

Simulación numérica de la refracción-difracción del oleaje

Ruperto P. Bonet Chaple

Departamento de Física Aplicada
Universidad Politécnica de Cataluña
Jordi Girona 1-3
Campus Nord-UPC, Edificio B4-B5
08034 Barcelona, España
Tel.: 34-93-401 09 89; Fax: 34-93-401 60 90
e-mail: ruperto.bonet@fa.upc.es

Resumen

Un modelo numérico para el cálculo del oleaje en zonas costeras ha sido diseñado. La solución por elementos finitos en un dominio no acotado de una ecuación-modelo tipo convección-difusión y reacción es presentada. Condiciones de frontera absorbentes de diversos órdenes han sido incorporadas en el esquema numérico. El efecto combinado del diseño y localización de la frontera abierta, con los parámetros físicos entrantes en el modelo, es también examinado. Los experimentos numéricos muestran la efectividad del modelo para describir la refracción y difracción del oleaje así como la agitación del oleaje en puertos. El modelo es también aplicado al puerto de Arenys de Mar, Barcelona, y la agitación en el interior del puerto obtenida confirma los parámetros de diseño.

Palabras clave: *elementos finitos, ecuación de Berkhoff, condición absorbente, refracción, difracción*

NUMERICAL SIMULATION OF WATER WAVE REFRACTION-DIFFRACTION

Summary

A numerical model has been designed to calculate water waves in coastal zones. Numerical solution of the convection-diffusion-reaction equation by finite elements is presented. Absorbent boundary conditions of several orders have been incorporated to the numerical scheme. Also, the combined effect from the design and location of artificial boundary and the input parameters in the model is examined. Numerical experiments show the performance of the model to simulate water wave refraction, diffraction and resonance in harbors. The model is also applied to Arenys Harbor, Barcelona, and the numerical wave resonance into harbor confirms the design parameters.

Keywords: *finite elements, mild-slope equation, absorbing boundary condition, refraction, diffraction*

INTRODUCCIÓN

Una tendencia de la modelación matemática de la hidrodinámica costera en el transcurso de estos últimos 20 años se puede caracterizar por la búsqueda y desarrollo de ecuaciones-modelo en una formulación potencial del modelo matemático de propagación del oleaje en el plano horizontal con dos dimensiones espaciales, capaces de describir los efectos combinados de refracción-difracción del oleaje (en su versión lineal o no lineal). Un modelo pionero fue la ecuación de pendiente suave (Berkhoff³) que permite describir ondas lineales regulares armónicas en el tiempo en un amplio rango de profundidades.

Un gran número de modelos de propagación de ondas monocromáticas basados en la ecuación de pendiente suave han mostrado ser extremadamente útiles en una amplia variedad de situaciones. Éstas incluyen el estudio de propagación de ondas en puertos (Berkhoff³, y Panchang^{32,33}), la estimación de ondas por rompeolas no alineados (Southgate³⁵) así como el estudio de la difracción de ondas basado en el espectro angular (Dallyrymple y Kirby^{16,17}), estudios de propagación de ondas en áreas de gran disipación de energía (Booij¹⁰ y Kostense^{16,17}), y estudios de propagación de ondas generadas por el viento (Pearce y Panchang³⁴ y Bondzic y Panchang⁵).

Comparados con otros modelos numéricos, los modelos basados en la ecuación de pendiente suave son relativamente rápidos y directos aunque menos ilustrativos. Ellos pueden ser muy útiles en proyectos de ingeniería, en particular para estimar el comportamiento del oleaje en el interior de puertos. Típicamente la ecuación aplicada a puertos es resuelta sobre una malla de elementos finitos y la solución es presentada en forma de un factor de amplificación y la fase en cada nodo de la malla (Skovgaard *et al.*³⁹ y Chen¹²). Otros modelos dependientes del tiempo, tales como las ecuaciones tipo Boussinesq y Navier-Stokes²⁹, incluyen algunos procesos importantes que están fuera del rango de aplicabilidad de la ecuación de pendiente suave, pero los requerimientos de cómputo han limitado su uso en aplicaciones ingenieriles.

El modelo **LIMCOAST** ha sido desarrollado por Bonet⁶ para el Laboratorio de Hidráulica y Marítima (LIM) de la UPC. El modelo está basado sobre la ecuación de pendiente suave linealizada y sus sucesivas extensiones. El modelo ha sido desarrollado para aplicaciones de ondas largas y cortas, tomando en cuenta la fricción con el fondo y fronteras parcialmente reflejantes. La potencia y flexibilidad del presente modelo para aplicaciones ingenieriles se hace patente en este trabajo. El modelo ha sido validado por aplicaciones de ondas regulares largas y cortas sobre diversas configuraciones geométricas y formas de fondo, incluyendo algunos datos de laboratorio. Una interpolación bivariada es realizada para el tratamiento de batimetrías reales y la influencia de la batimetría resultante en los resultados del modelo es discutida.

El modelo contiene un número de parámetros relativos a las características físicas del área costera de interés. Algunos parámetros (tales como los coeficientes de reflexión en las estructuras) son algunas veces difíciles de especificar confidencialmente, en particular en aplicaciones reales. Sin embargo, un rango de valores admisibles puede ser estimado. En tal sentido, en el presente trabajo son discutidas la influencia de las condiciones parcialmente reflejantes en la difracción de ondas regulares por un rompeola semi-infinito o a través de un "gap" y en las oscilaciones de ondas largas para un puerto rectangular.

Los objetivos del presente trabajo van dirigidos a 1) mostrar la aplicación del método de los elementos finitos en la resolución de diversas problemáticas de la ingeniería oceánica y de costas mediante la descripción del modelo **LIMCOAST**; 2) evaluar la sensibilidad del modelo a determinados parámetros de entrada y 3) la validación del modelo en aplicaciones costeras. El presente trabajo se inicia con la presentación de la ecuación de Berkhoff generalizada y la formulación matemática de un problema interior asociado. La próxima sección trata de la formulación discreta del problema mediante el método de los elemen-

tos finitos tipo Galerkin. En las próximas secciones es mostrada la habilidad del modelo **LIMCOAST** para describir diferentes fenómenos físicos asociados al problema de refracción y difracción del oleaje, seguido por discusiones de la influencia de los parámetros en los resultados numéricos obtenidos. Los resultados del modelo y los datos del puerto de Arenys de Mar son posteriormente presentados junto a una discusión de la sensibilidad del modelo respecto a la interpolación bivariada de la batimetría en la región de interés, seguido por las conclusiones.

ECUACIÓN DE PENDIENTE SUAVE GENERALIZADA

La ecuación de pendiente suave ha sido extendida a incluir efectos de interacción olas-corriente (Liu⁴⁰ y Rivero *et al.*^{37,38}) y efectos de interacción olas-olas debido a la presencia de fondos con ondulaciones rápidamente oscilantes (Kirby^{23,27}). Estos modelos posibilitaron el estudio de la reflexión de ondas superficiales por ondulaciones del fondo marino^{24,25}. Una ecuación extendida de la ecuación de pendiente suave, que incluye efectos de rotación, apareció en los trabajos de Kirby y Lee²⁶. Notables avances en la obtención de ecuaciones extendidas que incluyan los efectos de pendientes y curvaturas arbitrarias del fondo han sido reportados en años recientes^{1,2,11,30,31,36}. La ecuación pendiente suave generalizada puede aparecer en la forma

$$\nabla(a \nabla u) + \left[(\vec{P} - \nabla a) + i\vec{Q} \right] \dot{\nabla} u + b(k^2 + r + id)u = 0 \quad (1)$$

sobre una cierta región Ω del plano R^2 . Aquí los coeficientes a, b, k, r son campos escalares reales (a puede ser complejo) dependientes de las coordenadas espaciales y la profundidad local del fondo marino. El coeficiente d expresa la disipación del movimiento ondulatorio debido a la fricción del fondo o por efecto de rompiente. En este último caso, $d = d(u)$, lo cual transforma la ecuación en una ecuación no lineal. Las magnitudes vectoriales \vec{P} y \vec{Q} expresan los términos que dependen de la interacción del oleaje con una corriente o el efecto de rotación de la tierra, fundamentalmente.

La ecuación-modelo (1) resume las extensiones de la ecuación de Berkhoff³ hasta años muy recientes, lo cual se refleja en la Tabla I. Denotemos por $n = \frac{1}{2}(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)})$ el coeficiente de “shoaling” y k_0 número de onda en aguas profundas $k_0 = w^2/g$. $W; \gamma$ denotan las tasas de amortiguamiento en el proceso de disipación de energía por oleaje. \vec{U} denota la velocidad de una corriente y ω_r representa la frecuencia relativa en el modelo de interacción oleaje-corriente. $\tilde{J} = J(\frac{x,y}{u,v})$ es el jacobiano de la transformación de un sistema de coordenadas rectangulares x, y a un sistema de coordenadas curvilíneos u, v .

Deseamos estudiar los efectos de la batimetría en la propagación del oleaje, tomando como ecuación-modelo la ecuación de pendiente suave generalizada definida sobre una región arbitraria del plano. Debido a que el área de estudio físicamente es una región semi-acotada, para fines computacionales se requiere truncar el dominio computacional introduciendo una frontera artificial y un operador de frontera \mathcal{M} que describa el flujo de energía de las ondas radiadas por el dominio computacional. La selección de la frontera artificial y el operador correspondiente \mathcal{M} definido sobre la misma determina el buen planteamiento matemático del problema derivado y caracteriza el comportamiento físico de la solución del problema en cuestión.

Formulación matemática del problema

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ una región acotada y Γ una curva suave a trozos, tales que $\Gamma = \partial\Omega$ es la frontera externa de Ω , que admite la partición siguiente

Ecuación de	a	$(\vec{P} - \nabla a) + i\vec{Q}$	$b(k^2 + r) + ibd$	u
R-D (Refracción-Difracción) [Berkhoff, 1976]	CC_g	$\vec{0}$	$k^2 CC_g$	$\tilde{\Phi}$
R-D con disipación [Booij, 1981]	CC_g	$\vec{0}$	$k^2 CC_g + i\omega W$	$\tilde{\Phi}$
R-D con pendiente arbitraria [Massel, 1992]	CC_g	$\vec{0}$	$CC_g(k^2 + r(h)) + i\omega\gamma C_g$	\hat{H}
R-D interacción oleaje-corriente [Kirby, 1984]	CC_g	$-[(\nabla \cdot \vec{U} + 1)\vec{U}]$	$k^2 CC_g + i w_r(\nabla \cdot \vec{U})$	$\tilde{\Phi}$
R-D con efecto de rotación [Kirby, 1992-93]	gF_1	$i \frac{g\epsilon}{\cosh^2 Nh} (-\frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial x})$	$gF_1 k^2$	η
R-D para dominios conformes [Kirby, 1993]	1	$\vec{0}$	$\tilde{J}(k^2 - \frac{\nabla^2 \sqrt{CC_g}}{\sqrt{CC_g}})$	$\tilde{\phi}$

Tabla I. Ecuación “mild-slope” generalizada.

$$\begin{aligned}\Gamma &= \overline{\Gamma_g \cup \Gamma_h} \\ \emptyset &= \Gamma_g \cap \Gamma_h\end{aligned}\quad (2)$$

Si denotamos por \mathcal{L} el operador asociado a la ecuación-modelo (1)

$$\mathcal{L}\phi := \nabla(a\nabla\phi) + \left[(\vec{P} - \nabla a) + i\vec{Q}\right]\nabla\phi + b(k^2 + r + id)\phi = 0 \quad (3)$$

un problema de valores-frontera para la ecuación de pendiente suave generalizada sobre el dominio truncado $\bar{\Omega}$ se puede definir como sigue:

Encontrar $\phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$, potencial de velocidades sobre el plano horizontal tales que

$$\mathcal{L}\phi = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (4)$$

$$\phi = \phi_I \quad \text{sobre } \Gamma_g \quad (5)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = ik\tilde{h} \quad \text{sobre } \Gamma_{h1} \quad (6)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = \mathcal{M}\phi + \mathcal{N} \quad \text{sobre } \Gamma_{h2} \quad (7)$$

donde $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ denota el vector normal unitario exterior asociado a Γ , ∇ es el operador gradiente y $k = w/C \geq 0$ el número de onda, $\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} := \nabla\phi \cdot \mathbf{n}$ la derivada normal y ϕ_I el potencial incidente. Las funciones escalares a, b, r, d y los campos vectoriales de variable real \vec{P}, \vec{Q} están definidos sobre $\bar{\Omega}$ y son dependientes de la profundidad local. La función escalar \tilde{h} con valores complejos está definida sobre Γ_g . Estas funciones son datos prescritos en el problema. En la ecuación-modelo (3), $\phi = \phi(x, y)$ representa el potencial ondulatorio sobre el plano horizontal y la variable dependiente. La condición de frontera de Dirichlet (5) expresa los valores del potencial correspondiente a una onda monocromática plana incidente ϕ_I

$$\phi_I = A_0 \exp[ik_0(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)]$$

al dominio de cálculo en un ángulo θ_0 a la frontera Γ_g . Las condiciones de frontera ((6) y (7)) expresan relaciones de transferencia de energía a través de los contornos correspondientes. La relación (6) expresa una relación de flujo impuesto sobre el contorno Γ_{h1} . Si la función $\tilde{h} \equiv 0$ sobre Γ_{h1} la condición (6) es una condición de frontera de Neumann, que expresa la no transferencia de energía a través del contorno Γ_{h1} o, lo que es lo mismo, una velocidad normal al contorno igual a cero. La relación (7) expresa una condición parcialmente reflejante sobre la frontera abierta, determinada por la forma de la frontera abierta y el orden del operador local \mathcal{M} . Junto a ello, las características físicas de las ondas entrantes determinan la expresión \mathcal{N} .

Formulación discreta

Representemos el potencial ondulatorio ϕ como la suma de su partes real ϕ_1 e imaginaria ϕ_2 y denotemos el vector $\tilde{\phi}$ como vector solución. Empleando el método de los residuos ponderados deseamos encontrar un potencial $\tilde{\phi}$ con valores complejos que sea solución del sistema de ecuaciones siguiente

$$\langle E, W \rangle = \int_{\Omega} (\hat{L}\tilde{\phi})W d\Omega = 0 \quad (8)$$

donde W es una función de peso real. Usando el teorema de Green en el plano la forma débil correspondiente a la ecuación (4)-(7) adopta la forma

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} aW \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \mathbf{n}} ds + \int_{\Omega} W(\vec{P} - \nabla a + i\vec{Q}) \nabla \tilde{\phi} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} a \nabla W \nabla \tilde{\phi} d\Omega + \int_{\Omega} [b(k^2 + r) + ibd] W \tilde{\phi} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Discretizando el dominio Ω por elementos finitos bidimensionales, en cada elemento Ω^e la solución aproximada se expresa por una combinación lineal de las funciones prescritas

$$\tilde{\phi}(x, y) \simeq \sum_e \sum_i W_i^e(x, y) \tilde{\phi}_i^e \quad (10)$$

donde las funciones de peso W_i^e forman una base de un espacio de funciones y ϕ_i^e son los valores nodales de la solución. Sustituyendo en la ecuación (9), se obtiene el sistema de ecuaciones con coeficientes complejos $\mathbf{A}\tilde{\phi} = F$, siendo la matriz \mathbf{A} la suma de las matrices que aparecen a continuación

$$\mathbf{A} = A_{ij}^1 + A_{ij}^2 + A_{ij}^3 + A_{ij}^4$$

donde

$$\begin{aligned} A_{ij}^1 &= \int_{\Omega_e} W_i^e (\vec{P} - \nabla a + i\vec{Q}) \nabla W_j^e d\Omega_e \\ A_{ij}^2 &= - \int_{\Omega_e} a \nabla W_i^e \nabla W_j^e d\Omega_e \\ A_{ij}^3 &= \int_{\Omega_e} [b(k^2 + r) + ibd] W_i^e W_j^e d\Omega_e \end{aligned}$$

y A_{ij}^4 y F representan las contribuciones de los elementos frontera. La integral A_{ij}^1 corresponde a la discretización del término advectivo cuando el número de Peclet de la malla es relativamente bajo. Un estudio relacionado con la inclusión del término de “upwind” en el modelo **LIMCOAST** para la estabilización del esquema numérico será formulado en trabajos futuros.

Una contribución importante en el modelo es el tratamiento de fronteras abiertas en regiones semi-infinitas o semi-acotadas mediante la incorporación de condiciones de frontera absorbentes locales y no-locales. En el presente trabajo es obtenido el tratamiento de fronteras abiertas mediante la incorporación de condiciones de frontera parabólicas de primero

y segundo orden a las ecuaciones de elementos finitos en el modelo **LIMCOAST**. Tales condiciones expresan condiciones parcialmente reflejantes o condiciones parcialmente reflejantes con incidencia. Empleando la condición (7), la formulación débil para la condición contorno adopta la forma

$$\int_{\Gamma_{h_2}^e} aW_i^{*ef} [\mathcal{M}\tilde{\phi}] \, ds + \int_{\Gamma_{h_2}^e} aW_i^{*ef} \mathcal{N} \, ds + \int_{\Gamma_{h_1}^e} aW_i^{*ef} (ik\tilde{h}) \, ds \quad (11)$$

en la cual la primera integral es la contribución a la matriz de los coeficientes (A_{ij}^4), y la segunda y tercera integral expresan el flujo de la energía entrante al dominio computacional mediante la frontera Γ^e y representan la contribución al término fuente (F). En particular, hemos examinado la condición absorbente de segundo orden de Bingyi Xu⁴. Para dominios circumferenciales esta condición puede ser escrita

$$\mathcal{M}\tilde{\phi} = p\tilde{\phi} + \frac{\partial}{\partial\theta} q \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\theta} \quad (12)$$

cuya forma débil para contornos cerrados toma la forma

$$\int_{\Gamma_{h_2}^e} aW_i^{*ef} [\mathcal{M}\tilde{\phi}] \, ds = \int_{\Gamma_{h_2}^e} (ap)\tilde{\phi} W_i^{*ef} \, ds - \int_{\Gamma_{h_2}^e} (aq) \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\theta} \frac{\partial W_i^{*ef}}{\partial\theta} \, ds \quad (13)$$

Validación del modelo con dominios simples

Los ejemplos numéricos propuestos van dirigidos a la validación del código **LIMCOAST** en la resolución numérica de problemas de propagación de ondas en el mar usando el método de Galerkin. Tales ejemplos describen la influencia de la batimetría en la propagación de un oleaje regular para geometrías simplificadas siguiendo la ecuación-modelo de Berkhoff³. Las soluciones numéricas resultantes son comparadas con soluciones analíticas conocidas o datos de laboratorio, las cuales nos permiten verificar el ajuste de la solución numérica a la física del problema en cuestión.

Propagación de ondas sobre un fondo inclinado

Cuando los contornos de la batimetría son paralelos a la dirección a lo largo de la costa y no existen obstáculos en el interior del dominio, los efectos de difracción se anulan. Aún más, si la reflexión es ignorada, los resultados de la teoría de rayos deben ser recuperados mediante la ecuación de pendiente suave.

Para verificar este punto con el presente modelo hemos seleccionado un perfil de playa usado por Grassa¹⁸. El perfil de la playa usado en los experimentos numéricos es dado como

$$h(x) = \max(10, \min(11 - 0,001x, 2)) \text{ m}$$

en el cual la coordenada x y la profundidad h tienen unidades en metros. El periodo de la onda incidente es de 10,726 s y la amplitud de la onda, $\phi_0 = 1$ m. A una profundidad $h = 10$ m la onda incidente tiene una longitud de onda de 100 m. La batimetría ha sido discretizada entre $(0, 0) - (1200, 800)$ con una resolución de 20 elementos por longitud de onda en la dirección del eje x . La Figura 1 muestra el comportamiento del coeficiente de

“shoaling” ($\theta_0 = 0$ grado). Estos resultados numéricos se corresponden con los resultados alcanzados por otros autores empleando la teoría lineal del oleaje¹⁸.

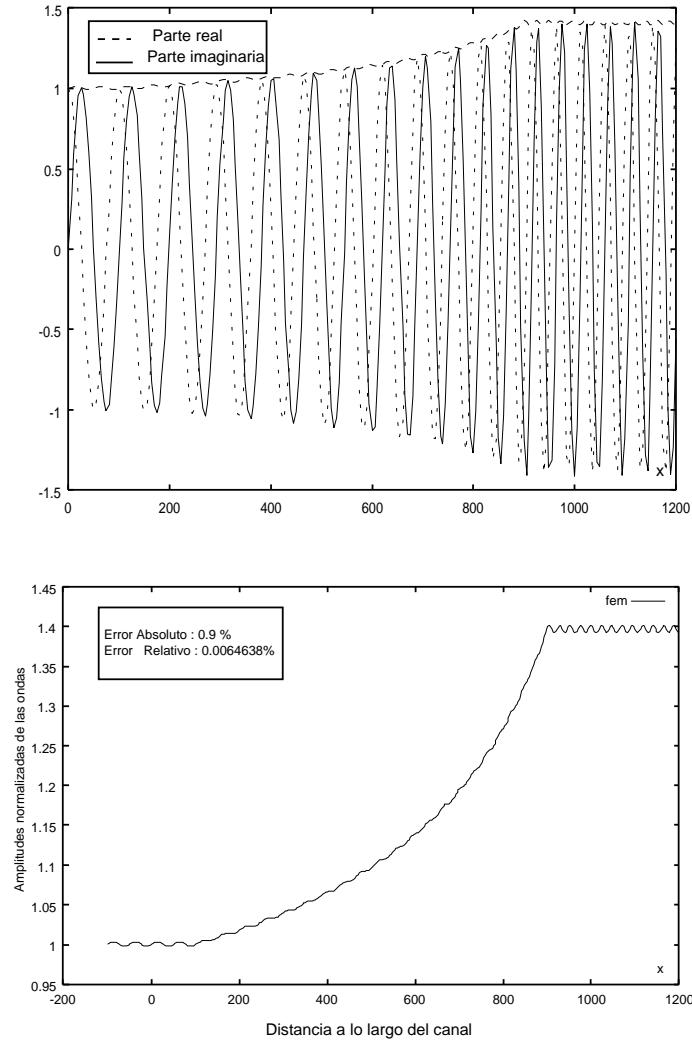


Figura 1. Propagación de ondas sobre un plano inclinado con contornos rectos y paralelos. Incidencia normal.

Foco ondulatorio detrás de una elevación circular sumergida que descansa sobre un fondo plano

Con el propósito de demostrar la importancia de la condición de radiación empleada investigamos el foco de un tren de ondas monocromáticas detrás de una elevación circular sumergida, que descansa sobre un fondo plano¹⁸. La geometría del experimento de Ito y Tanimoto es mostrada en la Figura 2. La profundidad del agua sobre el fondo plano es $h_1 = 0,15$ m y la profundidad del agua en la región de la elevación es descrita por

$$h = h_2 + 0.15625 \left[(x - 1,2)^2 + (y - 1.2)^2 \right]$$

donde $h_2 = 0,05$ m es la profundidad en la cresta de la elevación.

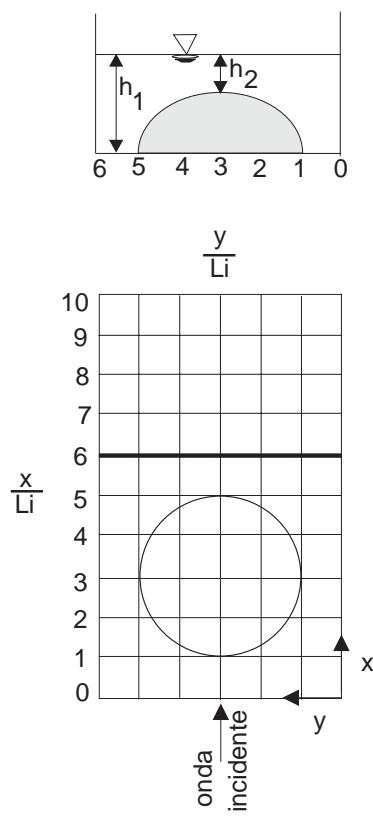


Figura 2. Geometría del dominio computacional. Experimento de laboratorio de Ito & Tanimoto (1972).

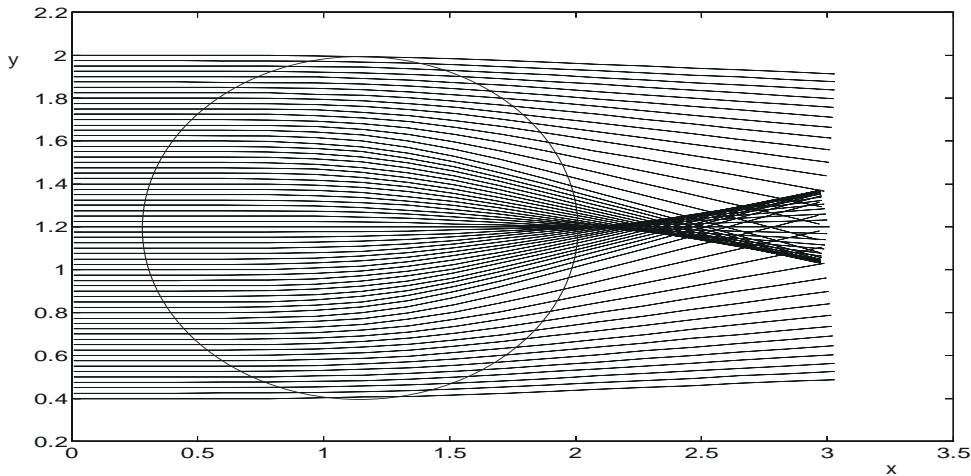


Figura 3. Teoría de rayos. Foco ondulatorio detrás del shoal.

Un tren de ondas monocromático con una altura de 1,04 cm y un periodo de 0,511 s entra en el dominio con un ángulo de incidencia de $\theta_0 = 0$ grado. En este experimento se estudiaba la transformación de un tren de ondas periódico al pasar sobre una elevación del fondo y en el que se reproducía el efecto combinado de refracción y difracción. Según la teoría de rayos se produce un cáustico tras sobreponer la elevación del fondo (Figura 3), prediciendo, por lo tanto, alturas de olas indefinidas.

A diferencia de los trabajos de Rivero³⁷ y Duck, Dalrymple y Kirby²⁷ hemos reducido el dominio computacional (Figura 2) hasta la línea marcada en negrita (correspondiente a la sección $x/L_i = 6$), es decir, los resultados numéricos presentados aquí son obtenidos con la condición de radiación de primer orden colocada a una 1.0 longitud de onda de la base de la elevación del fondo. Los experimentos numéricos realizados demuestran que a una distancia menor la influencia de la componente ϕ^- es muy importante y debe tenerse en cuenta debido a la influencia de la difracción del oleaje en esa zona.

Debido a la simetría axial de la elevación del fondo, los patrones del foco ondulatorio detrás de la elevación son independientes del ángulo de incidencia, si el modelo es capaz de predecirlo correctamente. Empleando el método de Galerkin con una condición de radiación local de primer orden, mostramos en las Figuras 4 y 5 los resultados numéricos obtenidos.

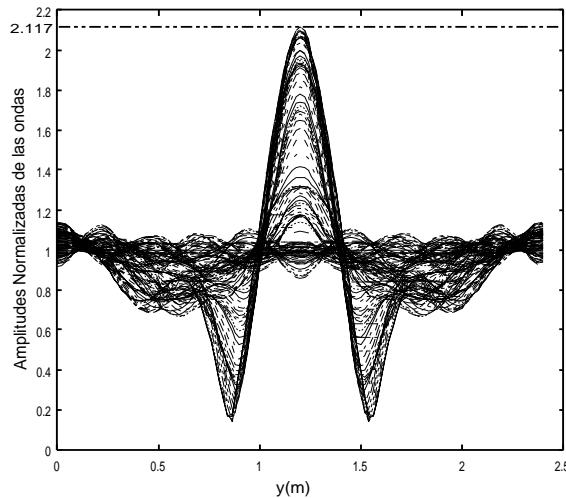


Figura 4. Amplitudes normalizadas de las ondas a lo largo de varias secciones transversales.

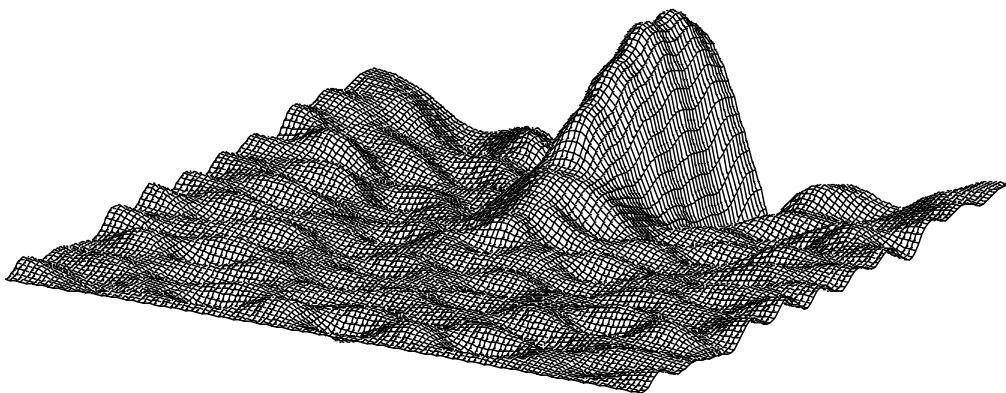


Figura 5. Resultados numéricos de la distribución de amplitudes normalizadas. Vista 3-D. Experimento de Ito & Tanimoto (1972).

En la Figura 4 mostramos las amplitudes normalizadas de las ondas en diferentes secciones transversales del dominio. El eje vertical muestra la relación de la amplitud del oleaje en un punto del dominio respecto al oleaje incidente. Como se aprecia en la Figura 4, el campo ondulatorio es simétrico respecto al eje central del tanque en concordancia con lo esperado.

La Figura 5 muestra que el modelo reproduce bien el aumento de amplitud en la formación del cáustico principal, aunque es significativo el efecto de las reflexiones originadas por la frontera (al fondo del tanque) del dominio computacional respecto a la solución numérica obtenida. Los resultados numéricos presentados aquí empleando la condición de radiación local de primer orden muestran una buena correspondencia con los resultados experimentales de Ito y Tanimoto para el caso $H_i/L_i = 0,0026$, siendo H_i y L_i la altura y longitud de la onda incidente, los cuales pueden ser encontrados en la literatura referenciada^{21,25}.

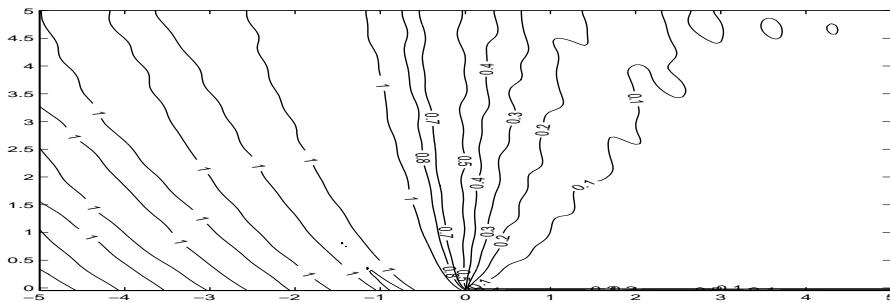


Figura 6. Difracción por un rompeolas semi-infinito. Solución numérica usando una condición de frontera de radiación de primer orden.

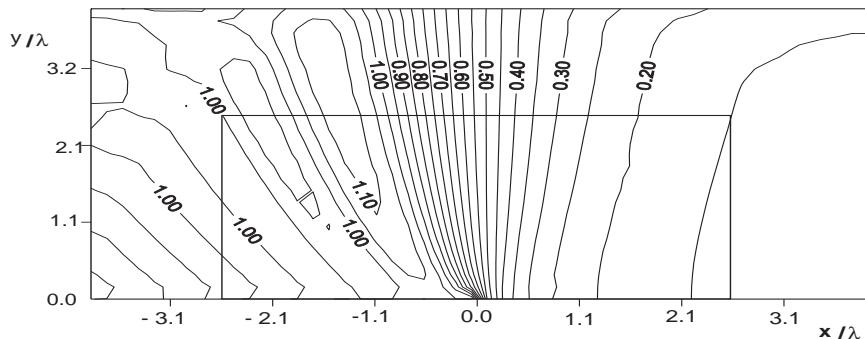


Figura 7. Difracción de ondas por un rompeolas semi-infinito. Solución analítica en un dominio de 3λ alrededor del rompeolas.

Difracción de ondas por un rompeolas semi-infinito

Examinamos la difracción producida por un rompeolas semi-infinito y perfectamente reflejante localizado sobre un fondo horizontal, en un dominio rectangular con una extensión de 10 longitudes de onda, para una onda incidente de amplitud uno, cuya longitud de onda alcanza los 186,5 m. Sea una onda monocromática de periodo $T = 16$ s que incide con un ángulo de 90 grados al rompeolas situado en un dominio rectangular con una profundidad de 15 m. La Figura 7 muestra el patrón de difracción originada por la solución analítica en un dominio rectangular de más de 3 longitudes de onda alrededor del rompeolas.

Fueron realizados varios ensayos numéricos para determinar las condiciones de borde más adecuadas, decidiéndose colocar condiciones de frontera parcialmente absorbentes entrantes o salientes en toda la frontera del dominio computacional, para una malla con una resolución de 20 elementos por longitud de onda. Como se aprecia en la Figura 7, la solución analítica aproximada presenta un “ruido” detrás del rompeola en la zona de sombra, lo cual imprime una diferencia cualitativa con la solución numérica obtenida para un flujo nulo sobre el rompeolas (Figura 6). A pesar de la influencia de las reflexiones laterales en los resultados numéricos el comportamiento de la solución numérica a pocas longitudes de

ondas del rompeolas se corresponde adecuadamente con los resultados analíticos. Debido a la incidencia normal del oleaje al rompeolas se origina una zona de fuertes reflexiones delante de la estructura, alcanzándose duplicar la amplitud de la onda incidente. La Figura 8 describe adecuadamente el comportamiento físico de las ondas incidente, reflejada y difractada, en un dominio de 5 longitudes de ondas alrededor del rompeolas.

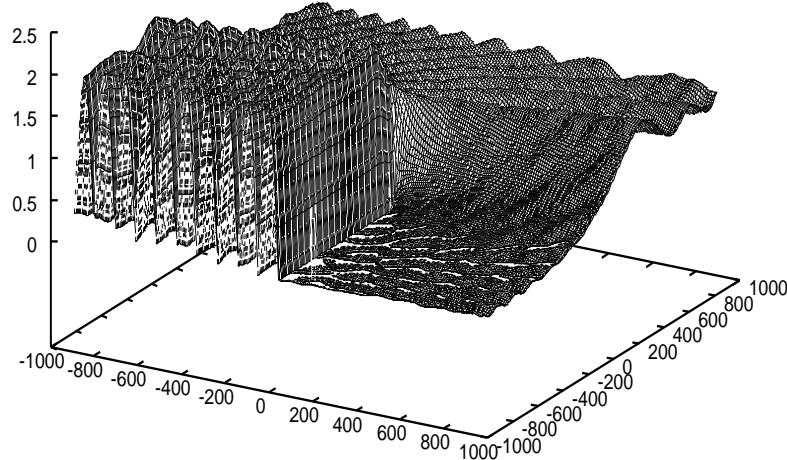


Figura 8. Difracción por un rompeolas semi-infinito. Perspectiva 3-D de las amplitudes de las olas alrededor del rompeolas para incidencia normal.

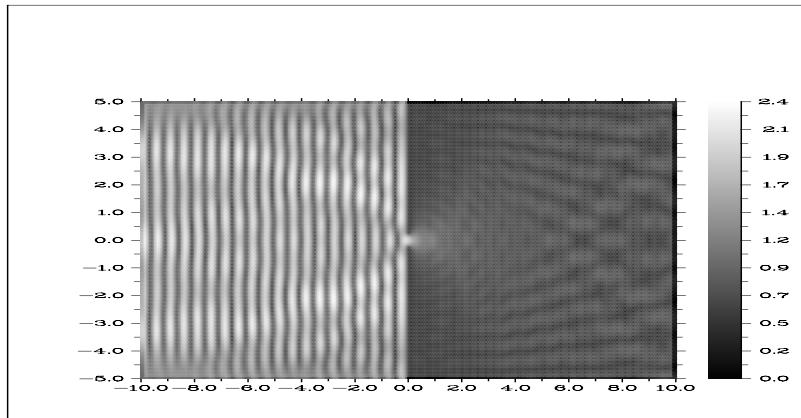


Figura 9. Gap con ($B/\lambda = 0.5$). Amplitudes de olas difractadas originadas por una onda monocromática con incidencia normal. Solución numérica empleando el método de Galerkin con una condición de radiación de primer orden.

Difracción de ondas por dos rompeolas semi-infinitos

El paso de un oleaje de longitud de onda λ entre dos diques semi-infinitos produce una doble difracción que tiende a trasmitir la agitación que entra por dicha apertura (denotada por B) hacia las zonas situadas detrás de los dos diques. El frente de ola que ha atravesado la apertura se encuentra, de repente, con fuertes gradientes laterales de la altura de ola, que tiende a suavizar mediante un giro de la dirección de propagación del oleaje. Como consecuencia de ello la altura de ola en el eje de penetración se va reduciendo progresivamente, debido a esta transferencia lateral de energía⁴².

Los ensayos numéricos con un gap de apertura 0,5, 1 y 2 longitudes de ondas (o sea $B = 0,5\lambda$, 1λ y 2λ respectivamente) fueron realizados en un dominio rectangular, empleando los parámetros físicos descritos en el caso anterior. Las Figuras 9, 10 y 11 muestran los mapas de alturas de olas correspondientes. En ellas se aprecia un aumento del flujo de energía a medida que la apertura es mayor, lo cual se corresponde obviamente con lo esperado.

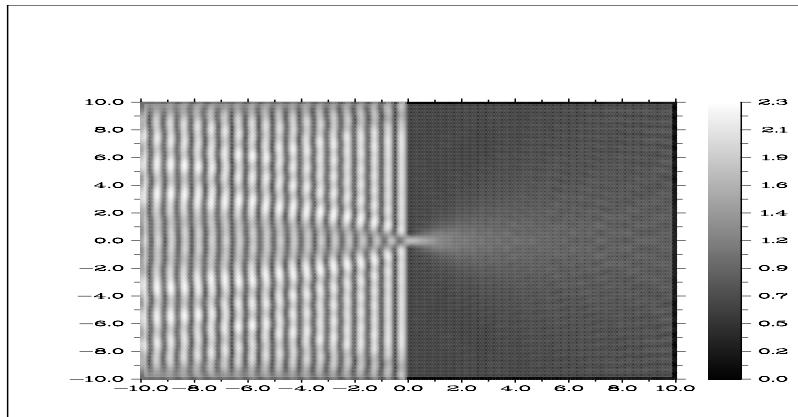


Figura 10. Gap con ($B/\lambda = 1$). Amplitudes de olas difractadas originadas por una onda monocromática con incidencia normal. Solución numérica empleando el método de Galerkin con una condición de radiación de primer orden.

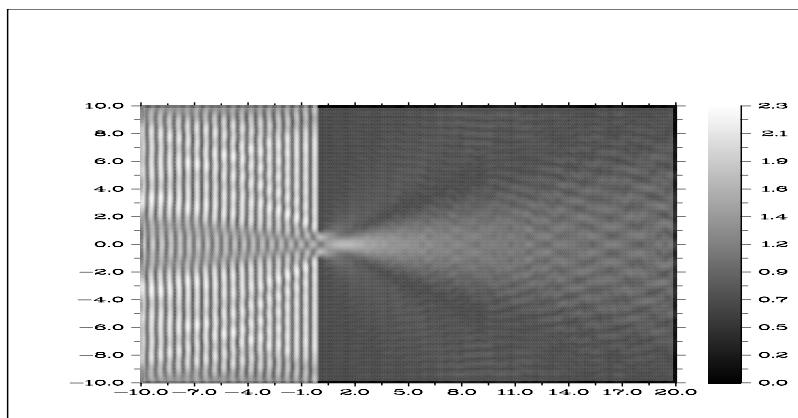


Figura 11. Gap con ($B/\lambda = 2$). Amplitudes de olas difractadas originadas por una onda monocromática con incidencia normal. Solución numérica empleando el método de Galerkin con una condición de radiación de primer orden.

La Figura 11 muestra un mapa de alturas para una apertura de 2 longitudes de ondas. Como se aprecia en la figura, el comportamiento cualitativo es excelente en el dominio computacional seleccionado, generándose una onda estacionaria enfrente de los rompeolas y la zona de calma, detrás de los rompeolas. En todos los casos examinados se observó un comportamiento adecuado de la condición de radiación incidente al describir la onda reflejada por los dos rompeolas. Una apreciación de los resultados numéricos se tiene al obtenerse en la máxima amplitud de la onda estacionaria un error relativo por debajo del 15 % con respecto a la solución analítica.

Dispersión de ondas por una isla circular localizada sobre un fondo parabólico

Éste es el bien conocido problema de propagación de ondas largas alrededor de una isla circular sobre un fondo parabólico (Homma¹⁹ y Jonsson *et al.*²²). En este ejemplo presentamos una isla idealizada de forma cilíndrica circular situada sobre un fondo parabólico (Figura 12) en un océano infinito de profundidad constante, afectada por una onda plana incidente, monocromática y de pequeña amplitud. La profundidad es $h = \alpha r^2$ para $r_a \leq r \leq r_b$ y $h = h_b$, para $r_b \leq r \leq +\infty$, para $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$. El subíndice a denota el valor en la línea de costa y b el valor en la frontera exterior de la elevación (Figura 12).

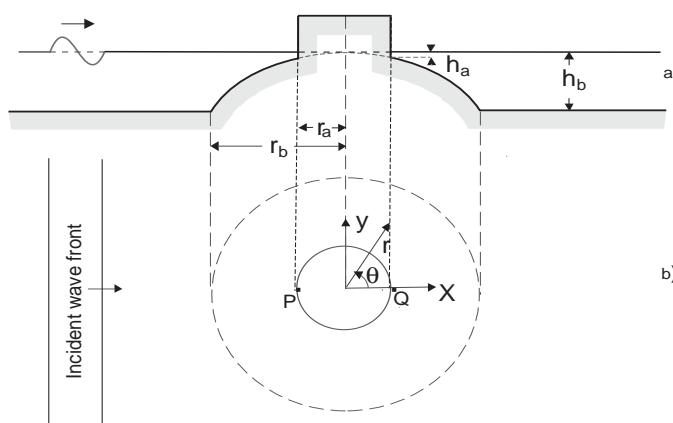


Figura 12. Diagrama de una isla idealizada sobre un fondo parabólico de la forma $h = \alpha r^2$. a) vista vertical, b) vista horizontal.

El campo de ondas alrededor de la isla es calculado de acuerdo con la teoría de difracción^{7,8,9}. Este tipo de isla es considerada como representativo de casos reales (Homma¹⁹, Vastano y Reid^{43,44} y Jonsson²²).

En aguas poco profundas el problema de difracción tiene solución analítica. Para este caso Homma¹⁹ resolvió un conjunto infinito de problemas de frontera lineales unidimensionales y basado en el principio de superposición representó la solución mediante una serie.

Sobre un fondo variable el cálculo de la difracción de ondas en el mar basadas en el método de los elementos finitos fue efectuado inicialmente por Berkhoff³ y Chen y Mei^{14,15}. Chen y Mei usaron una expansión de Fourier-Bessel como una solución exterior en un problema de difracción de ondas y una formulación variacional especialmente desarrollada para compatibilizar la solución exterior con las soluciones por elementos finitos en el interior del dominio. Zienkiewicz *et al.*^{45–49} realizaron una importante contribución en este campo mediante la proposición de una metodología general para la solución de este tipo de problemas. En esta dirección diversas estrategias desarrolladas permitieron compatibilizar las soluciones por elementos finitos con algún tipo de solución del problema exterior asociado a la ecuación de Helmholtz (analítica, series o integrales de frontera). Este problema ha sido resuelto también por Bettes, Tsay y Liu⁴⁰, Houston²⁰ Xu Bing Yi⁴ y Bonet⁷ quien incorporó la condición de radiación exacta en el infinito en un esquema numérico por medio de un filtro de esponjas.

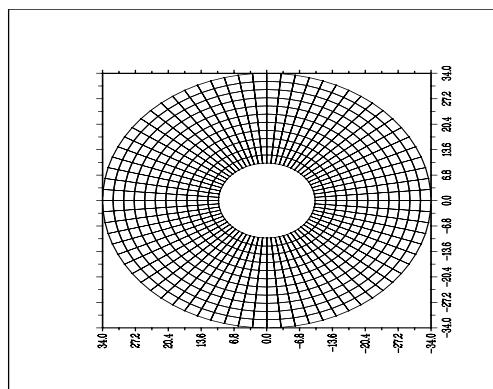


Figura 13. Malla de elementos finitos para el cálculo.

La solución numérica por elementos finitos con una malla de 792 elementos cuadrangulares (Figura 13) se presenta en la Figura 14 mostrando la influencia de la elevación del fondo en las ondas dispersadas. En ella podemos notar que la elevación del fondo ha retardado el campo de ondas “no perturbado”, originando una nueva área de “sombra geométrica”. En la aproximación de aguas someras la elevación del fondo actúa como una “guía de onda”, dado que la velocidad de fase es proporcional a la distancia desde el centro de la elevación.

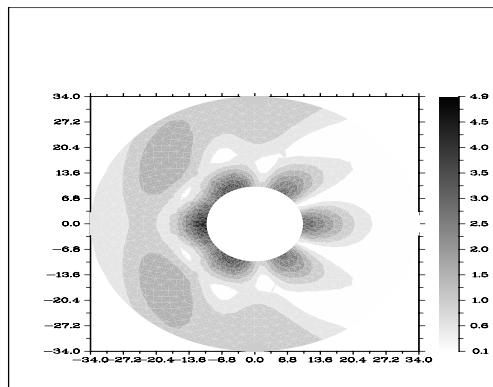


Figura 14. Dispersión de una onda plana por uns isla circular sobre un fondo parabólico.

Una comparación entre las soluciones numéricas empleando una condición de radiación de primer (o segundo orden)⁴ y la solución analítica es mostrada en la Figura 15. Son representadas las curvas de amplitudes relativas A/A_i en diferentes secciones radiales ($r = 10$ km, $r = 20$ km y $r = 30$ km) respecto al azimut θ . Las amplitudes relativas en la línea de costa (con un radio de $r_a = 10$ km) corresponden a los resultados reproducidos en otros trabajos^{19,20} para un periodo de $T = 240$ s. Esta curva tiene la misma forma de las curvas obtenidas por Zienkiewicz *et al.*, pero existe una discrepancia con las amplitudes relativas conseguidas por ellos, debido a la diferencia en los parámetros geométricos relativos al fondo parabólico. Notamos que para el mismo período un aumento del parámetro α origina un crecimiento de la amplitud relativa en la isla. También es de esperar que la discrepancia disminuya a medida que la condición de frontera de radiación es colocada lejos del dispersor. En la Figura 15 no se aprecian significativas mejoras con el empleo de una condición de radiación de segundo orden en la frontera exterior del dominio computacional.

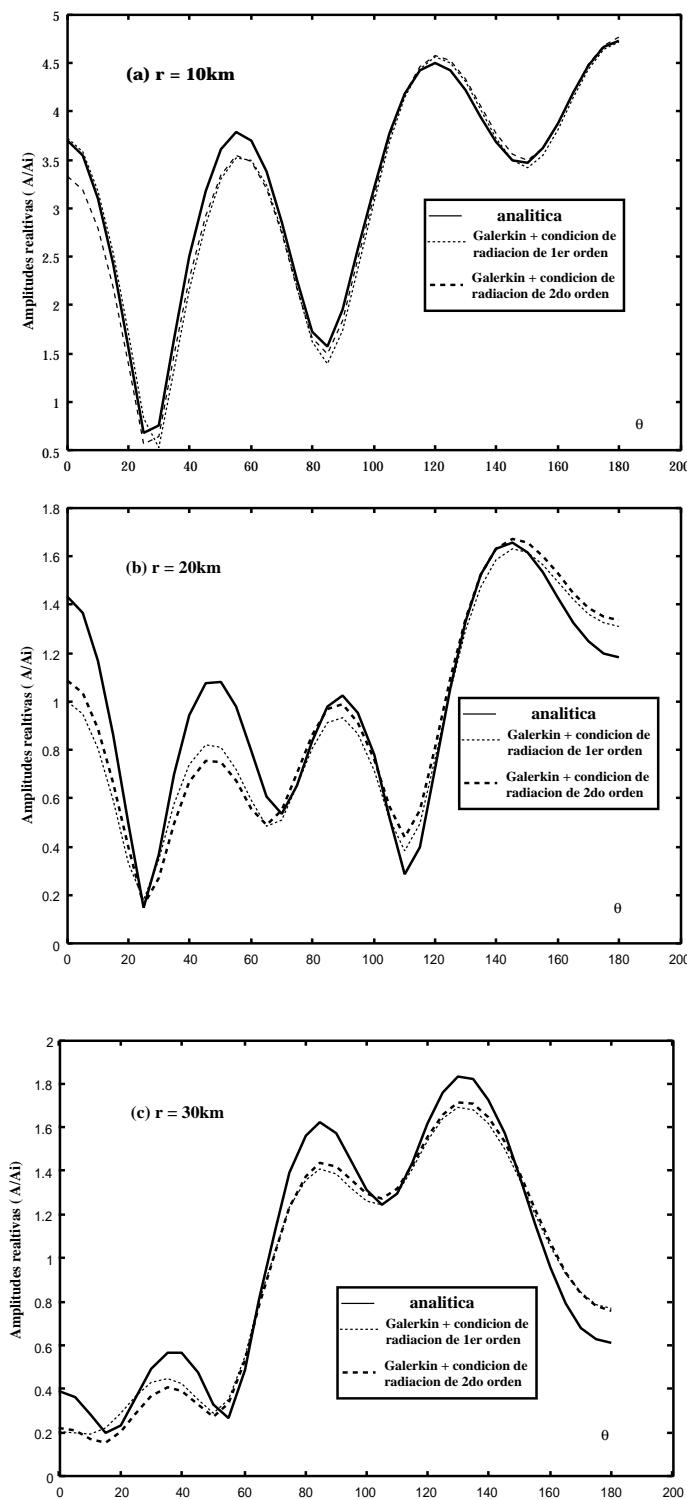


Figura 15. Comparación entre la solución analítica y soluciones numéricas para $r = 10, 20, y 30\text{ km}$ empleando condiciones de radiación de primer y segundo orden.

Propagación de ondas en un puerto rectangular

El problema de resonancia de puertos ha constituido un problema de gran interés para los ingenieros portuarios, debido a que un puerto rectangular con una entrada pequeña en comparación con la longitud de onda, tiene un nuevo modo de oscilación cuando la superficie libre dentro del puerto se eleva y cae simultáneamente.

La presente prueba comprende el problema de agitación en el interior de un puerto rectangular, problema que representa una prueba casi estándar para muchos modelos ondulatorios (Unluata y Mei⁴¹, Chen y Houston¹³, Madsen y Larsen²⁸, Panchang³⁴, Xu y Panchang^{4,33} y Bonet⁷). El dominio lo constituye de un puerto rectangular de profundidad constante circundado por el océano abierto y con paredes totalmente reflejantes (Figura 16). La radiación y reflexión del oleaje incidente en la zona exterior del puerto tiene un papel esencial en la solución numérica. Se han empleado diversas estrategias para caracterizar la agitación en el interior del puerto y se discute la influencia de la posición y forma de la frontera radiante en los resultados obtenidos.

Una frecuencia resonante ($kL = 4,2895$) obtenida por Unluata y Mei⁴¹ ha sido seleccionada para el ensayo numérico, siendo L la longitud del puerto.

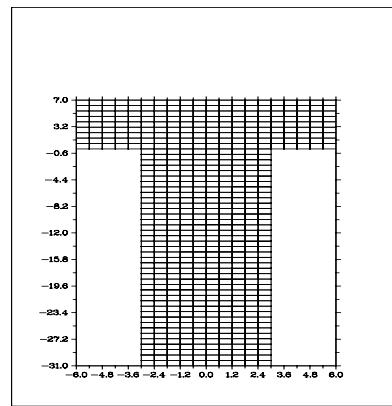


Figura 16. Dominio computacional para un modelo de puerto rectangular.

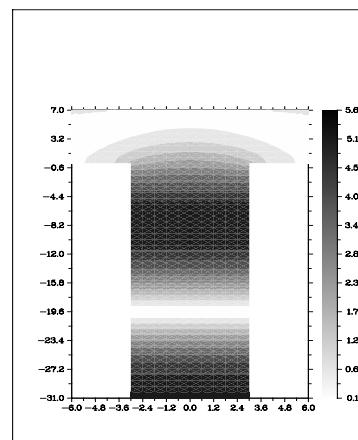


Figura 17. Altura de olas. Solución numérica obtenida($T = 5.4\text{s}$, $\theta = 270^\circ$, $K_{\text{ref}} = 1$). La condición de frontera radiante es localizada a 0.2 longitudes de ondas de la entrada del puerto.

La Figura 17 muestra la solución numérica obtenida con una condición de radiación localizada a 0,2 longitudes de onda de la entrada del puerto. Una comparación de la solución numérica con la solución analítica propuesta por Unluata y Mei⁴¹ muestra que el acuerdo es excelente.

Para determinar la influencia en la precisión de los resultados numéricos debido a la posición de la frontera radiante fueron diseñadas diez mallas de elementos cuadrangulares con las medidas clásicas del puerto para un dominio con una frontera radiante rectilínea colocadas a diferentes distancias (medidas en longitudes de ondas) de la entrada del puerto. La Figura 18a) y b) muestra que las soluciones numéricas convergen a una solución numérica, empleando una frontera artificial a 1,5 longitudes de ondas de la entrada del puerto. La Figura 18a) muestra que la solución convergida tiene una altura de 5.56 en la pared interior del puerto, lo cual representa respecto a la la Figura 18b) un error relativo de algo menos de un 6 % respecto a la solución analítica, indicador este muy importante para las aplicaciones reales.

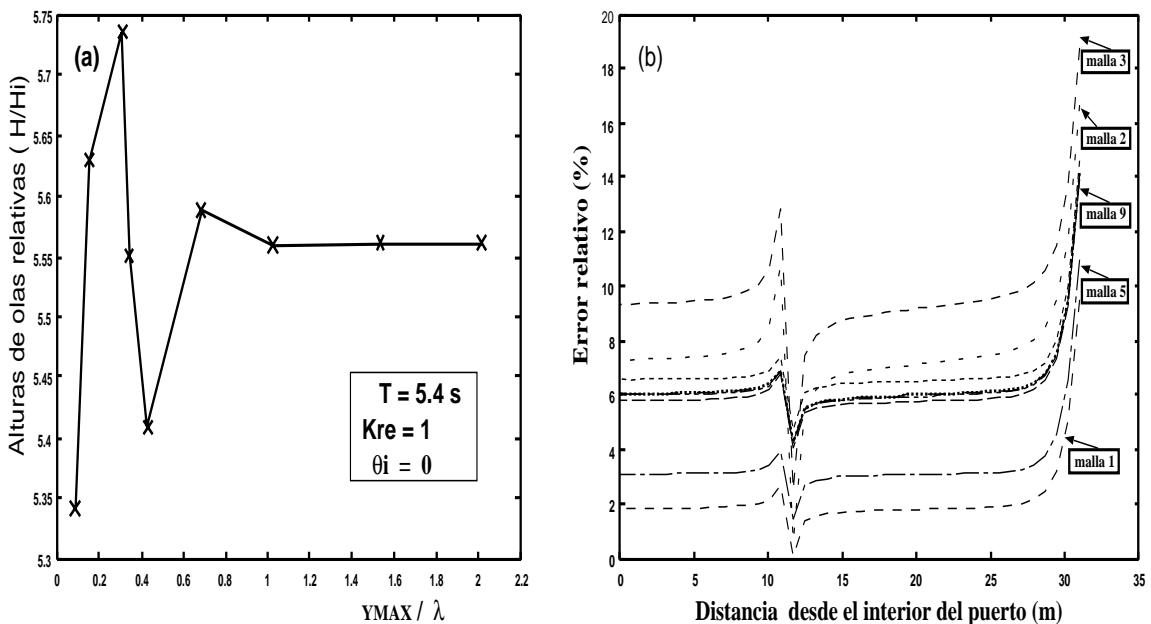


Figura 18. a) Convergencia de la solución numérica versus Distancia a la entrada del puerto. b) Error relativo en el factor de amplificación a lo largo de la sección longitudinal del puerto. ($T = 5.4\text{ s}$, $\theta = 270^\circ$, $K_{ref} = 1$).

Aplicaciones a casos reales

Una región de la zona Mediterránea ha sido seleccionada como objeto de estudio. Arenys de Mar es uno de los principales municipios de la comarca del Maresme, situado a 40 km de la ciudad de Barcelona. El puerto de Arenys de Mar está ubicado a los $41^\circ 34' \text{N}$ y $2^\circ 33' \text{E}$ con un calado de bocana actual de 6 m. La batimetría y la geometría del puerto son mostradas en la Figura 19.

La propagación del oleaje en el Puerto de Arenys de Mar también fue simulada. Aunque no se dispone del conocimiento histórico del oleaje en la zona, es una prueba importante para la validación del código desde el punto de vista físico tener en cuenta las obras de ingeniería costera que se han diseñado como abrigo en la zona para el oleaje incidente predominante en dirección de norte a este. Más de 70 000 elementos fueron usados con

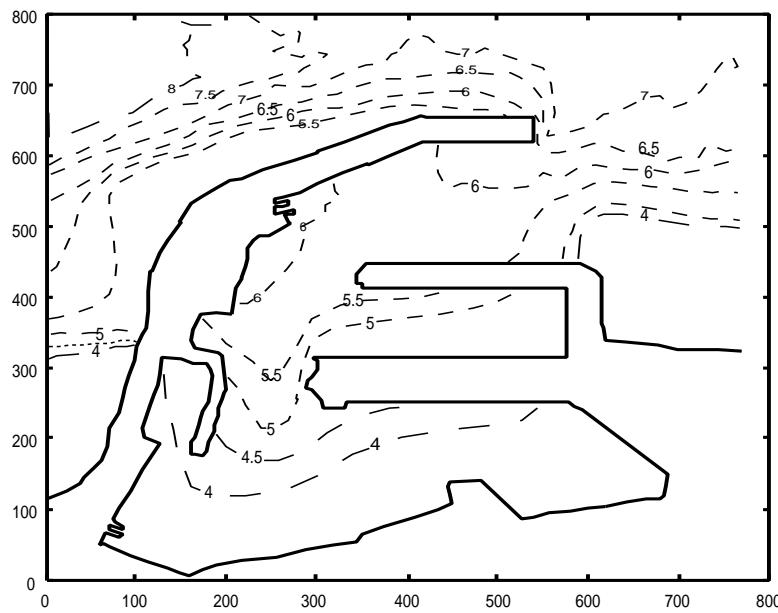


Figura 19. Mapa del puerto de Arenys de Mar y su batimetría.

una resolución de aproximadamente 20 elementos por longitud de ondas para un periodo de 8,6 s y una longitud de la onda incidente en la zona más profunda de 70,635 m.

Un procedimiento para el tratamiento de la batimetría es implementada en el programa **LIMCOAST** en la etapa de preprocesamiento de los datos empleando la expresión

$$z_{interpolada}(i, j) = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{d_k^w} z_k}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{d_k^w}} \quad (14)$$

donde i, j son los índices de un nodo en una malla estructurada, d_k la distancia entre los puntos $P(i, j)$ y P_k , w el factor de peso seleccionado y n el número de puntos seleccionados en la vecindad del punto $P(i, j)$, tales que los puntos P_k no son coincidentes con el punto $P(i, j)$, o sea $d_k^w > 0$ para todo los valores de $k = 1, 2, \dots, n$.

Los valores de n y w determinan el número de los puntos vecinos elegidos y el peso del dato profundidad de tales puntos respectivamente. Dado que, en general la batimetría de una zona de estudio está definida por una distribución arbitraria de puntos en el plano, si la cantidad de datos es escasa respecto a la malla empleada para el cálculo, el problema de la elección de los parámetros adecuados se convierte en un problema difícil.

La Figura 20 muestra cuatro selecciones de los parámetros en la que se aprecian la aparición de fuertes gradientes de la profundidad, cuando se seleccionan pocos puntos (Figura 20 (izquierda)), situación que mejora aumentando el número de puntos (Figura 20 (derecha)). Sobre la base de la experimentación numérica, el código sugiere el empleo de una métrica contractante ($w < 1$ y próximo a 1). La Figura 20 (inferior, derecha) corrobora que la elección de los parámetros $n = 5$, $w = 1$ origina una superficie muy suave en los bordes y gradientes menos abruptos que con las selecciones anteriores. Esta superficie representa la superficie base para la determinación de la batimetría en los nodos de la malla de cálculo. Otro procedimiento alternativo que usa una interpolación bivariada y la triangulación de Delaunay está en desarrollo y sus resultados serán mostrados en próximos trabajos.

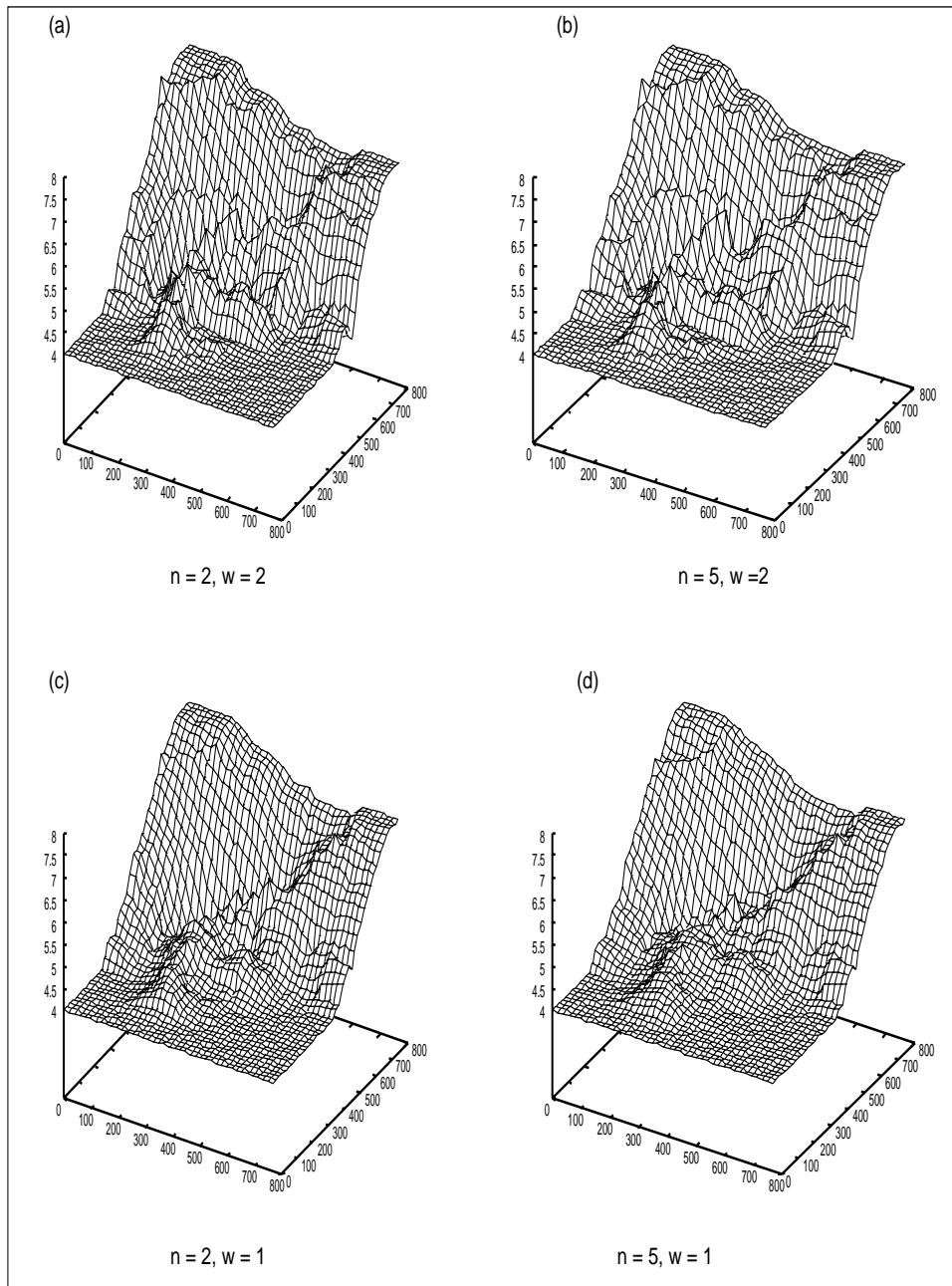


Figura 20. Batimetría interpolada a una malla estructurada.

Para la simulación del oleaje dentro del puerto se ha seleccionado un dominio computacional que circunda el puerto, el cual queda definido mediante la elección de la forma y posición de la frontera artificial. En la experimentación numérica se emplearon dos mallas de cálculo, en las que la frontera artificial está colocada a $1,5\lambda$ longitudes de ondas de la boca del puerto en dirección y sentido del eje de ordenadas. Para un oleaje incidente en ángulo de 285 grados se obtienen los resultados numéricos mostrados en las Figuras 21 y 22, donde se puede apreciar la distribución de alturas de olas en cada dominio computacional seleccionado.

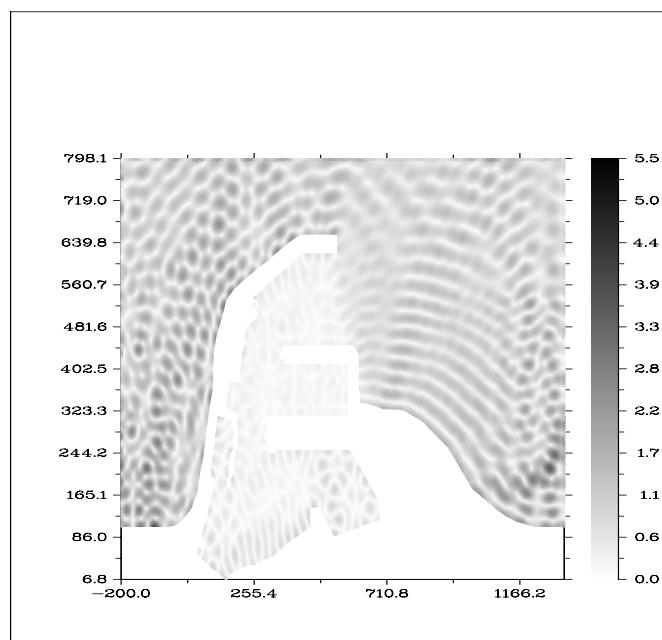


Figura 21. Puerto de Arenys de Mar. Alturas de olas obtenidas por el programa LIMCOAST en el dominio computacional empleado con una frontera artificial colocada a 1.5λ de la entrada del puerto. Alturas de olas en la región del puerto con una frontera abierta plana.

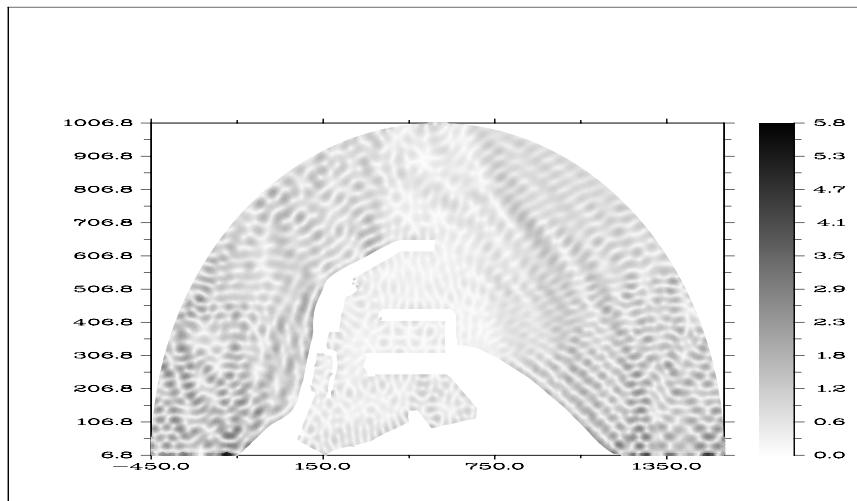


Figura 22. Puerto de Arenys de mar. Alturas de olas obtenidas por el programa LIMCOAST en el dominio computacional empleado con una frontera artificial colocada a 1.5λ de la entrada del puerto. Alturas de olas en la región del puerto con una frontera abierta circular.

En estas figuras se puede observar que el comportamiento del oleaje dentro del puerto corresponde a lo esperado físicamente y permite verificar que los rompeolas diseñados en la zona de levante y de poniente del puerto cumplen realmente con la función de abrigo para los cuales fueron diseñados. Aunque los dos modelos empleados muestran resultados numéricos del mismo orden en el interior del puerto, existen algunas discrepancias entre ambos modelos, las cuales se atribuyen a la interacción entre la condición de radiación

de bajo orden empleada y la forma de la frontera artificial en el dominio computacional diseñado.

La Figura 23 muestra los frentes de olas alrededor del puerto. Algunas zonas de pequeñas reflexiones son observadas debido al bajo orden de la condición de radiación empleada. El uso de condiciones de radiación parabólicas de segundo orden y condiciones de radiación no locales para la simulación del oleaje en puertos será objeto de estudio en próximos trabajos.

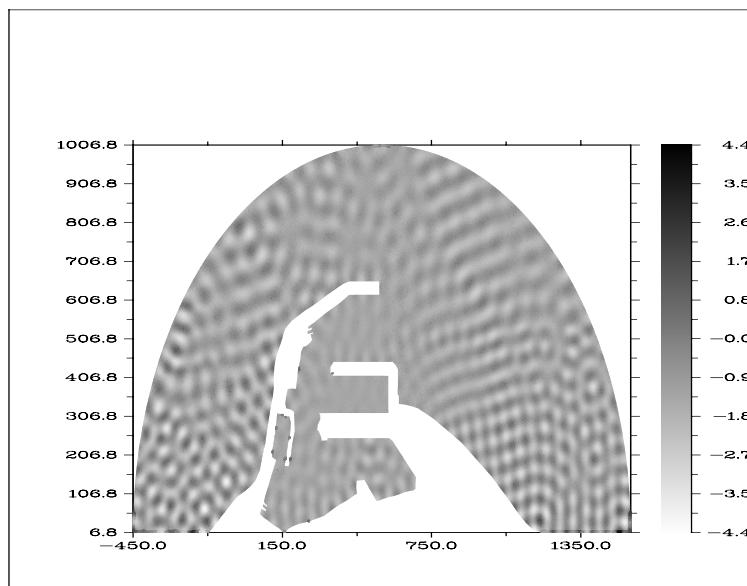


Figura 23. Puerto de Arenys de Mar. Elevación de la superficie libre de las olas alrededor del puerto.

CONCLUSIONES

LIMCOAST es una herramienta computacional para el cálculo ingenieril que presenta su versión preliminar. Los resultados numéricos mostrados validan que la metodología empleada satisface los requerimientos físicos y computacionales. El empleo de una condición de radiación de primero y segundo orden han sido discutidas en el caso plano y circunferencial. La experimentación realizada permitió localizar la frontera radiante a una distancia 1,5 longitudes de ondas del dispersor más próximo (en el caso de propagación de olas a lo largo de un canal rectangular o de un canal con geometría circunferencial). En el caso del problema de agitación del oleaje en puertos rectangulares se obtuvieron buenos resultados numéricos ubicando a la frontera radiante a 0,2 longitudes de ondas distantes de la entrada del puerto. Este resultado se corresponde con los obtenidos en la literatura científica⁴. Los experimentos realizados en el caso del Puerto de Arenys de Mar para oleaje de levante revelan la calidad del diseño del rompeolas principal para generar una zona de abrigo. Para el problema de agitación del oleaje en puertos reales se hace necesario reducir el coste computacional por almacenamiento, lo que requiere un estudio más profundo en la derivación de condiciones de radiación sobre curvas de formas arbitrarias y con la presencia de reflectores exteriores adaptables a la región diseñada a tales efectos. Aspectos que constituyen objetos de futuros trabajos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha recibido financiamiento del Ministerio de Ciencia y Tecnología (McyT, España) a través del Programa Ramon y Cajal y de la Universidad Politécnica de Cataluña (Barcelona, España). Hemos hecho uso extensivo de códigos distribuidos libremente / GNU-Proyect:Linux ELF-OS, Octave, Tgif de William C. Cheng, así como códigos con licencia tales como el compilador Lahey Fortran 90/95. Agradecemos la colaboración del Laboratorio de Ingeniería Marítima de la UPC y en particular del Dr. Agustín Sánchez Arcilla en la realización de este trabajo. Agradecemos además la dedicación y ayuda de los referis en la escritura de este trabajo.

NOMENCLATURA

k	número de onda
ω	frecuencia angular del movimiento ondulatorio
λ	longitud de onda
H	altura de la onda
(x,y,z)	coordenadas rectangulares del espacio \mathbb{R}^3
∇	operador gradiente horizontal
∂	símbolo de derivada parcial
g	aceleración gravitatoria
h	profundidad local de la capa de líquido
Δ	laplaciano
C	celeridad de fase
C_g	celeridad de grupo
$\partial\Omega$	frontera de Ω
Γ_g	frontera tipo Dirichlet
$\frac{\partial\phi}{\partial n}$	derivada de ϕ en la dirección normal
r	distancia al origen en coordenadas polares
$\text{Re}\phi$	parte real de ϕ
$\text{Im}\phi$	parte imaginaria de ϕ
\mathbf{A}	matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones lineal
\tilde{J}	jacobiano de la transformación
\vec{U}	campo de corriente
\mathcal{M}, \mathcal{N}	operadores que determinan la condición radiante
$\tilde{\phi}$	vector de valores nodales
$i = \sqrt{-1}$	unidad imaginaria
i, j	subíndices
Ω	dominio computacional
Ω'	dominio semi-infinito
ϕ	Potencial de velocidades
\mathcal{L}	operador de Berkhoff
$O()$	orden de magnitud
∞	infinito

REFERENCIAS

- 1 Y. Agnon, “Linear and nonlinear refraction and Bragg scattering of water waves”, *Phys. Rev.*, Vol. **59**, pp. 1319–1322, (1999).
- 2 Y. Agnon y E. Pelinovsky, “Accurate refraction-diffraction equations for water waves on a variable-depth rough bottom”, *J. Fluid Mech.*, Vol. **449**, pp. 301–311, (2001).

- 3 J.C.W Berkhoff, "Mathematical models for simple harmonic linear water waves. Wave diffraction and refraction", reporte técnico, Nº 163, Delft Hydraulic Laboratory, (1976).
- 4 Bingyi Xu, V.G. Panchang y Z. Demirbilek "Exterior Reflections in Elliptic Harbor Wave Models", *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, pp. 118–125, mayo (1996).
- 5 C. Bondzie y V.G. Panchang, "Effects of bathymetric complexities and wind generation in a coastal wave propagation model", *Coastal Engineering*, pp. 336–366, (1993).
- 6 R.P. Bonet, "LIMCOAST PROGRAM. Validation of numerical model for water waves propagation and waves in harbors", reporte técnico AIPC-03001, LIM(UPC), enero (2003).
- 7 R.P. Bonet, Nigro N. y M.A. Storti, "Open boundary conditions for water waves propagation elliptic models", *CIMAF'97, IV Simposio de matemática*, en español, La Habana, 24-28 de marzo (1997).
- 8 R.P. Bonet, N. Nigro, M.A. Storti e S.R. Idelsohn, "A discrete non-local (DNL) outgoing boundary condition for long water waves models", reporte interno, noviembre (1997).
- 9 R.P. Bonet, N. Nigro, M.A. Storti e S.R. Idelsohn, "A discrete non-local (DNL) outgoing boundary condition for diffraction of surface waves", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. **14**, pp. 849–861, (1998).
- 10 N. Booij, "Gravity waves on water with non-uniform depth and current", Delft University of Technology, Nº 81-1, (1981).
- 11 P.G. Chamberlain y D. Porter, "The modified mild-slope equation", *J. Fluid Mech.*, Vol. **291**, pp. 393–407, (1995).
- 12 H.S. Chen, "Effects of bottom friction and boundary absorption on water wave scattering", *Appl. Oc. Res.*, Vol. **8**, Nº 2, pp. 99–104, (1986).
- 13 H.S. Chen y J.R. Houston, "Calculation of water level oscillation in coastal harbors", Coastal Engng. Research Center, reporte CERC, Nº 87-2, WES, Vicksburg, (1987).
- 14 H.S. Chen y C.C. Mei, 'Oscillations and wave forces in an offshore harbor: applications of hybrid finite element method to water-wave scattering', Ralph M. Parsons Laboratory for Water Resources and Hydrodynamics, reporte Nº 190, Mass. Inst. Tech., (1974).
- 15 H.S. Chen y C.C. Mei, "Hybrid-element method for water waves", *Proceedings of the Modelling Techniques Conference (Modelling 1975)*, Vol. **1**, San Francisco, pp. 63–81, 3-5 setiembre, (1975).
- 16 R.A. Dalrymple y J.T Kirby, "Angular spectrum modeling of water waves", *Reviews in Aquatic Sciences*, Vol. **6**, Nº 5 y 6, pp. 383–404, (1992).
- 17 R.A. Dalrymple y J.T Kirby, "Models for very wide-angle water waves and wave diffraction", *J. Fluid Mech.*, Vol. **192**, pp. 33–50, (1988).
- 18 J.M. Grassa, "Modelos parabólicos de propagación del oleaje", CEPYC-CEDEX, (1991).
- 19 S. Homma, "On the behaviour of seismic sea waves around circular island", *Geophys. Mag.*, Vol. **21**, pp. 199–208, (1950).
- 20 J.R. Houston, "Combined refraction and diffraction of short waves using the finite element method", *Appl. Ocean Res.*, Vol. **3**, pp. 163–170, (1981).
- 21 Y. Ito y K. Tanimoto, "A method of numerical analysis of wave propagation. Application to wave diffraction and refraction", *Proceedings of the 13th International Conference on Coastal Engineering*, ASCE, New York, (1972).
- 22 I.G. Jonsson, O. Skovgaard y O. Brink-Kjaer, "Diffraction and refraction calculations for waves incident on an island", *Journal of Marine Research*, Vol. **3**, Nº 34, (1976).

- 23 J.T. Kirby, "A general wave equation for waves over rippled beds", *J. Fluid Mech.*, Vol. **162**, pp. 171–186, (1986).
- 24 J.T. Kirby, "Propagation of surface waves over an undulating bed", *Phys. Fluids A1*, Vol. **11**, pp. 1898–1899, (1989).
- 25 J.T. Kirby, "A note on bragg scattering of surface waves by sinusoidal bars", *Phys. Fluids A5*, Vol. **2**, pp. 380–386, (1993).
- 26 J.T. Kirby y Ch. Lee, "Short waves in a rotating, shallow tank with bathymetry: a model equation in the mild-slope approximation", comunicación personal, (1993).
- 27 Kyung Duck Sum, R.A. Dalrymple y J.T. Kirby, "An angular spectrum model for propagation of stokes waves", *J. Fluid Mech.*, Vol. **221**, pp. 205–232, (1990).
- 28 P.A. Madsen y J. Larsen, "An efficient finite-difference approach to the mild-slope equation", *Coastal Engineering*, Vol. **11**, pp. 329–351, (1987).
- 29 P.A. Madsen, R. Murray y O.R. Sorensen, "A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics", *Coastal Engineering*, Vol. **15**, N° 4, pp. 371–388, (1991).
- 30 S.R. Massel, "Wave transformation and dissipation on steep reef slopes", *11th Australasian Fluid Mechanics Conference*, University of Tasmania, Hobart, Australia, 14-18 diciembre (1992).
- 31 S.R. Massel, "Extended red-dif equation for surface waves", *Coastal Engineering*, Vol. **19**, N° 19, pp. 97–126, Elsevier Science Publishers. B.V., Amsterdam, (1993).
- 32 V.G. Panchang, "CGWAVE: An elliptic water-wave model", (1992).
- 33 V.G. Panchang, Bingyi Xu y B. Cushmann-Roisin, "Bathymetric variations of the exterior domains in elliptic harbour wave models", *Proceedings of the First International Conference on Hydro-Science and Engineering Washington, D.C.*, 7-11 junio (1993).
- 34 V.G. Panchang, B.R. Pearce, G. Wei y B. Cushmann-Roisin, "Solution of the mild-slope wave problem by iteration", *Applied Ocean Res.*, Vol. **13**, pp. 187–199, (1991).
- 35 V.G. Panchang, B.R. Pearce y M.J. Briggs, "Numerical simulation of irregular wave propagation overshoal", *Journal of Water Way. Port, Coastal and Ocean Engineering*, Vol. **116**, N° 3, (1990).
- 36 D. Porter y D. Staziker, Extensions of mild-slope equation", *J. Fluid Mech.*, Vol. **300**, pp. 367–382, (1995).
- 37 F.J. Rivero, M. Rodríguez Ferreras y A. Arcilla Sánchez, "Propagación del oleaje sobre fondo variable y en presencia de corrientes", *II Jornadas Esp. de Ing. de Costas y Puertos*, Gijón, 10-11 de mayo, (1993).
- 38 F.J. Rivero y A. Arcilla Sánchez,, "Propagation of linear gravity waves over slowly varying depth and currents", *Waves'93*, ASCE, New Orleans, USA, 26-28 de julio, (1993).
- 39 O. Skovgaard, L. Behrendt e I.G. Jonsson, *Proc. 19th Coast Engng. Conf.*, N.Y., ASCE, Vol. **1**, pp. 1090–1102, (1984).
- 40 T.K. Tsay y P.L.F. Liu, "A finite element model for wave refraction and diffraction", *Appl. Ocean Res.*, Vol. **5**, pp. 30–37, (1983).
- 41 U. Unluata y C.C. Mei, "Long wave excitation in harbors an analytical study", Parsons Lab. MIT., reporte N° 171, (1973).
- 42 "Shore protection manual", US Army Coastal Engng. Research Center, Vol. **I,II**, (1984).
- 43 A.C. Vastano y R.O. Reid, "A numerical study of the tsunami response at an island", Dept. of Oceanography, Texas A & M Univ. A., Project N° 471, ref. 66-26T, (1966).

- 44 A.C. Vastano y R.O. Reid, "Tsunami response for islands: verification of a numerical procedure", *J. Mar. Res.*, Vol. **25**, pp. 129–139, (1967).
- 45 O.C. Zienkiewicz, "The finite element method and boundary solution procedures as general approximation methods for field problems", *World Congress on Finite Element Methods in Structural Mechanics*, 12-17 de octubre, Bournemouth, (1975).
- 46 O.C. Zienkiewicz y P. Bettess, "Infinite elements in the study of fluid-structure interaction problems", *2nd International Symposium on Computing Methods in Applied Science and Engineering*, Versailles, Francia, 15-17 de diciembre, (1975).
- 47 O.C. Zienkiewicz, P. Bettess y D.W. Kelly, "The finite element method for determining fluid loading on rigid structures: two and three-dimensional formulations", in "Numerical methods in offshore engineering", cap. 4, Wiley, Chichester, O.C. Zienkiewicz, R.W. Lewis y K.G. Stagg (Eds.), (1978).
- 48 O.C. Zienkiewicz, D.W. Kelly y P. Bettess, "Marriage á la mode or the best of both worlds. Boundary integrals and finite element procedures", *Conf. on Innovative Methods of Numerical Computation*, Versailles, Francia, mayo (1977).
- 49 O.C. Zienkiewicz, D.W. Kelly y P. Bettess, "The coupling of the finite element method and boundary solution procedures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **11**, N° 2, pp. 355–375, (1977).