo de Mohr en deformaciones para el instante 1, (d) círculo de Mohr en tensiones para el instante 1.

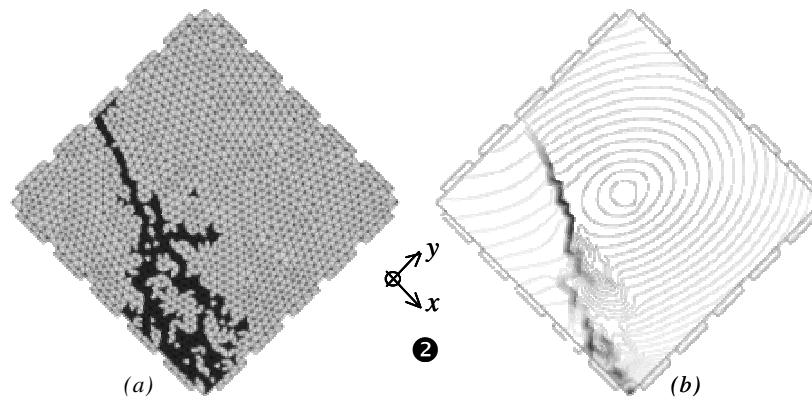
En el instante 2 se produce la localización de la deformación con muy poca estabilidad de la respuesta (Figura 3.60). Desde aquí la pendiente de la curva deformación angular vs tensión cortante cae hasta el instante final manteniendo la misma fisura.

En el paso de carga 3, a pesar que la respuesta estructural se aleja un poco (Figura 3.58(a)), la trayectoria de la discontinuidad definida a través de las líneas de iso-

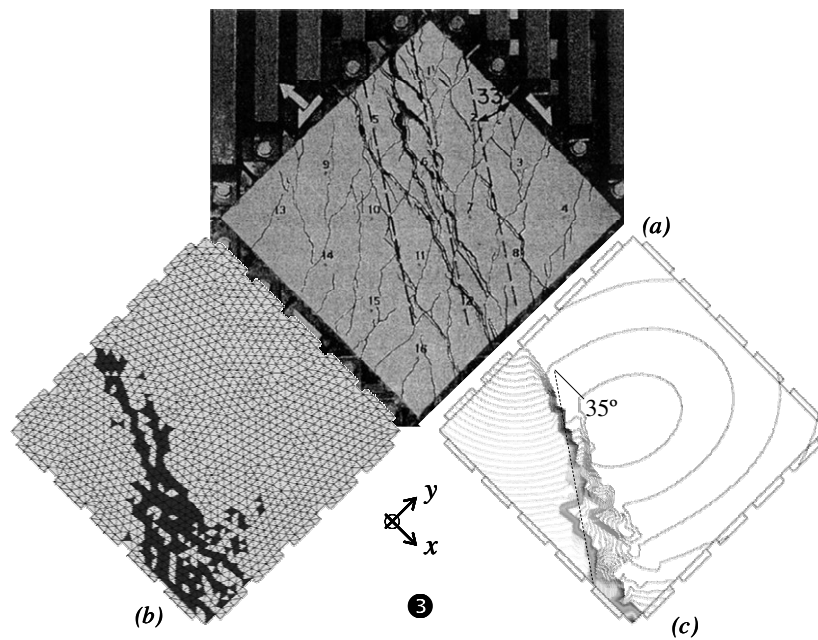
desplazamiento de la Figura 3.61(c), es similar a la fisura principal ocurrida en el panel observada en la Figura 3.61(a), con una diferencia de  $2^\circ$  entre las direcciones de fisura.



**Figura 3.59.** Panel reforzado en una direcciones sometido a tensión normal y cortante. Paso de carga 1: (a) mapa de fisuras tomado de (Bhide & Collins 1989), (b) elementos en estado de carga inelástica, (c) líneas de iso-desplazamiento.



**Figura 3.60.** Panel reforzado en una direcciones sometido a tensión normal y cortante. Paso de carga 2: (a) elementos en estado de carga inelástica, (c) líneas de iso-desplazamiento.



**Figura 3.61.** Panel reforzado en una direcciones sometido a tensión normal y cortante. Paso de carga 3: (a) mapa de fisuras tomado de (Bhide & Collins 1989), (b) elementos en estado de carga inelástica, (c) líneas de iso-desplazamiento.

### 3.7. Recapitulación

A continuación se resume la simulación numérica presentada en este capítulo, con el fin de recordar los elementos más importantes aquí expresados.

- Dentro de las consideraciones generales del problema, se supone un estado plano de tensiones y un campo de deformaciones infinitesimales, donde la no-linealidad se debe a los modelos constitutivos de los materiales componentes y a los efectos de interacción entre ellos. La discretización se realiza con elementos triangulares lineales provistos de discontinuidades embebidas, que representan el comportamiento de un material compuesto tipo hormigón armado o en algunos casos un material homogéneo tipo hormigón en masa.
- El proceso de fractura en el hormigón armado presenta algunos aspectos característicos de acuerdo al tipo de ensayo. En las probetas sometidas a tracción se observa con facilidad, tanto la separación entre fisuras (Figura 3.8 y Figura

3.16), como la contribución del refuerzo a la rigidez y estabilidad del compuesto (Figura 3.17). En los paneles a cortante como el mostrado en la Figura 3.41(a), se impone un estado de fisuración en modo mixto o en modo II de fallo, en el cual, la capacidad de las barras a corte en las caras de la fisura o acción pasador influye en la respuesta estructural (Figura 3.49). La formación y propagación de varias macro-fisuras con diferentes direcciones puede observarse en vigas con mucho refuerzo sometidas a flexión (Figura 3.37), en cambio, en vigas con poco refuerzo se presenta una sola fisura en la sección transversal central (Figura 3.31).

- En comparación con un material homogéneo tipo hormigón en masa, la presencia del acero de refuerzo en el material compuesto retrasa el proceso de localización de la deformación, produciendo un estado de fisuración distribuido estable.
- Durante el proceso de fallo de la probeta a tracción reforzada en el centro que se describe en el Apartado 3.2, la separación entre fisuras se reduce, mientras la zona de deslizamiento entre ellas aumenta progresivamente como lo indica la Figura 3.5(b). Ambas distancias se encuentran para un instante de carga 5 y permanecen iguales y aproximadamente constantes durante los instantes 6 y 7, como también se observa en las iso-líneas de desplazamiento en la Figura 3.7. Esto significa que después de ocurrido el despegue total entre ambos materiales, la pérdida de transferencia de tensiones impide la formación de nuevas discontinuidades en el hormigón, manteniendo una separación entre las fisuras existentes constante denominada *distancia de saturación de fisuras*. Hasta este instante se conserva la misma abertura en cada una de las fisuras, sin embargo, si las fibras alcanzan la tensión de fluencia y comienza una etapa de plasticidad perfecta o ablandamiento, algunas fisuras toman mayor abertura que otras, como se muestra en la Figura 3.13.
- En el Apartado 3.3 se describe la simulación de un panel de hormigón armado sometido a tracción (Figura 3.14), ensayado por Ouyang y colaboradores (Ouyang & Shah 1994; Ouyang, Wollrab et al. 1997). En este ejemplo, el hormigón en masa muestra una etapa de daño estable, entre los instantes 1 y 4 (Figura 3.16 y Figura 3.17), donde varias fisuras mantienen una separación y abertura constante, proporcionada por la capacidad del refuerzo y la adherencia en la interfaz. En cuanto se pierde tal adherencia, a partir del instante 4, decae la capacidad de estructural mientras se impone la abertura de una sola fisura, que cruza totalmente la sección transversal de la probeta, como lo indica la Figura 3.16 en el instante 5.

- La cantidad de refuerzo determinan la distribución de las fisuras en las vigas. Para cuantías bajas, al igual que en vigas de hormigón en masa, se impone una sola fisura en modo I ubicada en la mitad de la luz, como consecuencia de las altas tracciones por flexión. En cambio, en vigas fuertemente armadas, la carga pico aumenta y las barras inducen la propagación de varias fisuras simétricas desde el centro hasta los apoyos. La simulación numérica presentada en los Apartados 3.4 y 3.5, describe adecuadamente ambos comportamientos.
- En el Apartado 3.4 (Figura 3.26), el modelado de vigas con poco refuerzo (Ruiz, Elices et al. 1998), presenta la formación de la fisura principal como la concentración de las líneas de iso-desplazamiento (Figura 3.31) y la aparición de las fisuras secundarias mediante la variable de daño en el hormigón circundante al refuerzo a ambos lados de la fisura principal (Figura 3.29).
- Durante el proceso de fractura de la viga fuertemente armada indicada en la Figura 3.34(a), la simulación mostró inicialmente la formación de fisuras cortas paralelas entre sí, seguidas por la aparición de una fisura diagonal que determina el colapso general de la viga (Figura 3.37). De igual manera, se simularon tres vigas más con diferentes relaciones luz/altura, logrando trayectorias de fisuración similares a las presentadas en los ensayos experimentales (Leonhardt 1965), como lo describe la Figura 3.40.
- Las piezas de hormigón armado conformadas por numerosas barras repartidas uniformemente, se pueden representar como sólidos de un material compuesto único, en el cual, la cantidad de refuerzo en cada dirección está determinada por el respectivo coeficiente de participación volumétrica. Tal es el caso, de la simulación numérica de paneles sometidos a cortante ensayados en (Collins, Vecchio et al. 1985; Bhide & Collins 1989) y presentados en el Apartado 3.6 y en la Figura 3.41.
- Como lo muestra la Figura 3.49, cuando se desprecia la acción pasador en un panel sometido a cortante puro en el plano  $xy$ , la capacidad axial de las barras en dirección  $x$  no genera ningún aporte a la capacidad a cortante del compuesto, por esta razón, la trayectoria de la fisura y la respuesta estructural muestran un comportamiento similar al esperado en un panel de hormigón en masa.
- En los ensayos a cortante como el indicado en la Figura 3.50(a), se observan dos estados de fisuración diferentes. Entre los instantes 1 y 3 indicados en la Figura 3.53 y en la Figura 3.55, se exhibe un *estado de fisuración distribuida* por todo el panel, que se representa en la simulación numérica por el incremento del daño

en la matriz estabilizado por el comportamiento del acero y sin localización de las deformaciones del material compuesto. En cambio, en el *estado de fisuración localizada* observado después del instante 3, se forman algunas macrofisuras de mayor abertura, representadas en la simulación por las bandas de localización de la deformación.

- En general, los resultados obtenidos de la simulación numérica son satisfactorios comparativamente con los ensayos experimentales, asimismo, son independientes del tamaño de la malla de elementos finitos.





# Capítulo 4

## Conclusiones

En este trabajo se ha desarrollado, implementado y validado una formulación que describe el proceso de fractura del hormigón armado, representado como un material compuesto, a través de la *metodología de discontinuidades fuertes de continuo* y la *teoría de mezclas*. A continuación se resumen los aspectos más importantes.

- *Formulación.* Basado en la *teoría de mezclas* (Truesdell & Toupin 1960), se desarrolló un modelo constitutivo de material compuesto conformado por uno o dos grupos de fibras ortogonales que representan al acero de refuerzo, embebidas en una matriz que define al hormigón en masa. A su vez, cada material componente se describió mediante un modelo constitutivo particular: el hormigón con un modelo de daño de tracción y compresión diferenciado (Oliver, Cervera et al. 1990) y el acero con un modelo de plasticidad unidimensional (Simó & Hughes 1998). El modelo también incluye la acción pasador (Park & Paulay 1975) y la pérdida de adherencia entre hormigón y acero. Por otro lado, la aparición y propagación de fisuras, entendida como un proceso de localización de la deformación, se capturó mediante un modelo de discontinuidades embebidas, específicamente la *metodología de discontinuidades fuertes de continuo* (Oliver 1996b; Oliver 1996a; Oliver 2000; Oliver, Huespe et al. 2003; Oliver & Huespe 2004a; Huespe, Oliver et al. 2006; Oliver, Huespe et al. 2006). El criterio y la dirección de propagación de las fisuras se determinó a través del análisis de bifurcación del material compuesto.
- *Implementación.* La formulación ha sido implementada en un programa de análisis bidimensional con elementos finitos, considerando no linealidad material y deformaciones infinitesimales. Se utilizaron elementos especiales con discontinuidades embebidas, permitiendo la condensación a nivel del elemento de los grados de libertad relacionados con el salto. El uso del esquema de integración

del modelo constitutivo *implícito-explicito* (Oliver, Huespe et al. 2004a; Oliver, Huespe et al. 2006), garantiza el carácter positivo definido de la matriz de rigidez algorítmica del problema, aumentando sustancialmente la robustez y estabilidad de la solución. Por otro lado, la coincidencia de la trayectoria de la discontinuidad entre los elementos se logra mediante el *trazado de las líneas de discontinuidad* (Samaniego 2002; Oliver & Huespe 2004a).

- *Validación.* Los resultados de la simulación numérica de piezas de hormigón armado sometidas a tracción, flexión y cortante, se compararon con la respuesta estructural y la distribución de fisuras observada en los ensayos experimentales desarrollados en algunas referencias. Con el fin de establecer la evolución de la separación de fisuras y de la longitud de deslizamiento, se modeló una pieza de gran longitud sometida a tracción, reforzada en el centro por una barra de acero. Asimismo, se reprodujo el ensayo propuesto en (Ouyang & Shah 1994), en el cual un panel de hormigón con tres barras de refuerzo soporta fuerzas de tracción en uno de sus extremos. A continuación se modelaron vigas ligeramente reforzadas ensayadas en (Ruiz, Elices et al. 1998) para dos cuantías diferentes y vigas fuertemente armadas presentadas en (Leonhardt 1965) para cuatro relaciones luz/ altura distintas. Finalmente, se simularon tres paneles de hormigón con barras de acero repartidas de manera uniforme en una o en dos direcciones, ensayados en (Collins, Vecchio et al. 1985), y sometidos principalmente a tensiones de cortante. La discretización del medio se realizó con elementos triangulares lineales que representan el comportamiento de un material compuesto tipo hormigón armado o en algunos casos un material homogéneo tipo hormigón en masa. Durante el proceso de fractura, la formación de fisuras y la respuesta estructural fue representada, en el modelo numérico, como la concentración de iso-líneas de desplazamiento y la curva carga-desplazamiento, respectivamente.

A continuación se indican las conclusiones generales y específicas derivadas de la formulación, implementación y aplicación del modelo presentado.

## 4.1. Conclusiones generales

- Un modelo numérico basado en la *metodología de discontinuidades fuertes de continuo* y en la *teoría de mezclas*, puede predecir la respuesta estructural y la trayectoria de fisuras, durante el proceso de fractura, en piezas de hormigón armado sometidas a diferentes estados de carga estática.

- La correlación obtenida entre los resultados numéricos utilizando la formulación propuesta y los resultados reales tomados de los ensayos experimentales presentados en algunas referencias (Leonhardt 1965; Collins, Vecchio et al. 1985; Ouyang & Shah 1994; Ruiz, Elices et al. 1998), fue cualitativa y cuantitativamente satisfactoria.
- La presencia del refuerzo en el hormigón, además de aumentar la rigidez y la resistencia del compuesto, modifica la condición de inestabilidad material y la formación de fisuras. Estas modificaciones se perciben en el análisis de bifurcación de cada punto material de hormigón armado, el cual depende de las propiedades del hormigón y del acero, así como también, de la cantidad y dirección de las barras de refuerzo.
- El modelo puede reproducir dos estados diferentes de fisuración en el hormigón armado. Inicialmente, en una etapa estable de fisuración distribuida, varias fisuras mantienen una separación y apertura constante, proporcionada por la capacidad del refuerzo y la adherencia en la interfaz. A continuación, en la etapa de fisuración localizada, se impone una sola fisura mientras decae la capacidad de estructural.
- Parte de la aplicación práctica del modelo se presenta en la evaluación de estructuras preexistentes de hormigón armado como muros y vigas, donde es necesario reproducir el proceso de fractura desde la aparición de las fisuras y hasta el colapso global. Es importante tener en cuenta que, en esta escala de análisis, cada punto material consiste en una fracción de acero y otra de hormigón, considerando una distribución uniforme del refuerzo y despreciando los detalles constructivos como ganchos, solapes, amarres, etc.

## 4.2. Conclusiones derivadas de la formulación e implementación del modelo

- La formulación de un modelo constitutivo que describe directamente el campo de deformación y de tensión en un punto de material compuesto tipo hormigón armado, ofrece dos ventajas importantes. La primera, facilita la implementación en el método de los elementos finitos, dado que permanecen muchos de los ingredientes del procedimiento numérico convencional. La segunda, permite el análisis del problema en la *escala de estructura o macroscópica*, con lo cual se

elude la discretización de cada material componente y de sus efectos de interacción, evitando así un alto coste computacional.

- La *metodología de discontinuidades fuertes de continuo* puede aplicarse a materiales reforzados con fibras largas con facilidad, considerando un campo común de deformaciones como lo establece la *teoría de mezclas*.
- La formulación presentada conserva el contexto de la mecánica del medio continuo, a pesar que cada punto material muestra un carácter discontinuo debido a la formación de fisuras y heterogéneo por las diferencias mecánicas entre hormigón y acero.
- El modelo de fibra deslizante incorpora la existencia de una diferencia entre la deformación de la matriz y de la fibra, como resultado del despegue entre ambos materiales, sin afectar las hipótesis básicas de la *teoría de mezclas*. Los parámetros necesarios para describir este modelo se obtienen de algunos ensayos de extracción de barras embebidas en hormigón.
- La acción pasador, definida como la capacidad a cortante de las barras de refuerzo que atraviesan una fisura, se introduce en la formulación mediante una ley de comportamiento unidimensional a cortante del acero, caracterizado por las propiedades mecánicas del material y geométricas de la sección transversal de las barras.

### 4.3. Conclusiones derivadas de la simulación numérica

- Mediante la simulación numérica se obtuvo una buena aproximación de la respuesta estructural real presentada en los ensayos de probetas a tracción (Ouyang & Shah 1994) y de vigas ligeramente reforzadas (Ruiz, Elices et al. 1998). De igual manera, la concentración de las iso-líneas de desplazamiento resultantes del análisis numérico, coincide con la trayectoria de las fisuras presentes en las vigas fuertemente reforzadas (Leonhardt 1965). Los paneles a cortante modelados (Collins, Vecchio et al. 1985; Bhide & Collins 1989), muestran un resultado satisfactorio, tanto en la respuesta estructural, como en la formación y propagación de las fisuras.

- Durante el proceso de fallo de una probeta a tracción de hormigón reforzada en el centro, tanto la cantidad de fisuras como la zona de deslizamiento entre ellas, aumenta progresivamente. Sin embargo, después de ocurrido el despegue total entre ambos materiales, la pérdida de transferencia de tensiones impide la formación de nuevas discontinuidades en el hormigón, manteniendo constante la separación entre las fisuras existentes. Esta etapa se denomina *condición de saturación de fisuras*. Hasta este instante se conserva la misma abertura en cada una de las fisuras, a pesar de esto, si las fibras alcanzan la tensión de fluencia y comienza una etapa de plasticidad perfecta o ablandamiento, algunas fisuras toman mayor abertura que otras.
- En la simulación de un panel de hormigón armado sometido a tracción (Ouyang & Shah 1994; Ouyang, Wollrab et al. 1997), el hormigón en masa muestra una etapa de daño estable donde varias fisuras mantienen una separación y abertura constante, proporcionada por la capacidad del refuerzo y la adherencia en la interfaz. En cuanto se pierde tal adherencia, decae la capacidad de estructural mientras se impone la abertura de una sola fisura, que cruza totalmente la sección transversal de la probeta.
- La cantidad de refuerzo determinan la distribución de las fisuras en las vigas. Para cuantías bajas, al igual que en vigas de hormigón en masa, se impone una sola fisura en modo I ubicada en la mitad de la luz, como consecuencia de las altas tracciones por flexión. En cambio, en vigas fuertemente armadas la carga pico aumenta y las barras inducen la propagación de varias fisuras simétricas desde el centro hasta los apoyos.
- Los resultados del modelado de vigas con poco refuerzo (Ruiz, Elices et al. 1998), representan la formación de la fisura principal como la localización de las líneas de iso-desplazamiento y la aparición de las fisuras secundarias como la evolución del daño en el hormigón circundante al refuerzo a ambos lados de la fisura principal.
- Durante el proceso de fractura de vigas fuertemente armadas (Leonhardt 1965), se forman fisuras de manera secuencial aproximadamente paralelas entre sí, del centro a los extremos de la viga. Sin embargo, el colapso general de la estructura está determinado por la formación de una fisura diagonal que se propaga entre el apoyo y la carga aplicada.
- Las piezas de hormigón armado conformadas por numerosas barras repartidas uniformemente, se pueden representar como sólidos de un material compuesto

único, en el cual, la cantidad de refuerzo en cada dirección está determinada por el respectivo coeficiente de participación volumétrica. Tal es el caso, de la simulación numérica de paneles sometidos a cortante ensayados en (Collins, Vecchio et al. 1985; Bhide & Collins 1989). En estos ensayos se observaron dos estados de fisuración diferentes. En el *estado de fisuración distribuida*, se producen muchas fisuras paralelas entre sí, repartidas por el panel, sin embargo, en la simulación numérica no hay un proceso claro de localización, a pesar del régimen inelástico presente en toda la probeta. Tal situación se puede entender como la formación de múltiples fisuras estabilizadas por la presencia del acero de refuerzo. En cambio, el *estado de fisuración localizada* muestra la formación de algunas macro-fisuras de mayor abertura, representadas en la simulación por las bandas de localización de la deformación.

- La capacidad al corte de las barras de acero proporciona un aporte importante a la respuesta de estructuras de hormigón armado sometidas a tensiones de cortante. Cuando se desprecia la acción pasador en un panel sometido a cortante puro en el plano  $xy$ , la capacidad axial de las barras en dirección  $x$  no genera ningún aporte a la capacidad a cortante del compuesto, por esta razón, la trayectoria de la fisura y la respuesta estructural muestran un comportamiento similar al esperado en un panel de hormigón en masa.

# Anexo A

## Modelos de daño y plasticidad

### A.1. Modelo constitutivo de daño escalar

#### A.1.1. Fenomenología del modelo de daño (Lemaitre 1992)

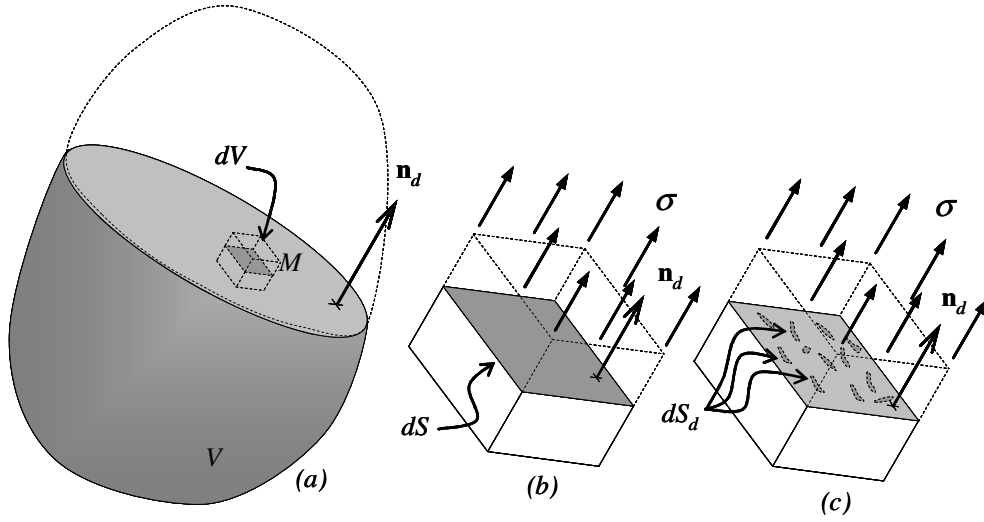
Desde el punto de vista físico, las cantidades definidas en un punto material representan valores promedio sobre cierto volumen característico. Este volumen debe ser tan pequeño como para evitar el suavizado incorrecto de altos gradientes, pero tan grande como para representar adecuadamente los procesos mecánicos de la micro-estructura.

En un modelo de daño isótropo se conservan las características direccionales del material virgen durante el proceso de degradación. Es el caso de los modelos de daño escalar, donde una variable interna tipo escalar afecta por igual a todas las componentes del tensor constitutivo del material.

El daño representa el nivel de fisuración de un material en un volumen definido. El tamaño de este volumen debe ser tan pequeño que permita describir el fenómeno como un valor promedio de las deformaciones en su interior. En un volumen representativo, se establece la variable de daño en una dirección como el cociente entre el área de la proyección de las fisuras sobre un plano normal a la dirección y el área de ese mismo plano.

Dado un diferencial de volumen en un punto material  $M$  de un sólido y un plano de normal  $\mathbf{n}_d$  que lo corta, la superficie  $dS$  será la intersección entre ese plano y el elemento diferencial  $dV$ . La superficie  $dS_d$  será la proyección de todas las fisuras sobre la superficie  $dS$  como lo indica la Figura A.1.





**Figura A.1.** Descripción del daño: (a) medio continuo, (b) elemento diferencial de volumen no dañado, (c) elemento diferencial de volumen dañado.

La variable de daño en el punto material  $M(\mathbf{x}, t)$  en la posición  $\mathbf{x}$ , en un instante de tiempo  $t$  y en la dirección  $\mathbf{n}_d$  se define como:

$$d_n(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}_d) = \frac{dS_d}{dS}, \quad 0 \leq d_n \leq 1 \quad (\text{A.1})$$

donde  $d_n=0$  indica que no hay daño en el material, en cambio,  $d_n=1$  ocurre cuando el material está completamente dañado (Kachanov 1986). Las fuerzas internas sobre la superficie  $dS$  desaparecen en los lugares de formación de las microfisuras reduciendo la superficie normal a la tensión al área efectiva ( $dS - dS_d$ ).

La tensión aplicada  $\sigma$  normal al plano  $\mathbf{n}_d$ , en el elemento diferencial  $dV$ , es igual a la fuerza axial  $dF$  por unidad área de la sección transversal  $dS$ . De igual forma, la tensión efectiva  $\bar{\sigma}$  normal al plano  $\mathbf{n}_d$  se define como la fuerza  $dF$  por unidad de área efectiva ( $dS - dS_d$ ), como lo indica la siguiente ecuación:

$$\sigma = \frac{dF}{dS}, \quad \bar{\sigma} = \frac{dF}{dS - dS_d} \quad (\text{A.2})$$

La tensión efectiva se puede escribir en términos de la tensión aplicada y de la variable de daño así:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - d_n} \quad (\text{A.3})$$

Suponiendo que la degradación de un punto  $M(\mathbf{x},t)$  del sólido para un instante  $t$  es igual en cualquier dirección como lo establece un modelo isótropo, la variable de daño será:

$$d_n(\mathbf{x},t,\mathbf{n}_d) = d(\mathbf{x},t) \quad \forall \mathbf{n}_d \quad (\text{A.4})$$

En un espacio tridimensional considerando una variable de daño escalar, el tensor de la tensión efectiva  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  es igual a:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \left( \frac{1}{1-d_n} \right) \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.5})$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}$  corresponde al tensor de tensiones aplicadas.

En un modelo de daño anisótropo donde se considera el carácter direccional de la degradación del material, el daño se describe mediante un vector, un tensor de segundo orden o incluso un tensor de cuarto orden. La forma más general de definir al tensor de tensiones efectivas se indica en la siguiente ecuación, donde  $\mathbb{M}$  es el tensor de daño de cuarto orden.

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{M}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A.6})$$

El modelo de daño isótropo es el caso especial en el cual el tensor  $\mathbb{M}$  es isótropo. Asimismo, el modelo de daño escalar es en particular un modelo isótropo donde  $\mathbb{M} = (1-d_n)\mathbb{I}$  (siendo  $\mathbb{I}$  el tensor identidad de cuarto orden).

### A.1.2. Ecuación constitutiva del modelo de daño

El principio de equivalencia de deformaciones definido por Lemaitre y Chaboche (Lemaitre 1992), establece que la deformación asociada a un estado dañado bajo la acción de la tensión aplicada es equivalente a la deformación asociada a un estado no dañado bajo la acción de la tensión efectiva. Por lo tanto se puede escribir la siguiente ley unidimensional del comportamiento del material.

$$\left. \begin{array}{l} d_n = 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{E} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = E\boldsymbol{\varepsilon} \end{array} \right\} \text{(material no dañado)} \quad (\text{A.7})$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 < d_n < 1 \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{E} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1-d_n)E} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} = E\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma} = (1-d_n)E\boldsymbol{\varepsilon} \end{array} \right\} \text{(material dañado)} \quad (\text{A.8})$$

Por otro lado, la densidad de energía libre de Helmholtz por unidad de volumen para un proceso de degradación escalar está dada por la siguiente expresión (Simó and Ju 1987):

$$\begin{aligned}\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d) &= (1 - d_n)\Psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ \Psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned}\quad (\text{A.9})$$

siendo  $\Psi_e(\boldsymbol{\varepsilon})$  la densidad de energía libre elástica por unidad de volumen y  $\mathbb{C}$  el tensor constitutivo elástico expresado, para problemas bidimensionales, de la forma:

$$\mathbb{C} = \frac{E}{1 - \nu^2} [\nu(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + (1 - \nu)\mathbb{I}] \quad (\text{tensión plana}) \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbb{C} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [\nu(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + (1 - 2\nu)\mathbb{I}] \quad (\text{deformación plana}) \quad (\text{A.11})$$

En las ecuaciones anteriores  $E$  y  $\nu$  son el módulo de Young y la relación de Poisson del material. Asimismo,  $\mathbf{1}$  y  $\mathbb{I}$  indican el tensor identidad de segundo y de cuarto orden respectivamente.

La disipación de energía por unidad de volumen en problemas mecánicos con deformaciones infinitesimales es igual a:

$$\mathbb{E} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (\text{A.12})$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}$  corresponden al tensor de tensiones y de deformaciones.

Dado que  $\dot{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, d_n) = (\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Psi) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + (\partial_{d_n} \Psi) \dot{d}_n$  y  $(\partial_{d_n} \Psi) = -\Psi_e$ , la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\mathbb{E} = [\boldsymbol{\sigma} - (\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Psi)] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \Psi_e \dot{d}_n \geq 0 \quad (\text{A.13})$$

Aplicando el método de Coleman (Maugin 1992), a la desigualdad expresada en la ecuación anterior, se obtiene la ecuación constitutiva del modelo, como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Psi = (1 - d_n)\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{A.14})$$

y una disipación igual a:

$$\mathbb{E} = \Psi_e \dot{d}_n \geq 0 \rightarrow \dot{d}_n \geq 0 \quad (\text{A.15})$$

De la Ecuación (A.14), se extrae una expresión para la tensión efectiva, de la forma:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{A.16})$$

### A.1.3. Ingredientes del modelo de daño

Los elementos del modelo de daño escalar presentado en (Simó and Ju 1987) se pueden resumir en el Cuadro A.1.

$$d_n = 1 - \frac{q}{r} \quad (\text{variable de daño}) \quad (\text{A.17})$$

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, r) = \frac{q}{r} \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \right) \quad (\text{energía libre}) \quad (\text{A.18})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, r)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{q}{r} \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{q}{r} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{ecuación constitutiva}) \quad (\text{A.19})$$

$$\dot{r} = \lambda, \quad r_{t=0} = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}} \quad (\text{ley de evolución variable interna}) \quad (\text{A.20})$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{q} = H(r) \dot{r}, \quad H = \frac{dq}{dr} \leq 0 \\ 0 \leq q \leq r_{t=0}, \quad q_{t=0} = r_{t=0} \end{array} \right\} \quad (\text{ley de ablandamiento}) \quad (\text{A.21})$$

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, r) = \tau_\varepsilon - r \quad (\text{criterio de daño}) \quad (\text{A.22})$$

$$\left. \begin{array}{l} f \leq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda f = 0 \\ \lambda \dot{f} = 0 \quad (f = 0) \end{array} \right\} \quad (\text{condiciones de carga y descarga}) \quad (\text{A.23})$$

**Cuadro A.1.** Ingredientes de un modelo de daño isótropo escalar que describe el comportamiento de la matriz.

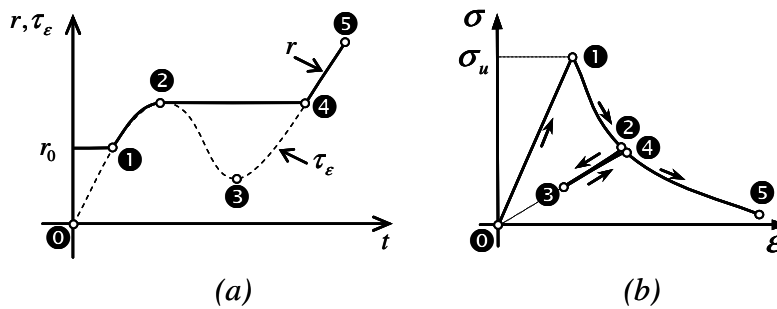
Aquí se indica la variable de daño  $d_n$  en términos de las variables internas tipo tensión  $q$  y tipo deformación  $r$ , la densidad de la energía libre de Helmholtz por unidad de volumen  $\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, r)$ , la relación entre la tensión  $\boldsymbol{\sigma}$  y la deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , la ley de evolución de la variable interna y del ablandamiento, la función de daño  $f(\boldsymbol{\varepsilon}, r)$  y las condiciones de carga y descarga del modelo. En las ecuaciones anteriores,  $\sigma_u$  es la resistencia a tracción del material,  $H$  es el parámetro de ablandamiento,  $\lambda$  es el multiplicador de daño y  $\tau_\varepsilon$  es la norma de deformaciones.

De la ley de evolución de  $r$  dada en la Ecuación (A.20) y de las condiciones de carga y descarga (A.23), se establece el carácter creciente de la variable interna tipo deformación. Por lo tanto  $r$  se puede integrar de forma cerrada, como (Figura A.2):

$$r(t) = \max_{t' \in [0, t]} (r_{t'}, \tau_{\varepsilon}(t')) \quad (\text{A.24})$$

La norma  $\tau_{\varepsilon}$  es una función escalar que indica el estado de deformación y determina el dominio elástico del modelo. En (Simó and Ju 1987) se propone una norma de deformación, aplicable a materiales con la misma resistencia a tracción y a compresión ( $\sigma_{u(c)} = \sigma_u$ ), de la forma:

$$\tau_{\varepsilon} = \sqrt{\bar{\boldsymbol{\sigma}} : (\mathbf{C})^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (\text{A.25})$$



**Figura A.2.** Modelo de daño escalar: (a) evolución de la variable interna y de la norma de deformación, (b) curva tensión-deformación uniaxial.

#### A.1.4. Modelo de daño con tracción y compresión diferenciada

Una modificación al esquema anterior permite la degradación de un material con resistencias a tracción y compresión diferentes. El modelo desarrollado en (Oliver, Cervera et al. 1990) representa la degradación de un material cuya resistencia a compresión  $\sigma_{u(c)}$  es  $n_{\sigma}$  veces la resistencia a tracción  $\sigma_u$ , ( $n_{\sigma} = \sigma_{u(c)}/\sigma_u$ ). Los elementos de este modelo se presentan en el Cuadro A.1. Además, la norma de deformaciones  $\tau_{\varepsilon}$  está definida como:

$$\tau_{\varepsilon} = \phi \sqrt{\bar{\boldsymbol{\sigma}} : (\mathbf{C})^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (\text{A.26})$$

siendo,

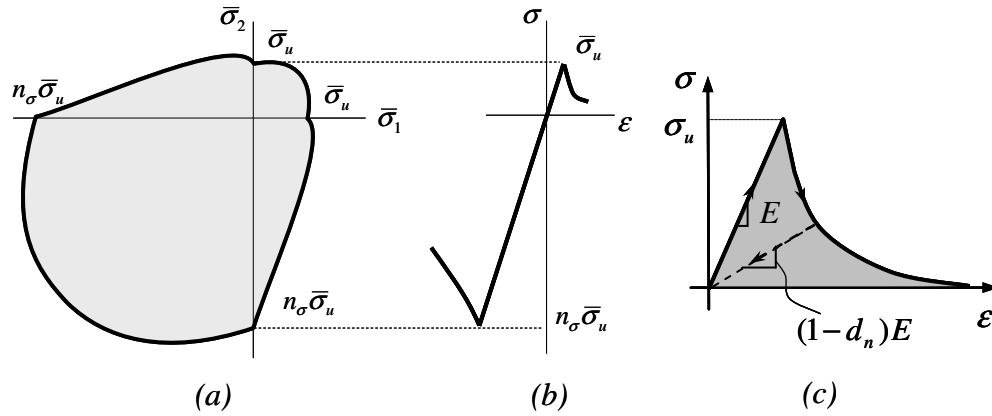
$$\phi = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \bar{\sigma}_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\bar{\sigma}_i|} \left( 1 - \frac{1}{n_\sigma} \right) + \frac{1}{n_\sigma} \quad (\text{A.27})$$

donde  $|\bar{\sigma}_i|$  es el valor absoluto de la tensión  $\bar{\sigma}_i$  y

$$\langle \bar{\sigma}_i \rangle = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_i + |\bar{\sigma}_i|) \quad (\text{A.28})$$

$\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3$  corresponden a las tensiones efectivas en las direcciones principales 1,2 y 3 respectivamente.

Para un estado tensional bidimensional donde:  $(\bar{\sigma}_1 < 0, \bar{\sigma}_2 < 0)$ , el dominio elástico es  $n_\sigma$  veces más grande que el definido para el caso de  $(\bar{\sigma}_1 > 0, \bar{\sigma}_2 > 0)$  como se observa en la Figura A.3(a). Cuando  $\bar{\sigma}_1$  es positivo y  $\bar{\sigma}_2$  es negativo o viceversa se produce una transición aproximada definida por el factor  $\phi$  en la Ecuación (A.27).



**Figura A.3.** Modelo de daño con degradación diferenciada a compresión y tracción: (a) Superficie de daño, (b) curva tensión-deformación uniaxial.

**Observación A.1** *A diferencia de los modelos de plasticidad, en el modelo de daño utilizado no es necesario que el dominio elástico sea convexo para conservar unicidad en la solución, por tanto, la superficie de daño no convexa mostrada en la Figura A.3(a), es admisible para este modelo constitutivo.*

La tasa de la norma de deformaciones se obtiene derivando en el tiempo la Ecuación (A.26), de la forma:

$$\dot{\tau}_\varepsilon = \left( \frac{\tau_\varepsilon}{\phi} \mathbf{C} : (\partial_{\bar{\sigma}} \phi) + \frac{\phi^2}{\tau_\varepsilon} \bar{\sigma} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{A.29})$$

Asimismo, a partir de la Ecuación (A.19) y la ley de ablandamiento (A.21), se obtiene una tasa de tensiones igual a:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{q}{r} \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{Hr - q}{r^2} \dot{r} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{A.30})$$

Por lo tanto en régimen elástico o de descarga ( $\lambda = \dot{r} = 0$ ), la tasa de la tensión se reduce a  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (q/r)\mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . En cambio, en régimen de carga inelástica ( $\lambda = \dot{r} > 0$ ), se debe cumplir que  $\lambda \dot{f} = 0$  para  $f = \tau_\varepsilon - r = 0$ , en consecuencia, la variable interna es igual a la norma de deformaciones ( $r = \tau_\varepsilon$ ) indicada en la Ecuación (A.26), y la tasa de la variable interna  $\dot{r} = \dot{\tau}_\varepsilon$  expresada en la Ecuación (A.29). Sustituyendo los valores de  $r$  y  $\dot{r}$  en la Ecuación (A.30), se obtiene:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{q}{r} \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{Hr - q}{r^2} \left( \frac{r}{\phi} (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \otimes (\mathbf{C} : \partial_{\bar{\sigma}} \phi)) + \frac{\phi^2}{r} (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{A.31})$$

La ecuación constitutiva tangente del modelo está definida como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_{tg} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{A.32})$$

para la cual, el tensor constitutivo tangente  $\mathbf{C}_{tg}$  en condición de comportamiento elástico o descarga es igual a:

$$\mathbf{C}_{tg} = \frac{q}{r} \mathbf{C} \quad (\text{A.33})$$

y para carga inelástica es:

$$\mathbf{C}_{tg} = \frac{q}{r} \mathbf{C} - \left( \frac{q - Hr}{r^3} \right) \cdot \left[ \frac{r^2}{\phi} (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbf{A}) + \phi^2 (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \right] \quad (\text{A.34})$$

siendo,

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} : \partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \phi \quad (\text{A.35})$$

$$\partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \phi = \frac{\left( 1 - \frac{1}{n_\sigma} \right)}{\left( \sum_{i=1}^3 |\bar{\sigma}_i| \right)^2} \cdot \left[ \sum_{i=1}^3 |\bar{\sigma}_i| \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \langle \bar{\sigma}_i \rangle}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \sum_{i=1}^3 \langle \bar{\sigma}_i \rangle \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{\partial |\bar{\sigma}_i|}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right] \quad (\text{A.36})$$

Cuando ambas tensiones principales efectivas son positivas el parámetro  $\phi$  es igual a 1 y su derivada con respecto a la tensión efectiva  $\partial_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \phi$  es igual al tensor nulo. En este

caso el operador constitutivo tangente recupera la forma obtenida para un modelo de daño isotrópico de dominio elástico simétrico a tracción y compresión, cuya norma se indica en la Ecuación (A.25). Para tensiones principales efectivas negativas  $\phi = 1/n_\sigma$  y  $\partial_{\bar{\sigma}}\phi = \mathbf{0}$ , por lo tanto el tensor constitutivo tangente coincide con el correspondiente del modelo de daño con dominio elástico simétrico limitado por la tensión  $n_\sigma\sigma_u$ . En otros casos donde el signo de las tensiones principales efectivas es diferente, las derivadas ( $\partial_{\bar{\sigma}}\phi \neq \mathbf{0}$ ) y el parámetro  $\phi$  será calculado como lo indica la Ecuación (A.27) o (A.38) en el caso de dos dimensiones.

En problemas bidimensionales el factor  $\phi$  se puede calcular sustituyendo en la Ecuación (A.27) las expresiones de las tensiones principales,

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_1 &= \left( \frac{\bar{\sigma}_{xx} + \bar{\sigma}_{yy}}{2} \right) + \bar{\sigma}_r, \quad \bar{\sigma}_2 = \left( \frac{\bar{\sigma}_{xx} + \bar{\sigma}_{yy}}{2} \right) - \bar{\sigma}_r \\ \bar{\sigma}_r &= \sqrt{\left( \frac{\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\sigma}_{yy}}{2} \right)^2 + (\bar{\tau}_{xy})^2}\end{aligned}\tag{A.37}$$

obteniendo:

$$\phi = \left( 1 - \frac{1}{n_\sigma} \right) \cdot \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{\bar{\sigma}_{xx} + \bar{\sigma}_{yy}}{4\bar{\sigma}_r} \right) \right] + \frac{1}{n_\sigma}\tag{A.38}$$

Las derivadas de  $\phi$  con respecto al tensor de tensiones efectivas  $\partial_{\bar{\sigma}}\phi$  indicadas a continuación, son el resultado de reemplazar a la Ecuación (A.37) en la Ecuación (A.36).

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{\sigma}}\phi &= \begin{bmatrix} \partial\phi/\partial\bar{\sigma}_{xx} & \partial\phi/\partial\bar{\sigma}_{xy} \\ \partial\phi/\partial\bar{\sigma}_{xy} & \partial\phi/\partial\bar{\sigma}_{yy} \end{bmatrix} \\ \partial\phi/\partial\bar{\sigma}_{xx} &= \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{1}{4\bar{\sigma}_r} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\sigma}_{yy}}{2\bar{\sigma}_r} \right) \left( \frac{\bar{\sigma}_{xx} + \bar{\sigma}_{yy}}{2\bar{\sigma}_r} \right) \right] \\ \partial\phi/\partial\bar{\sigma}_{yy} &= \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{1}{4\bar{\sigma}_r} \cdot \left[ 1 + \left( \frac{\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\sigma}_{yy}}{2\bar{\sigma}_r} \right) \left( \frac{\bar{\sigma}_{xx} + \bar{\sigma}_{yy}}{2\bar{\sigma}_r} \right) \right] \\ \partial\phi/\partial\bar{\sigma}_{xy} &= - \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{\bar{\sigma}_{xy}}{4(\bar{\sigma}_r)^2} \cdot \left( \frac{\bar{\sigma}_{xx} + \bar{\sigma}_{yy}}{\bar{\sigma}_r} \right)\end{aligned}\tag{A.39}$$

Cuando las tensiones efectivas tienen signos diferentes, el tensor  $\mathbf{A}$  depende del operador constitutivo elástico como lo muestra la Ecuación (A.35). Por lo tanto, en condición plana de tensiones,



$$\mathbf{A} = \frac{E}{1-\nu^2} [\nu \operatorname{tr}(\partial_{\bar{\sigma}}\phi) \mathbf{1} + (1-\nu) \partial_{\bar{\sigma}}\phi] \quad (\text{A.40})$$

y en condición plana de deformaciones,

$$\mathbf{A} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu \operatorname{tr}(\partial_{\bar{\sigma}}\phi) \mathbf{1} + (1-2\nu) \partial_{\bar{\sigma}}\phi] \quad (\text{A.41})$$

En resumen, para todo estado tensional, el tensor  $\mathbf{A}$  y la derivada de  $\phi$  con respecto a la tensión efectiva  $\partial_{\bar{\sigma}}\phi$  corresponden a:

$$\begin{aligned} \text{para } (\bar{\sigma}_1 > 0 \wedge \bar{\sigma}_2 > 0): \quad \phi = 1 \quad , \quad \partial_{\bar{\sigma}}\phi = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{0} \\ \text{para } (\bar{\sigma}_1 < 0 \wedge \bar{\sigma}_2 < 0): \quad \phi = 1/n_\sigma \quad , \quad \partial_{\bar{\sigma}}\phi = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{0} \\ \text{para } (\bar{\sigma}_1 > 0 \wedge \bar{\sigma}_2 < 0) \quad \vee \quad (\bar{\sigma}_1 < 0 \wedge \bar{\sigma}_2 > 0) \quad \text{en } 2D: \\ \phi \rightarrow (\text{A.38}) \quad , \quad \partial_{\bar{\sigma}}\phi \neq \mathbf{0} \rightarrow (\text{A.39}) \quad , \quad \mathbf{A} \neq \mathbf{0} \rightarrow (\text{A.40}) \text{ o } (\text{A.41}). \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

En la Ecuación (A.34) se observa que el tensor constitutivo tangente pierde su simetría cuando  $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ . Como se indicó en la ecuación anterior esto ocurre para un estado tensional en el cual las tensiones principales efectivas son de signo contrario.

## A.2. Modelo constitutivo unidimensional de plasticidad

En este apartado se presenta el modelo de plasticidad unidimensional isótropo con endurecimiento/ablandamiento descrito en (Simó and Hughes 1998).

El modelo matemático se describe en el Cuadro A.2, donde se indica la ecuación tensión-deformación ( $\sigma - \varepsilon$ ), la regla de flujo, la ley de evolución de la variable interna, el criterio de plasticidad, la ley de ablandamiento y las condiciones de carga y descarga del modelo.

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (\text{ecuación constitutiva}) \quad (\text{A.43})$$

$$\dot{\varepsilon}_p = \lambda \text{sign}(\sigma) \quad (\text{regla de flujo}) \quad (\text{A.44})$$

$$\dot{\alpha} = \lambda \quad (\text{ley de evolución}) \quad (\text{A.45})$$

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - (q + \sigma_y) \quad (\text{criterio de plasticidad}) \quad (\text{A.46})$$

$$\dot{q} = H\dot{\alpha} \quad (\text{ley de ablandamiento}) \quad (\text{A.47})$$

$$\left. \begin{array}{l} f \leq 0; \lambda \geq 0; \lambda f = 0 \\ \lambda \dot{f} = 0 (f = 0) \end{array} \right\} \quad (\text{condiciones de carga-descarga} \\ \text{y complementariedad}) \quad (\text{A.48})$$

**Cuadro A.2.** Ingredientes de un modelo de plasticidad unidimensional.

En las ecuaciones anteriores,  $E$  y  $\sigma_y$  corresponden al módulo de Young y a la tensión de fluencia del material.  $\varepsilon_p$  es la deformación plástica,  $\lambda$  es el multiplicador plástico,  $\alpha$  y  $q$  corresponden a la variable interna tipo deformación y tipo tensión,  $f(\sigma, \alpha)$  es la función de fluencia y  $H < 0$  es el parámetro de ablandamiento.

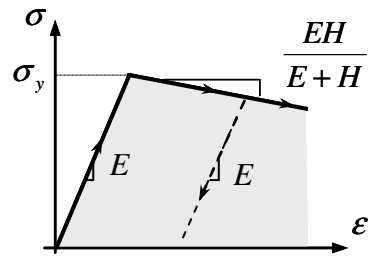
La ecuación constitutiva tangente del modelo se escribe como:

$$\dot{\sigma} = E_{tg} \dot{\varepsilon} \quad (\text{A.49})$$

donde el operador constitutivo tangente es igual a:

$$E_{tg} = \begin{cases} E & \text{si } \lambda = 0 \\ \frac{EH}{E+H} & \text{si } \lambda > 0 \end{cases} \quad (\text{A.50})$$

La Figura A.4 muestra la relación tensión-deformación para el modelo de plasticidad unidimensional con ablandamiento.



**Figura A.4.** Modelo unidimensional de plasticidad con ablandamiento

# Anexo B

## Teoría de mezclas para materiales compuestos

La *teoría o regla de mezclas* (Truesdell and Toupin 1960) permite representar el comportamiento de un material compuesto a partir de la ley constitutiva y del volumen de cada componente, considerando que todo punto de material compuesto está conformado por el grupo de materiales componentes. En esta teoría, la deformación es común en cada componente, al mismo tiempo que, la contribución a la tensión del compuesto es función de su volumen de participación.

A continuación se describen las hipótesis básicas de la teoría de mezclas y se obtiene la energía libre, el tensor de tensiones y el tensor constitutivo tangente del material compuesto (Oller, Oñate et al. 1996; Car 2000; Luccioni and Lopez 2002; Oller 2003).

### B.1. Hipótesis básicas

La descripción de un punto de material compuesto en el contexto de la mecánica del continuo presentado por la teoría de mezclas, se basa en las siguientes hipótesis (Truesdell and Toupin 1960):

- En cada volumen infinitesimal de material compuesto participa el conjunto de los materiales constituyentes.
- Cada componente aporta al comportamiento del material compuesto en proporción con su participación volumétrica.

- El volumen ocupado por cada componente es menor que el volumen total del compuesto.
- Todos los materiales componentes tienen la misma deformación.

De acuerdo a lo anterior, existe una distribución homogénea de todas las sustancias en cada punto del compuesto, determinada por el coeficiente de participación volumétrica  $k^c$  de cada componente, dado como:

$$k^c = \frac{dV^c}{d\bar{V}} \quad (\text{B.1})$$

siendo  $d\bar{V}$  y  $dV^c$  el volumen infinitesimal de material compuesto y de la componente  $c$ , respectivamente. Asimismo los coeficientes de participación de un material de  $cn$  componentes deben garantizar la conservación de la masa mediante la siguiente condición:

$$\sum_{c=1}^{cn} k^c = 1 \quad (\text{B.2})$$

La última hipótesis establece una ecuación de compatibilidad de la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \dots = \boldsymbol{\varepsilon}^c = \dots = \boldsymbol{\varepsilon}^{cn} \quad (\text{B.3})$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^c$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}^{cn}$  representan a la deformación del material compuesto, de la componente  $c$  y del  $n$ -ésimo componente.

## B.2. Energía libre del material compuesto

Por otro lado, la energía libre de un material compuesto está dada por la suma de las energías libres de cada uno de los materiales componentes, ponderadas de acuerdo a su volumen de participación en el compuesto, así (Truesdell and Toupin 1960):

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{c=1}^{cn} k^c \Psi^c(\boldsymbol{\varepsilon}^c, \boldsymbol{\alpha}^c) \quad (\text{B.4})$$

siendo  $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha})$  la energía libre por unidad de volumen del material compuesto en función del tensor de deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}$  y el vector de variables internas  $\boldsymbol{\alpha}$ . De igual forma  $\Psi^c(\boldsymbol{\varepsilon}^c, \boldsymbol{\alpha}^c)$  corresponde a la energía libre por unidad de volumen de la componente  $c$ , en términos de la deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}^c$  y las variables internas  $\boldsymbol{\alpha}^c$ .

La disipación de energía por unidad de volumen en el material compuesto se puede expresar de la forma:

$$\Xi = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (\text{B.5})$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de tensiones.

Siendo  $\dot{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\alpha}) = (\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Psi) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + (\partial_{\boldsymbol{\alpha}} \Psi) \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}$ , la Ecuación (B.5) se puede escribir como:

$$\Xi = [\boldsymbol{\sigma} - (\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Psi)] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - (\partial_{\boldsymbol{\alpha}} \Psi) \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0 \quad (\text{B.6})$$

Aplicando el método de Coleman a la desigualdad anterior (Lubliner 1990), el tensor de tensiones del material compuesto es igual a:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Psi) = \sum_{c=1}^{cn} k^c (\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Psi^c) = \sum_{c=1}^{cn} k^c \boldsymbol{\sigma}^c \quad (\text{B.7})$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}^c$  es tensor de tensiones de la componente  $c$ .

### B.3. Ecuación constitutiva tangente del material compuesto

La teoría de mezclas facilita la formulación de un modelo constitutivo para el material compuesto, en virtud de la compatibilidad del campo de deformaciones entre sus componentes.

Se puede escribir una ecuación constitutiva tangente del material compuesto de la forma:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}_{tg} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{B.8})$$

donde  $\mathbb{C}_{tg}$  es el tensor constitutivo tangente del compuesto.

La tasa de tensiones del material compuesto  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  se puede obtener derivando la Ecuación (B.7) con respecto al tiempo, así:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \sum_{c=1}^{cn} k^c \dot{\boldsymbol{\sigma}}^c \quad (\text{B.9})$$

donde  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^c$  corresponde a la tasa de tensiones del material componente  $c$ .

La ecuación de compatibilidad (B.3), se puede expresar en términos de las tasas de deformación de la forma:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)} = \dots = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c = \dots = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{cn} \quad (\text{B.10})$$

donde  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c$  y  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{cn}$  representan a la tasa de deformación del material compuesto, del componente  $c$  y del  $n$ -ésimo componente, respectivamente.

El comportamiento de cada componente se describe mediante una ley particular, de tal forma que, la ecuación constitutiva tangente del material componente  $c$  se puede expresar como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^c = \mathbf{C}_{tg}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c \quad (\text{B.11})$$

siendo  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c$  y  $\mathbf{C}_{tg}^c$  la tasa de deformación y el operador constitutivo tangente de la componente  $c$ . De acuerdo con la Ecuación (B.10), la tasa de deformación de la componente  $c$  y del material compuesto son iguales, es decir,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ .

Sustituyendo las Ecuaciones (B.8) y (B.11) en la Ecuación (B.9) se tiene:

$$\mathbf{C}_{tg} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{c=1}^{cn} k^c \mathbf{C}_{tg}^c : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c \quad (\text{B.12})$$

Dada la Ecuación (B.10) de compatibilidad de las tasas de deformación, el tensor constitutivo tangente del material compuesto es igual a:

$$\mathbf{C}_{tg} = \sum_{c=1}^{cn} k^c \mathbf{C}_{tg}^c \quad (\text{B.13})$$

# Anexo C

## Metodología de discontinuidades fuertes de continuo

En este anexo se resumen los ingredientes básicos de la metodología de discontinuidades fuertes de continuo presentada en (Oliver 1996; Oliver 2000; Oliver, Huespe et al. 2002; Oliver, Huespe et al. 2003; Oliver and Huespe 2004).

Las principales características de esta aproximación son las siguientes:

- Utiliza ecuaciones constitutivas continuas no lineales convencionales (tensión – deformación), equipadas con ablandamiento por deformación.
- Considera una cinemática con discontinuidad fuerte. En otras palabras, la discontinuidad es inducida por la aparición de un salto en el campo del desplazamiento y en consecuencia, surgen valores no acotados del campo de la deformación, en el contexto de la mecánica del continuo.
- Mediante un razonamiento matemático, denominado análisis de discontinuidad fuerte, la aproximación conserva la compatibilidad entre las ecuaciones constitutivas en el continuo y la cinemática de la discontinuidad fuerte.

Lo anterior demuestra que cada modelo constitutivo continuo induce, de forma consistente, un modelo discreto (tracción – salto). Esto proporciona un vínculo entre la mecánica del continuo y la mecánica no lineal (cohesiva) de la fractura.



## C.1. Cinemática de la discontinuidad fuerte

### C.1.1. Descripción unidimensional

Durante el alargamiento axial de una barra de longitud  $l$  y área de la sección transversal  $A$ , se produce una discontinuidad fuerte o salto en el campo del desplazamiento sobre una sección transversal  $S$  (Figura C.1(c)).

En la notación,  $\Omega/S$  indica el conjunto de puntos materiales del dominio  $\Omega$  que no hacen parte de la superficie de  $S$ . Asimismo,  $\Omega^+$  y  $\Omega^-$  indican los subdominios de  $\Omega/S$  adelante y atrás de  $S$ , respectivamente. El campo discontinuo de la tasa de desplazamientos se puede escribir como:

$$u(x,t) = \bar{u}(x,t) + \mathcal{H}_S(x) \cdot [[u]](t) \quad (\text{C.1})$$

donde  $\bar{u}(x,t)$  y  $[[u]](t)$  son funciones suaves y  $\mathcal{H}_S(x)$  es la función de Heaviside en  $S$  definida como  $\mathcal{H}_S(x) = 0$  para  $x < x_s$  y  $\mathcal{H}_S(x) = 1$  para  $x \geq x_s$ .

El campo de deformaciones compatible con los desplazamientos indicados en la Ecuación (C.1) es igual a:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x,t) &= \partial_x u(x,t) = \bar{\varepsilon}(x,t) + \delta_S(x) [[u]](t) \quad , \text{ siendo} \\ \bar{\varepsilon}(x,t) &= \partial_x \bar{u}(x,t) + \mathcal{H}_S(x) \cdot \partial_x [[u]](t) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

donde  $\delta_S(x)$  es la derivada generalizada de la delta de Dirac en  $S$ .

El campo del salto de desplazamientos  $[[u]](x,t)$  está definido como:

$$[[u]](t) = u|_{x_s^+} - u|_{x_s^-} \quad (\text{C.3})$$

Derivando las expresiones anteriores, se obtiene la cinemática de la discontinuidad fuerte como:

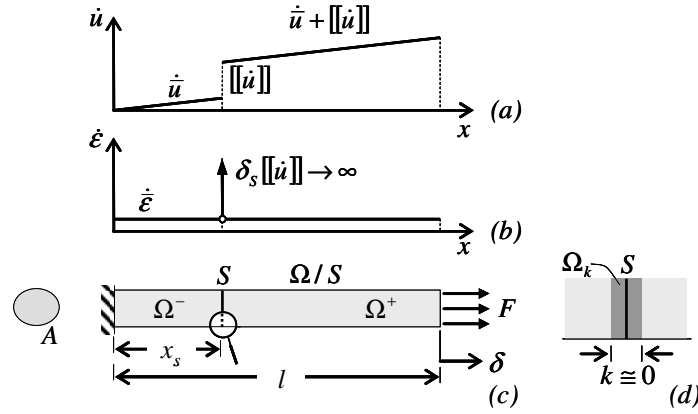
$$\begin{cases} \dot{u}(x,t) = \dot{\bar{u}}(x,t) + \mathcal{H}_S(x) \cdot [[\dot{u}]](t) & ; \quad [[\dot{u}]](t) = \dot{u}|_{x_s^+} - \dot{u}|_{x_s^-} \\ \dot{\varepsilon}(x,t) = \dot{\bar{\varepsilon}}(x,t) + \delta_S(x) [[\dot{u}]](t) \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

donde  $\dot{\bar{\varepsilon}}(x,t)$  y  $\delta_S(x) [[\dot{u}]](t)$  corresponde a la parte regular (acotada) y singular (no acotada) de la tasa de deformación, respectivamente (Figura C.1).

La delta de Dirac  $\delta_S(x)$  es tratada de forma aproximada como una función regularizada  $\delta_S^k(x)$ , al sustituir a la superficie de discontinuidad  $S$ , por una banda de discontinuidad  $\Omega_k$  de ancho  $k \cong 0$ , como se indica en la Figura C.1(d). Por lo tanto, la delta de Dirac regularizada se puede expresar de la forma:

$$\delta_S^k(x) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \mu_S(x) \quad ; \quad \mu_S(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in \Omega_k \\ 0 & \forall x \notin \Omega_k \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

siendo  $\mu_S(x)$  es una función de colocación sobre  $\Omega_k$ .



**Figura C.1.** Cinemática de la discontinuidad fuerte en una dimensión: (a) tasa de desplazamiento, (b) tasa de deformación, (c) discontinuidad en la barra y (d) detalle de la zona de discontinuidad.

### C.1.2. Descripción bi- o tridimensional

A continuación se presenta la extensión al espacio bi- o tridimensional de la descripción cinemática indicada en el apartado anterior.

Sea un cuerpo  $\Omega$  que exhibe una discontinuidad fuerte sobre la superficie material  $S$  de normal  $\mathbf{n}$ , la cual divide al cuerpo en los dominios  $\Omega^+$  (apuntando en dirección  $\mathbf{n}$ ) y  $\Omega^-$  como lo muestra la Figura C.2(a). La cinemática de la discontinuidad fuerte de la Ecuación (C.4) se puede extender a (Oliver, Cervera et al. 1999):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{H}_S(\mathbf{x}) \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, t) & ; \quad [[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}|_{\mathbf{x} \in S^+} - \dot{\mathbf{u}}|_{\mathbf{x} \in S^-} \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, t) + \delta_s(\mathbf{n} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]])^s \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

siendo la función de Heaviside igual a:

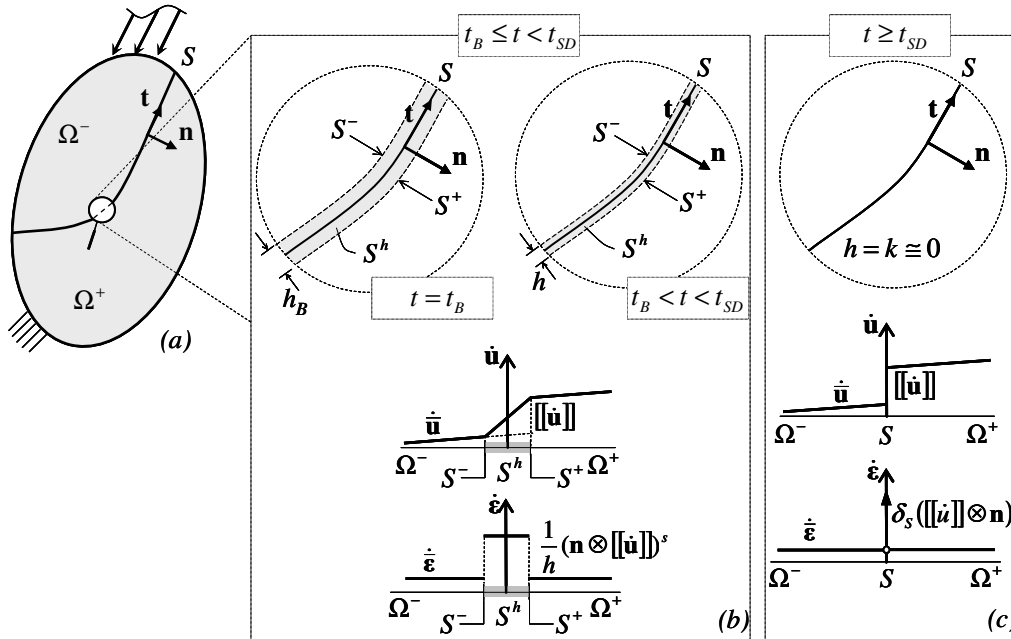
$$\mathcal{H}_S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \\ 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

y  $\delta_s$  la función delta de Dirac resultante del gradiente (en sentido distribucional) de  $\mathcal{H}_S$ , el cual corresponde a  $\nabla \mathcal{H}_S = \delta_s \mathbf{n}$ .

De acuerdo con la Ecuación (C.6) la diferencia entre la tasa de deformación dentro y fuera de la superficie de discontinuidad  $S$  es igual a:

$$[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|_{\mathbf{x} \in S^+} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|_{\mathbf{x} \in S^-} = \delta_s (\mathbf{n} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]])^s \quad (\text{C.8})$$

La Figura C.2(c) describe la tasa de desplazamientos y de deformaciones en la superficie de discontinuidad.



**Figura C.2.** Evolución de la discontinuidad: (a) sólido que exhibe una discontinuidad, (b) cinemática de la discontinuidad débil, (c) cinemática de la discontinuidad fuerte.

Para el siguiente análisis matemático es conveniente considerar una versión regularizada de la cinemática dada en la Ecuación (C.6), definiendo una banda de discontinuidad  $S^h$  de ancho de  $h$ , que contiene a la superficie  $S$  (Figura C.2(b)). La delta de Dirac se aproxima mediante una función regularizada de la forma:

$$\delta_s^h(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mu_s^h(\mathbf{x}) \quad ; \quad \mu_s^h(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \forall \mathbf{x} \in S^h \\ 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega / S^h \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

donde  $\mu_s^h(\mathbf{x})$  es una función de colocación sobre  $S^h$  y  $\Omega / S^h$ <sup>1</sup>. Asimismo, las tasa de deformación regularizada se pueden escribir como:

<sup>1</sup> La notación  $A/B$  indica el conjunto de todos los puntos materiales de  $A$  que no pertenecen a  $B$ .

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) + \delta_s^h (\mathbf{n} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]])^s \quad (\text{C.10})$$

para la cual, la parte singular  $\delta_s^h (\mathbf{n} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]])^s$  no está acotada cuando  $h \rightarrow 0$ .

La cinemática anterior introduce el concepto de discontinuidad débil. En general el ancho de banda es diferente de cero de tal forma que el campo de deformaciones permanece acotado en términos de un salto aparente  $[[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}|_{\mathbf{x} \in S^+} - \dot{\mathbf{u}}|_{\mathbf{x} \in S^-}$  medido como la diferencia entre el campo de desplazamientos a ambos lados de la banda, tal situación define a la discontinuidad débil.

Por lo tanto, la tasa de deformaciones de la discontinuidad débil y fuerte se puede presentar como:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{h} \mu_s (\mathbf{n} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]])^s \quad ; \quad \mu_s(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \forall \mathbf{x} \in S \\ 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega / S \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{cases} \text{discontinuidad débil} & \rightarrow (h \neq 0) \\ \text{discontinuidad fuerte} & \rightarrow (h \rightarrow 0) \end{cases}$$

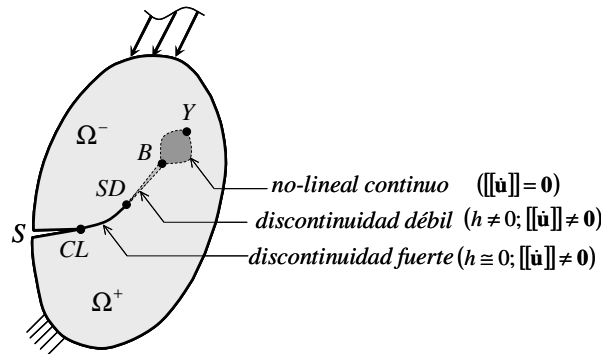
En este contexto, el proceso de formación de una discontinuidad fuerte en un punto material del cuerpo, puede ser modelado como una discontinuidad débil que degenera en una discontinuidad fuerte en un momento dado durante la localización de la deformación (Figura C.2). En el instante de bifurcación material  $t_B$ , el campo de las tensiones y deformaciones bifurca de acuerdo con la cinemática presentada en la Ecuación (C.11), siendo  $[[\dot{\mathbf{u}}]] \neq \mathbf{0}$ , presentando una banda de localización de ancho  $h_B$  que indica el comienzo de la discontinuidad débil (Figura C.2(b)). En los siguientes instantes el ancho de banda decrece de acuerdo a una ley de evolución propia del material hasta alcanzar un valor nulo (para propósitos computacionales un valor  $k$ , tan pequeño como la precisión de la máquina lo permita), en un pseudo-tiempo  $t_{SD}$  que caracteriza el comienzo de la discontinuidad fuerte.

A nivel del sólido, se puede observar la evolución de la discontinuidad en los siguientes conjuntos de puntos materiales (Figura C.3):

- Puntos que han alcanzado el comportamiento no lineal (daño, plasticidad, etc), pero aún no cumplen el criterio de bifurcación, definidos en una zona continua no lineal Y-B.
- Puntos que han bifurcado y experimentan una cinemática de discontinuidad débil, dando lugar a un salto en el desplazamiento y a un ancho de banda diferente de cero (zona B-SD).

- Puntos que han alcanzado el régimen de discontinuidad fuerte donde  $h = k \cong 0$ , como lo ilustra la zona SD-S.

La zona de proceso de fractura considerada comúnmente en la mecánica no lineal de la fractura (Bazant and Oh 1983; Bazant and Planas 1998), corresponde a la región Y-CL en la cual existen una acción cohesiva en la fisura. En cambio, la pérdida total de cohesión entre las caras de una fisura se presenta en la zona CL-S.



**Figura C.3.** Zona de proceso de fractura para la aproximación de discontinuidades fuertes.

## C.2. Problema de valores de contorno en una discontinuidad fuerte

Las ecuaciones presentadas en el Cuadro C.1 describen el problema de valores de contorno (BVP)<sup>2</sup> de un sólido  $\Omega$  que experimenta una discontinuidad fuerte en una superficie  $S$  de normal  $\mathbf{n}$  (Figura C.2(a)).

Las ecuaciones (C.12) - (C.15) son las clásicas condiciones de un medio con desplazamiento continuo, donde  $\mathbf{b}$  es el vector de fuerzas de cuerpo,  $\mathbf{t}^*$  es el vector de tracciones prescritas y  $\mathbf{v}_t$  es la normal al contorno de desplazamientos prescritos  $\Gamma_u$  y de tracciones prescritas  $\Gamma_\sigma$ .

La ecuación (C.16) es una expresión adicional específica para el problema de discontinuidad fuerte, en la cual se establece la continuidad del campo de tracciones a través de la superficie de fallo  $S$ .

<sup>2</sup> Boundary value problem (BVP).

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad (\text{equilibrio interno en } \Omega/S) \quad (\text{C.12})$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}_t = \dot{\mathbf{t}}^* \quad (\text{tracciones prescritas en } \Gamma_\sigma) \quad (\text{C.13})$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^* \quad (\text{desplazamientos prescritos en } \Gamma_u) \quad (\text{C.14})$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^-/S} \cdot \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+/S} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (\text{continuidad externa de tracciones en } S) \quad (\text{C.15})$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_S \cdot \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+/S} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (\text{continuidad interna de tracciones en } S) \quad (\text{C.16})$$

**Cuadro C.1.** Ecuaciones de equilibrio y condiciones de continuidad de un sólido con discontinuidad fuerte.

Es imprescindible obtener valores acotados de la tensión en  $S$ , para que se cumpla la condición de continuidad interna de tracciones expresada en la Ecuación (C.16). Por esto, la aproximación del continuo con discontinuidades fuertes permite evaluar un campo de tensiones acotadas con el mismo modelo constitutivo del continuo, tanto en la superficie de discontinuidad  $S$ , como fuera de ella, a pesar del carácter no acotado de las deformaciones en  $S$ .

### C.3. Análisis de bifurcación material

En un punto material de un sólido  $\Omega$  actúa una tasa de tensión uniforme  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t)$  que induce una tasa de deformación  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t)$  y de desplazamiento  $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ . Se busca la condición de existencia de una superficie  $S$  con normal  $\mathbf{n}$ , de discontinuidad de la tasa de deformación, indicada en la Figura C.2(a) (Rice 1976; Rice and Rudnicki 1980).

La ecuación constitutiva tangente del material es de la forma:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}_{tg} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{C.17})$$

donde  $\mathbb{C}_{tg}$  corresponde al tensor constitutivo tangente.

En el contexto de la mecánica del continuo el vector de tracciones es continuo a través de la superficie  $S$ , es decir,

$$[[\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}]] = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^-/S} \cdot \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+/S} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (\text{C.18})$$

Sustituyendo la Ecuación (C.17) en la Ecuación (C.18) se tiene:

$$[[\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}]] = [[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]] \cdot \mathbf{n} = [[\mathbb{C}_{tg} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] \cdot \mathbf{n} \quad (\text{C.19})$$

La ecuación de compatibilidad de Maxwell se utiliza para describir la forma general de la discontinuidad de un tensor gradiente de segundo orden. Por tanto el salto en la tasa de deformación se puede escribir como:

$$[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|_{\mathbf{x} \in S^+} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}|_{\mathbf{x} \in S^-} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{g})^s \quad (\text{C.20})$$

donde  $\mathbf{g}$  es el vector salto de desplazamiento. Para  $\mathbf{g} = 0$  no hay discontinuidad, mientras que  $\mathbf{g} \neq 0$  es una condición suficiente para que la discontinuidad exista.

Considerando continuidad en el tensor constitutivo tangente a través de la superficie  $S$ , es decir,  $\mathbf{C}_{tg} = \mathbf{C}_{tg(\Omega^+)} = \mathbf{C}_{tg(\Omega^-)}$ , se obtiene:

$$[[\mathbf{C}_{tg} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{C}_{tg} : [[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{C}_{tg} : (\mathbf{n} \otimes \mathbf{g})^s \cdot \mathbf{n} \quad (\text{C.21})$$

Dado que  $\mathbf{C}_{tg}$  tiene simetría menor,

$$\mathbf{C}_{tg} : (\mathbf{n} \otimes \mathbf{g})^s \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{tg} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{g} \quad (\text{C.22})$$

Por lo tanto, existe discontinuidad en la tasa de deformaciones cuando:

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{tg} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{g} \neq \mathbf{0} \quad (\text{C.23})$$

y en consecuencia  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{tg} \cdot \mathbf{n})$  representado de forma matricial es singular y  $\mathbf{g}$  es un autovector de tal matriz.

El tensor de segundo orden presentado en la ecuación anterior se denomina *tensor de localización*  $\mathbf{Q}_{tg}(t, \mathbf{n}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{tg} \cdot \mathbf{n})$ .

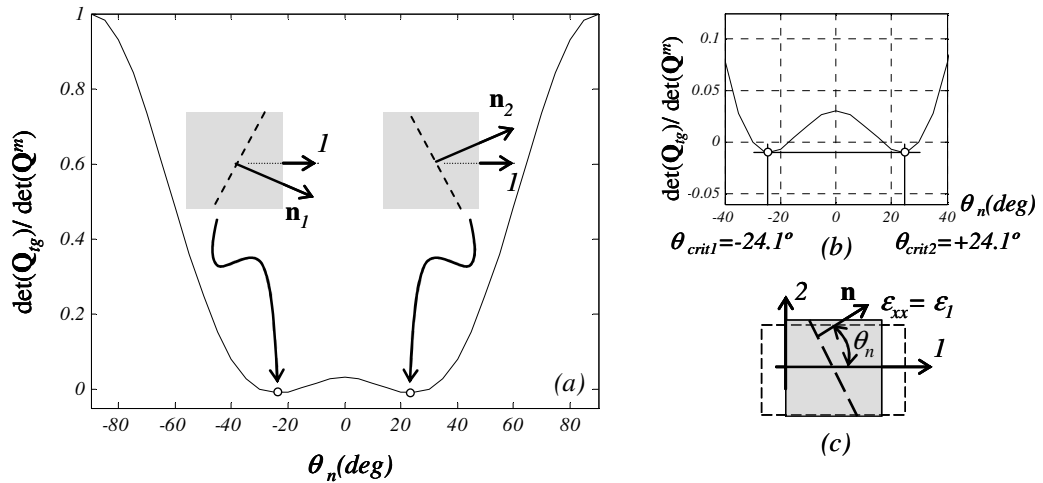
El criterio clásico de bifurcación presentado por Hill (1962) establece que la singularidad del tensor de localización  $\mathbf{Q}_{tg}(t, \mathbf{n})$  es una condición suficiente para la presencia de la discontinuidad, es decir,

$$\det[\mathbf{Q}_{tg}(t_B, \mathbf{n})] = \det[\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_{tg} \cdot \mathbf{n}] = 0 \quad \text{para} \quad t = t_B \quad (\text{C.24})$$

siendo  $t_B$  y  $\mathbf{n}$  el instante de bifurcación y la dirección de la banda de localización, respectivamente.

En modelos de daño isótropo, la curva<sup>3</sup>  $\det(\mathbf{Q}_{tg})/\det(\mathbf{Q})$  versus  $\theta_n$  presentada en la Figura C.4, indica dos valores mínimos iguales que definen dos posibles ángulos de bifurcación. Estos ángulos medidos entre la dirección principal 1 y el vector  $\mathbf{n}$ , son de igual magnitud y sentido contrario, como lo muestra la solución analítica dada por (Runesson, Ottosen et al. 1991; Rizzi, Carol et al. 1995) para dos dimensiones y por (Chaves 2003; Oliver and Huespe 2004) para tres dimensiones.

<sup>3</sup> El tensor de localización elástico está definido como  $\mathbf{Q} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}$ .



**Figura C.4.** Análisis de bifurcación en un modelo de daño isótropo. Relación  $\det[\mathbf{Q}_{ig}]/\det[\mathbf{Q}^m]$  versus dirección de la discontinuidad  $\theta$  en un estado tensional de tracción axial. Propiedades del hormigón:  $E^m = 20.0$  GPa,  $\nu = 0.2$ ,  $G^f = 100$  N/m  $\sigma_u = 2.00$  MPa: (a) gráfica completa, (b) acercamiento en los mínimos del  $\det[\mathbf{Q}_{ig}]$ , (c) estado tensional.

## C.4. Análisis de discontinuidad fuerte para modelos de daño continuo

A continuación se aplica la aproximación de discontinuidades fuertes al modelo de daño escalar isótropo presentado en el Anexo A.1 (Oliver 2000; Samaniego 2002).

Para un punto material perteneciente a la superficie de discontinuidad  $S$  y en un instante  $t > t_{SD}$ , la tasa de deformación es igual a:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_s = \dot{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}_s + \delta_s (\mathbf{n} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]]_s)^s \quad (\text{C.25})$$

Al introducir una función delta de Dirac regularizada  $\delta_s^h$ , definida como:

$$\delta_s^h = \frac{1}{h} \mu_s(\mathbf{x}) \quad , \quad \mu_s(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in S^h \\ 0 & \mathbf{x} \in \Omega / S^h \end{cases} \quad (\text{C.26})$$

tal que  $\lim_{h \rightarrow 0} \delta_s^h = \delta_s$ , la cinemática presentada en la Ecuación (C.25) se puede escribir de la forma:



$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_S^h = \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_S + \frac{1}{h} \mu_S (\mathbf{n} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]]_S)^s \quad (\text{C.27})$$

siendo  $h$  y  $\mu_S(\mathbf{x})$ , el parámetro de regularización y la función de colocación, respectivamente.  $S^h$  es la banda de discontinuidad que contiene a  $S$ , cuyo ancho corresponde al parámetro de regularización  $h$ .

El campo de deformaciones en régimen de discontinuidad fuerte se obtiene al integrar en el pseudo tiempo la expresión anterior de la forma,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_S \Big|_{t \geq t_{SD}} &= \int_0^t \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_S dt + \mu_S \int_0^{t_{SD}} \frac{1}{h} (\mathbf{n} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]]_S)^s dt + \mu_S \int_{t_{SD}}^t \frac{1}{h} (\mathbf{n} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]]_S)^s dt \\ &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_S + \mu_S \frac{1}{h} (\mathbf{n} \otimes \Delta[[\mathbf{u}]]_S)^s \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

donde  $\Delta[[\mathbf{u}]]_S = [[\mathbf{u}]]_S(t) - [[\mathbf{u}]]_S(t_{SD})$ .

El vector de tracciones  $\mathbf{t}_S = \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \mathbf{n}$  para  $t \geq t_{SD}$ , se calcula a partir de la ecuación constitutiva  $\boldsymbol{\sigma}_S = (q_S/r_S) \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_S$  y la Expresión (C.28), así:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_S &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q_S}{r_S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} : \left[ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_S + \frac{1}{h} (\mathbf{n} \otimes \Delta[[\mathbf{u}]]_S)^s \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q_S}{hr_S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} : [h \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_S + (\mathbf{n} \otimes \Delta[[\mathbf{u}]]_S)^s] \\ &= \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{hr_S} \right) q_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \Delta[[\mathbf{u}]]_S \\ &= \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{hr_S} \right) \underbrace{q_S \mathbf{Q} \cdot \Delta[[\mathbf{u}]]_S}_{\text{acotado y } \neq 0} \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

Dado que el tensor  $\mathbf{Q} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}$  es definido positivo y que  $[[\mathbf{u}]]_S \neq 0$  en  $t > t_{SD}$ , se cumple que  $q_S \mathbf{Q} \cdot \Delta[[\mathbf{u}]]_S$  es acotada y diferente de cero. Por lo tanto, para conservar acotado el vector tracción es necesario que  $\lim_{h \rightarrow 0} (1/hr_S)$  también lo sea. Esto se logra definiendo una variable interna discreta acotada  $\bar{\alpha}$  en función de  $r_S$ , así:

$$\frac{1}{\bar{\alpha}} = \delta_S \frac{1}{\dot{r}_S} ; \quad \dot{r}_S = \delta_S \dot{\bar{\alpha}} \quad (\text{C.30})$$

utilizando de nuevo la delta de Dirac  $\delta_S = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_S^h$ .

La variable interna  $r_S$  se obtiene de integrar en el tiempo la ecuación anterior, así:

$$\begin{aligned} r_S(t) &= \int_0^{t_{SD}} \dot{r}_S dt = r_S(t_{SD}) + \delta_S \int_{t_{SD}}^t \dot{\bar{\alpha}} dt \\ r_S(t) &= r_S(t_{SD}) + \delta_S \Delta \bar{\alpha} \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

donde  $\Delta\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(t) - \bar{\alpha}(t_{SD})$ . Se observa el carácter no acotado  $r_s$  y de su derivada en el tiempo  $\dot{r}_s$ .

Reemplazando la Expresión (C.30) en la ley de ablandamiento  $\dot{q}_s = H \dot{r}_s$ , se obtiene:

$$\dot{q}_s = \bar{H} \dot{\bar{\alpha}} \quad (\text{C.32})$$

donde  $\bar{H}$  se define como el parámetro de ablandamiento discreto, de la forma:

$$\bar{H} = \delta_s H \quad ; \quad \frac{1}{H} = \delta_s \frac{1}{\bar{H}} \quad (\text{C.33})$$

La variable interna tipo tensión se puede expresar a partir de la forma incremental de la Ecuación (C.32), como:

$$q_s(t) = q_s(t_{SD}) + \bar{H} \Delta\bar{\alpha} \quad (\text{C.34})$$

La ecuación constitutiva discreta presentada a continuación se obtiene sustituyendo la variable interna  $r_s$  de la Ecuación (C.31) en la Ecuación (C.29), dado que  $\lim_{h \rightarrow 0} (hr_s) = \Delta\bar{\alpha}$ .

$$\mathbf{t}_s = \frac{q_s}{\Delta\bar{\alpha}} \mathbf{Q} \cdot \Delta[[\mathbf{u}]]_s \quad (\text{C.35})$$

Por otro lado, la energía consumida en la formación de la discontinuidad  $S$  por unidad de área en régimen de discontinuidad fuerte es igual a:

$$G_{SD} = \int_{t_{SD}}^{t_{\infty}} \mathbf{t}_s \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]]_s dt \quad (\text{C.36})$$

Se considera que  $G_{SD}$  es igual a la energía de fractura por unidad de área del material  $G_f$ .

Utilizando el criterio de daño dado en las Ecuaciones (A.22) y (A.26) se puede obtener la siguiente relación:

$$\mathbf{t}_s \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]]_s = q_s \dot{\bar{\alpha}} \quad (\text{C.37})$$

Reemplazando la expresión anterior en la Ecuación (C.36) e integrando, se obtiene la energía de fractura a tracción y a compresión por unidad de área:

$$G_f = -\frac{(\sigma_u)^2}{2EH} \quad (\text{tracción}) \quad (\text{C.38})$$

$$G_f^{(c)} = n_{\sigma}^2 G_f \quad (\text{compresión}) \quad (\text{C.39})$$

## C.5. Análisis de discontinuidad fuerte para modelos unidimensionales de plasticidad

En este apartado se resume la aplicación de la aproximación de discontinuidades fuertes a modelos constitutivos de plasticidad unidimensional (Simó, Oliver et al. 1993; Manzoli 1998; Oliver, Cervera et al. 1999).

Para un punto material perteneciente a la superficie de discontinuidad  $S$  y en un instante  $t > t_{SD}$ , la tasa de deformación está definida como  $\dot{\epsilon}_S = (\dot{\sigma}_S/E) + \dot{\epsilon}_S^p$  de acuerdo con el modelo de plasticidad o de la forma  $\dot{\epsilon}_S = \dot{\bar{\epsilon}}_S + \delta_S [[\dot{u}]]_S$  como lo indica la cinemática de discontinuidades fuertes. Igualando las dos expresiones se tiene:

$$\dot{\epsilon}_S = (\dot{\sigma}_S/E) + \dot{\epsilon}_S^p = \dot{\bar{\epsilon}}_S + \delta_S [[\dot{u}]]_S \quad (C.40)$$

Reemplazando la regla de flujo  $\dot{\epsilon}_S^p = \lambda \text{sign}(\sigma_S)$  en la expresión anterior se tiene:

$$\underbrace{(\dot{\sigma}_S/E)}_{\text{regular}} + \lambda \text{sign}(\sigma_S) = \underbrace{\dot{\bar{\epsilon}}_S}_{\text{regular}} + \underbrace{\delta_S [[\dot{u}]]_S}_{\text{singular}} \quad (C.41)$$

Dado que la tasa de deformación  $\dot{\bar{\epsilon}}_S$  y la tensión  $\dot{\sigma}_S$  son cantidades regulares, el problema mantiene sentido físico si:

$$\lambda \text{sign}(\sigma_S) = \delta_S [[\dot{u}]]_S \quad (C.42)$$

Se observa el carácter singular del multiplicador plástico continuo  $\lambda$ , por lo cual, se define un multiplicador plástico discreto  $\bar{\lambda}$ , tal que:

$$\lambda = \delta_S \bar{\lambda} \quad (C.43)$$

y en consecuencia:

$$\bar{\lambda} = [[\dot{u}]]_S \text{sign}(\sigma_S) \quad (C.44)$$

De acuerdo con la ley de evolución en el continuo  $\dot{\lambda} = \dot{\alpha}_S$ , se puede establecer que:

$$\dot{\alpha} = \delta_S \dot{\bar{\alpha}}_S \quad (C.45)$$

donde  $\bar{\alpha}$  es la variable interna discreta.

Para un instante  $t > t_{SD}$  la variable interna es igual a:

$$\begin{aligned} \alpha_S(t) &= \int_0^{t_{SD}} \dot{\alpha}_S dt = \alpha_S(t_{SD}) + \delta_S \int_{t_{SD}}^t \dot{\bar{\alpha}} dt \\ \alpha_S(t) &= \alpha_S(t_{SD}) + \delta_S \Delta \bar{\alpha} \end{aligned} \quad (C.46)$$

donde  $\Delta \bar{\alpha} = \bar{\alpha}(t) - \bar{\alpha}(t_{SD})$ .

Reemplazando la expresión (C.45) en la ley de ablandamiento  $\dot{q}_s^f = H^f \dot{\alpha}_s^f$ , se obtiene:

$$\dot{q}_s = \bar{H} \dot{\alpha} \quad (\text{C.47})$$

donde  $\bar{H}$  se define como el parámetro de ablandamiento discreto,

$$\bar{H} = \delta_s H \quad ; \quad \frac{1}{\bar{H}} = \delta_s \frac{1}{H} \quad (\text{C.48})$$

La variable interna tipo tensión se puede expresar a partir de la forma incremental de la Ecuación (C.32), como:

$$q_s(t) = q_s(t_{SD}) + \bar{H} \Delta \alpha \quad (\text{C.49})$$

Derivando la función de fluencia  $f(\sigma, \alpha)$  en el tiempo (Ecuación (A.46)) y aplicando el criterio de plasticidad, se obtiene la tasa de tensiones en la discontinuidad como :

$$\dot{\sigma}_s = \dot{q}_s \text{sign}(\sigma_s) \quad (\text{C.50})$$

Sustituyendo la Ecuación (C.44) y (C.47) en la expresión anterior se tiene:

$$[[\dot{u}]]_s = \frac{1}{\bar{H}} \dot{\sigma}_s \quad (\text{C.51})$$

La energía de fractura por unidad de área en modelos de plasticidad unidimensional se puede evaluar como:

$$G_f = \int_{t_{SD}}^{t_{\infty}} \sigma_s \cdot [[\dot{u}]]_s dt \quad (\text{C.52})$$

Reemplazando la Ecuación (C.51) en la ecuación anterior y evaluando la integral en el tiempo se tiene:

$$G_f = -\frac{(\sigma_y)^2}{2\bar{H}} \quad (\text{C.53})$$



# Anexo D

## Trazado de líneas de discontinuidad

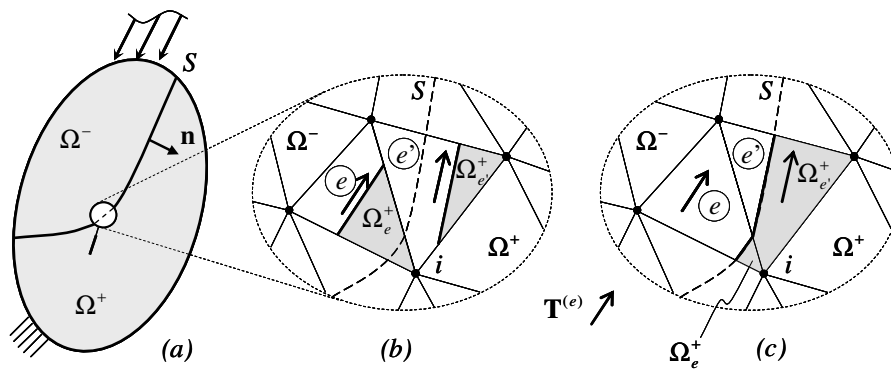
El análisis de bifurcación material proporciona la información necesaria para establecer la aparición y dirección de una discontinuidad en un punto material en función del estado tensional y de las variables internas del modelo constitutivo que lo gobierna. Sin embargo, en la implementación numérica, la posición geométrica de la discontinuidad en el interior de un elemento finito no está definida. Por lo tanto, es necesario un algoritmo que establezca la ubicación de la discontinuidad en cada elemento tal que conserve la continuidad de la línea de discontinuidad en el sólido.

A continuación se describe la estrategia presentada en (Samaniego 2002; Oliver and Huespe 2004), para trazar las líneas de discontinuidad en el sólido en el contexto del método de los elementos finitos.

### D.1. Generalidades

La superficie de discontinuidad  $S$  divide a un cuerpo  $\Omega$  en los dominios  $\Omega^+$  y  $\Omega^-$  de acuerdo con la dirección positiva del vector normal  $\mathbf{n}$ , como se muestra en la Figura D.1(a). Tal cuerpo se puede discretizar con elementos finitos triangulares lineales, cuyo dominio  $\Omega_e$  está dividido en los dominios  $\Omega_e^+$  y  $\Omega_e^-$ , por una línea de discontinuidad de ubicación desconocida en el interior del elemento (Figura D.1(b)).

Si en un punto material  $\mathbf{x}$  del dominio  $\Omega^+$  está ubicado un nodo  $i$  de la malla que pertenece a los elementos  $e$  y  $e'$ , cruzados por la misma línea de discontinuidad, tal nodo debe hacer parte de los dominios  $\Omega_e^+$  y  $\Omega_{e'}^+$ . Una trayectoria continua de la línea de discontinuidad a través de los elementos asegura esta condición (Figura D.1).



**Figura D.1.** Trazado de las líneas de discontinuidad: (a) línea de discontinuidad en el sólido, (b) posición aleatoria de la línea de discontinuidad en el interior de dos elementos finitos, (c) alineación entre las trayectorias de discontinuidad de dos elementos finitos.

## D.2. Estrategia local

En la estrategia local, la alineación se realiza explícitamente entre un elemento y su elemento vecino que también hace parte de la misma discontinuidad. A continuación se indica este procedimiento:

- Inicialmente se fija, de forma arbitraria, la posición de la discontinuidad en el primer elemento que cumpla con el criterio de bifurcación, obteniendo un punto de salida de la discontinuidad en este elemento o de entrada en el elemento vecino.
- Para el siguiente elemento vecino, la línea de discontinuidad se traza a partir la dirección y el punto de entrada de la misma en el elemento (dado por el elemento anterior).

Cuando se considera una sola trayectoria este algoritmo es simple y robusto, sin embargo, cuando el número de posibles discontinuidades aumenta esta estrategia puede ser poco robusta.

En estructuras de hormigón armado es común trabajar con múltiples trayectorias de fisura, lo cual hace más apropiada un estrategia global de trazado de discontinuidades.

## D.3. Estrategia global

### D.3.1. Consideraciones generales

En esta estrategia presentada en (Samaniego 2002; Oliver and Huespe 2004; Oliver, Huespe et al. 2004), se trazan todas las posibles líneas de discontinuidad  $S_i$ , como miembros de la familia de curvas de nivel de un campo escalar  $\theta(\mathbf{x})$  que coinciden con las envolventes del campo vectorial  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ , el cual es ortogonal a  $\mathbf{n}$  y define la dirección de propagación de la discontinuidad en el sólido (Figura D.2(a)). Por lo tanto:

$$S_i = \{ \mathbf{x} \in \Omega ; \theta(\mathbf{x}) = \theta_{S(i)} \} \quad (\text{D.1})$$

donde  $\theta_{S(i)}$  es una constante que actúa como etiqueta de la posible línea de discontinuidad  $S_i$ .

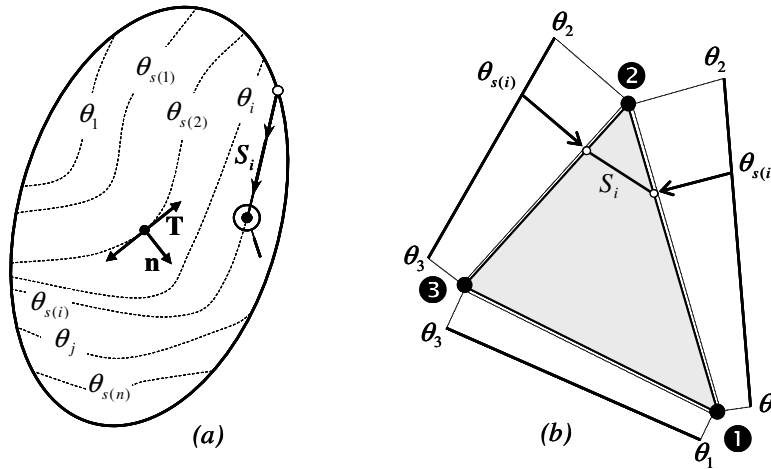
El algoritmo de trazado de una línea  $S_i$  a nivel elemental en un instante  $t$  es el siguiente:

- La etiqueta  $\theta_{S(i)}$  se fija como un valor arbitrario de  $\theta$  en el interior del elemento raíz, como por ejemplo el promedio entre los valores en los nudos,  $\theta_{S(i)} = (1/3)(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ .
- Dado el valor de la envolvente de  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  en los tres nudos del elemento  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  y la etiqueta  $\theta_{S(i)}$ , se calcula la posición de la posible línea de discontinuidad  $S_i$  por interpolación lineal en los lados del elemento, como lo indica la Figura D.2(b).

Para determinar un elemento raíz en un instante  $t$ , se tiene que verificar que éste no ha sido cruzado por la línea de discontinuidad de otro elemento raíz, esto requiere el concepto de línea de discontinuidad activa. Una posible línea de discontinuidad  $S_i$  es activa si cruza por lo menos un elemento que cumpla el criterio de bifurcación. Por lo tanto, cuando un elemento bifurca pueden presentarse dos situaciones:

- Si el elemento es cruzado por una línea activa  $S_i$ , se calcula su posición en el interior del elemento por interpolación lineal de  $\theta$  en los lados del elemento, como se indicó anteriormente.
- En caso contrario, el elemento se considera un elemento raíz y la posible línea de discontinuidad que pasa por su centroide, se hace activa.





**Figura D.2.** Estrategia global del trazado de las líneas de discontinuidad: (a) envolventes de la dirección de propagación de la discontinuidad en el sólido, (b) ubicación de una posible línea de discontinuidad en el interior de un elemento finito.

### D.3.2. Envolvente del campo vectorial de propagación

A continuación se presenta un procedimiento para calcular las envolventes del campo vectorial  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  que define la dirección de propagación de las posibles discontinuidades, en un dominio bidimensional  $\Omega$  (Samaniego 2002; Oliver and Huespe 2004; Oliver, Huespe et al. 2004).

Siendo  $\theta(\mathbf{x})$  la envolvente del vector  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ , se puede establecer que:

$$\partial_{\mathbf{T}}\theta = \mathbf{T} \cdot \nabla\theta = \nabla\theta \cdot \mathbf{T} = 0 \quad (\text{D.2})$$

donde  $\partial_{\mathbf{T}}\theta$  corresponde a la derivada direccional de  $\theta$  con respecto a  $\mathbf{T}$ .

#### D.3.2.1. Analogía con el problema de transferencia de calor

Las curvas envolventes de la dirección de propagación se pueden calcular de la misma forma como se obtienen las temperaturas en un problema de transferencia de calor.

Multiplicando por  $\mathbf{T}$  la Ecuación (D.2), se obtiene:

$$\mathbf{T}\partial_{\mathbf{T}}\theta = (\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}) \cdot \nabla\theta = 0 \quad (\text{D.3})$$

Además, se define al pseudo tensor de conductividad térmica:

$$\mathbf{K}_T = (\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}) \quad (\text{D.4})$$

de tal modo que:

$$\mathbf{q}_T = -\mathbf{K}_T \cdot \nabla \theta \quad (\text{D.5})$$

Se puede considerar la analogía con un problema de conductividad térmica sin fuentes internas de calor y flujo de calor entrante nulo ( $\mathbf{q}_T \cdot \mathbf{v}_t = 0$  en  $\Gamma_q$ ), expresado como un problema de contorno de la forma:

Se busca el campo escalar  $\theta(\mathbf{x})$  tal que se verifica:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{q}_T = 0 & \text{en } \Omega \\ \mathbf{q}_T = -\mathbf{K}_T \cdot \nabla \theta = -\mathbf{T} \cdot \partial_T \theta & \text{en } \Omega \\ \mathbf{q}_T \cdot \mathbf{v}_t = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}_t) \partial_T \theta & \text{en } \Gamma_q \\ \theta = \theta^* & \text{en } \Gamma_\theta \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

Por lo tanto,  $\theta$  juega el papel del campo de temperaturas,  $\mathbf{q}_T$  es el vector de flujo y  $\mathbf{K}_T$  es el tensor anisótropo de conductividad térmica que varía punto a punto y se puede representar matricialmente como:

$$[\mathbf{K}_T] = [(\mathbf{T} \otimes \mathbf{T})] = \begin{bmatrix} T_x^2 & T_x T_y \\ T_x T_y & T_y^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.7})$$

Nótese que  $\mathbf{K}_T(\mathbf{T}) = \mathbf{K}_T(-\mathbf{T})$ . En consecuencia la solución del problema está afectada por la dirección del vector  $\mathbf{T}$ , pero es independiente de su sentido.

### D.3.3. Implementación en el método de los elementos finitos

La forma débil y discreta del problema continuo presentado en la Ecuación (D.6), aplicada a una discretización del dominio  $\Omega$  con  $e$  elementos finitos y  $n$  nudos, se puede expresar como:

Se busca:

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n N_i \theta_i = [\mathbf{N}]^T [\boldsymbol{\theta}] \\ \left\{ \begin{aligned} [\mathbf{N}] &= [N_1, \dots, N_n]^T \\ [\boldsymbol{\theta}] &= [\theta_1, \dots, \theta_n]^T \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

tal que:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{D}_T][\theta] &= [0] \\
 \theta|_{\Gamma_\theta} &= \theta^* \\
 [\mathbf{D}_T] &= \int_{\Omega} [\nabla \mathbf{N}]^T [\mathbf{K}_T] [\nabla \mathbf{N}] d\Omega
 \end{aligned} \tag{D.9}$$

siendo  $N_i$  las funciones de forma convencionales y  $[\mathbf{D}_T]$  la matriz de rigidez resultante.

La Ecuación (D.9) define un problema análogo a uno térmico, que ha sido resuelto al comienzo de cada paso de pseudo-tiempo del problema mecánico original, el cual proporciona la posición de las trayectorias de discontinuidad en el interior de cada elemento finito de acuerdo con el algoritmo presentado en el apartado D.3.

# Anexo E

## Esquema de integración implícito-explicito

En este anexo se describe el esquema de integración para modelos constitutivos *implícito-explicito* propuesto por Oliver y colaboradores en recientes trabajos (Oliver, Huespe et al. 2004; Oliver, Huespe et al. 2006). Asimismo, se demuestra su aplicación a un modelo de daño con compresión y tracción diferenciada presentado en (Oliver, Cervera et al. 1990) y a un modelo unidimensional de plasticidad descrito en (Simó and Hughes 1998).

El esquema de integración *implícito-explicito* del modelo constitutivo es un algoritmo numéricamente estable capaz de representar, de forma robusta, la respuesta inestable dada por el ablandamiento del material.

### E.1. Esquema de integración para un modelo de daño tracción y compresión diferenciado

#### E.1.1. Esquema de integración implícito. Operador algorítmico tangente consistente.

La integración implícita de las ecuaciones que describen al modelo de daño presentado en el Cuadro A.1, permite obtener, para el instante  $t_{n+1}$ , el tensor de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$  y las variables internas tipo deformación  $r_{n+1}$  y tensión  $q_{n+1}$ , en función del tensor de deformaciones actual  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ , así:

Dado  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ , determinar:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \quad (\text{tensor de tensiones efectivas}) \quad (\text{E.1})$$

$$\tau_{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) = \phi_{n+1} \sqrt{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} : (\mathbf{C})^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}} \quad (\text{norma de deformaciones}) \quad (\text{E.2})$$

$$\phi_{n+1} = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \bar{\sigma}_i \rangle_{n+1}}{\sum_{i=1}^3 |\bar{\sigma}_i|_{n+1}} \left( 1 - \frac{1}{n_{\sigma}} \right) + \frac{1}{n_{\sigma}} \quad (\text{factor asociado al estado tensional}) \quad (\text{E.3})$$

$$r_{n+1} = r(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) = \max_{t \in [0, r_{n+1}]} (r_t, \tau_{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1})) \quad (\text{variable interna tipo deformación}) \quad (\text{E.4})$$

$$q_{n+1} = q(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) = q_n + H_n (r_{n+1} - r_n) \quad (\text{variable interna tipo tensión}) \quad (\text{E.5})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) = \frac{q_{n+1}}{r_{n+1}} \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \quad (\text{tensor de tensiones}) \quad (\text{E.6})$$

**Cuadro E.1.** Integración implícita del modelo de daño tracción y compresión diferenciado.

Se define el *operador algorítmico tangente consistente*  $\mathbf{C}_{n+1}^{(con)}$ , como:

$$\mathbf{C}_{n+1}^{(con)} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \quad (\text{E.7})$$

Por lo tanto, si se deriva la Ecuación (E.6) con respecto al tensor de la deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ , se obtiene un operador  $\mathbf{C}_{n+1}^{(con)}$  para estados elásticos y de descarga igual a:

$$\mathbf{C}_{n+1}^{(con)} = \frac{q_{n+1}}{r_{n+1}} \mathbf{C}_{n+1} \quad (\text{E.8})$$

y para carga inelástica,

$$\mathbf{C}_{n+1}^{(con)} = \frac{q_{n+1}}{r_{n+1}} \mathbf{C}_{n+1} - \frac{q_{n+1} - H_n r_{n+1}}{r_{n+1}^3} \left[ \frac{r_{n+1}^2}{\phi_{n+1}} (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \otimes \mathbf{A}_{n+1}) + \phi_{n+1}^2 (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}) \right] \quad (\text{E.9})$$

Para problemas bidimensionales, el escalar  $\phi_{n+1} = \phi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1})$  y del tensor  $\mathbf{A}_{n+1} = \mathbf{A}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1})$  están definidos por las Ecuaciones (A.35)-(A.41).

El segundo término de la Ecuación (E.9) demuestra el carácter definido negativo del operador algorítmico tangente consistente.

### E.1.2. Esquema de integración implícito-explicito. Operador algorítmico tangente efectivo.

A continuación se describe el procedimiento *implícito-explicito* en cada paso de pseudo-tiempo  $t_{n+1}$ .

Con un esquema *implícito* se obtienen las variables implícitas del problema  $r_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}), q_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}), \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1})$  en función de la deformación actual  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ , como se indica en las Ecuaciones (E.4) a (E.6).

En el mismo instante  $t_{n+1}$ , se extrapola de forma *explícita lineal* la variable interna, en función de las variables internas *implícitas*  $r_n$  y  $r_{n-1}$  calculadas en los instantes  $t_n$  y  $t_{n-1}$  (Figura E.1(a)), así:

$$\tilde{r}_{n+1} = r_n + \dot{r}_n \Delta t_{n+1} = r_n + \frac{\Delta r_n}{\Delta t_n} \Delta t_{n+1} \quad (\text{E.10})$$

$$\Delta r_n = r_n - r_{n-1}; \Delta t_n = t_n - t_{n-1}; \Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$$

De acuerdo con la ecuación anterior  $\tilde{r}_{n+1}$  constituye una predicción del valor de la variable interna en  $n+1$ , que puede ser calculado al final del paso  $n$ , aprovechando su independencia con relación a la deformación actual  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ .

El error producido por la extrapolación se puede controlar reduciendo el tamaño del paso de carga o incrementando el orden de la función de extrapolación.

La variable interna explícita tipo tensión  $\tilde{q}_{n+1}$  y el tensor de tensión explícita  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$  en el instante  $t_{n+1}$  corresponden a:

$$\tilde{q}_{n+1} = q_n + H_n (\tilde{r}_{n+1} - r_n) \quad ; \quad \tilde{q}_{n+1} \geq 0 \quad (\text{E.11})$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \frac{\tilde{q}_{n+1}}{\tilde{r}_{n+1}} \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \quad (\text{E.12})$$

En la ecuación anterior se observa que tanto  $\tilde{q}_{n+1}$  como  $\tilde{r}_{n+1}$  son independientes de la deformación actual  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ , de tal forma que la tensión explícita  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$  depende linealmente de  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ .

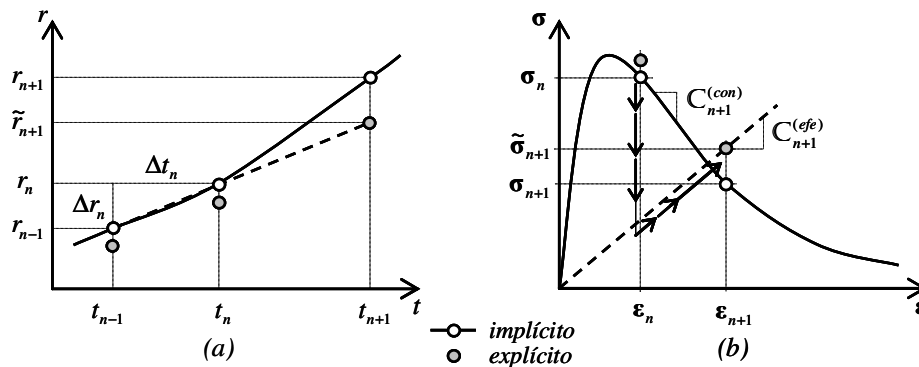
Por otro lado, se define al *operador algorítmico tangente efectivo*  $\mathbf{C}_{n+1}^{(efe)}$  como:

$$\mathbf{C}_{n+1}^{(efe)} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \quad (\text{E.13})$$

De acuerdo con la expresión anterior, derivando la Ecuación (E.12) en función de la deformación actual  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$  se obtiene un tensor  $\mathbf{C}_{n+1}^{(efe)}$  constante con respecto a las variables implícitas del instante  $t_{n+1}$ , de la forma:

$$C_{n+1}^{(efe)} = \frac{\tilde{q}_{n+1}}{\tilde{r}_{n+1}} C \tag{E.14}$$

Dado el carácter positivo de  $\tilde{r}_{n+1}, \tilde{q}_{n+1}$  y  $C$  se puede concluir que el *operador algorítmico tangente efectivo* es definido positivo para cualquier instante  $t_{n+1}$  (Figura E.1 (b)).



**Figura E.1.** Esquema de integración implícito-explicito en modelos de daño: (a) extrapolación de la variable interna tipo deformación, (b) fases de predicción/corrección de la tensión.

## E.2. Esquema de integración para un modelo de plasticidad unidimensional

### E.2.1. Esquema de integración implícito. Operador algorítmico tangente consistente.

La integración implícita de las ecuaciones que describen al modelo de plasticidad unidimensional, es el resultado de la aplicación de un esquema discretización temporal tipo *Euler-backward* estándar sobre dichas ecuaciones. Como se presenta en el Cuadro A.2, para un instante  $t_{n+1}$ , se obtiene la tensión  $\sigma_{n+1}$  y las variables internas tipo deformación  $\alpha_{n+1}$  y tipo tensión  $q_{n+1}$ , en términos de la deformación  $\epsilon_{n+1}$ .

Dado  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ , determinar:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} = \lambda \geq 0 \quad ; \quad \alpha|_{t=0} = 0 \\ \Delta\alpha_{n+1} = \alpha(\varepsilon_{n+1}) - \alpha(\varepsilon_n) = \alpha_{n+1} - \alpha_n \end{aligned} \right\} \text{(variable interna tipo deformación)} \quad (\text{E.15})$$

$$q_{n+1} = q(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) = q_n + H_n \Delta\alpha_{n+1} \quad \text{(variable interna tipo tensión)} \quad (\text{E.16})$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) - E\Delta\alpha_{n+1} \text{sign}(\sigma_{n+1}) \quad \text{(tensión)} \quad (\text{E.17})$$

**Cuadro E.2.** Integración implícita del modelo de daño tracción y compresión diferenciado.

El *operador algorítmico tangente consistente* del modelo de plasticidad unidimensional  $E_{n+1}^{(con)}$  está definido como:

$$E_{n+1}^{(con)} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \quad (\text{E.18})$$

Sustituyendo la Ecuación (E.17) en la expresión anterior se obtiene un operador  $E_{n+1}^{(con)}$  para estados carga elástica y descarga igual a:

$$E_{n+1}^{(con)} = E \quad (\text{E.19})$$

y para carga inelástica,

$$E_{n+1}^{(con)} = \frac{EH}{E + H} \quad (\text{E.20})$$

donde  $E$  es el módulo de Young. Dado que el módulo de ablandamiento  $H \leq 0$ , el operador algorítmico tangente consistente en régimen inelástico es definido negativo.

## E.2.2. Esquema de integración implícito-explicito. Operador algorítmico tangente efectivo.

Mediante un procedimiento similar al presentado para modelos de daño, el esquema de integración *implícito-explicito* se aplica a modelos de plasticidad unidimensional.

En un instante  $t_{n+1}$ , se obtiene de forma *implícita*  $\alpha_{n+1}(\varepsilon_{n+1}), q_{n+1}(\varepsilon_{n+1}), \sigma_{n+1}(\varepsilon_{n+1})$  con las Ecuaciones (E.15) a (E.17).

De la extrapolación lineal *explícita* de la variable interna, en función de las variables *implícitas*  $\alpha_n$  y  $\alpha_{n-1}$  se obtiene:



$$\tilde{\alpha}_{n+1} = \alpha_n + \dot{\alpha}_n \Delta t_{n+1} = \alpha_n + \frac{\Delta \alpha_n}{\Delta t_n} \Delta t_{n+1} \quad (\text{E.21})$$

siendo  $\Delta \alpha_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}$ ;  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ ;  $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ .

La variable interna explícita tipo tensión  $\tilde{q}_{n+1}$  y el tensor de tensión explícita  $\tilde{\sigma}_{n+1}$  en el instante  $t_{n+1}$  corresponden a:

$$\tilde{q}_{n+1} = q_n + H_n (\tilde{\alpha}_{n+1} - \alpha_n) \quad ; \quad 0 \leq \tilde{q}_{n+1} \leq \sigma_y \quad (\text{E.22})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{n+1} &= \sigma_n + E (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) - E \Delta \tilde{\alpha}_{n+1} \text{sign}(\tilde{\sigma}_{n+1}) \\ \tilde{\sigma}_{n+1} &= \sigma_n + E (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) - E \Delta \tilde{\alpha}_{n+1} \frac{\tilde{\sigma}_{n+1}}{|\tilde{\sigma}_{n+1}|} \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

donde  $\Delta \tilde{\alpha}_{n+1} = \tilde{\alpha}_{n+1} - \alpha_n$ .

En condición de carga inelástica, la función de fluencia en términos de las variables explícitas se puede escribir de la forma:

$$f(\tilde{\sigma}_{n+1}, \tilde{q}_{n+1}) = |\tilde{\sigma}_{n+1}| - (\sigma_y + \tilde{q}_{n+1}) = 0 \rightarrow |\tilde{\sigma}_{n+1}| = (\sigma_y + \tilde{q}_{n+1}) \quad (\text{E.24})$$

Sustituyendo la Ecuación (E.24) en la Expresión (E.23), y despejando  $\tilde{\sigma}_{n+1}$  se tiene:

$$\tilde{\sigma}_{n+1} = \frac{\sigma_n + E (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)}{1 + \frac{\Delta \tilde{\alpha}_{n+1} E}{(\sigma_y + \tilde{q}_{n+1})}} \quad (\text{E.25})$$

Se define al *operador algorítmico tangente efectivo* del modelo de plasticidad unidimensional  $E_{n+1}^{(efe)}$  como:

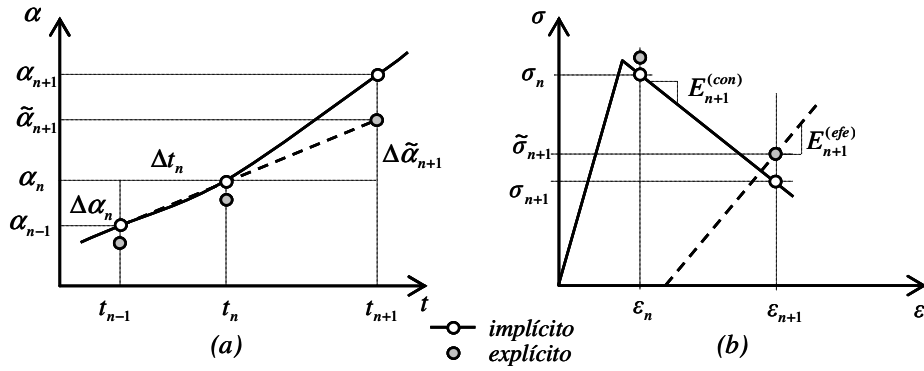
$$E_{n+1}^{(efe)} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \quad (\text{E.26})$$

Derivando la Expresión (E.25) como lo indica la ecuación anterior, se obtiene que,

$$E_{n+1}^{(efe)} = \frac{E}{1 + \frac{\Delta \tilde{\alpha}_{n+1} E}{(\sigma_y + \tilde{q}_{n+1})}} \quad (\text{E.27})$$

siendo  $E_{n+1}^{(efe)}$  constante con respecto a las variables implícitas del instante  $t_{n+1}$ , y mayor que cero en virtud del carácter positivo de  $\Delta \tilde{\alpha}_{n+1}$ ,  $\tilde{q}_{n+1}$ ,  $\sigma_y$  y  $E$ .

La Figura E.2 describe la extrapolación de las variables internas y la predicción de la tensión en el esquema de integración implícito-explicito, aplicado específicamente a un modelo constitutivo de plasticidad unidimensional.



**Figura E.2.** Esquema de integración implícito-explicito en modelos de plasticidad unidimensional: (a) extrapolación de la variable interna tipo deformación, (b) fases de predicción/corrección de la tensión.



# Anexo F

## Notación

### F.1. Notación de Voigt en dos dimensiones

En la implementación de los modelos constitutivos en el método de los elementos finitos se utiliza con frecuencia la notación de Voigt, la cual permite escribir los tensores de segundo orden simétricos como vectores columna y los tensores de cuarto orden como matrices cuadradas.

Un tensor de segundo orden que representa el campo de las tensiones en problemas bidimensionales se pueden representar como un vector columna de la forma:

$$\underbrace{\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}}_{\text{tensor}} \rightarrow \underbrace{\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}}_{\text{Voigt}} \quad (\text{F.1})$$

En el caso del tensor de deformaciones, se construye un vector columna de misma forma, sin embargo, es necesario multiplicar por dos la deformación angular, para que la energía de deformación calculada de forma tensorial y matricial sea la misma.

$$\underbrace{\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}}_{\text{tensor}} \rightarrow \underbrace{\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}}_{\text{Voigt}} \quad (\text{F.2})$$

El operador constitutivo es un tensor de cuarto orden que relaciona a los tensores de tensión y de deformación, de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{F.3})$$

Tal relación constitutiva se puede escribir en notación de Voigt como:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{C}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (\text{F.4})$$

es decir,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xxxx} & C_{xxyy} & C_{xxxy} \\ C_{yyxx} & C_{yyyy} & C_{yyxy} \\ C_{xyxx} & C_{xyyy} & C_{xyxy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{F.5})$$

En consecuencia, se obtiene un operador constitutivo representado por una matriz cuadrada de la forma:

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{xxxx} & C_{xxyy} & C_{xxxy} \\ C_{yyxx} & C_{yyyy} & C_{yyxy} \\ C_{xyxx} & C_{xyyy} & C_{xyxy} \end{bmatrix} \quad (\text{F.6})$$

## F.2. Funciones especiales

En el siguiente cuadro se indican las funciones utilizadas en la formulación.

$$\langle \wp \rangle = \begin{cases} \wp & \text{si } \wp > 0 \\ 0 & \text{si } \wp \leq 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \langle \wp \rangle = \frac{1}{2}(\wp + |\wp|) \quad (\text{paréntesis de Mac-Auley}) \quad (\text{F.7})$$

$$\dot{\wp} = \frac{\partial \wp}{\partial t} \quad (\text{derivada material}) \quad (\text{F.8})$$

$$[[\wp(\mathbf{x})]] = \wp(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in S^+} - \wp(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in S^-} \quad (\text{función salto}) \quad (\text{F.9})$$

$$\mathcal{H}_s(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_s \\ 1 & \text{si } x \geq x_s \end{cases} \quad (\text{función de Heaviside}) \quad (\text{F.10})$$

$$\delta_s(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x < x_s) \vee (x > x_s) \\ \infty & \text{si } x = x_s \end{cases} \quad (\text{función delta de Dirac}) \quad (\text{F.11})$$

**Cuadro F.1.** Ingredientes de un modelo de daño isótropo escalar que describe el comportamiento de la matriz.



# Referencias

- Barenblatt, G. (1962). "The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture." *Advances in Applied Mechanics* **7**: 55-129.
- Bazant, Z. (1976). "Instability, ductility and size effect in strain-softening concrete." *Journal of Engineering Mechanics. ASCE* **102**: 331-344.
- Bazant, Z. & Cedolin, L. (1980). "Fracture mechanics of reinforced concrete." *Journal of Engineering Mechanics. ASCE* **106**: 1287 - 1306.
- Bazant, Z. & Cedolin, L. (1983). "Finite element modelling of crack band propagation." *Journal of Structural Engineering. ASCE* **109**: 69-92.
- Bazant, Z. & Oh, B. (1983). "Crack band theory for fracture of concrete." *Materials and Structures* **16**(93): 155-177.
- Bazant, Z. & Planas, J. (1998). *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*, CRC Press.
- Beeby, A. & Narayanan, R. (1995). *Designers' Handbook to Eurocode 2. Part 1.1: Design of concrete structures*. London, Thomas Telford.
- Belytschko, T., Fish, J. & Englemann, B. (1988). "A finite element with embedded localization zones." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **70**: 59-89.
- Belytschko, T., Moes, N., Usui, S. & Parimik, C. (2001). "Arbitrary discontinuities in finite elements." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **50**: 993-1013.
- Belletti, B., Bernardi, P., Cerioni, R. & Iori, I. (2003). *On the behaviour of R/C beams without shear reinforcement*. Computational modelling of concrete structures, N. Bicanic, R. d. Borst et al (eds), Austria, Balkema Publisher.
- Belletti, B., Cerioni, R. & Iori, I. (2001). "Physical approach for reinforced-concrete (PARC) membrane elements." *Journal of Structural Engineering. ASCE* **127**(12): 1412-1426.
- Bhide, S. & Collins, P. (1989). "Influence of axial tension on the shear capacity of reinforced concrete members." *ACI Structural Journal* **86**(5): 570 -581.
- Blanco, S. (2006). *Contribuciones al análisis del fallo material en tres dimensiones usando la aproximación de discontinuidades fuertes*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona.
- Böhm, H. (2000). *A Short Introduction to Basis Aspects of Continuum Micromechanics*. Vienna, Institute of Lightweight Design and Structural Biomechanics. Vienna University of Technology.



- Buckle, I. & Jackson, A. (1981). A filamented beam element for the non-linear analysis of reinforced concrete shells with edge beams. New Zealand, University of Auckland.
- Car, E. (2000). *Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona.
- Carol, I., López, C. & Roa, O. (2001). "Micromechanical analysis of quasi-brittle materials using fracture-based interface elements." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **52**(1-2): 193-215.
- Carol, I. & Prat, P. (1997). "Normal/Shear Cracking Model: Application to Discrete Crack Analysis." *Journal Engineering Mechanics ASCE* **123**(8): 765-773
- Carol, I., Prat, P. C. & Bazant, Z. P. (1992). "New explicit microplane model for concrete: Theoretical aspects and numerical implementation." *International Journal of Solids and Structures* **29**(9): 1173-1191.
- Carpinteri, A., Ferro, G. & Ventura, G. (2003). "Size effects on flexural response of reinforced concrete elements with a nonlinear matrix." *Engineering Fracture Mechanics* **70**(7-8): 995-1013.
- CEB-FIB (1990). "Model code 1990." *Bulletin d'Information*.
- CEB-FIB (2000). "Bond of reinforcement in concrete." *F. B. 10, State-of-art report*.
- Cervenka, V. (1985). "Constitutive model for cracked reinforced concrete." *ACI Journal* **82**: 877-882.
- Cervera, M., Agelet, C. & Chiumenti, M. (2001). COMET. Contact Mechanical and Thermal analysis. Multi purpose coupled nonlinear program for steady and transient conditions. Barcelona.
- Collins, M., Vecchio, F. & Mehlhorn, G. (1985). "An International competition to predict the response of reinforced concrete panels." *Canadian Journal of Civil Engineering* **12**: 624-644.
- Cox, J. & Herrmann, L. (1998). "Development of a plasticity bond model for steel reinforcement." *Mechanics of cohesive-frictional materials* **3**: 155 -180.
- Cox, J. & Herrmann, L. (1999). "Validation of a plasticity bond model for steel reinforcement." *Mechanics of cohesive-frictional materials* **4**: 361 - 389.
- Crisfield, M. & Wills, J. (1989). "Analysis of RC panels using different concrete models." *Journal of Engineering Mechanics. ASCE* **115**(3): 578-597.
- Chaboche, J., Girard, R. & Schaff, A. (1997). "Numerical analysis of composite systems by using interphase/interface models." *Computational Mechanics* **20**: 3 - 11.
- Chaves, E. (2003). *A three dimensional setting for strong discontinuities modelling en failure mechanics*. Doctoral Thesis, Technical University of Catalonia, Barcelona.
- Chen, G. & Baker, G. (2003). "Influence of bond slip on crack spacing in numerical modeling of reinforced concrete." *Journal of Structural Engineering ASCE* **129**(11): 1514-1521.
- Chong, K., Gilbert, I. & Foster, S. (2004). "Modelling time-dependent cracking in reinforced concrete using bond-slip interface elements." *Computers and Concrete* **1**(2): 151-168.
- de Borst, R. (2001). "Some recent issues in computational failure mechanics." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **52**: 63-95.
- Dugdale, D. (1960). "Yielding of steel sheets containing slits." *Journal for Mechanics of Physics and Solids* **8**: 100-108.

- Dvorak, G. & Bahei-el-Din, Y. (1982). "Plasticity analysis of fibrous composites." *Journal of Applied Mechanics* **49**: 327-335.
- Dvorking, E., Cuitino, A. & Gioia, G. (1990). "Finite elements with displacement embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **30**: 541-564.
- Eligehausen, R., Popov, E. & Bertero, V. (1983). "Local bond stress-slip relations of deformed bar under generalized excitations." *Report UCB/EERC-83*.
- Feenstra, P. & de Borst, R. (1995). "Constitutive model for reinforced concrete." *Journal of Engineering Mechanics – ASCE* **121**(5): 587-595.
- Gambarova, P., Rosati, G. & Zasso, B. (1989). "Steel-to-concrete bond after concrete splitting: test results." *Materials and Structures* **127**(22): 35 - 47.
- Goto, Y. & Otsuka, K. (1979). "Experimental studies on cracks formed in concrete around deformed tension bars." *The technology report of the Tohoku University* **44**(1): 49 - 83.
- Gupta, A. & Akbar, H. (1984). "Cracking in reinforced concrete analysis." *Journal of Structural Engineering* **110**(8): 1735-1746.
- Hill, R. (1962). "Acceleration waves in solid." *Journal for Mechanics of Physics and Solids* **10**: 1 -16.
- Hill, R. (1963). "Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles." *Journal of Mechanics and Physical of Solid* **11**: 357-372.
- Hill, R. (1967). "The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals." *Journal of Mechanics and Physical of Solid* **15**: 79-95.
- Hillerborg, A. (1985). "The teoretical basic of a method to determine the fracture energy of concrete." *Materials and Structures* **18**(106): 291-296.
- Hillerborg, A., Modeer, M. & Petersson, P. E. (1976). "Ananalysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements." *Cement and concrete research* **6**(6): 773-782.
- Huespe, A. E., Oliver, J., Pulido, M. D. G., Blanco, S. & Linero, D. L. (2006). "On the fracture models determined by the continuum-strong discontinuity approach." *International Journal of Fracture* **137**: 211-229.
- Hughes, T. J. R. (2000). *The finite element method*. New York, Dover.
- Hutchinson, J. & Jensen, H. (1990). "Models of fiber debonding and pullout in brittle composites with friction." *Mechanics of Materials* **9**(2): 139-163.
- Ingraffea, A., Gerstle, W., Gergely, P. & Saouma, V. (1984). "Fracture mechanics of bond in reinforcement concrete." *Journal of Structural Engineering. ASCE* **110**(4): 871 - 890.
- Jirasek, M. (2000). "Comparative study on finite elements with embedded discontinuities." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **188**(1-3): 307-330.
- Kachanov, L. M. (1986). *Introduction to continuum damage mechanics*, Martinus Nijhoff Publishers.
- Kollegger, J. & Mehlhorn, G. (1990). "Material model for the analysis of reinforced concrete surface structures." *Computational Mechanics* **6**: 341-357.
- Kwak, H. & Filippou, F. (1997). "Nonlinear FE analysis of R/C structures under monotonic loads." *Computer and Structures* **65**(1): 1-16.
- Larsson, R., Runnesson, K. & Ottosen, N. (1993). "Discontinuities displacement approximation for capturing plastic localization." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **36**(2087-2105).
- Lemaitre, J. (1992). *A course on damage mechanics*, Springer-Verlag.

- Leonhardt, F. (1965). "Reducing the shear reinforcement in reinforced concrete and slabs." *Magazine of concrete research* **17**(53): 187 - 198.
- Liao, K. & Reifsnider, L. (2000). "A tensile strength model for unidirectional fiber-reinforced brittle matrix composite." *International Journal of Fracture* **106**: 95 - 115.
- Lin, S. (1997). "Use of filamented beam elements for bored pile analysis." *Journal of Structural Engineering ASCE* **123**(9): 1236-1244.
- Linero, D. L., Oliver, J., Huespe, A. E. & Pulido, M. D. G. (2005). *Formulación de Discontinuidades Fuertes en la Fractura de Materiales Compuestos Conformados por Fibras Orientadas en una Dirección*. Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, SEMNI (ed) Granada (España).
- Linero, D. L., Oliver, J., Huespe, A. E. & Pulido, M. D. G. (2006). *Cracking Modeling in reinforced concrete via the strong discontinuity approach*. EURO-C 2006 Computational Modelling of Concrete Structures, N. Bicanic, R. d. Borst et al (eds), Tyrol (Austria), Balkema Publishers.
- Lubliner, J. (1990). *Plasticity theory*. New York, MacMillan.
- Luccioni, B. & Lopez, D. (2002). Modelo para materiales compuestos con deslizamiento de fibras. *Análisis y cálculo de estructuras de materiales compuestos*. S. Oller. Barcelona, CIMNE.
- Luccioni, B., Lopez, D. & Danesi, R. (2005). "Bond-slip in reinforced concrete elements." *Journal of Structural Engineering ASCE* **131**(11): 1690-1698.
- Malvar, J. (1992). "Bond of reinforcement under controlled confinement." *ACI Material Journal* **89**(6): 593 - 601.
- Manzoli, O. (1998). *Un modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidades fuertes en mecánica de sólidos*. Tesis Doctotal, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona.
- Marí, A. (2000). "Numerical simulation of the segmental construction of three dimensional concrete frames." *Engineering Structures* **22**: 585-596.
- Maugin, G. A. (1992). *The thermodynamics of plasticity and fracture*, Cambridge University Press.
- Naaman, A., Namur, G., Alwan, J. & Najm, H. (1991). "Fiber pullout and bond slip II. Experimental validation." *Journal of Structural Engineering ASCE* **117**(9): 2791-2800.
- Ogasawara, T., Ishikawa, T., Ito, H., Watanabe, N. & Davies, I. (2001). "Multiple cracking and tensile behavior for an orthogonal 3-D woven Si-Ti-C-O fiber/Si-Ti-C-O matrix composite." *Journal American Ceramic Society* **84**(7): 1565-1574.
- Okabe, T., Komotori, J., Shimizu, M. & Takeda, N. (1999). "Mechanical behavior of SiC fiber reinforced brittle-matrix composites." *Journal of Materials Science* **34**: 3405-3412.
- Oliver, J. (1989). "A consistent characteristic length for smeared cracking models." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **28**: 461-474.
- Oliver, J. (1996a). "Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part I: Fundamentals." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **39**: 3575-3600.
- Oliver, J. (1996b). "Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part II: Numerical Simulation." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **39**: 3601-3623.

- Oliver, J. (2000). "On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations." *International Journal of Solid and Structures* **37**: 7207-7229.
- Oliver, J., Cervera, M. & Manzoli, O. (1999). "Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuities approach." *International Journal of Plasticity* **15**(3): 319-351.
- Oliver, J., Cervera, M., Oller, S. & Lubliner, J. (1990). *Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete*. SCI-C Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, N. B. e. al. (ed).
- Oliver, J. & Huespe, A. (2004a). "Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **193**: 3195 - 3220.
- Oliver, J. & Huespe, A. (2004b). "Theoretical and computational issues in modelling material failure in strong discontinuity scenarios." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **193**: 2987-3014.
- Oliver, J., Huespe, A. & Samaniego, E. (2003). "A study on finite elements for capturing strong discontinuities." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **56**: 2135-2161.
- Oliver, J., Huespe, A., Samaniego, E. & Chaves, E. (2004a). "Continuum approach to the numerical simulation of material failure in concrete." *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* **28**: 609-632.
- Oliver, J., Huespe, A. E., Blanco, S. & Linero, D. L. (2006). "Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure in the strong discontinuity approach." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **195**(52):7093-7114.
- Oliver, J., Huespe, A. E. & Linero, D. L. (2005a). *Strong Discontinuity Approach to Fracture of Composite Materials*. 11th International Conference on Fracture, Turin (Italia).
- Oliver, J., Huespe, A. E., Linero, D. L. & Pulido, M. D. G. (2005b). *Fractura de Materiales Compuestos en Elementos Sometidos a Tracción Uniforme Mediante la Formulación de Discontinuidades Fuertes*. XXII Encuentro del Grupo Español de la Fractura, Almagro (España).
- Oliver, J., Huespe, A. E., Pulido, M. D. G. & Blanco, S. (2004b). *Recent advances in computational modelling of material failure*. 4th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2004), University of Jyväskylä. Jyväskylä - (Finland).
- Oliver, J., Huespe, A. E., Pulido, M. D. G., Blanco, S. & Linero, D. L. (2004c). *New developments in Computational Material Failure Mechanics*. Sixth World Congress on Computational Mechanics (WCCM VI), Beijing, (P.R. of China), Tshinghua University Press.
- Oliver, J., Huespe, A. E., Pulido, M. D. G., Blanco, S. & Linero, D. L. (2005c). *Recent developments on the numerical modelling of cracking of plane and reinforced concrete with the Continuum Strong Discontinuity Approach (CSDA)*. EUROMECH Colloquium 460 on Numerical Modelling of Concrete Cracking, University of Innsbruck (Austria).
- Oliver, J., Huespe, A. E., Pulido, M. D. G. & Chaves, E. (2002). "From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach." *Engineering Fracture Mechanics* **69**(2): 113-136.

- Oliver, X. & Agelet, C. (2002). *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Barcelona, UPC.
- Oller, S. (2003). *Simulación numérica del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*. Barcelona, CIMNE.
- Oller, S., Oñate, E., Miquel, J. & Botello, S. (1996). "A plastic damage constitutive model for composite materials." *International Journal of Solid and Structures* **33**(17): 2501 - 2518.
- Ortiz, M. (1987). "An analytical study of the localized failure modes of concrete." *Mechanics of cohesive-frictional materials* **6**: 159-174.
- Ortiz, M., Leroy, Y. & Needleman, A. (1987). "A finite element method for localized failure analysis." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **61**: 189-214.
- Ortiz, M. & Quigley, J. (1991). "Adaptive mesh refinement in strain localization problems." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **90**: 781-804.
- Ouyang, C. & Shah, P. (1994). "Fracture energy approach for predicting cracking of reinforced concrete tensile members." *ACI Structural Journal* **91**(1): 69-78.
- Ouyang, C., Wollrab, E., Kulkarni, S. & Shah, P. (1997). "Prediction of cracking response of reinforced concrete tensile members." *Journal of Structural Engineering*. ASCE **123**(1): 70 - 78.
- Park, R. & Paulay, T. (1975). *Reinforced Concrete Structures*.
- Pietruszczak, S. & Winnicki, A. (2003). "Constitutive model for concrete with embedded sets of reinforcement." *Journal of Engineering Mechanics – ASCE* **129**(7): 725-738.
- Pietruszczak, S. & Xu, G. (1995). "Brittle response of concrete as a localization problem." *International Journal of Solid and Structures* **32**: 1517-1533.
- Pijaudier Cabot, G. & Bazant, Z. (1987). "Nonlocal damage theory." *Journal of Engineering Mechanics ASCE* **113**: 1512-1533.
- Pulido, M. D. G. (2004). *Contribuciones a la simulación numérica del fallo material en grandes deformaciones*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona.
- Rashid, Y. (1968). "Analysis of prestressed concrete pressure vessels." *Nuclear Engineering and Design* **7**: 773-782.
- Reinhardt, H., Blauwendrad, J. & Vos, E. (1984). "Prediction of bond between steel and concrete by numerical analysis." *Materials and Structures* **17**(100).
- Rice, J. R. (1976). The Localization of Plastic Deformation. *Theoretical and Applied Mechanics*. K. W.T., North-Holland Publ. Co.: 207-220.
- Rice, J. R. & Rudnicki, J. W. (1980). "A note on some feature of the theory of localization of deformation." *International Journal of Solid and Structures* **16**: 597-605.
- Rizzi, E., Carol, I. & William, K. (1995). "Localization analysis of elastic degradation with application to scalar damage." *Journal of Engineering Mechanics – ASCE* **121**(4): 541 - 554.
- Ruiz, G. (2001). "Propagation of a cohesive crack crossing a reinforcement layer." *International Journal of Fracture* **111**: 265-282.
- Ruiz, G., Carmona, J. & Cendón, D. (2006). "Propagation of a cohesive crack through adherent reinforcement layers." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **195**(52): 7237-7248.

- Ruiz, G., Elices, M. & Planas, J. (1998). "Experimental study of fracture of lightly reinforced concrete beams." *Materials and Structures* **31**: 683-691.
- Ruiz, G. & Planas, J. (1994). "Propagación de una fisura cohesiva en vigas de hormigón debilmente armadas: modelo de la longitud efectiva de anclaje." *Anales de la Mecánica de Fractura* **11**: 506-513.
- Runesson, K., Ottosen, N. & Peric, D. (1991). "Discontinuous bifurcations of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain " *International Journal of Plasticity* **7**: 99 - 121.
- Samaniego, E. (2002). *Contributions to the continuum modelling of strong discontinuities in two-dimensional solids*. Doctoral Thesis, Technical University of Catalonia, Barcelona.
- Sanchez-Palencia, E. & Zaoui, A. (1987). *Homogenization techniques for composite media*, Springer Verlag.
- Sancho, J. M., Planas, J., Cendón, D., Reyes, E. & Gálvez, J. (2004). *Análisis de la fractura del hormigón mediante elementos finitos con fisura cohesiva embebida: Fundamentos*. Métodos Computacionais em Engenharia, C. Soares, A. Batista et al (eds), Lisboa, APMTAC - SEMNI.
- Sancho, J. M., Planas, J., Cendón, D., Reyes, E. & Gálvez, J. (2005). *On the need of enforcement of crack path continuity in the simulation of concrete fracture using embedded crack elements*. EUROMECH Colloquium 460 on Numerical Modelling of Concrete Cracking, Austria.
- Sancho, J. M., Planas, J., Cendón, D., Reyes, E. & Gálvez, J. (2007). "An embedded crack model for finite element analysis of concrete fracture." *Engineering Fracture Mechanics* **74**(1-2): 75-86.
- Simó, J. & Hughes, T. H. R. (1998). *Computational Inelasticity*. New York, Springer-Verlag.
- Simó, J. & Ju, J. (1987). "Strain and stress based continuum damage models. I. Formulation." *International Journal of Solid and Structures* **23**: 821-840.
- Simó, J., Oliver, J. & Armero, F. (1993). "An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solid." *Computational Mechanics* **12**: 277 - 296.
- Simó, J. & Rifai, S. (1990). "A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **29**: 1595-1638.
- Soh, C., Chiew, S. & Dong, Y. (1999). "Damage model for concrete-steel interface." *Journal of Structural Engineering ASCE* **125**(8): 979-983.
- Timoshenko, S. P. & Young, D. H. (1965). *Theory of Structures*, Mcgraw-Hill College.
- Truesdell, C. & Toupin, R. (1960). *The classical field theories*. Berlín.
- Vasiliev, V. & Morozov, E. (2001). *Mechanics and Analysis of Composite Materials*. Oxford, Elsevier.
- Vecchio, F. (2000). "Disturbed stress field model for reinforced concrete: formulation." *Journal of Structural Engineering ASCE* **126**(6): 1070-1077.
- Vecchio, F. (2001). "Disturbed stress field model for reinforced concrete: implementation." *Journal of Structural Engineering ASCE* **127**(1): 12-20.
- Vecchio, F. & Collins, M. (1986). "The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear." *ACI Journal* **83**(2): 219-231.
- Vecchio, F., Lai, D., Shim, W. & Ng, J. (2001). "Disturbed stress field model for reinforced concrete: validation." *Journal of Structural Engineering ASCE* **127**(4): 350 - 358.

- Yu, R. & Ruiz, G. (2004). "Static multi-crack modeling in concrete solved by a modified DR method." *Computer and Concrete* **1**(4): 1-17.
- Yu, R. & Ruiz, G. (2005). *Static multi-cracking modeling of LRC beams*. VII International Conference on Computational Plasticity, E. Oñate & D. Owen (eds), Barcelona, CIMNE.