

ANÁLISE DE ESTABILIDADE LINEAR ELÁSTICA DE PLACAS FINAS E SEMI-ESPESSAS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

ROGÉRIO J. MARCZAK

*Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
90050-170 - Porto Alegre - RS - Brasil
E-mail rato@vortex.ufrgs.br*

SUMÁRIO

A formulação direta do método direto dos elementos de contorno é aplicada aos operadores diferenciais de placas semi-espessas, incluindo os termos de acoplamento flexão-membrana. As equações integrais para flexão geométrica não-linear de placas são então obtidas, incluindo os efeitos de deformação cisalhante. Uma linearização destas equações leva à uma formulação integral para a análise de estabilidade linear elástica de placas. Não são utilizadas derivadas numéricas do deslocamento transversal, caracterizando uma formulação hipersingular, devido à diferenciação de integrais contendo núcleos de Cauchy. Diversos casos de geometria, condições de contorno e carregamento são analisados utilizando a formulação apresentada.

SUMMARY

The direct boundary element method formulation is applied to moderately thick plates differential operators, including the membrane-bending coupling terms. All integral equations for the geometrically non-linear plate bending are then obtained, accounting for the shear deformation effects. A further linearization of these equations leads to an integral formulation for linear elastic stability analysis of plates. Numerical derivatives of the transversal displacement are not used, characterizing an hypersingular formulation, in view of the differentiation of integrals with Cauchy kernel. Several types of geometry, boundary conditions and loading are analyzed using the standard BEM procedure.

INTRODUÇÃO

Durante as últimas décadas, o método dos elementos de contorno (MEC) tem consolidado sua aplicabilidade para uma variada gama de problemas lineares elásticos encontrados em situações práticas. Em alguns destes casos, o MEC leva a resultados melhores que o método dos elementos finitos (MEF). No entanto, um grande esforço no

Recibido: Enero 1995

sentido de um desenvolvimento maior do método é observável em diversos institutos de pesquisa, devido às dificuldades numéricas e matemáticas que ainda são encontradas em certos casos, e têm impedido uma aplicação mais geral do método, especialmente para a solução de problemas dinâmicos e não-lineares.

Este trabalho está voltado para um destes casos: a análise de estabilidade de placas semi-espessas. As teorias de placa que consideram a deformação cisalhante ao longo da espessura foram incluídas no contexto dos problemas geometricamente não-lineares no final da década de setenta, para elementos finitos. Entretanto, poucos artigos têm sido publicados sobre o assunto, utilizando elementos de contorno, desde o trabalho pioneiro de Weeën (Van der Weeën¹⁵, Xiao-Yan *et alli*¹⁷).

O presente trabalho descreve sucintamente as equações integrais para análise de estabilidade linear elástica de placas finas e semi-espessas, utilizando as teorias de placa de Mindlin e de Reissner. Como a aplicação do MEC não leva ao aparecimento do fenômeno de *locking* (Westphal e Barcellos¹⁶), a presente abordagem pode ser aplicada igualmente tanto para placas finas quanto semi-espessas. Na análise de problemas de placa geometricamente não-lineares, torna-se necessário o cálculo de derivadas do deslocamento transversal, para cômputo dos termos de acoplamento flexão-membrana. Ao invés de se utilizar derivadas numéricas, foi obtida uma equação integral hipersingular auxiliar para cálculo de tais termos, onde um termo convectivo aparece (Brebbia *et alli*²). As integrais definidas sobre o contorno da placa são discretizadas utilizando-se a metodologia padrão do MEC, mas na presente formulação é necessário integrar a influência do carregamento de membrana no domínio interno. Isto é realizado através do emprego de células de domínio, já que não foi empregado qualquer método de reciprocidade dual ou múltipla. A formulação matricial segue trabalhos anteriores de flambagem de placas finas (Costa e Brebbia⁵, Manolis *et alli*⁹), levando a um problema clássico de autovalores e autovetores de onde podem ser extraídas as cargas de flambagem e os respectivos modos. Estas variáveis são então utilizadas para o cálculo das demais variáveis sobre o contorno, bem como os deslocamentos em pontos internos.

FORMULAÇÃO INTEGRAL

Através da utilização do método dos resíduos ponderados, é direta a obtenção das equações integrais correspondentes aos operadores diferenciais dos problemas de membrana e flexão. Se os termos de grandes deslocamentos são mantidos nos conhecidos operadores de membrana e de von Kármán, as seguintes identidades de Somigliana são obtidas (os índices arábicos variam de 1 a 3 e os gregos de 1 a 2):

$$\begin{aligned}
 u_{\beta}(P) + \int_{\Gamma} {}^m T_{\alpha\beta}(q, P) u_{\beta}(q) d\Gamma_q = \int_{\Gamma} {}^m U_{\alpha\beta}(q, P) t_{\beta}(q) d\Gamma_q + \\
 + \int_{\Omega} {}^m U_{\alpha\beta}(Q, P) q_{\beta}(Q) d\Omega_Q - \int_{\Omega} {}^m U_{\alpha\beta,\gamma}(Q, P) N_{\beta\gamma}^n(Q) d\Omega_Q
 \end{aligned} \tag{1a}$$

$$u_i(P) + \int_{\Gamma} {}^f T_{ij}(q, P) u_j(q) d\Gamma_q = \int_{\Gamma} {}^f U_{ij}(q, P) t_j(q) d\Gamma_q + \int_{\Omega} \left[{}^f U_{ij}(Q, P) - \right. \\ \left. - \xi {}^f U_{ij, \alpha}(Q, P) \right] q_j(Q) d\Omega - \int_{\Omega} {}^f U_{i3, \beta}(Q, P) N_{\alpha\beta}(Q) u_{3, \alpha}(Q) d\Omega_Q \quad (1b)$$

onde o sufixo m indica os termos relacionados ao problema de membrana e o sufixo f os relacionados ao problema de flexão. Na equação (1b), ξ é o *fator de modelo*, aqui utilizado para unificar os modelos de placa de Mindlin e de Reissner na formulação integral (Westphal e Barcellos¹⁶):

$$\xi = \frac{\nu}{(1 - \nu)\lambda^2} \quad \text{para o modelo de Reissner} \\ \xi = 0 \quad \text{para o modelo de Mindlin.} \quad (2)$$

Os tensores fundamentais $\mathbf{U}$ e $\mathbf{T}$ utilizados como estado auxiliar são os mesmos apresentados por Van der Weeën (Van de Weeën¹⁵), mas sem qualquer simplificação (Westphal e Barcellos¹⁶). Note-se que as equações integrais acima são o ponto de partida para qualquer formulação incremental de análise de pós-flambagem de placas. $\mathbf{N}$ é uma matriz contendo os termos lineares e não-lineares dos esforços de membrana, retirados de qualquer ponto sobre a trajetória de equilíbrio primária. O último termo do lado direito das equações (1) representam o acoplamento flexão-membrana. O vetor $\mathbf{q}$ contém o carregamento distribuído. Aplicando-se a propriedade do traço às equações (1) obtém-se as seguintes equações integrais definidas sobre o contorno Γ (para o problema de membrana e de flexão, respectivamente):

$$\mathbf{C}(P)\mathbf{u}(P) + \int_{\Gamma} \mathbf{T}(q, P)\mathbf{u}(q) d\Gamma_q = \int_{\Gamma} \mathbf{U}(q, P)\mathbf{t}(q) d\Gamma_q + \\ + \int_{\Omega} \mathbf{U}(Q, P)\mathbf{q}(Q) d\Omega_Q - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{U}}(Q, P)\mathbf{N}^n(Q) d\Omega_Q \quad (3a)$$

$$\mathbf{C}(P)\mathbf{u}(P) + \int_{\Gamma} \mathbf{T}(q, P)\mathbf{u}(q) d\Gamma_q = \int_{\Gamma} \mathbf{U}(q, P)\mathbf{t}(q) d\Gamma_q + \\ + \int_{\Omega} \left[\mathbf{U}(Q, P) - \xi \hat{\mathbf{U}}(Q, P) \right] \mathbf{q}(Q) d\Omega - \int_{\Omega} \hat{\mathbf{U}}(Q, P)\mathbf{N}(Q)\bar{\mathbf{w}}(Q) d\Omega_Q \quad (3b)$$

onde $\mathbf{C}$ contém os termos de salto dos tensores $\mathbf{T}$. As primeiras integrais do lado esquerdo das equações (2) devem ser interpretadas no sentido do valor principal de Cauchy, devido à existência de termos singulares ($1/r$) em seus núcleos, enquanto as demais integrais são apenas fracamente singulares. O vetor $\bar{\mathbf{w}}$ contém as derivadas cartesianas do deslocamento transversal da placa (que também está presente na matriz $\mathbf{N}^n$). Para o cálculo destes termos, algumas técnicas como o MEF geralmente utilizam derivadas numéricas de ${}^f u_3$, mas no presente caso já se dispõe de uma equação *exata* para o deslocamento transversal, e a terceira das equações (1.b) pode ser utilizada para deduzir uma outra equação integral onde $u_{3, \alpha}$ são as variáveis. Entretanto, tendo

em vista a singularidade do termo contendo $\hat{\mathbf{U}}$, isto deve ser realizado utilizando a fórmula de Leibnitz (Brebbia *et alli*²). Este procedimento leva à uma equação integral da seguinte forma:

$$u_{3,\alpha}(P) - \int_{\Gamma}^f T_{3i,\alpha}(q, P) u_i(q) d\Gamma_q = - \int_{\Gamma}^f U_{3i,\alpha}(q, P) t_i(q) d\Gamma_q + \\ + \omega \int_{\Omega}^f U_{33,\alpha\gamma}(Q, P) N_{\gamma\beta}(Q) u_{3,\beta}(Q) d\Omega_Q + \omega N_{\gamma\beta}(P) u_{3,\beta}(P) \Pi_{\alpha\beta}(P) \quad (5)$$

onde

$$\Pi_{\alpha\beta} = - \frac{\delta_{\alpha\gamma}}{D(1-\nu)\lambda^2} N_{\gamma\beta}(P) \quad (6)$$

é o chamado *termo convectivo*, que resulta da aplicação da fórmula de Leibnitz (nos experimentos numéricos, este termo se mostrou de pouca influência em relação aos outros, ao contrário do que ocorre em problemas de plasticidade). Na equação (3), a integral do lado esquerdo possui um núcleo hipersingular ($1/r^2$) e as integrais do lado direito possuem núcleos de Cauchy ($1/r$, $1/r^2$ e $1/r^2$, respectivamente). Os demais núcleos são quase-singulares. Reescrevendo as equações (1-3) em termos de incremento de deslocamentos, é possível obter uma descrição Lagrangeana de problemas de flexão não-linear de placas, considerando o cisalhamento. No presente trabalho, o interesse está na flambagem linear de placas de Mindlin/Reissner. Neste caso, o estado pré-flambagem da placa é completamente caracterizado pelo carregamento de membrana (na ausência de imperfeições iniciais), e então é possível escrever as cargas de flambagem em termos de qualquer estado sobre a trajetória de equilíbrio primária da placa, $\mathbf{N}^* = \omega \mathbf{N}$. Além disso, é assumida a inexistência de carregamento transversal, $\mathbf{q} = \mathbf{0}$. Com efeito, isto é equivalente ao uso das equações de von Kármán linearizadas.

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Como uma primeira abordagem para a solução de problemas de flambagem de placas semi-espessas através do MEC, foram utilizados apenas elementos de contorno e células de domínio constantes. Deve ser salientado que a presente formulação é realmente hipersingular, mas a utilização de células constantes desabilita o caráter hipersingular da formulação porque nenhum nó funcional das células estará sobre o contorno da placa. Assim, as integrais sobre Γ da equação (3) serão, no máximo, quase-singulares.

Utilizando o procedimento padrão do MEC, as equações (2-3) levam, após o processo de colocação, às seguintes equações algébricas:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t} - \omega \mathbf{B}\bar{\mathbf{w}} \quad (7)$$

$$\bar{\mathbf{w}} + \mathbf{F}\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{t} + \omega \mathbf{E}\bar{\mathbf{w}} \quad (8)$$

onde $\mathbf{u}$ e $\mathbf{t}$ são os deslocamentos e trações sobre os nós do contorno, e $\bar{\mathbf{w}}$ é um vetor contendo as derivadas do deslocamento transversal nos pontos internos. A aplicação das condições de contorno do problema às equações (5-6), obtém-se as seguintes equações, onde $\mathbf{x}$ são as variáveis desconhecidas sobre o contorno:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = -\omega\mathbf{B}\bar{\mathbf{w}} \quad (9)$$

$$\bar{\mathbf{w}} + \mathbf{Q}\mathbf{x} = \omega\mathbf{E}\bar{\mathbf{w}} \quad (10)$$

A substituição do vetor $\mathbf{x}$ da equação (7) na equação (8) origina o seguinte problema clássico de autovalores e autovetores:

$$\left[\mathbf{Q}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{E} \right] \bar{\mathbf{w}} = \frac{1}{\omega} \bar{\mathbf{w}} \quad (11)$$

onde o inverso dos autovalores são utilizados para cálculo das cargas de flambagem, e os autovetores $\bar{\mathbf{w}}$ permitem o cálculo de suas extensões sobre o contorno através da equação (9). Se desejado, estes resultados podem ser substituídos na equação (1b) para obtenção dos deslocamentos internos, para cada modo de flambagem.

Como mencionado, o uso de elementos de contorno e células de domínio constantes evitam a necessidade de integração numérica de núcleos hipersingulares, apesar das precisas quadraturas existentes para estes tipos de núcleos. Entretanto, deve ser salientado que o uso de células muito pequenas pode acarretar perda na precisão dos resultados, se não for utilizado algum método adequado para cálculo das integrais quase-singulares. Isto ocorre porque neste caso alguns pontos de integração estarão excessivamente próximos do contorno da placa. Na implementação numérica do presente trabalho, foi utilizada uma transformação cúbica (Telles¹³) para integrais fracamente singulares ($\ln r$) definidas sobre contornos unidimensionais ou bidimensionais. Para núcleos de Cauchy ($1/r$) integrados em domínios unidimensionais, foram implementadas a quadratura de Kutt (Kutt⁸) e a bem conhecida técnica de imposição de movimentos de corpo rígido. As integrais singulares bidimensionais ($1/r^2$) do último termo integral à direita da equação (3) foram integrados analiticamente. A Tabela I resume as técnicas de integração utilizadas. Na realidade, alguns outros métodos de integração também foram implementados a título de comparação (Marczak¹¹), mas não serão aqui comentados.

Matriz (núcleo)	Técnica utilizada
H (Cauchy 1D)	Movimento de corpo rígido Quadratura de Kutt
G (sing. fraca 1D)	Transformação cúbica
B (sing. fraca 2D)	Transformação cúbica
E (Cauchy 2D)	Integração analítica

Tabela I. Técnicas de integração utilizadas

Todas as demais integrações foram realizadas utilizando-se quadratura gaussiana. Deve ser destacado que o uso da quadratura de Kutt reduz significativamente o tempo computacional da análise, em comparação com a técnica de movimento de corpo rígido. A maior dificuldade do uso da quadratura de Kutt reside no fato de ser exigido o isolamento da singularidade. A integração analítica da integral de domínio da equação (3), no caso singular, é algo complicada para ser ilustrada aqui, e pode ser encontrada em Marczak¹¹.

RESULTADOS NUMÉRICOS

Alguns exemplos numéricos são apresentados para mostrar o desempenho da formulação proposta. Inicialmente, a presente formulação é comparada com outras soluções do MEC e do MEF para flambagem de placas quadradas finas. Exceto quando especificado, os dados utilizados são aqueles ilustrados na Figura 1. Os casos de carregamento analisados estão representados na Figura 2.

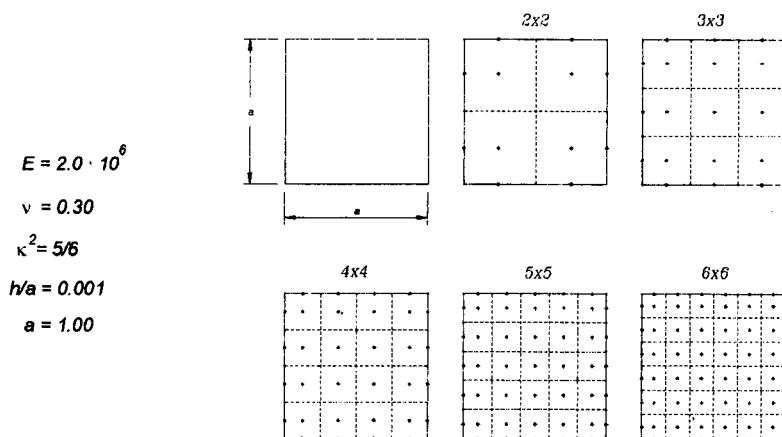


Figura 1. Discretizações utilizadas para placas quadradas

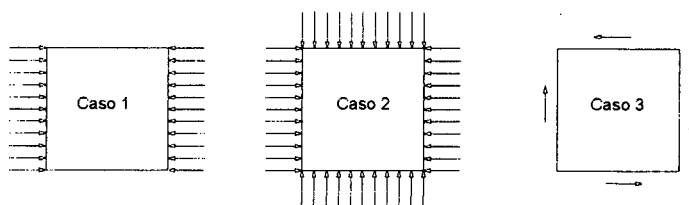


Figura 2. Casos de carregamento considerados

Os resultados estão mostrados graficamente nas Figuras 3 e 4. Em todos os casos a convergência é obtida com o número total de elementos por lado da placa no eixo horizontal e a carga crítica normalizada (Timoshenko e Gere¹⁴) no eixo vertical. Por simplicidade, foi utilizado um número de células de domínio coincidente com o número

de elementos de contorno por lado. A Figura 3 mostra o desempenho da formulação para placas quadradas sob o caso 2 de carregamento com lados simplesmente apoiados (Figura 3a) e engastados (Figura 3b). A Figura 4a apresenta os resultados para placa quadrada simplesmente apoiada sob os casos 1 (Figura 4a) e 3 (Figura 4b) de carregamento. Em todos os casos, N é calculado por:

$$N = \frac{N_{\text{numérico}}}{N_{\text{analítico}}} \quad (10)$$

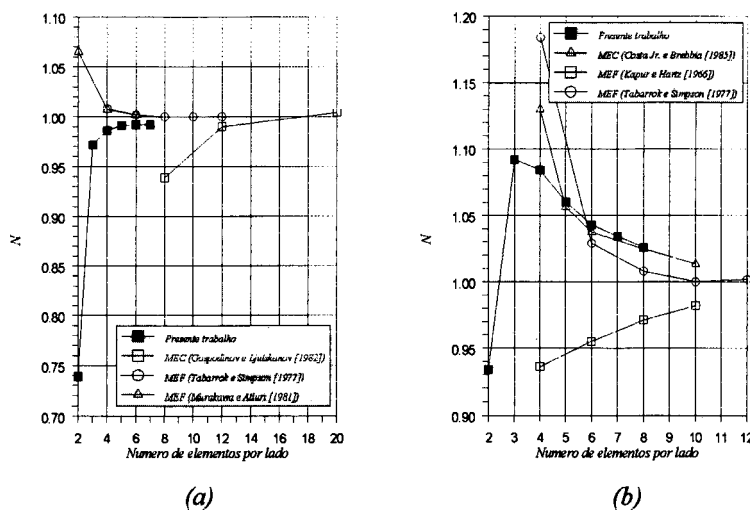


Figura 3. Resultados para o caso 2 de carregamento

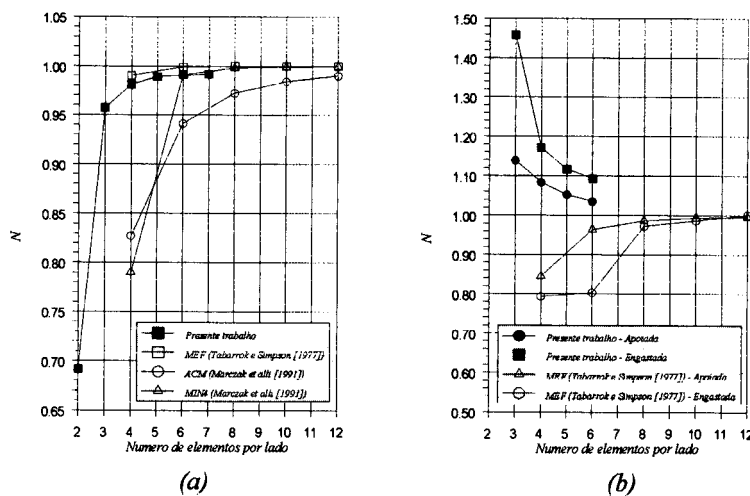


Figura 4. Resultados para os casos 1 e 3 de carregamento

O caso analisado a seguir trata de uma placa retangular apoiada com razão de aspecto $a/b = 2$, carregada sob compressão nos seus lados menores. Foram utilizados os mesmos dados das placas quadradas, exeto $a = 2.0$ e $h = 0.03$. A Tabela II apresenta os resultados da formulação para três malhas distintas e o erro percentual correspondente em relação à solução analítica (Brush e Almroth³). Note-se que não há necessariamente um aumento do erro com o incremento do modo de flambagem, como ocorre em formulações de elementos finitos de deslocamento.

Modo	Malha						
	12×5	Δ %	15×5	Δ	16×4	Δ %	Analítico
1×1	194.50	-0.37	194.82	0.99	196.63	0.77	195.223
2×1	231.38	-0.20	230.64	0.67	232.69	0.73	229.116
3×1	307.40	0.72	307.28	1.56	311.17	2.01	305.036

Tabela II. Resultados para placa retangular fina ($a/b = 2.0$)

A fim de verificar a performance da formulação para placas semi-espessas, foram analisados alguns casos de placas quadradas com diferentes razões h/a . As Tabelas III. a VI. ilustram os resultados normalizados na forma de um fator adimensional κ :

$$\kappa = \frac{N^* a}{\pi^2 D} \quad (11)$$

Formulação	h/a				
	0.001	0.010	0.050	0.100	0.200
Presente (6×6)	3.9671	3.9646	3.8977	3.7694	3.5766
Elasticidade 3D	4.000	—	3.911	3.741	3.150
Finite Strip	4.000	—	3.929	3.731	3.126
MEF (Cheung et alli ⁴)	—	4.100	—	3.758	—

Tabela III. Resultados para placa quadrada apoiada. Caso 1 de carregamento

Formulação	h/a	
	0.010	0.100
Presente (6×6)	1.9841	1.8818
MEF 8SE (8×8 - Cheung et alli ⁴)	2.030	1.880
MEF 17SE (3×3 - Cheung et alli ⁴)	2.000	1.870

Tabela IV. Resultados para placa quadrada apoiada. Caso 2 de carregamento

Formulação	h/a			
	0.010	0.050	0.100	0.200
Presente (6×6)	10.5690	10.4290	10.0194	8.3339
Rayleigh-Ritz (Dawe e Roufaeil ⁶)	10.080	9.515	8.084	5.002
Finite Strip (Dawe e Roufaeil ⁶)	10.076	–	8.043	–

Tabela V. Resultados para placa quadrada engastada. Caso 1 de carregamento

Formulação	h/a	
	0.010	0.100
Presente (6×6)	5.5799	5.5138
Rayleigh-Ritz (Dawe e Roufaeil ⁶)	5.539	4.456
Rayleigh-Ritz (Dawe e Roufaeil ⁶)	5.297	4.420

Tabela VI. Resultados para placa quadrada engastada. Caso 2 de carregamento

A fim de ilustrar a qualidade dos autovetores obtidos, a Figura 5a mostra o segundo modo de flambagem de uma placa simplesmente apoiada sob cisalhamento (caso 3 de carregamento), enquanto a Figura 5b ilustra um modo de flambagem de uma placa retangular. A malha mostrada foi utilizada apenas para interpolar os deslocamentos. A malha de elementos de contorno está indicada na legenda.

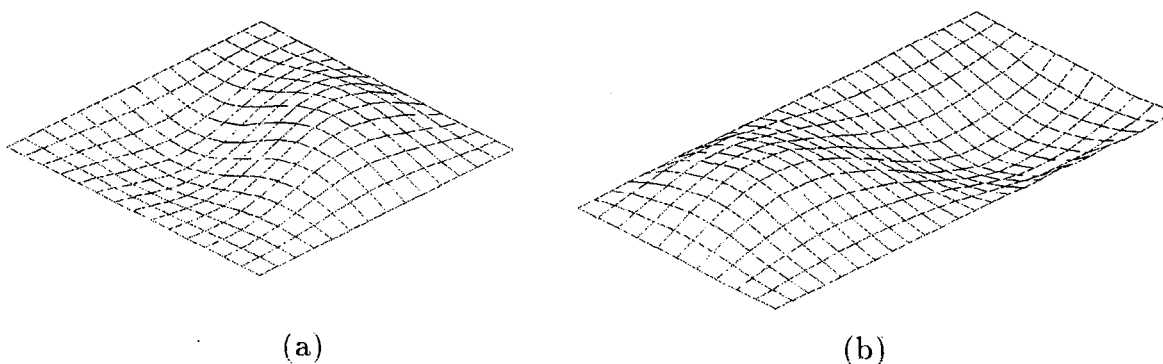


Figura 5. Modos de flambagem de a) placa quadrada apoiada sob cisalhamento (malha 6×6) e b) placa retangular sob compressão uniaxial (malha 8×4)

CONCLUSÕES

As equações integrais para análise de flexão não-linear de placas de Mindlin e Reissner foram apresentadas na sua forma mais geral. As curvaturas foram calculadas através de uma equação hipersingular auxiliar contendo um termo convectivo. Um linearização destas equações leva a um problema de autovalores e autovetores do qual podem ser extrídas as cargas de flambagem e os respectivos modos. Apenas elementos de contorno e células de domínio constantes foram utilizados, por simplicidade. Os resultados mostraram boa aplicabilidade da formulação, em alguns casos melhores que alguns elementos finitos. As tabelas 3 a 6 mostram que as cargas obtidas para placas com razão h/a maiores que 0.1, apesar de eventualmente aceitáveis, não convergiram bem para outras soluções. Isto pode ser explicado por dois aspectos:

- (a) A malha utilizada (6×6), não é refinada o suficiente para levar a bons resultados, quando do uso de elementos de contorno e células de domínio constantes.
- (b) Todos os tensores envolvidos no problema de flexão são funções de um parâmetro $z = \lambda r$ (ao invés de apenas r), onde $\lambda^2 = 12\kappa^2/h^2$ e κ é o fator de correção das tensões cisalhantes (Westphal e Barcellos¹⁶). Então, o caráter hipersingular da presente formulação se torna mais significativo à medida que a espessura da placa aumenta. Isto se deve ao fato de não ter sido tomado nenhum cuidado especial na integração das matrizes **F** e **D** da equação (10), que são quase-singulares.

Finalmente, apesar dos resultados provarem a possibilidade de análise de flambagem de placas semi-espessas via MEC, deve ser salientado que as funções de interpolação constantes são a representação mais pobre que se pode utilizar para as variáveis. O uso de elementos lineares ou de ordem mais alta devem melhorar os resultados. Este é o objetivo de um outro artigo.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao Prof. Guilherme Creuss (CPGC-UFRGS) pela revisão e sugestões feitas ao manuscrito original.

REFERÊNCIAS

1. D.E. Beskos, "Boundary Element Analysis of Plates and Shells", Springer-Verlag, (1991).
2. C.A. Brebbia, J.F.C. Telles, and L.C. Wrobel, "Boundary Element Techniques", Springer-Verlag, (1984).
3. D.O. Brush and B.O. Almroth, "Buckling of Bars, Plates and Shells", McGraw-Hill, (1975).
4. Y.K. Cheung, H.C. Chan and L.G. Tham, "A Study on the Linear Elastic Stability of Mindlin Plates", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 22, pp. 117-132, (1986).
5. J.J.A. Costa and C.A. Brebbia, "Elastic Buckling of Plates Using the Boundary Element Method", *Proc. 7th. Int. Conf. BEM* (Brebbia, C.A. e Maier, G.), Italy, (1985).
6. D.J. Dawe and O.L. Roufaeil, "Buckling of Rectangular Mindlin Plates", *Computers & Structures*, Vol. 15, pp. 461-471.

7. K.K. Kapur & B.O. Hartz, "Stability of Plates Using the Finite Element Method", *ASCE J. Eng. Mechanics Div.*, Vol. **92**, pp. 177–195, (1966).
8. H.R. Kutt, "The Numerical Evaluation of Principal Value Integrals by Finite-Part Integration", *Numer. Math.*, Vol. **24**, pp. 905–910, (1975).
9. G.D. Manolis, D.E. Beskos and M.F. Pineros, "Beam and Plate Stability by Boundary Elements", *Computers & Structures*, Vol. **22**, pp. 917–923, (1986).
10. R.J. Marczak, M.A. Luersen e C.A. Selke, "Um Estudo de Estabilidade Elástica, Utilizando Elementos Finitos de Placas Finas e Semi-Espessas, com Ênfase no Fenômeno do Salto de Modo", *Anais do XI COBEM*, pp. 77–80, (1991).
11. R.J. Marczak, "Alguns Desenvolvimentos do Método dos Elementos de Contorno Aplicado a Placas Semi-Espessas", *Dissertação de Mestrado, UFSC*, (1993).
12. B. Tabarrok and A. Simpson, "An Equilibrium Finite Element Model for Buckling Analysis of Plates", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. **11**, pp. 1733–1757, (1977).
13. J.C.F. Telles, "A Self-Adaptative Co-Ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **24**, pp. 959–973, (1987).
14. S.P. Timoshenko and J.M. Gere, "*Theory of Elastic Stability*", McGraw-Hill, (1961).
15. F. Van der Weeën, "Application of the Boundary Integral Equation Method to Reissner's Plate Model", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **18**, pp. 1–10, (1982).
16. J.T. Westphal and C.S. Barcellos, "Applications of the Boundary Element Method to Reissner's and Mindlin's Plate Models", *Proc. 12th. Int. Conf. BEM*, (Brebbia, C.A. & Tanaka, M. eds.), Japan, (1990).
17. L. Xiao-yan, K.H. Mao and W. Xiuxi, "Geometrically Nonlinear Analysis of a Reissner Type Plate by the Boundary Element", *Computers & Structures*, Vol. **37**, 6, pp. 911–916, (1990).