

## REFINAMIENTO ADAPTATIVO SOBRE SUPG. UN ELEMENTO DE INTERFASE

NORBERTO NIGRO  
y  
SERGIO IDELSOHN

*Grupo de Mecánica Computacional, UNL-CONICET,  
Cüemes 3450 - 3000 Santa Fe, Argentina.*

### RESUMEN

En este trabajo presentamos una nueva forma de implementar la técnica SUPG usando una estrategia de refinamiento adaptativo. Nos hemos abocado al tratamiento de los nodos irregulares sobre mallas no uniformes. Presentamos un procedimiento para desarrollar un nuevo elemento para evitar oscilaciones en las direcciones longitudinal y transversal a la interfase de refinamiento. Este elemento especial se testea sobre ecuaciones escalares hiperbólicas. Se presentan comparaciones con la técnica standard y se sacan conclusiones sobre la mejora introducida.

### SUMMARY

In this paper we present a new way to implement SUPG techniques using adaptive refinement strategy. Interest has focused on the treatment of irregular nodes on non-uniform meshes. A procedure is presented to develop a new element to preclude oscillations in the longitudinal and transversal directions to the interfaces. This special element is tested on scalar hyperbolic equations. Comparisons with the standard form and conclusions about the improvements obtained with this element are presented.

### INTRODUCCION

Durante la resolución por elementos finitos de problemas de dinámica de fluidos sobre dominios arbitrarios aparecen muy frecuentemente soluciones que son suaves en zonas muy extendidas y que poseen variaciones bruscas en regiones localizadas que dan lugar a distintas necesidades de discretización. El uso de estrategias de refinamiento adaptativo en estos casos es muy importante conjuntamente con esquemas numéricos acorde al problema en cuestión. En problemas dominados por advección resultan ser muy utilizadas formulaciones que introducen algún tipo de upwind. Si bien existen numerosas posibles soluciones para ello, nosotros aquí fijamos nuestra atención en una en particular, la técnica llamada SUPG, introducida entre otros por Hughes y Brooks en un trabajo publicado en 1982<sup>1</sup>.

Recibido: Noviembre 1991

Del acoplamiento entre el refinamiento adaptativo y la formulación *SUPG* aparecen algunos tópicos interesantes de destacar, en especial uno relacionado con el tratamiento de los nodos irregulares, que dio motivo a este trabajo.

La técnica *SUPG*, por estar contenida entre aquellas que utilizan una formulación tipo *Petrov Galerkin*, se basa en el uso de funciones de peso distintas a las usadas para interpolar la solución. Posee un término de perturbación que hace discontinua a las funciones de peso en los bordes interelementos. Esta discontinuidad provoca una contribución diferente de un determinado nodo sobre el elemento ubicado aguas arriba con respecto al que está aguas abajo. Es de mencionar aquí que la técnica *SUPG* está muy extendida en su aplicación sobre mallas conformada por cuadrángulos, a pesar de que numerosos esfuerzos se están desarrollando actualmente en cuanto a su extensión a triángulos<sup>2</sup>. Al respecto cuando se usa refinamiento adaptativo sobre cuadrángulos una de las cuestiones a decidir es cómo repartir las contribuciones sobre los *nodos irregulares* para mantener conformidad sobre los elementos. Recordamos que estos nodos aparecen en la interfase de refinamiento, definida como una frontera que separa dos zonas con elementos de distinto tamaño. Existen muchas opciones a utilizar para la mencionada condensación de los nodos irregulares, clasificadas en varias categorías:

- 1.- modificar las funciones base para descargar su contribución sobre los nodos vecinos por la interfase<sup>3,4</sup>.
  - 2.- aplicar algún método de penalidad o multiplicadores de Lagrange<sup>3</sup>.
  - 3.- combinar elementos de distinta naturaleza geométrica para evitar la existencia de los mencionados nodos.
- ,etc.

En la segunda sección se presenta el problema físico a resolver, se muestra que sucede cuando uno aplica alguno de los métodos de condensación enmarcados dentro del primer grupo mencionado antes, y se muestra cómo se puede resolver en forma sencilla en el caso unidimensional, culminando la misma con los inconvenientes hallados al pretender extender estos resultados al caso bidimensional.

En la tercera sección aparece el cuerpo central del trabajo, y allí se presentan diversas soluciones, todas dentro del concepto de "*Elementos de interfase*". En la cuarta sección se muestran los resultados numéricos y finalmente en la última se mencionan las conclusiones.

## SUPG CON REFINAMIENTO ADAPTATIVO SOBRE CUADRANGULOS

### Definiciones preliminares

El problema a resolver es la ecuación de advección difusión escalar lineal y estacionaria. Como generalización se trabajó sobre una ecuación donde el término de flujo difusivo proviene de un tensor de difusividad que permite tratar casos no isotrópicos, y con el agregado de dos términos fuentes, uno de ellos proporcional a la variable dependiente. El objetivo es hallar la solución al siguiente problema

$$\nabla \cdot (\sigma_a + \sigma_d) - c \phi = f \quad (1)$$

en  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

donde

$$\sigma_a = \mathbf{u}\phi \quad (2a)$$

$$\sigma_d = -\mathbf{k}\cdot\nabla\phi \quad (2b)$$

representan los flujos advectivos y difusivos respectivamente.

Además

$$\phi = \phi(\mathbf{x}) \quad (3a)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (3b)$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathbf{x}) \quad (3c)$$

representan la variable dependiente, el campo de velocidades y el tensor difusivo del problema respectivamente, todos función del vector posición  $\mathbf{x}$ .

Por último  $c\phi$  y  $f$  son términos fuentes.

Consideremos  $\Gamma$  el borde del dominio  $\Omega$  como formado por dos subconjuntos de puntos, el primero conteniendo aquellos donde se aplican condiciones de contorno tipo esencial y el segundo con condiciones tipo natural.

$$\Gamma = \overline{\Gamma_g \cup \Gamma_h} \quad (4a)$$

$$\emptyset = \Gamma_g \cap \Gamma_h \quad (4b)$$

Las condiciones de contorno son:

$$\phi(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g \quad (5a)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{k}\cdot\nabla\phi) = h(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_h \quad (5b)$$

siendo  $\mathbf{n}$  la normal exterior del borde.

Como es habitual en la formulación por elementos finitos de un problema se requiere la discretización del dominio y la elección de espacios de funciones admisibles. A tal efecto tomamos subdominios elementales  $\Omega^e$  tales que satisfagan las siguientes condiciones:

$$\cup_e \overline{\Omega^e} = \overline{\Omega} \quad (6a)$$

$$\cap \Omega^e = \emptyset \quad (6b)$$

y si denominamos

$$\Gamma^e \text{ al borde de } \Omega^e \quad (6c)$$

entonces definimos

$$\Gamma_{int} = \cup_e \Gamma^e - \Gamma \quad (6d)$$

que representan los contornos interelementos. Más adelante detallaremos sobre el tipo de elemento tratado. Con respecto a los espacios de funciones definimos los siguientes:

Sea  $V_h \subset H^1(\Omega)$  espacio de funciones peso tal que  $N^h \in V^h$  y  $N^h(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g$   
 Sea  $S_h \subset H^1(\Omega)$  conjunto de las funciones de interpolación tal que  $\phi^h \in S^h$  satisface que  $\phi^h(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in \Gamma_g$

En una formulación Galerkin del método de residuos ponderados las funciones de peso son consideradas continuas a través de los bordes interelementos y similares a las funciones de interpolación. La formulación *Streamline Upwind Petrov-Galerkin* requiere el uso de funciones de peso de la forma

$$\tilde{N}^h = N^h + p^h \quad (7)$$

donde  $p^h$  representa una contribución discontinua que dará origen a un upwind introducido según las líneas de corriente y cuya expresión es la siguiente

$$p^h = \tau \mathbf{u} \cdot \nabla N^h \quad (8)$$

siendo  $\tau$  un escalar que más adelante detallaremos. Una de las propiedades interesantes a comentar es que  $p^h$  es discontinua en las fronteras interelementos y además que introduce un descentrado según las líneas de corriente, tal como se detalla en [1].

Su aplicación a los términos convectivos produce lo siguiente:

$$\int_{\Omega} \tilde{N}^h \nabla \cdot (\mathbf{u} \phi^h) d\Omega = \int_{\Omega} N^h \nabla \cdot (\mathbf{u} \phi^h) + \int_{\Omega} \tau \mathbf{u} \cdot \nabla N^h \nabla \cdot (\mathbf{u} \phi^h) \quad (9)$$

teniendo el segundo término del miembro derecho el aspecto de un aporte difusivo extra, proveniente de la función de perturbación. A su vez la aplicación de la función de peso perturbada sobre los términos difusivos del problema original debe ser comentada pues aparecen ciertas restricciones, a saber:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\tilde{N}^h \nabla \cdot (-\mathbf{k} \cdot \nabla \phi^h)) d\Omega &= \int_{\Omega} (N^h \nabla \cdot (-\mathbf{k} \cdot \nabla \phi^h)) d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} (\tau \mathbf{u} \cdot \nabla N^h \nabla \cdot (-\mathbf{k} \cdot \nabla \phi^h)) d\Omega \end{aligned} \quad (10)$$

En cuanto al parámetro  $\tau$ , usamos como definición la que surge de

$$\tau = \frac{\xi}{\|b\|_p} \quad (11)$$

$\xi$  es un número adimensional dependiente del número de Peclet ( $Pe$ ) del problema.

Por último  $\mathbf{b}$  se define como  $\mathbf{b} = \{b_i\}; i = 1, \dots, N$

$$b_i = \sum_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} u_j; \quad \text{con } j = 1, \dots, N. \quad (12)$$

siendo  $\xi_i$  las coordenadas del elemento master y  $x_j$  las del dominio original.

### Condensación de nodos irregulares

Cuando uno intenta ensamblar tanto la matriz de rigidez como el vector residuo en aquellos elementos que poseen nodos irregulares se encuentra con la dificultad de decidir qué hacer con las contribuciones sobre dichos nodos. En principio y para el resto del trabajo se define interfase de refinamiento a la unión de bordes entre elementos que poseen distinto nivel de refinamiento. Además nos restringimos a aplicar el criterio de *1-irregular* con lo que esa diferencia se fija en una unidad. Una técnica muy utilizada consiste en forzar que exista continuidad en la función interpolante asumiendo que

$$u_I = \frac{1}{2}(u_I^- + u_I^+) \quad (13)$$

donde  $u_I$  es la solución en el nodo irregular y  $u_I^{+,-}$  son las soluciones en los nodos vecinos al irregular ubicados sobre la interfase de refinamiento que lo contiene.

Por otra parte un tratamiento similar es seguido con la función de peso sobre el nodo irregular, de forma tal que la mitad de la misma va a parar a cada una de las funciones de peso de sus vecinos. Si uno pretende seguir el mismo razonamiento cuando lo aplica sobre una formulación *Petrov-Galerkin* en un problema dominado por advección sucede que dichas funciones de peso tienen un soporte extendido a dos elementos modificándose de tal forma que aparecen ciertos inconvenientes en cuanto a la conservatividad y a la aparición de oscilaciones espurias.

### Inconvenientes sobre la interfase de refinamiento

Para visualizar el inconveniente intentaremos resolver un problema unidimensional de advección pura donde existe un refinamiento localizado en un lugar donde la solución presenta un salto. Este ejemplo proviene de un caso un poco más general que sería el problema en dos dimensiones donde uno realiza un corte sobre la interfase de refinamiento y supone que en la dirección perpendicular el dominio es infinito.

En la Figura 2a se presenta el problema modelo y en la 2b y 2c los resultados obtenidos con ésta técnica mostrando los mismos como isovalores y como función en tres dimensiones.

Es de notar que la presencia de oscilaciones tanto en la dirección del flujo como en la transversal se debe a la interfase. El problema elegido es de carácter cuasiunidimensional y debería darnos la solución exacta. La forma en que la función de peso actúa sobre los residuos en la zona de la discontinuidad hace que se pierda parte del upwind introducido mediante SUPG y esto ocasiona las oscilaciones longitudinales.

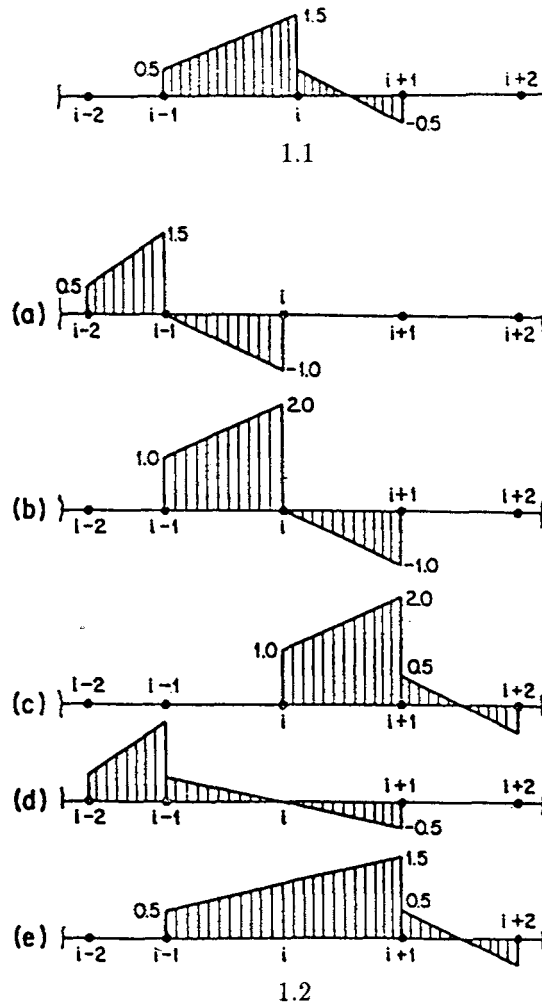


Figura 1. Funciones de Peso - Nodos Irregulares.

Paralelamente la interfase tiene las características de una discontinuidad en el sentido transversal, motivo por el cual también se presenta un fenómeno parecido en esa dirección. En principio nos abocamos a la idea de corregir la función de peso sólo en la dirección del flujo pensando que éste era el único motivo de las oscilaciones que se habían presentado.

En la Figura 3 se presenta un gráfico mostrando como es el residuo en las inmediaciones de la discontinuidad.

### Soluciones óptimas al problema unidimensional

En la Figura 1 vemos la función de peso *SUPG* aplicada al nodo  $i$  que hará las veces de nodo irregular en la explicación que a continuación se detalla. Cuando una parte por mitades la contribución sobre el nodo irregular en sus vecinos  $i-1$  e  $i+1$  las funciones de peso correspondientes a estos últimos nodos provocan una distorsión tal que deja

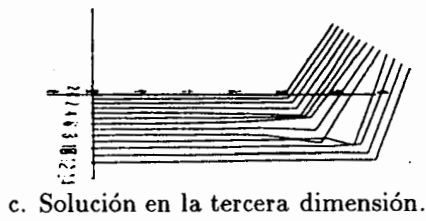
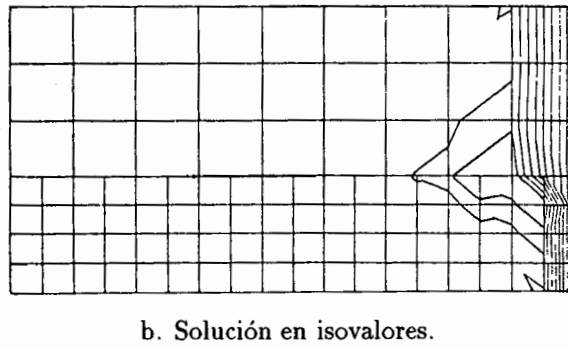
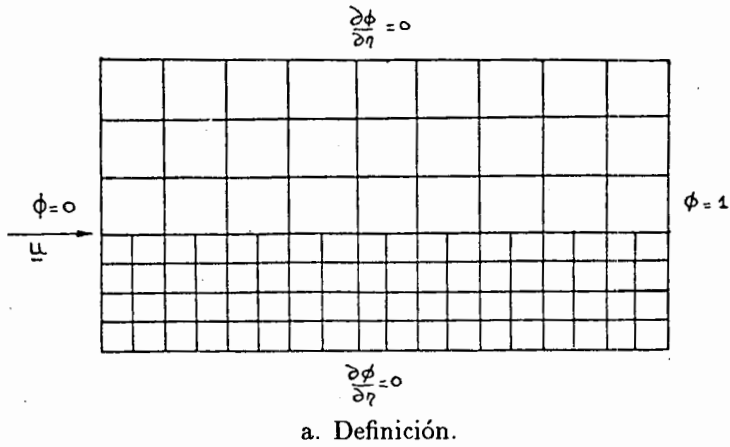
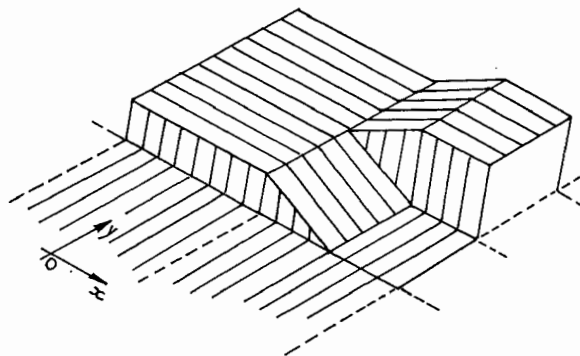


Figura 2. Problema modelo - solución standard.



de ser óptimo en el caso unidimensional. Esto provoca la aparición de oscilaciones espurias. Por tal motivo es de sumo interés conservar al menos las propiedades ganadas en este problema modelo y es a raíz de ésto que apareció una sencilla solución a este inconveniente para el caso unidimensional<sup>5</sup>. Esta consiste en alterar el valor del parámetro de upwind  $\tau$  de forma tal que al agregar a los nodos vecinos una mitad de la contribución del nodo irregular se recupere el aspecto de la función de peso sobre la malla original (sin considerar al nodo irregular como perteneciente a la misma).

Recordando que las funciones de peso para SUPG son

$$\tilde{N}^h = N^h + \tau \mathbf{u} \cdot \nabla N^h$$

En el caso unidimensional y con advección pura  $\tau$  adquiere la forma

$$\tau = \frac{h}{(2 \cdot |u|)} \quad (14)$$

y con un poco de álgebra llegamos al siguiente resultado

$$\tilde{N}^h = N^h + N_{,\xi}^h \left( \frac{2}{\alpha} \right) \text{sgn}(u) \quad (15)$$

donde  $N_{,\xi}^h$  se refiere a la derivada de la función de interpolación respecto a la coordenada del elemento master  $\xi$ .

$\alpha$  es un parámetro escalar y  $\text{sgn}(u)$  se refiere a la función signo de la velocidad y que influye sobre el decentraje de la función de peso.

Cuando se usa una formulación SUPG sobre una malla homogénea con un valor  $\alpha = 2$  da como resultado una solución exacta en los nodos independiente del valor de la longitud de los elementos. Cuando pasamos al caso donde existe refinamiento adaptativo con nodos irregulares si tomamos un valor  $\alpha = 1$  para los elementos que comparten un nodo irregular y si luego descargamos la contribución del nodo irregular en mitades sobre cada uno de sus dos vecinos logramos reproducir los resultados nodales exactos. La función de peso finalmente obtenida se puede apreciar en la Figura 1d y 1e para los nodos  $i-1$  e  $i+1$  vecinos al irregular.

### Extensión de los resultados unidimensionales al caso bidimensional

Como es natural se pretendió extender los resultados encontrados en el caso unidimensional al bi-dimensional. Si uno estudia la gráfica del residuo en las inmediaciones de una discontinuidad (ver Figura 3) cuando existe un nodo irregular y se usa una técnica standard de repartir su contribución por mitades a los nodos vecinos en la interfase se alcanza a ver que éste tiene una variación según la dirección transversal al flujo en una zona de influencia limitada por un elemento a cada lado de la interfase. Esto provoca la aparición de oscilaciones en ambas direcciones, la longitudinal —del mismo tipo del ya mencionado en el caso unidimensional— y la transversal por las razones que acabamos de esgrimir.

Siguiendo con los mismos pasos utilizados en el caso uni-dimensional se pretendió estudiar la forma que adquieren para este caso las funciones de peso. Para ello recordamos la expresión que se presentó en la primera parte del presente trabajo

$$\tilde{N}^h = N_{,\xi_j}^h \left( \frac{b_l}{|b|} \right) + N^h \quad (16)$$

donde  $\xi_j$  se refiere a la  $j$ -ésima coordenada del elemento máster.

Como es de conocimiento con esta función de peso obtenemos soluciones exactas en los nodos para flujos paralelos a las direcciones de la malla independientemente de la longitud de cada lado del elemento.

La extensión directa de la solución propuesta en el caso uni-dimensional al bi-dimensional no es posible debido a que el residuo varía cuando uno atraviesa la interfase de refinamiento en dirección perpendicular a la misma. En primera instancia se utilizó una técnica que consistía en agregar la contribución al nodo irregular proveniente del elemento aguas arriba al nodo vecino aguas abajo y viceversa. Corrido el problema modelo se verificó una notable mejora en la solución, desapareciendo por completo las oscilaciones longitudinales pero sin embargo se mantuvieron las transversales. Para contemplar el caso más general cuando existía una desalineación entre la malla y la velocidad de flujo se utilizó en el procedimiento anterior la proyección de la velocidad sobre la interfase. Esto se justifica porque si existiera un flujo normal a la interfase de refinamiento habría que usar la técnica standard de repartir por mitades la contribución sobre los vecinos. De esta forma uno puede contemplar los casos límites, que en principio son los que la formulación resuelve óptimamente en el caso de mallas homogéneas.

## DIVERSAS PROPUESTAS DE SOLUCION AL CASO BIDIMENSIONAL

### Modificación de la función de peso

Dentro de esta categoría se puede ubicar lo que fue la extensión directa de los resultados unidimensionales mencionados en secciones anteriores. En principio se usó como criterio uno que consistía en proyectar la velocidad de advección sobre la interfase y posteriormente modificar las funciones de peso de los nodos vecinos al irregular en forma proporcional a este valor

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_I}{|\mathbf{u}|} \quad (17)$$

donde  $\mathbf{e}_I$  representa un versor en la dirección de la interfase de refinamiento con un sentido tal de apuntar hacia el nodo irregular desde su nodo vecino por el elemento, tal como lo muestra la Figura 4a.

Entonces

$$\tilde{N}_{i-1}^h = \tilde{N}_{i-1}^h + \frac{(1.0 - \cos(\alpha))}{2} \cdot \tilde{N}_i^h \quad (18)$$

$$\tilde{N}_{i+1}^h = \tilde{N}_{i+1}^h + \frac{(1.0 + \cos(\alpha))}{2} \cdot \tilde{N}_i^h \quad (19)$$

Las funciones de peso resultante para los nodos vecinos se muestran en la Figura 4b.

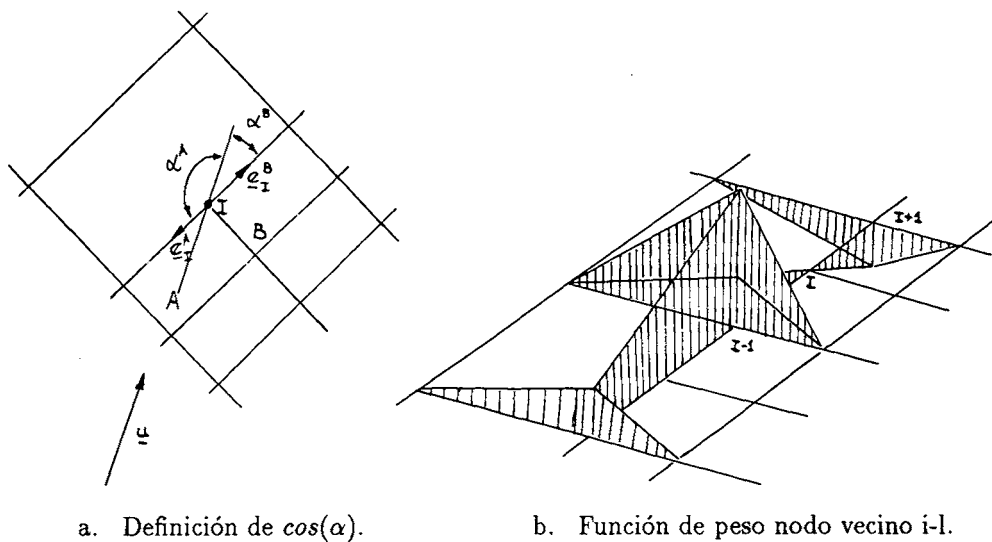


Figura 4. Extensión al caso bidimensional.

A pesar de todo, los resultados no han sido totalmente satisfactorios, aunque como ya se ha mencionado han mejorado en mucho a los obtenidos con la técnica anterior de repartir por mitades al residuo.

A partir de estos resultados y manteniendo la línea de modificar la definición del parámetro  $\tau$  de upwind en los elementos próximos a la interfase se propuso darle un carácter tensorial al mismo ya que como se reflejaba en los ejemplos corridos la presencia de la interfase modificaba la simetría del operador en la dirección transversal. Esto puede ser visto como una frontera entre medios de distintas características donde por tal motivo se generan perturbaciones en el sentido normal a la interfase.

A tal fin se hizo un estudio<sup>7</sup> sobre cómo armar el citado tensor partiendo de algunas suposiciones y que abarcaba todo el espectro de ángulos de incidencia posibles y relaciones de aspecto de los elementos lo que de alguna manera, combinado con el operador de *shock capturing* brindan bastante generalidad. Las limitaciones se basan en las suposiciones hechas en el cálculo del tensor que principalmente hacen referencia al

hecho de considerar una malla poco distorsionada. De todos modos esto es solucionable si se piensa en que el programa mismo podría contar con una rutina de cálculo del tensor según el caso corrido y no como en este caso donde se introduce una expresión explícita que surge de hacer cálculos exactos sobre las citadas restricciones.

Una vez que la malla ha sido generada y los elementos con nodos irregulares han sido detectados se pasa a armar los arreglos para los elementos comunes y para aquellos denominados de interfase. En el último caso se recurre al uso del citado tensor que es constante por elemento pero varía según se trate de un elemento aguas arriba o aguas abajo del nodo irregular. En el caso de que un elemento contenga dos nodos irregulares se promedia la contribución por cada uno de ellos, lo que equivale a considerar que allí la interfase está dirigida según la dirección que une los dos nodos irregulares.

Este tipo de solución tiene la ventaja de ser, en principio generalizable a sistemas de advección difusión diagonalizables en principio siguiendo la línea de trabajo de Hughes<sup>6</sup> y además mantiene las ventajas de trabajar con cuadrángulos sin necesidad de propagar el refinamiento por cuestiones de suavidad. Por supuesto que uno de los mayores inconvenientes se halla en la necesidad de ser dependiente del problema en cuestión si uno pretende como aquí ingresar una expresión explícita para el mencionado tensor o sino para ganar en portabilidad uno debería llegar a resolver para cada problema en los elementos de la interfase un problema adicional de un costo menor pues tiene carácter unidimensional.

A continuación se presentan los tensores hallados en este caso

$$\text{Definiendo al tensor } \tau^{(k)} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix}$$

con

$$k = \begin{cases} I & \text{para el elemento upwind} \\ II & \text{para el elemento downwind} \end{cases}$$

Compactando la notación podemos definir las siguientes variables:

$$A = \frac{H_y}{H_x} \cdot \cotg(\alpha)$$

$$B = \frac{A}{\sqrt{A^2 + 1}}$$

$$C = \frac{2|u| \sin(\alpha)}{H_y}$$

$$D = \frac{H_y}{H_x}$$

donde  $H_x$  y  $H_y$  son las dimensiones del elemento en las direcciones transversal y longitudinal a la interfase respectivamente,  $\alpha$  es el ángulo de incidencia del flujo advectivo sobre la interfase.

Además definimos :

$$y_1 = A\tau_{11}^I + D\tau_{12}^I$$

$$y_2 = \frac{A}{D}\tau_{21}^I + \tau_{22}^I$$

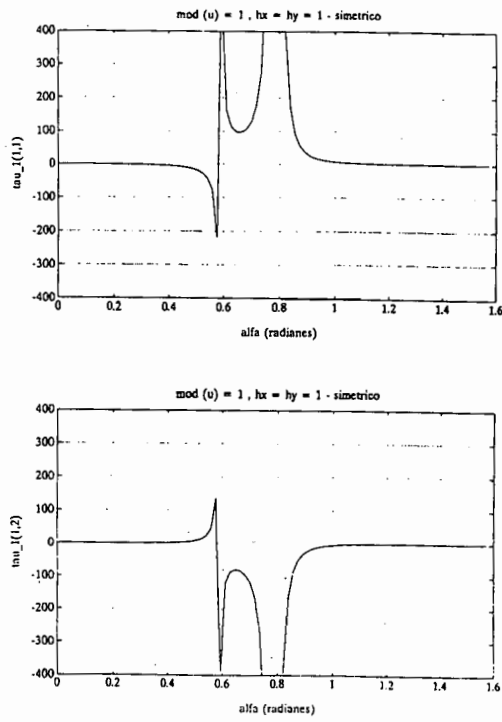


Figura 5a. Tensor elemento Upwind.

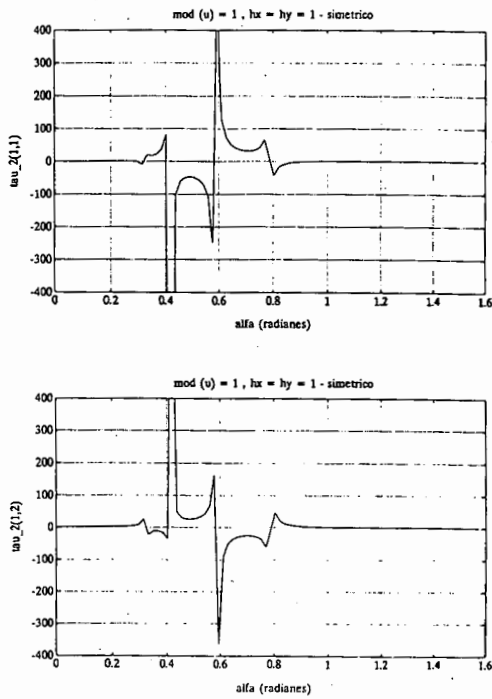


Figura 5b. Tensor elemento Downwind.

$$y_3 = A\tau_{11}^{II} + D\tau_{12}^{II}$$

$$y_4 = \frac{A}{D}\tau_{21}^{II} + \tau_{22}^{II}$$

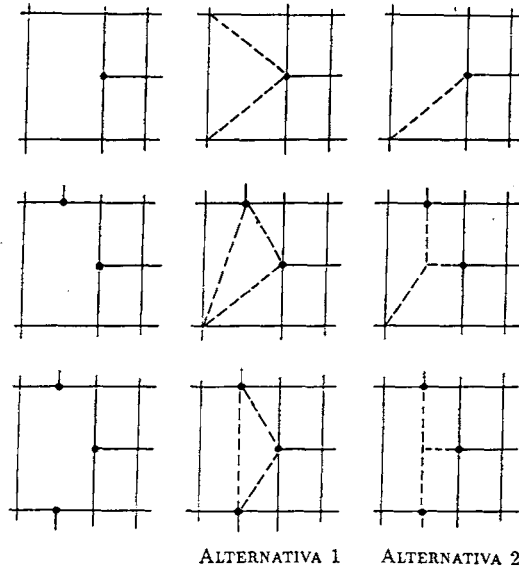


Figura 6. Elemento de interfase II - Tipos de Elementos.

llegamos a

$$\tau_{11}^I = \tau_{22}^I = \frac{y_2 \mp \cotg(\alpha)\frac{y_1}{D}}{1 \mp \cotg^2(\alpha)}$$

$$\tau_{11}^{II} = \tau_{22}^{II} = \frac{y_4 \mp \cotg(\alpha)\frac{y_3}{D}}{1 \mp \cotg^2(\alpha)}$$

$$\tau_{12}^I = \frac{y_1}{D} - \cotg(\alpha) \cdot \tau_{11}^I = \pm \tau_{21}^I$$

$$\tau_{12}^{II} = \frac{y_3}{D} - \cotg(\alpha) \cdot \tau_{11}^{II} = \pm \tau_{21}^{II}$$

Estas expresiones cerradas para las componentes del tensor fueron halladas resolviendo el sistema de ecuaciones resultante en un patch de elementos sobre la interfase y contiene ciertas hipótesis simplificativas de trabajo que pueden ser relajadas a nivel de programación si uno pasa a resolver las componentes del mencionado tensor a nivel de cálculo por elemento, lo que brinda mayor robustez a esta técnica<sup>7</sup>. Es de mencionar que uno puede optar entre tensores simétricos y antisimétricos, aunque estos últimos fueron un tanto más beneficiosos en nuestras experiencias, dado que remueven algunas singularidades propias del sistema.

### Diseño de distintos elementos de interfase

Por todo lo mencionado anteriormente surgió un trabajo paralelo consistente en elaborar un elemento de interfase que tuviera un sentido más natural. Por tal se entiende obtener un vínculo de unión entre zonas de distinto nivel de refinamiento a través de elementos geoméricamente distintos a los usados en el resto de la malla. En principio con una combinación de triángulos y cuadrángulos se puede alcanzar el mencionado objetivo. Casualmente este fue nuestro intento. Estos elementos están formados por una unión disjunta de elementos simples y existen solamente durante la etapa del ensamblaje o armado del sistema de ecuaciones a resolver. Posteriormente, en la etapa de un refinamiento posterior pasan a ser los mismos elementos simples que eran en un principio geoméricamente iguales al resto de la malla.

De esta forma la malla no se distorsiona y el refinamiento no se propaga en forma exagerada por las restricciones sobre los nodos irregulares.

El elemento de triángulo utilizado tiene su base en algunos trabajos de A. Mizukami y T.J.R. Hughes<sup>2,8</sup>.

Antes de pasar a los resultados numéricos alcanzados vale la pena mencionar que este tipo de solución es en principio interesante porque es muy portable, independiente del problema en cuestión, simple de programar, aunque queda supeditada al uso de algunos elementos de forma triangular y dependerá como es sabido de la performance que estos tengan dentro de la formulación propuesta. Además por existir sólo como vínculo entre zonas de distinto tamaño de elementos evita excesivas propagaciones en el refinamiento.

### EJEMPLOS NUMERICOS

En todos los ejemplos numéricos corridos se establecen las siguientes notaciones:

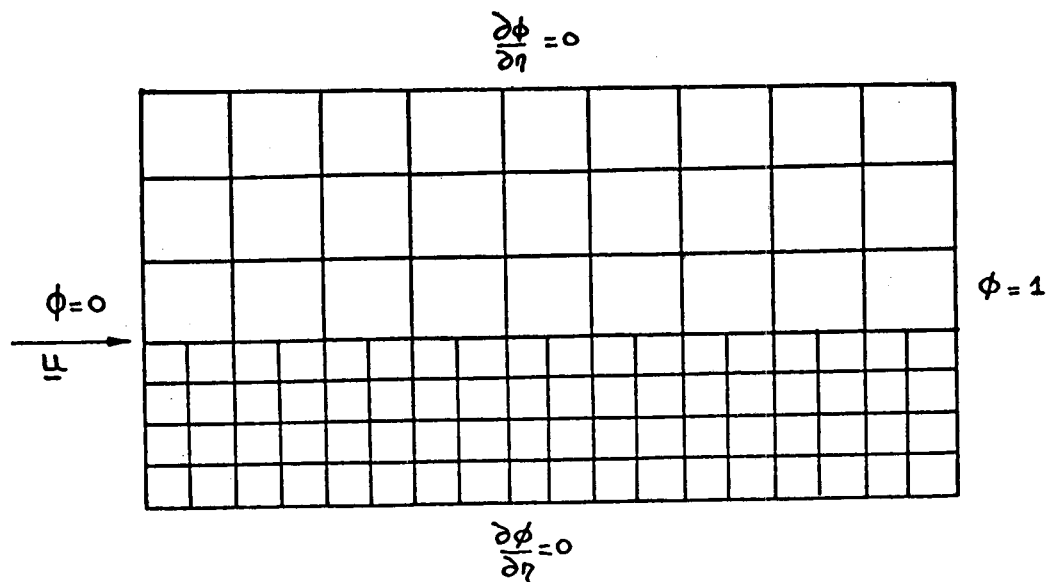
- Alternativa ST : Técnica standard.
- Alternativa CO : Extensión de la solución unidimensional al caso bidimensional.
- Alternativa SP : Elemento de interfase II con alternativa 1.
- Alternativa QT : Elemento de interfase II con alternativa 2.

#### Test 1

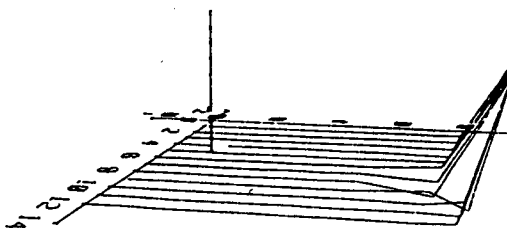
En la Figura 7a se muestra el problema modelo 1. Este consiste en la advección cuasi-unidimensional de un campo con una discontinuidad tipo capa límite en la frontera de salida del flujo. En la Figura 7b se muestran las 3 soluciones, la ST, la CO y la SP.

#### Test 2

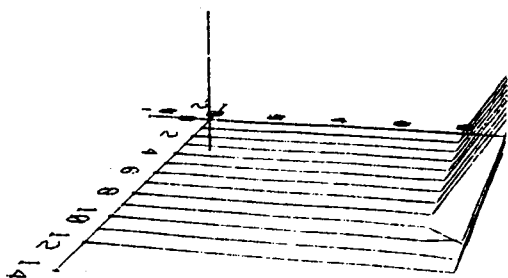
En la Figura 8a se muestra el problema modelo 2. Consiste de una advección cuasiunidimensional pero con 2 capas límites, una en la frontera de salida y otra en una lateral. Al igual que antes en la Figura 8b se muestran las 3 soluciones con las alternativas ST, la CO y la SP.



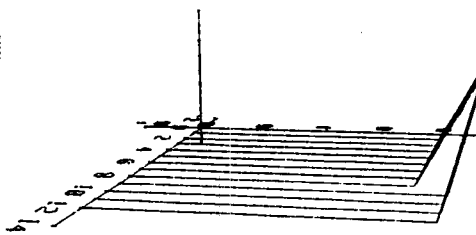
a. Definición de la malla.



b. Solución ST.

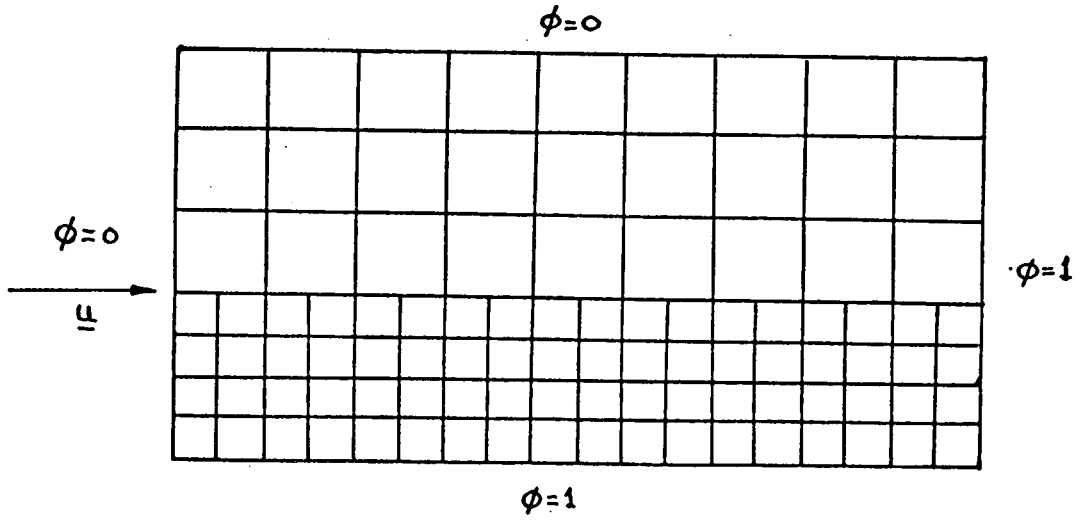


c. Solución CO.



d. Solución SP.

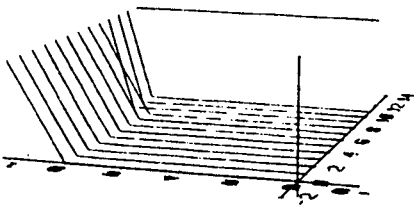
Figura 7. Test 1.



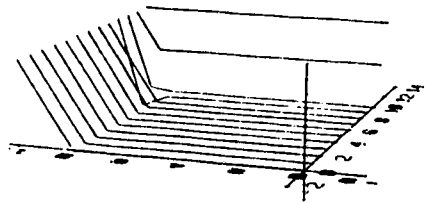
a. Definición de la malla.



b. Solución ST.



c. Solución CO.

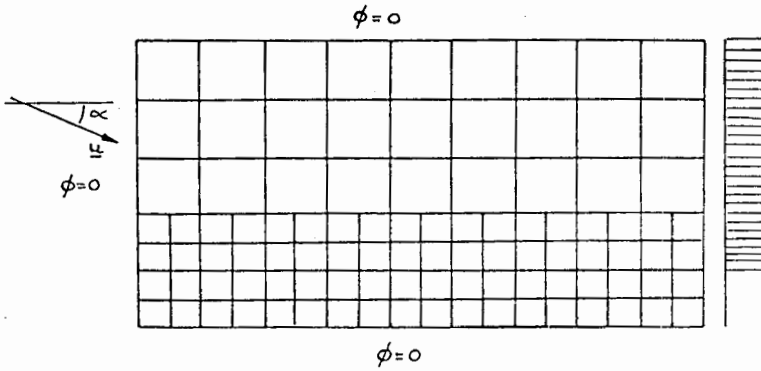


d. Solución SP.

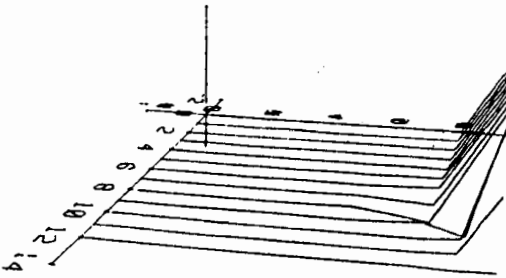
Figura 8. Test 2.

**Test 3**

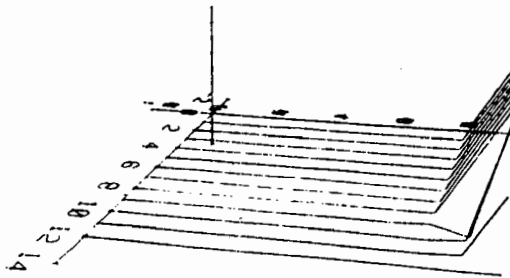
En la Figura 9a se muestra el problema modelo 3. Es bastante parecido al problema 1 nada más que la discontinuidad no ocupa todo el borde de salida pero aquí a diferencia de éste se corre con distintos ángulos de incidencias ( $\alpha = 0, 30$  y  $45$ ) La Figura 9b muestra los resultados con las alternativas ST, CO, SP y ahora se agrega la QT.



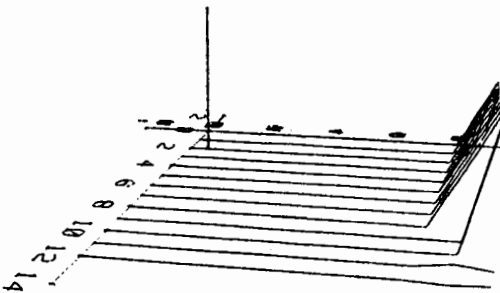
a. Definición de la malla.



b. Solución ST.



c. Solución CO.



d. Solución SP.

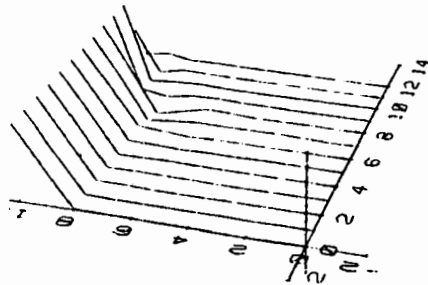
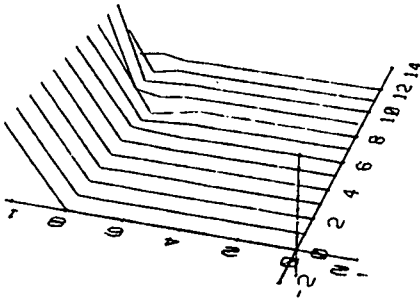
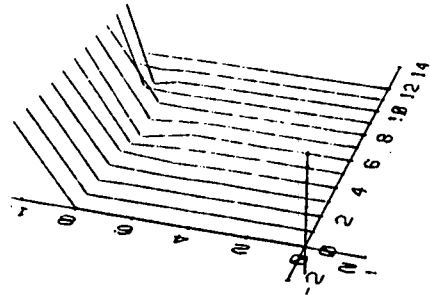
e. Solución ST  $\alpha = 22.5$ .

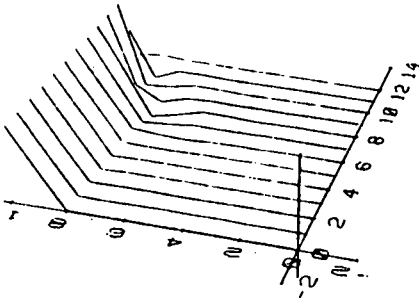
Figura 9. Test 3.



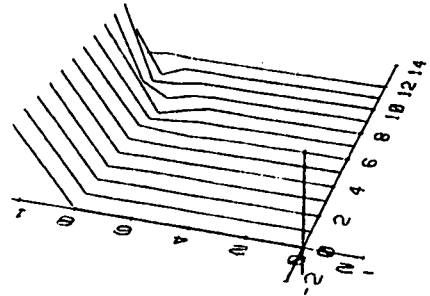
f. Solución CO  $\alpha = 22.5$ .



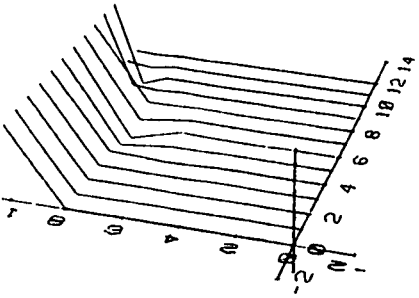
g. Solución SP  $\alpha = 22.5$ .



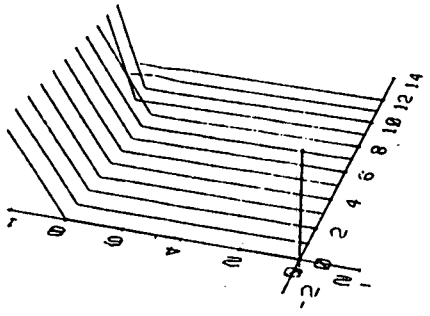
h. Solución ST  $\alpha = 45$ .



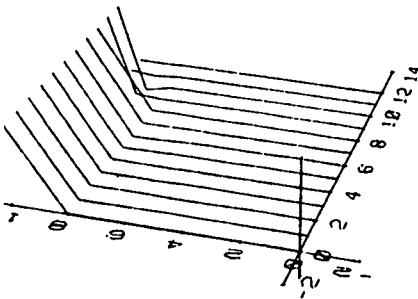
i. Solución CO  $\alpha = 45$ .



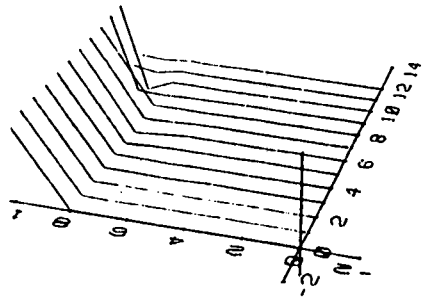
j. Solución SP  $\alpha = 45$ .



k. Solución QT  $\alpha = 0$ .



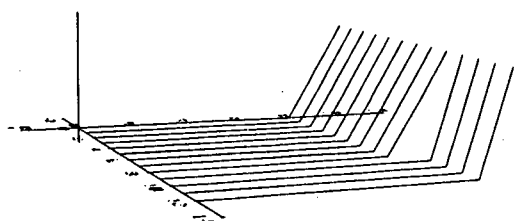
l. Solución QT  $\alpha = 22.5$ .



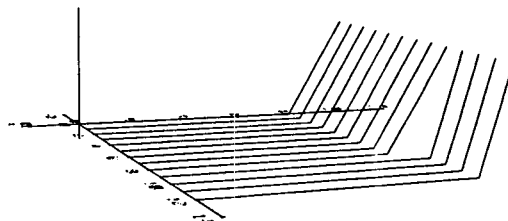
m. Solución QT  $\alpha = 45$ .

Figura 9. Test 3.

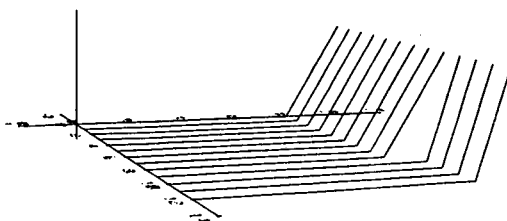
En la Figura 10 se muestran los resultados obtenidos usando el elemento de interfase tensorial para los tres ángulos citados anteriormente. Además se agrega una representación en isovalores de la solución obtenida.



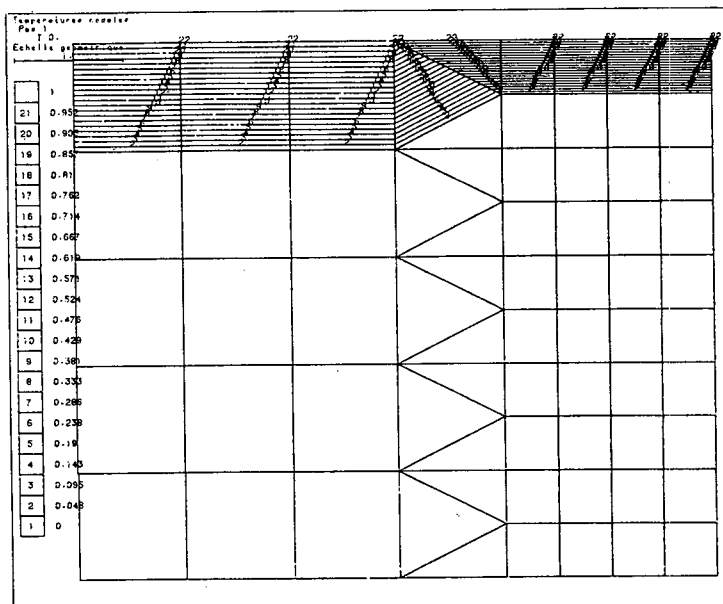
a. Alternativa tensorial  $\alpha = 0$ .



b. Alternativa tensorial  $\alpha = 22.5$ .



c. Alternativa tensorial  $\alpha = 45$ .



d. Isovalores solución tensorial.

Figura 10. Test 3. Elemento de interfase tensorial.

## CONCLUSIONES

En los tres test corridos podemos concluir que se ha logrado en cierta forma el objetivo propuesto. En el caso de flujo alineado con la malla ahora existe una forma de lograr la solución exacta con cualquiera de las propuestas presentadas para el elementos de interfase. Las Figuras 7 y 8 muestran las diferencias notables entre la solución standard, aquella con la cual se comenzó este trabajo que consistía en una extensión directa de la solución hallada en el caso unidimensional y por último la solución con el elemento de interfase.

La Figura 9 se encarga de mostrar los resultados con todas las propuestas. La propuesta QT del elemento de interfase supera a la SP aunque no sea la solución exacta. Nuestra explicación radica en que es de todas, la que atenúa en mayor grado la variación en la densidad de la malla.

De todos modos con la versión tensorial se obtuvieron los mejores resultados en cuanto a precisión aunque como ya mencionáramos está limitada dada su obtención a los ejemplos corridos. Generalizaciones son posibles sobre la base de una rutina de cálculo que al igual que muchas de las mejoras introducidas en los métodos de upwind, tales como *shock capturing*, convierten la técnica en no lineal aunque nuestra experiencia nos indica una rápida convergencia. Para finalizar quiero mencionar que actualmente se está tratando de extender su validez al caso de sistemas.

## REFERENCIAS

1. A.N. Brooks y T.J.R. Hughes, "Streamline upwind Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations.", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 32, pp. 199-259, (1982).
2. A. Mizukami, "An implementation of the streamline-upwind/ Petrov-Galerkin method for linear triangular elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 49, pp. 357-364, (1985).
3. G. Carey, y J. Oden, "*Finite Elements, Computational Aspects*", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Vol. III, New Jersey, (1984).
4. M. Fortin y P. Tanguy, "A non-standard mesh refinement procedure through node labelling", *International Journal Numerical Methods in Engineering*, (1984).
5. C. Baumann, M. Storti y S. Idelsohn, "A Petrov Galerkin technique for the solution of transonic and supersonic flows", *Second World Congress on Computational Mechanics*, Stuttgart, (1990).
6. T.J.R. Hughes y M. Mallet, "A new finite element formulation for computational fluid dynamic: III. The generalized streamline operator for multidimensional advective-diffusive systems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 58, pp. 305-328, (1986).
7. N. Nigro y S. Idelsohn, "Refinamiento adaptativo sobre SUPG utilizando un elemento de interfase tensorial", *Report interno GTM*.
8. A. Mizukami y T.J.R. Hughes, "A Petrov-Galerkin finite element method for convection-dominated flows: An accurate upwinding technique for satisfying the maximum principle", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 50, pp. 181-193, (1985).