

# APROXIMACION AL TRATAMIENTO UNIFICADO DE LA NO LINEALIDAD GEOMETRICA DE LAS BARRAS RECTAS

IGNACIO DUQUE OLIART  
y  
ANGEL APARICIO BENGOCHEA

*Cátedra de Puentes  
E.T.S. de Ingenieros de Caminos de Barcelona.*

## RESUMEN

El propósito del presente artículo es seguir la evolución de las formulaciones de elementos finitos más conocidas para el estudio de la no linealidad geométrica<sup>21,35</sup> haciendo hincapié en el paralelismo entre estos métodos y los métodos explícitos tradicionalmente usados en el análisis de estructuras de barras (coeficientes de estabilidad, matriz geométrica y P-delta) y mostrando las simplificaciones que éstos introducen.

## SUMMARY

The purpose of this article is to follow the evolution of the most well known finite element formulations in order to study their nonlinear geometrical aspects, paying particular attention to the paralelism between these methods, and the explicit methods traditionally used on structural analysis of bars (stability coefficients, geometrical stiffness matrix and P-Delta) and to show the simplifications that the former methods introduce.

## INTRODUCCION

El hecho de que la bibliografía existente sobre la no linealidad geométrica sea extraordinariamente abundante<sup>5,13,21,30</sup> implica varios riesgos:

- 1) Imposibilidad de acceder a todos los artículos, incluso para los especialistas.
- 2) Retraimiento por parte de los no especialistas a introducirse en un terreno en ocasiones complejo, lo que se debe, al menos parcialmente, a la formulación matemática que la no linealidad conlleva.

Esto es debido a que los métodos no lineales se han desarrollado plenamente a partir de la irrupción del método de los elementos finitos en ingeniería y las diferentes formulaciones utilizadas, así como la generalidad de las mismas, origina que, en muchos casos, no sea evidente la aplicación inmediata de sus procedimientos para los no

Recibido: Septiembre 1987

iniciados. Esta circunstancia, unida a aspectos prácticos en relación con el uso de pequeños ordenadores (ahorro de memoria y tiempo de cálculo, fundamentalmente), hace que sigan siendo válidos diferentes métodos que se desarrollaron con anterioridad al método de los elementos finitos (funciones de estabilidad) o simultáneamente al mismo, introduciendo simplificaciones diversas, (matriz geométrica, P-delta), todos ellos útiles en el estudio de las estructuras modelizables por medio de barras.

Los artículos en que se analizan y emplean estas formulaciones son numerosos, pero no son menos numerosos aquellos artículos en los cuales se utilizan con evidente desconocimiento del fundamento teórico que las sustenta. Hablaremos aquí del paralelismo existente entre todas ellas y de sus limitaciones y posibilidades, realizando una breve revisión histórica de las líneas de desarrollo más conocidas, haciendo hincapié en los aspectos anteriormente citados.

En las formulaciones explícitas y para una mayor sencillez nos ceñiremos a las expresiones de pórtico plano, aunque son perfectamente generalizables al caso espacial.

## ALGUNOS ASPECTOS DE LA TERMINOLOGIA

Antes de entrar en la evolución histórica, es importante aclarar algunos aspectos de la terminología estrechamente ligados a la formulación de los problemas de estructuras considerando la no linealidad geométrica.

### Pequeñas deformaciones y grandes movimientos.

En la elasticidad bidimensional la relación entre las deformaciones y los corrimientos viene expresada por el tensor de deformaciones de Green:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{1}{2} \left| \left( \frac{\delta u}{\delta x} \right)^2 + \left( \frac{\delta v}{\delta x} \right)^2 \right| \\ Y_{xy} &= \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} + \left| \frac{\delta u}{\delta x} \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x} \frac{\delta v}{\delta y} \right| \end{aligned} \quad (1)$$

Si los términos de segundo orden (productos de derivadas) son despreciables frente a los de primer orden, cabe utilizar sólo los términos lineales y se dice que se trabaja en teoría lineal. Por contra, si se utiliza la expresión anterior o una simplificación de la misma no lineal estamos en el caso de pequeñas deformaciones y grandes movimientos.

Si los corrimientos  $(u, v)$  y sus gradientes son pequeños la aproximación es lineal siempre válida, sin embargo pueden existir grandes corrimientos con pequeñas deformaciones como ocurre, por ejemplo, con un giro de sólido rígido.

No debe olvidarse que esta simplificación implica, en el caso de una barra recta, despreciar la influencia que tiene el corrimiento en el sentido transversal  $(v)$  sobre la deformación en el sentido longitudinal  $(\epsilon_x)$ .

### Pequeños giros.

La hipótesis de pequeños giros consiste en aceptar como válida la aproximación:

$$\theta = \operatorname{tg} \theta = \operatorname{sen} \theta$$

$$\cos \theta = 1$$

Lo que conduce a la conocida simplificación para la curvatura:  $C = y''$ , aceptada en la mayoría de las formulaciones de barras, como ocurre en la expresión de la deformación de una viga con grandes desplazamientos debida a Washizu<sup>33</sup>, con lo cual, si existen grandes giros, las formulaciones obtenidas a partir de la misma son sólo aproximadas<sup>27</sup>.

### No linealidad geométrica.

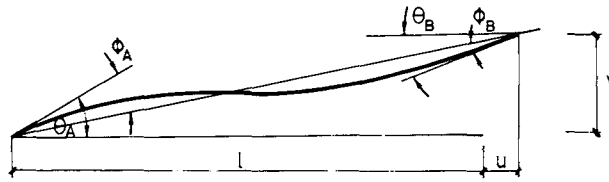
En muchas ocasiones en el estudio de las estructuras, es aceptable la hipótesis de que se comportan linealmente, esto es, que los desplazamientos  $q$  son una función lineal de las fuerzas aplicadas, (llamando desplazamientos a los corrimientos  $(u, v)$  y los giros en los extremos del elemento). Esto es completamente admisible si los corrimientos son pequeños, de tal forma que puede aceptarse que la geometría de los elementos no varía durante la actuación de las fuerzas exteriores y las deformaciones pueden aproximarse de forma lineal y asimilarse a infinitésimos de primer orden. En caso contrario se dice que la estructura presenta no linealidad geométrica.

La no linealidad geométrica es un fenómeno único que, de acuerdo con Powell<sup>26</sup>, se debe fundamentalmente a:

- a) La relación que liga los desplazamientos de un elemento y las deformaciones del mismo es no lineal. Esto es lo que Powell llama compatibilidad geométrica (Figura 1).
- b) Al considerar el equilibrio del elemento, se observa que la relación entre las fuerzas y los desplazamientos es no lineal y depende de dichos desplazamientos (Figura 5.a.).
- c) El equilibrio debe plantearse en la posición deformada.

Ahora bien, si el fenómeno es único, en cuanto al análisis pueden obviarse o simplificarse algunos de los puntos anteriores, en cuyo caso la solución obtenida será sólo aproximada.

La utilización de una formulación tangente permite linealizar las relaciones antes citadas, de ahí el interés y la utilidad del uso de dicha formulación. Por supuesto, no debe olvidarse que lo verdaderamente importante es el equilibrio y la compatibilidad de los elementos en la posición deformada, sin importar el proceso analítico efectuado para llegar a la solución. Por tanto, el uso de la formulación tangente "exacta" sólo es preciso cuando se realiza un cálculo incremental (sin verificar el equilibrio y la compatibilidad), pues en ese caso existe una cierta garantía de que si los incrementos son pequeños y el problema no presenta un carácter marcadamente no lineal, la solución así obtenida se aproximará a la solución real de una forma aceptable (Figura 2). Las formulaciones



#### COMPATIBILIDAD GEOMETRICA

$$e = \sqrt{(l+u)^2 + v^2} - l$$

$$\phi_A = \theta_A - \operatorname{arctg} \frac{v}{l+u}$$

$$\phi_B = \theta_B - \operatorname{arctg} \frac{v}{l+u}$$

#### EXPRESIONES LINEALIZADAS

$$e = u$$

$$\phi_A = \theta_A - \frac{v}{l}$$

$$\phi_B = \theta_B - \frac{v}{l}$$

Figura 1. Formulación de la compatibilidad geométrica y simplificación lineal habitualmente utilizada

de tipo tangente son las más ampliamente utilizadas y básicamente nos ceñiremos a ellas, aunque en muchos casos se utilizan de un modo secante, aproximación que en la práctica suele ser admisible (Figura 3).

### FUNCIONES DE ESTABILIDAD

La causa más importante de la aparición de fenómenos no lineales en una barra es, sin duda, la presencia de un axil que actúe sobre la misma. Si este axil es de compresión, puede llevar a la ruina de la pieza debido a un fenómeno de inestabilidad (pandeo). Es lógico, por tanto, que los primeros trabajos sobre no linealidad se centraran en el pandeo de barras (Euler, 1744) y sólo más tarde, en el comportamiento no lineal de los elementos en presencia de un axil. Dicho efecto es incluido en la relación que liga las fuerzas y los desplazamientos en los extremos de un elemento por Manderla en 1880, por medio de unas expresiones analíticas que dependían del axil y que en forma matricial pueden expresarse:

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}(\phi) \cdot \mathbf{q} \quad (2)$$

donde las  $\phi$  reciben el nombre de "funciones de estabilidad". En su forma actualmente

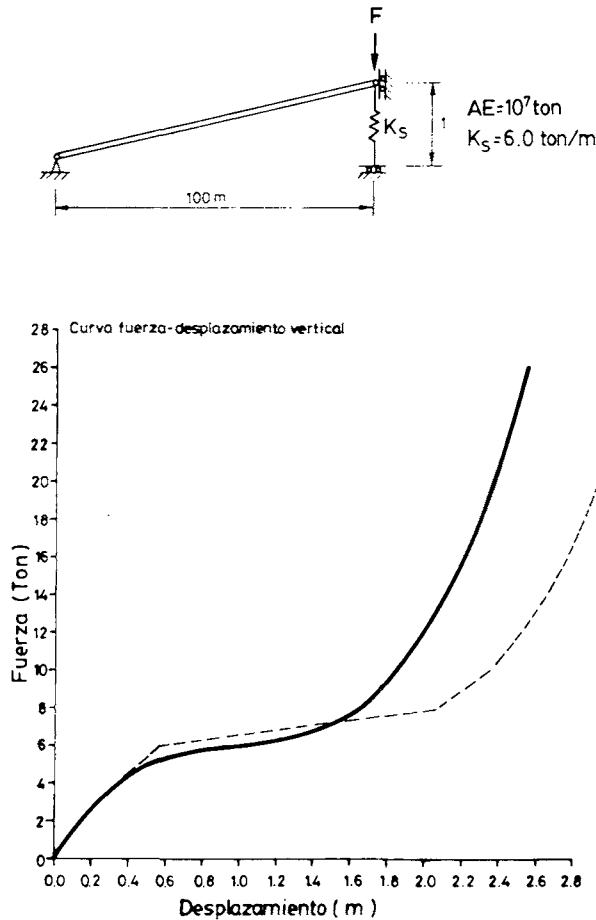


Figura 2. Curva Fuerza-desplazamiento y aproximación tangente en un fenómeno altamente no lineal

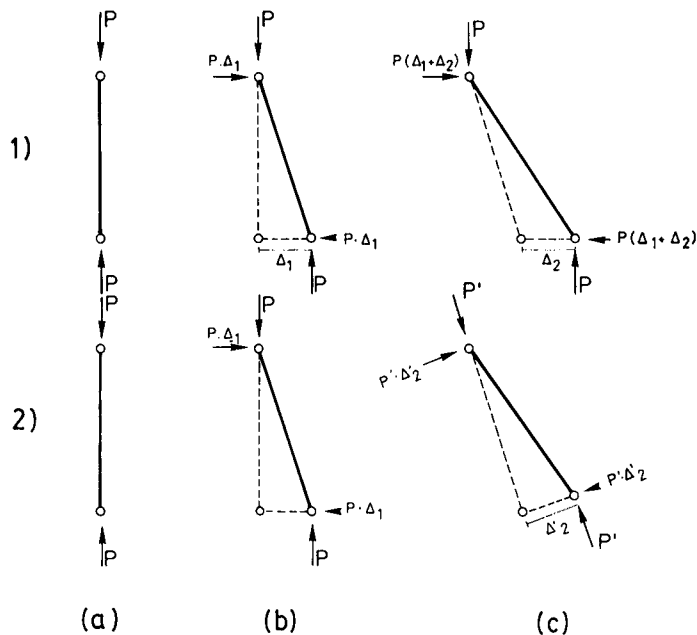
más utilizada<sup>20,29</sup> se deben a James (1935) y a Ludquist y Kroll (1944). (Citado en referencias 1, 9, 20).

Sin entrar en detalle en el proceso analítico seguido para la obtención de las mismas<sup>20,29</sup>, si creemos importante recordar que para su obtención:

- se parte de la barra recta sometida a un axil.
- se incluye el efecto de dicho axil en la ecuación diferencial que liga los esfuerzos y los corrimientos.
- la integración de dicha ecuación diferencial al imponer un determinado desplazamiento en los extremos de la barra permite obtener las funciones de estabilidad buscadas.

Por lo tanto, al utilizar este procedimiento de cálculo, hay que tener en cuenta:

- el método garantiza el equilibrio de la pieza en la posición deformada.



Para un desplazamiento de los extremos de la barra,  $\Delta_1$ , aparece una fuerza de compatibilidad de valor  $P \cdot \Delta_1$  (efecto P-delta). En un cálculo secante, si el desplazamiento se incrementa ( $\Delta_2$ ), la fuerza de compatibilidad aumenta de forma lineal, siendo  $P \cdot (\Delta_1 + \Delta_2)$  (fig.1.c), mientras que, si el proceso es tangente, actualizando coordenadas, el desplazamiento y las acciones hay que referirlo a la posición alcanzada en la etapa precedente; el axil varía, y el resultado no coincide con el anterior (fig.2.c)

Figura 3. Estudio del comportamiento de una barra biarticulada, sin actualizar (secante) y actualizando coordenadas (tangente)

- es un proceso tangente en el que se parte de la barra recta (sin deformaciones previas) sometida a axil constante. Si los corrimientos son pequeños y el axil no varía sensiblemente a lo largo del proceso, es totalmente admisible el utilizar dicha formulación como secante y aceptar como solución al problema la directamente obtenida del cálculo matricial.

## ELEMENTOS FINITOS

### Desarrollo histórico.

En 1960, Turner et al<sup>32</sup> dan un importante paso en el estudio de la no linealidad al introducir una nueva matriz en las ecuaciones de equilibrio para tener en cuenta los efectos de segundo orden: la matriz geométrica.

De esta forma, la ecuación de equilibrio queda:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_g) \cdot \mathbf{q} \quad (3)$$

Siendo  $\mathbf{K}_0$  la matriz de rigidez lineal y  $\mathbf{K}_g$  la matriz geométrica, que depende del esfuerzo axial.

A partir de este trabajo aparecen una larga serie de artículos en los cuales la formulación no lineal va adquiriendo pleno desarrollo <sup>3,4,14,22</sup>.

En 1968 Mallett y Marcal<sup>21</sup> plantean con absoluta generalidad la resolución de los problemas de no linealidad geométrica al abordar su resolución tanto a nivel energético, resolviendo la ecuación de la energía potencial, como a nivel de resolución directa o por un proceso incremental, obteniendo en los tres casos unas expresiones claramente coincidentes.

La ecuación obtenida es de la forma:

$$\text{Energía potencial: } \Pi = \mathbf{q}^T \left[ \frac{1}{2} \mathbf{K} + \frac{1}{6} \mathbf{N}_1 + \frac{1}{12} \mathbf{N}_2 \right] \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{P}$$

$$\text{Equilibrio: } \left[ \mathbf{K} + \frac{1}{2} \mathbf{N}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{N}_2 \right] \mathbf{q} - \mathbf{P} = \{0\}$$

$$\text{Incremental: } \left[ \mathbf{K} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 \right] \Delta \mathbf{q} - \Delta \mathbf{P} = \{0\}$$

Las matrices  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{N}_1$  y  $\mathbf{N}_2$  son simétricas y, respectivamente, lineales, de primer y segundo orden; es decir,  $\mathbf{K}$  es la matriz elástica convencional;  $\mathbf{N}_1$  depende de los desplazamientos y  $\mathbf{N}_2$  de los desplazamientos al cuadrado.

En las fórmulas anteriores  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{N}_1$  y  $\mathbf{N}_2$  tienen siempre la misma expresión analítica, pero mientras en los dos primeros casos las incógnitas aparecen en  $\mathbf{N}_1$  y  $\mathbf{N}_2$ , dificultando así la resolución del sistema de ecuaciones, en el método incremental  $\mathbf{N}_1$  y  $\mathbf{N}_2$  son función de los desplazamientos calculados en la etapa de cálculo precedente, con lo cual el sistema resultante es lineal.

Hay que recordar que Mallett y Marcal utilizan una descripción lagrangiana del movimiento e indican que en el caso de actualizar coordenadas serían nulos algunos de los términos obtenidos en las matrices  $\mathbf{N}_1$  y  $\mathbf{N}_2$ .

Posteriormente, Rajasekaran y Murray<sup>28</sup> ponen de manifiesto que la pretendida igualdad entre las matrices  $\mathbf{N}_1$  y  $\mathbf{N}_2$  en los diferentes casos no es inmediata, pues dichas matrices cabe obtenerlas a partir de diferentes expresiones analíticas. En su trabajo, hallan las expresiones a utilizar para que la igualdad se mantenga.

Por su parte, en 1971, Zienkiewicz y Nayak (citado en la referencia 34) desarrollan una formulación paralela a la anterior con la cual obtienen una matriz de rigidez tangente del tipo:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma \quad (5)$$

Siendo  $\mathbf{K}_L$  la matriz de desplazamientos iniciales ("geometric effect") y  $\mathbf{K}_\sigma$  la matriz de deformaciones iniciales ("initial strain").

Wood y Schrefler<sup>34</sup> demuestran posteriormente que esta expresión es idéntica a

la obtenida por Mallett y Marcal pero agrupando de forma diferente los términos que forman las distintas matrices, pues tanto  $\mathbf{K}_L$  como  $\mathbf{K}_\sigma$  dependen de los desplazamientos lineal y cuadráticamente.

Por último indicar que Oliver y Oñate<sup>23</sup>, replanteando el problema con absoluta generalidad a nivel de desplazamientos y deformaciones, introducen los grandes giros en la formulación de Zienkiewicz.

### Algunas observaciones.

La ventaja de utilizar la formulación propuesta por Zienkiewicz y Nayak con relación a la de Mallett y Marcal reside en que la primera diferencia claramente los efectos no lineales, debidos a los corrimientos previamente existentes en la pieza ( $\mathbf{K}_L$ ), en relación a los esfuerzos de segundo orden ( $\mathbf{K}_\sigma$ ).

Ese primer efecto no lineal es lo que se llama "grandes desplazamientos". La matriz  $\mathbf{K}_L$  depende de los desplazamientos habidos en etapas precedentes y en ella se incluye el cambio de posición del elemento en el espacio en las sucesivas etapas. Por supuesto, si se utiliza una formulación lagrangiana actualizada, este efecto no cabe volver a incluirlo en la matriz  $\mathbf{K}_L$  que de esta forma se simplifica. Si a esto se une que los corrimientos en el interior de la pieza no adquieren gran importancia (piezas poco esbeltas, fundamentalmente) esta matriz puede suprimirse en el cálculo.

La matriz  $\mathbf{K}_\sigma$ , considera los esfuerzos de segundo orden, es decir, los esfuerzos que aparecen en una determinada etapa del cálculo debidos a los previamente existentes en etapas precedentes. Esta matriz depende del estado tensional del elemento y tiene en cuenta el equilibrio del mismo en la posición deformada.

Por la relación existente entre tensiones y deformaciones, la matriz  $\mathbf{K}_\sigma$  cabe expresarla en función de la variación de los corrimientos, con lo cual  $\mathbf{K}_L$  y  $\mathbf{K}_\sigma$  estarían en función de los corrimientos existentes en la pieza. Es por ello por lo que a estas matrices, de forma conjunta, se les llama "matriz geométrica", pues dependen de la geometría de la pieza en la etapa precedente, aunque la mayoría de los autores reservan la expresión "matriz geométrica" para referirse a  $\mathbf{K}_\sigma$  y emplean "matriz de deformaciones iniciales" para referirse a  $\mathbf{K}_L$ .

Posteriormente veremos un método explícito basado en el desarrollo de la matriz  $\mathbf{K}_\sigma$  y que por ello, recibe el nombre de "método de la matriz geométrica", siendo necesario situarse en el contexto para saber si se habla del método más general o del método explícito.

## FORMULACION EN COORDENADAS INTRINSECAS

Un desarrollo muy diferente en relación al tratamiento de la no linealidad geométrica aunque incluye aspectos tomados de los elementos finitos, es la línea iniciada por Jennings<sup>19</sup>, quien parte de la relación no lineal entre deformaciones y desplazamientos referida a los ejes locales de la pieza (compatibilidad geométrica), y diferenciando, calcula la matriz tangente que liga ambos conjuntos de valores (matriz  $\mathbf{D}$ ).

Aplicando el principio de los trabajos virtuales obtiene que la matriz que relaciona

las fuerzas en cada elemento y sus esfuerzos es la traspuesta de la matriz tangente previamente hallada y, diferenciando dicha matriz traspuesta, llega a una relación entre el incremento de fuerzas en el elemento y los incrementos de esfuerzos y desplazamientos. Por la relación existente entre esfuerzos y desplazamientos (relación donde se introducen las ecuaciones constitutivas del material que forma el elemento, que para Jennings es elástico lineal; y en la cual se hipotetiza una deformada de la pieza, empleando una técnica de elementos finitos), se obtiene la matriz de rigidez tangente del elemento.

Siguiendo la misma línea se encuentra el ya citado trabajo de Powell<sup>26</sup>, en el cual se plantean los fenómenos físicos: compatibilidad geométrica; no linealidad de la relación fuerza-desplazamiento y equilibrio de los nudos en la posición deformada; para posteriormente, por derivación llegar a una formulación tangente. Powell recalca el sentido de herramienta que toda formulación tangente posee, insistiendo en que el comportamiento real del elemento lo recogen (o intentan recogerlo) las fórmulas previamente desarrolladas. Al obtener de una manera explícita la matriz tangente llega a los mismos valores que Jennings (salvo algún coeficiente numérico).

La formulación de Baron y Venkatesan<sup>7</sup> sigue a las anteriores e introduce las grandes deformaciones en el sentido longitudinal.

El tratamiento de la no linealidad del material de una forma claramente compatible con la formulación matemática citada aparece ya resuelto en el trabajo de Backlund<sup>6</sup>.

En 1978 Grelat<sup>15</sup> integra la formulación de la no linealidad mecánica y el trabajo de Jennings, con lo cual el problema de la no linealidad queda plenamente resuelto.

Debido a que en esta formulación la referencia a los ejes locales de la pieza es constante se habla de una formulación en coordenadas intrínsecas o, como indica Irles, de una formulación "lagrangiana actualizada puesta al segundo" (en paralelismo con las formulaciones "puestas al día")<sup>18</sup>.

## FORMULACIONES EXPLICITAS DERIVADAS DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Es evidente que el desarrollo de los elementos finitos llevó aparejados unos métodos explícitos en relación con la teoría de barras: de una parte, muchos de los resultados obtenidos se deben a la visión de los problemas físicos y el proceso científico seguido fue el paso de lo particular (barra recta) a lo general. De otra parte, el cálculo matricial de estructuras formadas por barras es bastante anterior al M.E.F., lo que hacía necesaria la obtención de formulaciones explícitas para contrastar la bondad de los resultados que iban obteniéndose.

Así, por ejemplo, el ya citado artículo de Turner et al<sup>32</sup> corresponde al caso de una barra biarticulada y la matriz geométrica por ellos obtenida es la conocida matriz P-delta.

### **El método P-delta.**

Cuando una barra recta biarticulada con un esfuerzo axial experimenta un desplazamiento transversal relativo entre sus extremos, se ve sometida a unas fuerzas de equilibrio en sentido normal al axial; es lo que se llama efecto P-delta.

Para considerar dicho efecto en la formulación de estas barras basta tener en cuenta la matriz:

$$\mathbf{K}_{\Delta} = \frac{\mathbf{P}}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

matriz que puede obtenerse de maneras muy diferentes: a partir de consideraciones básicamente geométricas, como en el citado trabajo de Turner<sup>32</sup>; integrando la energía de deformación<sup>27,30</sup>; desarrollando explícitamente la matriz  $\mathbf{K}_{\sigma}$  de Zienkiewicz y Nayak para el caso de la barra recta<sup>34</sup>; etc.

Aunque el método P-delta sólo es exacto cuando se trabaja con barras biarticuladas, también se ha utilizado en el caso de barras con momentos en sus extremos, lo que es admisible si la causa más importante de no linealidad es, precisamente, el efecto P-Delta, como ocurre en estructuras traslacionales de edificación. Dicha simplificación ha sido justificada por algunos autores<sup>30</sup>, aunque lo cierto, es que la formulación no es consistente<sup>16</sup> porque presupone una deformada diferente en el cálculo de la matriz de rigidez y de la matriz que considera los esfuerzos de segundo orden.

### El método de la matriz geométrica.

Este método aparece al desarrollar explícitamente la matriz  $\mathbf{K}_{\sigma}$  para el caso de una barra recta sometida a un esfuerzo axil cuando se supone que su deformada es un polinomio de tercer grado.

La matriz geométrica tiene la expresión:

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{P}}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{l}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{l}{10} \\ 0 & \frac{l}{10} & \frac{2l^2}{15} & 0 & -\frac{l}{10} & -\frac{l^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{l}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{l}{10} \\ 0 & \frac{l}{10} & -\frac{l^2}{30} & 0 & -\frac{l}{10} & \frac{2l^2}{15} \end{pmatrix} \quad (7)$$

y puede obtenerse por diferentes procedimientos, siendo los más habituales el ya indicado o el método energético<sup>10,16,17</sup>.

Por último, no debe olvidarse que al aproximar la deformada del elemento por un polinomio de tercer grado en presencia de un esfuerzo axil, no se cumple el equilibrio interno del mismo.

## CONSIDERACIONES SOBRE LOS METODOS EXPLICITOS

Previamente hemos visto unos métodos explícitos para el estudio de las barras rectas: de una parte, las funciones de estabilidad y de otra, la matriz geométrica y el método P-Delta, siendo posible deducir estos últimos a partir de la formulación general utilizada con los elementos finitos.

### Paralelismo existente entre los métodos explícitos.

En todos los casos, estos métodos estudian los esfuerzos de segundo orden debidos a la presencia de un axil que actúa sobre los elementos de la estructura, por tanto, ya que intentan aproximar el mismo fenómeno físico, deben ser procedimientos análogos.

Algunos autores parecen ignorar que los métodos explícitos citados son básicamente coincidentes en su planteamiento y la única diferencia entre ellos es la ley de corrimientos utilizada para el cálculo de las matrices de rigidez: mientras las funciones de estabilidad no presuponen ninguna deformada "a priori", sino que imponen el cumplimiento de la ecuación diferencial que relaciona la curvatura con el momento, con lo cual se llega a una solución teóricamente exacta; la matriz geométrica aproxima la deformada por un polinomio de tercer grado; y, el método P-Delta supone que la deformada es una recta en lo que al cálculo de los esfuerzos de segundo orden se refiere (Figura 4).

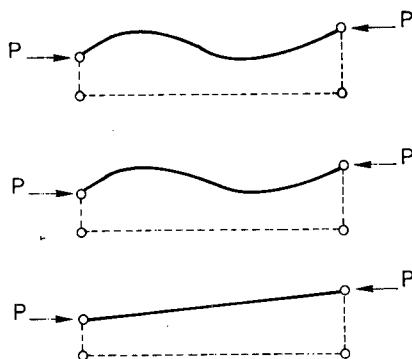
En relación a la matriz geométrica, ya Hartz<sup>16</sup> indicó que la matriz de rigidez elástica y la matriz geométrica constituye los dos primeros términos (matrices) del desarrollo en serie de la matriz de las funciones de estabilidad. El tercer término lo presentó el propio Hartz y aparece en la referencia 25.

Respecto a la matriz P-delta, cabe obtenerla por condensación estática a partir de la matriz geométrica, imponiendo que los momentos en los extremos del elemento son nulos. Es fácil ver que la matriz  $\mathbf{G}$  puede descomponerse:  $\mathbf{G} = \mathbf{K}_{\Delta} + \mathbf{K}'_{\Delta}$ , donde  $\mathbf{K}'_{\Delta}$  tendría en cuenta la flexión de la pieza. Siguiendo este planteamiento, algunos autores<sup>12</sup> llaman  $\mathbf{K}_{\Delta} = \mathbf{K}_L$ , lo que puede llevar a confusiones en la formulación, pues esta matriz no se corresponde con la  $\mathbf{K}_L$  de Zienkiewicz.

Un aspecto importante y común a todos los métodos es que las diferentes formulaciones se han desarrollado en la hipótesis de axil constante durante todo el proceso. Siendo el axil la causa de los efectos de segundo orden, es evidente que si es constante las formulaciones tangente y secante coinciden, siempre que trabajemos en teoría de pequeños desplazamientos (despreciando  $\mathbf{K}_L$ ) con lo cual el análisis es completamente equivalente al caso lineal: basta modificar las matrices de rigidez elástica de los elementos en función del axil actuante.

Esta es la base de la utilización del método P-delta en estructuras de edificación, pues en éstas las variaciones de axiles son pequeñas y puede admitirse el aproximar la respuesta de la estructura considerando exclusivamente el efecto P-delta a partir del estado permanente.

Un estudio comparativo de los métodos explícitos con las formulaciones en coordenadas intrínsecas nos permite ver que el efecto P-delta se incluye en la compatibilidad geométrica (matriz D de Jennings<sup>19</sup>, en su expresión simplificada) al pasar a una formulación de tipo tangente, mientras el efecto del axil en la rigidez a



Las matrices a utilizar al emplear los métodos explícitos, cabe obtenerlas a partir de la energía de deformación del elemento y aplicando el teorema de Castigliano. La diferencia entre ellos estriba en la hipótesis empleada para aproximar la deformada, que es:

a) Funciones de estabilidad

$$y'' = \frac{M}{EI} + \frac{P y}{EI}$$

b) Matriz geométrica

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

c) P-delta

$$y = ax + b$$

Figura 4. Comparación de los métodos explícitos

flexión, tal como se presenta en la matriz geométrica ( $K'_{\Delta}$ ) aparece al considerar la relación no lineal entre fuerzas y desplazamientos en el elemento.

#### Aspectos que contemplan los métodos explícitos.

Las posibles causas de no linealidad geométrica dentro de la propia pieza, es decir, que originan esfuerzos de segundo orden, son<sup>9</sup>:

- a.- Influencia del axil en la rigidez a flexión de la pieza.
- b.- Efecto P-Delta producido por el desplazamiento transversal del elemento.
- c.- Cambios de longitud del elemento debidos a la flexión y al giro del mismo.
- d.- Deformación por cortante.

Un procedimiento analítico "exacto" debería contemplar todas estas causas de no linealidad aunque siempre son admisibles simplificaciones cuando los efectos de una de ellas son poco importantes.

Todos los métodos explícitos indicados contemplan (b) y en las funciones de

estabilidad y la matriz geométrica se tiene en cuenta (a), al menos de una forma simplificada, pues en ninguno de ellos se consideran las deformaciones previas de la barra (grandes desplazamientos. Matriz ( $\mathbf{K}_L$ )).

La influencia del cortante es siempre posible introducirla en las distintas formulaciones utilizadas<sup>2,24,29</sup>.

La variación en la longitud del elemento debido a la flexión y al giro, suele ser poco importante en problemas prácticos y su formulación está ligada con la consideración de grandes giros en la pieza (Figura 5). Su inclusión en la formulación de barras puede verse en referencia 1, mientras Flemming<sup>11</sup> utiliza una matriz con las funciones de estabilidad en la cual incluye el cambio en la longitud del elemento debido a la flexión.

Por tanto, puede decirse que los métodos explícitos contemplan exclusivamente, en principio, la no linealidad debida a los esfuerzos de segundo orden y partiendo siempre del elemento en la posición sin deformar y sometido a axil constante.

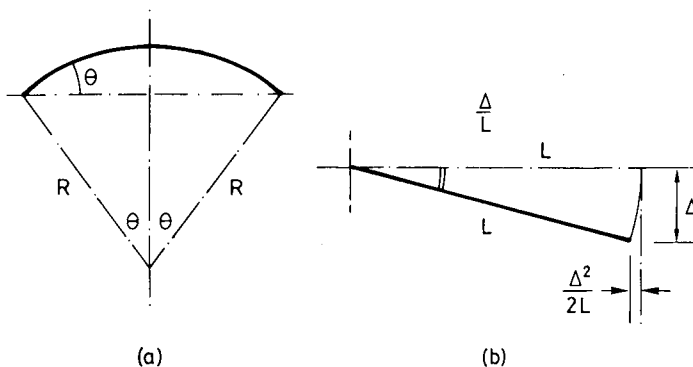
### Limitaciones de los métodos explícitos.

Por otra parte ya se ha citado que las matrices geométrica y P-delta cabe obtenerlas directamente de la formulación de Zienkiewicz(5), siendo dichas matrices la  $\mathbf{K}_\sigma$  expresadas en función del axil existente en la pieza. Por tanto, para obtener una formulación explícita "completa" en las estructuras de barras hay que considerar  $\mathbf{K}_L$ , lo cual no se ha hecho hasta el momento. Es decir, no se ha tenido en cuenta ni la deformada previa de los elementos ni el posible desplazamiento de los mismos como sólido rígido.

Los métodos explícitos se han utilizado en numerosas ocasiones exclusivamente para resolver problemas de estabilidad, con el fin de obtener las cargas críticas de pandeo de determinadas estructuras<sup>1,2,10,14,22,31</sup>, lo que puede conducir a la idea de que la validez de estos procedimientos se ve limitada a estos casos. Zienkiewicz<sup>35</sup> señala el uso y abuso que se ha hecho del cálculo de las cargas críticas a partir de calcular los valores propios del determinante de la matriz ( $\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_\sigma$ ), lo que sólo es válido cuando las deformaciones obtenidas usando la solución lineal ( $\mathbf{K}_0$ ), conduzcan a que la matriz  $\mathbf{K}_L$  sea idénticamente nula, o sea, en los casos de bifurcación de equilibrio. Lo cierto es que estos sistemas pueden emplearse en el análisis no lineal, sin necesidad de referirnos estrictamente al cálculo de las cargas críticas, en la medida que  $\mathbf{K}_L$  sea despreciable. En caso contrario se hace necesario incluir  $\mathbf{K}_L$  en la formulación.

Es evidente que el número de elementos a utilizar para obtener el mismo grado de precisión en el análisis es mayor cuanto menos exacto sea el campo de corrimiento utilizado. Así, si se desean obtener las cargas críticas de pandeo a partir de estos métodos<sup>10,16</sup>, Allen y Bulson<sup>1</sup> indican que el error cometido al emplear la matriz geométrica en vez de las funciones de estabilidad es inferior al 1% siempre que la relación entre el axil y la carga crítica de Euler sea menor a 0,45. Por tanto, para valores de dicha relación que se prevean superiores debe subdividirse el miembro en varios elementos. Si el axil es de compresión, tres elementos como máximo serán suficientes<sup>31</sup>, mientras pueden no serlo si el axil es de tracción.

En relación a una posible eliminación de la matriz  $\mathbf{K}_L$ , ya sabemos, que los problemas de grandes desplazamientos cabe abordarlos utilizando una descripción lagrangiana total del movimiento o una descripción lagrangiana actualizada.



(a) La relación entre el esfuerzo axial  $a$  que se encuentra sometido un elemento y las deformaciones del mismo, es no lineal y puede expresarse :

$$P = EA \left[ \frac{\epsilon}{L} + \frac{1}{30} \left( 2\phi_{AB}^2 - \phi_{AB} \phi_{BA} + 2\phi_{BA}^2 \right) \right]$$

si el elemento se deforma según un arco de circunferencia, en ausencia de axil, se cumple :

$$\phi_{AB} = \theta$$

$$\phi_{BA} = -\theta$$

y el acortamiento aparente debido a la flexión es :

$$\frac{\epsilon}{L} = \frac{\theta^2}{6}$$

(b) El acortamiento aparente de un elemento que experimenta un giro de sólido rígido, medido paralelamente a la dirección inicial del mismo, es:

$$\epsilon = \frac{\Delta^2}{2l}$$

Figura 5. Acortamiento total de un elemento debido al acortamiento real y al acortamiento aparente, flexión y giro como sólido rígido

Aquí resulta interesante citar el trabajo de Stricklin et al<sup>30</sup> quienes a partir de la energía de deformación para una barra recta y por medio del teorema de Castigliano, hallan de una forma explícita las matrices necesarias para trabajar con una barra biarticulada; en su desarrollo, además de la matriz de rigidez y del efecto P-delta, obtienen una tercera matriz que no es más que la matriz de paso de la barra de su posición inicial a la posición deformada: la matriz  $K_L$ .

Dicha matriz no aparecía en el trabajo de Turner<sup>32</sup>, pues éste utilizaba un sistema de coordenadas actualizadas. Igualmente, Argyris<sup>2</sup> ya había indicado que para pequeños corrimientos, la matriz de rigidez del elemento es la misma que la

utilizada en el caso elástico y lineal, siempre que se considere el giro desde la posición deformada a la posición sin deformar. Es decir, mientras Turner utilizaba coordenadas lagrangianas actualizadas, Stricklin, utilizando una formulación lagrangiana total, señala la necesidad de incluir  $\mathbf{K}_L$  en la formulación.

Hibbit<sup>17</sup> recalca la importancia de la matriz de desplazamientos iniciales e indica que esta matriz se ha aproximado en ocasiones por una actualización de coordenadas, lo que sólo es estrictamente correcto si la deformación dentro del elemento es constante, cosa que ocurre para la barra biarticulada.

Bathe y Bolourchi<sup>8</sup>, posteriormente, demuestran que es completamente equivalente el utilizar una formulación lagrangiana o lagrangiana actualizada, pues de hecho la utilización de la matriz  $\mathbf{K}_L$  y el referir las funciones de interpolación a los ejes originales de la barra equivalen a la actualización de coordenadas y a la consideración del campo de corrimientos. En resumen: el usar la matriz  $\mathbf{K}_L$  es equivalente a actualizar coordenadas y tener en cuenta los corrimientos previamente existentes en el elemento.

De lo anterior se deduce que en el caso de las formulaciones explícitas para considerar los grandes desplazamientos deben actualizarse las coordenadas, lo cual es exacto en el caso de las barras biarticuladas y sólo una aproximación en el caso más general, pues no se están teniendo en cuenta las deformaciones previas en el propio elemento. Esto es así porque las matrices obtenidas con los métodos explícitos parten de la hipótesis de barra recta sometida a axil constante y ninguna considera la posibilidad de corrimientos previos en la barra y el giro de la misma, cosa que no ocurre cuando para su obtención se parte de la formulación de Zienkiewicz, a partir de la que se obtiene  $\mathbf{K}_L$ .

Creemos necesario el remarcar la importancia "antagónica" que presentan los efectos de grandes desplazamientos y de segundo orden: ambos consideran la no linealidad geométrica pero bajo puntos de vista diferentes. En una formulación de elementos finitos en que la discretización es importante, los esfuerzos de segundo orden dentro del elemento, ( $\mathbf{K}_\sigma$ ), pueden, en muchas ocasiones, despreciarse<sup>8,26</sup>.

## APLICACION PRACTICA DEL PRESENTE TRABAJO

Para realizar un estudio sobre el comportamiento no lineal de los puentes atirantados<sup>36</sup> y a partir de las conclusiones del estudio precedente, optamos por utilizar una formulación explícita (la matriz geométrica), incluyendo en el programa numérico preparado al efecto, la posibilidad de considerar la deformación por cortante y el cambio aparente de longitud en los elementos debido al giro como sólido rígido. Todo ello, junto a la utilización de coordenadas actualizadas, permite tratar con el máximo rigor, como hemos visto, los aspectos relativos a la no linealidad geométrica de barras. En cuanto a la no linealidad geométrica de los tirantes, desarrollamos una formulación específica<sup>36</sup>, que será objeto de otro artículo.

A modo de ejemplo, puede verse en la Figura 6 uno de los casos estudiados: se trata de un puente de hormigón de 140 + 350 + 140 m de longitud (por simetría, representamos sólo medio puente), en la hipótesis en la cual, la no linealidad de los tirantes influye muy poco. Para la misma, se representa la ley de momentos

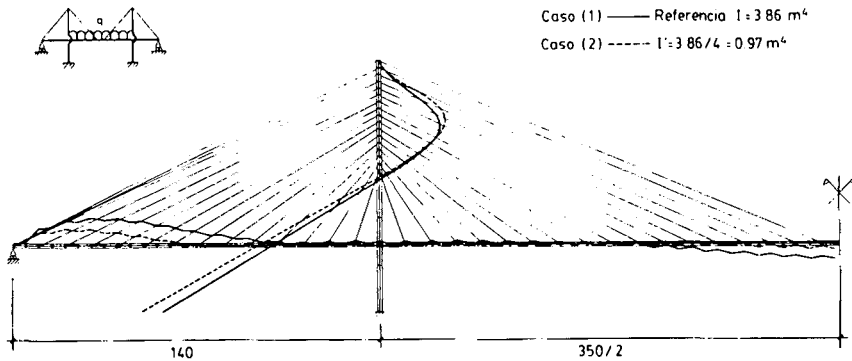


Figura 6. Ejemplo: Comportamiento de un puente atirantado con sobrecarga en el vano central. Momentos flectores para  $q = 400 \text{ Kp/m}^2$

cuando el tablero tiene una inercia de  $3,86 \text{ m}^4$  y cuando dicha inercia se reduce a  $0,965 \text{ m}^4$  (25%), apareciendo en la Figura 7 el desplazamiento que experimenta la sección más solicitada del vano lateral debido a un aumento progresivo de la sobrecarga. Puede verse como éste aumenta de forma no lineal, de manera tanto más acusada, cuanto menor es la inercia del tablero, como cabría esperar; aunque la no linealidad sólo alcanza verdadera importancia para estados avanzados de carga, que pueden considerarse teóricos (superiores a  $1000 \text{ Kp/m}^2$ ).

## CONCLUSIONES

Para poder comprender plenamente el alcance y las limitaciones de las formulaciones explícitas tradicionalmente empleadas en el estudio de las estructuras formadas por barras, hemos procedido a una revisión de sus diferentes formulaciones, prestando especial atención a sus puntos de partida y contrastando las distintas formulaciones entre sí y con el método de los elementos finitos, lo que nos ha permitido llegar a las siguientes conclusiones:

Los métodos explícitos (funciones de estabilidad, matriz geométrica, P-delta):

- 1) son equivalentes entre sí. Las diferencias de formulación se deben a la exactitud del campo de corrimientos utilizado para considerar los esfuerzos de segundo orden.
- 2) las matrices utilizadas son la  $\mathbf{K}_\sigma$  de la formulación de Zienkiewicz.
- 3) la utilización de estos métodos es una aproximación suficientemente exacta en el caso de axil constante (o que varíe poco) y pequeños desplazamientos.
- 4) para tener en cuenta los grandes desplazamientos hay que proceder a actualizar coordenadas, lo que equivale a emplear la matriz  $\mathbf{K}_L$  de Zienkiewicz y sólo es exacto en el caso de las barras biarticuladas
- 5) estos procedimientos no consideran los cambios aparentes en la longitud de un elemento debidos al giro o a la flexión del mismo, aunque estos efectos es posible introducirlos en la formulación empleada.
- 6) los grandes desplazamientos, considerados en  $\mathbf{K}_\sigma$ , y los esfuerzos de segundo

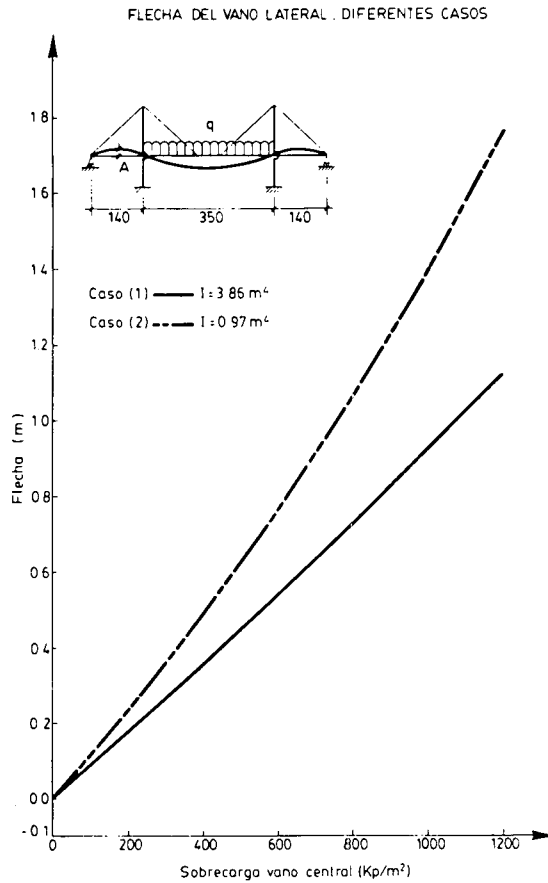


Figura 7. Ejemplo: Evolución de la flecha en la sección A con la sobrecarga. Puede observarse la respuesta marcadamente no lineal para el caso del tablero más esbelto

orden, introducidos en la matriz  $\mathbf{K}_\sigma$ , tienen una importancia "antagónica"; ambos consideran la no linealidad geométrica, pero bajo puntos de vista diferentes. Cuanto mayor es la discretización realizada para modelar la estructura, más importante es la consideración de  $\mathbf{K}_L$  (o, lo que es equivalente, la actualización de coordenadas), frente a  $\mathbf{K}_\sigma$ .

Por otra parte, puede verse cómo las formulaciones en coordenadas intrínsecas aclaran las explícitas, indicando qué fenómenos físicos consideran éstas y cuáles no tienen en cuenta en su desarrollo.

## AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo es parte de una tesis doctoral<sup>36</sup> realizada en la Cátedra de Puentes de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos de Barcelona, y que no habría sido posible sin la ayuda económica recibida del Ministerio de Educación y Ciencia, a través

de una beca F.P.I., durante los años 1983 a 1986. Igualmente, hemos de expresar nuestro agradecimiento a la Generalitat de Catalunya por la concesión de un "Ajut per l'acabament de tesis doctorals", en 1984.

## REFERENCIAS

1. H.G. Allen, y P.S. Bulson, "*Background to Buckling*", McGraw-Hill, Londres, (1980).
2. J.S. Archer, "Consistent Matrix Formulations for Structural Analysis Using Finite-Element Techniques", *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 10, pp. 1910-1918, (1965).
3. J.H. Argyris, "*Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis*", Pergamon Press, (1964).
4. J.H. Argyris, "Matrix Analysis of Three-Dimensional Elastic Media. Small and Large Displacements", *AIAA Journal*, Vol. 3, No. 1, pp. 45-51, (1965).
5. J.R. Atienza y R. Irlés, "Estudio no lineal del comportamiento resistente de soportes de hormigón solicitados a flexocompresión esviada", *Hormigón y Acero*, No. 154, (1985).
6. J. Backlund, "Large Deflection Analysis of Elasto-Plastic Beams and Frames", *Int. J. Mechanical Science*, Vol. 18, pp. 269-277, (1976).
7. F. Baron y M. S. Venkatesan, "Nonlinear Formulations of Beam-Column Effects", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 97, Proc. paper 6943, pp. 1305-1340, (1971).
8. Klaus-Jurgen Bathe y S. Bolourchi, "Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures", *Int. J. for Num. Methods in Engineering*, Vol. 14, pp. 961-986, (1979).
9. C. Birnstiel y J.S.B. Iffland, "Factor Influencing Frame Stability", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 106, Proc. paper 15196, pp. 491-505, (1980).
10. A. Chajes, "*Principles of Structural Stability Theory*", Prentice Hall, New Jersey, (1974).
11. J. Fleming, "Nonlinear Static Anal. of Cable-Stayed Bridge Structures", *Computers & Structures*, Vol. 10, pp. 621-635, (1979).
12. R.J. van Foeken y H.H. Snijder, "Steel column and frame stability analysis using finite element techniques", *Heron*, Vol. 4, (1985).
13. M.S. Gadala y G.A.E. Oravas, "Numerical Solutions of Nonlinear Problems of Continua - I. Survey of Formulation Methods and Solution Techniques", *Computers & Structures*, Vol. 19, No. 5/6, pp. 865-877, (1984).
14. R.H. Gallagher y J. Padlong, "Discrete Element Appr. to Structural Instability Analysis", *AIAA Journal*, Vol. 1, No. 6, pp. 1437-1439, (1963).
15. A. Grelat, "Comportement non Linéaire et Stabilité des Ossatures en Béton armé", *Annales de l'ITBTP*, No. 366, pp. 106-126, (1978).
16. B.J. Hartz, "Matrix Formulation of Structural Stability Problems", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 1, Proc. paper 4572, pp. 141-157, (1965).
17. H.D. Hibbit, P.V. Marcal y J.R. Rice, "A Finite Element Formulation for Problems of Large Strain and Large Displacement", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 6, pp. 1069-1086, (1970).
18. R. Irlés, "Un modelo numérico para el análisis del colapso en entramados metálicos", *Tesis Doctoral*, Valencia, (1985).
19. A. Jennings, "Frame Analysis Including Change of Geometry", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 94, Proc. paper 5839, pp. 627-644, (1968).
20. R.K. Livesley, "*Métodos matriciales para cálculo de estructuras*", Ed. Blume, Madrid, (Edición española), (1970).
21. R.H. Mallett y P.V. Marcal, "Finite Element Analysis of Nonlinear Structures", *Journal*

- of the Structural Division, ASCE, Vol. 94, Proc. paper 6115, pp. 2081-2105, (1968).
22. J.T. Oden, "Calculation of Geometric Stiffness Matrices for Complex Structures", *AIAA Journal*, Vol. 4, No. 8, pp. 1480-1482, (1966).
  23. J. Oliver y E. Oñate, "A Total Lagrangian Formulation for the Geometrically Nonlinear Analysis of Structures Using Finite Elements, Part. II: Arches, Frames and Axisymmetric Shells", *Int. J. for Num. Methods in Engineering*, Vol. 23, pp. 253-274, (1986).
  24. G. Onu, "Shear Effect in Beam Stiffness Matrix", *Journal Structural Engineering, ASCE*, Vol. 109, No. 9, pp. 2216-2221, (1983).
  25. M. Paz y L. Dung, "Power Series Expansion of the General Stiffness Matrix for Beam Elements", *Int. J. for Num. Methods in Engineering*, Vol. 9, pp. 449-459, (1975).
  26. G.H. Powell, "Theory of Nonlinear Elastic Structures", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 95, Proc. paper 6943, pp. 2687-2701, (1969).
  27. J.S. Przemieniecki, "*Theory of Matrix Structural Analysis*", McGraw-Hill, (1968).
  28. S. Rajasekaran y W.A. Murray, "Incremental Finite Element Matrices", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 99, proc. paper 10226, pp. 2423-2438, (1973).
  29. J.M. Saez Benito, "*Cálculo matricial de estructuras formadas por piezas prismáticas*", Fondo Editorial de Ingeniería Naval, Madrid, (1975).
  30. J.A. Stricklin, W.E. Haisler y W.A. Von Riesenmann, "Geometrically Nonlinear Structural Analysis by Direct Stiffness Method", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 97, Proc. paper 8392, pp. 2299-2314, (1971).
  31. M.C. Temple, "Buckling of Stayed Columns", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 103, Proc. paper 12894, pp. 839-851, (1977).
  32. M.J. Turner, E.H. Dill, H.C. Martin y R.J. Martin, "Large Deflections of Structures Subjected to Heating and External Loads", *Journal of the Aerospace Sciences*, pp. 98-101, (1960).
  33. K. Washizu, "*Variational Methods in Elasticity and Plasticity*", Pergamon Press. Londres, (segunda edición), (1974).
  34. R.D. Wood y B. Schrefler, "Geometrically Non-linear Analysis. A correlation of Finite Element Notations", *Int. J. for Num. Methods in Engineering*, Vol. 12, pp. 635-642, (1978).
  35. O.C. Zienkiewicz, "*El método de los elementos finitos*", Ed. Reverté, S.A. Barcelona, (Edición española), (1980).
  36. I. Duque, "Análisis no lineal geométrico de puentes atirantados de hormigón y su aplicación al estudio de la influencia que diversos parámetros ejercen sobre su configuración geométrica y tensional", *Tesis Doctoral*, Barcelona, (1986).