

Modelo Constitutivo Elastoplástico Anisótropo en Deformaciones Finitas para Análisis de Materiales Compuestos Reforzados con Fibras

E. Car
S. Oller
E. Oñate

Índice

1	INTRODUCCIÓN	4
2	MODELOS CONSTITUTIVOS	6
3	TEORIA DE MEZCLAS	8
3.1	Ecuación de cierre	9
3.2	Función de energía libre	11
3.3	Ecuación constitutiva	12
4	MODELO ELASTOPLASTICO ANISOTROPO	12
4.1	Función de fluencia y de potencial plástico	15
4.2	Transformación de espacios	15
4.3	Ecuación constitutiva	18
4.3.1	Aspectos básicos	18
4.3.2	Función de energía libre de Helmholtz	19
4.3.3	Hipótesis de elasticidad desacoplada	20
4.3.4	Expresión de la disipación	20
4.3.5	Expresión de la energía libre. Particularización a pequeñas de- formaciones elásticas y estados isotérmicos	21
4.4	Regla de flujo. Ley de evolución de las variables internas	22
4.4.1	La disipación en el espacio isótropo ficticio. Unicidad de la di- sipación.	23
4.5	Ecuación constitutiva tangente	24
4.6	Integración de la ecuación constitutiva	26
5	MODELO CONSTITUTIVO DEL COMPUESTO	26
6	IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA	29
7	EJEMPLOS NUMERICOS	31
7.1	Descripción general	31
7.2	Ensayo a tracción de probetas entalladas con fibras unidireccionales . . .	31
7.3	Ensayo de probetas T300/914C con fibras orientadas a 0° respecto al eje longitudinal.	33
7.3.1	Comprobación numérico-experimental	39
7.4	Ensayo de probetas de T300/914C con fibras orientadas a 10° respecto al eje longitudinal.	40
7.4.1	Comprobación numérico-experimental	44
7.5	Ensayo de probetas de T300/914C con fibras orientadas a 45° respecto al eje longitudinal.	46
7.5.1	Comprobación numérico-experimental	49

7.6	Ensayo de probetas de T300/914C con fibras orientadas a 90° respecto al eje longitudinal	52
7.6.1	Comprobación numérico-experimental	55
8	CONCLUSIONES	57
9	Agradecimientos	59

Lista de Figuras

1	Esquema de solución de un problema no lineal multifase desarrollado en la configuración referencial y actualizada	13
2	Modificación de la forma de diversas funciones de fluencia	17
3	Esquema del modelo constitutivo elastoplástico anisótropo en deformaciones finitas	27
4	Modelo constitutivo para materiales compuestos reforzados con fibras	28
5	Dimensiones de la probeta. Detalle de la zona central	32
6	Malla de elementos finitos empleada en el análisis	34
7	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0° . Deformada 50:1	35
8	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0° . Detalle deformada en la entalladura	35
9	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0° . Contorno de desplazamientos	36
10	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0° . Contorno variable interna de plasticidad	36
11	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0° . Contorno de plasticidad en la fibra	37
12	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0° . Contorno de tensiones XX en el compuesto	38
13	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0° . Contorno de tensiones YY en el compuesto	38
14	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0° . Contorno de tensiones YY en la fibra	39
15	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0° . Curva Carga - Desplazamientos en la parte superior.	40
16	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0° . Curva COD - Desplazamientos parte superior de la probeta	41
17	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10° . Deformada 25:1	42
18	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10° . Contorno de desplazamientos	42
19	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10° . Contorno variable interna plasticidad.	43
20	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10° . Contorno de deformación plástica YY	43

21	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45°. Contorno tensiones XX . . .	44
22	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10°. Contorno de tensiones YY	45
23	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10°. Curva Carga - Desplaza- mientos parte superior de la probeta	45
24	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10°. Curva COD lado derecho - Desplazamientos parte superior de la probeta.	46
25	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10°. Curva COD lado izquierdo - Desplazamientos parte superior de la probeta	47
26	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45°. Deformada 25:1	48
27	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45°. Detalle de la deformada en la entalladura	48
28	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45°. Contorno de desplazamientos	49
29	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45°. Contorno variable interna de plasticidad	50
30	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45°. Contornos de plasticidad en las fibras	50
31	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45°. Contorno de tensiones XX	51
32	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45°. Contorno de tensiones YY	51
33	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45°. Curva Carga - Desplaza- mientos parte superior de la probeta	52
34	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45°. Curva COD (lado derecho) - Desplazamientos parte superior de la probeta	53
35	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45°. Curva COD (lado izquierdo) - Desplazamientos parte superior de la probeta	53
36	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 90°. Deformada 200:1	54
37	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 90°. Detalle deformada en la entalladura	54
38	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 90°. Contornos de desplazamientos	55
39	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 90°. Detalle contorno variable interna de plasticidad	56
40	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 90°. Contorno de tensiones XX	56
41	Ensayo probeta T300/914C con fibras a 90°. Contorno de tensiones YY	57
42	Curva Carga - Desplazamientos parte superior de la probeta	58
43	Curva COD - Desplazamientos parte superior de la probeta	58

Modelo Constitutivo Elastoplástico Anisótropo en Deformaciones Finitas para Análisis de Materiales Compuestos Reforzados con Fibras

E. Car, S. Oller y E. Oñate

E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

Universidad Politécnica de Catalunya

Módulo C1 Campus Norte 08034 Barcelona España

email: car@cimne.upc.es

Abstract

En este trabajo se presenta un modelo constitutivo elastoplástico anisótropo generalizado en deformaciones finitas para el análisis de materiales compuestos multifase utilizando el método de los elementos finitos. En la modelización del material compuesto se utiliza la teoría de mezclas en la cual se inserta el modelo constitutivo elastoplástico propuesto. El comportamiento elástico de un sólido anisótropo se simula con la teoría de la elasticidad clásica, mientras que el comportamiento no proporcional de un sólido anisótropo se simula mediante un modelo elastoplástico anisótropo en régimen de grandes deformaciones basado en una formulación isótropa equivalente. Este modelo asume la existencia de un espacio real anisótropo y de un espacio ficticio isótropo, en el cual se resuelve un problema ficticio. Ambos espacios están relacionados a través de una transformación lineal utilizando un tensor de cuarto orden que contiene la información del material real. Por último se presentan los detalles de la implementación numérica del modelo propuesto en un código de elementos finitos y ejemplos de aplicación del modelo al análisis del comportamiento lineal y no-lineal de materiales compuestos.

1 INTRODUCCIÓN

El uso de materiales compuestos en el diseño de estructuras se ha visto incrementado notablemente en los últimos años. Esta tendencia se debe al hecho de que los materiales compuestos poseen ciertas características especiales y resultan totalmente diferentes a los materiales isótropos normalmente utilizados.

Estos materiales presentan una elevada relación resistencia - peso y rigidez - peso, son resistentes a la corrosión, térmicamente estables y resultan especialmente adecuados para estructuras en las que el peso constituye una variable fundamental en el proceso de diseño. Los componentes estructurales que requieren una elevada rigidez, resistencia a los impactos, formas complejas y un alto volumen de producción resultan ideales para

ser fabricados en materiales compuestos. Es por ello que el uso de estos materiales en la fabricación de piezas de automóviles se ha extendido en los últimos años (Ali, 1996) (O'Rourke, 1989), siendo muy utilizados también en la industria aeronáutica y aeroespacial.

En el proceso de rediseño de un componente estructural utilizando materiales compuestos no solo basta un cambio en los componentes del material. Debido a las características diferentes de estos materiales (alta anisotropía, relación de resistencia entre fibra y matriz elevada) el rediseño del componente resulta necesario. Este proceso de diseño de componentes en materiales compuestos se ha basado en métodos empíricos, observándose en la literatura la ausencia de análisis o simulaciones del comportamiento de materiales compuestos sometidos a niveles de sollicitaciones que sobrepasan el límite elástico.

La función que cumple la simulación numérica es la de ofrecer un laboratorio virtual en el cual es posible "*ensayar*" la realidad sin construirla, con los consiguientes beneficios en la reducción de los costes en los procesos de diseño de una pieza o material.

Las técnicas convencionales analíticas utilizadas para el análisis de materiales simples isótropos no resultan adecuadas para el análisis de materiales compuestos. Tampoco ha resultado satisfactoria la representación de un compuesto mediante un único material ortótropo con propiedades del conjunto.

Puede observarse en distintas referencias los intentos por modelar el comportamiento de materiales compuestos utilizando la técnica de elementos finitos para el análisis y diseño de estructuras, donde la correlación entre los análisis y los resultados experimentales no resulta satisfactoria (Ali, 1996) (Klintworth and Macmillan, 1992).

La principal dificultad que se encuentra con el método de los elementos finitos convencional es la imposibilidad de modelar el comportamiento de materiales altamente anisótropos sometidos a cargas que superan los límites de proporcionalidad del material.

Por ello resulta necesario a los fines de modelar materiales compuestos introducir teorías que permitan simular el comportamiento de materiales que poseen las siguientes características: a) alta anisotropía con deformaciones permanentes direccionadas; b) existencia de varias sustancias que conforman el compuesto; c) flujo plástico unidireccional en el caso de refuerzo con fibras; d) deslizamientos relativos entre matriz y fibra (debonding) a nivel de interface con pérdida de compatibilidad cinemática e) pandeo local del refuerzo; f) tendencia de las fibras a alinearse con la dirección del esfuerzo mayor; g) presencia de grandes deformaciones debido al fenómeno de alineación del refuerzo en la dirección del esfuerzo mayor. Todos estos fenómenos inducen a una pérdida de resistencia y rigidez global del material compuesto con pérdida de linealidad en la respuesta del conjunto. Durante la fase de comportamiento inelástico la energía disipada se calcula como la suma de la contribución de la energía disipada por cada componente mas la disipación en la interface.

En aplicaciones estructurales es necesario combinar los distintos materiales para obtener materiales compuestos cuyas propiedades y cualidades mecánicas son superiores a las de sus constituyentes. Entre los componentes más utilizados están las partículas

o las fibras. En el primero de los casos las partículas de un material o materiales específicos están embebidas o adheridas entre sí mediante una matriz continua con bajo módulo de elasticidad. En compuestos con fibras, estas constituyen el refuerzo y pueden orientarse en la dirección que sea necesaria para proporcionar la mayor resistencia y rigidez global. Las sustancias componentes que forman la estructura del compuesto pueden apilarse de manera que la rigidez del conjunto resulta tanto de su topología como del material mismo.

En este trabajo y como alternativa a los modelos clásicos se introducen las características relevantes del comportamiento de materiales compuestos mediante la teoría de mezclas, actuando sobre un modelo constitutivo general, elastoplástico con daño anisótropo formulado en grandes deformaciones. El modelo que actúa dentro de la teoría de mezclas puede simular diversos materiales, metales o no metales en general. En el apartado 2 se presentan los modelos constitutivos utilizados en el análisis de materiales compuestos. En este trabajo se opta por la formulación de un modelo constitutivo para cada punto, basado en la mecánica de los sólidos. En el apartado 3 se presenta la *teoría de mezclas* en la cual se inserta el modelo constitutivo elastoplástico que se propone. Esta teoría se basa en la interacción entre los diferentes componentes, cada uno definido con su ley constitutiva. El comportamiento del material compuesto se obtiene en función del porcentaje en volumen ocupado por cada material componente. Esta teoría tiene en cuenta la coparticipación de " n " sustancias componentes en cada punto, tal que cada una de estas puede ser independiente de las demás: isótropas, ortótropas o anisótropas. Cada sustancia puede tener una ley constitutiva distinta: elástica, frágil, plástica o la combinación de ellas. Esto permite simular los fenómenos de fisuración, fractura del material, dilatación, cambios en el rozamiento interno y degradación de la rigidez. En el apartado 4 se presenta el modelo elastoplástico anisótropo en deformaciones finitas propuesto. En el apartado 5 se muestra el modelo elastoplástico anisótropo propuesto en el contexto de la teoría de mezclas. En el apartado 6 se presenta a nivel esquemático la implementación en un código de elementos finitos de la teoría de mezclas y del modelo elastoplástico propuesto. Finalmente en el apartado 7 se muestran ejemplos numéricos contrastados con datos experimentales obtenidos del ESI Project Nb ED/83-383/RD/MS y ED/84-415/RD/MS (Stavrínidis, 1985) y de las simulaciones numéricas realizadas por la European Space Agency (DFVLR, 1983).

El análisis experimental se ha llevado a cabo sobre un conjunto de probetas de material T300/914C con refuerzo de fibra orientada a 0° , 10° , 45° y 90° respecto del eje longitudinal de la probeta.

2 MODELOS CONSTITUTIVOS

Desde el punto de vista constitutivo es posible hacer la siguiente clasificación de los materiales compuestos:

- Materiales de matriz compuesta

- Materiales de matriz reforzada con fibras cortas
- Materiales de matriz reforzada con fibras largas
- Materiales de estructura compuesta

Los *materiales de matriz compuesta* suelen desarrollarse para mejorar las cualidades mecánicas del material base o de fase principal, mediante el agregado de otros materiales denominados de fase secundaria.

Los *materiales de matriz reforzada con fibras cortas* poseen las características de incorporar pequeñas fibras en la matriz del material base, distribuidas muy homogéneamente, de un micrón de diámetro y que actúan de modo de fase de refuerzo. Debido a la distribución aleatoria dentro de la matriz del material este tiene un comportamiento a nivel macroscópico que se aproxima al de los materiales isótropos.

Los *materiales de matriz reforzada de fibras largas* presentan una marcada direccionalidad en su comportamiento y una elevada ductilidad. Estos materiales están diseñados para evitar el fallo que experimentan los materiales puros. Después de ocurrido el fallo de la matriz quedan todavía las fibras como última reserva estructural. Están constituidos por un material de base, que puede ser puro o compuesto, sobre el que se orienta la fibra (orgánica o inorgánica), formando estratos entramados o entretejidos.

En los *materiales de estructura compuesta* se distinguen dos tipos: los inorgánicos y los orgánicos. La estructura macroscópica de estos materiales puede estar constituida por materiales puros o de matriz compuesta, a su vez.

Los *micromodelos* y los *macromodelos* constituyen las alternativas para de estudiar el comportamiento mecánico de los materiales compuestos. Los micromodelos se concentran en el estudio del comportamiento del material a nivel interatómico (Obraztsov and Vasilev, 1982). Estos modelos presentan un alto costo computacional en la práctica. Los macromodelos expresan el comportamiento constitutivo del material compuesto como si se tratase de un solo material.

La gran mayoría de los modelos macromecánicos están basados en la *teoría de mezclas*. Esta teoría permite estudiar el comportamiento del material compuesto como una combinación de simples materiales componentes cada uno con su modelo constitutivo "base" que satisfacen una ecuación de cierre apropiada.

Otro método empleado para el análisis de materiales compuestos es el *método de homogeneización* (Hill, 1965) (Sanchez Palencia, 1980) (Suquet, 1982) (Suquet, 1981). Este método se utiliza para analizar materiales compuestos con características periódicas. Consiste básicamente en encontrar la solución de una celda que gobierna las propiedades del compuesto. Se trata de una metodología en dos escalas, una micro y otra macro y fue utilizada por Larson (1976) para el estudio del transporte de neutrones en medios no homogéneos. Posteriormente Len'e y Leguillon (1982) y Len'e (1986) utilizaron este método para el cálculo de las propiedades de un material compuesto con componentes elásticos lineales. Esta metodología no resulta satisfactoria para el análisis de materiales compuestos reforzados con fibras largas debido a su elevado costo computacional.

R. Ali (1996) propone que los materiales compuestos pueden considerarse como un conjunto de capas superpuestas cada una con diferentes orientaciones del refuerzo. En el análisis considera que cada lámina presenta un comportamiento ortótropo y supone un comportamiento del material elástico lineal. El material compuesto se simula utilizando elementos de lámina.

El código PAM-FISS (Stavrinidis, 1985) utiliza un modelo constitutivo bi-fase y supone un comportamiento frágil del material. Este modelo considera un material heterogéneo y está adaptado a materiales compuestos unidireccionales reforzados con fibras. La resistencia y rigidez del compuesto se calcula superponiendo los efectos de una fase ortótropa (matriz menos fibra) y una fase unidimensional (fibra). Cada fase posee su respectivo modelo de comportamiento reológico y puede fallar independientemente. Una vez superada la resistencia las propiedades de la fase se anulan simulando un material frágil. Con el objetivo de capturar las fisuras se utiliza la mecánica de fractura con un esquema de avance automático o arbitrario. Esta metodología no resulta adecuada ya que es necesario utilizar técnicas de remallado con el consiguiente aumento en el coste computacional.

Haug et. al. (1988) utilizan el modelo constitutivo bi-fase del código PAM-FISS pero consideran que ambas fases poseen un comportamiento caracterizado por una degradación de rigidez (Ley constitutiva de daño).

En este trabajo y como alternativa a los modelos clásicos se introducen las características relevantes del comportamiento de materiales compuestos mediante la teoría de mezclas, actuando sobre un modelo constitutivo general, elastoplástico con daño anisótropo formulado en grandes deformaciones. El modelo que actúa dentro de la teoría de mezclas puede simular diversos materiales, metales o no metales en general. El modelo constitutivo elastoplástico anisótropo en régimen de grandes deformaciones que se presenta, constituye uno de los modelos "base" que se introduce en la teoría de mezclas de sustancias. Esto permite considerar las características relevantes del comportamiento de los materiales compuestos.

3 TEORIA DE MEZCLAS

Los materiales compuestos están formados por sustancias de diferentes tipos inorgánicos u orgánicos. Su estado de equilibrio atómico puede depender de ligaduras interatómicas de distintos tipos dando lugar a materiales amorfos o cristalinos.

Las características mecánicas de estos materiales dependen de sus propiedades intrínsecas (estructura macroscópica, tipo de ligadura, estructura cristalina, etc.). También influyen en el comportamiento de estos materiales sus propiedades extrínsecas: características del proceso de fabricación, tamaño de microporos y distribución de los mismos, microfisuras, estados tensionales iniciales, etc.

Cada una de las sustancias componentes que integran el compuesto condicionan con su propia ley constitutiva el comportamiento del conjunto en función de la proporción del volumen en que participan y de su distribución morfológica en el compuesto.

Existen diversas teorías que permiten simular el comportamiento constitutivo de los materiales compuestos. La *Teoría de Mezclas* se considera adecuada para la simulación del comportamiento de materiales compuestos. Esta teoría es la adecuada para explicar el comportamiento de un punto de un sólido compuesto basando su teoría en la estructura físico-matemática de la *mecánica de medios continuos*. Se basa en el principio de interacción de sustancias componentes que constituyen el material con las siguientes hipótesis: (i) en cada volumen infinitesimal de un compuesto participan un número de sustancias componentes; (ii) cada componente participa en el comportamiento del compuesto en la misma proporción que su participación volumétrica; (iii) todos los componentes poseen la misma deformación (ecuación de cierre o compatibilidad); (iv) el volumen ocupado por cada componente es mucho menor que el volumen total del compuesto.

La segunda hipótesis implica una distribución homogénea de todas las sustancias en una cierta región del compuesto. La interacción entre las diferentes sustancias componentes, cada una con su respectiva ley constitutiva, determina el comportamiento del material compuesto y depende básicamente del porcentaje en volumen ocupado por cada componente y de su distribución en el compuesto.

La teoría de mezclas fue estudiada por Trusdell y Toupin (Trusdell and Toupin, 1960) y a su vez estos estudios dieron las bases de los trabajos de Ortiz y Popov (Ortiz and Popov, 1982a). Los resultados obtenidos por Trusdell constituyen también la base de trabajos como el de Green y Naghdi (Green and Naghdi, 1965) y el de Ortiz y Popov (Ortiz and Popov, 1982b) para materiales bifase.

El modelo que aquí se presenta es un modelo más general que representa el comportamiento constitutivo de un material compuesto de " n " fases altamente anisótropo bajo el régimen de grandes deformaciones.

3.1 Ecuación de cierre

La teoría de mezclas clásica esta basada en la combinación e interacción de las sustancias básicas que conforman el compuesto (Green and Naghdi, 1965) (Trusdell and Toupin, 1960) (Ortiz and Popov, 1982b) (Oller et al., 1994) . Se considera que en cada punto material participan todas las sustancias componentes a la vez y cada una de ellas con su propia ley constitutiva y en la proporción de volumen asignada. Esto permite combinar materiales con comportamientos diferenciados (elástico, elasto-plástico, etc.), donde cada uno de ellos presenta un comportamiento evolutivo gobernado por sus propias leyes.

La tercera hipótesis en la que se basa la teoría de mezclas supone que en ausencia de difusión atómica¹ la deformación es idéntica para todos los componentes del compuesto. Esta hipótesis se debe verificar tanto en la configuración referencial como en la configuración espacial para cada fase. En la configuración actualizada la condición de

¹Los fenómenos de difusión atómica se producen a temperaturas muy altas. En los análisis se considera una temperatura inferior a la correspondiente al punto de fusión.

compatibilidad de deformaciones resulta: (Trusdell and Toupin, 1960) (Oñate et al., 1991):

$$e_{ij} \equiv (e_{ij})_1 = (e_{ij})_2 = \dots = (e_{ij})_n \quad (1a)$$

El tensor de deformaciones de Almansi se define como:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(g^{ij} - (b_{ij})^{-1} \right) \quad (2)$$

donde $\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ es el tensor *de deformaciones izquierdo de Cauchy-Green* y g_{ij} es el tensor métrico espacial dado por:

$$g_{ij} = I_{ij} = \delta_{ij} \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{array} \right\} \quad (3)$$

y \mathbf{F} es el gradiente de deformaciones dado por

$$F_{iJ} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J}$$

En la configuración referencial se propone como ecuación de cierre:

$$E_{ij} \equiv (E_{ij})_1 = (E_{ij})_2 = \dots = (E_{ij})_n \quad (4)$$

donde el tensor de deformaciones de Green - Lagrange² se define como:

$$E_{IJ} = \frac{1}{2} (C_{IJ} - G_{IJ}) \quad (5)$$

siendo \mathbf{G} el tensor métrico material. El tensor métrico material se expresa como:

$$G_{IJ} = I_{IJ} = \delta_{IJ} \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } I \neq J \\ 1 \text{ si } I = J \end{array} \right\} \quad (6)$$

donde $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ es el tensor de deformaciones derecho de Cauchy-Green.

Teniendo en cuenta la definición del tensor derecho de Cauchy-Green se obtiene la ecuación de cierre en función de los gradientes de deformaciones:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 = \dots = \mathbf{F}_n \quad (7)$$

Esta hipótesis vale rigurosamente sólo si se aplica la teoría de mezclas para materiales con comportamiento en paralelo, es decir que el estado tensional del compuesto resulta la suma de las tensiones de cada componente proporcional al volumen que ocupan respecto del total, ej.: matriz con fibras largas, hormigón armado, etc. En el caso de matriz con fibras cortas o matriz compuesta con agregados pétreos etc. es necesario

²La relación entre el tensor de tensiones de Almansi y el de Green-Lagrange se muestra en el Apéndice I

definir otra ecuación de cierre. Otra alternativa para tratar materiales de matriz compuesta, es realizar una corrección en las propiedades de cada componente y mantener la ecuación de cierre (ec.1a).

3.2 Función de energía libre

Los materiales compuestos que cumplen con la ec.(1a) y ec.(4), satisfacen también la condición básica de la aditividad de la energía libre de sus componentes (Trusdell and Toupin, 1960). Esto es:

$$m\psi(\mathbf{e}^e, \theta, \alpha^m) = \sum_{c=1}^n k_c m_c \Psi_c[\mathbf{e}, (\mathbf{e}^p)_c, \theta, \alpha_c^m] \quad (8)$$

donde ψ_c es la energía libre correspondiente a cada una de las "n" sustancias componentes de la mezcla, k_c es el coeficiente de participación volumétrica, $(\mathbf{e}^p)_c$ es la deformación plástica de cada fase y α_c^m son las variables internas del componente c^{esimo} que definen el comportamiento físico de cada sustancia componente.

La teoría de mezcla de sustancias básicas aquí utilizada se basa en que todas las sustancias intervienen en la respuesta del compuesto en forma proporcional al volumen que ocupan respecto del volumen total. El coeficiente de participación volumétrica se define como:

$$k_c = \frac{dV_c}{dV_0} \quad (9)$$

donde V_c es el volumen del componente y V_0 es el volumen total del compuesto en la configuración referencial.

La ley de conservación de la masa establece que:

$$\frac{dv}{dV} = \det \mathbf{F} = J \quad (10)$$

donde v es el volumen en la configuración espacial y V es el volumen en la configuración material. Teniendo en cuenta la ecuación de cierre (ec. 4) se deduce:

$$\frac{dv_c}{dV_c} = J \quad (11)$$

La ec.(11) establece que la relación entre el volumen de un componente en la configuración espacial y el volumen del componente en la configuración referencial está dado por el determinante del gradiente de deformaciones. Teniendo en cuenta la ec.(11) y la ec.(9) se tiene:

$$k_c = \frac{1}{J} \frac{dv_c}{dV_0} = \frac{dv_c}{dv_0} \quad (12)$$

donde v_0 representa el volumen del compuesto en la configuración espacial. La ec.(12) establece que el coeficiente de participación se mantiene constante en ambas configuraciones.

La teoría de mezclas solo es válida para el caso en que todas las fases del material compuesto resulten compresibles o todas incompresibles. En el caso que se presenten fases compresibles e incompresibles la ecuación de cierre no es posible cumplirla debido a que las fases incompresibles no admiten un estado de deformaciones volumétrico que si puede ser admitido por las fases compresibles lo que provoca el no cumplimiento de la ecuación de compatibilidad. (ec. (4)).

El coeficiente de participación volumétrico de cada componente debe cumplir la condición:

$$\sum_{c=1}^n k_c = 1 \quad (13)$$

3.3 Ecuación constitutiva

La definición de la tensión para el compuesto σ_{ij} se obtiene a partir de la formulación del modelo hiperelástico garantizando la condición de disipación del segundo Principio de la Termodinámica (Malvern, 1969). Esto es:

$$\boldsymbol{\sigma} = m \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{e}} = \sum_{c=1}^n k_c m_c \frac{\partial \psi_c}{\partial \mathbf{e}} = \sum_{c=1}^n k_c m_c (\boldsymbol{\sigma})_c \quad (14)$$

El tensor tangente constitutivo del compuesto, está dado por:

$$\mathbf{c}^T = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{e} \otimes \partial \mathbf{e}} = \sum_{c=1}^n k_c (\mathbf{c}^T)_c \quad (15)$$

donde $(\mathbf{c}^T)_c$ representa el tensor constitutivo tangente anisótropo real para el componente $c^{ésimo}$.

En la Figura 1 se observa un diagrama de flujo esquemático a seguir en la solución de problemas no lineales en deformaciones finitas de un material compuesto multifase. En la misma se observa que cada fase posee su propio modelo constitutivo y resulta independiente de las otras fases que conforman el compuesto.

4 MODELO ELASTOPLASTICO ANISOTROPO

El modelo constitutivo que se presenta en este apartado constitutiye uno de los modelos "base" que se introduce en la teoría de mezclas de sustancias, previamente presentada. Este modelo resulta adecuado para simular el comportamiento constitutivo no lineal de materiales áltamente anisótropos.

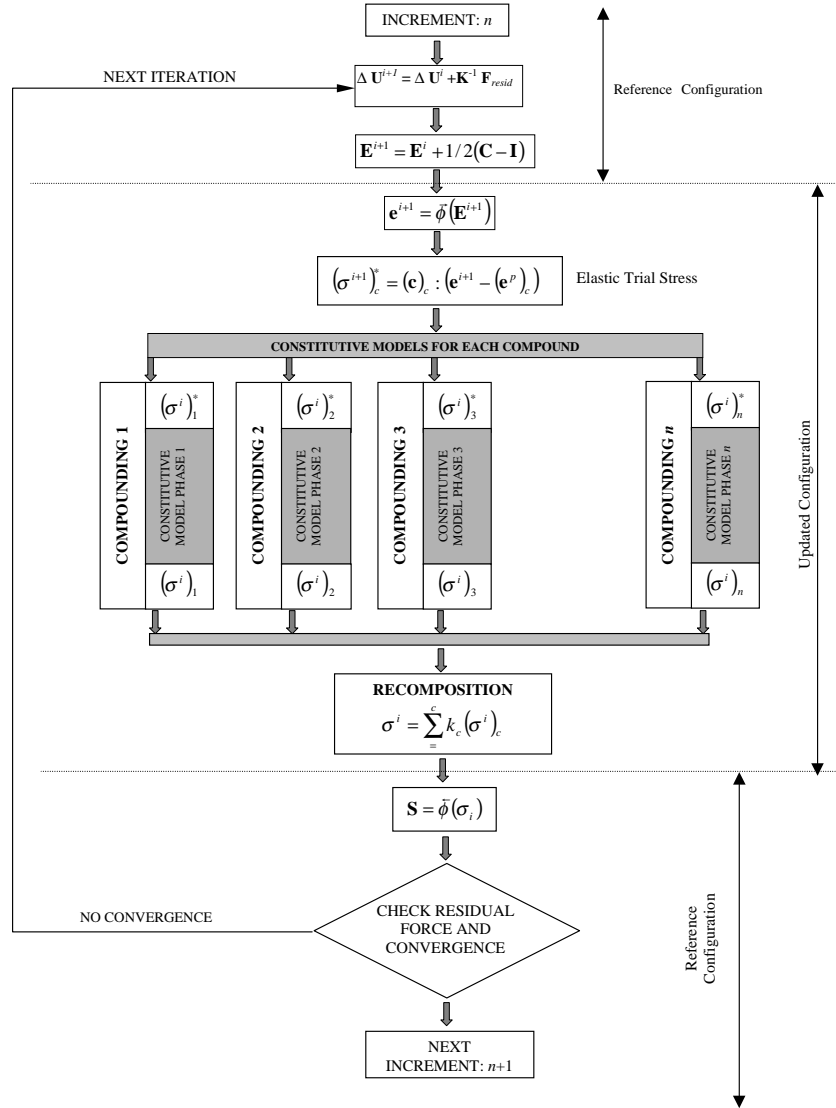


Figura 1: Esquema de solución de un problema no lineal multifase desarrollado en la configuración referencial y actualizada

La descripción del comportamiento elástico anisótropo de un sólido no presenta grandes dificultades. Es posible utilizar para tal fin las formas generales de la teoría de la elasticidad (Hull, 1987) (Matthews and Rawlings, 1994) (Pendleton and Tuttle, 1989).

La formulación de una ley constitutiva adecuada para sólidos no proporcionales ortótropos o anisótropos constituye un problema de elevada complejidad. Los primeros intentos de formular funciones de fluencia para materiales ortótropos se deben a Hill quien logró extender el modelo isótropo de Von Mises al caso ortótropo (Hill, 1971). La principal limitación de esta teoría se encuentra en la imposibilidad de modelar el comportamiento de materiales que presentan un comportamiento que no solo depende del segundo invariante del tensor de tensiones, como por ejemplo el caso de geomateriales o materiales compuestos.

La teoría anisótropa que aquí se desarrolla se basa en las ideas propuestas por Betten (Betten, 1981)(Betten, 1988) y utiliza el concepto de *tensor de tensiones mapeado*. Este concepto permite utilizar las ventajas y algoritmo utilizados para el caso de materiales isótropos, con las consiguientes ventajas en la implementación computacional del modelo.

En trabajos previos diversos autores han desarrollado una generalización de la teoría de plasticidad isótropa al caso anisótropo (Oller et al., 1993b) (Oller et al., 1993a). La idea básica consistía en modelar el comportamiento de un sólido en el *espacio anisótropo real* a través de un sólido ideal en el *espacio isótropo ficticio* (ver Figura 3). La hipótesis básica del modelo consistía en suponer que las deformaciones elásticas son idénticas en ambos espacios lo cual introduce una limitación en la teoría anisótropa mapeada. Esta limitación está dada por el hecho de que se debe respetar la proporcionalidad entre el límite de resistencia y el módulo de elasticidad para cada dirección del material.

El modelo constitutivo que se presenta en este trabajo resulta aplicable a materiales que presentan una alta anisotropía, como en el caso de los materiales compuestos reforzados con fibras y resulta de una generalización de la teoría de la plasticidad clásica.

El comportamiento anisótropo del material se formula a través de un espacio ficticio isótropo de tensiones y deformaciones que resulta de una transformación tensorial lineal de los espacios reales de tensiones y deformaciones anisótropo. Los parámetros que intervienen en la definición del tensor de transformación se obtienen a través de ensayos experimentales. La ventaja en la utilización de este tipo de modelos consiste en la posibilidad de utilizar las mismas funciones de fluencia, potenciales plásticos y métodos de integración de la ecuación constitutiva desarrollados para materiales isótropos. Toda la información de la anisotropía del material se encuentra en los tensores de cuarto orden de transformación de los espacios de tensiones (\mathbf{a}^σ) y deformaciones (\mathbf{a}^ϵ).

La formulación resultante es completamente general y permite realizar análisis de materiales multifase que presentan un grado de anisotropía elevado como es el caso de los materiales compuestos reforzados con fibras.

4.1 Función de fluencia y de potencial plástico

El modelo que a continuación se presenta se formula en la configuración actualizada y utiliza la cinemática lagrangeana total o actualizada. (Green and P., 1964) (Lubliner, 1990).

Este modelo permite simular el comportamiento no lineal de materiales sometidos a grandes deformaciones plásticas y pequeñas deformaciones elásticas debido a que para la definición de la energía libre elástica se utiliza un potencial cuadrático (García Garino and Oliver, 1991)(Lubliner, 1990).

Las funciones de fluencia y potencial plástico están definidas en el espacio de tensiones de Cauchy (configuración espacial) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Función de fluencia } F^\sigma(\boldsymbol{\sigma}; \alpha_\sigma^m) &= 0 \\ \text{Función de potencial } G^\sigma(\boldsymbol{\sigma}; \alpha_\sigma^m) &= K \end{aligned} \quad (16)$$

donde σ es el tensor de tensiones de Cauchy.

Las funciones de fluencia y potencial plástico resultan isotrópicas si se cumple la condición de invariancia(Malvern, 1969):

$$F^\sigma(a_{ip}a_{jq}\sigma_{pq}; \alpha_\sigma^m) = F^\sigma(\sigma_{pq}; \alpha_\sigma^m) = 0 \quad (17)$$

$$G^\sigma(a_{ip}a_{jq}\sigma_{pq}; \alpha_\sigma^m) = G^\sigma(\sigma_{pq}; \alpha_\sigma^m) = K \quad (18)$$

para cualquier transformación ortogonal $a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}$ donde a_{ij} es un tensor unidad diagonal y δ_{ij} es el tensor de Kronecker.

4.2 Transformación de espacios

Los procedimientos tradicionales que permiten obtener las ecuaciones constitutivas para materiales anisótropos elastoplásticos se basan en la descripción de una superficie de fluencia y una superficie de potencial plástico en términos de las propiedades características del material. Satisfacer las condiciones de invariancia en estos casos resulta dificultoso no siendo siempre posible.

Un procedimiento que garantiza la condición anterior consiste en definir las propiedades del sólido real anisótropo en términos de un sólido isotropo ficticio a través de una relación lineal del espacio de tensiones real y el ficticio(Oller et al., 1995) (Casas et al., 1998) (ver Figura 3):

$$\bar{\sigma}_{ij} = a_{ijkl}^\sigma \sigma_{kl} \quad (19)$$

Teniendo en cuenta la ec. (19)

$$\bar{\sigma}_{ij} (\sigma_{kl})^{-1} = a_{ijkl}^\sigma \quad (20)$$

donde σ_{kl} y $\bar{\sigma}_{ij}$ representan los tensores de tensiones en el espacio real anisótropo y en el espacio ficticio isótropo, respectivamente y a_{ijkl}^σ es un tensor de cuarto orden denominado *tensor de transformación de espacios* que establece la relación entre los espacios ficticio y real de tensiones. El tensor de transformación de espacios (\mathbf{a}^σ) está definido en la configuración actualizada como:

$$a_{ijkl}^\sigma = \bar{f}_{ij} (f_{kl})^{-1} \quad (21)$$

donde f_{ij}^σ y f_{kl}^σ representan los límites elásticos tensionales del material en el espacio real anisótropo y el ficticio isótropo respectivamente.

Se define la relación entre las deformaciones de Almansi elásticas reales e_{ij}^e y las deformaciones de Almansi elásticas ficticias \bar{e}_{ij}^e como:

$$\bar{e}_{ij}^e = a_{ijkl}^e e_{kl}^e \quad (22)$$

Esta hipótesis implica no unicidad en las deformaciones elásticas entre espacios. A partir de esta expresión es posible calcular el *tensor de transformación de las deformaciones* (\mathbf{a}^e) teniendo en cuenta la ec.(19) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij} (\sigma_{kl})^{-1} &= a_{ijkl}^\sigma = (\bar{c}_{ikrs} \bar{e}_{rs}^e) (c_{jlmn} e_{mn}^e)^{-1} \\ a_{ijkl}^\sigma &= \bar{c}_{ikrs} \underbrace{\bar{e}_{rs}^e (e_{mn}^e)^{-1}}_{a_{rsmn}^e} (c_{jlmn})^{-1} \\ a_{ijkl}^\sigma &= \bar{c}_{ikrs} a_{rsmn}^e (c_{jlmn})^{-1} \end{aligned} \quad (23)$$

obteniéndose a partir de aquí:

$$a_{rsmn}^e = (\bar{c}_{ikrs})^{-1} a_{ijkl}^\sigma c_{jlmn} \quad (24)$$

donde \bar{c}_{ikrs} es el tensor constitutivo en el espacio isótropo ficticio y c_{jlmn} es el tensor constitutivo en el espacio anisótropo real. La elección de \bar{c}_{ikrs} es arbitraria y puede elegirse por lo tanto las propiedades de cualquier material conocido.

Teniendo en cuenta la ec.(23) es posible establecer la relación entre los tensores constitutivos en el espacio anisótropo real e isótropo ficticio:

$$c_{jlmn} = (a_{ijkl}^\sigma)^{-1} \bar{c}_{ikrs} a_{rsmn}^e \quad (25)$$

El tensor constitutivo anisótropo real \mathbf{c} está expresado en coordenadas locales, por lo tanto resulta necesario transformarlo al sistema de referencia global a través de un tensor de rotación de cuarto orden \mathbf{R} esto es:

$$c_{ijkl} = R_{irjs} (c_{rspq})_{loc} R_{kplq} \quad (26)$$

donde $(c_{rspq})_{loc}$ es el tensor constitutivo local de cuarto orden en el espacio anisótropo real. El tensor de rotaciones R_{ijkl} se define como:

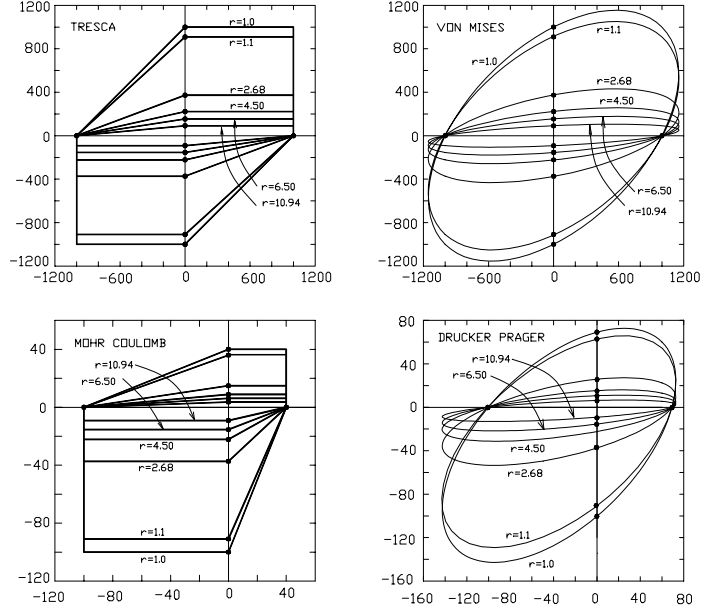


Figura 2: Modificación de la forma de diversas funciones de fluencia

$$R_{ijkl} = r_{ik}r_{jl} \quad (27)$$

donde $r_{ik} = \cos \left[(\bar{e}_i)_{glob}, (\bar{e}_j)_{loc} \right]$, siendo \bar{e}_i es el versor unitario correspondiente a la componente i -ésima del sistema de referencia coordinado. El tensor de rotación \mathbf{R} tiene en cuenta los ángulos entre las direcciones principales del material anisótropo y el sistema de coordenadas globales.

La transformación dada en la ec.(19) conduce a cambios en la forma de la superficie de fluencia. Esto se puede observar en la Figura 2 para diferentes criterios de fluencia. El mapeo de espacios permite representar adecuadamente materiales áltamente anisótropos, tal el caso de una fibra de refuerzo en una matriz de material compuesto cuando la relación $\bar{\sigma}_{ii}/\sigma_{ii}$ tiende a infinito³. Para el caso de plasticidad asociada y con un criterio de fluencia de Von Mises la Figura 2 muestra la pérdida resistencia en una dirección dada, mientras que en la dirección normal a esta existe un crecimiento del flujo plástico en la misma proporción.

³ r es la relación entre las tensiones de fluencia en los espacios isótropo ficticio y anisótropo real

4.3 Ecuación constitutiva

En esta sección se obtiene la expresión de la función de la energía libre para fases anisótropas. Esta función será luego utilizada para definir el estado tensional de acuerdo a la ec. (14).

4.3.1 Aspectos básicos

La ecuación constitutiva para un material anisótropo se obtiene a partir de escribir la disipación en un proceso elastoplástico isotérmico en el espacio real anisótropo. La expresión de la disipación resulta de considerar el primer y segundo principio de la termodinámica.

El primer principio postula el balance de la energía, exigiendo la conservación de la energía total interna W del sistema. Este principio relaciona la potencia introducida al sistema y la cantidad de calor Q existente en el mismo, con el cambio de energía interna global \dot{W} que este experimenta (Malvern, 1969) (Lubliner, 1990) (Oller, 1989).

La forma local euleriana se expresa como:

$$m \dot{\omega} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + mr - \text{div}(\mathbf{q}) \quad (28)$$

donde m es la densidad o masa volúmica en la configuración espacial, $\dot{\omega}$ es la densidad de energía interna específica, $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy, \mathbf{d} el gradiente de velocidades, r es la fuente interna de calor específica y \mathbf{q} es el flujo de calor por conducción.

La forma local lagrangeana se expresa como:

$$m^0 \dot{\omega} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} + m^0 r - \text{div}(J\mathbf{q}) \quad (29)$$

siendo m^0 la masa en la configuración referencial, $\dot{\omega}$ es la energía interna específica, \mathbf{S} es el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchoff, \mathbf{E} el tensor de deformaciones de Cauchy-Green, r es la fuente interna de calor específica y \mathbf{q} es el flujo de calor por conducción.

Definiendo la densidad de energía libre de Helmholtz ψ como la parte de la energía aprovechable para realizar trabajo a temperatura constante resulta:

$$\psi \stackrel{\text{def}}{=} \omega - \eta\theta \quad (30)$$

siendo η la entropía específica y θ una medida de la temperatura. Su variación temporal resulta:

$$\dot{\psi} = \dot{\omega} - \dot{\eta}\theta - \eta\dot{\theta} \quad (31)$$

Reemplazando la ec.(31) en la ec.(29) resulta la expresión del primer principio de la termodinámica en función de la energía libre de Helmholtz.

$$m^0 \left(\dot{\psi} + \dot{\eta}\theta + \eta\dot{\theta} \right) = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} + m^0 r - \text{div}(J\mathbf{q})$$

$$m^0 (\dot{\psi}) = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} + m^0 r - \text{div}(\bar{\mathbf{q}}) - m^0 \dot{\eta} \theta - m^0 \eta \dot{\theta} \quad (32)$$

La forma euleriana local del primer principio resulta de considerar la transformación $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \frac{1}{J} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}$, siendo $\mathbf{d} = F^{-T} \dot{\mathbf{E}} F^{-1}$ el gradiente de velocidades, $m^0 = Jm$ la masa en la configuración referencial, $J = \det F = \frac{dV}{dV_0}$ y $\bar{\mathbf{q}} = J\mathbf{q}$.

$$m \dot{\psi} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + mr - \text{div}(\mathbf{q}) - m \dot{\eta} \theta - m \eta \dot{\theta} \quad (33)$$

expresión local Euleriana del primer principio de la termodinámica en función de la energía libre de Helmholtz.

El segundo principio establece que para un proceso irreversible se debe cumplir que el cambio en la producción interna de entropía debe ser mayor o igual que el cambio de entropía introducida (Malvern, 1969) (Oller, 1989), esto es:

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{S} \geq \dot{\mathfrak{S}}_{in} \quad (34)$$

siendo la entropía interna $\mathfrak{S} = \int_V m \eta dV$ y la entropía introducida $\mathfrak{S}_{in} = \int_V \frac{mr}{\theta} dV + \oint_S \frac{q}{\theta} \eta dS$.

Transformando en la desigualdad anterior las integrales de superficie en integrales volumétricas y combinando con la forma local euleriana (ec.28) del primer principio de la termodinámica resulta la disipación local por unidad de masa como (Oller, 1989):

$$\Xi = \theta \dot{\eta} - \dot{\omega} + \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}}{m} \right) - \frac{1}{\theta m} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \quad (35)$$

Teniendo en cuenta la definición de la energía libre de Helmholtz (ec.(30)) resulta la expresión local Euleriana de la disipación:

$$\Xi = -\dot{\theta} \eta - \dot{\psi} + \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}}{m} \right) - \frac{1}{\theta m} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \quad (36)$$

4.3.2 Función de energía libre de Helmholtz

En la definición de la energía libre de Helmholtz no es correcto emplear como variable libre el tensor elástico de Green - Lagrange en la configuración referencial ya que el mismo se ve afectado por el flujo plástico a través de la componente plástica del gradiente de deformaciones \mathbf{F}^p , por lo tanto es conveniente definir la energía libre de Helmholtz como:

$$\psi = \psi(\mathbf{e}^e; \theta; \alpha) \quad (37)$$

donde θ es la temperatura absoluta, \mathbf{e}^e es el tensor de deformaciones de Almansi y α un conjunto de variables de estado plásticas, como por ejemplo la cohesión entre partículas, la variable de endurecimiento, el ángulo de rozamiento interno, etc.

4.3.3 Hipótesis de elasticidad desacoplada

Un caso particular de la función de energía libre lo constituye la hipótesis de elasticidad desacoplada expresada mediante la ecuación:

$$\psi(\mathbf{e}^e; \theta; \alpha) = \psi^e(\mathbf{e}^e; \theta) + \psi^p(\alpha; \theta) \quad (38)$$

Esta hipótesis se basa en que los niveles de energía necesarios para distorsionar la red cristalina, responsable de la deformación elástica, son diferentes de los niveles de energía necesarios para el deslizamiento intercrystalino. Esta hipótesis ha sido utilizada por diversos autores y constituye la base de modelos computacionales propuestos, entre otros por (García Garino and Oliver, 1991) (García Garino and Oliver, 1992) (Lublimer, 1990) (Oller, 1989) (Luccioni et al., 1996).

Las variables libres del problema son la temperatura θ y la cuota elástica de la deformación de Almansi definida como:

$$\underline{\mathbf{e}}^e = \underline{\mathbf{e}} - \underline{\mathbf{e}}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) - \int_0^t \dot{\mathbf{e}}^p dt \quad (39)$$

donde \mathbf{e}^p es la deformación plástica en la configuración espacial, \mathbf{b} es el tensor izquierdo de Cauchy-Green, y $\dot{\mathbf{e}}^p$ representa la variación temporal de la deformación plástica en la configuración espacial.

4.3.4 Expresión de la disipación

La variación temporal de la energía libre se expresa como:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{e}^e} \mathbf{d}^e + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \quad (40)$$

donde $\mathbf{d}^e = L_v(\mathbf{e}^e)$ ⁴ representa la variación temporal de la cuota elástica de la deformación. Reemplazando la ec.(31) en la ec.(36) se obtiene la expresión de la disipación:

$$\Xi = -m\eta \dot{\theta} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{e}^e} \mathbf{d}^e + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \right) m + \sigma : \mathbf{d} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (41)$$

Operando la expresión de la disipación queda:

$$\Xi = \left[\sigma : \mathbf{d} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{e}^e} \mathbf{d}^e m \right] - m \dot{\theta} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \eta \right] - m \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (42)$$

Teniendo en cuenta la descomposición aditiva del tensor velocidad de deformación $\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$ (García Garino and Oliver, 1991) la ec.(42) queda:

$$\Xi = \left[\sigma - m \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{e}^e} \right] : \mathbf{d}^e - m \dot{\theta} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \eta \right] + \sigma : \mathbf{d}^p - m \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (43)$$

⁴Derivada de Lee. Ver Apéndice I

Expresión que recibe el nombre de desigualdad de Clausius-Duhem. Esta inecuación debe ser satisfecha para todos los posibles procesos. Puesto que tanto \mathbf{d} como θ representan variaciones temporales arbitrarias de las variables libres del problema, para garantizar el cumplimiento de la ec.(43) para un dado estado termodinámico, sus multiplicadores deben ser idénticamente nulos. De aquí surge la ecuación constitutiva del material:

$$\boldsymbol{\sigma} = m \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{e}^e} \quad ; \quad \eta = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (44)$$

Las ecs. (44) son las leyes constitutivas generales para todo tipo de materiales. Establecen que el estado tensional y la entropía se obtienen como la derivada de la función de energía libre respecto de la cuota de deformaciones elásticas de Almansi y la temperatura respectivamente, siendo necesario por ello definir la expresión de la función de energía libre.

4.3.5 Expresión de la energía libre. Particularización a pequeñas deformaciones elásticas y estados isotérmicos

Los materiales compuestos, a excepción de los materiales elastómeros, presentan deformaciones elásticas pequeñas. Esto conduce a que la parte elástica del tensor gradiente de deformaciones \mathbf{F}^e se aproxime a la unidad y la parte elástica del tensor izquierdo de Cauchy-Green $(\mathbf{b}^e)^{-1}$ tiende al tensor métrico espacial \mathbf{g} . En este caso la distinción entre configuración intermedia y deformada carece de importancia.

Sin embargo, las deformaciones plásticas continúan siendo finitas y es necesario mantener la presencia del tensor derecho de Cauchy-Green \mathbf{C} en la expresión material del modelo constitutivo. Si este tensor no se tiene en cuenta explícitamente se está definiendo un material diferente, matemáticamente válido pero se pierde validez física.

Para el caso de pequeñas deformaciones elásticas resulta suficiente caracterizar la componente elástica de la energía libre mediante una función cuadrática del tensor elástico de deformaciones de Almansi \mathbf{e}^e , esto es:

$$\psi^e = \frac{1}{2m} \mathbf{e}^e : \mathbf{c}^\sigma : \mathbf{e}^e \quad (45)$$

Teniendo en cuenta la hipótesis de elasticidad desacoplada (ec. 38), la expresión de la parte elástica de la energía libre (ec. 45) y la expresión del tensor constitutivo en el espacio anisótropo real en función del tensor isótropo ficticio (ec. 25) puede reescribirse como:

$$\psi = \frac{1}{2m} (\mathbf{e}^e : \mathbf{c} : \mathbf{e}^e) + \psi^p \quad (46)$$

$$\psi = \frac{1}{2m} \mathbf{e}^e : \left[(\mathbf{a}^\sigma)^{-1} : \bar{\mathbf{c}} : (\mathbf{a}^e) \right] : \mathbf{e}^e + \psi^p(\alpha) \quad (47)$$

Sustituyendo la ec.(47) en la ec.(44) se obtiene la ecuación constitutiva en el espacio anisótropo real definida en términos del tensor constitutivo en el espacio isótropo ficticio, esto es:

$$\boldsymbol{\sigma} = m \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{e}^e} = \left[(\mathbf{a}^\sigma)^{-1} : \bar{\mathbf{c}} : (\mathbf{a}^e) \right] : \mathbf{e}^e \quad (48)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[(\mathbf{a}^\sigma)^{-1} : \bar{\mathbf{c}} \right] : \bar{\mathbf{e}}^e = (\mathbf{a}^\sigma)^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (49)$$

donde $\bar{\mathbf{e}}^e$ representa la cuota de deformación elástica de Almansi en el espacio isótropo ficticio y $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ representa la tensión en el espacio isótropo ficticio.

4.4 Regla de flujo. Ley de evolución de las variables internas

La ley de evolución en el tiempo de la deformación plástica está dada por:

$$\mathbf{d}^p = \dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (50)$$

Teniendo en cuenta que toda la anisotropía del material está contenida en el tensor de transformación \mathbf{a}^σ , la función de potencial plástico para el sólido anisótropo resulta:

$$g(\boldsymbol{\sigma}; \alpha) = \bar{g}(\boldsymbol{\sigma}; \mathbf{a}^\sigma; \alpha) = \bar{g}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}; \alpha) = K \quad (51)$$

Reemplazando la ec.(51) en la ec.(50) el incremento de la cuota plástica de la deformación de Almansi resulta:

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \mathbf{a}^\sigma = \left(\dot{\bar{\mathbf{e}}} \right)^\sigma : \mathbf{a}^\sigma \quad (52)$$

donde $\left(\dot{\bar{\mathbf{e}}} \right)^\sigma$ es el flujo plástico normal al potencial isótropo \bar{g} .

La ley de evolución de la variable interna de endurecimiento plástico está dado por:

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} (\mathbf{h}^m)_\sigma : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} (\mathbf{h}^m)_\sigma : \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} (\mathbf{h}^m)_\sigma : \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \mathbf{a}^\sigma \quad (53)$$

donde $(\mathbf{h}^m)_\sigma$ es un tensor de segundo orden, función del estado de tensiones actualizado y de la variable de endurecimiento plástico también actualizada que en el caso más simple de la teoría de la plasticidad toma la forma del tensor de tensiones. La ley de evolución de la variable interna resulta:

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (54)$$

El concepto de aditividad de las deformaciones permite extender la regla de transformación de las deformaciones a la cuota plástica de las deformaciones, es decir:

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \mathbf{a}^e : \dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{a}^e : \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \mathbf{a}^\sigma = \mathbf{a}^e : \left(\dot{\bar{\mathbf{e}}} \right)^\sigma : \mathbf{a}^\sigma \quad (55)$$

donde $\dot{\bar{\mathbf{e}}}$ es la deformación plástica isótropa ficticia.

4.4.1 La disipación en el espacio isótropo ficticio. Unicidad de la disipación.

En este apartado se demuestra que la disipación es una invariante del proceso termodinámico, siendo su valor independiente si se la calcula en el espacio isótropo ficticio o en el espacio anisótropo real resultando equivalente escribir el modelo constitutivo en el espacio real anisótropo o en el espacio ficticio isótropo.

La disipación mecánica Ξ puede ser escrita en el espacio isótropo ficticio teniendo en cuenta las transformaciones:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{a}^\sigma : \boldsymbol{\sigma} \quad (56a)$$

$$\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{a}^e : \mathbf{e} \quad (56b)$$

La ley de flujo está expresada por:

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{a}^e : \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \mathbf{a}^\sigma \quad (57)$$

Teniendo en cuenta la ec.(43) la expresión de la disipación plástica en el espacio anisótropo real resulta:

$$\Xi_{mec}^\sigma = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}^p - m \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (58)$$

El primer término de la ec.(58) resulta teniendo en cuenta las transformaciones expresadas en la ec.(56a) y la ec.(56b) se tiene:

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{e}}^p = \left[(\mathbf{a}^\sigma)^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \right] : \left[(\mathbf{a}^e)^{-1} : \dot{\bar{\mathbf{e}}}^p \right]$$

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\lambda} (\mathbf{a}^\sigma)^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} : (\mathbf{a}^e)^{-1} : \mathbf{a}^e : \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \mathbf{a}^\sigma$$

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\lambda} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \left(\dot{\bar{\mathbf{e}}} \right)^\sigma \quad (59)$$

$$\Xi_{mec} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}^p - m \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \left(\dot{\bar{\mathbf{e}}} \right)^\sigma - m \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \equiv \bar{\Xi}_{mec} \geq 0 \quad (60)$$

De la ec.(60) se deduce que la disipación es una invariante del proceso termodinámico, siendo su valor independiente si se calcula en el espacio isótropo ficticio o en el espacio anisótropo real.

La expresión de la energía libre de Helmholtz en el espacio isótropo ficticio en un proceso isotérmico resulta:

$$\bar{\psi}(\bar{\mathbf{e}}^e; \alpha) = \frac{1}{2m} (\bar{\mathbf{e}}^e : \bar{\mathbf{c}} : \bar{\mathbf{e}}^e) + \bar{\psi}^p(\alpha^m) \quad (61)$$

La ec.(61) es equivalente a la expresión de la energía libre en el espacio anisótropo real (ec.(46)). La ecuación constitutiva en el espacio isótropo ficticio resulta:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = m \frac{\partial \bar{\psi}(\bar{\mathbf{e}}^e; \alpha)}{\partial \bar{\mathbf{e}}^e} = \bar{\mathbf{c}} : \bar{\mathbf{e}}^e \quad (62)$$

Teniendo en cuenta la ec.(25) y la ec.(56b) el tensor de tensiones de Cauchy en el espacio isótropo ficticio está dado por:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\mathbf{a}^\sigma : \mathbf{c}^\sigma : (\mathbf{a}^e)^{-1} \right] : (\mathbf{a}^e : \mathbf{e}^e)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{a}^\sigma : \mathbf{c}^\sigma : \mathbf{I} : \mathbf{e}^e$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{a}^\sigma : \mathbf{c}^\sigma : \mathbf{e}^e = \mathbf{a}^\sigma : \boldsymbol{\sigma} \quad (63)$$

La expresión anterior demuestra que teniendo en cuenta las transformaciones entre espacios, resulta equivalente escribir el modelo constitutivo en el espacio real anisótropo o en el espacio ficticio isótropo. Obviamente escribir los modelos constitutivos en el espacio isótropo ficticio permite utilizar las ventajas y algoritmos utilizados para el caso de materiales isótropos.

4.5 Ecuación constitutiva tangente

La ecuación constitutiva tangente se obtiene considerando la variación temporal de la tensión de Cauchy, esto es:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{kl}^e} \dot{e}_{kl}^e$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \bar{\sigma}_{rs}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{rs}}{\partial \bar{e}_{mn}^e} \frac{\partial \bar{e}_{mn}^e}{\partial e_{kl}^e} \dot{e}_{kl}^e$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = (a_{ijrs}^\sigma)^{-1} \bar{c}_{rsmn} a_{mnkl}^e \dot{e}_{kl}^e$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = (a_{ijrs}^\sigma)^{-1} \bar{c}_{rsmn} \left(\dot{\bar{e}}_{kl}^e - \dot{\bar{e}}_{kl}^p \right) \quad (64)$$

Esta ecuación es posible obtenerla también considerando la ec.(56a) que relaciona la tensión de Cauchy en el espacio isótropo ficticio y la tensión de Cauchy el espacio anisótropo real. Teniendo en cuenta en esta ecuación que el tensor de transformación entre espacios \mathbf{a}^σ se mantiene constante en el tiempo y la condición de consistencia plástica es posible obtener la ecuación constitutiva en el espacio isótropo ficticio, esto es:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = (\bar{\mathbf{c}})^{ep} : \dot{\bar{\mathbf{e}}} \quad (65)$$

donde $(\bar{\mathbf{c}})^{ep}$ representa el tensor constitutivo elastoplástico tangente en el espacio isótropo ficticio y está dado por:

$$\bar{c}_{ijkl}^{ep} = \bar{c}_{ijkl} - \frac{\left(\bar{c}_{ijrs} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\sigma}_{rs}} \right) \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\sigma}_{rs}} \bar{c}_{rskl} \right)}{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\sigma}_{pq}} c_{pqln} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\sigma}_{ln}} - \sum_n \frac{\partial f^\sigma}{\partial \alpha_s^m} (h_{tu}^m)_\sigma \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\sigma}_{tu}}} \quad (66)$$

Teniendo en cuenta la ec.(56a) que relaciona el tensor de tensiones en el espacio anisótropo real y el espacio isótropo ficticio es posible obtener la variación de tensión en el espacio anisótropo real como:

$$\dot{\sigma}_{ij} = (a_{ijkl}^\sigma)^{-1} \bar{c}_{klrs}^{ep} \dot{\bar{e}}_{rs} \quad (67)$$

Combinando la ec.(67) con la ec.(56b) y teniendo en cuenta que el tensor de transformación de espacios \mathbf{a}^e no depende del tiempo, se obtiene la expresión del tensor constitutivo elastoplástico anisótropo como:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \underbrace{(a_{ijkl}^\sigma)^{-1} \bar{c}_{klrs}^{ep} a_{rspq}^e}_{c_{ijpq}^{ep}} \dot{e}_{pq} \quad (68)$$

La ec. (68) muestra la expresión del tensor elastoplástico anisótropo, que resulta una función del tensor constitutivo elastoplástico tangente en el espacio isótropo ficticio.

El modelo constitutivo presentado necesita solamente a los fines de modelar el comportamiento constitutivo de un material compuesto altamente anisótropo definir las siguientes características del material en los espacios real anisótropo y ficticio isótropo:

- Espacio anisótropo real:
 - Tensor constitutivo inicial en coordenadas locales \mathbf{c}_{local}
 - Umbral de fluencia del material σ_{yield}
 - Tensor de rotaciones \mathbf{R}
- Espacio isótropo real
 - Función de fluencia $\bar{f}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \alpha) = 0$
 - Función de potencial plástico $\bar{g}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \alpha) = 0$
 - Umbral de fluencia del material $\bar{\sigma}_{yield}$

En la Figura 3 se observan las operaciones que se deben llevar a cabo para cada fase que constituye el material compuesto. La primera operación consiste transportar el tensor de deformaciones \mathbf{E} de la configuración referencial a la configuración actualizada utilizando las operaciones "push forward" (ver Apéndice I). La operación 2 consiste

calcular la tensión predictora $\boldsymbol{\sigma}^*$ y transportar los tensores de tensiones predictoras, deformaciones y constitutivo $\boldsymbol{\sigma}^*$, \mathbf{e} y \mathbf{c} de la configuración actualizada al espacio isótropo ficticio utilizando los tensores \mathbf{a}^σ y \mathbf{a}^e . En el espacio isótropo ficticio se procede a verificar si las tensiones en el material han superado el límite de proporcionalidad. En el caso haber superado el límite de fluencia se procede a la solución del problema elastoplástico. La solución del problema elastoplástico proporciona un nuevo estado tensional $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$. La operación 3 consiste en retornar del espacio isótropo ficticio al espacio anisótropo real este nuevo estado tensional $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ y el tensor constitutivo elastoplástico tangente $(\mathbf{c}^{\bar{\boldsymbol{\sigma}}})^{ep}$ utilizando los tensores $(\mathbf{a}^\sigma)^{-1}$ y $(\mathbf{a}^e)^{-1}$. En la operación se calculan las fuerzas residuales y se verifica el equilibrio global del sólido.

4.6 Integración de la ecuación constitutiva

El caso de materiales con comportamiento inelástico requiere la integración numérica de la ecuación constitutiva en una secuencia discreta de pasos de tiempo. (Simo and Taylor, 1985)

El resultado del algoritmo de integración es una función de respuesta no lineal que define el tensor de tensiones como una función de la historia de deformaciones hasta el paso de tiempo actual. Este algoritmo de integración permite tratar el problema elastoplástico fundamentalmente como un problema elástico equivalente en el paso de tiempo.

El operador tangente que interviene en el problema linealizado se debe obtener mediante una linealización de la función de respuesta consistente con el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva. La utilización de estos operadores tangentes preserva la convergencia cuadrática de esquemas de solución iterativos basados en métodos de Newton.

En el modelo constitutivo propuesto la integración de la ecuación constitutiva se realiza en el espacio isótropo ficticio. La integración de la ecuación constitutiva está basada en el concepto de "return mapping" utilizando el algoritmo de backward-Euler. En la resolución de problemas elastoplásticos que incluyen ecuaciones constitutivas incrementales la consistencia entre el operador tangente y el algoritmo de integración empleado en la solución del problema incremental juega un papel fundamental. En el modelo propuesto se han utilizado estos operadores tangentes que preservan la convergencia cuadrática de esquemas de solución iterativos basados en métodos de Newton.

5 MODELO CONSTITUTIVO DEL COMPUESTO

El modelo elastoplástico anisótropo en régimen de grandes deformaciones, presentado en el apartado anterior, constituye uno de los modelos "base" que se utilizan en la teoría de mezclas. En particular para el caso de materiales compuestos reforzados con fibras largas se consideran un modelo constitutivo para cada fase: fibra y matriz. El comportamiento de la matriz se simula con un modelo constitutivo elastoplástico

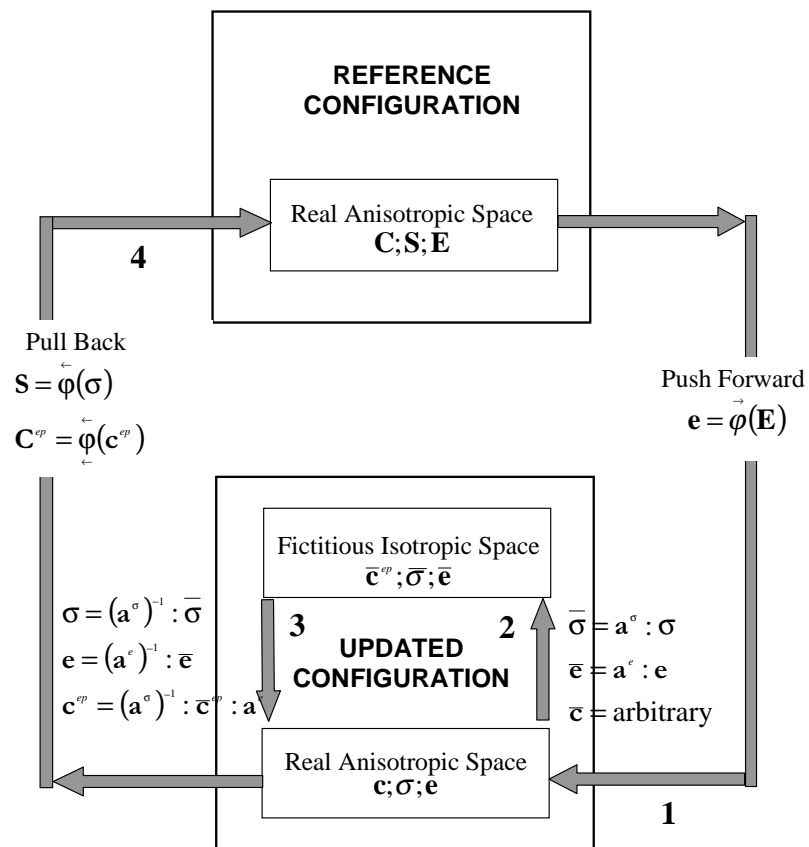


Figura 3: Esquema del modelo constitutivo elastoplástico anisótropo en deformaciones finitas

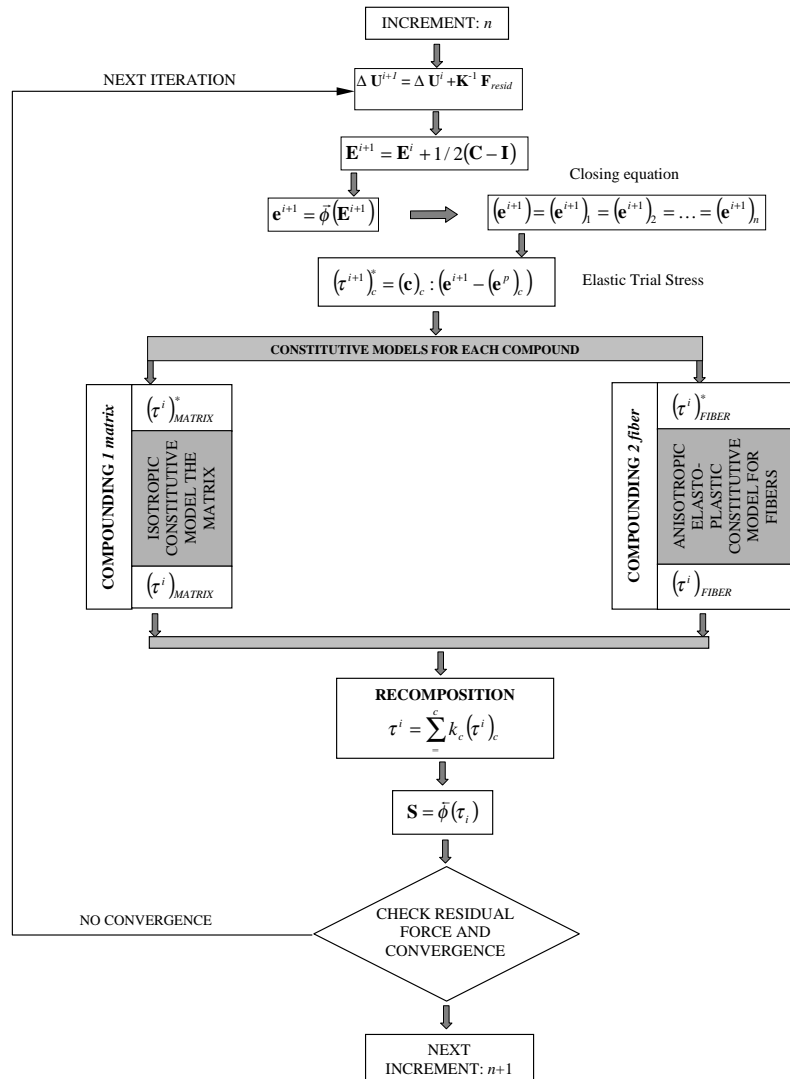


Figura 4: Modelo constitutivo para materiales compuestos reforzados con fibras

isótropo clásico y el modelo constitutivo elastoplástico anisótropo se utiliza para simular el comportamiento del refuerzo.

En la Figura 4 se observa un esquema de solución de un problema no lineal bifase en el que una de las fases esta constituida por un material anisótropo y la fase restante es un material isótropo.

6 IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

En esta sección se presentan los pasos necesarios para la implementación del modelo constitutivo propuesto en un código de elementos finitos standard.

Box 1: Implementación numérica

- Definición de los tensores de fluencia en el espacio anisótropo real e isotropo ficticio para cada fase del material compuesto.

$$\bar{\mathbf{f}}; \mathbf{f}$$

- Definición del tensor constitutivo en el espacio anisótropo real, del tensor constitutivo isotropo ficticio y del tensor de rotaciones para cada fase del material compuesto.

$$\bar{\mathbf{c}}; (\mathbf{c})_{loc}; \mathbf{R}$$

- Cálculo del tensor constitutivo anisótropo en el sistema de coordenadas globales para cada fase del material compuesto.

$$\mathbf{c} = \mathbf{R} : (\mathbf{c})_{loc} : \mathbf{R}$$

- Definición de los tensores de mapeo de espacios para cada fase del material compuesto.

$$\mathbf{a}^\sigma = \bar{\mathbf{f}} \otimes (\mathbf{f})^{-1} \quad ; \quad \mathbf{a}^e = (\bar{\mathbf{c}})^{-1} : \mathbf{a}^\sigma : \mathbf{c}$$

- Cálculo de los tensores constitutivos isotropos y anisótropo del compuesto de acuerdo con la teoría de mezclas de sustancias.

$$\mathbf{c} = \sum_{c=1}^n k_c (\mathbf{c})_c \quad ; \quad \bar{\mathbf{c}} = \sum_{c=1}^n k_c (\bar{\mathbf{c}})_c$$

- ★ LOOP OVER INCREMENTO DE CARGAS n=1, Max. Incr.. de cargas

- LOOP OVER ITER. DE EQUILIBRIO: i=1, Max. núm. de iter.

1. Cálculo de la matriz de rigidez.

$${}^n [K^{(e)}]^i \Rightarrow {}^n (K)^i = \mathbb{A}_{e=1}^{nelem} [K^{(e)}]^i$$

2. Cálculo del incremento de deformaciones en la configuración referencial

$${}^n (\Delta U)^{i+1} = \left[{}^n (K)^i \right]^{-1} \cdot (F_{resid})^i \quad ; \quad {}^n (U)^{i+1} = {}^n (\Delta U)^i + {}^n (\Delta U)^{i+1}$$

$${}^n (\mathbf{E})^{i+1} = 1/2 (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

3. Push-forward del tensor de deformaciones a la configuración actualizada

$${}^n (\mathbf{e})^{i+1} = \overrightarrow{\phi} \left[{}^n (\mathbf{E})^{i+1} \right]$$

Box 1: Implementación numerica (continuación)

4. Integración de la ecuación constitutiva en la configuración actualizada

♣ LOOP SOBRE CADA FASE DEL MATERIAL COMPUESTO:
j=1,NCOMP

(a) Cálculo de la tensión predictora.

$$\left[n (\boldsymbol{\sigma}^*)^{i+1} \right]_c = [\mathbf{c}]_c : \left[n (\mathbf{e})^{i+1} - n (\mathbf{e}^p) \right]$$

(b) Transformación de la tensión predictora al espacio isótropo ficticio.

$$\left[n (\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*)^{i+1} \right]_c = [\mathbf{a}^\sigma]_c : \left[n (\boldsymbol{\sigma}^*)^{i+1} \right]_c$$

(c) Integración de la ecuación constitutiva.

$$\left[n (\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*)^{i+1} \right]_c \Rightarrow \left[n (\bar{\boldsymbol{\sigma}})^{i+1} \right]_c$$

$$n [(\bar{\mathbf{c}})^{ep}]_c^{i+1} = \left[\bar{\mathbf{c}} - \frac{(\bar{\mathbf{c}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}) \otimes (\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}; \bar{\mathbf{c}})}{\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}; \bar{\mathbf{c}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \sum_n \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial \alpha_s^m} : (\mathbf{h}^m)_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right]_c$$

(d) Transformación de los tensores de tensiones y constitutivo elastoplástico tangente al espacio anisótropo real.

$$\left[n (\boldsymbol{\sigma})^{i+1} \right]_c = \left[(\mathbf{a}^\sigma)^{-1} \right]_c : \left[n (\bar{\boldsymbol{\sigma}})^{i+1} \right]_c$$

$$n [(\mathbf{c})^{ep}]_c^{i+1} = \left[(\mathbf{a}^\sigma)^{-1} \right]_c : n [(\bar{\mathbf{c}})^{ep}]_c^{i+1} : (\mathbf{a}^e)_c$$

♣ END LOOP SOBRE CADA FASE DEL MATERIAL COMPUESTO

5. Cálculo de las tensiones y el tensor constitutivo de acuerdo con la teoría de mezclas de sustancias.

$$n (\boldsymbol{\sigma})^{i+1} = \sum_{i=1}^{ncomp} k_c \left[n (\boldsymbol{\sigma})^{i+1} \right]_c$$

$$n [(\mathbf{c})^{ep}]_c^{i+1} = \sum_{i=1}^{ncomp} k_c \left[n [(\mathbf{c})^{ep}]_c^{i+1} \right]_c$$

6. Pull back de las tensiones y del tensor constitutivo elastoplástico a la configuración referencial

$$n (\mathbf{S})^{i+1} = \overleftarrow{\phi} n (\boldsymbol{\sigma})^{i+1}$$

$$n (\mathbf{C})^{i+1} = \overleftarrow{\phi} n (\mathbf{c})^{i+1}$$

7. Cálculo de las fuerzas residuales en la configuración referencial.

$$n \left[F_{resid}^{(e)} \right]^{i+1} \Rightarrow n (F_{resid})^{i+1} = \mathbb{A}_{e=1}^{nelem} \left[F_{resid}^{(e)} \right]^{i+1}$$

If $\|F_{resid}\| > 0? \Rightarrow i = i + 1$ Go back to (1)

else solución convergida para el incremento n

$n = n + 1$ Nuevo incremento de carga

• END LOOP SOBRE CADA ITERACION DE EQUILIBRIO

★ END LOOP SOBRE CADA INCREMENTO DE CARGA

STOP

7 EJEMPLOS NUMERICOS

7.1 Descripción general

En este apartado se presentan diversos ejemplos de aplicación de la formulación que combina la teoría de mezclas y el modelo anisótropo descrito en el apartado 4. Los ejemplos consisten en simular numéricamente un ensayo sobre probetas de material compuesto sometidas a un estado de tracción. Las simulaciones se han realizado empleando una malla de elementos finitos rectangulares de 4 nodos con un total de 1988 elementos, 2097 nodos y 4194 grados de libertad. Esta malla resulta similar a la utilizada en estudio realizado por la European Space Agency (Stavriniadis, 1985). (ver Figura 6).

En cada una de las simulaciones numéricas se presentan los resultados obtenidos utilizando el modelo constitutivo previamente descrito y considerando el conjunto de propiedades mecánicas de cada uno de los materiales constituyentes del material compuesto. Los resultados que se presentan se dividen en dos grupos:

- Resultados gráficos, en los cuales se presentan la deformada de la pieza así como isoáreas de los estados finales tensionales, de plasticidad y de deformaciones.
- Resultados cuantitativos, en los cuales se detalla en curvas $X - Y$ el nivel de fuerzas en el extremo superior y los desplazamientos, contrastados con resultados experimentales, así como también la magnitud de la apertura en la zona de la entalladura respecto del desplazamiento en el extremo de la probeta, comparada con mediciones experimentales. Los datos experimentales se han obtenido del ESI Project Nb ED/83-383/RD/MS y ED/84-415/RD/MS (Stavriniadis, 1985) y de los ensayos realizados por la European Space Agency (DFVLR, 1983).

La resina se comporta como un material isótropo con una ley de comportamiento elastoplástico, mientras que las fibras se comportan como un material elastoplástico anisótropo (DFVLR, 1983). A los fines de simular el comportamiento del material compuesto se utilizan dos modelos "base" en el contexto de la teoría de mezclas, uno para la matriz y el restante para la fase de refuerzo.

Se considera que la probeta está sometida a un desplazamiento impuesto en la parte superior de la misma generándose un estado de tracción. En ambos extremos de la probeta los grados de libertad se encuentran prescritos. El objetivo principal es demostrar la capacidad del modelo constitutivo para representar el comportamiento de los materiales compuestos sometidos a esfuerzos de tracción.

7.2 Ensayo a tracción de probetas entalladas con fibras unidireccionales

El ensayo se realiza sobre probetas de carbono-epoxi **T300/914C** que presentan una entalladura en la zona central de la misma. El refuerzo está constituido por fibras de carbono orientadas a diversos ángulos respecto del eje longitudinal de la probeta.

Este ensayo consiste en imponer a la pieza un desplazamiento creciente en la parte superior de la misma generando un estado tensional de tracción. En la Figura 5 se observan las dimensiones de la probeta y un detalle de la zona central en la que se destaca los puntos en los cuales se realizaron las mediciones que determinan la apertura de la entalla respecto del desplazamiento del borde superior.

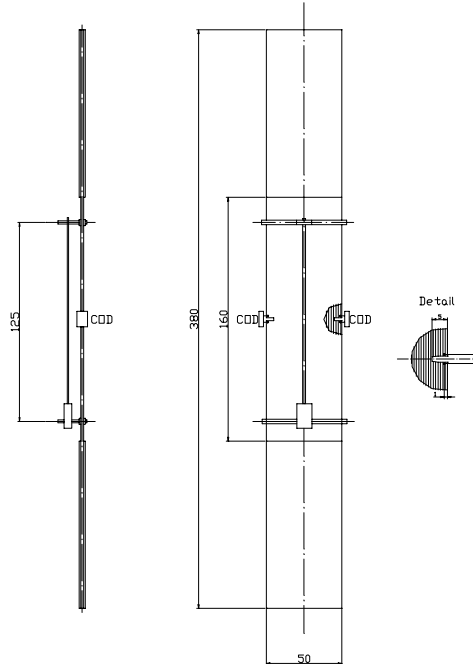


Figura 5: Dimensiones de la probeta. Detalle de la zona central

En la zona central donde se encuentran las entallas se generan zonas de concentración de tensiones, creándose perturbaciones locales en la matriz y generándose estados tensionales que superan el límite elástico de la matriz. En el caso de probetas con refuerzo unidireccional la fisura comienza y se propaga siempre en la matriz y, a diferencia de otros ensayos realizados sobre probetas de un material isótropo homogéneo esta fisura tiende a propagarse paralela a la dirección de las fibras.

Las orientaciones de la fibras de carbono en las distintas probetas ensayadas son 0° , 10° , 45° y 90° respecto del eje longitudinal de la probeta.

Los resultados experimentales se encuentran resumidos en el ESI Project Nb ED/83-383/RD/MS y ED/84-415/RD/MS Volumen 7: Final Synthesis Report (Stavrinidis, 1985).

Módulo de Young	13000 <i>Mpa</i>
Coefficiente de Poisson	0,325
Tensión de fluencia	43,323 <i>Mpa</i>
Ley de comportamiento posterior a la fluencia	exponencial con ablandamiento
Energía de fractura	5 <i>N/m</i>
V_m	52,5%

Tabla 1: Propiedades resina epoxi

Módulo de Young	239.551 <i>Mpa</i>
Coefficiente de Poisson	0,0
Tensión de fluencia	300 <i>Mpa</i>
Ley de comportamiento posterior a la fluencia	lineal con endurecimiento
V_f	47,5%

Tabla 2: Propiedades fibra de carbono

7.3 Ensayo de probetas T300/914C con fibras orientadas a 0° respecto al eje longitudinal.

Este ensayo consiste en someter a una probeta de carbono-epoxi con fibras orientadas según el eje longitudinal de la probeta a un desplazamiento impuesto en la parte superior de la misma. Las propiedades del material empleadas en el análisis numérico se resumen en las Tablas 1 y 2.

Se considera que la resina se comporta como un material isótropo con una ley de comportamiento elastoplástico.. Las propiedades mecánicas de la resina epoxi se pueden observar en la Tabla 1.

Se considera que las fibras se comportan como un material elastoplástico anisótropo. Las propiedades mecánicas de las fibras utilizadas en la simulación numérica se resumen la Tabla 2.

Se ha realizado un análisis incremental considerando un total de 30 incrementos de desplazamiento, resultando en un desplazamiento impuesto en la zona superior de 0,385*mm*.

En las Figuras 7 y 8 se presenta la deformada de la probeta en el estado final y un detalle de la deformada en la zona central que presenta la entalladura respectivamente. Estas figuras presentan un factor de amplificación de los desplazamientos de 50 que permite apreciar adecuadamente los fenómenos más importantes que se presentan en el análisis.

En la Figura 7 se observa claramente que debido a la posición vertical de la fibra de carbono las caras exteriores de la probeta no presentan desviaciones respecto del eje vertical de la probeta, situación que si se produce cuando la fibra presenta un ángulo respecto al eje longitudinal de la probeta (Ver ensayos con fibras a 10° y 45° Figuras 17 y 26). Se observan que se producen cuatro fisuras que comienzan en la raíz de las

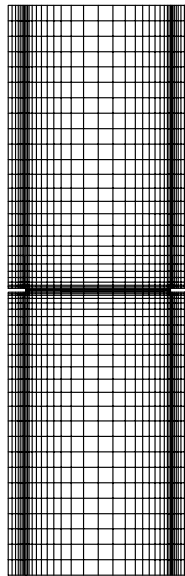


Figura 6: Malla de elementos finitos empleada en el análisis

entallas y progresan según el eje longitudinal de la probeta coincidente con la dirección de las fibras de carbono. Este fenómeno se puede apreciar con más detalle en la Figura 8. En la misma se muestra la zona de origen de dos pares de fisuras que nacen en la raíz de cada entalla y se propagan en la dirección del eje longitudinal de la probeta.

En la Figura 9 se presentan los contornos del módulo de los desplazamientos. Se observa que en la zona central de la probeta comprendida entre ambas entallas el campo de desplazamiento presenta una variación suave, existiendo cuatro zonas claramente diferenciadas en las cuales el campo de desplazamientos presenta una variación fuerte. Estas zonas comienzan en la raíz de cada una de las entallas y progresan paralelamente al eje longitudinal de la probeta coincidente con la dirección de las fibras.

En la Figura 10 se observan las isoáreas de la variable interna de plasticidad para el compuesto que indican las zonas en las cuales se ha producido deformación plástica. Se muestra que las zonas más afectadas se encuentran en la raíz de las entallas debido a la concentración de tensiones en esa zona y que la plasticidad progresa en forma paralela al eje longitudinal de la probeta.

En la Figura 11 se presenta un contorno de las zonas donde se ha producido el fenómeno de debonding o despegue de las fibras respecto de la matriz. Uno de los motivos del comportamiento no lineal de los materiales compuestos reforzados con fibras se debe al fenómeno de formación de grietas en la matriz y el consiguiente deslizamiento o movimiento relativo entre fibra y matriz. Este fenómeno de agrietamiento de la matriz y deslizamiento entre fibra y matriz reduce la rigidez del material e induce

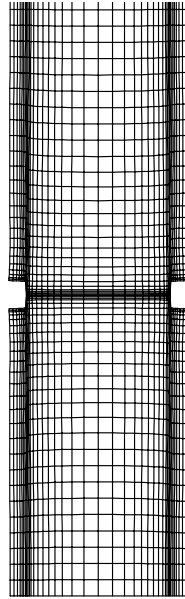


Figura 7: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0° . Deformada 50:1

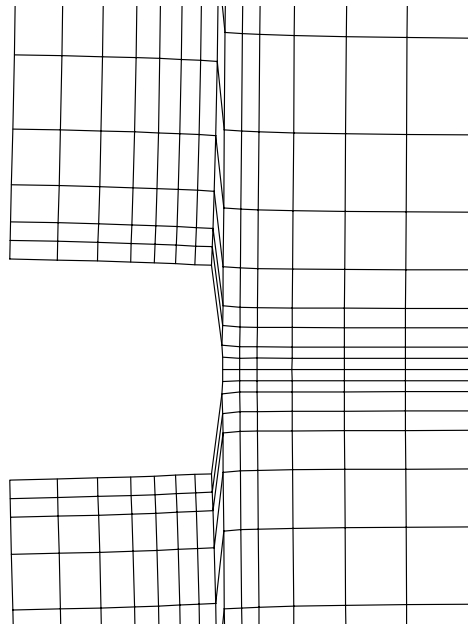


Figura 8: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0° . Detalle deformada en la entalladura

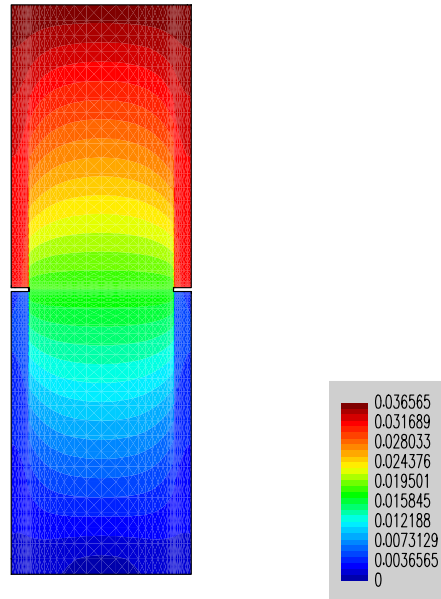


Figura 9: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0° . Contorno de desplazamientos

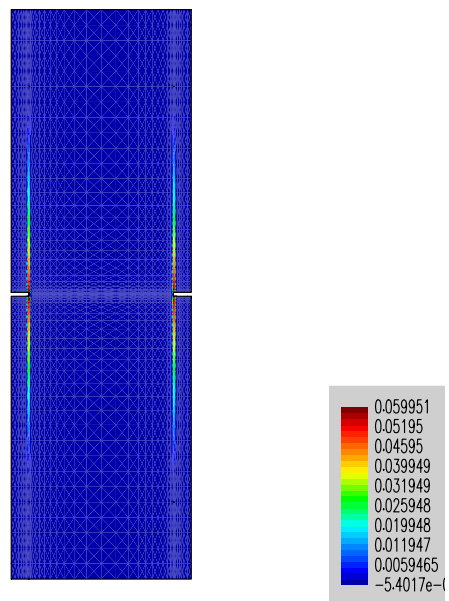


Figura 10: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0° . Contorno variable interna de plasticidad

deformaciones inelásticas o no recuperables. Este fenómeno se tiene en cuenta en la simulación numérica limitando la capacidad de carga de la fibra debido a la imposibilidad de la matriz de transmitirle carga. En trabajos futuros se analizará con mayor detalle este fenómeno. En Figura 11 se observa como el fenómeno progresa desde la raíz de las entallas, debido a la concentración de tensiones en la zona, hacia el centro de la probeta. El fenómeno de despegue de la fibra respecto de la matriz impide que las fibras alcancen la tensión máxima de fluencia de las mismas ya que la matriz no es capaz de transferir los esfuerzos a la fibra, observándose un cambio en la pendiente de la curva Carga - Desplazamiento. (ver Figura 15)

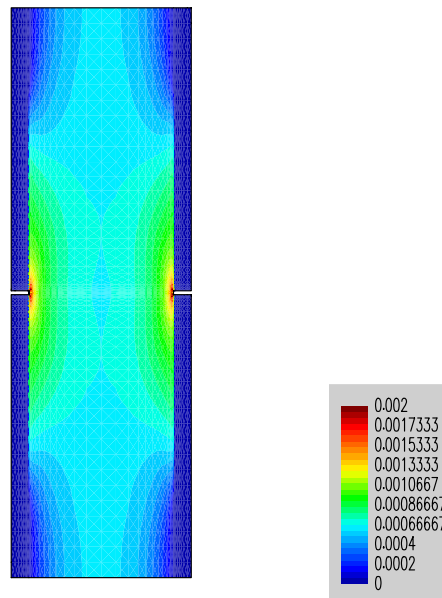


Figura 11: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0° . Contorno de plasticidad en la fibra

En las Figura 12 y 13 se observan los contornos de tensiones en la dirección XX e YY respectivamente del material compuesto. Se muestra la concentración de tensiones que se produce en la zona de las entallas así como los cambios que se producen en el estado tensional en la zona de la fisura. En la Figura 13 se observa un detalle de la zona fisurada en la probeta así como la redistribución del estado tensional en la zona final de la fisura.

En la Figura 14 se observan un detalle en la zona de la entalla de las isoáreas de tensión el la dirección paralela al eje longitudinal de la probeta en la fibra.

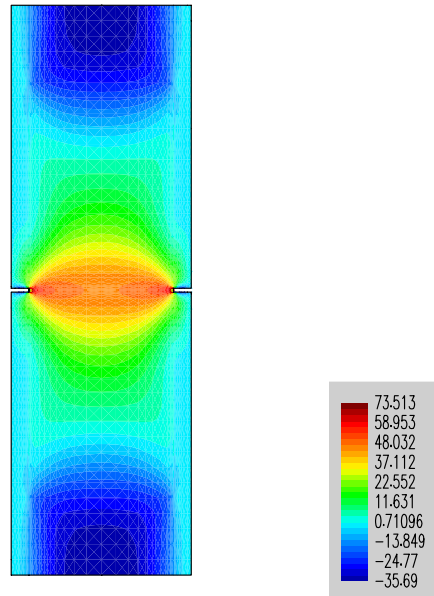


Figura 12: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0° . Contorno de tensiones XX en el compuesto

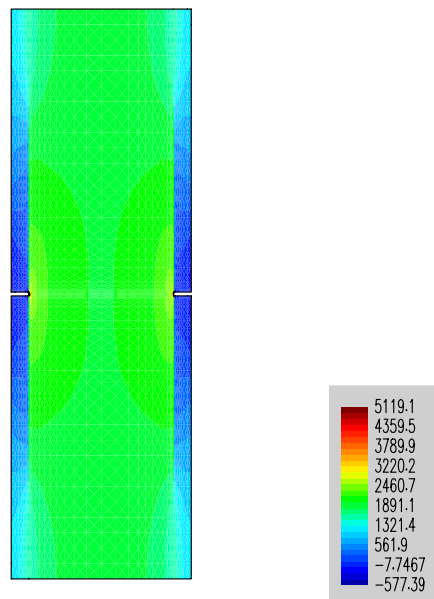


Figura 13: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0° . Contorno de tensiones YY en el compuesto

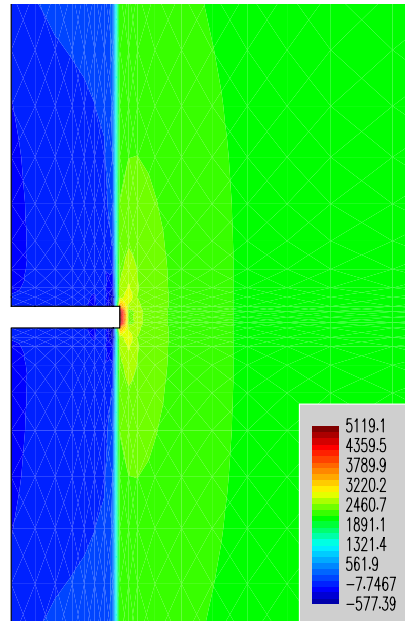


Figura 14: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0° . Contorno de tensiones YY en la fibra

7.3.1 Comprobación numérico-experimental

En este apartado se presentan algunos resultados numéricos del análisis realizado y se los contrasta con datos experimentales. El análisis experimental se ha llevado a cabo sobre 6 probetas T300/914C con fibra orientada a 0° respecto del eje longitudinal de la probeta.

Los resultados de las mediciones efectuadas durante el ensayo y los resultados obtenidos en la simulación numérica se observan en las Figuras 15 y 16. En la primera de las curvas se ha graficado la fuerza necesaria en el nivel superior de la probeta en función del desplazamiento en la parte superior de la probeta.

La Figuras 15 y 16 muestran la comparación entre los resultados experimentales, los resultados obtenidos con el modelo propuesto considerando un comportamiento elástico lineal y un comportamiento elastoplástico del material compuesto. La simulación numérica considerando un comportamiento elástico lineal constituye la envolvente de las respuestas.

A niveles de carga elevados se observa un fenómeno no lineal en los ensayos experimentales relacionado con el problema de despegue entre fibra y matriz. La simulación numérica detecta con un acuerdo notable respecto de los resultados experimentales el comienzo de este fenómeno. En la Figura 16 se observa las curvas entre el desplazamiento en la parte superior de la probeta y la apertura de la entalla en la zona central. Se define como COD (Crack Opening Displacement) la apertura de la entalla medida

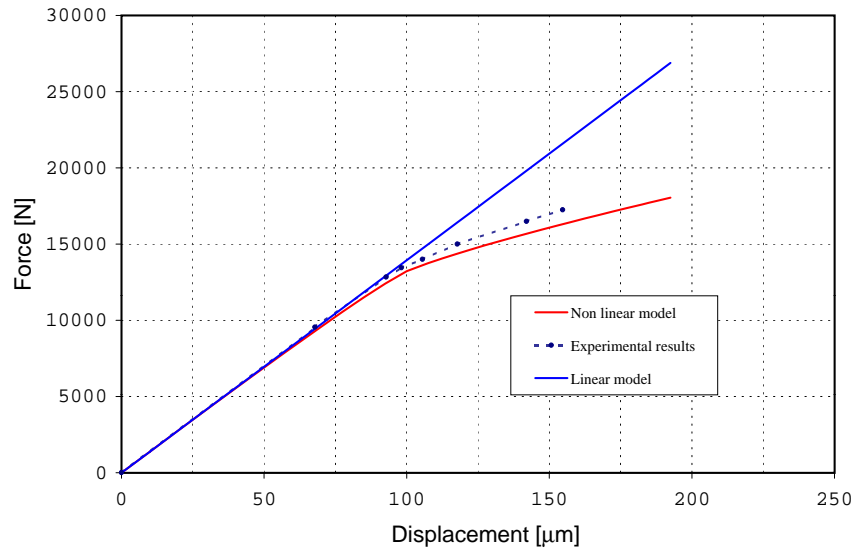


Figura 15: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0° . Curva Carga - Desplazamientos en la parte superior.

a $1,5\text{mm}$. del eje longitudinal de la entalla hacia la parte superior y a $1,5\text{mm}$. del eje longitudinal de la entalla hacia la zona inferior de la probeta y a 1mm . desde el borde exterior de la probeta. (Ver Figura 5)

Se observa en la Figura 16 que los resultados experimentales muestran una apertura inferior de la fisura para desplazamientos en la parte superior de la probeta comprendidos entre $0\mu\text{m}$. y $125\mu\text{m}$. y a partir de aquí los resultados experimentales son superiores a los obtenidos con el modelo analítico. A pesar de la pequeñas diferencias se resalta que los resultados analíticos presentan un acuerdo satisfactorio con los resultados obtenidos en laboratorio.

7.4 Ensayo de probetas de T300/914C con fibras orientadas a 10° respecto al eje longitudinal.

Este ensayo consiste en someter a una probeta de carbono-epoxi con fibras orientadas a 10° según el eje longitudinal de la probeta a un desplazamiento impuesto en la parte superior de la misma. Las propiedades de los materiales empleados en el análisis numérico se pueden observar en las Tablas 1y 2.

Se ha realizado un análisis incremental considerando un total de 50 incrementos de desplazamiento, resultando en un desplazamiento impuesto en la zona superior de $0,59\text{mm}$.

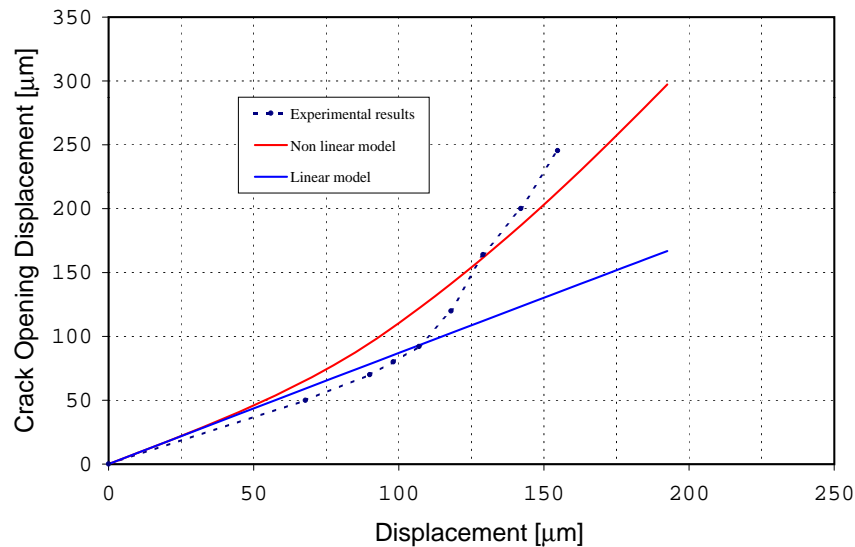


Figura 16: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0°. Curva COD - Desplazamientos parte superior de la probeta

En la Figura 17 se presenta la deformada de la probeta en el estado final. Esta figura presenta un factor de amplificación de los desplazamientos de 30 que permite apreciar adecuadamente los fenómenos más importantes que se presentan en el análisis. En la Figura 17 se muestra que debido a la posición de la fibra de carbono las caras exteriores de la probeta presentan desviaciones respecto del eje vertical de la probeta, debido a una tendencia de las fibras a orientarse en la dirección del esfuerzo aplicado.

En la Figura 18 se observan los contornos del módulo de los desplazamientos. En la misma se observa que el campo de desplazamientos presenta una discontinuidad fuerte en la zona central. En esta zona se genera una fisura con una orientación coincidente con la de la fibra de refuerzo.

En la Figura 19 se presentan las isoáreas de la variable interna de plasticidad para el compuesto que indican las zonas en las cuales se ha producido deformación plástica. Se observa que debido a las condiciones de contorno impuestas se generan deformaciones plásticas en la zona superior derecha e inferior izquierda de la probeta y progresa en forma paralela a la orientación de las fibras.

La Figura 20 muestra la deformación plástica del compuesto en la dirección del eje longitudinal de la probeta. Se observa que se generan deformaciones plásticas en el borde superior derecho e inferior izquierdo y progresa hacia el centro de la probeta.

En las Figuras 21 y 22 se presentan los contornos de las tensiones en las direcciones XX e YY. En las mismas se observa la marcada direccionalidad en la respuesta del

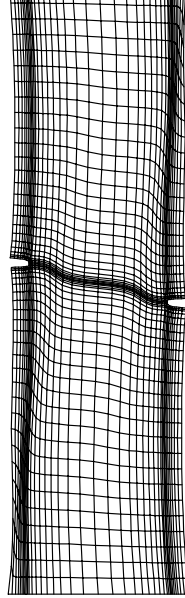


Figura 17: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10° . Deformada 25:1

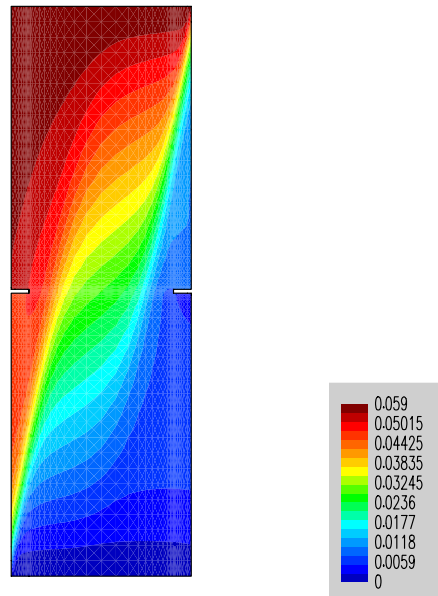


Figura 18: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10° . Contorno de desplazamientos

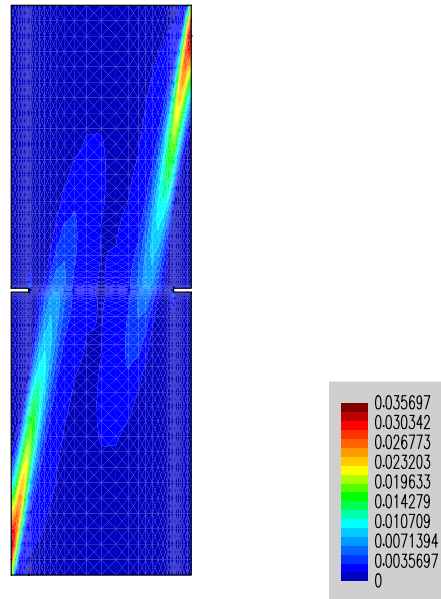


Figura 19: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10° . Contorno variable interna plasticidad.

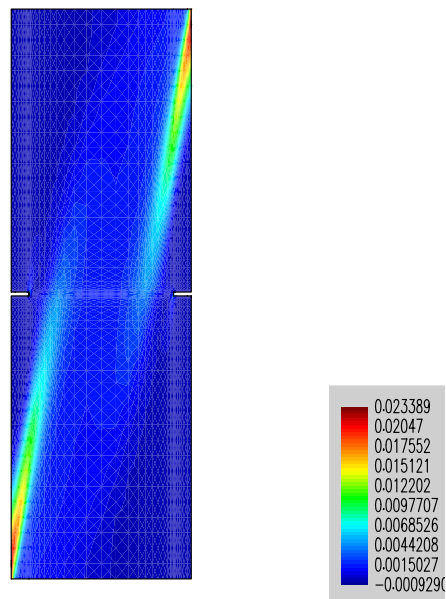


Figura 20: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10° . Contorno de deformación plástica YY

material compuesto.

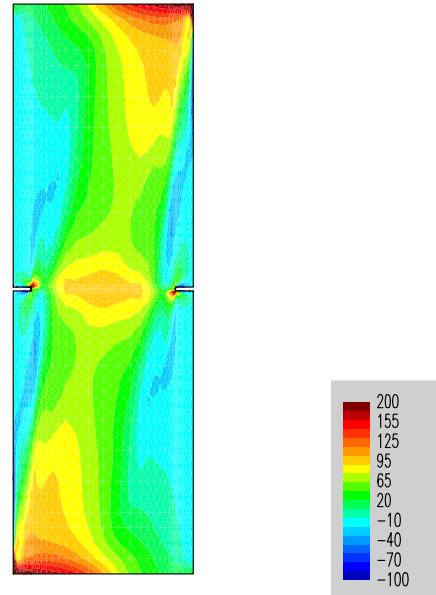


Figura 21: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10°. Contorno tensiones XX

7.4.1 Comprobación numérico-experimental

En este apartado se presentan algunos resultados numéricos del análisis realizado y se los contrasta con datos experimentales. El análisis experimental se ha llevado a cabo sobre 6 probetas T300/914C con fibra orientada a 10° respecto del eje longitudinal de la probeta.

Los resultados de las mediciones efectuadas se observan en la Figuras 23, 24 y 25. En la primera de las curvas se ha graficado la fuerza necesaria en el nivel superior de la probeta en función del desplazamiento en la parte superior de la probeta.

La Figuras 23, 24 y 25 muestran la comparación entre los resultados experimentales, los resultados obtenidos con el modelo propuesto considerando un comportamiento elástico lineal y un comportamiento elastoplástico del material compuesto. La simulación numérica considerando un comportamiento elástico lineal constituye la envolvente de las respuestas.

En este caso los resultados analíticos presentan una notable concordancia con los obtenidos experimentalmente, salvo el caso de la curva de la Figura 24 en la cual puede observarse una apertura excesiva en la zona de la entalla en el lado derecho de la probeta. Es necesario destacar que en los resultados obtenidos en el ensayo experimental el comportamiento de la probeta no muestran simetría, presentándose

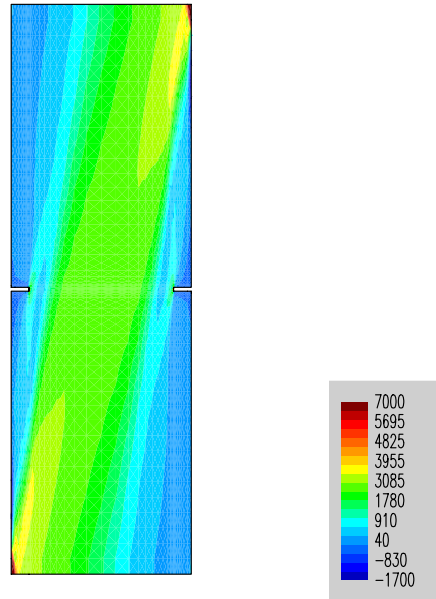


Figura 22: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10°. Contorno de tensiones YY

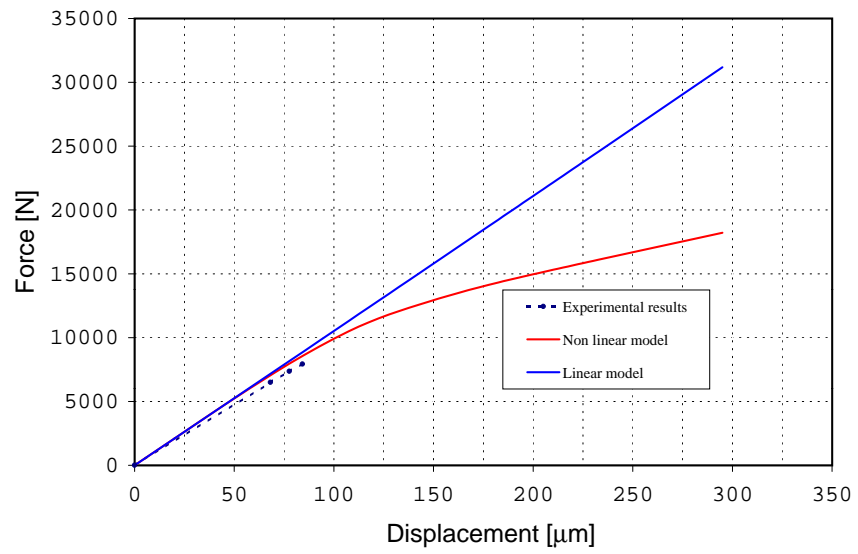


Figura 23: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10°. Curva Carga - Desplazamientos parte superior de la probeta

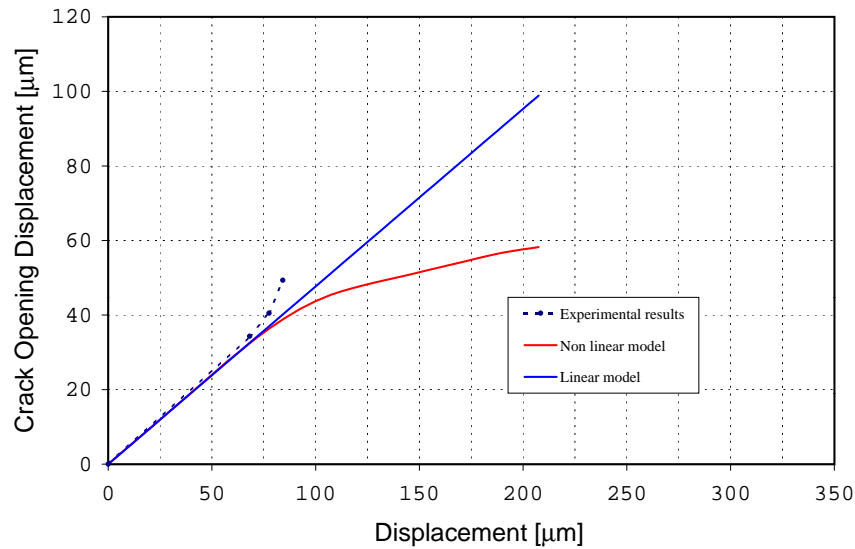


Figura 24: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10° . Curva COD lado derecho - Desplazamientos parte superior de la probeta.

diferencias entre los resultados de la apertura en la zona de la entalla para el lado izquierdo como para el lado derecho. Este fenómeno no se observa en la simulación numérica, según la cual la deformada presenta simetría y los valores de la apertura de la entalla resultan iguales para ambos lados de la probeta. Este fenómeno que se detecta en el ensayo experimental podría deberse a factores tales como errores en la medición o presencia de discontinuidades en el material.

En la Figura 24 se observa una comparación entre los resultados de la simulación numérica y los experimentales obtenidos para el lado derecho de la probeta. Se observa un aumento no gradual de los desplazamientos en los resultados experimentales en la etapa final del ensayo. En la Figura 25 se observa que la simulación numérica presenta una concordancia elevada con los resultados experimentales.

7.5 Ensayo de probetas de T300/914C con fibras orientadas a 45° respecto al eje longitudinal

Este ensayo consiste en someter a una probeta de carbono-epoxi con fibras orientadas a 45° según el eje longitudinal de la probeta a un desplazamiento impuesto en la parte superior de la misma. Las propiedades de los materiales empleados en el análisis numérico se pueden observar en las Tablas 1y 2.

Se ha realizado un análisis incremental considerando un total de 50 incrementos

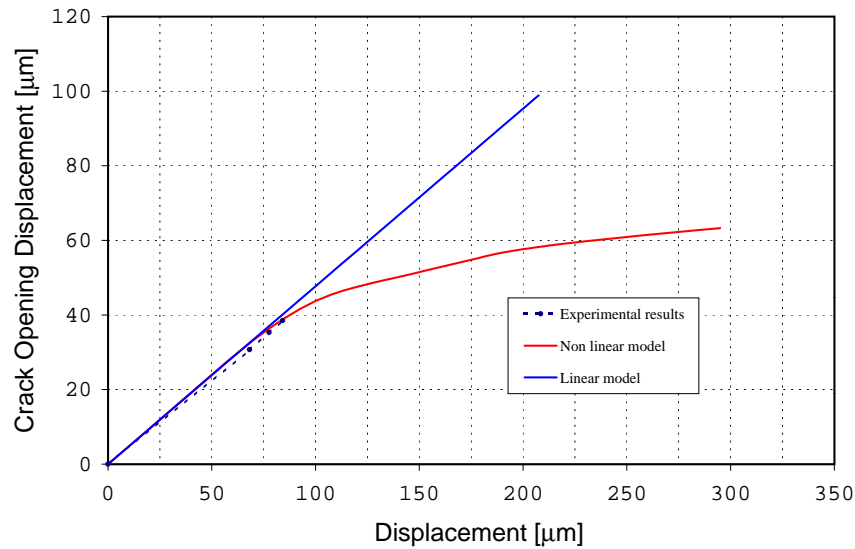


Figura 25: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10° . Curva COD lado izquierdo - Desplazamientos parte superior de la probeta

de desplazamiento, resultando en un desplazamiento impuesto en la zona superior de $0,59\text{mm}$.

En las Figuras 26 y 27 se presenta la deformada de la probeta y un detalle de la deformada en la zona de la entalladura. Estas figuras presentan un factor de ampliación de los desplazamientos de 25 que permite apreciar adecuadamente la forma final de la probeta.

Debido a la presencia de las fibras de refuerzo a 45° respecto del eje longitudinal de la pieza se observa la falta de verticalidad de los laterales de la probeta así como una tendencia de las fibras a orientarse en la dirección del esfuerzo aplicado.

En la Figura 28 se presentan los contornos del módulo de los desplazamientos. En la misma se aprecia una localización de las deformaciones en la zona central de la probeta que surgen desde la raíz de las entallas con una inclinación a 45° respecto al eje longitudinal de la probeta.

Este fenómeno concuerda con los resultados experimentales, ya que en los mismos se observa el progreso de las fisuras coincidente con la dirección de las fibras de refuerzo.

En la Figura 29 se observan los contornos de la variable interna de plasticidad. En la misma se aprecia que el fenómeno de plasticidad está asociado a la matriz del material compuesto y que se desarrolla con una dirección coincidente con el ángulo a -45° respecto del eje longitudinal de la probeta, no coincidente con la dirección de las fibras. Este fenómeno se produce por el hecho de que al intentar alinearse las fibras con

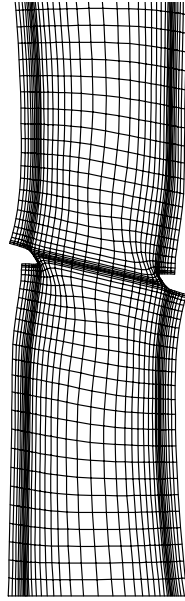


Figura 26: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45° . Deformada 25:1

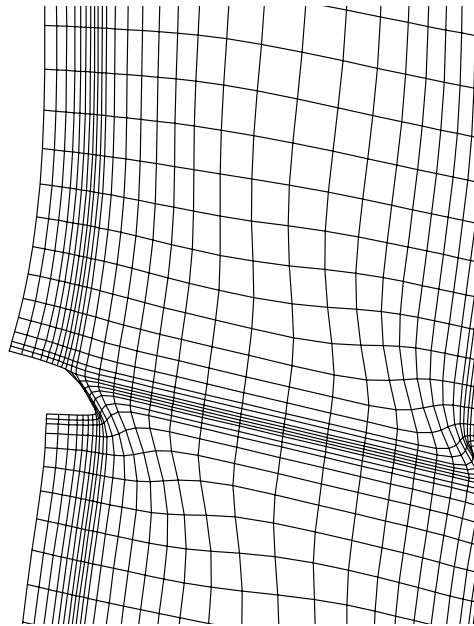


Figura 27: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45° . Detalle de la deformada en la entalladura

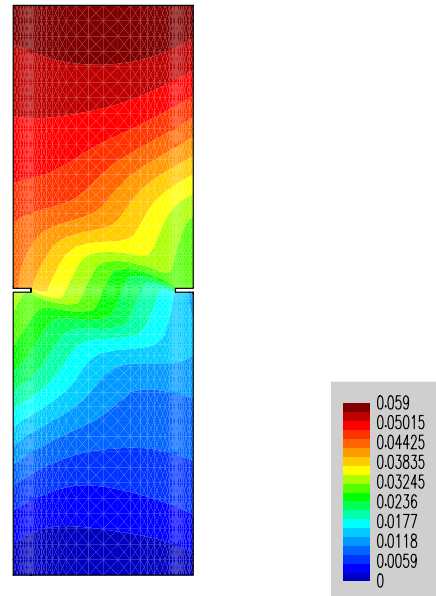


Figura 28: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45° . Contorno de desplazamientos

la dirección del esfuerzo principal se producen en la matriz estados tensionales elevados que generan deformaciones plásticas, produciéndose un fenómeno de despegue de las fibras respecto de la matriz.

7.5.1 Comprobación numérico-experimental

En este apartado se presentan algunos resultados numéricos del análisis realizado y se los contrasta con datos experimentales. El análisis experimental se ha llevado a cabo sobre 6 probetas T300/914C con fibra orientada a 45° respecto del eje longitudinal de la probeta.

Los resultados de las mediciones efectuadas se observan en la Figuras 33, 34 y 35. En la primera de las curvas se ha graficado la fuerza necesaria en el nivel superior de la probeta en función del desplazamiento en la parte superior de la probeta. La Figuras 33, 34 y 35 muestran la comparación entre los resultados experimentales, los resultados obtenidos con el modelo propuesto considerando un comportamiento elástico lineal y un comportamiento elastoplástico del material compuesto. La simulación numérica considerando un comportamiento elástico lineal constituye la envolvente de las respuestas.

En este caso los resultados analíticos presentan una notable concordancia con los obtenidos experimentalmente. Es necesario destacar que en los resultados obtenidos en el ensayo experimental el comportamiento de la probeta presenta simetría. Este

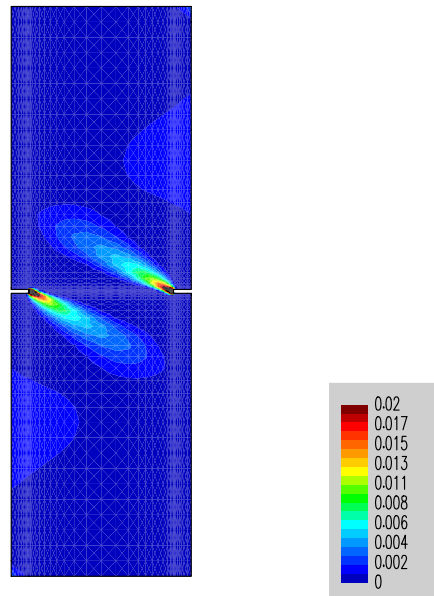


Figura 29: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45°. Contorno variable interna de plasticidad

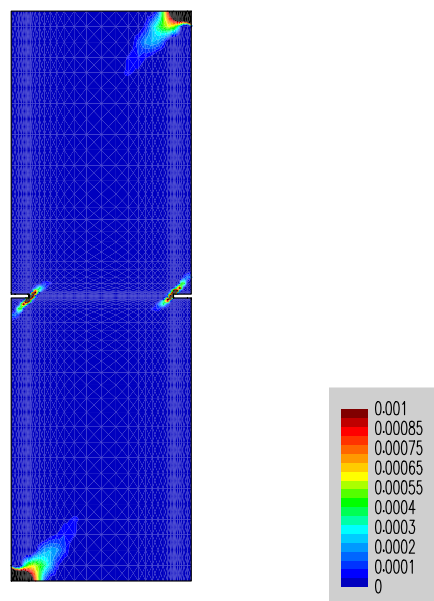


Figura 30: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45°. Contornos de plasticidad en las fibras

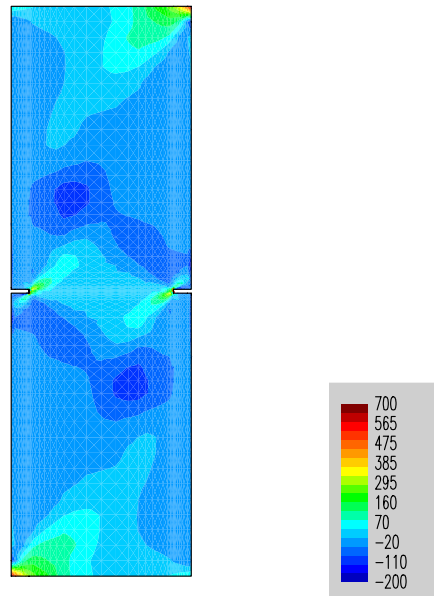


Figura 31: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45°. Contorno de tensiones XX

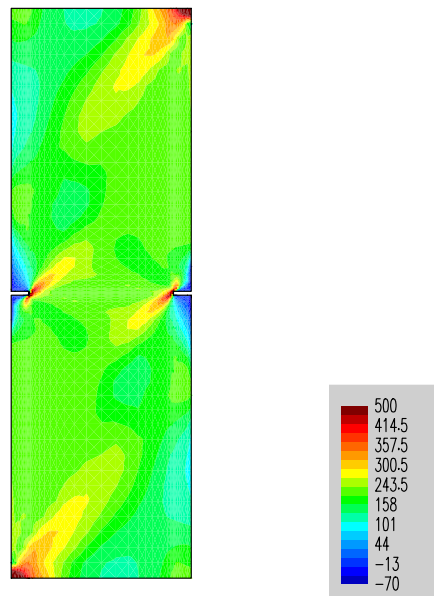


Figura 32: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45°. Contorno de tensiones YY

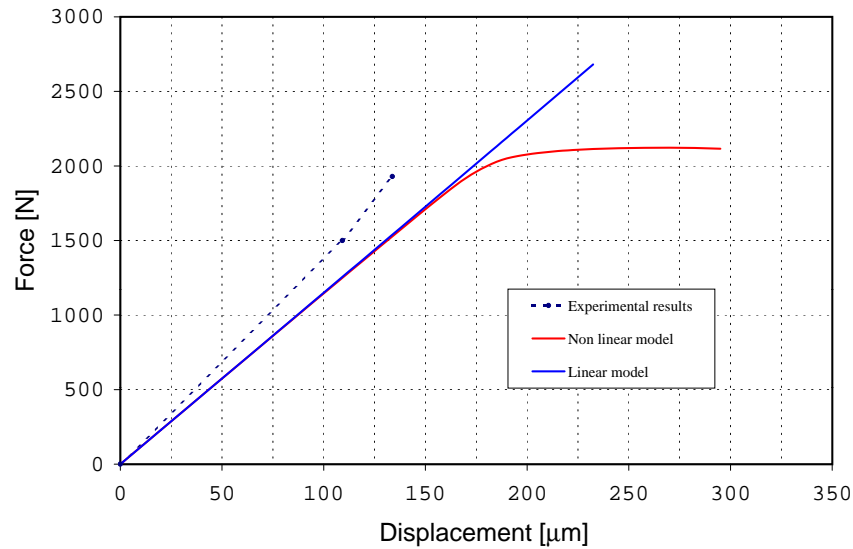


Figura 33: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45° . Curva Carga - Desplazamientos parte superior de la probeta

fenómeno se observa también en la simulación numérica, según la cual la deformada presenta simetría y los valores de la apertura de la entalla resultan iguales para ambos lados de la probeta. En la Figura 34 y 35 se observa las curvas de la apertura en la zona de la entalla en función del desplazamiento de la parte superior de la probeta.

7.6 Ensayo de probetas de T300/914C con fibras orientadas a 90° respecto al eje longitudinal

Este ensayo consiste en someter a una probeta de carbono-epoxi con fibras orientadas a 90° según el eje longitudinal de la probeta a un desplazamiento impuesto en la parte superior de la misma. Las propiedades de los materiales empleados en el análisis numérico se pueden observar en las Tablas 1y 2.

Se ha realizado un análisis incremental considerando un total de 40 incrementos de desplazamiento, resultando en un desplazamiento impuesto en la zona superior de $0,385\text{mm}$.

En las Figuras 36 y 37 se presentan la deformada de la probeta y un detalle de la deformada en la zona de la entalladura respectivamente. Estas figuras presentan un factor de amplificación de los desplazamientos de 200 que permite apreciar adecuadamente la forma final de la probeta.

En la Figura 36 se observa que la localización de las deformaciones se produce en

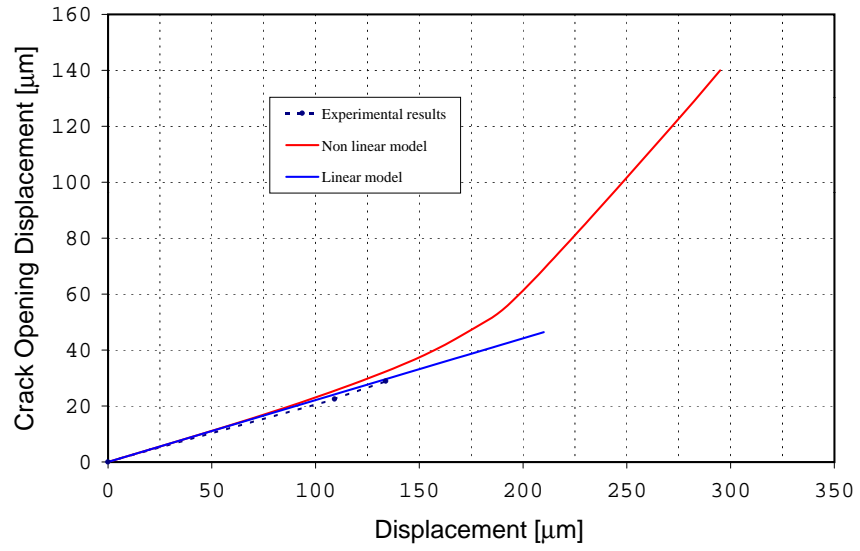


Figura 34: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45°. Curva COD (lado derecho) - Desplazamientos parte superior de la probeta

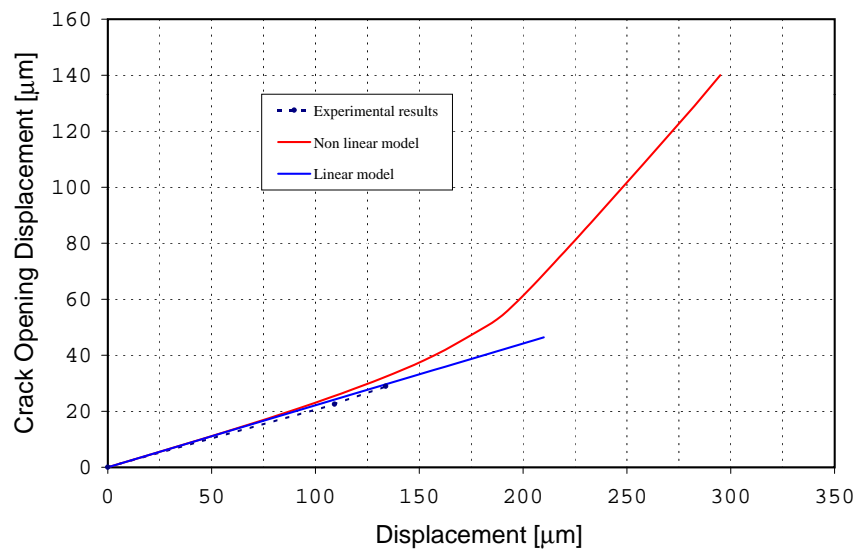


Figura 35: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45°. Curva COD (lado izquierdo) - Desplazamientos parte superior de la probeta

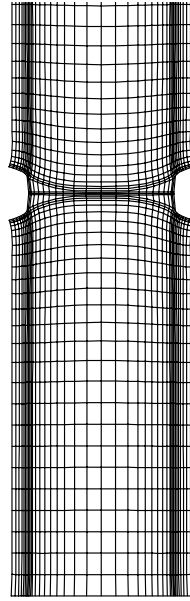


Figura 36: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 90° . Deformada 200:1

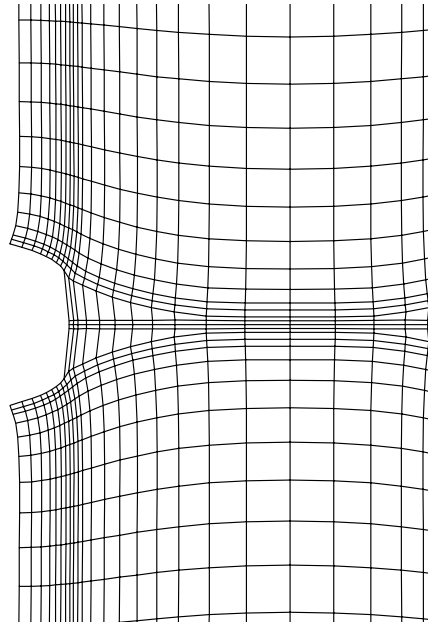


Figura 37: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 90° . Detalle deformada en la entalladura

la zona central de la probeta y en la dirección perpendicular al eje longitudinal de la misma coincidente con la dirección de las fibras del refuerzo.

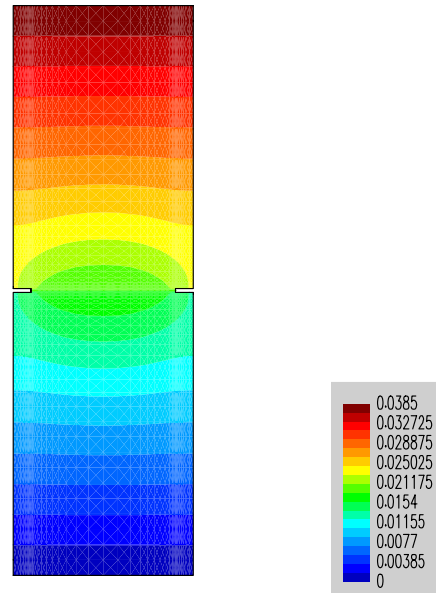


Figura 38: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 90°. Contornos de desplazamientos

En la Figura 39 se observa el contorno de la variable interna de plasticidad para el compuesto. Se aprecia que las deformaciones plásticas comienzan en la zona de la raíz de la entalla y se propagan en dirección paralela a las fibras hacia el interior de la probeta.

En las Figuras 40 y 41 se observan los contornos de tensiones en la dirección XX y en la dirección YY. Se aprecia en ambas figuras la concentración de tensiones debida a la presencia de las entalladuras que producen estados tensionales elevados que generan las deformaciones plásticas en la matriz de la probeta.

7.6.1 Comprobación numérico-experimental

En este apartado se presentan algunos resultados numéricos del análisis realizado y se los contrasta con datos experimentales. El análisis experimental se ha llevado a cabo sobre 6 probetas T300/914C con fibra orientada a 90° respecto del eje longitudinal de la probeta.

Los resultados de las mediciones efectuadas se observan en las Figuras 42 y 43. En la primera de las curvas se ha graficado la fuerza necesaria en el nivel superior de la probeta en función del desplazamiento en la parte superior de la probeta.

La Figuras 42 y 43 muestran la comparación entre los resultados experimentales, los

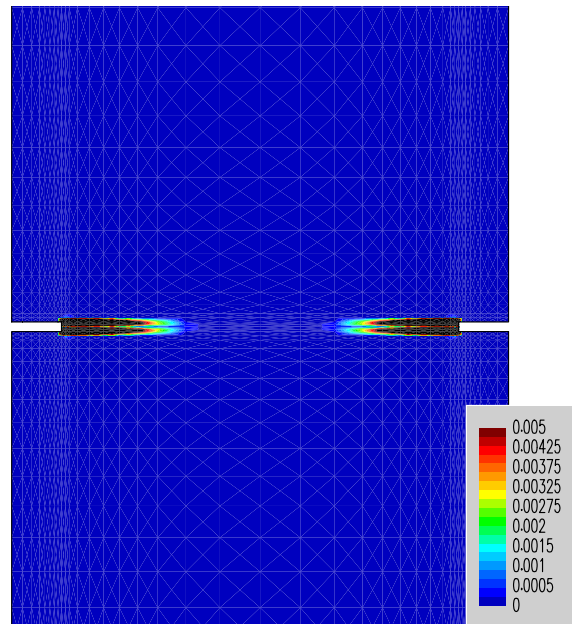


Figura 39: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 90°. Detalle contorno variable interna de plasticidad

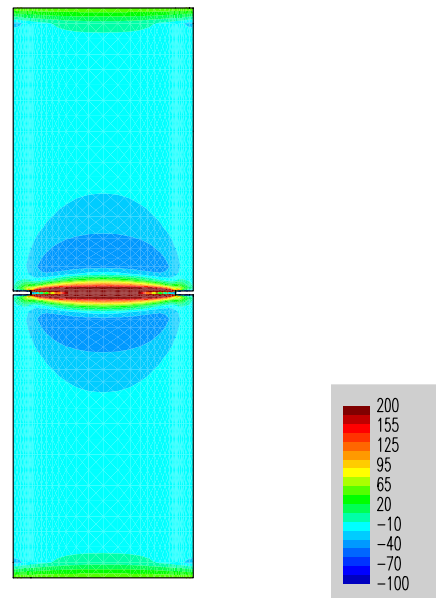


Figura 40: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 90°. Contorno de tensiones XX

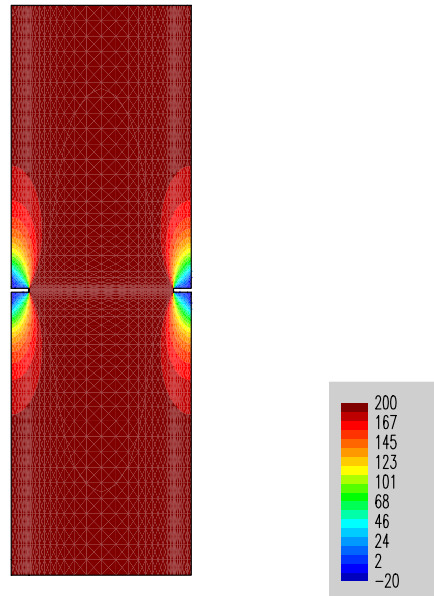


Figura 41: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 90° . Contorno de tensiones YY

resultados obtenidos con el modelo propuesto considerando un comportamiento elástico lineal y un comportamiento elastoplástico del material compuesto. La simulación numérica considerando un comportamiento elástico lineal constituye la envolvente de las respuestas.

Se observa en la Figura 43 que los resultados experimentales muestran una apertura inferior. A pesar de la diferencia apuntadas anteriormente se resalta que los resultados analíticos a nivel de fuerzas presentan un acuerdo satisfactorio con los resultados obtenidos en laboratorio.

8 CONCLUSIONES

Las técnicas convencionales analíticas utilizadas para el análisis de materiales simples isótropos no resultan adecuadas para el análisis de materiales compuestos. Por ello resulta necesario a los fines de modelar materiales compuestos introducir teorías que permitan simular el comportamiento de materiales que presentan características diferentes de los materiales isótropos tradicionales.

En este trabajo y como alternativa a los modelos clásicos se introducen las características relevantes del comportamiento de materiales compuestos mediante la teoría de mezclas, actuando sobre un modelo constitutivo general, elastoplástico con daño anisótropo formulado en grandes deformaciones. El modelo que actúa dentro de la teoría de mezclas puede simular diversos materiales, metales o no metales en general.

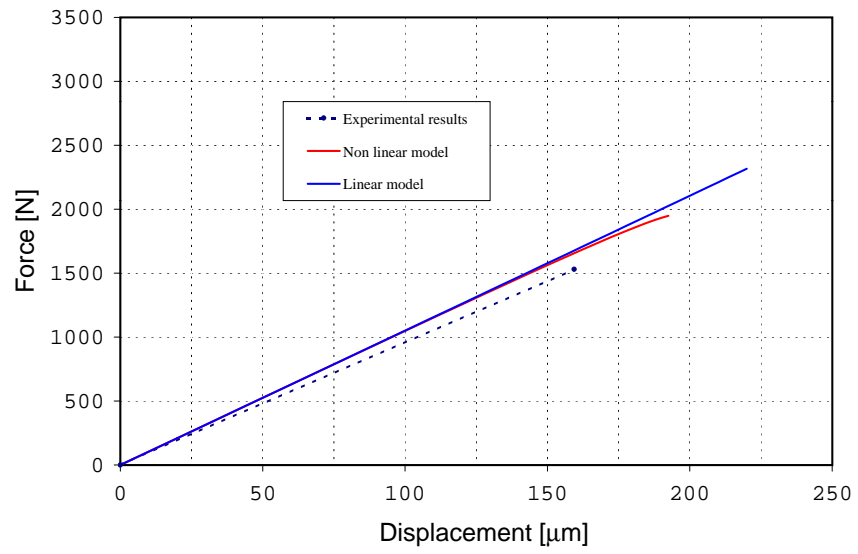


Figura 42: Curva Carga - Desplazamientos parte superior de la probeta

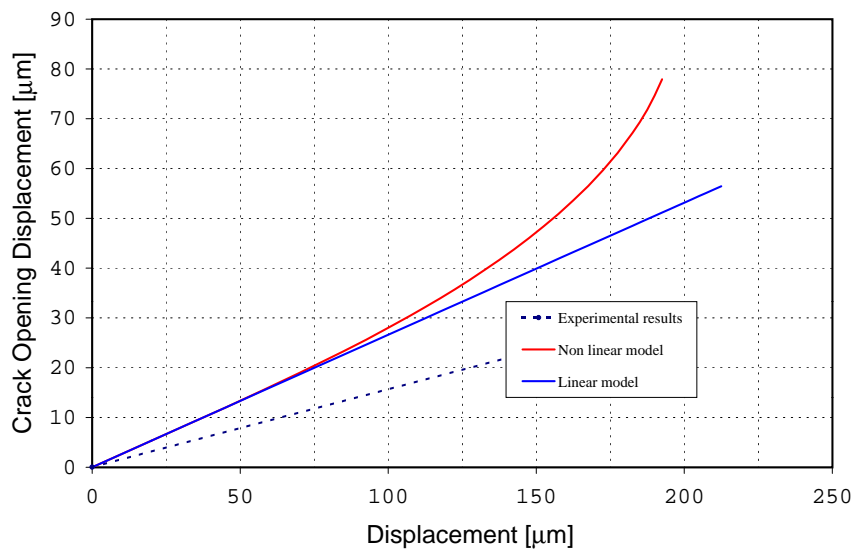


Figura 43: Curva COD - Desplazamientos parte superior de la probeta

El modelo constitutivo elastoplástico anisótropo en régimen de grandes deformaciones que se presenta, constituye uno de los modelos "base" que se introduce en la teoría de mezclas de sustancias considerando así las características relevantes del comportamiento de materiales compuestos.

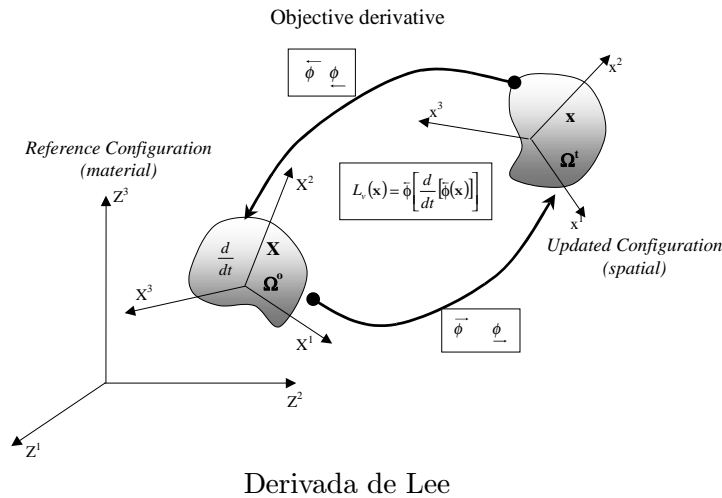
Los ejemplos de análisis presentados en los apartados anteriores ponen de manifiesto que el modelo constitutivo resulta adecuado para realizar el análisis de materiales compuestos en régimen lineal y no lineal. Esta formulación es lo suficientemente completa y general y permite reproducir complejos fenómenos no lineales como el caso de la anisotropía, grandes deformaciones, plasticidad o daño que tienen lugar en los materiales compuestos. Los tiempos de cálculo (CPU time) necesarios para obtener los resultados sobre la malla de elementos finitos presentada en la Figura 6 son alentadores para implementar estos modelos para casos generales tridimensionales.

9 Agradecimientos

Los autores desean expresar su agradecimiento a la empresa Construcciones Aeronáuticas S.A. (CASA) División Espacio y en especial a Pedro Luengo por su desinteresada colaboración aportando los datos experimentales. El primero de los autores desea también expresar su agradecimiento a la Generalitat de Catalunya por el apoyo económico prestado a través de la beca 1998TDOC00065.

Apéndice I

Operadores de transporte



Operador	Notación Indicial	Notación compacta
$\mathbf{e} = \underline{\phi}(\mathbf{E})$	$e_{ij} = F_{iI}^{-T} E_{IJ} F_{jJ}^{-1}$	$\mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1}$
$\mathbf{E} = \underline{\leftarrow{\phi}}(\mathbf{e})$	$E_{IJ} = F_{iI}^T e_{ij} F_{jJ}$	$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}$
$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \overrightarrow{\phi}(\mathbf{S})$	$\sigma_{ij} = \frac{1}{J} F_{iI} S_{IJ} F_{jJ}^T$	$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T$
$\mathbf{S} = J \overleftarrow{\phi}(\boldsymbol{\sigma})$	$S_{IJ} = J F_{iI}^{-1} \sigma_{ij} F_{jJ}^{-T}$	$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}$
$\mathbf{c} = \overrightarrow{\phi}(\mathbf{C})$	$c_{ijkl} = F_{iI} F_{jJ} F_{kK} F_{lL} C_{IJKL}$	
$\mathbf{C} = \overleftarrow{\phi}(\mathbf{c})$	$C_{IJKL} = F_{iI}^{-1} F_{jJ}^{-1} F_{kK}^{-1} F_{lL}^{-1} c_{ijkl}$	

Referencias

- Ali, R. (1996). Use of finite element technique for the analysis of composite structures. *Computers & Structures*, 58, No. 5, 1015–1023.
- Betten, J. (1981). Creep theory of anisotropic solids. *J. Rheol.*, 25, 565–581.
- Betten, J. (1988). Application of tensor functions to the formulation of yield criteria for anisotropic materials. *International Journal of Plasticity*, 4, 29–46.
- Casas, E. L., Oller, S., Rubert, J., Proença, S., and Oñate, E. (1998). A large strain explicit formulation for composites. In S. Idelsohn, E. Oñate, and E. Dvorkin, editors, *Proceedings of the Fourth World Congress on Computational Mechanics*, Buenos Aires (Argentina). CIMNE, Barcelona, Spain.
- DFVLR (1983). Progress letters on UD specimen tests. Technical report, European Space Agency.
- Engineering Systems International. *The PAM-SCL code library*. Engineering Systems International. Rungis-Cedex, France.
- García Garino, C. and Oliver, J. (1991). A numerical model for elastoplastic large strain elastoplasticity. Technical report, Escuela Técnica Superior de Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona.

- García Garino, C. and Oliver, J. (1992). Use of large strain elastoplastic model for simulation of metal forming processes. *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, pages 467–472.
- Green, A. and Naghdi, P. (1965). A dynamical theory of interacting continua. *Journal Engeneering Science*, 3,3–231.
- Green, A. and P., N. (1964). A general theory of an elasto-plastic continuum. *Archives Rational Mech. Anal.*, 18,19–281.
- Haug, E., Kamoulakos, A., Luca, P. D., and Pickett, A. K. (1998). Engineering models and their application to damage and forming simulation of composites. In S. Idelsohn, E. Oñate, and E. Dvorkin, editors, *Proceedings of the Fourth World Congress on Computational Mechanics*, Buenos Aires (Argentina). CIMNE - Barcelona - Spain.
- Hill, R. (1965). Micro mechanics of elastoplastic materials. *J. Mech. Phis. Solids*, 13,89–101.
- Hill, R. (1971). *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press.
- Hull, D. (1987). *An Introduction to Composite Materials*. Cambridge University Press.
- Klintworth, J. and Macmillian, S. (1992). Effective analysis of laminated composite structures. *Benchmark, NAFEMS*, pages 20–22.
- Larson, E. W. (1976). Neutron transport and diffusion in inhomogeneous media. *Nucl. Sci. Engng.*, 60,357–368.
- Len'e, F. (1986). Damage constitutive relations for composites materials. *Engng. Fract. Mech.*, 25,713–728.
- Len'e, F. and Leguilon, D. (1982). Homogeinized constitutive law for a partially cohesive composite material. *Int. J. Solids Structures*, 18,443–458.
- Lubliner, J. (1990). *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing, U.S.A.
- Luccioni, B., Oller, S., and Danesi, R. (1996). Coupled plastic-damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 129,81,90.
- Malvern, L. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall.
- Matthews, F. L. and Rawlings, R. D. (1994). *Composite Materials: Engineering and Science*. Chapman and Hall.
- Oñate, E., Oller, S., Botello, S., and Canet, J. (1991). Methods for analysis of composite material structures (in spanish). Technical Report 11, CIMNE, Barcelona, Spain.

- Obraztsov, I. F. and Vasilev, V. V. (1982). *Mechanics of Composites*. MIR Publishers Moscow.
- Oller, S. (1989). New ceramic materials for engineering structures (in spanish). Technical Report 2, C.I.M.N.E. - Barcelona.
- Oller, S., Botello, S., Miquel, J., and Oñate, E. (1995). An anisotropic elastoplastic model based on an isotropic formulation. *Engineering Computations*, 12, No. 3,245–262.
- Oller, S., Oñate, E., and Miquel, J. (1993a). Simulation of anisotropic elastic-plastic behaviour of materials by means of an isotropic formulation. In *2nd. US Nat. Congr. Comput. Mech.*, Washington DC.
- Oller, S., Oñate, E., Miquel, J., and Botello, S. (1993b). A finite element model for analysis of multiphase composite materials. In *Ninth International Conferences on Composite Materials*, Zaragoza - Spain. Woodhead Publishing Limited.
- Oller, S., Oñate, E., Miquel, J., and Botello, S. (1994). A plastic damage constitutive model for composite materials. *Int. J. Solids and Structures*, 33, No. 17,2501–2518.
- O'Rourke, B. P. (1989). The use of composite materials in the design and manufacture of formula 1 racing cars. *Proc. Inst. Mech. Engng.*, C387/025,39–48.
- Ortiz, M. and Popov, E. (1982a). A physical model for the inelasticity of concrete. *Proc. Roy. Soc. London*, A383,101–125.
- Ortiz, M. and Popov, E. (1982b). Plain concrete as a composite material. *Mechanics of Materials*, 1,139–150.
- Pendleton, R. and Tuttle, M. (1989). *Manual on Experimental Methods for Mechanical Testing of Composites*. Elsevier Applied Science Publishers.
- Sanchez Palencia, E. (1980). Non-homogeneous media and vibration. In *Lecture Notes in Physics*. Springer Verlag - Berlin.
- Simo, J. and Taylor, R. (1985). Consistent tangent operators for rate-dependent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48,101–118.
- Stavriniadis, C. (1985). Employment of Pam-Fiss Bi-Phase Computer Program for the Strength Analysis and Fracture Delamination Behaviour of Composites. Vol.7 Final Synthesis Report. Technical report, European Space Agency.
- Suquet, P. (1981). Méthodes d'homogénéisation en mécanique des solides, in comportements rhéologiques et structures de matériaux. *Presses de L'ENPC, Paris*, pages 87–128.

Suquet, P. (1982). *Plasticité et Homogénéisation*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie. Paris.

Trusdell, C. and Toupin, R. (1960). *The Classical Field Theories*. Handbuch der Physik III/I – Springer Verlag, Berlin.