

Expresiones analíticas de las sensibilidades respecto a variables geométricas para sistemas a flexión en teoría de segundo orden

Juan Carlos Perezzan y Santiago Hernandez

ETS Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de La Coruña
Campus de Elviña s/n, 15192 La Coruña, España
Tel.: 34-981-16 70 00; Fax: 34-981-16 71 70
e-mail: perezzan@iccp.udc.es
e-mail: hernandez@iccp.udc.es

Resumen

El análisis de sensibilidad es un campo de investigación de la ingeniería estructural muy interesante debido a la variedad de sus usos. En estructuras de nudos rígidos, el esfuerzo computacional necesario para obtener los valores analíticos de las sensibilidades es tan arduo que generalmente ha sido evitado; utilizándose en su lugar sus aproximaciones mediante diferencias finitas. Sin embargo, obtener los análisis de sensibilidad por este método puede conducir a errores considerables y a un mayor tiempo de cálculo, especialmente cuando se consideran variables geométricas, como muchos autores han señalado. En el presente trabajo se desarrollan las expresiones analíticas de las sensibilidades respecto a variables geométricas para estructuras de nudos rígidos en teoría de segundo orden.

En nuestro desarrollo comenzamos evaluando los análisis de sensibilidad de los movimientos nodales, para lo cual es necesario efectuar previamente, entre otras cosas, los análisis de sensibilidad del vector de cargas y de las matrices de rigidez elástica y geométrica asociadas a la estructura de nudos rígidos. A continuación, se evalúan los análisis de sensibilidad de las máximas tensiones normales.

Después, se calculan dichas sensibilidades analíticas para algunos ejemplos estructurales comparando los resultados con los correspondientes valores obtenidos mediante diferencias finitas y seguidamente se utilizan las sensibilidades, obtenidas mediante nuestro desarrollo, en la optimización de un pórtico de dos vanos.

Para terminar, se extraen algunas conclusiones del trabajo presentado.

ANALYTICAL EXPRESSIONS OF SENSITIVITIES FOR SHAPE VARIABLES IN SECOND ORDER BENDING SYSTEMS

Summary

Sensitivity analysis is a very interesting field in structural engineering because of its variety of uses. But the computational effort to obtain the analytical values of such sensitivities is a formidable task that has been generally avoided, when considering flexural systems, and finite difference approaches have been used, instead. However carrying out the sensitivity analysis by this method leads to considerable errors, especially with shape variables as many authors have pointed out. In this paper analytical expressions of sensitivities analysis with respect to shape variables are carried out for bending systems in second order theory. In our development we start evaluating the sensitivity analysis of the nodal movements performing the loading vector and stiffness and geometric matrix sensitivity analysis. Then we evaluate the sensitivity analysis of the maximum normal stresses.

Then, some structural examples where the previous analytical sensitivities are evaluated are exposed relating the results versus the corresponding results obtained by finite difference methods and we use it to carry out the optimization of a frame structure.

Finally, some conclusions are drawn from the work presented.

INTRODUCCIÓN

El análisis de sensibilidad en la ingeniería estructural es un campo de investigación muy interesante debido a la variedad de aplicaciones que se le puede dar, como conocer el efecto de modificar los valores de las variables en un diseño estructural o la determinación de la dirección de búsqueda hacia la solución óptima en problemas de optimización estructural mediante métodos de programación matemática basados en el gradiente^{1,2,3}. En estructuras de nudos rígidos, debido a que el esfuerzo computacional necesario para el cálculo de los valores analíticos de las sensibilidades es enorme^{4,5,6}, generalmente se ha recurrido a la aproximación de los análisis de sensibilidad mediante diferencias finitas⁷. Esto ha sido así a pesar de que, además del mayor tiempo de computación necesario, muchos autores, como Adelman y Haftka⁸, han señalado que efectuar los análisis de sensibilidad mediante esta aproximación puede conducir a errores considerables, especialmente para el caso de variables geométricas.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE PRIMER ORDEN RESPECTO A VARIABLES GEOMÉTRICAS

En la investigación que se presenta en este artículo se han desarrollado los análisis de sensibilidad respecto a variables geométricas de estructuras de nudos rígidos bidimensionales, de los movimientos en los nudos de la estructura y de las máximas tensiones normales que se producen en cada una de las barras que componen la estructura, debido a que éstas son las repuestas estructurales que generalmente interesan más al ingeniero que diseña una estructura.

El análisis estructural se ha realizado en teoría de segundo orden para tener en cuenta las no linealidades geométricas, cuyo efecto puede ser tan importante en los elementos comprimidos.

Las variables de diseño que caracterizan la optimización de geometría de sistemas estructurales a flexión hacen referencia a las coordenadas de los nudos en los extremos de las barras que componen la estructura. El desarrollo que se realiza a continuación es plenamente válido para cualquier coordenada nodal.

En todo lo que sigue se considera que x_j representa la variable geométrica respecto a la que se calculan las sensibilidades y es por tanto una coordenada según una dirección global de un nudo de la estructura.

Se designa con L_{bk} a la longitud de la barra b según la dirección global que representa k y, por tanto, se representa con L_{bx} o L_{by} según cual sea el valor de k . Con $L_{b\alpha}$ se designa la longitud de la barra b según la dirección de la variable geométrica x_j y con $L_{b\beta}$ su longitud en dirección perpendicular a la de la variable x_j .

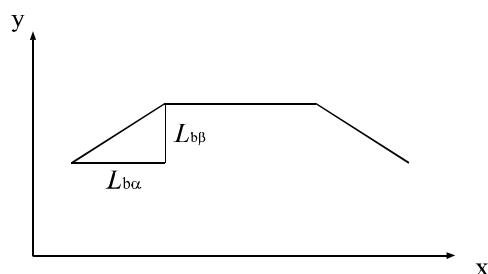


Figura 1a. x_j es una coordenada x

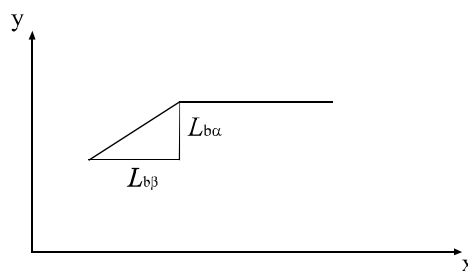


Figura 1b. x_j es una coordenada y

En la Figura 1a se han representado los significados de $L_{b\alpha}$ y $L_{b\beta}$ para el caso en que la coordenada nodal respecto a la que se deriva es una coordenada x y en la Figura 1b se ha

representado lo anterior, pero para el caso en que la coordenada nodal respecto a la que se deriva es una coordenada y .

Además se emplea la variable δ_{bj} cuyos valores, también para la barra b que se está considerando, serán

$$\begin{aligned}\delta_{bj} &= 0 \text{ si sus extremos no contienen a } x_j, \\ \delta_{bj} &= -1 \text{ si el extremo 1 contiene a } x_j, \\ \delta_{bj} &= 1 \text{ si el extremo 2 contiene a } x_j.\end{aligned}$$

Asimismo se tendrá en cuenta que c y s son, respectivamente, el coseno y el seno del ángulo α que forma la barra que se esté con el eje global x , en consecuencia

$$c = \cos \alpha = \frac{L_{bx}}{L_b} \quad \text{y} \quad s = \sin \alpha = \frac{L_{by}}{L_b} \quad (1)$$

Sensibilidades de primer orden de los movimientos

El desarrollo que conduce a la obtención de los valores analíticos de las sensibilidades de primer orden de los movimientos que se producen en los nudos de una estructura de nudos rígidos, parte de la expresión del método del equilibrio que, cuando el análisis estructural se realiza en teoría de segundo orden y las funciones de estabilidad se linealizan^{9,10}, se expresa como

$$\mathbf{f} = (\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G) \mathbf{u} \quad (2)$$

donde \mathbf{f} representa el vector de cargas en nudos, \mathbf{u} el vector de movimientos en nudos, \mathbf{K}_E la matriz de rigidez elástica de la misma y \mathbf{K}_G la matriz de rigidez geométrica de la estructura. Si el símbolo \mathbb{E} se emplea para representar la operación de ensamblaje de los vectores y las matrices elementales, el vector \mathbf{f} y la matriz \mathbf{K}_G son función de los esfuerzos axiales en las barras en la forma

$$\mathbf{f} = \mathbb{E}(\mathbf{f}_p^b + \mathbf{f}_N^b) = \mathbb{E}(\mathbf{f}_p^b + N_b \mathbf{W}_p^b) \quad \mathbf{K}_G = \mathbb{E}(N_b \mathbf{K}_{Gb}^g) \quad (3)$$

donde N_b es el esfuerzo axial en la barra b , \mathbf{K}_{Gb}^g la matriz de rigidez geométrica en ejes globales de la barra, \mathbf{f}_p^b el vector de cargas para la barra asociado a la teoría lineal, \mathbf{f}_N^b el vector de cargas para la barra asociado a la teoría no lineal y \mathbf{W}_p^b el vector asociado a las cargas no lineales para la barra b .

Por su parte, el esfuerzo axial en cada barra depende de los movimientos en los nudos según la expresión

$$N_b = (\mathbf{W}_u^b)^T \mathbf{u} \quad (4)$$

donde \mathbf{W}_u^b es un vector que relaciona los movimientos y el esfuerzo axial para la barra. La derivación de (2) respecto a una variable de diseño geométrica x_j será

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} = \frac{\partial [\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G] \mathbf{u}}{\partial x_j} \quad (5)$$

Teniendo en cuenta (3) y (4), el primer miembro de la expresión anterior resulta

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} = \mathbb{E} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_p^b}{\partial x_j} + N_b \frac{\partial \mathbf{W}_p^b}{\partial x_j} + \mathbf{W}_p^b \frac{\partial (\mathbf{W}_u^b)^T}{\partial x_j} \mathbf{u} + \mathbf{W}_p^b (\mathbf{W}_u^b)^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \right) \quad (6)$$

Por otra parte

$$\frac{\partial(\mathbf{K}_G \mathbf{u})}{\partial x_j} = \frac{\partial[\mathbb{E}(N_b \mathbf{K}_{Gb}^g) \mathbf{u}]}{\partial x_j} = \frac{\partial[\mathbb{E}(\mathbf{K}_{Gb}^g \mathbf{u} N_b)]}{\partial x_i} \quad (7)$$

y, por tanto realizando las derivadas correspondientes

$$\frac{\partial(\mathbf{K}_G \mathbf{u})}{\partial x_j} = \mathbb{E} \left[N_b \frac{\partial \mathbf{K}_{Gb}^g}{\partial x_j} \mathbf{u} + N_b \mathbf{K}_{Gb}^g \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \mathbf{K}_{Gb}^g \mathbf{u} \frac{\partial (\mathbf{W}_u^b)^T}{\partial x_j} \mathbf{u} + \mathbf{K}_{Gb}^g \mathbf{u} (\mathbf{W}_u^b)^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \right] \quad (8)$$

Finalmente resta por derivar el producto $\mathbf{K}_E \mathbf{u}$, que resulta ser

$$\frac{\partial(\mathbf{K}_E \mathbf{u})}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{K}_E}{\partial x_j} \mathbf{u} + \mathbf{K}_E \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \quad (9)$$

Reorganizando los términos de las expresiones (6) a (9)

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G + \mathbb{E}(\mathbf{K}_{Gb}^g \mathbf{u} (\mathbf{W}_u^b)^T - \mathbf{W}_p^b (\mathbf{W}_u^b)^T)] \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial \mathbf{f}_p^b}{\partial x_j} + N_b \frac{\partial \mathbf{W}_p^b}{\partial x_j} + \right. \\ &\left. + \mathbf{W}_p^b \frac{\partial (\mathbf{W}_u^b)^T}{\partial x_j} \mathbf{u} \right] - \left[\mathbb{E} \left(N_b \frac{\partial \mathbf{K}_{Gb}^g}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial \mathbf{K}_E}{\partial x_j} \right] \mathbf{u} - \mathbb{E} \left(\mathbf{K}_{Gb}^g \mathbf{u} \frac{\partial (\mathbf{W}_u^b)^T}{\partial x_j} \mathbf{u} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

El sistema de ecuaciones definido por (10) es lineal y permite la obtención directa de $\partial \mathbf{u} / \partial x_j$.

En el sistema anterior los términos $\partial \mathbf{K}_E / \partial x_j$ y $\partial \mathbf{f}_p^b / \partial x_j$ están asociados a la teoría lineal y sus desarrollos se describieron en las referencias 11 y 12. En consecuencia, quedan por conocer los términos $\partial \mathbf{W}_p^b / \partial x_j$, $\partial (\mathbf{W}_u^b)^T / \partial x_j$ y $\partial \mathbf{K}_{Gb}^g / \partial x_j$.

Sensibilidades del vector \mathbf{W}_p^b

Para el caso en que la carga actuante sobre la barra sea una carga uniformemente distribuida a lo largo de la barra y teniendo en cuenta el origen de la carga, cabe distinguir entre dos posibilidades para el cálculo de las sensibilidades del vector \mathbf{W}_p^b :

a) *La carga distribuida no proviene de un peso propio.*

En este caso el valor de la carga distribuida es constante y no depende por tanto de la geometría. En esta situación el único factor geométrico que hay que derivar es L_b^4

$$\frac{\partial(L_b^4)}{\partial x_j} = \delta_{bj} 4 L_b^2 L_{b\alpha} \quad (11)$$

b) *La carga distribuida proviene de un peso propio.*

Para este otro caso, puesto que la componente de la carga distribuida ortogonal a la barra tiene un factor geométrico que depende de la dirección en la que actúa la gravedad y de la orientación de la barra respecto de los ejes globales, se ha de derivar el factor $L_b^3 L_y$ si la dirección en que actúa la gravedad es la del eje global x o el factor $L_b^3 L_{bx}$ si la dirección resulta ser la del eje global y . En cualquiera de las dos situaciones anteriores la derivada del factor será

$$\frac{\partial(L_b^3 L_{b\alpha})}{\partial x_j} = \delta_{bj} (3 L_b L_{b\alpha}^2 + L_b^3) \quad \text{o} \quad \frac{\partial(L_b^3 L_{b\beta})}{\partial x_j} = \delta_{bj} 3 L_b L_{b\alpha} L_{b\beta} \quad (12)$$

dependiendo de que el factor contenga o no, en orden lineal, la dirección que representa x_j .

Sensibilidades del vector \mathbf{W}_u^b

Para este vector los factores que hay que derivar son L_{bx}/L_b^2 y L_{by}/L_b^2 . Sus derivadas serán

$$\frac{\partial \left(\frac{L_{b\alpha}}{L_b^2} \right)}{\partial x_j} = \delta_{bj} \frac{L_b^2 - 2L_{b\alpha}^2}{L_b^4} \quad \text{o} \quad \frac{\partial \left(\frac{L_{b\beta}}{L_b^2} \right)}{\partial x_j} = \delta_{bj} \frac{-2L_{b\beta} L_{b\alpha}}{L_b^4} \quad (13)$$

de nuevo dependiendo de que el factor contenga o no, en orden lineal, la dirección que representa x_j .

Sensibilidades de la matriz \mathbf{K}_{Gb}^g

Todos los elementos de la matriz \mathbf{K}_{Gb}^g contienen un factor que depende de la geometría y que se encuadra en uno de los grupos siguientes:

- El denominador del factor es L_b^3

En este grupo el elemento puede ser L_{bx}^2/L_b^3 , L_{by}^2/L_b^3 o $L_{bx} L_{by}/L_b^3$. Sus derivadas son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{L_{b\alpha}^2}{L_b^3} \right)}{\partial x_j} &= \delta_{bj} \frac{2L_{b\alpha} L_b^2 - 3L_{b\alpha}^3}{L_b^5} \quad \text{o} \quad \frac{\partial \left(\frac{L_{b\alpha} L_{b\beta}}{L_b^3} \right)}{\partial x_j} = \delta_{bj} \frac{L_{b\beta} L_b^2 - 3L_{b\alpha}^2 L_{b\beta}}{L_b^5} \\ \text{o} \quad \frac{\partial \left(\frac{L_{b\beta}^2}{L_b^3} \right)}{\partial x_j} &= \delta_{bj} \frac{-3L_{b\beta}^2 L_{b\alpha}}{L_b^5} \end{aligned} \quad (14)$$

en función de que el factor contenga o no, en orden cuadrático o lineal, la dirección que representa x_j .

- El denominador del factor es L_b

Para este otro grupo el elemento puede ser L_{bx}/L_b o L_{by}/L_b . Por tanto, sus derivadas serán

$$\frac{\partial \left(\frac{L_{b\alpha}}{L_b} \right)}{\partial x_j} = \delta_{bj} \frac{L_b^2 - L_{b\alpha}^2}{L_b^3} \quad \text{o} \quad \frac{\partial \left(\frac{L_{b\beta}}{L_b} \right)}{\partial x_j} = \delta_{bj} \frac{-L_{b\alpha} L_{b\beta}}{L_b^3} \quad (15)$$

dependiendo de que el factor contenga o no, en orden lineal, la dirección que representa x_j .

- El factor es L_b

Para este último grupo, que sólo contiene al elemento indicado, al derivarlo se obtiene

$$\frac{\partial L_b}{\partial x_j} = \delta_{bj} \frac{L_{b\alpha}}{L_b} \quad (16)$$

Sensibilidades de primer orden de las máximas tensiones normales

Para el desarrollo del cálculo de las sensibilidades de las máximas tensiones normales en cada barra se diferenciará según que dichas tensiones normales máximas se localicen en los extremos de las barras o en el interior de las mismas.

Sensibilidades de las tensiones normales en extremos de barra

Las tensiones normales en extremos de barra, cuando el análisis matricial se realiza en teoría no lineal, se obtienen mediante

$$\sigma = \mathbf{S} \mathbf{u} + \sum_{b=1}^{N_b} \sigma_b \quad (17)$$

donde la matriz \mathbf{S} , conocida en la literatura anglosajona como *system stress transformation matrix*¹³, se detalla más adelante y donde el sumatorio del segundo miembro corresponde a las tensiones normales en las fibras superior e inferior de las secciones en los extremos de las barras, provocadas por las fuerzas nodales de equilibrio debidas a la presencia en las barras de cargas no aplicadas directamente sobre los nudos extremos. Además, en dicho sumatorio, σ_b representa la aportación de la barra b . Si las únicas cargas existentes en la barra estuvieran aplicadas directamente sobre los nudos extremos, esta aportación sería, obviamente, nula, y si existieran cargas no directamente aplicadas sobre dichos nudos extremos, σ_b tendría todas sus componentes nulas a excepción de las correspondientes a las fibras superior e inferior de las secciones en los extremos de la barra. Estas últimas componentes dependerán del tipo de carga aplicada y, en general, serán función de la geometría. Derivando la expresión anterior respecto de la variable geométrica x_j , se tendrá

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_j} = \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_j} \mathbf{u} + \sum_{b=1}^{N_b} \frac{\partial \sigma_b}{\partial x_j} \quad (18)$$

En la expresión anterior se conocen ya \mathbf{S} , \mathbf{u} y $\partial \mathbf{u} / \partial x_j$; lo único que resta por conocer son los términos $\partial \mathbf{S} / \partial x_j$ y $\partial \sigma_b / \partial x_j$.

Para calcular el primero, $\partial \mathbf{S} / \partial x_j$, se expresará la matriz \mathbf{S} como

$$\mathbf{S} = \sum_{b=1}^{N_b} \mathbf{S}_b \quad (19)$$

donde \mathbf{S}_b es la aportación de cada una de las barras de la estructura. Derivando

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_j} = \sum_{b=1}^{N_b} \frac{\partial \mathbf{S}_b}{\partial x_j} \quad (20)$$

Dada cada una de las matrices \mathbf{S}_b , ésta se puede obtener de sumar la aportación de la barra en teoría lineal, \mathbf{S}_b^E , y el correspondiente incremento por ser el análisis estructural en teoría de segundo orden¹², \mathbf{S}_b^G

$$\mathbf{S}_b = E_b \mathbf{S}_b^E + N_b \mathbf{S}_b^G \quad (21)$$

donde E_b representa el módulo de Young para el material de la barra y N_b es el axil en la misma. En la expresión anterior, la matriz \mathbf{S}_b^G es una matriz de cajas con submatrices nulas y no nulas. La submatriz no nula estándar es del tipo

$$\begin{pmatrix} \frac{-s}{10W_b^{Sup}} & \frac{c}{10W_b^{Sup}} & \frac{4L}{30W_b^{Sup}} & \frac{s}{10W_b^{Sup}} & \frac{-c}{10W_b^{Sup}} & \frac{-L}{30W_b^{Sup}} \\ \frac{s}{10W_b^{Inf}} & \frac{-c}{10W_b^{Inf}} & \frac{-4L}{30W_b^{Inf}} & \frac{-s}{10W_b^{Inf}} & \frac{c}{10W_b^{Inf}} & \frac{L}{30W_b^{Inf}} \\ \frac{s}{10W_b^{Sup}} & \frac{-c}{10W_b^{Sup}} & \frac{L}{30W_b^{Sup}} & \frac{-s}{10W_b^{Sup}} & \frac{c}{10W_b^{Sup}} & \frac{-4L}{30W_b^{Sup}} \\ \frac{-s}{10W_b^{Inf}} & \frac{c}{10W_b^{Inf}} & \frac{-L}{30W_b^{Inf}} & \frac{s}{10W_b^{Inf}} & \frac{-c}{10W_b^{Inf}} & \frac{4L}{30W_b^{Inf}} \end{pmatrix} \quad (22)$$

Por tanto, al derivar (21)

$$\frac{\partial \mathbf{S}_b}{\partial x_j} = E_b \frac{\partial \mathbf{S}_b^E}{\partial x_j} + \frac{\partial(N_b \mathbf{S}_b^G)}{\partial x_j} \quad (23)$$

donde el primer sumando, $E_b (\partial \mathbf{S}_b^E / \partial x_j)$, está asociado a la teoría lineal y su desarrollo se puede encontrar en las referencias 11 y 12. Desarrollando el segundo sumando, $\partial(N_b \mathbf{S}_b^G) / \partial x_j$, teniendo en cuenta (4), resulta

$$\frac{\partial(N_b \mathbf{S}_b^G)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\mathbf{W}_u^b)^T}{\partial x_j} \mathbf{u} \mathbf{S}_b^G + (\mathbf{W}_u^b)^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \mathbf{S}_b^G + (\mathbf{W}_u^b)^T \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{S}_b^G}{\partial x_j} \quad (24)$$

donde todos los factores son ya conocidos salvo $\partial \mathbf{S}_b^G / \partial x_j$.

Los únicos factores geométricos existentes en \mathbf{S}_b^G se pueden encuadrar en uno de los grupos siguientes:

- El denominador del factor es L_b

Para este grupo el factor puede ser L_{bx}/L_b o L_{by}/L_b . Por lo tanto, sus derivadas ya fueron obtenidas mediante (15).

- El factor es L_b

En este otro grupo únicamente está el factor L_b , cuya derivada respecto de la geometría también fue calculada anteriormente mediante (16).

Para finalizar con el cálculo de las sensibilidades de las tensiones normales en extremos de barra, queda por evaluar $\partial \sigma_b / \partial x_j$. Para ello se tendrá en cuenta que dada una barra b genérica sobre la que actúa una carga uniformemente distribuida p_b perpendicular a la dirección de la barra y que ocupa todo el vano, la única fuerza nodal de equilibrio que participa en las tensiones normales que se producen en las secciones de los extremos de las barras es el momento flector. Este momento flector se obtiene como suma de una componente asociada a la teoría lineal y de otra a la no lineal.

Las sensibilidades, respecto de la geometría, de la componente asociada a la teoría lineal se encuentran desarrolladas en las referencias 11 y 12.

En cuanto a la parte asociada a la teoría no lineal, las componentes no nulas del vector σ_b , que hacen referencia a las tensiones normales en las fibras superior e inferior de las secciones 1 y 2, respectivamente, inicial y final de la barra, vienen dadas por^{9,11,12}

$$\sigma_1^{Sup} = \sigma_2^{Sup} = \frac{-N_b p_b L^4}{720 E I_b a_{W_{Sup}}} A_b^{-b_{W_{Sup}}} \quad \text{y} \quad \sigma_1^{Inf} = \sigma_2^{Inf} = \frac{N_b p_b L^4}{720 E I_b a_{W_{Inf}}} A_b^{-b_{W_{Inf}}} \quad (25)$$

Al derivar las expresiones anteriores respecto de la variable geométrica x_j se obtiene

$$\frac{\partial \sigma_1^{Sup}}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_2^{Sup}}{\partial x_j} = -\frac{\partial N_b}{\partial x_j} \frac{p_b L^4 A_b^{-b_{W_{Sup}}}}{720 E I_b a_{W_{Sup}}} - \frac{N_b A_b^{-b_{W_{Sup}}}}{720 E I_b a_{W_{Sup}}} \frac{\partial(p_b L^4)}{\partial x_j} \quad (26)$$

$$\frac{\partial \sigma_1^{Inf}}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_2^{Inf}}{\partial x_j} = \frac{\partial N_b}{\partial x_j} \frac{p_b L^4 A_b^{-b_{W_{Inf}}}}{720 E I_b a_{W_{Inf}}} + \frac{N_b A_b^{-b_{W_{Inf}}}}{720 E I_b a_{W_{Inf}}} \frac{\partial(p_b L^4)}{\partial x_j} \quad (27)$$

En (26) y (27) el factor $\partial N_b / \partial x_j$ se obtiene teniendo en cuenta (4). Por lo tanto

$$\frac{\partial N_b}{\partial x_j} = \frac{\partial(\mathbf{W}_u^b)^T}{\partial x_j} \mathbf{u} + (\mathbf{W}_u^b)^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \quad (28)$$

donde ya se conocen todos los factores que intervienen.

Para calcular la otra derivada que interviene en (26) y (27), $\partial(p_b L^4)/\partial x_j$, hay que considerar dos situaciones, según el origen de la carga distribuida.

a) No es un peso propio.

Para este caso, puesto que p_b es una constante, lo único que depende de la geometría es el factor L^4 cuya derivada ya fue obtenida en (11)

b) Es un peso propio.

Para este otro caso, puesto que la componente de la carga distribuida ortogonal a la barra tiene un factor geométrico que depende de la dirección en la que actúa la gravedad y de la orientación de la barra respecto de los ejes globales, se ha de derivar el factor $L_b^3 L_{by}$ si la dirección en que actúa la gravedad es la del eje global x o el factor $L_b^3 L_{bx}$ si la dirección resulta ser la del eje global y , cuyas sensibilidades ya fueron obtenidas en (12).

Sensibilidades de las tensiones normales máximas en el interior de la barra

Para el cálculo de los esfuerzos internos se ha de tener en cuenta la geometría deformada. Por consiguiente, si se considera una sección genérica en el interior del vano de la barra a una distancia x del extremo inicial de la misma y siendo los movimientos locales en los extremos de la barra los que se indican en la Figura 2

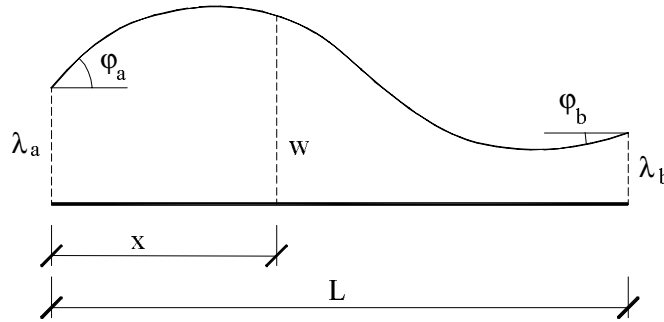


Figura 2. Movimientos locales en extremos de barra

la flecha que se produce en la sección genérica considerada puede aproximarse, con suficiente precisión, mediante⁹

$$w = \left(\frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1 \right) \lambda_i + \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x \right) \varphi_i + \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) \lambda_j + \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \right) \varphi_j \quad (29)$$

Si se reagrupan los términos de la expresión anterior en potencias de x , queda

$$w = x^3 \left(\frac{3\lambda_i}{L^3} + \frac{\varphi_i}{L^2} - \frac{2\lambda_j}{L^3} + \frac{\varphi_j}{L^2} \right) + x^2 \left(\frac{-3\lambda_i}{L^2} - \frac{2\varphi_i}{L} + \frac{3\lambda_j}{L^2} - \frac{\varphi_j}{L} \right) + x\varphi_i + \lambda_i \quad (30)$$

por lo que el momento flector en la sección genérica resulta

$$M_f(x) = M_i - V_i x + p_b \frac{x^2}{2} - N_b w \quad (31)$$

donde M_i y V_i son, respectivamente, el momento flector y el esfuerzo cortante en el extremo inicial de la barra. Puesto que el esfuerzo axial es constante en cada una de las barras, los valores extremos de las tensiones normales se localizan en aquellas secciones donde se producen los valores extremos del momento flector.

Si se deriva la expresión anterior y se iguala a cero para obtener las posiciones de los momentos flectores de valor extremo, resulta una ecuación de segundo grado en x . Haciendo los cambios,

$$a = -3N_b \left(\frac{2\lambda_i}{L^3} + \frac{\varphi_i}{L^2} - \frac{2\lambda_j}{L^3} + \frac{\varphi_j}{L^2} \right) \quad (32)$$

$$b = p_b - 2N_b \left(\frac{-3\lambda_i}{L^2} - \frac{2\varphi_i}{L} + \frac{3\lambda_j}{L^2} - \frac{\varphi_j}{L} \right) \quad (33)$$

$$c = -N_b\varphi_j - V_i \quad (34)$$

las soluciones de la ecuación de segundo grado anterior resultan ser

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (35)$$

donde la solución x_1 corresponde a la determinación positiva y la x_2 a la determinación negativa. Las tensiones normales en las fibras superior e inferior de las secciones interiores indicadas, serán

$$\sigma_{c_m}^k = \sigma_i^k + \frac{(-1)^k V_i x_m + (-1)^{k+1} p_b \frac{x_m^2}{2} + (-1)^k N_b w_m}{W_b^k} \quad (36)$$

donde c indica que la sección que se considera está en el interior del vano de la barra, k toma el valor 1 para la fibra superior y el 2 para la inferior, m toma el valor 1 para x_1 y el 2 para x_2 y W_b^k representa el módulo resistente de la barra, para la fibra superior o inferior en función del valor de k .

Si se deriva (36) respecto de la variable geométrica, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{c_m}^k}{\partial x_j} &= \frac{\partial \sigma_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial \left(\frac{1}{W_b^k} \right)}{\partial x_j} \left[(-1)^k V_i x_m + (-1)^{(k+1)} p_b \frac{x_m^2}{2} + (-1)^k N_b w_m \right] + \\ &+ \frac{1}{W_b^k} \left\{ \frac{\partial x_m}{\partial x_j} [(-1)^k V_i + (-1)^{(k+1)} p_b x_m] + x_m \left[(-1)^k \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + (-1)^{(k+1)} \frac{x_m}{2} \frac{\partial p_b}{\partial x_j} \right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{W_b^k} \left[(-1)^k \left(w_m \frac{\partial N_b}{\partial x_j} + N_b \frac{\partial w_m}{\partial x_j} \right) \right] \end{aligned} \quad (37)$$

En (37) el primer sumando representa las sensibilidades respecto de la geometría de las tensiones normales en el extremo inicial de la barra que han sido calculadas anteriormente, el término $\partial N_b / \partial x_j$ ha sido ya definido mediante (27) y el factor $\partial (1/W_b^k) / \partial x_j$ es siempre nulo debido a que los módulos resistentes de las secciones transversales no dependen de la geometría. Por consiguiente, hay que determinar todavía los factores $\partial V_i / \partial x_j$, $\partial p_b / \partial x_j$, $\partial x_m / \partial x_j$ y $\partial w_m / \partial x_j$. Para calcular el primero de ellos, $\partial V_i / \partial x_j$, se tendrá en cuenta que el

cortante en el extremo inicial de la barra se puede obtener sumando al de las fuerzas nodales de equilibrio en el nudo i el que proporciona la expresión

$$V_i = \mathbf{C}_{V_i}^E \mathbf{u} + N_b \mathbf{C}_{V_i}^G \mathbf{u} \quad (38)$$

donde la matriz $\mathbf{C}_{V_i}^E$ está asociada a la teoría lineal¹¹, y la matriz $\mathbf{C}_{V_i}^G$, que está asociada a la teoría no lineal, viene dada por

$$\mathbf{C}_{V_i}^G = [\Omega \quad \frac{-6s}{5L} \quad \frac{6c}{5L} \quad \frac{1}{10} \quad \Omega \quad \frac{6s}{5L} \quad \frac{-6c}{5L} \quad \frac{1}{10} \quad \Omega] \quad (39)$$

representando Ω matrices fila, de la dimensión adecuada, con todos sus elementos nulos. Los tres primeros elementos no nulos de la matriz $\mathbf{C}_{V_i}^G$ corresponden al nudo i y los otros tres corresponden al nudo j . Derivando (38) respecto de la geometría

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \mathbf{C}_{V_i}^E \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{C}_{V_i}^E}{\partial x_j} \mathbf{u} + \frac{\partial N_b}{\partial x_j} \mathbf{C}_{V_i}^G \mathbf{u} + N_b \left(\mathbf{C}_{V_i}^G \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{C}_{V_i}^G}{\partial x_j} \mathbf{u} \right) \quad (40)$$

En la expresión anterior, el factor $\partial \mathbf{u} / \partial x_j$ ya ha sido calculado y el factor $\partial \mathbf{C}_{V_i}^E / \partial x_j$, asociado a la teoría lineal, ha sido desarrollado en las referencias 11 y 12.

El factor $\partial N_b / \partial x_j$ de nuevo viene dado por (28).

Para obtener $\partial \mathbf{C}_{V_i}^G / \partial x_j$ hay que derivar los factores L_{bx} / L_b^2 y L_{by} / L_b^2 . Sus derivadas resultan ser

$$\frac{\partial \left(\frac{L_{b\alpha}}{L_b^2} \right)}{\partial x_j} = \delta_{bj} \frac{L_b^2 - 2L_{b\alpha}^2}{L_b^4} \quad \text{o} \quad \frac{\partial \left(\frac{L_{b\beta}}{L_b^2} \right)}{\partial x_j} = \delta_{bj} \frac{-2L_{b\beta}L_{b\alpha}}{L_b^4} \quad (41)$$

dependiendo de que el factor contenga o no, en orden lineal, la dirección que representa x_j .

Para terminar con el factor $\partial V_i / \partial x_j$, al valor resultante de (40) le hemos de sumar la sensibilidad del esfuerzo cortante correspondiente a las fuerzas nodales de equilibrio en el nudo i de la barra, pero este esfuerzo cortante sólo tiene componente asociada a la teoría lineal, por lo que su sensibilidad se desarrolló en las referencias 11 y 12.

Para el cálculo de $\partial p_b / \partial x_j$ hay que señalar que será nulo para el caso en que el origen de la carga uniformemente distribuida no sea un peso propio, pero cuando el origen de la carga sea el peso propio, el valor de p_b incluye un factor geométrico que depende de la dirección en que actúa la gravedad y de la orientación de la barra respecto a los ejes globales. Dicho factor geométrico se expresa como L_{by} / L_b cuando la dirección de la gravedad coincide con la del eje global x o se expresa como L_{bx} / L_b cuando coincide con la del eje global y . En cualquiera de los dos casos, sus derivadas fueron expresadas mediante (15).

En el cálculo de $\partial x_m / \partial x_j$ intervienen los factores $\partial N_b / \partial x_j$, $\partial V_i / \partial x_j$, $\partial p_b / \partial x_j$, $\partial (1/L_b) / \partial x_j$, $\partial (1/L_b^2) / \partial x_j$ y las sensibilidades respecto de la geometría de los movimientos.

Las tres primeras acaban de ser determinadas y también las sensibilidades de los movimientos.

La derivada del factor $1/L_b$ resulta ser

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{L_b} \right)}{\partial x_j} = \delta_{bj} \frac{-L_{b\alpha}}{L_b^3} \quad (42)$$

y la del factor $1/L_b^2$ es

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{L_b^2} \right)}{\partial x_j} = \delta_{bj} \frac{-2L_{b\alpha}}{L_b^4} \quad (43)$$

Finalmente, para terminar con el cálculo de (37) resta por evaluar $\partial w_m / \partial x_j$ y en ello intervienen los factores $\partial x_m / \partial x_j$ y las sensibilidades de los movimientos respecto de la geometría que ya han sido calculados.

Con esto finaliza todo el desarrollo necesario para efectuar el análisis de sensibilidad de primer orden para estructuras de barras de nudos rígidos cuando el cálculo estructural se realiza en teoría de segundo orden.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

A continuación se presentan dos ejemplos para los que se obtienen los valores analíticos de los análisis de sensibilidad mediante las expresiones desarrolladas anteriormente. También se obtienen los correspondientes valores aproximados mediante diferencias finitas, aplicando diferentes valores de las perturbaciones para poder apreciar las variaciones que se producen en la precisión de las aproximaciones en función de la variable respecto a la que se calcula la sensibilidad y la magnitud de la perturbación aplicada.

También se incluye un tercer ejemplo en el que se utilizan las expresiones analíticas anteriores para la optimización de un pórtico de dos vanos mediante el método de las direcciones eficientes.

En todos los casos, para resolver la no linealidad del análisis estructural que implica la teoría de segundo orden, se ha seguido un proceso iterativo en el que el esfuerzo axial de cada una de las barras de la estructura es nulo en la primera iteración. Dichos axiles se van actualizando en las sucesivas iteraciones, una vez que se han calculado los movimientos de los nudos correspondientes a la iteración anterior. La convergencia del proceso iterativo se ha determinado con la convergencia de los esfuerzos axiles en cada una de las barras de la estructura.

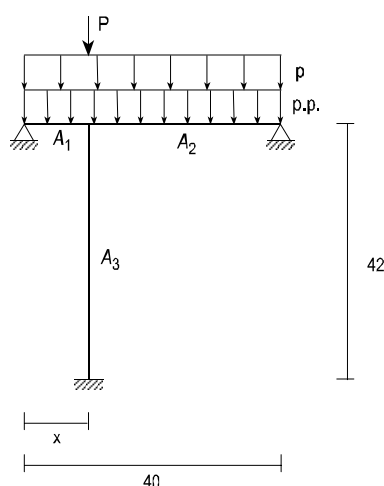


Figura 3. Geometría y carga de la estructura

EJEMPLO 1

Como primer ejemplo de aplicación se incluye el pórtico de dos vanos, que se representa en la Figura 3, sometido al peso propio, a una carga uniformemente distribuida de 10 t/m a lo largo de todo el dintel y a una carga puntual de 30 t en la cabeza del soporte. El módulo

elástico del material empleado tiene un valor de $2,1 \times 10^7$ t/m² y el peso específico es de 7,85 t/m³. Las máximas tensiones normales permitidas son de 26 000 t/m². Los valores numéricos de las propiedades de las secciones transversales se muestran en la Tabla I.

Localización	Área (m ²)	Inercia (m ⁴)	Módulo resistente (m ³)
A_1	0,24	$9,50 \times 10^{-4}$	$4,07 \times 10^{-3}$
A_2	0,23	$8,62 \times 10^{-4}$	$3,80 \times 10^{-3}$
A_3	0,04	$1,1 \times 10^{-5}$	$1,7 \times 10^{-4}$

Tabla I. Propiedades de las secciones transversales

Los análisis de sensibilidad de primer orden evaluados para este ejemplo lo fueron respecto a la posición del pilar y el número de respuestas estructurales consideradas para obtener sus sensibilidades fue de 6. La número 1, el giro en el apoyo izquierdo del dintel corto; la 2, el giro en la cabeza del soporte; la 3, el movimiento horizontal en la sección del soporte situada a 2/3 de la altura total del soporte; la 4, la máxima tensión normal en el dintel corto; la 5, la máxima tensión normal en el dintel largo y la 6, la máxima tensión normal en el soporte. Los resultados obtenidos para este ejemplo se muestran en la Tabla II.

Condición	Sensibilidad analítica	Error con perturbación 5 %	Error con perturbación 1 %	Error con perturbación 0,1 %
1	$1,6440 \times 10^{-8}$	51,3 %	10,4 %	1,1 %
2	$-9,4702 \times 10^{-8}$	5,2 %	1,1 %	0,1 %
3	$4,8732 \times 10^{-6}$	7,5 %	1,5 %	0,2 %
4	$-7,9518 \times 10^{-4}$	2,1 %	0,4 %	0,0 %
5	$-8,3815 \times 10^{-4}$	2,1 %	0,4 %	0,0 %
6	$-3,6838 \times 10^{-4}$	1,0 %	0,2 %	0,0 %

Tabla II. Resultados para el primer ejemplo

Estos resultados muestran, en primer lugar y como era de esperar, que fijado un grado de perturbación concreto, la precisión de las sensibilidades obtenidas mediante diferencias finitas para las distintas respuestas estructurales no es la misma. También muestran que, para este ejemplo, con una perturbación del 5 % o del 1 % se producen errores de cierta consideración en la aproximación mediante diferencias finitas a las sensibilidades de algunas respuestas estructurales y que con una perturbación del 0,1 %, éstas se obtienen con suficiente precisión para todas las respuestas estructurales, si bien esto se ha podido concluir una vez conocidas las sensibilidades correctas a través de sus valores analíticos.

EJEMPLO 2

En este segundo ejemplo se considera una estructura porticada de gran longitud compuesta de 24 y 43 vanos de 93,75 m y 250 m de longitud, respectivamente. Debido a la simetría, únicamente se ha representado en la Figura 4 la mitad de la estructura.

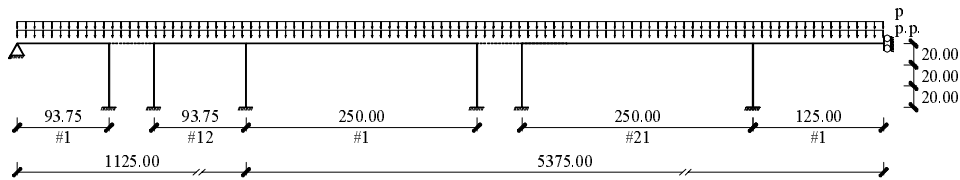


Figura 4. Geometría y carga de la estructura

La geometría es muy similar a la del Puente de la Confederación construido recientemente en Canadá^{14,15}. Si bien para dicho puente la sección transversal fue construida en hormigón, en el ejemplo aquí presentado se han considerado secciones de acero o secciones compuestas de hormigón y acero del tipo de las que aparecen en la Figura 5, donde todas ellas son de paredes de pequeño espesor, con relaciones *longitud/espesor* que cumplen los requerimientos para evitar el pandeo local. Los valores numéricos de las propiedades de las secciones transversales se muestran en la Tabla III.

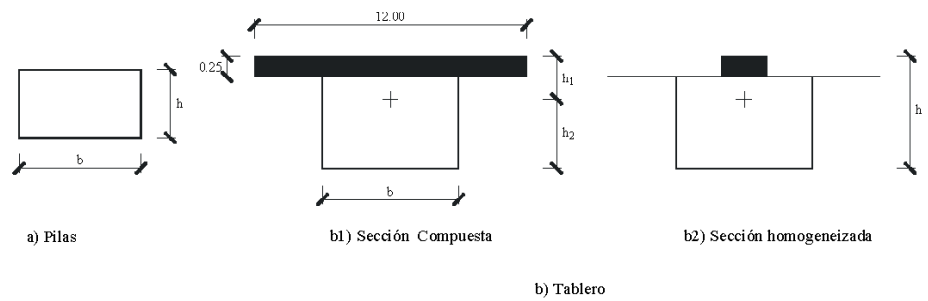


Figura 5. Secciones transversales consideradas

Localización	Área (m ²)	Inercia (m ⁴)	Módulo resistente profundidad h_1 (m ³)	Módulo resistente profundidad h_2 (m ³)
Vanos cortos	1,6	23,94	5,20	4,05
Extremos de vanos largos	2,5	40,05	9,86	9,44
Centro de vanos largos	1,6	23,94	5,20	4,05
Pilares	0,4	0,15	0,19	0,19

Tabla III. Propiedades de las secciones transversales

Las cargas consideradas fueron el peso propio de la estructura y una sobrecarga distribuida de valor $p = 9,36 \text{ t/m}$, equivalente a una sobrecarga de uso de $0,4 \text{ t/m}^2$ sobre el tablero del puente. Para este ejemplo, los máximos movimientos verticales se limitaron a $L/400$, siendo L la longitud del vano correspondiente y también se limitaron las máximas tensiones normales permitidas al valor de 26000 t/m^2 .

Los análisis de sensibilidad de primer orden evaluados para este ejemplo lo fueron en primer lugar respecto a la posición del pilar número 11, es decir, el previo al de transición entre los vanos cortos y los largos, y en segundo, respecto de la posición del último pilar (pilares centrales en el modelo completo).

El número de respuestas estructurales consideradas para obtener sus sensibilidades fue de 6. La número 1, el movimiento horizontal en la cabeza del primer pilar; la 2, el giro en la cabeza del soporte de transición entre vanos cortos y largos; la 3, el movimiento horizontal en cabeza del último pilar (central en el modelo completo); la 4, la máxima tensión normal en el dintel del último vano corto; la 5, la máxima tensión normal en el pilar de transición y la 6, la máxima tensión normal en el último soporte. Los resultados obtenidos para este ejemplo se muestran en la Tabla IV respecto de la primera variable y en la Tabla V respecto de la segunda.

Condición	Sensibilidad analítica	Error con perturbación del:					
		5 %	1 %	0,1 %	0,01 %	0,001 %	0,0001 %
1	$-1,0096 \times 10^{-8}$	2,1 %	0,4 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %
2	$1,3391 \times 10^{-10}$	60,0 %	11,9 %	1,2 %	0,1 %	0,0 %	0,0 %
3	$-1,6504 \times 10^{-9}$	0,0 %	0,1 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %
4	$1,2171 \times 10^{-6}$	56,7 %	11,2 %	1,1 %	0,1 %	0,0 %	0,0 %
5	$1,4892 \times 10^{-6}$	53,7 %	10,6 %	1,1 %	0,1 %	0,0 %	0,0 %
6	$5,5819 \times 10^{-9}$	0,0 %	0,9 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %

Tabla IV. Ejemplo 2. Resultados respecto de la primera variable

Cond.	Sensibilidad analítica	Error con perturbación del:					
		1 %	0,1 %	0,01 %	0,001 %	0,0001 %	0,00001 %
1	$2,9821 \times 10^{-12}$	1486, %	148,6 %	14,9 %	1,5 %	0,2 %	0,2 %
2	$-2,0736 \times 10^{-16}$	1486, %	148,4 %	28,5 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %
3	$-2,3886 \times 10^{-7}$	2,6 %	0,3 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %
4	$4,2161 \times 10^{-11}$	1485, %	148,5 %	14,8 %	1,4 %	0,0 %	0,4 %
5	$-1,3994 \times 10^{-10}$	1486, %	148,6 %	14,9 %	1,5 %	0,2 %	0,0 %
6	$-1,2635 \times 10^{-4}$	0,5 %	0,1 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %	0,0 %

Tabla V. Ejemplo 2. Resultados respecto de la segunda variable

En cuanto a las sensibilidades respecto a la primera variable (Tabla IV) cabe señalar que los valores de las sensibilidades obtenidos mediante su aproximación por diferencias finitas con perturbaciones del 0,01 %, 0,001 % y 0,0001 % son prácticamente exactos para todas las respuestas estructurales, si bien con perturbaciones del 5 % y del 1 % se producen errores de cierta importancia para alguna de las respuestas. Para una perturbación del 0,1 % los valores aproximados son lo suficientemente precisos, aunque no sean prácticamente exactos.

En lo que respecta a las sensibilidades respecto a la segunda variable (Tabla V) destaca el error tan importante que se produce en la aproximación de los valores de las sensibilidades mediante diferencias finitas para la mayoría de las respuestas estructurales para una perturbación relativamente baja, como la del 1 %. Incluso con una perturbación del 0,1 %, que en los anteriores casos producía valores aceptables, en esta situación sigue proporcionando errores muy importantes. Los valores aceptables sólo se obtienen, en este caso, para perturbaciones del 0,001 % e inferiores, salvo para la segunda respuesta estructural cuya mejor aproximación implica un error del 28 %.

EJEMPLO 3

Como ejemplo de aplicación de las sensibilidades anteriores a la optimización de estructuras de nudos rígidos en teoría de segundo orden, se ha incluido la optimización de tamaño y geometría del pórtico de la Figura 3 solicitado por una carga concentrada, el peso propio y una carga distribuida.

Las variables de tamaño están representadas por las áreas A_1 , A_2 , A_3 de las piezas y la variable de diseño asociada a la geometría por la longitud x de uno de los vanos. Las relaciones mecánicas y los valores de las cargas consideradas son

$$\begin{aligned} I &= 0,0833 A_2 \text{ cm}^4 \\ W &= 0,166 A_1, 5 \text{ cm}^3 \\ p &= 1 \text{ t/ml} \\ P &= 30 \text{ t} \\ \text{peso propio} &= 0,25 A \text{ (cm}^2\text{) kg/ml} \end{aligned}$$

La función objetivo elegida fue la de minimizar el peso del material y se limitaron las máximas tensiones normales a 500 kg/cm^2 . Las variables de diseño son las indicadas en la Figura 3. El método de optimización empleado fue el de las direcciones eficientes. En la Tabla VI se muestran los resultados obtenidos y se comparan los que corresponden a la optimización de la misma estructura en teoría lineal.

Tipo de análisis	Variable				Peso (kg)	Incremento (%)
	$A_1 \text{ (cm}^2\text{)}$	$A_2 \text{ (cm}^2\text{)}$	$A_3 \text{ (cm}^2\text{)}$	$x \text{ (m)}$		
Lineal	1901	1901	135	19,99	20426	
No lineal	2013	1969	870	19,99	29047	42
No lineal	1901	1901	136	19,99	20437	0,054

Tabla VI. Optimización de tamaño y geometría del pórtico de dos vanos

De los resultados obtenidos para este ejemplo cabe destacar en primer lugar la obtención de varios mínimos locales en el proceso de optimización de la estructura, lo que coincide con situaciones similares descritas en la literatura existente¹⁶. Esta circunstancia dificultó

especialmente el proceso de optimización de la estructura debido a que desde diferentes diseños iniciales se llegaba al mínimo local que implicaba un 42 % de incremento en el peso estructural con relación al óptimo obtenido al realizar el análisis estructural en teoría lineal. Sólo tras bastantes optimizaciones desde diferentes diseños iniciales se consiguió obtener un mínimo local diferente y correspondiente a un peso estructural menor.

También cabe señalar el hecho, esperado, de que el óptimo en teoría de segundo orden proporciona un peso estructural mayor que el correspondiente al óptimo obtenido cuando el análisis estructural se realiza en teoría lineal. Esto es debido a que al realizarse el análisis estructural en teoría de segundo orden, los elementos comprimidos ven aumentado el valor del momento flector que ha de soportar cada una de sus secciones transversales con relación al que se obtendría cuando el análisis estructural se realiza en teoría lineal. Esto implica la necesidad de aumentar la sección transversal de los elementos comprimidos, como es el caso del soporte en el ejemplo analizado, y a que el peso estructural óptimo sea mayor cuando el análisis estructural se realiza en teoría de segundo orden que cuando se realiza en teoría lineal.

Por el contrario, cuando un elemento se encuentre traccionado, el valor del momento flector disminuye frente al valor que se obtendría en teoría lineal, lo cual implicaría la necesidad de menores secciones transversales para esos elementos. Por tanto, si en el ejemplo propuesto las distintas barras de la estructura hubieran estado traccionadas, el peso estructural óptimo obtenido en teoría de segundo orden hubiera sido menor que el obtenido en teoría lineal.

CONCLUSIONES

De los resultados presentados se pueden extraer algunas conclusiones:

- En primer lugar cabe señalar las ventajas que implica la determinación analítica de las sensibilidades de las respuestas estructurales para un diseño estructural concreto y que son, a juicio de los autores, fundamentalmente dos:
 1. Proporcionan el valor exacto de las mismas.
 2. Su determinación supone un esfuerzo notable para su desarrollo, pero una vez realizado éste, su implementación en las rutinas de cálculo es relativamente sencilla. Las mismas rutinas empleadas para el ensamblaje de las matrices de rigidez de la estructura sirven, con ligeras modificaciones, para el ensamblaje de sus respectivas matrices de sensibilidades.
- Las sensibilidades analíticas proporcionan los valores exactos de las mismas sin la necesidad de aplicar perturbación alguna en las coordenadas que definen la geometría del modelo y sin el análisis estructural correspondiente. Esto implica un menor tiempo de cálculo.
- Evaluar las sensibilidades de primer orden de respuestas estructurales mediante su aproximación por diferencias finitas puede producir errores de consideración en alguno de los casos donde las perturbaciones no sean lo suficientemente pequeñas o sean demasiado pequeñas o, incluso, puede resultar imposible obtener una aceptable aproximación como sucedió para una de las condiciones, en este caso debido a que la sensibilidad era muy pequeña, para la que su mejor aproximación suponía un error del 28 %. Además, si no se conoce la magnitud exacta de su valor, resulta imposible cuantificar con toda certeza el error que se comete al aceptar el valor aproximado.
- Puesto que no es conocida de antemano la magnitud de la perturbación necesaria para obtener valores aproximados de las sensibilidades suficientemente cercanos a los exactos, podemos necesitar de nuevo más esfuerzo computacional que el requerido para su evaluación analítica.

- En el proceso de optimización de tamaño y geometría para estructuras de nudos rígidos se obtuvieron varios mínimos locales, lo que da idea de la dificultad que supone la optimización de este tipo de estructuras cuando el análisis estructural se realiza en teoría de segundo orden.
- Resulta interesante destacar el hecho de que si bien el análisis estructural, al realizarse en teoría de segundo orden, implica la no linealidad de las ecuaciones a resolver, el análisis de las sensibilidades de primer orden de las correspondientes respuestas estructurales implica la resolución de un sistema lineal de ecuaciones que se resuelve de forma directa sin necesidad de procesos iterativos con todos los problemas asociados a ellos y por todos conocidos.
- De todo lo anterior cabe concluir, en opinión de los autores, que merece la pena el esfuerzo que hay que dedicar al desarrollo y obtención de expresiones analíticas para la obtención de las sensibilidades de respuestas estructurales frente a cambios en el diseño de la misma.
- En esta línea cabe señalar como futuras investigaciones interesantes el generalizar los resultados obtenidos a otros tipos de carga y a considerar las propias funciones de estabilidad en vez de sus aproximaciones lineales.

REFERENCIAS

- 1 J.S. Arora, *"Introduction to optimum design"*, McGraw-Hill, (1989).
- 2 G.N Vanderplaats, *"Numerical optimization techniques for engineering design"*, VR & D, (2001).
- 3 R.T. Haftka, Z. Gürdal y M.P. Kamat , *"Elements of structural optimization"*, Kluwer Academic Publishers, (1990).
- 4 B. Prasad y J.F. Emersom, "A general capability of design sensitivity for finite element systems", *23rd AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, structural dynamics and materials conference*, New Orleans, (1982).
- 5 C.J. Camarda y H.M. Adelman, *"Implementation of static and dynamic structure sensitivity derivative calculations in the finite element based engineering analysis language system (EAL)"*, NASA TM-857453.
- 6 D.V. Wallerstein, *"Design enhancement tools in MSC/NASTRAN"*, NASA CP-2327, pp. 505–526.
- 7 F. Navarrina, I. Colominas, R. Juanes, E. Bendito y M. Casteleiro, "A unified approach for high order sensitivity analysis", *"Computer aided optimum design of structures VII"*, pp. 247–256, S. Hernández y C.A. Brebbia (eds.), WIT Press, Southampton, UK, (2001).
- 8 H.M. Adelman y R.T. Haftka, "Sensitivity analysis of discrete systems", *"Structural optimization: status and promise"*, P.M. Kamat (ed.), *Progress in Astronautics and Aeronautics*, Vol. **150**, pp. 291–315, (1993).
- 9 S. Hernandez, *"Análisis lineal y no lineal de estructuras de barras"*, Servicios Re-prográficos de la Universidad de La Coruña, (2001).
- 10 J.S. Przemieniecki, *"Theory of matrix structural analysis"*, Dover Publications, Inc., (1968).

- 11 J.C. Perezzan y S. Hernandez, "Análisis de sensibilidad de primer orden respecto a variables geométricas para estructuras de nudos rígidos en teoría lineal", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **18**, N° 2, pp. 255–278, (2002).
- 12 J.C. Perezzan, "Análisis de sensibilidad y optimización de estructuras de barras de nudos rígidos en teoría lineal y no lineal", Tesis doctoral, Universidad de La Coruña, (1999).
- 13 U. Kirsch, "*Optimum Structural Design*", McGraw-Hill, Inc., (1981).
- 14 R. Gilmour, G. Sauvageot, D. Tassin y J.D. Lockwood, "Northumberland's Ice Breaker", *Civil Engineering*, pp. 34–38, ASCE, Enero, (1997).
- 15 J. Dupré, "*Bridges*", Black Dog & Leventhal, (1997).
- 16 S. Hernandez, "Ejemplos prácticos de problemas no convexos en diseño óptimo de estructuras", *III Congreso de Métodos Numéricos en la Ingeniería*, Vol. **1**, pp. 676–686, Zaragoza, Junio (1996).