

FORMULAÇÃO PELO MÉTODO DOS RESÍDUOS PESADOS DE UM ELEMENTO FINITO DE NÓS COINCIDENTES PARA MODELAR A TRANSFERÊNCIA DE CALOR NA INTERFACE DE CONTACTO ENTRE DOIS MEIOS DISTINTOS

PAULO M.M. VILA REAL

*Departamento de Engenharia Civil
Universidade de Aveiro
Campus Universitário de Santiago
3810 Aveiro, Portugal
Tel.: + 351-34-37 00 49, Fax: + 351-34-37 09 53
E-mail: pvreal@civil.ua.pt*

SUMÁRIO

Faz-se a formulação pelo método dos resíduos pesados de um elemento finito de nós coincidentes que permite modelar a transmissão de calor através da interface de contacto entre dois meios distintos. A modelação daquela interface obriga à utilização de elementos finitos de espessura extremamente reduzida, os quais são por vezes, responsáveis pela ocorrência de instabilidades numéricas. Pretende-se com o elemento finito especial de nós coincidentes evitar o aparecimento de problemas de mau condicionamento numérico.

Comparam-se os resultados obtidos com este elemento com os que se obtêm com o elemento quadrático de 8 nós e com os resultados de outros autores, em problemas de condução de calor, mostrando-se as vantagens da sua aplicação.

WEIGHTED RESIDUAL FORMULATION OF A FINITE ELEMENT WITH COINCIDENT NODES TO MODEL THE HEAT TRANSFER AT THE CONTACT INTERFACE BETWEEN TWO DISTINCT MEDIUMS

SUMMARY

A weighted residual formulation of a finite element with coincident nodes has been done to model the heat transfer at the contact interface between two distinct mediums. The finite element modelling of that interface requires the use of very thin elements, which are responsible for some numerical instabilities. With the special finite element with coincident nodes we pretend to avoid the occurrence of this numerical ill-conditioning.

The results obtained with this special finite element, in heat conduction problems, are compared with those obtained with the height node quadric element and with the result from other authors and the advantage of its use is shown.

Recibido: Diciembre 1997

INTRODUÇÃO

A transferência de calor através da interface entre dois meios distintos em contacto surge, na prática, em variadíssimas situações. Nomeadamente ela aparece na separação entre o metal vazado e a moldação, quando se pretende simular o arrefecimento de ferros fundidos^{1,4,10,12}.

Pode afirmar-se que esta interface desempenha um papel fundamental e que, em muitos casos, controla o processo de solidificação do metal vazado mais do que qualquer outro parâmetro¹.

O sucesso da simulação do arrefecimento e solidificação do ferro fundido vazado em moldações metálicas está ligado, em grande medida, á capacidade de modelar convenientemente a transferência de calor na interface peça-moldação, a qual depende, fundamentalmente, da pressão de contacto entre aquelas partes, da rugosidade das superfícies, da geometria, da temperatura e ainda da possível formação de camada de ar naquela interface. Fletcher¹³ faz uma revisão e caracterização dos progressos recentes no estudo da resistência térmica de contacto. Nishida *et al.*¹⁶, por seu turno, investiga o processo de formação de camada de ar na interface peça-moldação em sistemas de fundição.

A necessidade de simular aquela interface levou ao desenvolvimento de elementos finitos especiais de nós coincidentes, evitando-se, assim, a utilização dos elementos finitos convencionais, com espessuras extremamente reduzidas, que podem levar ao aparecimento de problemas de mau condicionamento numérico.

EQUAÇÕES BÁSICAS

Transferência de calor na interface

Faz-se em seguida uma breve revisão dos conceitos básicos da transferência de calor na interface entre dois meios em contacto.

Considerem-se dois materiais *A* e *B*, em contacto como mostra a Figura 1a^{4,5,11}. Admitindo-se que é unidimensional, o fluxo de calor entra pelo material *A* e sai do conjunto através de *B*. Em virtude do contacto entre os dois materiais não ser perfeito, como mostra a Figura 1b, existe uma queda da temperatura na interface, representada em esquema na Figura 1c.

A transmissão de calor na interface pode processar-se por condução nas regiões onde há contacto perfeito e por condução e (ou) radiação nas regiões onde os dois meios não se tocam^{3,5,11,12}.

Matematicamente esta transferência de calor pode ser representada de duas maneiras⁴:

- como *convecção equivalente*
- como *condução equivalente*

No primeiro caso admite-se que a interface é constituída por uma película fina de fluido, através do qual tem lugar a convecção. O fluxo de calor q por unidade de área

é então dado pela equação^{1-4,10,12,15-19,23-28}

$$q = h_{\text{int}}(T_2^A - T_2^B) \tag{1}$$

onde h_{int} é o coeficiente de transmissão de calor efectivo através da camada imaginária de fluido na interface, englobando, implicitamente, os diversos modos de transmissão de calor, nomeadamente a condução e/ou a radiação e T_2^A e T_2^B são, respectivamente, as temperaturas dos materiais A e B na interface, como mostra a Figura 1.

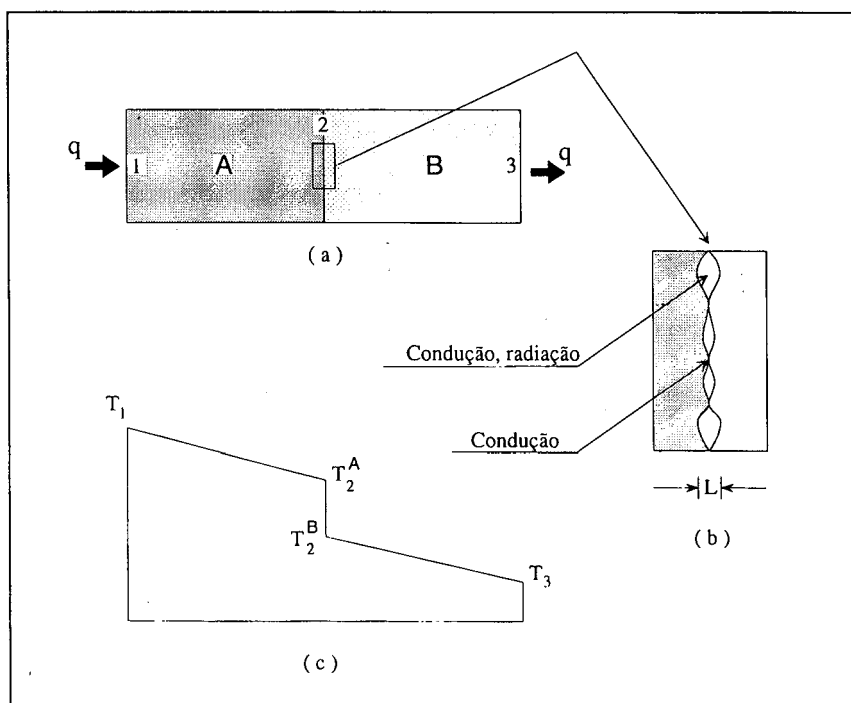


Figura 1. Interface térmica entre dois meios distintos em contacto

No segundo caso pode imaginar-se que a interface é constituída por um sólido fictício de espessura L (Figura 1b) e condutividade k_{int} . Assim, o fluxo de calor através da interface é dado por

$$q = \frac{k_{\text{int}}}{L}(T_2^A - T_2^B) \tag{2}$$

Das equações (1) e (2) podem tirar a seguinte relação

$$k_{\text{int}} = h_{\text{int}}L \tag{3}$$

Aplicando os conceitos acabados de expor, e conhecendo h_{int} , pode discretizar-se a interface por elementos finitos de espessura L , muito reduzida e condutividade

térmica dada pela equação (3). Esta aproximação pode ser usada directamente em qualquer código de elementos finitos existente, não sendo necessário nenhum tratamento matemático adicional. No entanto a utilização de elementos finitos de espessura reduzida, como aqueles que acabamos de sugerir, pode conduzir a instabilidades numéricas, como teremos oportunidade de verificar.

Para evitar este inconveniente, desenvolveremos um elemento finito de nós coincidentes, um pouco à semelhança do elemento de junta utilizado em problemas estruturais^{8,9,28}. A formulação do elemento que se irá desenvolver baseia-se, como veremos, na equação (1), em que se admite que o fluxo de calor na interface é proporcional à diferença de temperaturas entre os dois meios.

A equação de condução de calor e suas condições de fronteira

Considerem-se dois corpos, A e B , em contacto através da interface Γ_i , como mostra a Figura 2. No domínio bidimensional $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$, aí representado, deve ser satisfeita a conhecida equação de condução de calor, que passamos a escrever, considerando, por simplicidade de escrita, os materiais como isotrópicos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dot{Q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{em } Q \quad (4)$$

em que k é a condutividade térmica, \dot{Q} o calor gerado internamente por unidade de volume e de tempo, ρ a massa específica, c_p o calor específico, T a temperatura e t o tempo.

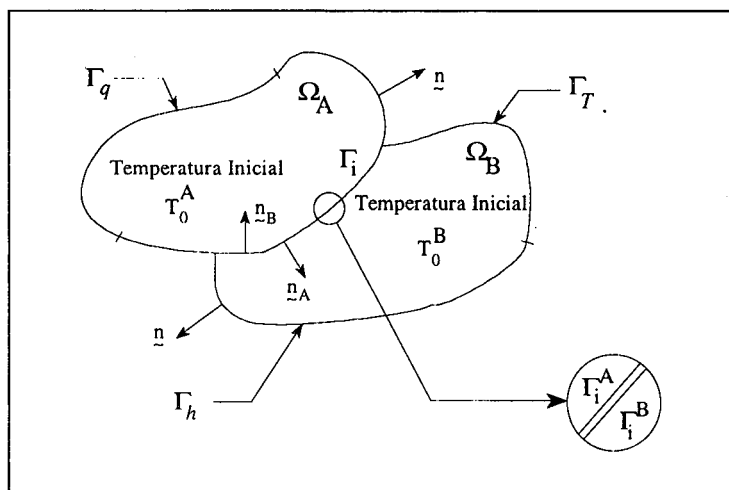


Figura 2. Domínio de solução da equação de condução de calor com as condições iniciais e de fronteira

O campo de temperaturas que satisfaz a equação (4) no domínio Ω , deve satisfazer as seguintes condições de fronteira

$$T = \bar{T} \quad \text{em } \Gamma_T \quad (5a)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{em } \Gamma_q \quad (5b)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h_{cr}(T - T_\infty) \quad \text{em } \Gamma_h \quad (5c)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial n_A} = h_{int}(T_A - T_B) \quad \text{em } \Gamma_i^A \quad (5d)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial n_B} = h_{int}(T_B - T_A) \quad \text{em } \Gamma_i^B \quad (5e)$$

onde os símbolos representam: \bar{T} a temperatura prescrita na parte Γ_T da fronteira, n o versor normal exterior à fronteira, \bar{q} o fluxo de calor prescrito na parte Γ_q da fronteira, h_{cr} o coeficiente de transmissão de calor por convecção e (ou) por radiação na parte Γ_h da fronteira, T_∞ a temperatura ambiente, Γ_i^A a interface pertencente ao corpo A , Γ_i^B a interface pertencente ao corpo B , n_A a normal exterior ao corpo A , ao longo da interface Γ_i^A , n_B a normal exterior ao corpo B , ao longo da interface Γ_i^B , h_{int} o coeficiente de transmissão de calor na interface e T_A e T_B , respectivamente, as temperaturas em Γ_i^A e Γ_i^B .

DISCRETIZAÇÃO DO ESPAÇO

Aplicando à equação (4) e às suas condições de fronteira (5) o Método dos Resíduos Pesados, obtém-se a seguinte equação de erros^{6,7}

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} W_l \left(\frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} + \dot{Q} - \rho c_p \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{W}_l \left(k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} + \bar{q} \right) d\Gamma_q + \\ & + \int_{\Gamma_i^A} \bar{W}_l \left[k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n_A} + h_{int}(\hat{T}_A - \hat{T}_B) \right] d\Gamma_i^A + \int_{\Gamma_i^B} \bar{W}_l \left[k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n_B} + h_{int}(\hat{T}_B - \hat{T}_A) \right] d\Gamma_i^B + \\ & + \int_{\Gamma_h} \bar{W}_l \left[k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} + h_{cr}(\hat{T} - T_\infty) \right] d\Gamma_h = 0 \quad l = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Integrando agora por partes o integral estendido a Ω em (6), de acordo com o teorema de Green, vem

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W_l}{\partial x} k \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} + \frac{\partial W_l}{\partial y} k \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_q \cup \Gamma_h} W_l k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_i^A} W_l k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n_A} d\Gamma_i^A + \\
& + \int_{\Gamma_i^B} W_l k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n_B} d\Gamma_i^B + \int_{\Omega} W_l \dot{Q} d\Omega - \int_{\Omega} W_l \rho c_p \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{W}_l k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} d\Gamma_q + \\
& + \int_{\Gamma_q} \bar{W}_l \bar{q} d\Gamma_q + \int_{\Gamma_i^A} \bar{W}_l k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n_A} d\Gamma_i^A + \int_{\Gamma_i^A} \bar{W}_l h_{\text{int}} (\hat{T}_A - \hat{T}_B) d\Gamma_i^A + \\
& + \int_{\Gamma_i^B} \bar{W}_l k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n_B} d\Gamma_i^B + \int_{\Gamma_i^B} \bar{W}_l h_{\text{int}} (\hat{T}_B - \hat{T}_A) d\Gamma_i^B + \\
& + \int_{\Gamma_h} \bar{W}_l k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} d\Gamma_h + \int_{\Gamma_h} \bar{W}_l h_{\text{cr}} \hat{T} d\Gamma_h - \int_{\Gamma_h} \bar{W}_l h_{\text{cr}} \hat{T}_{\infty} d\Gamma_h = 0 \quad l = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{7}$$

Escolhendo as funções peso na fronteira, simétricas das adoptadas no domínio ($\bar{W}_l = -W_l$), discretizando o espaço em elementos finitos e utilizando o método de Galerkin ($W_l = N_l$), obtém-se o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\mathbf{KT} + \mathbf{CT} = \mathbf{F} \tag{8}$$

onde

$$\begin{aligned}
K_{lm} = & \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial N_l}{\partial x} k \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} k \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) d\Omega^e + \sum_{e=1}^H \int_{\Gamma_h^e} h_{\text{cr}} N_l N_m d\Gamma_h^e + \\
& + \sum_{e=1}^I \int_{\Gamma_i^{Ae}} h_{\text{int}} N_l (N_A - N_B) d\Gamma_i^{Ae} + \sum_{e=1}^I \int_{\Gamma_i^{Be}} h_{\text{int}} N_l (N_B - N_A) d\Gamma_i^{Be} \\
& 1 \leq l, m \leq n
\end{aligned} \tag{9a}$$

$$C_{lm} = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} \rho c_p N_l N_m d\Omega^e \quad 1 \leq l, m \leq n \tag{9b}$$

$$F_l = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} N_l \dot{Q} d\Omega^e - \sum_{e=1}^Q \int_{\Gamma_q^e} N_l \bar{q} d\Gamma_q^e + \sum_{e=1}^H \int_{\Gamma_h^e} N_l h_{\text{cr}} T_{\infty} d\Gamma_h^e \quad 1 \leq l \leq n \tag{9c}$$

e N_A são funções de forma correspondentes a nós da fronteira do tipo Γ_i^A , N_B funções de forma correspondentes a nós da fronteira do tipo Γ_i^B , E número total de elementos, H número de elementos com fronteira do tipo Γ_h , I número de elementos com fronteiras do tipo Γ_i^A ou Γ_i^B e Q número de elementos com fronteira do tipo Γ_q .

DISCRETIZAÇÃO DO TEMPO

As equações semi-discretizadas (8), resultantes da discretização apenas do espaço, representam matematicamente um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem cuja solução passa pela sua integração relativamente ao tempo.

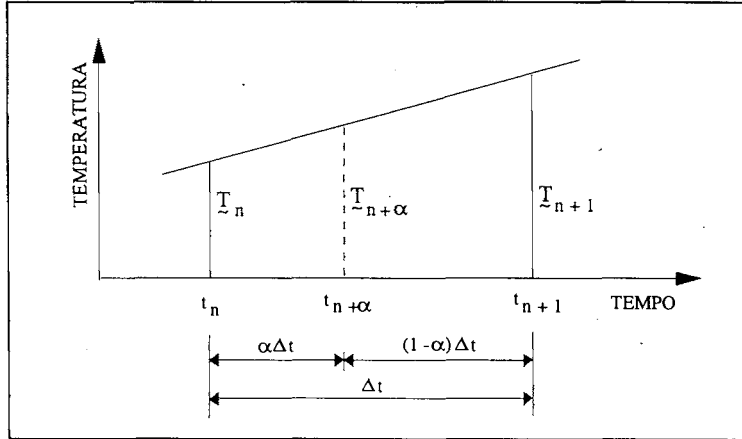


Figura 3. Variação linear da temperatura ao longo do intervalo de tempo Δt

Neste trabalho adoptamos uma discretização do tempo através de diferenças finitas, tendo-nos baseado nas seguintes hipóteses:

- a) O sistema de equações (8) é apenas satisfeito em “pontos” discretos $t_{n+\alpha}$ de cada intervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$ em que se discretizou o tempo (Figura 3).
- b) Uma vez que o sistema envolve apenas derivadas de primeira ordem, considera-se que a temperatura varia linearmente ao longo do intervalo de tempo Δt (Figura 3), desde o instante t_n ao instante

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t \quad n \in [0, 1, 2, \dots, N - 1] \quad (10)$$

A Figura 3 mostra um “elemento” de tempo típico, de comprimento Δt e temperaturas nodais \mathbf{T}_n e \mathbf{T}_{n+1} .

As temperaturas $\mathbf{T}_{n+\alpha}$ no instante $t_{n+\alpha} = t_n + \alpha\Delta t$ podem ser dadas por

$$\mathbf{T}_{n+\alpha} = \mathbf{T}_n + \alpha(\mathbf{T}_{n+1} - \mathbf{T}_n), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad n \in [0, 1, 2, \dots, N - 1] \quad (11)$$

onde α é um parâmetro que define, dentro de cada intervalo de tempo, o instante em que as equações (8) devem ser satisfeitas.

De acordo com a hipótese b) a derivada de temperatura em ordem ao tempo é constante dentro de cada intervalo de tempo e dada por

$$\dot{\mathbf{T}}_{n+\alpha} = \frac{\mathbf{T}_{n+1} - \mathbf{T}_n}{\Delta t} \quad (12)$$

Substituindo (11) e (12) na equação (8) definida no instante $t_{n+\alpha}$, encontramos a seguinte fórmula de recorrência

$$\left(\mathbf{K}_{n+\alpha} + \frac{1}{\alpha\Delta t} \mathbf{C}_{n+\alpha} \right) \mathbf{T}_{n+\alpha} = \mathbf{F}_{n+\alpha} + \frac{1}{\alpha\Delta t} \mathbf{C}_{n+\alpha} \mathbf{T}_n \quad (13)$$

onde as matrizes $\mathbf{K}_{n+\alpha}$ e $\mathbf{C}_{n+\alpha}$ e o vector $\mathbf{F}_{n+\alpha}$ são calculados no instante $t_{n+\alpha}$.

Para problemas lineares aquela exigência é dispensada, pois essas matrizes e o vector permanecem constantes ao longo do tempo. Para problemas não-lineares, em que as propriedades do material e as condições de fronteira dependem da temperatura, a solução de (8) requer a utilização de um procedimento iterativo (descrito seguidamente).

Reescrevendo a fórmula de recorrência (13) de outro modo teremos

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+\alpha} \mathbf{T}_{n+\alpha} = \hat{\mathbf{F}}_{n+\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad n \in [0, 1, 2, \dots, N-1] \quad (14)$$

onde

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+\alpha} = \mathbf{K}_{n+\alpha} + \frac{1}{\alpha\Delta t} \mathbf{C}_{n+\alpha} \quad (15)$$

e

$$\hat{\mathbf{F}}_{n+\alpha} = \mathbf{F}_{n+\alpha} + \frac{1}{\alpha\Delta t} \mathbf{C}_{n+\alpha} \mathbf{T}_n \quad (16)$$

Resolvido o sistema de equações (14) para $\mathbf{T}_{n+\alpha}$, as temperaturas no final do intervalo de tempo, ou seja, no instante $t_{n+\alpha}$, são dadas por

$$\mathbf{T}_{n+\alpha} = \frac{1}{\alpha} \mathbf{T}_{n+\alpha} + \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \mathbf{T}_n \quad (17)$$

sendo estas as temperaturas iniciais quando se avança para o intervalo de tempo seguinte.

Fazendo variar o parâmetro α , obtêm-se vários esquemas de integração no tempo^{28,29}. Se $\alpha \neq 0$, os esquemas são designados de implícitos, correspondendo os mais usuais a $\alpha = 1/2$ (Crank-Nicolson), $\alpha = 2/3$ (Galerkin) e $\alpha = 1$ (Euler-Backward).

Segundo Hughes³⁰, o algoritmo que acabamos de apresentar nas equações (14) a (17) tem os mesmos critérios de estabilidade, quer se trate de problemas lineares ou de problemas não-lineares, sendo *incondicionalmente estáveis* quando $\alpha \geq 1/2$.

O PROCESSO ITERATIVO EM PROBLEMAS NÃO-LINEARES

Em problemas não-lineares, em que as propriedades térmicas do material dependem da temperatura, o sistema de equações (8) pode ser escrito na seguinte forma

$$\mathbf{K}(\mathbf{T}, t) \mathbf{T}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{T}, t) \dot{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{T}, t) \quad (18)$$

Não há um método geral para resolver este sistema não linear de equações diferenciais, no entanto existem várias técnicas numéricas essencialmente baseadas

numa integração linear no tempo e utilizando processos iterativos^{28,29}. Na referencia⁶ foram implementadas e comparadas algumas dessas técnicas.

No presente trabalho implementou-se o algoritmo proposto na refência³¹ e mais tarde utilizado nas referências^{6,28}. Assim, aplicando a (18) o mesmo processo de integração no tempo descrito na secção precedente, obtém-se novamente

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+\alpha} \mathbf{T}_{n+\alpha} = \hat{\mathbf{F}}_{n+\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad n \in [0, 1, 2, \dots, N - 1] \quad (19)$$

mas agora as matrizes \mathbf{K} e \mathbf{C} e o vector \mathbf{F} , necessários à construção de $\hat{\mathbf{K}}_{n+\alpha}$ e de $\hat{\mathbf{F}}_{n+\alpha}$ dados pelas equações (15) e (16), podem variar ao longo do intervalo de tempo Δt em função da temperatura e do tempo, pelo que devem ser calculados no instante $t_{n+\alpha}$.

Assim

$$\mathbf{K}_{n+\alpha} = \mathbf{K}(\mathbf{T}_{n+\alpha}, t_{n+\alpha}), \quad \mathbf{C}_{n+\alpha} = \mathbf{C}(\mathbf{T}_{n+\alpha}, t_{n+\alpha}), \quad \mathbf{F}_{n+\alpha} = \mathbf{F}(\mathbf{T}_{n+\alpha}, t_{n+\alpha}) \quad (20)$$

Devido a esta não linearidade, a equação (18) não é, em geral, satisfeita, pelo que é necessário implementar um processo iterativo com vista à obtenção da convergência. Neste trabalho adoptou-se um procedimento baseado no método de Newton-Raphson modificado³¹, que em seguida se descreve sucintamente.

Não sendo satisfeita a equação (18), durante o passo i do processo iterativo existirá um sistema de *forças residuais* da forma

$$\Psi_{n+\alpha}^i = \hat{\mathbf{F}}_{n+\alpha}^i - \hat{\mathbf{K}}_{n+\alpha}^i \mathbf{T}_{n+\alpha}^{i+1} \neq 0 \quad (21)$$

A solução corrigida $\mathbf{T}_{n+\alpha}^{i+1}$ em cada iteração, pode ser calculada por

$$\Delta \mathbf{T}_{n+\alpha}^i = [\hat{\mathbf{K}}_{n+\alpha}^i]^{-1} \Psi_{n+\alpha}^i \quad (22)$$

e

$$\mathbf{T}_{n+\alpha}^{i+1} = \mathbf{T}_{n+\alpha}^i + \Delta \mathbf{T}_{n+\alpha}^i \quad (23)$$

em que a matriz $\hat{\mathbf{K}}_{n+\alpha}^i$ em (22) corresponde à matriz jacobiana do método de Newton-Raphson original, mas em que se retiraram os termos não simétricos com o objectivo de preservar a simetria³¹.

O processo iterativo continua, resolvendo-se o sistema (22) para $\Delta \mathbf{T}_{n+\alpha}^i$, em cada novo passo do processo iterativo, até que a solução convirja, sendo a matriz $\hat{\mathbf{K}}_{n+\alpha}^i$ em (22) actualizada em cada iteração. É, no entanto, possível implementar variantes do método de Newton-Raphson em que aquela matriz é apenas actualizada em iterações predefinidas, numa tentativa de reduzir os tempos de computação ou, eventualmente, de melhorar a solução obtida^{6,31}.

Quanto ao critério de convergência adoptado, ele consiste em

$$\frac{\|\Delta \mathbf{T}_{n+\alpha}^i\|}{\|\mathbf{T}_{n+\alpha}^{i+1}\|} < \text{TOL} \quad (24)$$

onde TOL é a tolerância exigida, $\|\cdot\|$ a norma euclidiana, $\Delta \mathbf{T}_{n+\alpha}^i$ a alteração ao campo de temperaturas na iteração i e $\mathbf{T}_{n+\alpha}^{i+1}$ a temperatura actual.

O ELEMENTO DE INTERFACE DE NÓS COINCIDENTES

A presença dos integrais estendidos a Γ_i^A e a Γ_i^B na expressão (9a) faz com que a matriz \mathbf{K}^e correspondente a elementos adjacentes à interface, não seja simétrica, deixando mesmo de ser quadrada, como teremos oportunidade de verificar.

Consideremos, para exemplificar, o domínio representado na Figura 4, discretizado por dois elementos planos de quatro nós, existindo entre eles uma interface de contacto Γ_i .

Vejamos qual a contribuição do primeiro elemento, correspondente à interface, ou seja, correspondente apenas ao integral estendido a Γ_i^A , já que o integral estendido a Γ_i^B é nulo para este elemento.

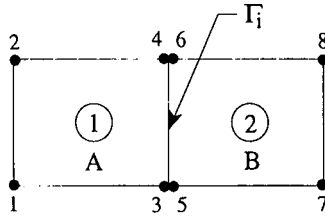


Figura 4. Domínio discretizado por dois elementos. Numeração dos nós e dos elementos

Dado que podemos aproximar as temperaturas na interface por

$$\hat{\mathbf{T}}_A = N_3 T_3 + N_4 T_4 \quad \text{em } \Gamma_i^A \quad (25)$$

e

$$\hat{\mathbf{T}}_B = N_5 T_5 + N_6 T_6 \quad \text{em } \Gamma_i^B \quad (26)$$

representando N_3, N_4, N_5 e N_6 funções de forma globais, a matriz correspondente ao integral

$$\int_{\Gamma_i^{Ae}} h_{\text{int}} N_l (N_A - N_B) d\Gamma_i^{Ae} \quad (27)$$

vem

$$\int_{\Gamma_i^{Ae}} \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & N_3 N_3 & N_3 N_4 & -N_3 N_5 & -N_3 N_6 \\ \dots & \dots & N_4 N_3 & N_4 N_4 & -N_4 N_5 & -N_4 N_6 \end{bmatrix} h_{\text{int}} d\Gamma_i^{Ae} \quad (28)$$

a qual introduz não simetria na matriz \mathbf{K}^e do elemento, como se pode constatar. No entanto a matriz global do sistema resulta simétrica, como facilmente se pode verificar

pela expressão (29), a qual resultou de somar a (28) a contribuição do segundo elemento relativa à interface.

$$\int_{\Gamma_i^e} \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & +N_3N_3 & +N_3N_4 & -N_3N_5 & -N_3N_6 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & +N_4N_3 & +N_4N_4 & -N_4N_5 & -N_4N_6 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & -N_5N_3 & -N_5N_4 & +N_5N_5 & +N_5N_6 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & -N_6N_3 & -N_6N_4 & +N_6N_5 & +N_6N_6 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} h_{\text{int}} d\Gamma_i^e \quad (29)$$

Este facto sugere a utilização de um novo elemento cuja matriz é simétrica e igual à contribuição dada pelos dois elementos adjacentes à interface. Este elemento é um elemento de nós coincidentes e, relativamente ao domínio correspondente à Figura 4, estaria localizado como mostra a Figura 5.

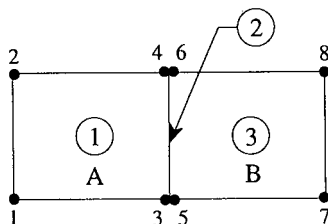


Figura 5. Discretização do domínio, mostrando-se o elemento de interface de nós coincidentes

A nova discretização adoptada para esse domínio possui agora três elementos finitos, sendo dois elementos planos de quatro nós e um elemento de interface.

Este elemento contribui apenas para a matriz **K**, sendo essa contribuição dada por

$$K_{lm}^{\text{int}^e} = \pm \int_{\Gamma_i^e} N_l N_m h_{\text{int}} d\Gamma_i^e \quad (30)$$

devendo o sinal positivo ser utilizado se *l* e *m* correspondem a nós pertencentes ao mesmo lado do elemento e o sinal negativo no caso contrário.

As funções de forma unidimensionais, usadas na expressão (3), estão tabeladas na Figura 6, onde se encontram representados o elemento linear de 4 nós e o elemento quadrático de 6 nós, destinando-se o primeiro a ser usado em conjunto com elementos planos de 4 nós e o segundo a ser utilizado com elementos planos de 8 ou 9 nós.

De acordo com a equação (30) e a numeração dos nós adoptada na Figura 6, e novamente exemplificando para o elemento linear de 4 nós, temos

$$K_e^{int} = \int_{\Gamma_i^e} \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 & -N_1 N_3 & -N_1 N_4 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 & -N_2 N_3 & -N_2 N_4 \\ -N_3 N_1 & -N_3 N_2 & N_3 N_3 & N_3 N_4 \\ -N_4 N_1 & -N_4 N_2 & N_4 N_3 & N_4 N_4 \end{bmatrix} h_{int} d\Gamma_i^e \quad (31)$$

Estes elementos de interface de nós coincidentes, como já referimos, não contribuem para a matriz C_e e o vector F_e , ou seja $C_e^{int} = 0$ e $F_e^{int} = 0$.

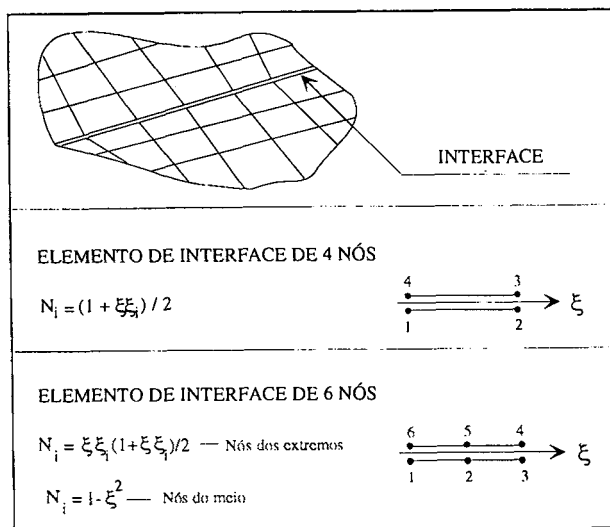


Figura 6. Funções de forma para os elementos de interface de 4 e 6 nós

Refira-se ainda que os integrais de linha estendidos a Γ_i^A e a Γ_i^B , devem desaparecer da equação (9a), quando se utiliza o elemento de nós coincidentes para simular a interface, sendo neste caso, a expressão da matriz condutividade global dada por

$$K_{lm} = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) d\Omega^e + \sum_{e=1}^H \int_{\Gamma_h^e} h_{cr} N_l N_m d\Gamma_h^e + \sum_{e=1}^l K_{lm}^{int^e} \quad (32)$$

$1 \leq l, m \leq n$

onde $K_{lm}^{int^e}$ é dado pela equação (30).

EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta secção serão apresentados três exemplos numéricos. O primeiro destina-se a pôr em evidência os benefícios da utilização dos elementos de interface, acabados de desenvolver, em relação ao elemento isoparamétrico de 8 nós, de espessura reduzida. Os restantes exemplos destinam-se a testar a eficiência do programa computacional implementado, comparando os resultados obtidos com os resultados de Chandra⁴.

Exemplo 1: Cilindro longo composto por dois materiais

Este exemplo trata o arrefecimento de um cilindro longo constituído por dois materiais, cujas propriedades térmicas estão tabeladas na Tabela I.

Conductividade (mat. A)	$k = 51,9$	[W/mK]
Capacidade calorífica (mat. A)	$\rho c_p^A = 3045768,0$	[J/m ³ K]
Temperatura inicial (mat. A)	$T_0^A = 600,0$	[°C]
Conductividade (mat. B)	$k_B = 45,0$	[W/mK]
Capacidade calorífica (mat. B)	$\rho c_p^B = 3626640,0$	[J/m ³ K]
Temperatura inicial (mat. B)	$T_0^B = 20,0$	[°C]
Coef. de transm. na interface	$h_{int} = 1000,0$	[W/m ² °C]
Coef. de transm. por convecção	$h_c = 21,0$	[W/m ² °C]
Temperatura ambiente	$T_\infty = 20,0$	[°C]

Tabela I. Propriedades térmicas para o exemplo 1

Foi utilizado o *esquema de Galerkin* ($\alpha = 2/3$), um intervalo de tempo $\Delta t = 1,0$ s e fez-se uma análise bidimensional, considerando-se apenas um quarto da secção do cilindro. As características geométricas e as condições de fronteira, estão representadas na Figura 7, onde se pode ver também a discretização adoptada para o domínio, tendo sido utilizados elementos finitos isoparamétricos de 8 nós.

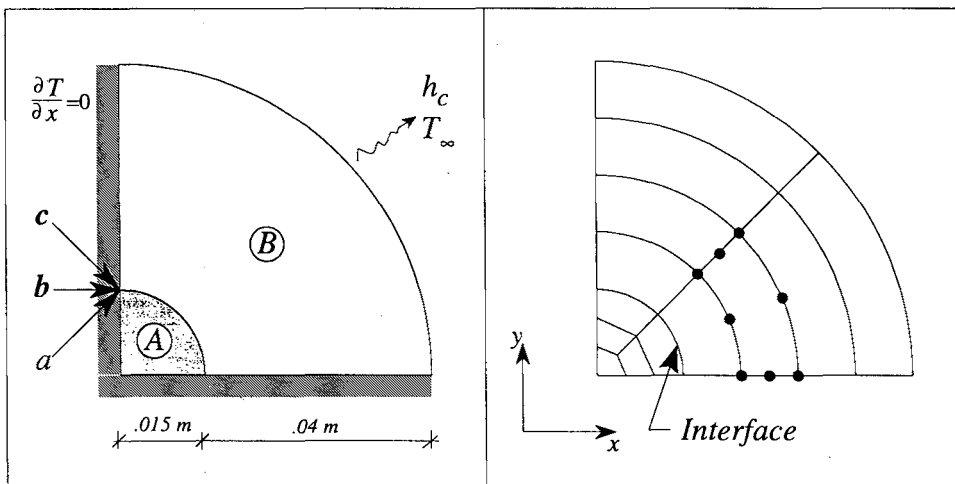


Figura 7. Características geométricas, condições de fronteira e malha de elementos finitos adoptada

Quanto à interface, ela foi discretizada de duas maneiras distintas (Figura 8):

- a) Através de elementos finitos isoparamétricos de 8 nós (Figura 8), de espessura reduzida, $L = 0,0005$ m e condutividade térmica dada pela equação (3)

$$k_{\text{int}} = h_{\text{int}}L = 0,5 \quad \text{W/m } ^\circ\text{C}$$

e ainda com capacidade calorífica ρc_p nula.

- b) Através de elementos de interface de nós coincidentes (Figura 8).

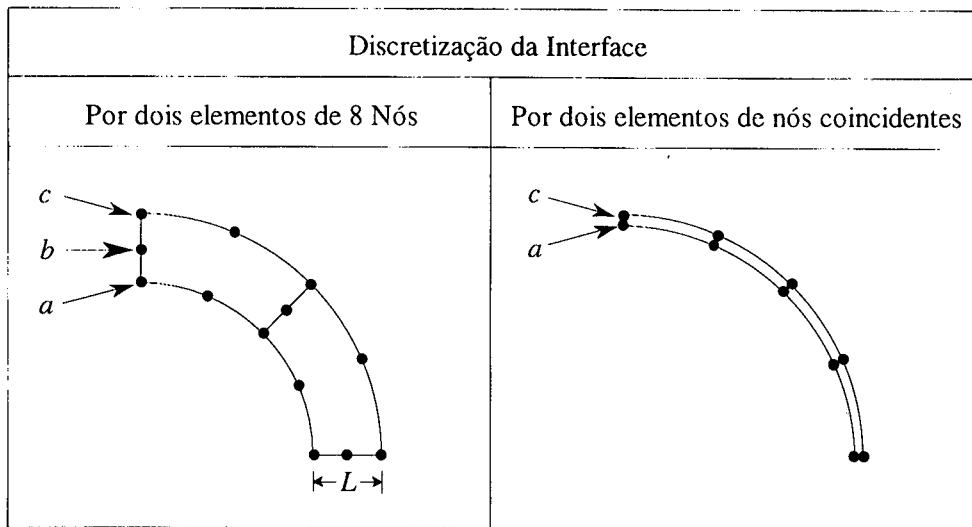


Figura 8. Discretização adoptada para a interface

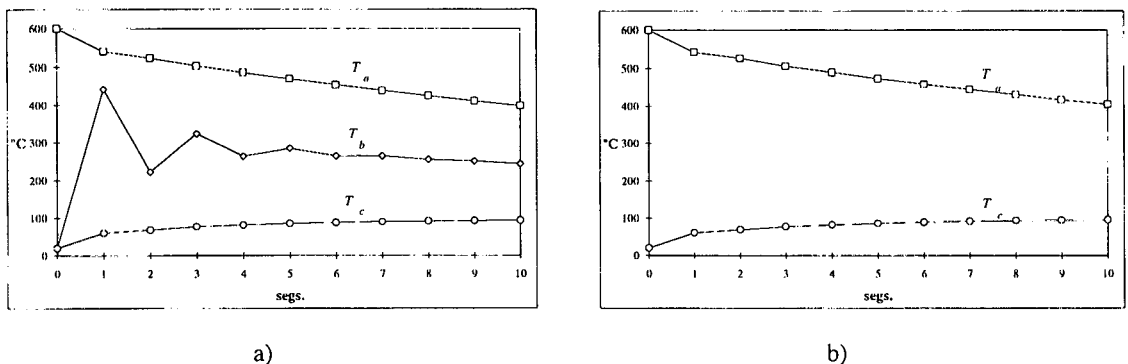


Figura 9. Evolução da temperatura ao longo do tempo, para os pontos a, b e c:
 a) resultados obtidos com elementos de 8 nós na interface,
 b) resultados obtidos com elementos de nós coincidentes na interface

Na Figura 9a e b é possível comparar a evolução da temperatura ao longo do tempo, obtida com o elemento de 8 nós e o elemento de interface de nós coincidentes. Como se pode verificar a utilização destes últimos evita o aparecimento de oscilações numéricas.

A Figura 10 mostra o perfil de temperaturas ao fim de 10 segundos, ao longo de uma direcção radial, pondo em evidência a queda de temperaturas que ocorre na interface de contacto entre os dois materiais.

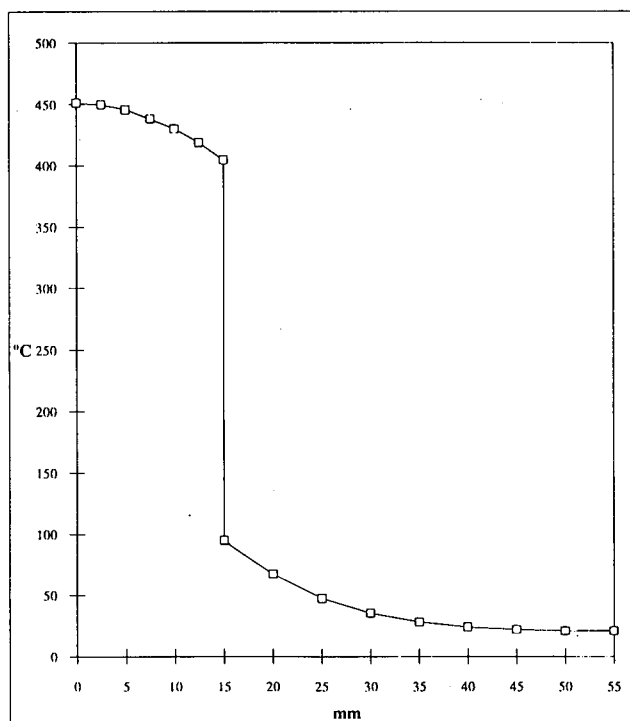


Figura 10. Perfil radial de temperaturas ao fim de 10 segundos, obtido com elementos de nós coincidentes

Exemplo 2: Placa semi-infinita composta por dois materiais

Este exemplo foi estudado na referência⁴ e trata o arrefecimento e a solidificação de uma placa infinitamente longa de uma liga metálica vazada numa moldação cerâmica, utilizada pela General Electric Co. As características térmicas e geométricas da placa estão representadas na Figura 11 e as propriedades térmicas dos dois materiais em função da temperatura estão descritas nas Tabelas II e III.

Em virtude de se pretender fazer uma comparação dos nossos resultados com os resultados apresentados na referência⁴, foi utilizado o mesmo sistema de unidades usado naquela referência, não sendo, portanto, utilizado aqui o SIU (Sistema Internacional de Unidades), como se fez no exemplo anterior.

As temperaturas *liquidus* e *solidus* da liga metálica são, respectivamente, de 2900 e de 2556 °R. Admitiu-se que o calor se transmite para o exterior por radiação, valendo

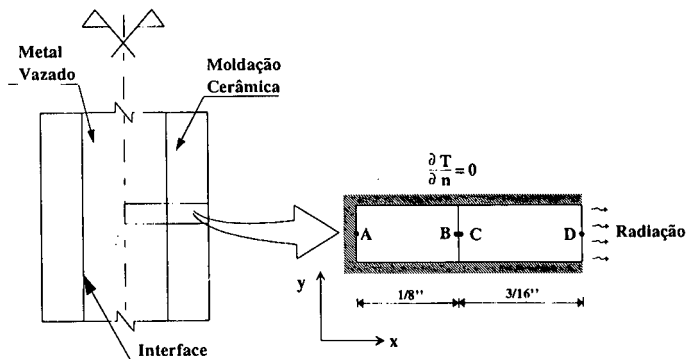


Figura 11. Placa semi-infinita. Domínio de solução e condições de fronteira

a constante de Stefan-Boltzmann, $\sigma = 3,3063 \times 10^{-15}$ Btu/sec in² °R⁴ e a emissividade $\epsilon = 0,9$. A temperatura inicial da liga metálica foi considerada em alguns testes igual a 2900 °R, e noutros a 3249 °R, sendo a temperatura da moldação, em todos os testes, igual a 2489 °R e a temperatura ambiente $T_{\infty} = 540$ °R.

Temperatura (°R)	ρc_p Modificado (Btu/ in ³ °R)	Conductividade k (Btu/sec in °R)
531,0	2,971E-02	1,592E-04
2556,0	4,850E-02	4,011E-04
2764,0	1,189E-01	4,050E-04
2835,0	2,024E-01	4,089E-04
2844,0	3,822E-01	4,095E-04
2894,0	3,766E-01	4,160E-04
2900,0	4,692E-02	4,180E-04
4500,0	4,185E-02	6,484E-04

Tabla II. Propriedades térmicas da liga metálica

Temperatura (°R)	ρc_p (Btu/in ³ °R)	Conductividade k (Btu/sec in °R)
720,0	1,781E-02	5,564E-05
1080,0	1,971E-02	4,962E-05
1440,0	2,086E-02	4,494E-05
1800,0	2,179E-02	4,159E-05
2160,0	2,264E-02	3,932E-05
2520,0	2,341E-02	3,745E-05
2880,0	2,416E-02	3,651E-05
3240,0	2,488E-02	3,558E-05

Tabla III. Propriedades térmicas da moldação cerâmica

Para discretização do domínio considerou-se uma faixa de 10 elementos finitos isoparamétricos de 8 nós de igual dimensão e na interface considerou-se um elemento de nós coincidentes quadrático de 6 nós. Utilizou-se o *esquema Crank-Nicholson* ($\alpha = 1/2$) e um intervalo de tempo $\Delta t = 0,1$ segundos. O coeficiente de transmissão de calor na interface h_{int} foi considerado igual a $3,4 \times 10^{-4}$ Btu/sec in² °R⁴ em algumas situações e metade daquele valor noutras.

Para a modelação da mudança de fase utilizou-se o mesmo método que na referência⁴, ou seja, a libertação de calor latente que acompanha a solidificação é tida em conta na definição da capacidade calorífica, o que é melhor realçado se representarmos em gráfico os valores da capacidade calorífica dados na Tabela II, como mostra a Figura 12.

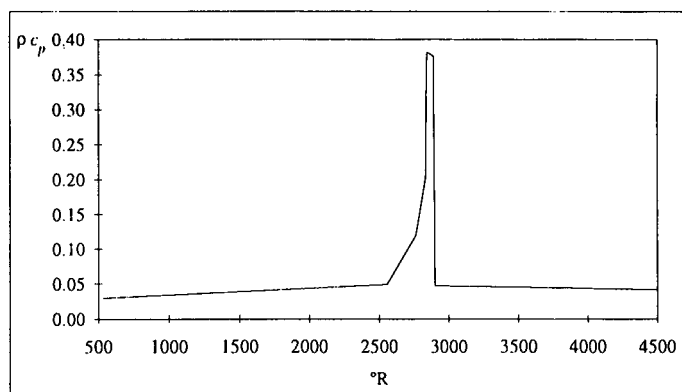


Figura 12. Representação gráfica da capacidade calorífica da liga metálica vazada, de acordo com os valores da Tabela II

Na Tabela IV comparam-se os tempos necessários para o ponto A no eixo da placa solidificar, com os valores apresentados na referência⁴, para vários valores da temperatura inicial da liga metálica e do coeficiente de transmissão na interface. Como se pode verificar, os resultados por nós obtidos são muito semelhantes aos daquela referência.

	h_{int}	Temperatura inicial	Valores obtidos	Ref ¹⁴
Teste	(Btu/sec in ² °R)	(°R)	(s)	(s)
A	3,4E-4	2900	99,0	98,5
B	1,7E-4	2900	118,6	118,5
C	3,4E-4	3249	122,1	122,5

Tabla IV. Tempos necessários à solidificação do ponto A

A Figura 13 mostra a evolução das temperaturas ao longo do tempo, correspondente a uma temperatura de vazamento, ou seja, uma temperatura inicial da liga metálica de $2900\text{ }^{\circ}\text{R}$ e um coeficiente de transmissão de calor na interface $h_{\text{int}} = 3,4 \times 10^{-4}\text{ Btu/sec in}^2\text{ }^{\circ}\text{R}$. Como se pode verificar, obtiveram-se resultados muito semelhantes aos da referência⁴.

Na Figura 14 pode analisar-se o efeito de uma redução para metade do coeficiente de transmissão de calor na interface.

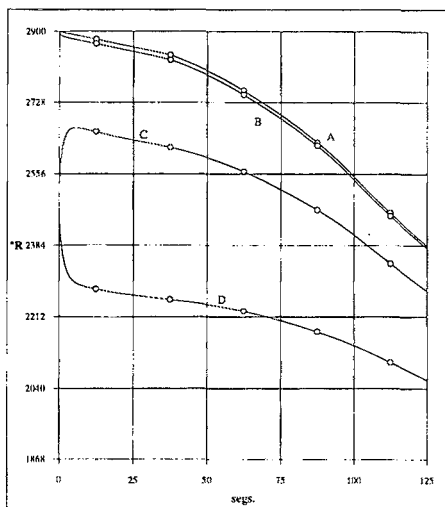
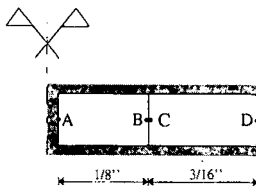


Figura 13. Evolução da temperatura para uma temperatura de vazamento, $T_0 = 2900\text{ }^{\circ}\text{R}$ e $h_{\text{int}} = 3,4 \times 10^{-4}\text{ Btu/sec in}^2\text{ }^{\circ}\text{R}$
 - valores obtidos, (o) - ref.⁴

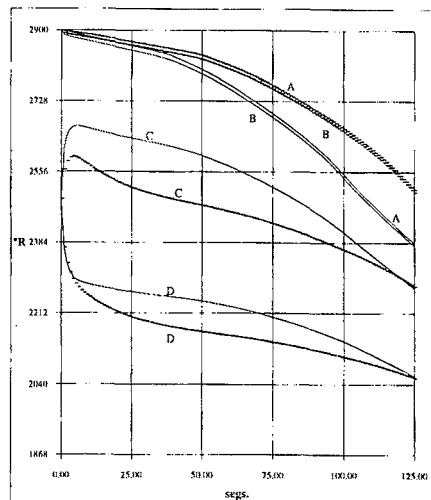
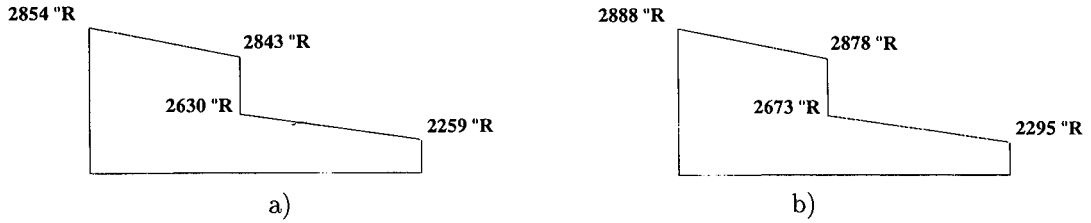


Figura 14. Evolução da temperatura para uma temperatura de vazamento $T_0 = 2900\text{ }^{\circ}\text{R}$.
 - valores obtidos com $h_{\text{int}} = 3,4 \times 10^{-4}\text{ Btu/sec in}^2\text{ }^{\circ}\text{R}$,
 - - valores obtidos com $h_{\text{int}} = 1,7 \times 10^{-4}\text{ Btu/sec in}^2\text{ }^{\circ}\text{R}$

A Figura 15 mostra as temperaturas obtidas ao fim de 30 segundos, considerando-se um coeficiente de transmissão de calor na interface $h_{\text{int}} = 3,4 \times 10^{-4}\text{ Btu/sec in}^2\text{ }^{\circ}\text{R}$. Nessa Figura pode ainda verificar-se o efeito da temperatura de vazamento da liga metálica.

Na Figura 16 comparam-se os resultados obtidos para a evolução das temperaturas, com os resultados da referência⁴. Considerou-se uma temperatura de vazamento da liga metálica de $T_0 = 3249\text{ }^{\circ}\text{R}$, superior, portanto, à temperatura de *liquidus* ($2900\text{ }^{\circ}\text{R}$) e um coeficiente de transmissão de calor na interface $h_{\text{int}} = 3,4 \times 10^{-4}\text{ Btu/sec in}^2\text{ }^{\circ}\text{R}$.



Ponto	Valores obtidos (°R)	Ref. ⁴ (°R)	Ponto	Valores obtidos (°R)	Ref. ⁴ (°R)
A	2853,970	2854,0	A	2888,458	2889,0
B	2842,950	2843,0	B	2878,065	2878,0
C	2630,295	2630,0	C	2672,924	2673,0
C	2259,212	2259,0	D	2294,746	2295,0

Figura 15. Perfis de temperaturas obtidas ao film de 30 segundos com $h_{int} = 3,4 \times 10^{-4}$ Btu/sec in² °R:
 a) temperatura de vazamento da liga metálica $T_0 = 2900$ °R,
 b) temperatura de vazamento da liga metálica $T_0 = 3249$ °R

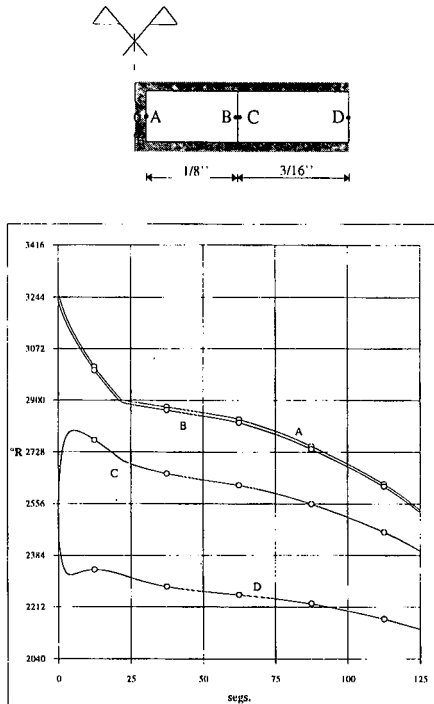


Figura 16. Evolução da temperatura para uma temperatura de vazamento $T_0 = 3249$ °R e $h_{int} = 3,4 \times 10^{-4}$ Btu/sec in² °R:
 - valores obtidos, (o) - ref.⁴

Exemplo 3: Cilindro longo composto por dois materiais. Análise axissimétrica

Este exemplo trata o arrefecimento e a solidificação de uma liga metálica de 1/4 in de diâmetro, vazada numa moldação cerâmica cilíndrica de 3/16 in de espessura⁴, como mostra a Figura 17.

As propriedades térmicas da liga vazada e da moldação cerâmica são as mesmas do exemplo anterior. O domínio foi novamente discretizado por 10 elementos finitos isoparamétricos de 8 nós, todos de igual dimensão e utilizou-se o elemento de interface de 6 nós para modelar a interface.

Foi novamente utilizado o *esquema Crank-Nicholson* ($\alpha = 1/2$) e $\Delta t = 0,1$ segundos e a transmissão de calor para o exterior continua a ser por radiação, nas mesmas condições do exemplo precedente.

A temperatura de vazamento considerada foi de $T_0 = 3249$ °R, sendo a temperatura inicial da moldação a mesma do exemplo anterior, ou seja, 2489 °R.

O coeficiente de transmissão de calor na interface considerado foi de $h_{\text{int}} = 3,4 \times 10^{-4}$ Btu/sec in² °R.

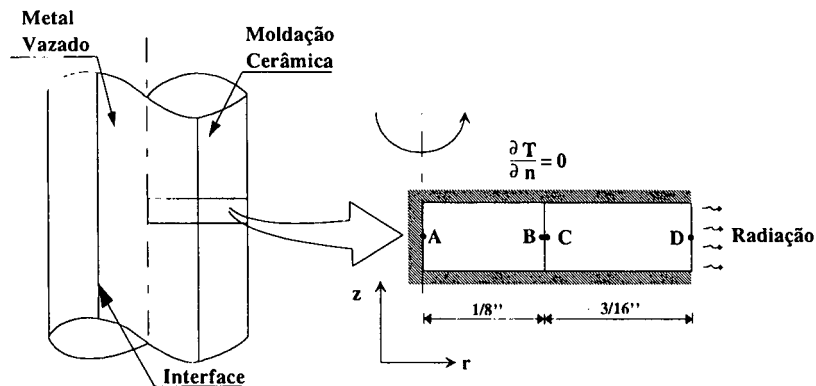


Figura 17. Cilindro longo. Domínio de solução e condições de fronteira

Este exemplo, com exceção da geometria axissimétrica, é semelhante ao teste C de exemplo anterior. Comparando as Figuras 18 e 16, verifica-se que o cilindro arrefece muito mais rapidamente que a placa (41,3 segundos contra 122,1 segundos, para o tempo necessário à solidificação do ponto A).

A Figura 19 mostra as temperaturas obtidas ao fim de 30 segundos e compara-as com as obtidas na referência⁴, verificando-se uma boa concordância dos resultados.

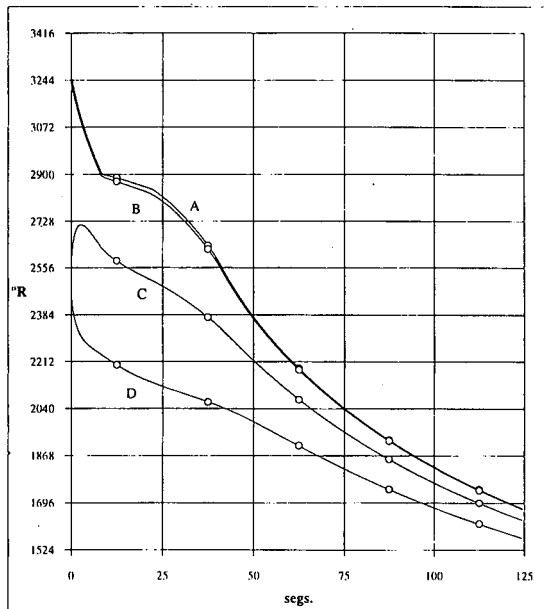
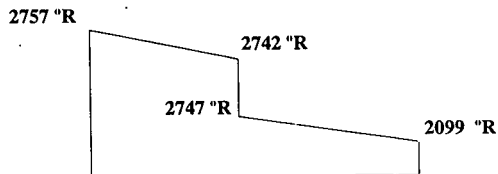


Figura 18. Evolução da temperatura: - valores obtidos, (o) - ref.⁴



Ponto	Valores obtidos (°R)	Ref. ⁴ (°R)
A	2757,295	2758,0
B	2741,566	2743,0
C	2747,245	2447,0
D	2098,565	2099,0

Figura 19. Temperaturas obtidas ao film de 30 segundos. Exemplo 3

CONCLUSÕES

Fez-se a formulação de um elemento finito de nós coincidentes que permite modelar a interface de contacto entre dois meios distintos, evitando, como se mostrou, o aparecimento de instabilidades numéricas que podem ocorrer quando se utilizam elementos isoparamétricos de 8 nós de espessura reduzida.

Testou-se ainda, com sucesso, o programa implementado, em dois exemplos relativos à simulação do arrefecimento e solidificação de uma liga metálica vazada numa moldação cerâmica.

REFERÊNCIAS

1. M. Samonds, R.W. Lewis, K. Morgan e R. Symberlist, "Finite Element Modelling of the Mold-Metal Interface in Casting Simulation with Coincident Nodes or Thin Elements", *Computational Techniques in Heat Transfer*, Pineridge Press, Swansea, U.K., Vol. 1, pp. 331-354, (1985).
2. N. Soyris, F. Bay, M. Bellet e J.L. Chenot, "Heat Transfer Analysis with Three Dimensional Finite Element Code: Application to the Casting Process", *Proceedings Numerical Methods in Thermal Problems*, July 1989, Swansea, U.K. Pineridge Press, Swansea, U.K., pp. 280-290, (1989).
3. R. Song, G. Dhatt e A. Ben Cheikh, "Thermo-Mechanical Finite Element Model of Casting Systems", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 30, pp. 579-599, (1990).
4. U. Chandra, "Benchmark Problems and Testing of a Finite Element Code for Solidification in Investment Castings", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 30, pp. 1301-1320, (1990).
5. M.N. Ozisik, "*Basic Heat Transfer*", McGraw-Hill Book Company, USA, (1977).
6. P.M.M. Vila Real, "Modelação por elementos finitos de comportamento térmico e termo-elástico de sólidos sujeitos a elevados gradientes térmicos", Tese de mestrado, FEUP, (1988).
7. O.C. Zienkiewicz e R.L. Taylor, "*The Finite Element Method*", 4ª ed., McGraw-Hill Book Company, U.K., Ltd., (1989).
8. J.M.A. Cesar de Sá e D.R.J. Owen, "A Study of Grain Boundary Sliding Mechanism by The Finite Element Method", *Report C/R/449/83*, Dept. Civil. Eng., U.K. Swansea, (1983).
9. J. Couto Marques, "Desenvolvimento de um sistema de elementos finitos para a solução de problemas dinâmicos não lineares e sua aplicação à análise sísmica de Barragens", Tese de mestrado em Engenharia Estrutural, apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade de Porto, (1985).
10. P.M.M. Vila Real e C.A.M. Oliveira, "Formulação de um elemento finito de nós coincidentes para modelar a transferência de calor na interface de contacto entre dois meios distintos", *Revista de Engenharia*, FEUP, pp. 53-57, Jan., (1991).
11. F.P. Incropera e D.P. Witt, "*Fundamentals of Heat and Mass Transfer*", John Wiley & Sons, Inc., (1990).
12. R. Song, "Modelisation numérique de la solidification et du refroidissement lors d'un procédé de fonderie", Thèse de L'UTC, Université de Technologie de Compiègne, (1990).
13. L.S. Fletcher, "Recent Developments in Contact Conductance Heat Transfer", *J. Heat Transfer*, Trans. of ASME, Vol. 110, pp. 1059-1070, (1988).
14. Y. Nishida, W. Droste e S. Engler, "The Air-Gap Formation Process at the Casting-Mold Interface and the Heat Transfer Mechanism through the Gap", *Metallurgical Trans.*, Vol. 17B, pp. 833-844, (1986).
15. M. Cross, C. Bailey, P. Chow e K. Pericleous, "Towards an Integrated Control Volume Unstructured Mesh Code for the Simulation of All the Macroscopic Processes Involved in Shape Casting", *NUMIFORM'92, Num. Meth. in Ind. Form Proc.*, Chenot, Wood e Zienkiewicz (Eds.), pp. 787-792, (1992).
16. M. Bellet, F. Bay, J.J. Briost e J.L. Chenot, "Modelling of the Thermomechanical Coupling in the Cooling Stage of the Casting Process", *NUMIFORM'92, Num. Meth. in Ind. Form Proc.*, Chenot, Wood e Zienkiewicz (Eds.), França, pp. 771-776, (1992).

17. P.M.M Vila Real e C.A.M Oliveira, "Estudo do comportamento termo-elasto-viscoplástico de peças vazadas em moldações metálicas pelo método dos elementos finitos", *Segundas Jornadas de Mecânica Computacional*, Coimbra, 28-30 de Setembro de 1992, Vol. M15, (1992).
18. P.M.M Vila Real e C.A.M Oliveira, "Modelação pelo método dos elementos finitos do comportamento termo-elasto-viscoplástico de peças vazadas em moldações metálicas", en *II Congreso Métodos Numéricos en Ingeniería*, F. Navarrina e M. Casteleiro (Eds.), La Coruña, Jun. 7-11, SEMNI, Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería, Vol. 1, pp. 193-203, (1993).
19. P.M.M Vila Real e C.A.M Oliveira, "Thermo-Elasto-Viscoplastic Model for Metal Casting Processes", *Proceedings of the 8th International Conference on Numerical Methods in Thermal Problems*, R.W. Lewis (Ed.), Pineridge Press, University College of Swansea, Swansea, U.K., 12-16 de Julho de 1993, Vol. 1, pp. 297-308, (1993).
20. B. Dorri e U. Chandra, "Determination of Thermal Contact Resistences Using Inverse Heat Conduction Procedure", *Proceedings of the Conference on Num. Meth. in Thermal Problems*, R.W. Lewis, J.H. Chin and G.M. Homsy (Eds.), July 1991, Stanford, USA, Pineridge Press, Swansea, U.K., pp. 213-223, (1991).
21. P. Schmidt e I.L. Svensson, "Solidification and Heat Transfer in Permanent Mould Casting", *Proceedings of the Conference on Num. Meth. in Thermal Problems*, R.W. Lewis, J.H. Chin and G.M. Homsy (Eds.), July 1991, Stanford, USA, Pineridge Press, Swansea, U.K., pp. 133-143, (1991).
22. M.R. Tadayon, D.T. Gethin e R.W. Lewis, "A Finite Element Model of the Squeeze Forming Process Including the Effect of Pressure on Thermophysical Properties", *Proceedings of the Conference on Num. Meth. in Thermal Problems*, R.W. Lewis, J.H. Chin and G.M. Homsy (Eds.), July 1991, Stanford, USA, Pineridge Press, Swansea, U.K., pp. 302-314, (1991).
23. J.B. Dalin, J.M. Le Guilly, P. Le Roy e E. Maas, "Numerical Simulation Applied to the Production of Automotive Foundry Components", en *NUMIFORM'92, Numerical Methods in Industrial Forming Process*, Chenot, Wood and Zienkiewicz (Eds.), França, pp. 993-798, (1992).
24. R.W. Lewis, A.S. Usmani e J.T. Cross, "An Efficient Finite Element Method for Mould Filling Simulation in Metal Casting", *Proceedings of the 8th International Conference on Numerical Methods in Thermal Problems*, R.W. Lewis (Ed.), Pineridge Press, University College of Swansea, Swansea, U.K., 12-16 de Julho de 1993, Vol. 1, pp. 273-283 (1993).
25. B.E. Engelmann, R.G. Whirley e P.J. Radoin, "A Finite Element Formulation and Adaptive Solution Approach for Large-Scale Thermomechanical Problems with Complex Contact Conditions", *Proceedings of the 8th International Conference on Numerical Methods in Thermal Problems*, R.W. Lewis (Ed.), Pineridge Press, University College of Swansea, Swansea, U.K., 12-16 de Julho de 1993, Vol. 1, pp. 869-880, (1993).
26. A.S. Usmani, "Finite Element Modelling of Convective-Diffusive Heat Transfer and Phase Transformation, with Reference to Casting Simulation", Ph. D. Thesis, University of Wales, U.K., (1991).
27. Jia-Chin Liu, Tsang-Sheau Lee e Weng-Sing Hwang, "Computer Model of Unidirectional Solidification of Single Crystals of High Temperature Alloys", *Mat. Science and Technology*, Vol. 7, pp. 954-964, (1991).
28. P.M.M. Vila Real, "Modelação por elementos finitos da solidificação e comportamento termomecânico de peças vazadas em moldações metálicas", Tese de doutoramento em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, (1993).

29. O.C. Zienkiewicz e K. Morgan, "*Finite Elements and Approximation*", John Wiley & Sons, Inc., USA, (1983).
30. T.J.R. Hughes, "Unconditionally Stable Algorithms for Nonlinear Heat Conduction", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **10**, pp. 135-139, (1977).
31. F.B. Damjanic, "Reinforced Concrete Faillure Prediction under Both Static Transient Conditions", Ph.D. Thesis, University College, Swansea, (1983).