

Aproximações estabilizadas de elementos finitos para escoamentos viscosos não isotérmicos

Sérgio Frey

Grupo de Estudos Térmicos e Energéticos (GESTE)
Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Rua Sarmento Leite 425
90050-170 Porto Alegre/RS, Brazil
Tel. 55-51-316 3228, Fax: 55-51-316 3355
e-mail: frey@mecanica.ufrgs.br
<http://www.mecanica.ufrgs.br/prof/frey/frey.htm>

Resumen

Neste artigo simulamos numericamente a transferência de calor nos escoamentos incompressíveis transientes de Navier-Stokes via um método estabilizado de elementos finitos. Construído de maneira a herdar as características de estabilidade dos métodos estabilizados já introduzidos para os modelos de Stokes e advecção-difusão de calor, o método empregado não necessita atender à condição de *Babuška-Brezzi* e permanece estável e acurado mesmo em regimes de escoamentos fortemente advectivos. A característica evolutiva e não-linear do modelo são tratadas pelo método via um algoritmo preditor/multi-corretor.

STABILIZED FINITE ELEMENT APPROXIMATIONS FOR THERMAL VISCOUS FLOWS

Summary

In this article, the heat transfer in no-steady incompressible Navier-Stokes flows were simulated by a stabilized finite element method. The employed method is built in order to circumvent the *Babuška-Brezzi* condition and to remain stable and accurate even for very high advective regimen. The method deal with the transient and non-linear features of the model via a predictor/multi-corrector algorithm.

Like Latin in the humanities, elasticity theory has always been a classical education for mechanicists

W. Jaunzemis

INTRODUÇÃO

A modelagem da *Dinâmica dos Fluidos* recai em problemas de razoável complexidade matemática. Os fenômenos considerados são governados por sistemas de equações parciais não-lineares, evolutivas e, nos regimes de escoamento de interesse, com características hiperbólicas^{13,14}. Enquanto a metodologia de diferenças finitas já está bem solidificada nesta área (por exemplo, as simulações contidas em¹⁵), o método de elementos finitos nela apresentou um lento desenvolvimento se comparado às diferenças finitas ou ao seu próprio sucesso na área de *Mecânica dos Sólidos* (veja, por exemplo, o trabalho pioneiro de Turner *et al.*¹⁸).

A metodologia de elementos finitos mais usual é o conhecido *método de Galerkin*², o qual tem sido aplicado nas últimas décadas a uma vasta classe de problemas de Engenharia. Entretanto, nos problemas de fluidos, a aproximação de Galerkin inspira cuidados especiais. Nos escoamentos incompressíveis surge a necessidade de computar a pressão como multiplicador de Lagrange do campo de velocidade, gerando os chamados *problemas mistos*. Além disso, mantendo o termo inercial da equação de movimento, esbarramos na assimetria de seu operador advectivo. Estes fatores fazem com que Galerkin possa vir a ter um comportamento patológico, originando oscilações espúrias no campo de pressão e o *locking* das velocidades¹¹.

Nos anos 70, com os resultados de Babuška-Brezzi², ficou provado que os subespaços de velocidade e pressão não poderiam ser escolhidos arbitrariamente, sob pena de gerarmos aproximações instáveis; deveríamos, sim, empregar elementos finitos que satisfaçam a chamada *condição de Babuška-Brezzi*. Esta condição restringe nossa escolha de elementos a um número bastante limitado, criando dificuldades computacionais já que combinações computacionalmente desejáveis - como elementos de igual-ordem - ficam de antemão descartadas. A fim de contornar estas dificuldades foram propostas várias estratégias¹¹, dentre as quais destacamos os chamados *métodos estabilizados*. Esta metodologia, introduzida por Brooks e Hughes¹ para o modelo da advecção-difusão, baseia-se na adição à formulação de Galerkin de termos malha-dependentes resíduos das equações de Euler-Lagrange do problema, tendo já sido aplicada a uma grande gama de problemas nos últimos anos^{6,9,12}.

Este trabalho objetiva a simulação da transferência calor nos escoamentos de Navier-Stokes incompressíveis^{3,5} via métodos estabilizados. O método empregado, uma extensão do método *Galerkin/Least-Squares* (GLS)^{3,9} para o caso não isotérmico, modifica a formulação clássica de Galerkin de modo a não necessitar satisfazer a condição de *Babuška-Brezzi*⁹. Além disso, estabiliza o operador advectivo da equação de movimento adicionando efeito *upwind* na direção das linhas-de-corrente do escoamento^{1,4}. Algumas simulações bi-dimensionais de interesse de escoamentos internos não-isotérmicos confirmam a consistência e precisão do esquema numérico proposto.

Preliminares

Os problemas estudados neste trabalho são definidos em um domínio aberto limitado $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ com fronteira Γ poligonal

$$\begin{cases} \Gamma = \overline{\Gamma}_g \cup \overline{\Gamma}_h \\ \Gamma_g \cap \Gamma_h = \emptyset, \Gamma_g \neq \emptyset \end{cases} \quad (1)$$

onde Γ_g é a parte da fronteira Γ na qual são impostas condições de Dirichlet (essenciais) e Γ_h a região na qual são prescritas as condições naturais (Neumann). Sobre o domínio $\overline{\Omega}$ realizamos uma partição \mathcal{C}_h de elementos quadrangulares da maneira usual²

$$\begin{cases} \overline{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{C}_h} \overline{\Omega}_K \\ \Omega_{K_1} \cap \Omega_{K_2} = \emptyset, \quad \forall K_1, K_2 \in \mathcal{C}_h \end{cases} \quad (2)$$

Ao longo do artigo, $L^2(\Omega)$ denota o espaço das funções de quadrado integrável em Ω , $L_0^2(\Omega)$ o espaço das funções de quadrado integrável com média nula em Ω , $H^1(\Omega)$ o espaço de Sobolev das funções e derivadas primeiras com quadrado integrável em Ω e $H_0^1(\Omega)$ o espaço de Sobolev das funções e derivadas primeiras com quadrado integrável em Ω que se anulam sobre o contorno Γ_g .

Por fim, (\cdot, \cdot) e $\|\cdot\|_0$ representam, respectivamente, o produto interno e a norma de L^2 em Ω e $(\cdot, \cdot)_K$ e $\|\cdot\|_{0,K}$ denotam o produto interno e a norma the L^2 no domínio de cada elemento K , respectivamente.

MODELAGEM TERMOMECÂNICA

O escoamento dos fluidos é um fenômeno físico que pode ser representado por uma *transformação contínua* no espaço euclidiano, parametrizada pelo tempo $t \in [0, \infty)$

$$\chi : \mathcal{B} \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathcal{E} \quad (3)$$

onde \mathcal{B} denota um fluido genérico, χ uma transformação de classe \mathcal{C}^3 referida como seu *movimento* e $t = 0$ um instante inicial arbitrário.

Durante o movimento do fluido, suas interações com o exterior são descritas pelas forças nele atuantes, as quais relacionam-se ao seu movimento através dos axiomas postulados por Euler, o *Princípio de Conservação do Momentum Linear e do Momentum Angular*¹⁷. A fim de estabelecer a equação que governa o movimento dos fluidos, enunciamos o teorema de Cauchy, o qual tem como principal asserção a linearidade do vetor tensão¹⁷ \mathbf{t} : *Seja (\mathbf{t}, \mathbf{f}) um sistema de forças de um corpo em movimento. A condição necessária e suficiente para que as leis de conservação de momentum sejam satisfeitas é a existência de um campo tensorial simétrico σ - chamado tensor de Cauchy - tal que: $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \sigma \mathbf{n}$, satisfazendo à equação*

$$\rho \dot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \sigma + \mathbf{f} \quad (4)$$

As equações de Navier-Stokes

Os axiomas de Euler, mesmo válidos para maioria dos corpos, são insuficientes para caracterizá-los integralmente, por serem incapazes de distinguir entre os diferentes comportamentos materiais. No caso específico dos fluidos, o fenômeno de atrito é neles manifesto através de suas forças cizalhantes, as quais retardam o movimento relativo de suas partículas. Uma boa medida deste movimento é fornecida pelo tensor gradiente de velocidades $\nabla \mathbf{u}$, sugerindo equações constitutivas da forma

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u}) \quad (5)$$

onde $\mathbf{C}(\cdot)$ é denominada *função resposta* do fluido. Para a classe dos *fluidos newtonianos compressíveis*, a função $\mathbf{C}(\cdot)$ é dada pela expressão¹⁴

$$\mathbf{C}(\nabla \mathbf{u}) = \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \quad (6)$$

onde μ e ζ são, respectivamente, o primeiro e segundo coeficientes de viscosidade do fluido e \mathbf{I} o tensor identidade. Muitos escoamentos, entretanto, apresentam uma variação muito pequena em sua massa específica, os chamados *fluidos incompressíveis*. Para esses fluidos, a função $\mathbf{C}(\cdot)$ pode ser caracterizada por uma única constante: sua *viscosidade*⁸

$$\mathbf{C}(\nabla \mathbf{u}) = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (7)$$

com $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ denotando a parte simétrica do tensor $\nabla \mathbf{u}$. Considere então a equação de movimento (4) sujeita às hipóteses constitutivas introduzidas em (5) e (7); supondo μ e ζ constantes e usando que $\nabla \cdot \nabla \mathbf{u}^T = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$, obtemos chamadas as *equações de Navier-Stokes incompressível*

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\nabla \mathbf{u}] \mathbf{u} \right) + \nabla p - 2\mu \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad (8)$$

1ª Lei da Termodinâmica

Da Teoria Termodinâmica, sabemos que a energia ao longo de um escoamento pode assumir diferentes formas, sendo, portanto, imperativo enunciar uma lei de conservação de energia - a *1ª Lei da Termodinâmica*¹⁷

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K}(\Omega) + \frac{d}{dt} \mathcal{U}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega) + \mathcal{P}(\Omega) \quad (9)$$

onde $\mathcal{K}(\Omega)$ é a energia cinética de um volume Ω do fluido, $\mathcal{U}(\Omega)$ sua energia interna, $\mathcal{H}(\Omega)$ a taxa do calor por ele trocado e

$$\mathcal{P}(\Omega) = \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (10)$$

a potência mecânica nele despendida. Do Princípio das Potências Virtuais⁸, temos que a energia cinética $\mathcal{K}(\Omega)$ pode ser expressa por

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K}(\Omega) = \mathcal{P}(\Omega) - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega \quad (11)$$

Substituindo a equação (11) na equação (9), supondo a energia interna de um fluido uma propriedade aditiva e aplicando o teorema de Reynolds¹⁷, obteremos a chamada *equação de conservação da energia térmica*

$$\int_{\Omega} \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} d\Omega = \int_{\Omega} \rho r d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega \quad (12)$$

onde r denota uma fonte de calor por unidade de massa e $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ o fluxo de calor na fronteira Γ . Então, aplicando os teoremas da divergência e da localização⁸, chegamos finalmente a *forma diferencial da equação de energia*

$$\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (13)$$

A equação (13) pode ser ainda desenvolvida impondo considerações sobre o estado termodinâmico do fluido. Aplicando as definições de *calor específico a volume e pressão constantes* aos escoamentos incompressíveis¹⁹, desprezando os termos dissipativos da equação (13) e expressando \mathbf{q} através da *Lei de Fourier Generalizada*¹³, chegamos à *equação da advecção-difusão de calor*

$$\rho c \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta \right) - \nabla \cdot \kappa \nabla \theta = r \quad (14)$$

onde \mathbf{u} é o campo de velocidade advectivo e κ a *condutividade térmica* do fluido.

APROXIMAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

A partir das equações de conservação de momentum e energia definidas nas equações (8) e (14), respectivamente, empregando as adimensionalizações usuais em Mecânica dos Fluidos¹⁴, obtemos o seguinte problema de contorno para os escoamentos incompressíveis não-isotérmicos de Navier-Stokes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\nabla \mathbf{u}] \mathbf{u} - 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{em } \Omega \times (0, T) \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta - \kappa \Delta \theta &= r & \text{em } \Omega \times (0, T) \\
\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{em } \Omega \times (0, T) \\
\mathbf{u} &= \mathbf{u}_g & \text{sobre } \Gamma_g \times (0, T) \\
\theta &= \theta_g & \text{sobre } \Gamma_g \times (0, T) \\
\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \boldsymbol{\sigma}_h & \text{sobre } \Gamma_h \times (0, T) \\
\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &= q_h & \text{sobre } \Gamma_h \times (0, T) \\
\mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 & \text{em } \Omega \text{ com } t = 0 \\
\theta &= \theta_0 & \text{em } \Omega \text{ com } t = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

onde \mathbf{u} é a velocidade do fluido, p sua pressão, ν sua viscosidade dinâmica, θ sua temperatura, $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor de Cauchy (equações (5) e (7)), $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ a parte simétrica do tensor $\nabla \mathbf{u}$, \mathbf{q} o vetor fluxo de calor (equação (14)), \mathbf{n} a normal exterior, \mathbf{f} a força de corpo do escoamento, r sua fonte térmica, ν^{-1} e κ^{-1} representam seus números de Reynolds e Péclet¹³.

Uma método estabilizado

Na aproximação de elementos finitos das equações (15), empregaremos os subespaços usuais da *Dinâmica dos Fluidos*

$$W_h = \{\phi \in H_0^1(\Omega) \mid \phi|_{\mathbf{x} \in K} \in P_m(K), K \in \mathcal{C}_h\} \tag{16}$$

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}|_{\mathbf{x} \in K} \in P_k(K)^N, K \in \mathcal{C}_h\} \tag{17}$$

$$P_h = \{p \in C^0(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \mid p|_K \in P_l(K), K \in \mathcal{C}_h\} \tag{18}$$

$$W_h^g = \{\phi(\cdot, t) \in H^1(\Omega), t \in [0, T] \mid \phi|_{\mathbf{x} \in K} \in P_m(K), K \in \mathcal{C}_h, \phi(\cdot, t) = \theta_g \text{ sobre } \Gamma_g\} \tag{19}$$

$$\mathbf{V}_h^g = \{\mathbf{v}(\cdot, t) \in H^1(\Omega)^N, t \in [0, T] \mid \mathbf{v}|_{\mathbf{x} \in K} \in P_k(K)^N, K \in \mathcal{C}_h, \mathbf{v}(\cdot, t) = \mathbf{u}_g \text{ sobre } \Gamma_g\} \tag{20}$$

onde P_k , P_l e P_m denotam, respectivamente, espaços polinomiais de grau k , l e m .

A partir das definições (16)-(20), construímos a extensão não isotérmica do método GLS^{3,9} para o sistema (15) da seguinte maneira: Achar a tripla $(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h) \in \mathbf{V}_h^g \times P_h \times W_h^g$ tal que

$$B(\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h; \mathbf{v}, q, \phi) = F(\mathbf{v}, q, \phi), \quad (\mathbf{v}, q, \phi) \in \mathbf{V}_h \times P_h \times W_h \tag{21}$$

com

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{u}, p, \theta; \mathbf{v}, q, \phi) &= \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\nabla \mathbf{u}] \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + (2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p) - (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) \\
&+ \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta, \phi \right) + (\kappa \nabla \theta, \nabla \phi) + (\nabla \cdot \mathbf{u}, \delta \nabla \cdot \mathbf{v}) \\
&+ \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta - \kappa \Delta \theta, \tau_\phi(\mathbf{P}e_K)(\mathbf{u} \cdot \nabla \phi - \kappa \Delta \phi) \right)_K \\
&+ \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [\nabla \mathbf{u}] \mathbf{u} + \nabla p - 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \tau_{\mathbf{v}}(\mathbf{R}e_K)([\nabla \mathbf{v}] \mathbf{v} - \nabla q - 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) \right)_K
\end{aligned} \tag{22}$$

e

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{v}, q, \phi) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{v})_{\Gamma_h} + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} (\mathbf{f}, \tau_{\mathbf{v}}(\mathbf{R}e_K)([\nabla \mathbf{v}] \mathbf{v} - \nabla q - 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})))_K \\
&+ (r, \phi) + (q_h, \phi)_{\Gamma_h} + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} (r, \tau_\phi(\mathbf{P}e_K)(\mathbf{u} \cdot \nabla \phi - \kappa \Delta \phi))_K
\end{aligned} \tag{23}$$

onde os parâmetros de estabilidade $\tau_{\mathbf{v}}$, τ_ϕ e δ são definidos por

$$\tau_i(X_i) = \frac{h_K}{2|\mathbf{u}|_p} \xi(X_i) \quad , \quad \text{com } X_{\mathbf{v}} = \mathbf{R}e_K \quad , \quad X_\phi = \mathbf{P}e_K \tag{24}$$

$$\xi(X_i) = \begin{cases} X_i & , 0 \leq X_i < 1 \\ 1 & , X_i \geq 1 \end{cases} \tag{25}$$

$$\mathbf{R}e_K = \frac{m_k |\mathbf{u}|_p h_K}{4\nu} \quad , \quad \mathbf{P}e_K = \frac{m_k |\mathbf{u}|_p h_K}{2\kappa} \tag{26}$$

$$m_k^i = \min \left\{ \frac{1}{3}, 2\mathbf{C}_k^i \right\} \quad , \quad \text{com } i = \mathbf{v}, \phi \tag{27}$$

$$|\mathbf{u}(\mathbf{x})|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^N |u_i(\mathbf{x})|^p \right)^{1/p} & , 1 \leq p < \infty \\ \max_{i=1, N} |u_i(\mathbf{x})| & , p = \infty \end{cases} \tag{28}$$

$$\mathbf{C}_k^\phi \sum_{K \in \mathcal{C}_h} h_K^2 \|\Delta \phi\|_{0,K}^2 \leq \|\nabla \phi\|_0^2 \quad \phi \in W_h \tag{29}$$

$$\mathbf{C}_k^{\mathbf{v}} \sum_{K \in \mathcal{C}_h} h_K^2 \|\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{0,K}^2 \leq \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_0^2 \quad \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h \tag{30}$$

$$\delta = \lambda |\mathbf{u}(\mathbf{x})|_p h_K \xi(\mathbf{R}e_K) \quad ; \quad \lambda \geq 1 \tag{31}$$

Comentários

1. Fazendo os parâmetros de estabilidade τ_v , τ_ϕ e δ iguais a zero nas equações (21)-(23), obtemos a formulação de Galerkin clássica para o problema definido nas equações (15). Sua estabilidade, no contexto linear do problema Stokes, é governada pelo Teorema de Brezzi², o qual impõe, além da satisfação da *condição de Babuska-Brezzi* envolvendo os subespaços de pressão e velocidade, que o problema discreto seja elíptico para toda velocidade pertencente ao subespaço \mathbf{K}_h^0 , com

$$\mathbf{K}_h^0 = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h \mid \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad q \in P_h \}$$

Visto que em geral $\mathbf{K}_h^0 \not\subset \mathbf{K}^0$, apenas um número limitado de combinações de elementos finitos irá satisfê-las, criando assim uma séria limitação ao método de Galerkin em fluidos. Combinações de elementos computacionalmente desejáveis como as de igual-ordem, ficam por esta razão descartadas.

2. A instabilidade da aproximação de Galerkin das equações (15) em regimes de escoamento advectivos-dominados decorre da falta de coercividade da forma trilinear definida na equação (22). Tomando $(\mathbf{v}, q, \phi) = (\mathbf{u}, -p, \theta)$ e $\tau_v, \tau_\phi, \delta = 0$ em (22) e selecionando $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N$ e $\phi \in H_0^1(\Omega)$, teremos

$$B(\mathbf{v}, q, \phi; \mathbf{v}, -q, \phi) \geq 2\nu \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_0^2 + \kappa \|\nabla \phi\|_0^2 \quad (\mathbf{v}, q, \phi) \in \mathbf{V}_h \times P_h \times \mathbf{W}_h \quad (32)$$

Portanto, nas situações onde $\nu, \kappa \rightarrow 0$, teremos a aproximação de Galerkin contaminada por oscilações espúrias, gerando soluções numéricas fisicamente irreais.

3. As expressões usuais dos números de Reynolds e Péclet de malha¹¹ foram modificadas com a inclusão do parâmetro m_k nas equações (26), de modo a também considerar o grau de interpolação empregado. Com isto, as regiões advectivas-dominadas do escoamento ficam caracterizadas por $\text{Re}_K, \text{Pe}_K > 1$ e as difusivas-dominadas por $\text{Re}_K, \text{Pe}_K < 1$, independente do elemento considerado.

Algoritmo de Integração

A discretização das equações (21)-(23) é obtida pela expansão das funções $\{\mathbf{u}_h, p_h, \theta_h\}$ e $\{\mathbf{v}, q, \phi\}$ em suas respectivas funções base, gerando o sistema de equações semi-discretas

$$\begin{aligned} [\mathbf{M} + \mathbf{M}_{\tau_v}^v] \mathbf{a} + \mathbf{N}(\mathbf{u}) + \mathbf{N}_{\tau_v}^v(\mathbf{u}) + [\mathbf{K} + \mathbf{K}_{\tau_v}^v + \mathbf{K}_{\delta}^v] \mathbf{u} + [\mathbf{G} + \mathbf{G}_{\tau_v}^v] \mathbf{p} &= \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\tau_v} \\ [\mathbf{A} + \mathbf{A}_{\tau_\phi}^\phi] \theta_{,t} + [\mathbf{C} + \mathbf{C}_{\tau_\phi}^\phi + \mathbf{D} + \mathbf{D}_{\tau_\phi}^\phi] \theta &= \mathbf{Q} + \mathbf{Q}_{\tau_\phi}^\phi \\ [\mathbf{M}_{\tau_v}^q] \mathbf{a} + \mathbf{N}_{\tau_v}^q(\mathbf{u}) + [\mathbf{G}^T + \mathbf{K}_{\tau_v}^q] \mathbf{u} + [\mathbf{G}_{\tau_v}^q] \mathbf{p} &= \mathbf{E}_{\tau_v} \end{aligned} \quad (33)$$

onde \mathbf{u} , \mathbf{p} , θ , \mathbf{a} e $\theta_{,t}$ são os vetores dos graus-de-liberdade de \mathbf{u}_h , p_h , θ_h , $\partial \mathbf{u}_h / \partial t$ e $\partial \theta_h / \partial t$, respectivamente. As matrizes $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{K}]$ e $[\mathbf{G}]$ são originadas pelos termos transiente, viscoso e bórico da equação de momentum de (21)-(23); já $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{C}]$ e $[\mathbf{D}]$, são oriundas dos termos transiente, advectivo e difusivo da equação de energia, respectivamente. O vetor não linear $\mathbf{N}(\mathbf{u})$ provém do termo advectivo da equação de movimento. As demais matrizes são devidas aos termos estabilizadores τ_v , τ_ϕ e δ .

Generalizando, para problemas mistos, o algoritmo proposto em [10] e introduzindo n_{\max} (número máximo de passos de tempo), i_{\max} (número máximo de correções) e ω (parâmetro de seleção do método preditor empregado), podemos escrever o seguinte algoritmo preditor/multi-corretor trapezoidal generalizado para o sistema (33).

Algoritmo 1

1. inicialize $\mathbf{u}_0^0, \mathbf{p}_0^0, \mathbf{a}_0^0$ e $\boldsymbol{\theta}_0^0$
2. faça $n := 0$ e $i := 0$
3. fase preditora

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1}^{(i)} := \mathbf{u}_n^{(i)} + \Delta t(1 - \omega)\mathbf{a}_n^{(i)} \\ \mathbf{a}_{n+1}^{(i)} := \mathbf{0} \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathbf{p}_{n+1}^{(i)} := \mathbf{p}_n^{(i)} \\ \boldsymbol{\theta}_{n+1}^{(i)} := \boldsymbol{\theta}_n^{(i)} \end{cases} \quad (34)$$

4. forme e fatorize as matrizes incrementais $[\mathbf{M}^*], [\mathbf{N}^*], [\mathbf{G}^*], [\mathbf{G}^{*T}], [\mathbf{G}_{\tau_v}^v], [\mathbf{A}^*]$ e $[\mathbf{C}^*]$ definidas por

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}^*] &:= [\mathbf{M}] + [\mathbf{M}_{\tau_v}^v] + \omega\Delta t[\mathbf{N}^*] \\ [\mathbf{N}^*] &:= \left[\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}) \right] + \left[\frac{\partial \mathbf{N}_{\tau_v}^v}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}) \right] + [\mathbf{K}] + [\mathbf{K}_{\tau_v}^v] + [\mathbf{K}_\delta^v] \\ [\mathbf{G}^*] &:= [\mathbf{G}] + [\mathbf{G}_{\tau_v}^v] \\ [\mathbf{G}^{*T}] &:= [\mathbf{M}_{\tau_v}^q] + \omega\Delta t([\mathbf{G}^T] + \left[-\frac{\partial \mathbf{N}_{\tau_v}^q}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}) \right] + [\mathbf{K}_{\tau_v}^q]) \\ [\mathbf{A}^*] &:= [\mathbf{A}] + [\mathbf{A}_{\tau_\phi}^\phi] \\ [\mathbf{C}^*] &:= [\mathbf{C}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)})] + [\mathbf{C}_{\tau_\phi}^\phi(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)})] + [\mathbf{D}] + [\mathbf{D}_{\tau_\phi}^\phi] \end{aligned} \quad (35)$$

5. forme os vetores residuais

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{n+1}^{(i)} := \mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{F}_{\tau_v n+1} - ([\mathbf{M} + \mathbf{M}_{\tau_v}^v]\mathbf{a}_{n+1}^{(i)} + \mathbf{N}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}) + \mathbf{N}_{\tau_v}^v(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}) \\ \quad + [\mathbf{K} + \mathbf{K}_{\tau_v}^v + \mathbf{K}_\delta^v]\mathbf{u}_{n+1}^{(i)} + [\mathbf{G} + \mathbf{G}_{\tau_v}^v]\mathbf{p}_{n+1}^{(i)}) \\ \mathbf{S}_{n+1}^{(i)} := \mathbf{E}_{\tau_v n+1} - ([\mathbf{M}_{\tau_v}^q]\mathbf{a}_{n+1}^{(i)} + \mathbf{N}_{\tau_v}^q(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}) + [\mathbf{G}^T + \mathbf{K}_{\tau_v}^q]\mathbf{u}_{n+1}^{(i)} + [\mathbf{G}_{\tau_v}^q]\mathbf{p}_{n+1}^{(i)}) \\ \mathbf{T}_{n+1}^{(i)} := \mathbf{Q}_{n+1} + \mathbf{Q}_{\tau_\phi n+1} - ([\mathbf{A} + \mathbf{A}_{\tau_\phi}^\phi]\boldsymbol{\theta}_{n+1}^{(i)} + [\mathbf{C}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}) + \mathbf{C}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}) \\ \quad + \mathbf{D} + \mathbf{D}_{\tau_\phi}^\phi]\boldsymbol{\theta}_{n+1}^{(i)}) \end{cases} \quad (36)$$

6. resolva o sistema incremental

$$\begin{cases} [\mathbf{M}^*]\Delta \mathbf{a}_{n+1}^{(i)} + [\mathbf{G}^*]\Delta \mathbf{p}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{R}_{n+1}^{(i)} \\ [\mathbf{G}^{*T}]\Delta \mathbf{a}_{n+1}^{(i)} + [\mathbf{G}_{\tau_v}^q]\Delta \mathbf{p}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{S}_{n+1}^{(i)} \\ [\mathbf{A}^*]\Delta \boldsymbol{\theta}_{n+1}^{(i)} + [\mathbf{C}^*]\Delta \boldsymbol{\theta}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{T}_{n+1}^{(i)} \end{cases} \quad (37)$$

7. fase corretiva

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)} := \mathbf{u}_{n+1}^{(i)} + \omega\Delta t\Delta \mathbf{a}_{n+1}^{(i)} \\ \mathbf{a}_{n+1}^{(i+1)} := \mathbf{a}_{n+1}^{(i)} + \Delta \mathbf{a}_{n+1}^{(i)} \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathbf{p}_{n+1}^{(i+1)} := \mathbf{p}_{n+1}^{(i)} + \Delta \mathbf{p}_{n+1}^{(i)} \\ \boldsymbol{\theta}_{n+1}^{(i+1)} := \boldsymbol{\theta}_{n+1}^{(i)} + \Delta \boldsymbol{\theta}_{n+1}^{(i)} \end{cases} \quad (38)$$

8. se $i < i_{\max}$, então $i := i + 1$ e retorne ao passo 4; caso contrário, $i := 0$ e

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{n+1}^{(i)} := \mathbf{u}_{n+1}^{(i_{\max})} \\ \mathbf{a}_{n+1}^{(i)} := \mathbf{a}_{n+1}^{(i_{\max})} \end{cases}, \quad \begin{cases} \mathbf{p}_{n+1}^{(i)} := \mathbf{p}_{n+1}^{(i_{\max})} \\ \boldsymbol{\theta}_{n+1}^{(i)} := \boldsymbol{\theta}_{n+1}^{(i_{\max})} \end{cases} \quad (39)$$

9. se $n < n_{\max}$, então $n := n + 1$ e retorne ao passo 3; caso contrário, termine.

Comentários

1. Através do parâmetro ω , podemos selecionar a estratégia de predição do algoritmo 1: tomando $\omega = 0$ obtemos o método de *Euler progressivo*, para $\omega = 1/2$ o método de *Crank-Nicolson* e, finalmente, para $\omega = 1$ teremos o método de *Euler regressivo*.
2. Baseado em Tezduyar *et al.*¹⁰, implementamos as seguintes modificações nas matrizes incrementais (35)

$$[\mathbf{M}^*] := [\mathbf{M}] \quad , \quad [\mathbf{G}^*] := [\mathbf{G}] \quad , \quad [\mathbf{G}^{*T}] := \omega \Delta t [\mathbf{G}^T] \quad (40)$$

Com estas definições, estas matrizes não mais dependem do passo de tempo - podendo serem formadas e fatorá-las de uma única vez - e o sistema incremental definido pela equação (37) fica simetrizado.

RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção serão apresentados algumas simulações computacionais dos escoamentos não-isotérmicos de Navier-Stokes definido pelas equações (15) via o método estabilizado introduzido nas equações (21)-(23). Nas simulações realizadas empregamos interpolações biquadráticas de *Serendipity* para aproximar os campos de velocidade, pressão e temperatura (Q2S/Q2S/Q2S). Todas as computações foram realizadas no Laboratório de Mecânica Teórica e Aplicada (LMTA) da Universidade Federal Fluminense, utilizando o código de elementos finitos FEM e o pós-processador gráfico VIEW, ambos os programas em desenvolvimento neste laboratório.

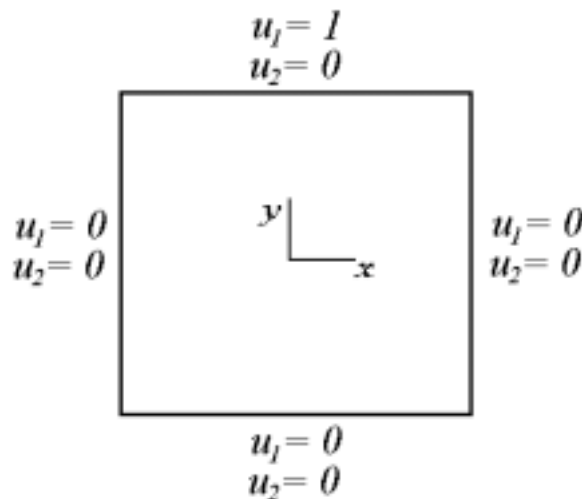


Figura 1. Escoamento não-isotérmico numa cavidade: descrição do problema

Escoamento não-isotérmico numa cavidade

Este teste consiste no escoamento não-isotérmico numa cavidade bi-unitária $-0.5 \leq x, y \leq +0.5$ com a parede superior móvel e demais fixas (Para a descrição do problema, ver Figura 1). As condições de contorno em velocidade e temperatura são descritas por

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 0 & \text{em } y = +0,5 \quad (-0,5 \leq x \leq +0,5) \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{nas demais fronteiras} \end{cases} \quad (41)$$

$$\begin{cases} \theta = 1 & \text{em } y = +0,5 \text{ } (-0,5 \leq x \leq +0,5) \\ \theta = 0 & \text{em } x = -0,5 \text{ } (-0,5 \leq y \leq +0,5) \\ \nabla\theta \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{nas demais fronteiras} \end{cases} \quad (42)$$

O problema foi discretizado por malha uniforme de 16×16 elementos de igual-ordem Q2S/Q2S/Q2S da família de *Serendipity*².

Na Figura 2 são apresentados os resultados da formulações (21)-(23) em regime permanente para os valores de $Re = 400$ e $Pe = 10^2$ e 10^4 . Na Figura 2a são mostrados os vetores de velocidade do escoamento, na Figura 2b suas isobáricas, na Figura 2c as superfícies de temperatura para $Pe = 10^2$ e, finalmente, na Figura 2d são apresentadas as isotérmicas para $Pe = 10^4$. Da Figura 2a e Figura 2b, pode ser observada a característica não-linear do modelo, visto o centro de circulação do escoamento - bem como suas isobáricas - não ser simétrico em relação a $x = 0$. Os resultados obtidos foram comparados com as simulações realizadas por Tezduyar *et al.*¹⁶ e Gresho *et al.*⁷, havendo uma boa concordância com os resultados apresentados na Figura.

Quanto às aproximações do campo de temperatura, Figura 2c e Figura 2d, podemos verificar que para $Pe = 10^2$ (Figura 2c), além da camada limite térmica junto à parede na qual $\theta = 1$ ($y = +0,5$ e $-0,5 \leq x \leq +0,5$) - há também o surgimento de uma suave camada limite junto à condição de contorno $\theta = 0$ ($x = -0,5$ e $-0,5 \leq y \leq +0,5$), o que não mais acontece para valores mais elevados de Péclet, como, por exemplo, $Pe = 10^4$ (Figura 2d). Para estes escoamentos fortemente advectivos, a condição $\theta = 0$ é carregada para praticamente todo o interior do domínio Ω - a exceção de uma fina camada limite junto a condição $\theta = 1$ - de modo a formar uma superfície virtualmente plana em todo Ω de valor $\theta \approx 0$, conforme ilustrado pelas isotérmicas da Figura 2d.

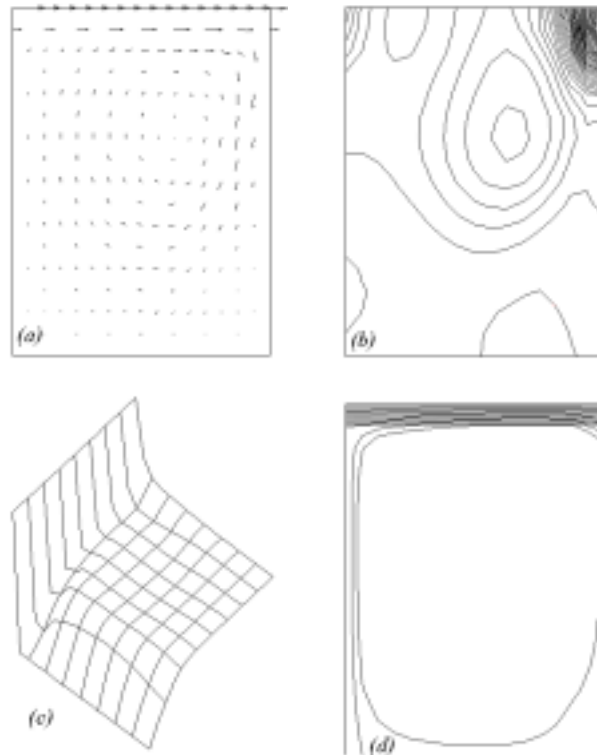


Figura 2. Regime permanente do problema da cavidade para $Re = 400$ (16×16 elementos Q2S/Q2S/Q2S): a) vetores de velocidade; b) isobáricas; c) superfície de temperatura ($Pe = 10^2$); d) isotérmicas ($Pe = 10^4$)

Escoamento não-isotérmico em um canal em degrau

Simularemos agora o escoamento não-isotérmico interno a um canal plano, no qual sua parede inferior abruptamente expande-se em degrau, conforme ilustra a Figura 3a. As condições de contorno em velocidade e temperatura no canal são dados por

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 0 & \text{em } x = 0, 0 (0, 125 \leq y \leq 0, 25) \\ \sigma \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{em } x = 1, 0 (0, 0 \leq y \leq 0, 25) \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{nas demais fronteiras} \end{cases} \quad (43)$$

$$\begin{cases} \theta = 0 & \text{em } x = 0, 0 (0, 125 \leq y \leq 0, 25) \\ \nabla \theta \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{em } x = 1, 0 (0, 0 \leq y \leq 0, 25) \\ \theta = 1 & \text{nas demais fronteiras} \end{cases} \quad (44)$$

O número de Reynolds do escoamento foi selecionado $Re = 60$ e o número de Péclet igual a $Pe = 10^4$, ambos tomados em relação às condições de entrada do escoamento. O domínio do problema foi discretizado por uma malha uniforme de 224 elementos de igual-ordem biquadráticos de *Serendipity* (Q2S/Q2S/Q2S), conforme ilustrado na Figura 3b.

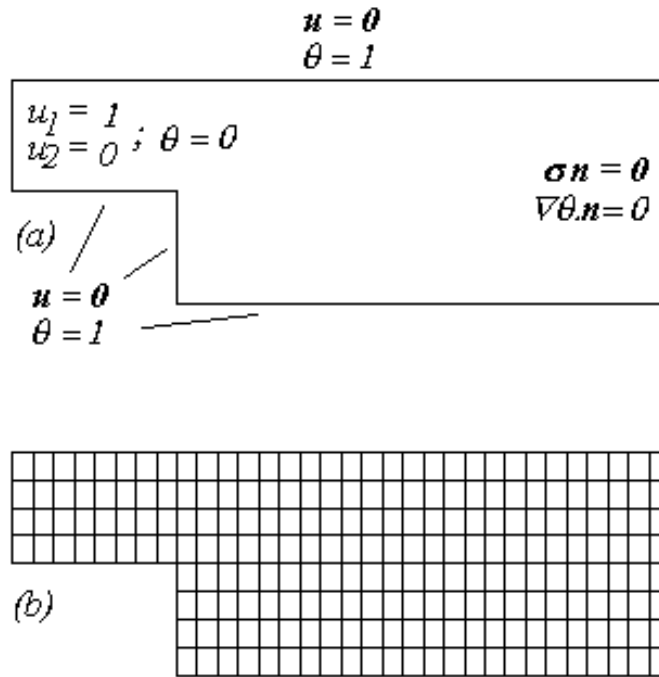


Figura 3. Escoamento não-isotérmico num canal em degrau: a) descrição do problema; b) malha empregada (224 Q2S/Q2S/Q2S elementos de serendipity)

Os resultados para a formulação definida nas equações (21)-(23) em regime permanente são mostrados na Figura 4. Nesta figura, a qual emprega condição de *tração livre* ($\sigma \mathbf{n} = 0$) e fluxo de calor nulo ($\nabla \theta \cdot \mathbf{n} = 0$) na saída do canal, podem ser observadas recirculações de fluido (Figura 4a) e regiões de baixa pressão (Figura 4b) a jusante do degrau. Verificamos, ainda, que o comprimento de canal após a contração não foi suficiente para voltar a desenvolver o escoamento, conforme ilustra o comportamento das isobáricas da Figura 4b a jusante do degrau. Já a Figura 4c mostra as superfícies de temperatura ao longo do canal. Conforme observado, as condições nas paredes do canal ($\theta = 1$), juntamente com sua

condição de entrada ($\theta = 0$), criam abruptas camadas limites térmicas em ambos os lados do canal, a excessão da região imediatamente após a expansão do canal. Nesta zona, fortemente influenciada pela recirculação secundária de fluido capturada na Figura 4a, a condição de contorno ($\theta = 1$) é carregada para o interior do domínio, perturbando dessa maneira o normal desenvolvimento de sua camada limite térmica.

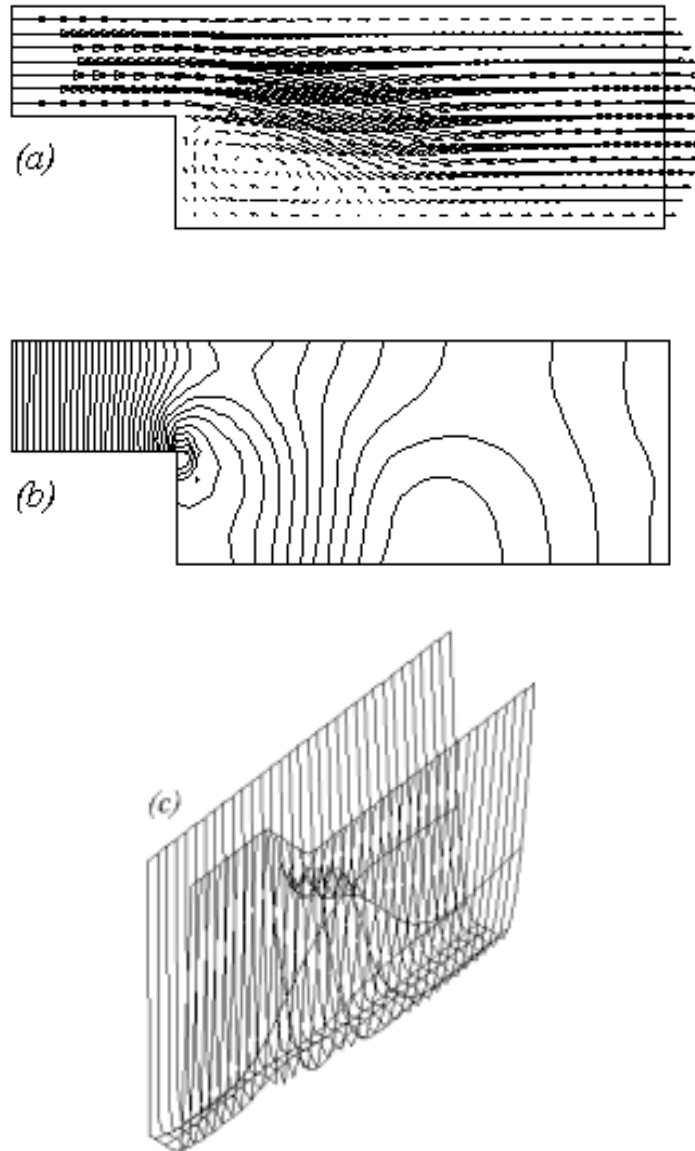


Figura 4. Regime permanente do escoamento em um canal em degrau com $R = 60$:
a) vetores de velocidade; b) isobáricas; c) superfície de temperatura para $Pe = 10^4$

CONCLUSÕES

Este trabalho objetivou a simulação computacional de escoamentos não-isotérmicos incompressíveis de Navier-Stokes. Após a apresentação dos Princípios da Termomecânica Fluidos, introduzimos uma extensão não isotérmica do método GLS para o problema, o qual não necessita satisfazer à condição de *Babuška-Brezzi*, permitindo, assim, a utilização de elementos finitos computacionalmente desejáveis como os elementos de igual-ordem. Graças às expressões dos parâmetros de estabilidade τ_v , τ_ϕ e δ e de um robusto algoritmo preditor/multi-corretor, o método foi capaz de simular acuradamente situações fortemente advectivas, conforme ilustram os testes numéricos realizados.

Comentários finais

1. O método definido em (21)-(23) produz bons resultados nos escoamentos cujas propriedades físicas não sejam fortemente dependentes do campo de temperatura. Caso isto não se verifique, podemos ainda empregá-lo com esquemas de correção de propriedades¹³, tais como os métodos de *temperatura de referência e propriedades relacionadas*.
2. Da maneira como foi definido, o Algoritmo 1 não apenas integra problemas de convecção *forçada* como também de convecção *mista* de calor, já que monta e soluciona simultaneamente as equações (15). Bastaria, de modo a considerar o fenômeno de convecção natural, adotarmos a hipótese de Boussinesq¹⁴, a qual substitui o termo de pressão ∇p da equação (15) por um termo de empuxo função de θ , acoplando dessa maneira todo o sistema.

AGRADECIMENTOS

Durante a realização deste trabalho, seu autor foi parcialmente financiado pelo CNPq Proc.350747/93-8, apoio pelo qual muito agradece.

REFERÊNCIAS

- 1 A.N. Brooks e T.J.R. Hughes, "Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. **32**, pp. 199–259, (1982).
- 2 P.G. Ciarlet, "*The finite element method for elliptic problems*", Amsterdam, (1978)
- 3 L.P. Franca e S. Frey, "Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **99**, pp. 209–233, (1992).
- 4 L.P. Franca, S. Frey e T.J.R. Hughes, "Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **95**, pp. 253–276, (1992).
- 5 L.P. Franca, S. Frey e A. Madureira, "Two- and three-dimensional simulations of the incompressible Navier-Stokes equations based on stabilized methods", *Anais da First European Computational Fluid Dynamics Conference*, pp. 121–128, Bruselas, (1994).
- 6 A.C. Galeão e E.G. Dutra do Carmo, "A consistent approximate upwind Petrov-Galerkin method for convection-dominated problems", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **68**, pp. 83–95, (1988).

- 7 P.M. Gresho e S.T. Chan, "On theory of semi-implicit projection for viscous incompressible flow and its implementation via a finite element method that also introduces a nearly consistent mass matrix. Part 2: implementation", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. **11**, pp. 621–659, (1990).
- 8 M.E. Gurtin, "*An introduction to continuum mechanics*", Academic Press, New York, (1981).
- 9 T.J.R. Hughes, L.P. Franca e M. Balestra, "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accomodating equal-order interpolations", *Comput. Metho. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **59**, pp. 85–99, (1986).
- 10 T.J.R. Hughes e T.E. Tezduyar, "Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible Euler equations", *Preprint CLaSSIC*, Vol. **83**, 4, Projeto CLaSSIC, NASA, (1983).
- 11 C. Johnson, "*Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*", Cambridge University Press, Cambridge (1987).
- 12 J. Karam Filho e A.F.D. Loula, "New mixed Petrov-Galerkin finite element formulations for incompressible flow", *Anais do II Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, pp. 172–175, Águas de Lindóia, Brasil (1988).
- 13 W.M. Kays e M.E. Crawford, "*Convective heat and mass transfer*", McGraw-Hill, New York (1980).
- 14 L. Landau e E. Lifchitz, "*Mécanique des fluides*", Edições Mir, Moscú, (1971).
- 15 S. Patankar, "*Numerical heat transfer and fluid flow*", McGraw-Hill, New York, (1980).
- 16 T.E. Tezduyar, R. Shih, S. Mittal e S.E. Ray, "Incompressible flow using stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements", *Preprint UMSI 90,165*, University of Minnesota/Supercomputer Institute, Minneapolis (1990).
- 17 C. Truesdell e R.A. Toupin, "*The classical field theory*", *Handbuch der Physik III/1*, Springer-Verlag, Berlin (1960).
- 18 M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin e L.J. Topp, "Stiffness and deflection analysis of complex structures", *Aero Sci.*, Vol. **23**, pp. 805–823, (1956).
- 19 G.J. Van Wylen e R.E. Sonntag, "*Fundamentals of classical thermodynamics*", John Wiley, New York (1978).