

Aplicación de la programación distribuida en la obtención de la velocidad de flameo y los análisis de sensibilidad del flameo en puentes de gran vano

Félix Nieto, José Ángel Jurado y Santiago Hernández

Universidade da Coruña
ETS Enxeñeiros de Camiños, Canais e Portos (ETSECCP)
Campus de Elviña, 15071 A Coruña, España
Tel.: 34-981-16 70 00; Fax: 34-981-16 71 70
e-mail: fnieto@udc.es; jjurado@udc.es; hernandez@udc.es

Palabras clave:

programación distribuida, puentes de gran vano, aeroelasticidad, flameo, análisis de sensibilidad.

Resumen

La formulación que permite el cálculo de la velocidad de flameo de un puente de gran vano, ya sea atirantado o colgante, así como de los análisis de sensibilidad del flameo es compleja y requiere un esfuerzo de cálculo muy importante. En este artículo se presenta esa formulación y se plantea la posibilidad de distribuir ciertos procesos costosos y repetitivos, que hasta ahora se han venido realizando de forma secuencial, a una serie de ordenadores conectados en red, de manera que cada ordenador resuelve un problema parcial independiente de los demás. Además se comenta una aplicación informática que permite la resolución mediante programación distribuida del problema planteado y se pasa revista a los resultados comparándolos con los de otros investigadores que han empleado programación secuencial.

APPLICATION OF DISTRIBUTED PROGRAMMING TO THE EVALUATION OF FLUTTER SPEED AND SENSITIVITY ANALYSIS OF FLUTTER IN LONG-SPAN BRIDGES

Keywords:

distributed programming, long-span bridges, aeroelasticity, flutter, sensitivity analysis.

Summary

The formulation used in order to obtain the flutter speed of a long span bridge is complex and requires an enormous computational effort. This paper presents that formulation and shows the possibility of distributing some expensive and repetitive processes to the computers of a local network, so each computer solves a partial and autonomous problem. A piece of software developed with the aim of giving solution to the previous problem using distributed programming is presented. The obtained results are shown and compared with the solutions published by other researchers in the field of flutter speed and sensitivity analysis of flutter who have used sequential programming.

INTRODUCCIÓN

Durante la década de los años 90 y estos primeros años del siglo XXI se está asistiendo a una auténtica revolución en el campo de la ingeniería de puentes de gran vano. En la actualidad un puente como el del estrecho de Akashi con sus 1991 m de longitud del vano central es una realidad. Pero el futuro próximo nos seduce con puentes como el del estrecho de Messina que con 3300 m de vano sin duda marcará un hito en la historia de la ingeniería. Con el fin de garantizar la seguridad de estas obras, tanto en fase constructiva como de servicio, se debe determinar su velocidad de flameo y calcular los análisis de sensibilidad respecto a ciertas variables de diseño. Estos aspectos, sobre los que se ha investigado con notable éxito en los últimos años, requieren de cálculos extremadamente complejos y costosos desde el punto de vista computacional. Con el fin de disminuir tiempos de cálculo y poder trabajar con modelos estructurales cada vez más precisos, una posible estrategia a implementar consiste en distribuir el proceso de cálculo a una serie de ordenadores conectados en red.

FORMULACIÓN AEROELÁSTICA

El análisis aeroelástico de un tablero de puente es una modalidad del análisis dinámico en el que las fuerzas actuantes son dependientes de los movimientos de la estructura en el seno del flujo de viento. Los modelos de cálculo habitualmente utilizados en este tipo de estructuras, tanto puentes atirantados como colgantes, son modelos estructurales tridimensionales de elementos barra a flexión, como el que se muestra en la Figura 1.

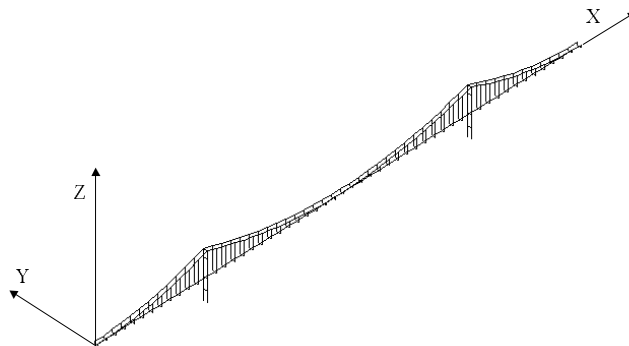


Figura 1. Modelo estructural tridimensional de un puente colgante

Las fuerzas aeroelásticas debidas al viento que actúan sobre el tablero de un puente se descomponen en tres acciones por unidad de longitud que pueden ser linealizadas en función de los movimientos y velocidades del tablero del puente usando la formulación matricial que se indica a continuación, tal como han explicado Jurado y Hernández¹

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} D \\ L \\ M \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \rho U^2 \begin{pmatrix} K^2 P_4^* & -K^2 P_6^* & -BK^2 P_3^* \\ -K^2 H_6^* & K^2 H_4^* & BK^2 H_3^* \\ -BK^2 A_6^* & BK^2 A_4^* & B^2 K^2 A_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \\ \varphi_x \end{pmatrix} + \\
 &+ \frac{1}{2} \rho U^2 \begin{pmatrix} BKP_1^*/U & -BKP_5^*/U & -B^2 KP_2^*/U \\ -BKH_5^*/U & BKH_1^*/U & B^2 KH_2^*/U \\ -B^2 KA_5^*/U & B^2 KA_1^*/U & B^3 KA_2^*/U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\varphi}_x \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1}$$

donde ρ es la densidad del aire, B la anchura del tablero, U la velocidad del viento incidente, K es el parámetro de frecuencia reducida $K = B\omega_a/U$, siendo ω_a la frecuencia de vibración del puente. Los movimientos de un nudo cualquiera de la estructura quedan definidos mediante el vector $\mathbf{u} = (u, v, w, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)^T$ y P_i^* , H_i^* , A_i^* ($i = 1, \dots, 6$) que son los coeficientes aeroelásticos (también llamados coeficientes de flameo o de Scanlan²) obtenidos mediante ensayos experimentales; estos coeficientes aeroelásticos son función de la frecuencia reducida K . En la Figura 2 se representan estas fuerzas y movimientos sobre la sección de un tablero de puente. El método debe ser considerado como híbrido, ya que los coeficientes aeroelásticos se determinan a partir de resultados experimentales obtenidos en ensayos en túneles de viento, mientras que el problema consiste en resolver numéricamente la ecuación de equilibrio dinámico del tablero

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}_a = \mathbf{K}_a\mathbf{u} + \mathbf{C}_a\dot{\mathbf{u}} \quad (2)$$

donde \mathbf{f}_a es el vector de fuerzas aeroelásticas debidas al viento; \mathbf{K}_a y \mathbf{C}_a son las llamadas matrices aeroelásticas de rigidez y amortiguamiento mostradas en (1), ensambladas para el tablero completo; y \mathbf{M} , \mathbf{C} y \mathbf{K} son, respectivamente, las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del tablero. La dimensión de los vectores \mathbf{f}_a y \mathbf{u} es el número de grados de libertad del tablero $n = 6N$ siendo N el número de nudos en que se ha discretizado el tablero. Las matrices aeroelásticas \mathbf{K}_a y \mathbf{C}_a son de dimensión $6N \times 6N$, aunque a partir de su desarrollo en (1) puede observarse que sólo son no nulos $3N \times 3N$ elementos.

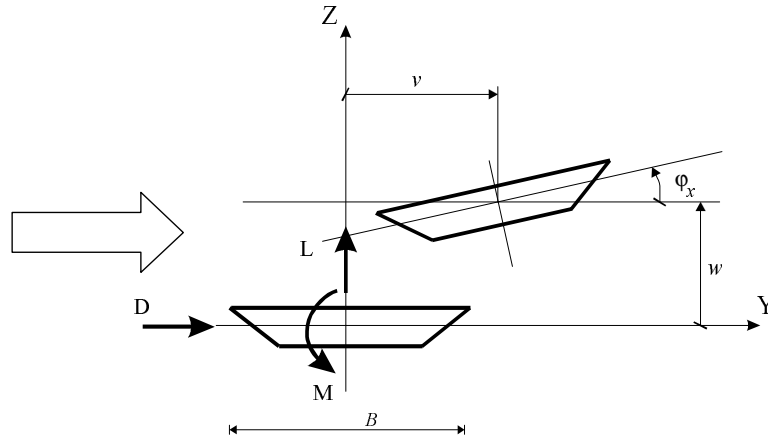


Figura 2. Fuerzas y movimientos aeroelásticos en el tablero de un puente

Pasando las matrices de rigidez y amortiguamiento aeroelásticas al lado izquierdo de la igualdad, se obtiene

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{C} - \mathbf{C}_a)\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_a)\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3)$$

que representa el movimiento de un sistema amortiguado en vibración libre en el que las matrices de rigidez y amortiguamiento han sido modificadas por las fuerzas aeroelásticas inducidas por el viento.

Un procedimiento para resolver problemas dinámicos como el planteado en la ecuación (3) es el análisis modal. En él los movimientos del tablero, solución de (3), pueden obtenerse considerando que los movimientos \mathbf{u} son una combinación de los m modos de vibración más significativos almacenados en la matriz Φ , de manera que

$$\mathbf{u} = \sum_{r=1}^m \phi_r q_r = \Phi \mathbf{q} \quad (4)$$

donde Φ es la matriz modal de orden $n \times m$

$$\begin{pmatrix} \phi_{1,1} & \cdots & \phi_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n,1} & \cdots & \phi_{n,m} \end{pmatrix} \quad (5)$$

y \mathbf{q} es la participación de cada uno de los modos de vibración en el vector de movimientos \mathbf{u} . Se debe tener muy en cuenta que en el caso de puentes colgantes, para obtener los modos y frecuencias naturales de vibración se debe considerar la rigidización que se produce al estar los cables de la catenaria sometidos a grandes esfuerzos de tracción. Por lo tanto, se debe resolver el problema siguiente considerando la teoría de segundo orden

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_G - \omega^2 \mathbf{M})\Phi = \mathbf{0} \quad (6)$$

donde \mathbf{K}_G es la matriz de rigidez geométrica que depende de los esfuerzos axiales comentados.

Sustituyendo (4) en (3) y premultiplicando por Φ^T , se obtiene

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}} + \Phi^T (\mathbf{C} - \mathbf{C}_a) \Phi \dot{\mathbf{q}} + \Phi^T (\mathbf{K} - \mathbf{K}_a) \Phi \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (7)$$

Seguindo la metodología descrita por Jurado y Hernández¹, se llega al clásico problema no lineal de valores y vectores propios

$$(\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}) \mathbf{w}_\mu e^{\mu t} = \mathbf{0} \quad (8)$$

La solución del problema definido en (8) es un conjunto de m parejas de valores propios complejos conjugados

$$\mu_j = \alpha_j + i\beta_j, \quad \bar{\mu}_j = \alpha_j - i\beta_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (9)$$

A cada par de valores propios complejos conjugados le corresponde un par de vectores propios complejos conjugados entre sí, de dimensión $2m$.

$$\mathbf{w}_\mu = \mathbf{w}_{\mu R} + i\mathbf{w}_{\mu I}, \quad \bar{\mathbf{w}}_\mu = \mathbf{w}_{\mu R} - i\mathbf{w}_{\mu I} \quad (10)$$

Teniendo en cuenta que ω_j es la frecuencia natural j -ésima de la estructura, ω_{aj} es la frecuencia amortiguada j -ésima y ξ_{aj} el factor de amortiguamiento, la parte imaginaria de los valores propios coincide con la frecuencia amortiguada

$$\omega_{aj} = \omega_j \sqrt{1 - \xi_{aj}^2} = \beta_j \quad (11)$$

mientras que la parte real de los valores propios α_j se asocia al producto del amortiguamiento por la frecuencia natural de vibración ($-\xi_{aj}\omega_j$) y, por lo tanto,

$$\xi_{aj} = \frac{-\alpha_j}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}} \quad (12)$$

Sustituyendo los valores obtenidos en (9), se obtiene

$$\mu_j = -\omega_j \xi_{aj} + i\omega_{aj}, \quad \bar{\mu}_j = -\omega_j \xi_{aj} - i\omega_{aj} \quad (13)$$

VELOCIDAD DE FLAMEO

Si para una velocidad dada de viento U son negativas todas las partes reales α_j de cada uno de los valores propios complejos obtenidos de (8), el amortiguamiento efectivo del tablero, según la relación (12), será positivo en cada modo de vibración y por consiguiente

se tiene una respuesta aeroelástica que se atenúa exponencialmente con el tiempo, tendiendo a la estabilidad. La condición crítica para el fenómeno del flameo se corresponde con la más baja velocidad de viento para la cual se obtiene un valor propio complejo con parte real nula, es decir, a la transición entre amortiguamientos positivos (oscilaciones atenuadas) y amortiguamientos negativos (oscilaciones de amplitud creciente). Esto ocurre cuando la parte real de algún valor propio complejo pasa de negativa a positiva (Jurado³, Mosquera⁴). Por lo tanto, la condición que identifica el flameo incipiente es obtener un valor de α_j tal que

$$\alpha_j = 0 \quad \xi_{\min} = \min(\xi_{aj}) = \min\left(\frac{-\alpha_j}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}}\right) = 0 \quad (14)$$

el cual permite identificar la condición crítica de flameo, teniendo en cuenta además, que la parte imaginaria del valor propio β_j es la frecuencia de vibración asociada al modo j . Cuando se produce el flameo incipiente, al cabo de un cierto tiempo las vibraciones asociadas a los modos con la parte real del autovalor negativa se han ido amortiguando, pasando la estructura a oscilar con una frecuencia β_j , siendo los movimientos de amplitud creciente.

Para resolver el problema de valores propios $(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})\mathbf{w}_\mu = \mathbf{0}$ y obtener m parejas de valores propios complejos conjugados $\mu_j = \alpha_j \pm i\beta_j$ hay que recurrir a un procedimiento iterativo, ya que en la construcción de la matriz \mathbf{A} intervienen los coeficientes de flameo, los cuales son función de la frecuencia reducida del sistema $K = B\omega_a/U$. Sin embargo, la frecuencia asociada a cada modo $\omega_{aj} \equiv \beta_j$ no se conoce hasta que se ha resuelto el problema de valores propios. Este problema no lineal se resuelve mediante el procedimiento esquematizado en el diagrama de flujo de la Figura 3.

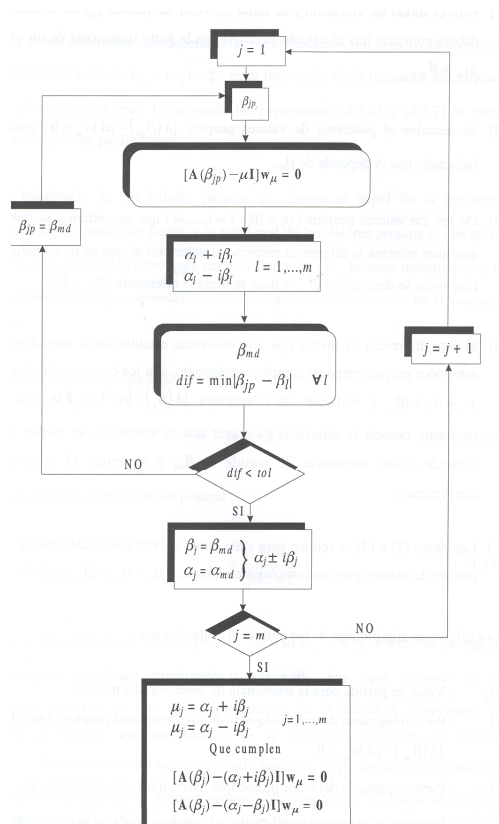


Figura 3. Diagrama de flujo para la resolución del problema no lineal de valores y vectores propios

La búsqueda de la velocidad de flameo se convierte en un proceso iterativo en el que partiendo de una velocidad de viento U suficientemente baja se resuelve el problema de autovalores establecido en (8) de modo que $\alpha_j < 0 \forall j = 1, \dots, m$. El proceso continúa incrementando progresivamente la velocidad U hasta que se verifica la condición de flameo definida en (14). Esa velocidad de viento U_f producirá la inestabilidad por flameo en el tablero. En la Figura 4 se muestra el esquema seguido para el cálculo de la velocidad de flameo.

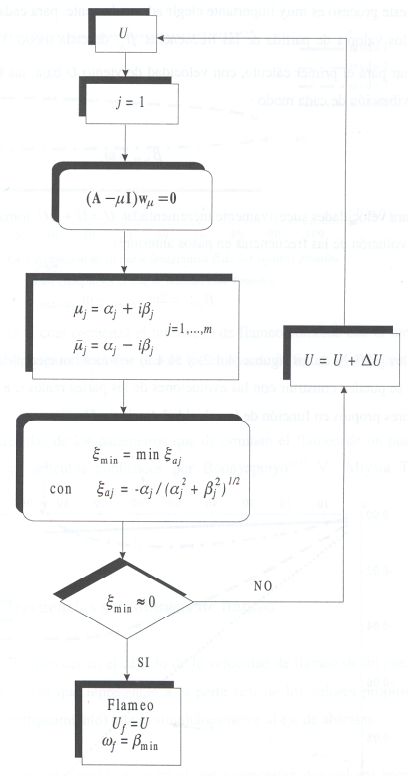


Figura 4. Diagrama de flujo para el cálculo de la velocidad de flameo

Del análisis detallado de estos diagramas de flujo se infiere, como ha mostrado Jurado³, que para cada velocidad media de viento de cálculo el grueso de los cálculos debe repetirse para cada modo de vibración hasta que se calculan m parejas de valores propios complejos conjugados $\mu_j = \alpha_j \pm i\beta_j$ con $j = 1, \dots, m$.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

El concepto de sensibilidad, tal como se utiliza en el contexto del diseño óptimo de estructuras (Hernández⁵, Vanderplaats⁶ y Haftka⁷), se corresponde con la variación que experimenta una característica de la estructura al modificar el valor de una variable de diseño. En otras palabras, al calcular la sensibilidad sólo se alteran las citadas variables individualmente, es decir, de una en una, para poder conocer así de forma desagregada la influencia de un cambio en la respuesta estructural.

A partir de la definición anterior, debería ser claro que el cálculo de la sensibilidad de una característica estructural respecto al conjunto de las variables de diseño corresponde

con el gradiente de dicha característica. Por tanto, los análisis de sensibilidad resultan imprescindibles en los métodos de optimización que requieren del uso del gradiente en el proceso iterativo.

En problemas de índole estructural, la función que representa la característica de la estructura depende de las variables de diseño tanto explícitamente, como de manera implícita a través de propiedades que son a su vez función de dichas variables de diseño. Es decir, dado un vector $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ de variables de diseño, la expresión más general de una característica f será

$$f = f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) \quad (15)$$

donde $\varphi(\mathbf{x})$ es una propiedad de la estructura y f la función de la que se va a obtener la sensibilidad.

La diferencial total de f se escribe en estas condiciones como

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n \quad (16)$$

Recordando que el análisis de sensibilidad se lleva a cabo alterando únicamente una variable de diseño, si se realiza para la variable genérica x_i la expresión se simplifica, ya que dx_j será nulo excepto para $j = 1$. La expresión anterior se puede escribir

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i \quad (17)$$

Dividiendo entre dx_i , se tiene

$$\frac{df}{dx_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (18)$$

La formulación que se acaba de describir de manera genérica va a ser aplicada a continuación para obtener los análisis de sensibilidad de la velocidad de flameo en puentes de gran vano.

Como se ha comentado, al alcanzar la velocidad de flameo U_f la parte real del autovalor definido según las ecuaciones (9) y (13) se hace cero. En consecuencia, la expresión (8) puede escribirse

$$(\mathbf{A} + i\beta_j \mathbf{I}) \mathbf{w}_\mu = \left(\mathbf{A} + i \frac{K_f U_f}{B} \mathbf{I} \right) \mathbf{w}_\mu = \mathbf{0} \quad (19)$$

El proceso que permite obtener los análisis de sensibilidad ha sido explicado por Jurado y Hernández^{8,9} y por Jurado³. En esencia supone aplicar la fórmula (18) en (19) para una variable de diseño genérica x , es decir

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\mathbf{A} + i \frac{K_f U_f}{B} \mathbf{I} \right) \mathbf{w}_\mu \right] = \mathbf{0} \quad (20)$$

Desarrollando, se obtiene

$$\frac{d\mathbf{A}}{dx} \mathbf{w}_\mu + \mathbf{A} \frac{d\mathbf{w}_\mu}{dx} + \left[\frac{i}{B} \left(\frac{dK_f}{dx} U_f + K_f \frac{dU_f}{dx} \right) \mathbf{I} \right] \mathbf{w}_\mu + \frac{K_f U_f}{B} i \mathbf{I} \frac{d\mathbf{w}_\mu}{dx} = \mathbf{0} \quad (21)$$

De la misma manera que se hizo para el autovector \mathbf{w}_μ puede definirse un autovector por la izquierda \mathbf{v}_μ mediante la siguiente expresión

$$\mathbf{v}_\mu^T (\mathbf{A} + i\beta_J \mathbf{I}) = \mathbf{v}_\mu^T \left(\mathbf{A} + i \frac{K_f U_f}{B} \mathbf{I} \right) = \mathbf{0} \quad (22)$$

Premultiplicando (21) por \mathbf{v}_μ^T , se obtiene

$$\mathbf{v}_\mu^T \frac{d\mathbf{A}}{dx} \mathbf{w}_\mu + \mathbf{v}_\mu^T \left(\mathbf{A} + \frac{K_f U_f}{B} i \mathbf{I} \right) \frac{d\mathbf{w}_\mu}{dx} + \mathbf{v}_\mu^T \left[\frac{i}{B} \left(\frac{dK_f}{dx} U_f + K_f \frac{dU_f}{dx} \right) \mathbf{I} \right] \mathbf{w}_\mu = 0 \quad (23)$$

Empleando la expresión (18) para realizar las derivadas

$$\frac{d\mathbf{A}}{dx} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial U_f} \frac{dU_f}{dx} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial K_f} \frac{dK_f}{dx} \quad (24)$$

y sustituyendo en (23), tenemos

$$\mathbf{v}_\mu^T \frac{d\mathbf{A}}{dx} \mathbf{w}_\mu + \mathbf{v}_\mu^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial U_f} \mathbf{w}_\mu \frac{dU_f}{dx} + \mathbf{v}_\mu^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial K_f} \mathbf{w}_\mu \frac{dK_f}{dx} + \frac{i}{B} \left[\left(\frac{dK_f}{dx} U_f + K_f \frac{dU_f}{dx} \right) \right] \mathbf{v}_\mu^T \mathbf{I} \mathbf{w}_\mu = 0 \quad (25)$$

Definiendo los siguientes números complejos

$$h_{Ax} = \mathbf{v}_\mu^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \mathbf{w}_\mu \quad h_{AU} = \mathbf{v}_\mu^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial U_f} \mathbf{w}_\mu \quad h_{AK} = \mathbf{v}_\mu^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial K_f} \mathbf{w}_\mu \quad (26)$$

se obtiene

$$h_{Ax} + \frac{dU_f}{dx} \left[h_{AU} + \frac{iK_f}{B} (\mathbf{v}_\mu^T \mathbf{I} \mathbf{w}_\mu) \right] + \frac{dK_f}{dx} \left[h_{AK} + \frac{iU_f}{B} (\mathbf{v}_\mu^T \mathbf{I} \mathbf{w}_\mu) \right] = 0 \quad (27)$$

Denominando

$$\begin{aligned} g_U &= h_{AU} + \frac{iK_f}{B} (\mathbf{v}_\mu^T \mathbf{I} \mathbf{w}_\mu) \\ g_K &= h_{AK} + \frac{iU_f}{B} (\mathbf{v}_\mu^T \mathbf{I} \mathbf{w}_\mu) \end{aligned} \quad (28)$$

queda la siguiente ecuación en variable compleja:

$$g_U \frac{dU_f}{dx} + g_K \frac{dK_f}{dx} = -h_{Ax} \quad (29)$$

donde dU_f/dx y dK_f/dx son números reales. Multiplicando la expresión (29) por \bar{g}_U o \bar{g}_K y comparando las partes imaginarias a ambos lados, se obtienen las sensibilidades siguientes

$$\frac{dK_f}{dx} = \frac{-\text{Im}(\bar{g}_U h_{Ax})}{\text{Im}(\bar{g}_U g_K)} \quad \frac{dU_f}{dx} = \frac{-\text{Im}(\bar{g}_K h_{Ax})}{\text{Im}(\bar{g}_K g_U)} \quad (30)$$

Las expresiones (30) permiten cuantificar la variación, respecto a la variable de diseño x , de los dos parámetros que definen el fenómeno de inestabilidad por flameo de un tablero de puente (velocidad media del viento incidente U_f y frecuencia reducida de la respuesta K_f). La determinación de los análisis de sensibilidad respecto de las variables de diseño tiene una importancia capital, ya que permite la mejora de los procesos de diseño empleando para

ello una formulación matemática rigurosa en lugar de reglas heurísticas fundamentadas en la experiencia y criterio del proyectista. Los análisis de sensibilidad pueden emplearse para resolver problemas de optimización, pero también dan una información muy importante por sí mismos puesto que indican cómo afecta una variación en una variable de diseño a un determinado parámetro cuya sensibilidad ha sido evaluada.

Analizando la información que puede extraerse del análisis de sensibilidad de la velocidad crítica de flameo respecto a cualquiera de las variables de diseño (dU_f/dx), pueden plantearse las situaciones que se indican a continuación: si $dU_f/dx > 0$, un incremento de la variable de diseño provoca el aumento de la velocidad de flameo, mientras que si $dU_f/dx < 0$, el efecto es el contrario. Además si $dU_f/dx = 0$, esto nos indica que la velocidad de flameo no depende de la variable de diseño considerada. Por último, la magnitud de cada derivada indica si una variación de la variable de diseño tiene una influencia grande o pequeña sobre la velocidad de flameo.

El conjunto de variables de diseño x escogido para los ejemplos de aplicación de este artículo está compuesto por parámetros mecánicos de la sección transversal del tablero, como son el momento de inercia a torsión J y los momentos de inercia a flexión I_y e I_z . Se han elegido estos tres parámetros, ya que son fundamentales en el comportamiento estructural del tablero de un puente.

PROGRAMACIÓN DISTRIBUIDA

La formulación a partir de la cual se calcula la velocidad de flameo de un puente, así como los análisis de sensibilidad respecto a un conjunto de variables de diseño, ha sido desarrollada en los apartados precedentes. Las expresiones obtenidas pueden ser implementadas en un programa de ordenador con el fin de resolver numéricamente el problema. El análisis detallado de las operaciones requeridas permite concluir que:

- El procedimiento iterativo que permite la resolución del problema no lineal de autovalores en el que se basa el cálculo de la velocidad de flameo requiere la repetición de la mayor parte de los cálculos (como se indicó en el apartado titulado Velocidad de flameo) para cada uno de los modos de vibración elegidos hasta que se calculan las m parejas de valores propios complejos conjugados $\mu_j = \alpha_j \pm i\beta_j$ con $j = 1, \dots, m$, dada una cierta velocidad de cálculo. Los resultados obtenidos para cada modo de vibración son independientes de los restantes modos.
- Los análisis de sensibilidad respecto a cada una de las variables de diseño de los parámetros que definen la inestabilidad por flameo (U_f y K_f) son independientes entre sí.

El proceso de cálculo en su conjunto es muy costoso desde el punto de vista computacional, lo que trae aparejado unos elevados tiempos de cálculo. Esta afirmación es cierta en el caso de los análisis de sensibilidad, pero es especialmente crítica en lo que se refiere al cálculo de la velocidad de flameo, ya que al aumentar el número de modos elegidos y, por lo tanto representar, con mayor exactitud el comportamiento real del puente en la situación de flameo, se aumenta el tamaño del problema y los tiempos de cálculo crecen fuertemente. En el caso de grandes puentes colgantes o atirantados se llegan a emplear 25 ó incluso 30 modos de vibración y este valor será cada vez mayor en el futuro conforme aumente la longitud del vano principal.

Con el fin de disminuir los tiempos de cálculo y en consecuencia poder considerar un número de modos de vibración que permitan representar con precisión el comportamiento de la estructura se ha desarrollado una aplicación informática que permite distribuir a una serie de ordenadores conectados en red la obtención de las sensibilidades respecto a las variables de diseño, así como los cálculos a realizar para cada modo de vibración en el proceso iterativo de resolución del problema no lineal de valores propios. En concreto, se

ha desarrollado un conjunto de programas que permiten la programación distribuida de los análisis explicados en los apartados anteriores, es decir, el cálculo aeroelástico de la velocidad de flameo en un puente y el análisis de sensibilidad del flameo respecto a un conjunto de variables de diseño. Para desarrollar la aplicación indicada se ha tomado como base un programa informático denominado FLAS (Jurado³) que resuelve el problema de forma secuencial. Para realizar este programa se han integrado en una única aplicación dos lenguajes de programación. El interfaz de usuario, las comunicaciones y las estructuras de control principales se han programado mediante VISUAL BASIC, mientras que los algoritmos de cálculo más complejos han sido programados mediante DLL's (Dynamic-Link Libraries) en FORTRAN.

El esquema operativo escogido para la aplicación ha sido el de maestro-esclavo (master-slave en terminología inglesa) entre ordenadores que se encuentran conectados en red (en la Figura 5 se muestra una fotografía del cluster de ordenadores en el que se ha realizado el proceso distribuido). En consecuencia, se ha realizado un programa para uno de los ordenadores que pasa a actuar como maestro. A través de este maestro se introducen los datos aeroelásticos del problema, se transfieren esos datos a los esclavos y se realizan los procesos que no son distribuibles. Por otro lado, se han desarrollado programas para los esclavos, manteniendo estos programas una estructura idéntica entre sí. Así, cada esclavo realizará el análisis de sensibilidad respecto a una de las variables de diseño y para cada velocidad de viento de cálculo evaluará los autovalores asociados a un subconjunto de los modos de vibración elegidos con el fin de determinar la velocidad de flameo. Como ya se ha comentado, hay una serie de procesos que deben repetirse para cada modo de vibración elegido. Cada esclavo realiza esos cálculos trabajando con un cierto número de modos de vibración en función de la relación entre el número de modos de vibración elegidos y el número de esclavos disponibles, con lo que se consigue reducir notablemente el tiempo de cálculo frente a la programación secuencial.



Figura 5. Cluster de ordenadores

La programación distribuida del cálculo de la velocidad de flameo y de los análisis de sensibilidad del flameo ha sido desarrollada para ser ejecutada en una red convencional de ordenadores sin que el número de nodos de la misma condicione la validez general de la estructura de programación adoptada. En consecuencia, se asume que se dispone de $n + 1$ ordenadores conectados en red de manera que uno de ellos actúa como maestro, mientras que los n restantes asumen el papel de esclavos. En el caso de que se desee calcular la velocidad

de flameo de un puente y los análisis de sensibilidad y se hayan elegido por ejemplo los m modos de vibración más significativos para realizar el análisis modal, los procesos objeto de distribución son los siguientes:

- En lo referente al problema no lineal de autovalores a resolver para velocidades crecientes de viento que permite calcular la velocidad de flameo para una velocidad de viento de cálculo dada, la asignación de manera simultánea del problema no lineal de autovalores a cada uno de los n esclavos se realiza de la manera siguiente: dado un modo de vibración genérico j se establece el cociente j/n que proporciona un resto k ; este valor es el del número asignado al ordenador esclavo que realiza el cálculo del autovalor correspondiente al modo de vibración considerado. Esta situación contrasta con la programación secuencial, en la que se debe resolver el mismo problema para cada uno de los m modos de vibración, uno a continuación de otro.
- De manera similar, suponiendo $r < n$, ya que habitualmente el número de variables de diseño r es inferior al número de esclavos n , habrá r esclavos que realicen los r análisis de sensibilidad de la velocidad de flameo y de la correspondiente frecuencia reducida respecto a las r variables de diseño escogidas (I_y , I_z , J en los ejemplos de aplicación del presente artículo). Cada esclavo realiza los análisis de sensibilidad respecto a una de las variables. En caso de que el número de variables de diseño fuese mayor que el número de esclavos disponibles, se distribuiría el proceso de la manera indicada en el cálculo de la velocidad de flameo. Cuando los análisis de sensibilidad se programen secuencialmente, éstos deben realizarse primero respecto a una de las variables de diseño, seguidamente respecto a una segunda variable de diseño y así sucesivamente.

La potencia de esta técnica se pone de manifiesto sin más que considerar el importantísimo ahorro en tiempo de cálculo que se produce si se realizan los cálculos descritos para un puente del que se consideran los treinta modos de vibración más significativos y se emplea una instalación de treinta PC's conectados en red que en el momento actual tiene un coste económico al alcance de muchas empresas e instituciones.

Un aspecto crítico del desarrollo de la aplicación han sido las comunicaciones entre maestro y esclavos. Estas se han programado empleando un modelo de transporte de extremo a extremo confiable TCP/IP (Tanenbaum¹⁰ y McMahon¹¹) a través de sockets. El protocolo TCP divide el flujo de bytes entrantes en mensajes discretos y en el destino el receptor reensambla en el flujo de salida los mensajes recibidos. El TCP maneja también el control de flujo para evitar que un emisor rápido pueda saturar a un receptor lento.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Como se ha explicado en el apartado precedente, se ha realizado la programación de una aplicación informática que permite distribuir entre una serie de ordenadores conectados en red el cálculo aeroelástico de la velocidad de flameo de un puente y el análisis de sensibilidad del flameo respecto a las variables de diseño elegidas previamente.

Seguidamente se presentan los resultados obtenidos para dos puentes estudiados profusamente por diversos investigadores, como son el desaparecido puente de Tacoma Narrows y el puente sobre el Great Belt, comparándolos con los obtenidos por Jurado³ y Mosquera⁴ realizando los mismos cálculos mediante procesos secuenciales.

Antiguo puente de Tacoma Narrows

El colapso del antiguo puente de Tacoma el 7 de noviembre de 1940 significó el arranque de la aeroelasticidad en puentes de gran vano. Este puente marcó el fin de la tendencia existente en la época de construir puentes colgantes con tableros abiertos cada vez más

flexibles. Los resultados obtenidos explican bien los motivos de ese abrupto final.

Las características geométricas y mecánicas han sido obtenidas de Jurado³ y se muestran en la Tabla I.

Longitud del vano principal (m)	853,4
Longitud de los vanos laterales (m)	335,3
Altura de las torres (m)	71
Anchura entre los cables (m)	11,9
Anchura total del tablero (m)	11,9
Canto del tablero (m)	2,3
Sección de cada cable principal (m ²)	0,124
Momento de inercia a flexión vertical I_y (m ⁴)	0,154
Momento de inercia a flexión lateral I_z (m ⁴)	5,69
Momento de inercia a torsión J (m ⁴)	6,07 e-6
Masa del tablero (t/m)	6,22
Momento polar másico del tablero (tm ² /m)	106,5

Tabla I. Propiedades geométricas y mecánicas del puente de Tacoma Narrows

Para realizar el análisis aeroelástico se ha trabajado con ocho modos naturales de vibración, obtenidos mediante el análisis dinámico del modelo estructural correspondiente. Se han adoptado los coeficientes de flameo obtenidos por Scanlan y Tomko².

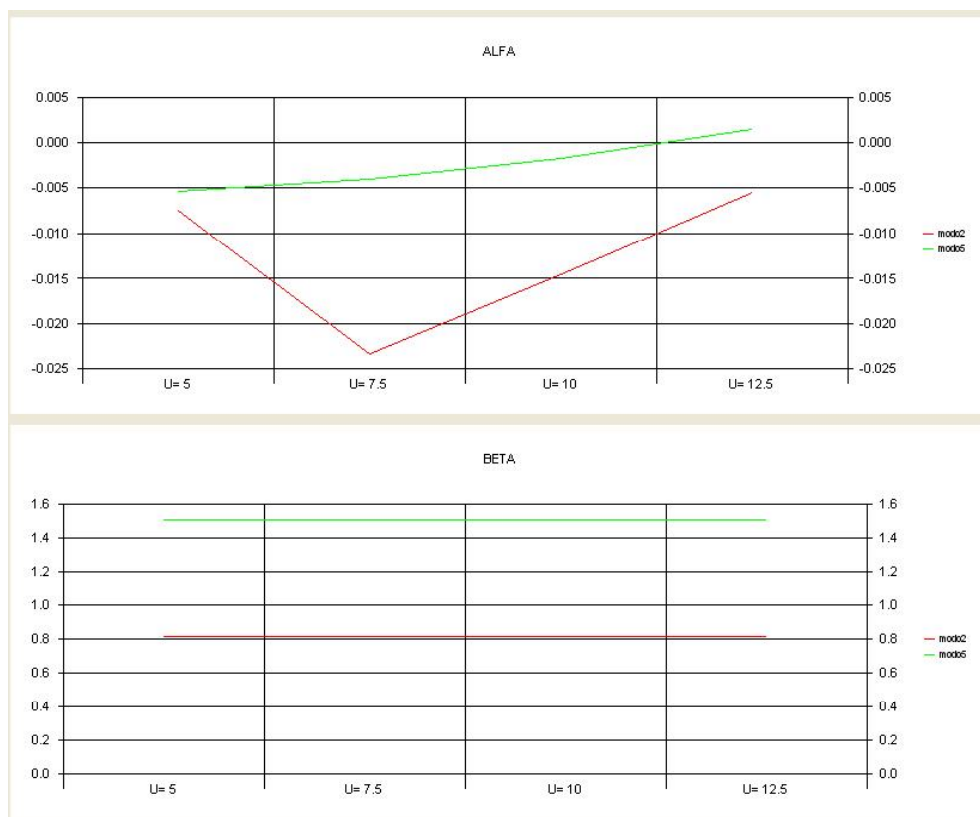


Figura 6. Evolución de la parte real α y de la parte imaginaria β frente a U para el puente de Tacoma Narrows considerando dos modos de vibración

En primer lugar se presentan los resultados obtenidos considerando los dos modos clásicos del fenómeno del flameo: el primer modo de flexión vertical y el primer modo de torsión (modos 2 y 5). En la Figura 6 se muestra gráficamente la evolución de las partes real e imaginaria de los autovalores que permiten la determinación de la velocidad de flameo. Los resultados numéricos de las sensibilidades, así como de la velocidad de flameo y de la frecuencia reducida se presentan en la Figura 7. En la Tabla II se comparan los resultados obtenidos por Nieto, Jurado y Hernández (NJH de ahora en adelante) con los presentados por Jurado³ empleando un método semianalítico (el cálculo de las sensibilidades de los modos y frecuencias de vibración se ha realizado mediante el método de las diferencias finitas) y programación secuencial.

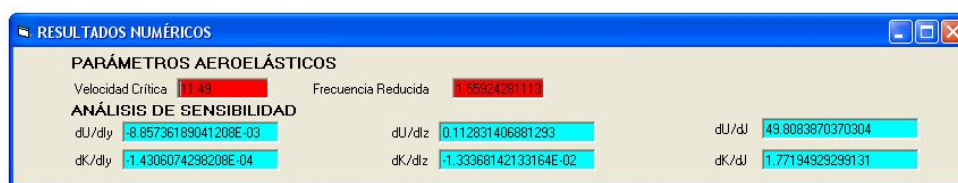


Figura 7. Antiguo puente de Tacoma. Resultados de los parámetros aeroelásticos y de las sensibilidades empleando dos modos de vibración

Parámetro	NJH	Jurado
U_f (m/s)	11,49	11,49
K_f	1,5592428	1,5592428
dU_f/dI_y	-0,0088574	-0,0088574
dK_f/dI_y	-0,00014306	-0,00014306
dU_f/dI_z	0,112831	0,112831
dK_f/dI_z	-0,0133368	-0,0133368
dU_f/dJ	49,80839	49,8084
dK_f/dJ	1,77195	1,77195

Tabla II. Comparación de resultados entre el proceso distribuido y el secuencial empleando dos modos de vibración

Analizando los resultados mostrados en la Tabla II puede apreciarse, cómo se llega a los mismos resultados empleando un método semianalítico implementado tanto en un programa secuencial como distribuido.

Se muestran a continuación los resultados obtenidos considerando ocho modos de vibración. En este caso los resultados no difieren significativamente del análisis realizado con los dos modos de vibración del caso anterior. La evolución de las partes real e imaginaria de los autovalores puede apreciarse en la Figura 8. En la Figura 9 se muestran los resultados numéricos obtenidos empleando programación distribuida. En la Tabla III se comparan los resultados obtenidos con los calculados por Jurado utilizando diez modos de vibración.

Examinando los resultados mostrados en la Tabla III, se observan muy pequeñas diferencias entre los resultados obtenidos empleando ocho y diez modos de vibración. Igualmente, se comprueba la validez de la programación distribuida frente a la programación secuencial.

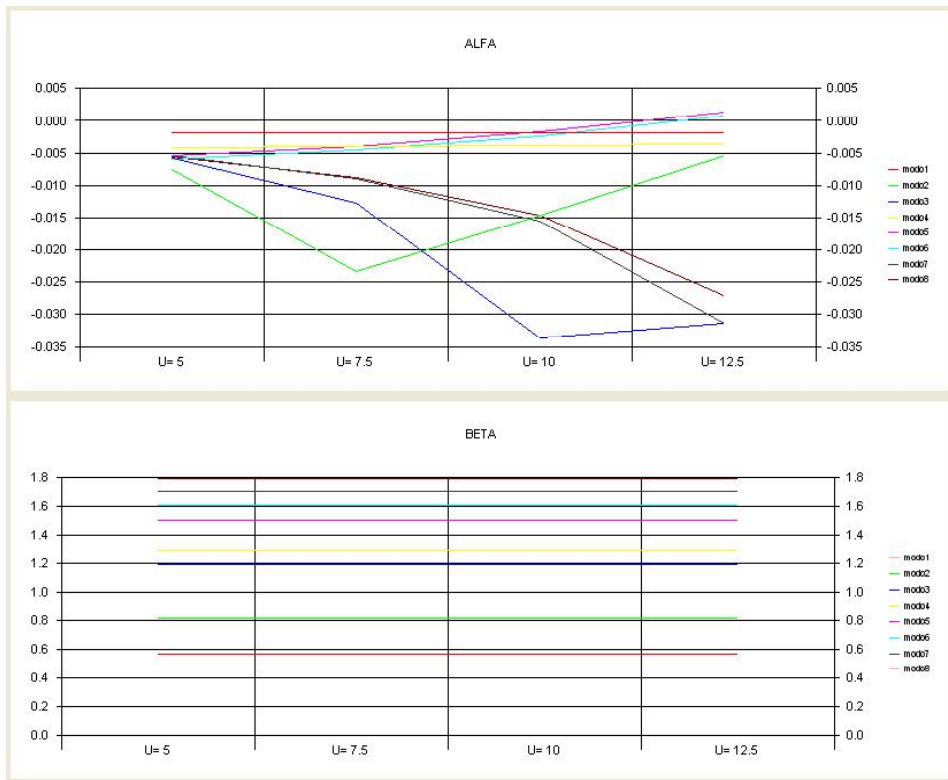


Figura 8. Evolución de la parte real α y de la parte imaginaria β frente a U para el puente de Tacoma Narrows trabajando con ocho modos de vibración

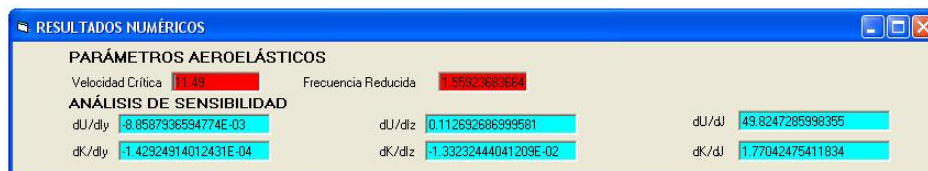


Figura 9. Antiguo puente de Tacoma. Resultados numéricos de los parámetros aeroelásticos y de las sensibilidades empleando ocho modos de vibración

Parámetro	NJH	Jurado
U_f (m/s)	11,49	11,49
K_f	1,5592368	1,5592369
dU_f/dI_y	-0,0088588	-0,008858
dK_f/dI_y	-0,0001429	-0,0001429
dU_f/dI_z	0,112693	0,112692
dK_f/dI_z	-0,0133232	-0,0133232
dU_f/dJ	49,8247	49,8246
dK_f/dJ	1,77042	1,77047

Tabla III. Comparación de resultados entre el proceso distribuido y el secuencial empleando ocho y diez modos de vibración respectivamente

Puente sobre el Great Belt

El estrecho del Great Belt se encuentra en Dinamarca entre las islas de Funen y Zealand. El puente sobre este estrecho fue inaugurado el 14 de junio de 1998. En la Figura 10 se muestra una vista aérea de este prodigio de la ingeniería de puentes. En la Tabla IV se indican las principales características geométricas y mecánicas del puente obtenidas de Mosquera⁴.



Figura 10. El puente del Great Belt

Longitud del vano principal (m)	1624
Longitud de los vanos laterales (m)	535
Altura de las torres (m)	180
Anchura entre los cables (m)	27
Anchura total del tablero (m)	31
Canto del tablero (m)	4,4
Sección de cada cable principal (m ²)	0,44
Momento de inercia a flexión vertical I_y (m ⁴)	4,0
Momento de inercia a flexión lateral I_z (m ⁴)	100
Momento de inercia a torsión J (m ⁴)	7,6
Masa del tablero (t/m)	15,26
Momento polar másico del tablero (tm ² /m)	1106,8

Tabla IV. Propiedades geométricas y mecánicas del puente sobre el Great Belt

En el caso de este puente se ha optado por seguir una metodología analítica. Al contrario que en el ejemplo anterior, las sensibilidades de los modos y frecuencias de vibración han sido calculadas analíticamente empleando el programa ADISNOL3D (Mosquera⁴), programa que permite entre otros aspectos el cálculo de las frecuencias naturales y modos propios de vibración en teoría no lineal.

En primer lugar, al igual que se hizo para el antiguo puente de Tacoma Narrows, se ha realizado el análisis aeroelástico y el cálculo de las sensibilidades considerando sólo dos modos propios de vibración: el primero de flexión vertical simétrica (modo 2) y el primero de torsión simétrica (modo 22). En la Figura 11 se muestra gráficamente la evolución de la parte real e imaginaria de los valores propios obtenidos para velocidades de viento crecientes. En la Figura 12 se muestran los resultados numéricos obtenidos empleando programación distribuida. En la Tabla V se comparan los resultados obtenidos empleando una metodología analítica y programación distribuida, con los resultados presentados por Mosquera⁴ utilizando metodología analítica y programación secuencial, y por Jurado³ que se basó en una metodología semianalítica y programación también secuencial.

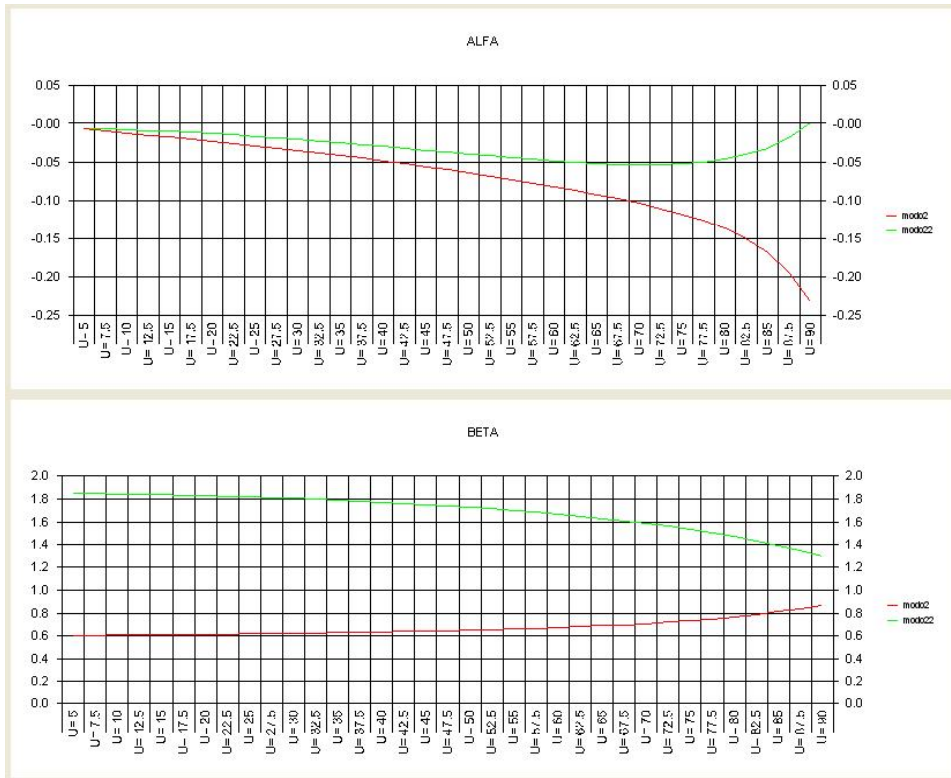


Figura 11. Evolución de la parte real α y de la parte imaginaria frente β a U para el puente del Great Belt considerando dos modos de vibración

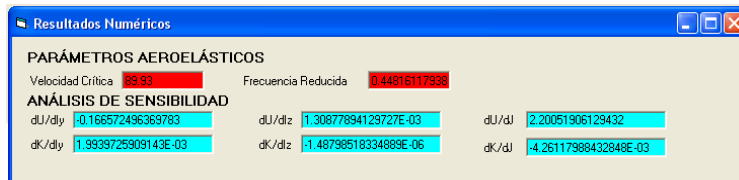


Figura 12. Puente sobre el Great Belt. Resultados numéricos de los parámetros aeroelásticos y de las sensibilidades empleando dos modos de vibración

Parámetro	NJH	Mosquera	Jurado
U_f (m/s)	89,93	89,93	89,91
K_f	0,44816	0,44816	0,4494
dU_f/dI_y	-0,16657	-0,171	-0,208340
dK_f/dI_y	0,001994	0,0021	0,0025370
dU_f/dI_z	0,00130878	0,00266	0,0050738
dK_f/dI_z	-1,49 E-6	-3,5 E-6	-1,86 E-6
dU_f/dJ	2,201	2,201	2,13544
dK_f/dJ	-0,00426	-0,00426	-0,0040078

Tabla V. Comparación de resultados entre el proceso distribuido y el secuencial y metodología analítica y semianalítica considerando dos modos de vibración

Puede comprobarse, cómo los resultados obtenidos empleando cualquiera de los tres métodos expuestos son muy similares. La aproximación entre resultados es particularmente buena en los casos en los que se emplea la misma metodología analítica.

Finalmente se presentan los resultados obtenidos considerando 18 modos de vibración para reproducir el comportamiento estructural del puente sobre el Great Belt. En la Figura 13 se muestra la evolución de los valores propios que permiten obtener la velocidad de flameo. Asimismo en la Figura 14 se presentan los resultados numéricos obtenidos empleando la metodología analítica y programación distribuida. En la Tabla VI, como ya se hizo para el cálculo empleando dos modos de vibración, se comparan los resultados obtenidos con los presentados por Mosquera⁴ y Jurado³.

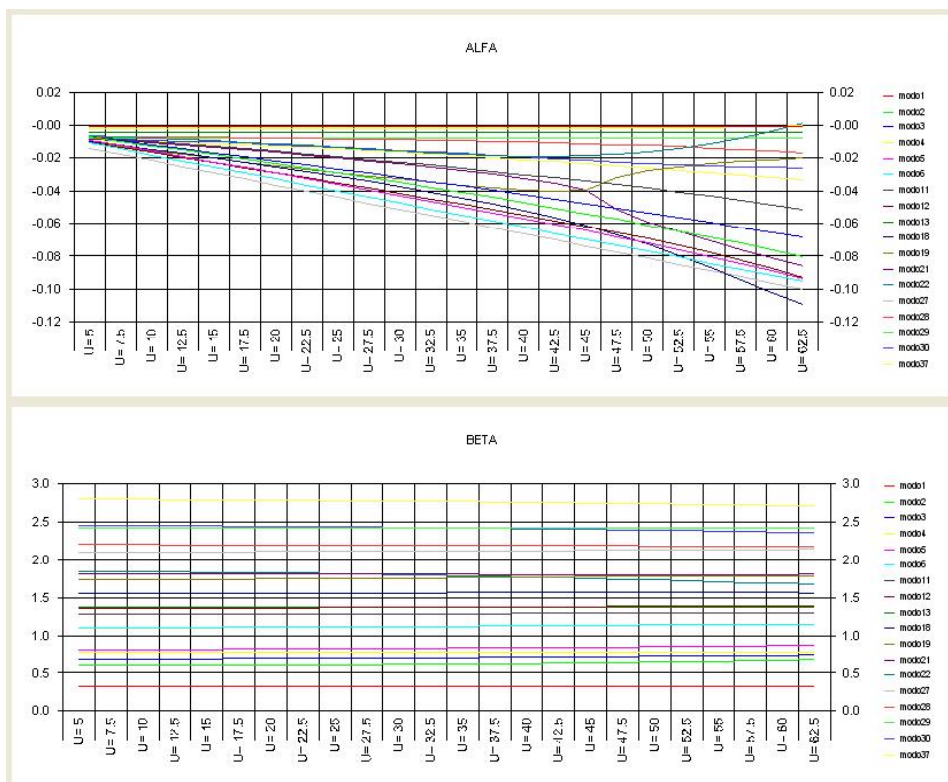


Figura 13. Evolución de la parte real α y de la parte imaginaria β frente a U para el puente del Great Belt utilizando 18 modos de vibración

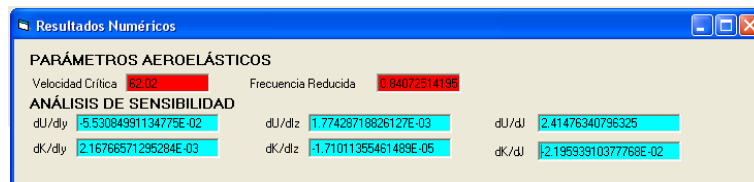


Figura 14. Puente sobre el Great Belt. Resultados numéricos de los parámetros aeroelásticos y de las sensibilidades empleando 18 modos de vibración

Parámetro	NJH	Mosquera	Jurado
U_f (m/s)	62,02	62,02	62,41
K_f	0,84073	0,84073	0,8371
dU_f/dI_y	-0,055	-0,055	-0,260296
dK_f/dI_y	0,00217	0,00215	0,00256136
dU_f/dI_z	0,00177	0,00238	0,00250909
dK_f/dI_z	-1,71 E-5	-2,3 E-5	-2,617 E-5
dU_f/dJ	2,4148	2,4148	1,94929
dK_f/dJ	-0,02196	-0,02196	-0,0146621

Tabla VI. Comparación de resultados entre el proceso distribuido y el secuencial y metodología analítica y semianalítica considerando 18 modos de vibración

Analizando la tabla puede comprobarse, cómo los resultados obtenidos empleando los tres procedimientos descritos son muy similares, sin que las diferencias sean significativas. Son particularmente semejantes los resultados de las dos primeras columnas, ya que se ha empleado en ambos casos el método analítico así como programación distribuida en el primer caso y secuencial en el segundo.

CONCLUSIONES

El proceso que permite el cálculo aeroelástico de un puente de gran vano y el análisis de sensibilidad de los parámetros aeroelásticos respecto a ciertas variables de diseño es complejo y muy costoso desde el punto de vista computacional, lo que hace que los tiempos de cálculo necesarios sean muy elevados. La realización de una aplicación informática que permita la distribución a una serie de ordenadores conectados en red de los procesos de cálculo necesarios para resolver el problema planteado hace que los tiempos de cálculo se reduzcan de manera substancial. Esta reducción de tiempos es directamente proporcional al número de máquinas a las que se distribuyan los procesos.

La reducción de tiempos de cálculo mencionada permite que se emplee un número elevado de modos de vibración para resolver el problema con lo que la precisión con que se modela el comportamiento de la estructura aumenta significativamente.

La programación distribuida es una técnica que tiene un enorme potencial y que posibilita la reducción de los tiempos de cálculo en procesos complejos susceptibles de ser compartimentados en problemas independientes, los cuales pueden ser resueltos por una serie de ordenadores conectados en red y que trabajan de manera autónoma.

Los resultados mostrados permiten comprobar, cómo la programación distribuida permite obtener soluciones prácticamente iguales a las obtenidas mediante programación secuencial logrando unas reducciones muy importantes en los tiempos de cálculo.

REFERENCIAS

- 1 J.A. Jurado y S. Hernández, "A Review of the theories of aerodynamic forces in bridges", *Journal of Bridge Engineering*, Vol. **5**, N° 1, pp. 8–13, (2000).
- 2 R.H. Scanlan y J.J. Tomko, "Airfoil and bridge deck flutter derivatives", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol. **97**, N° EM6, pp. 1717–1737, (1971).

- 3 J.A. Jurado, “Análisis aeroelástico y de sensibilidad del fenómeno de flameo en puentes soportados por cables”, Tesis doctoral de la Universidad de La Coruña, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, (2001).
- 4 A. Mosquera, “Sensibilidad analítica de la vibración libre y del flameo en puentes colgantes de gran vano en servicio y en fase constructiva”, Tesis doctoral de la Universidad de La Coruña, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, (2003).
- 5 S. Hernández, “Métodos de diseño óptimo de estructuras”, Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, (1990).
- 6 G.N. Vanderplaats, “Numerical optimization techniques for engineering design”, Vanderplaats Research & Development, Inc., (2001).
- 7 R.T. Haftka y Z. Gurdal, “Elements of structural optimization”, Kluwer Academic Publishers, (1992).
- 8 J.A. Jurado y S. Hernández, “Design of ultra long span bridges with aeroelastic constraints”, Optimization in Industry II. Banff, Alberta (Canadá), June, (1999).
- 9 J.A. Jurado y S. Hernández, “Sensitivity analysis of flutter speed of bridges”, *Structures Congress ASCE*, Philadelphia, USA, (2000).
- 10 A.S. Tanenbaum, “*Redes de Computadoras*”, Pearson Educación, (2003).
- 11 R.A. McMahon, Sr., “*Introducción a las redes*”, Anaya Multimedia, (2003).