

Transferencia de calor por conducción. Verificación del programa ED-Poiss

S.I. Robles

F. Zárate

Publicación CIMNE Nº 161, Febrero 1999



FUNDACIÓ POLITÈCNICA DE CATALUNYA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

MASTER EN METODOS NUMERICOS PARA EL CALCULO Y DISEÑO EN INGENIERIA

“TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONDUCCION VERIFICACION DEL PROGRAMA ED-POISS”

Tesis de Master
Presentada por:

Sandra I. Robles

Dirigida por:

Francisco Zárate

Barcelona,

9/12/1998

PRESENTACIÓN

La resolución de todo problema de ingeniería requiere un proceso de abstracción en sentido directo e inverso, consistente en la creación de un modelo basado en las leyes de la física y de la química adecuadas para el sistema y proceso considerados, la resolución de las ecuaciones que definan el mismo mediante herramientas matemáticas, y la interpretación del resultado para adaptarlo a la realidad.

La creación de modelos que describan con precisión un cierto fenómeno natural no es en general difícil, lo difícil es resolver las ecuaciones planteadas y obtener resultados cuantitativos.

En el estudio de la conducción de calor en el interior de un sólido, si pretendemos ajustarnos a la realidad considerando medios anisótropos, con propiedades en función de la temperatura, condiciones de contorno con coeficientes variables con la temperatura, radiación y alteraciones de simetría, prácticamente no podríamos resolver ningún caso en forma analítica.

En definitiva, las soluciones posibles utilizando los métodos analíticos que se podrían denominar exactos, son extraordinariamente escasas y se reducen a unos pocos casos que ya han sido resuelto por los pioneros de la transmisión del calor.

Actualmente con el desarrollo y creciente potencialidad de los ordenadores existen una serie de técnicas numéricas que permiten resolver este tipo de problemas, y una de ellas, que es en la que centraremos nuestro estudio, es el Método de los Elementos Finitos. Merece destacarse que por ser un método aproximado con el pueden obtenerse soluciones a problemas variados y complejos

La finalidad de este trabajo, es la validación de un programa de cálculo numérico de la ecuación de POISSON, usando para ello soluciones analíticas conocidas.

INDICE

Presentación

Objetivos y alcance de la Tesis.....	I
--------------------------------------	---

PARTE I:

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Capítulo 1 Fundamentos teóricos de la transferencia de calor por conducción

1-1 Introducción.....	1
1-2 Conceptos generales.....	2
1-2.2 Gradiente de temperatura.....	2
1-2.3 Flujo de calor- Ley de Fourier.....	3
1-2.4 Conductividad térmica.....	4
1-2.4.1 Conductividad térmica de sólidos.....	4
1-3 Ecuaciones que rigen este fenómeno.....	4
1-3.1 Simplificaciones de la Ecuación Diferencial de la conducción.....	8
1-4 Dominio y condiciones de contorno.....	9

Capítulo 2

El Método de los Elementos Finitos

2-1 Introducción.....	12
2-2 Ecuaciones básicas.....	12
2-3 Formulación básica.....	13
2-4 Discretización por Elementos Finitos.....	14
2-4.1 Aproximación de la temperatura.....	14
2-4.2 Aproximación del vector de gradientes	15
2-4.3 Aproximación del campo de flujos.....	15
2-5 Ecuaciones de la discretización.....	16
2-5.1 Caso Estacionario.....	16
2-5.2 Caso Transitorio.....	17

PARTE II:

PRESENTACIÓN DE LOS PROGRAMAS USADOS

Capítulo 3 Presentación de los programas usados

3-1 Introducción.....	19
3-2 Tipo de problemas que se pueden resolver.....	19
3-3 Tipo de materiales usados.....	20
3-4 Elementos finitos utilizables.....	20
3-5 Tipo de condiciones que admite.....	20
3-6 Límites del programa EDPOISS.....	20
3-6.1 Limitaciones de Caltep.....	21

Capítulo 4 Como resolver un problema con EDPOISS

4.1 EDPOISS preproceso.....	22
4-1.1 Creación / Edición de un Problema	22
4-1.2 Generación de un Problema – Entrada de Datos.....	23
4.2 EDPOISS proceso.....	28
4-2.1 Esquema de resolución de un problema.....	28
4-2.2 Ejemplo de aplicación del esquema de resolución de un problema	31
4.3 EDPOISS postproceso.....	36
4-3.1 Como se visualizan los resultados en EDPOISS postproceso.....	36
4-3.2 Ejemplo de aplicación.....	37

PARTE III:

EJEMPLOS DE APLICACION Y CONCLUSIONES

Capítulo 5 Resolución de problemas planteados

5-1 Problemas en Estado Estacionario.....	42
5-1.1 Problemas unidimensionales	42
5-1.2 Problemas Estacionarios Bidimensionales.....	47
5-2 Problemas en Estado Transitorio.....	64
5-2.1 Problemas Unidimensionales.....	64
5-2.2 Problemas Bidimensionales.....	67

Capítulo 6 Conclusiones

6-1 Comentarios generales.....	74
6-2 Conclusiones.....	75

OBJETIVOS Y ALCANCE DE LA TESIS

El curso de Master del cual esta Tesina es consecuencia, es mi primer contacto con los métodos numéricos y programación en ordenadores. Debido a esta situación, he abordado un tema que me permita incursionar en las distintas etapas del proceso de aplicación de este método, persiguiendo el aprendizaje de conceptos básicos de la técnica de los Elementos Finitos.

El trabajo que se presenta tiene como objetivo fundamental, la validación del programa EDPOISS, el cual es un programa educativo de Elementos Finitos, que resuelve la Ecuación de Poisson, que rige entre otros fenómenos la transmisión de calor por conducción. La validación del mismo se efectuará mediante la comparación de resultados obtenidos de la resolución de problemas con solución analítica conocida.

Además, se explicará de forma detallada como resolver un problema con esta herramienta y por otra parte se analizará y valorará diversos aspectos referentes a este programa.

Sandra Isabel Robles
Barcelona, Diciembre 1998

PARTE I

FUNDAMENTOS TEORICOS

ANEXO

Nomenclatura

ϕ	Temperatura [°C]
t	Tiempo [minutos]
ρ	Densidad [Kg/m ³]
C	Capacidad calorífica [Joule /m ³ °C]
$q_v=\rho r$	Densidad de calor por generación interna [Watt/m ³]
k	Conductividad térmica [W/m°C]
α	Coeficiente de convección - radiación [W/m ² °C]
λ	Difusividad térmica [m ² /s]
D	Matriz constitutiva formada por las conductividades térmicas
$\bar{q}$	Flujo de calor externo
Γ_ϕ	Contorno donde esta prescrita la temperatura
Γ_q	Contorno donde esta prescrito el flujo
Ω	Dominio total de la geometría considerada

BIBLIOGRAFIA

1. Carslaw U.S, Jaeger J.C, CONDUCTION OF HEAT IN SOLIDS, Ed Mac Millan, Segunda Edición ,1971.
2. Isachenco V.P, Osipova V.A, HEAT TRANSFER, Ed. MIR, Tercera edición, 1986.
3. Ojer Pinazo J.M TRANSFERENCIA DE CALOR, Ed SPUPV, 1988
4. Sigales Bartomeu, TRANSMISION DEL CALOR, Ed. C.P.D.A, 1983
5. Smith I,M, Griffithhs D.V PROGRAMMING THE FINITE ELEMENT METHOD, Ed John Willey & sons - 1997.
6. Welty, TRANSFERENCIA DE CALOR. Ed. John Willey & sons, 1987
7. Zarate F., Oñate E., CALTEP:Programa para el cálculo transitorio de la Ecuación de Poisson. Publicación CIMNE N° 27, Enero 1993.

Capítulo 1

Fundamentos Teóricos de la transferencia de calor por conducción

1-1 Introducción

La transferencia de calor es la ciencia de los procesos espontáneos irreversibles de propagación de calor en el espacio. Por proceso de propagación de calor se entiende como el cambio en energía interna entre elementos individuales, siendo estos regiones del medio considerado.

El calor puede transmitirse en tres formas distintas, por *conducción*, por *convección* y por *radiación*.

Conducción de calor: Se la identifica como el proceso de transporte molecular de calor en los cuerpos debido a variaciones de temperatura en el medio considerado. La conducción *pura* solo es posible en los sólidos

Convección de calor: Este fenómeno solo es posible en medios fluidos. Este término se aplica al transporte de calor que ocurre cuando volúmenes de un medio fluido se mueven desde regiones a una dada temperatura a otra de temperatura diferente. En este caso el transporte de calor está ligado con el movimiento del medio.

Radiación térmica: es el proceso de propagación de calor a través de ondas electromagnéticas dependiendo este proceso solo de la temperatura y las propiedades ópticas del emisor. El proceso involucra la conversión de la energía interna en energía de radiación.

Centraremos nuestro estudio en la *conducción del calor* ya que los programas de Elementos Finitos que se utilizaron para este trabajo (EDPOISS y CALTEP) realizan el cálculo de la transferencia de calor solo por este mecanismo y con propiedades constantes.

1-2 Conceptos generales

1-2.1 Campo de temperaturas

El fenómeno de conducción del calor es un proceso de propagación de energía calorífica que resulta del movimiento de las micropartículas de la sustancia considerada.

En los gases este fenómeno se efectúa en términos de difusión atómica o molecular, en líquidos y sólidos dieléctricos en función de ondas elásticas, en los metales se produce principalmente debido a la difusión de electrones libres y oscilaciones elásticas de la estructura cristalina que son de menor relevancia.

Cualquier fenómeno físico está generalmente acompañado de cambios en las propiedades físicas tanto en el espacio como en el tiempo. Los desarrollos analíticos de la conducción del calor apuntan a determinar las variaciones espacio - tiempo de la temperatura, es decir a obtener:

$$\phi = f(x, y, z, t) \quad (1-2.1)$$

La ecuación 1-2.1, es la expresión matemática para el campo de temperaturas, el mismo representa todo el conjunto de temperaturas en todos los puntos del espacio considerado en cualquier instante de tiempo.

Los campos de temperaturas son de dos clases: *estacionarios* y *transitorios*. La ecuación 1-2.1, describe el campo de temperaturas en el cual la misma varía en el tiempo y punto a punto en el espacio (transitorio)

Si el campo de temperatura es estacionario, la temperatura es función solo de las coordenadas espaciales y se representa:

$$\phi = f(x, y, z) \quad (1-2.2)$$

1-2.2 Gradiente de temperatura

Si todos los puntos de un cuerpo que tienen igual temperatura se unen, obtendremos una superficie de igual temperatura, conocida como *superficie isotérmica*, la que podríamos definir como el lugar de los puntos de igual temperatura en un campo de temperaturas

Debido a que un mismo punto de un cuerpo, no puede tener simultáneamente dos temperaturas diferentes las superficies isotérmicas no se interceptan. Las mismas terminan en la superficie del cuerpo o en su defecto están contenidas dentro de él.

La temperatura en un cuerpo varía únicamente en direcciones que atraviesan las superficies isotérmicas; la mayor diferencia de temperatura por unidad de longitud se observa en la dirección normal a la superficie isotérmica. Un incremento de temperatura en esta dirección se caracteriza por el gradiente de temperatura.

El gradiente de temperatura es un vector normal a la superficie isotérmica y positivo en la dirección de las temperaturas crecientes. Es numéricamente igual a la derivada de la temperatura en esa dirección, es decir:

$$\text{grad } \phi = n_0 \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (1-2.3)$$

Donde:

$\vec{n}_0$: Vector unitario normal a la superficie isotérmica y positivo en la dirección de temperaturas crecientes.

$\frac{\partial \phi}{\partial n}$: Derivada de la temperatura a lo largo de la normal

El valor del gradiente de temperatura, no es el mismo para diferentes puntos de la superficie isotérmica, y es mayor cuanto menor es la distancia entre las superficies. Aquí nos referiremos al valor del gradiente de la temperatura como la magnitud del mismo, el cual se considera negativo en la dirección de temperaturas decrecientes.

1-2.3 Flujo de calor- Ley de Fourier

La propagación del calor requiere que la distribución de temperaturas en el medio considerado sea no uniforme. Esto implica que la transferencia por conducción requiere que el gradiente de temperatura en varios puntos del cuerpo sea mayor que cero. De acuerdo con la ley de Fourier, la cantidad de calor dQ_t que pasa a través de un elemento de una superficie isotérmica dF por intervalo de tiempo dt es proporcional al gradiente de temperatura, esto es:

$$dQ_t = -K \frac{\partial \phi}{\partial n} dF dt \quad (1-2.4)$$

El factor de proporcionalidad K , en la ecuación (1-2.4), define la habilidad de la sustancia para conducir el calor, y se la denomina *conductividad térmica*.

La cantidad de calor transferida a través de la unidad de área de superficie isotérmica por unidad de tiempo se la denomina velocidad de flujo de calor y es un vector determinado por la relación:

$$\vec{q} = -n_0 K \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (1-2.5)$$

El vector velocidad de flujo de calor es normal a la superficie isotérmica, y es positivo en la dirección de temperaturas decrecientes, debido a que el calor siempre fluye desde las secciones más calientes del cuerpo a las más frías. Consecuentemente, los vectores $\vec{q}$ y $\text{grad } t$, están sobre la misma recta pero en direcciones opuestas, lo que explica el signo menos en la ecuación (1-2.4) y (1-2.5)

Las líneas cuyas tangentes están en la dirección del vector $\vec{q}$, se conocen como *líneas de flujo de calor*, y son ortogonales a las superficies isotérmicas

La validez de la ley de Fourier ha sido demostrada por numerosas experiencias. De aquí que las ecuaciones (1-2.4) y (1-2.5), se acepten como las expresiones matemáticas de la Ley de Conducción

1-2.4 Conductividad térmica

La conductividad térmica es un parámetro físico de una sustancia. En el caso general depende de la temperatura, presión y naturaleza de la sustancia. Generalmente su determinación se efectúa en forma experimental.

Para algunos materiales su dependencia con la temperatura puede asumirse de tipo lineal es decir:

$$K = K_0[1 + b(\phi - \phi_0)] \quad (1-2.6)$$

1-2.4.1 Conductividad térmica de sólidos

- a- *Metales y aleaciones*. Los principales agentes en la transferencia de calor en metales son los electrones libres. El movimiento de los electrones libres es el que produce el intercambio de energía entre las zonas calientes y frías. Debido a que en los metales los electrones son los portadores de calor y electricidad, la conductividad térmica de un metal es proporcional a su conductividad eléctrica.
- b- *Sólidos dieléctricos (no metales)*. La conductividad térmica en materiales dieléctricos usualmente aumenta con incrementos de la temperatura. Materiales con alta densidad volumétrica, como regla, poseen una alta conductividad térmica, esto último depende también de la estructura del material es decir, de su porosidad y contenido de humedad.

1-3 Ecuaciones que rigen este fenómeno

El objetivo del estudio de cualquier fenómeno físico es establecer las relaciones entre las propiedades o cantidades características del fenómeno considerado.

Para resolver el problema del campo de temperaturas necesitamos una ecuación diferencial de la conducción

Para simplificar su derivación haremos las siguientes simplificaciones:

(a) *Sólido homogéneo e isotrópico*

(b) *Parámetros físicos constantes*

(c) *La deformación del sólido considerado, causada por variaciones de temperatura, es muy pequeña en relación a su volumen total*

(d) *Las fuentes de calor internas [que en el caso general pueden ser del tipo $q_v=f(x,y,z,t)$] están uniformemente distribuidas en el sólido.*

La derivación de la ecuación diferencial de conducción está basada sobre la Ley de Conservación de la Energía, que para nuestro propósito se puede formular de la siguiente forma:

La cantidad de calor dQ , que ingresa a un elemento de volumen por conducción desde el exterior y de las fuentes de calor internas, durante el intervalo de tiempo dt es igual al cambio en energía interna o entalpía de la sustancia contenida en ese volumen

$$dQ_1 + dQ_2 = dQ \quad \text{Ec(1-3.1)}$$

Donde:

dQ_1 : Cantidad de calor que ingresa al volumen elemental en el intervalo de tiempo dt

dQ_2 : Cantidad de calor liberada dentro del elemento de volumen dv por las fuentes internas de energía, en el intervalo de tiempo dt .

dQ : Cambio en la energía interna o entalpía de la sustancia contenida en dv en el tiempo dt .

De forma de desarrollar cada uno de los términos de la ecuación (1-3.1), consideraremos un paralelepípedo elemental con lados dx , dy , dz , dibujado de forma tal que sus lados sean paralelos a los planos coordenados, tal como se muestra en la Figura 1-1

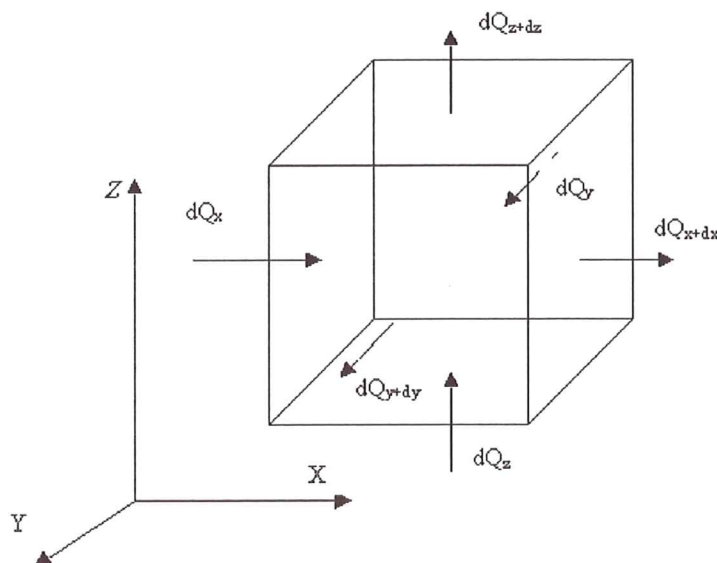


Figura 1-1

La cantidad de calor que ingresa por los lados del volumen elemental en el intervalo de tiempo dt , y en la dirección de los ejes ox , oy y oz , se denotan por dQ_x , dQ_y , dQ_z respectivamente.

La cantidad de calor que sale a través de los lados opuestos del paralelepípedo, y en la misma dirección se denotan por dQ_{x+dx} , dQ_{y+dy} y dQ_{z+dz} .

La cantidad de calor que ingresa por el lado $dydz$ en la dirección del eje ox en el tiempo dt se determina como:

$$dQ_{x+dx} = q_x dy dz dt$$

Donde q_x es la proyección de la velocidad de flujo de calor sobre la dirección perpendicular a ese lado. La cantidad de calor que sale a través de el lado opuesto en la dirección del eje ox se expresa como:

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dy dz dt$$

La diferencia entre las cantidades de calor que ingresa y egresa al paralelepípedo en el tiempo dt en la dirección del eje ox nos da una cantidad de calor:

$$dQ_{x1} = dQ_x - dQ_{x+dx}$$

o

$$dQ_{x1} = q_x dy dz dt - q_{x+dx} dy dz dt \quad (a)$$

La función q_{x+dx} es continua en el intervalo considerado dx , y puede expandirse en series de Taylor :

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2} + \dots$$

Para los dos primeros términos de la serie la ecuación (a), pueden escribirse en la forma:

$$dQ_{x1} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz dt \quad (b)$$

De manera similar, se realiza el desarrollo para los otros lados. Luego la cantidad de calor que ingresa por conducción al volumen considerado es igual a:

$$dQ_1 = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dx dy dz dt \quad (c)$$

Para determinar el segundo término de la ecuación (1-3.1), consideramos a q_v como el calor desarrollado por la fuente interna de calor por unidad de volumen del medio, por unidad de tiempo, luego podemos escribir:

$$dQ_2 = q_v dv dt \quad (d)$$

El tercer término de la ecuación(1-3.1), depende de la naturaleza termodinámica del proceso.

En el caso de un proceso isocórico (volumen constante) todo el calor transferido al elemento de volumen será utilizado en cambiar la energía interna de la sustancia confinada en este volumen, esto es: $dQ = dU$

Considerando la energía interna por unidad de volumen como $u = u(t, \phi)$ podemos definir:

$$dU = C_v \frac{\partial \phi}{\partial t} dt dv = c_v \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} dt dv \quad (e)$$

Donde:

C_v : capacidad calorífica a volumen constante por unidad de volumen, $J/m^3 K$

c_v : capacidad calorífica a volumen constante por unidad de masa, $J/Kg K$

ρ : densidad de la sustancia, Kg/m^3

Sustituyendo los resultados obtenidos en (c), (d) y (e) en la ecuación (1-3.1), tenemos

$$c_v \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_v \quad (1-3.2)$$

$$c_v \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{q} + q_v$$

la expresión de la ecuación (1-3.2), es la *Ecuación Diferencial de Energía para procesos de transferencia de calor a Volumen Constante*

En los sólidos la transferencia de calor obedece la ley de Fourier.:

$$\vec{q} = -K(\partial \phi / \partial \vec{x})$$

. Debemos recordar que las proyecciones del vector que representa la velocidad de flujo de calor sobre los ejes coordenados ox , oy , oz se determinan por las expresiones:

$$q_x = -k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad q_y = -k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad q_z = -k_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Sustituyendo en la ecuación (1-3.2),. las expresiones obtenidas para las proyecciones del vector flujo de calor, obtenemos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{c_p} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] + \frac{q_v}{c_p} \quad (1-3.3)$$

ó

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{c_p} \operatorname{div} (K \operatorname{grad} \phi) + \frac{q_v}{c_p} \quad (1-3.4)$$

La expresión (1-3.3), como la ecuación(1-3.4), se denominan ecuaciones diferenciales de la conducción. Establece la relación entre las variaciones de temperatura en el espacio y el tiempo.

La ecuación(1-3.4),. tiene la misma forma que aquella que representa el caso más general con propiedades variables, es decir $\lambda(x,y,z,t)$, $c(x,y,z,t)$ y $\rho(x,y,z,t)$, , para

nuestro desarrollo nos interesa el caso de propiedades térmicas y físicas constantes, en este caso la ecuación toma la forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{K}{cp} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{cp} \quad (1-3.5)$$

En la ecuación (1-3.5) podemos definir:

$$\frac{K}{cp} = \lambda$$

y

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \phi$$

donde:

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$$

es el operador laplaciano en coordenadas cartesianas

El factor de proporcionalidad λ , m^2/s , se denomina difusividad térmica, y representa una propiedad física de las sustancias. Es esencial para procesos transitorios de flujo de calor y define la velocidad de cambio en temperatura. En otras palabras la velocidad de cambio de la temperatura en cualquier punto del sólido es mas grande cuanto mayor es su difusividad térmica.

1-3.1 Simplificaciones de la Ecuación Diferencial de la conducción

- Si en el sistema no hay presente fuente de calor interna, es decir si $q_v=0$, la Ecuación (1-3.5), se reduce a:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{K}{cp} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)$$

o bien:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)$$

Esta expresión se la conoce como **Ecuación de FOURIER**

- Si consideramos la existencia de fuente de calor interna, pero el campo de temperaturas corresponde a una conducción estacionaria, esto es $T = T(x,y,z)$, la ecuación diferencial de conducción se la conoce con el nombre de **Ecuación de POISSON**

$$\frac{K}{c_p} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c_p} = 0 \quad (1-3.6)$$

- Finalmente, para el caso de estado estacionario sin fuentes de energía interna, la ecuación(1-3.) toma la forma de la **Ecuación de LAPLACE**:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (1-3.7)$$

1-4 Dominio y condiciones de contorno

Debido a que la ecuación diferencial de conducción está basada en leyes generales de la física, describe el fenómeno de conducción en el caso más general. Por lo tanto, se puede decir que esta ecuación diferencial describe toda clase de fenómenos de conducción. Para particularizar un proceso de los muchos posibles y darle una descripción matemática completa, es necesario disponer de una descripción matemática de todas las peculiaridades particulares del proceso considerado. Estas particularidades o características conjuntamente con la ecuación diferencial dan una descripción matemática completa del proceso de conducción de calor en consideración.

- (a) *Características geométricas*
- (b) *Condiciones físicas*
- (c) *Condición inicial de temperatura*
- (d) *Condiciones de contorno*

- (a) **Características geométricas**: están determinadas por la forma y tamaño del cuerpo
- (b) **Condiciones físicas** : están dadas por sus propiedades físicas, tales como K , ρ , c_v etc.
- (c) **Condiciones iniciales**, estas deben suministrarse en el caso del estudio de procesos transitorios; Establecen la ley de distribución de la temperatura en el cuerpo, en el momento inicial. En el caso general, puede describirse analíticamente como:

$$\text{En } t = 0 \quad \phi = f(x, y, z) \quad (1-4.1)$$

Si la distribución de temperaturas es uniforme la condición inicial se representa:

$$\text{En } t = 0 \quad \phi = \phi_0 = \text{Constante}$$

(d) **Condiciones de contorno:** estas pueden presentarse de distintos tipos:

(d.1) - Condiciones de contorno de primera clase – Condición de Dirichlet

En este caso se suministra la distribución de temperaturas sobre la superficie del cuerpo para cada instante de tiempo

$$\phi_s = f(x, y, z, t) \quad (1-4.2)$$

Donde:

T_s es la temperatura de la superficie

x, y, z : son las coordenadas del punto sobre la superficie.

La ecuación anterior se simplifica en el caso particular de que la temperatura en la superficie permanece constante a lo largo de todo el proceso de transferencia de calor y toma la siguiente forma:

$$\phi_s = \phi_0 = \text{constante}$$

(d.2) - Condiciones de contorno de segunda clase – Condición de Neumann

En este caso se da como dato el de flujo de calor, para cada punto de la superficie del cuerpo y para cada instante de tiempo, su expresión analítica es:

$$q_d = f(x, y, z, t) = K \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (1-4.3)$$

donde:

q_d : densidad de flujo de calor sobre la superficie del cuerpo

x, y, z : Coordenadas de la superficie del cuerpo

En el caso más simple, en que el flujo de calor permanece constante en el tiempo y sobre toda la superficie del cuerpo donde esta indicada esta condición:

$$q_d = q_0 = \text{constante} \quad (1-4.4)$$

Por último, se puede considerar la situación en que el flujo de calor a través de un contorno sea nulo, superficie adiabática:

$$q_d = K \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (1-4.5)$$

Cabe acotar en este punto que en transmisión de calor una simetría y una superficie aislada, (adiabática), son equivalentes desde el punto de vista matemático.

(d.3) - Condiciones de contorno de tercera clase

Aquí, se suministra como dato la temperatura del medio que rodea al cuerpo, T_f , y la ley de gobierno de la transferencia de calor entre la superficie del cuerpo y sus alrededores.

Este tipo de ley describe la transferencia de calor entre el cuerpo y sus alrededores durante el enfriamiento o calentamiento del cuerpo. Este proceso se describe a través de la ley de Newton.. De acuerdo con esta ley, la cantidad de calor que se extrae por unidad de superficie del cuerpo, en la unidad de tiempo, es proporcional a la diferencia entre la temperatura ϕ_s del sólido y la temperatura del medio ϕ_f :

$$q = \alpha(\phi_s - \phi_f) \quad (1-4.6)$$

Donde α es un factor de proporcionalidad, denominado coeficiente de transferencia de calor. Sus unidades son por ejemplo: $W/m^2.K$.

El coeficiente de transferencia de calor es la medida de la intensidad de calor transferido entre la superficie del cuerpo y su entorno, y es numéricamente igual a la cantidad de calor ganado o perdido por unidad de área, unidad de tiempo con una diferencia de temperatura de un grado entre la superficie y el entorno.

De acuerdo con la ley de conservación de la energía, la cantidad de calor que se extrae por unidad de área en la unidad de tiempo, Ecuación (1-3.1), es igual a la cantidad de calor que ingresa al cuerpo (Ecuación (1-2.5))

$$\alpha(\phi_s - \phi_f) = -K \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_s \quad (1-4.7)$$

Donde n es la normal a la superficie del cuerpo, y el subíndice s indica que la temperatura y el gradiente de temperaturas pertenecen a la superficie.

las condiciones de contorno de tercera clase pueden finalmente escribirse como:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_s = -\frac{\alpha}{K} (\phi_s - \phi_f) \quad (1-4.8)$$

(d.4) - Condiciones de contorno de cuarta clase

Definen el proceso de conducción de calor entre cuerpos simples o sistemas de cuerpos y su entorno. Se asume que los cuerpos están en perfecto contacto (las superficies en contacto están a la misma temperatura). Bajo estas condiciones los flujos de calor a través de las superficies de contacto son iguales, esto es:

$$K_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right)_w = K_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right)_w$$

Dado un problema descrito por la ecuación (1-3.5), el objetivo que se plantea es conocer en cualquier punto del dominio el campo escalar de temperaturas y el campo de flujos o gradientes.

Un análisis riguroso precisa de la integración de la ecuación diferencial (1-3.5) que expresa el fenómeno. El planteamiento matemático-analítico de dichas ecuaciones da lugar a la formulación continua del problema.

Otra forma de resolver el mismo problema es a través del MEF con el cual podemos conocer los campos anteriores en cualquier punto del dominio a partir de los valores hallados en ciertos puntos. Para ello es necesario dividir el dominio en subdominios (elementos finitos) formando una malla. El planteamiento de las ecuaciones que se obtienen y su resolución dan lugar a la formulación discreta del problema.

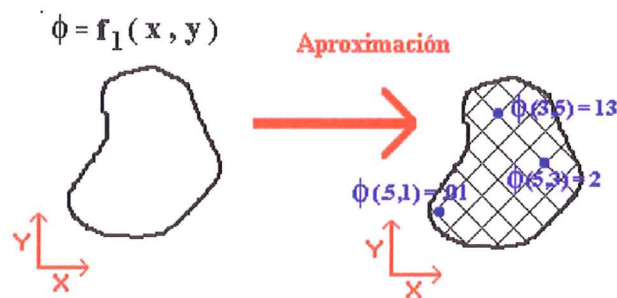
Capítulo 2

Formulación discreta El método de los elementos finitos

2-1 Introducción

El planteamiento del problema continuo del fenómeno de conducción del calor, conduce a unas ecuaciones, que como ya se mencionó en el capítulo anterior, no tienen solución analítica en la mayor parte de los casos. Así, se considera la posibilidad de encontrar los valores del campo de la temperatura, ϕ , únicamente en ciertos puntos y obtener una solución discreta del problema.

Es decir, se calcula la solución en temperaturas y flujos en ciertos puntos (nodos) y se extrapolan estos valores a cualquier otro punto del dominio. De esta manera es posible conocer el valor aproximado de los campos incógnita en todo el dominio.



2-2 Ecuaciones básicas

La modelización del fenómeno de conducción del calor, se describe utilizando la formulación diferencial conocida como la **Ecuación de Poisson**. La misma, para un dominio bidimensional puede expresarse en la forma:

$$\rho c \frac{\partial \phi}{\partial t} = D \nabla^2 \phi + \rho r \quad (2-2.1)$$

En donde ϕ representa la temperatura, t la variable tiempo, ρ la densidad del dominio, c el calor específico y ρr la densidad por fuente de calor interno; mientras que D corresponde a la matriz constitutiva, formada por las conductividades térmicas, K , para las distintas dimensiones en que se describe el dominio Ω ; de esta manera para un dominio bidimensional corresponde a:

$$D = \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix}$$

Las condiciones de contorno a que esta sujeta esta formulación, como se mencionó en el capítulo anterior, son conocidas en términos matemáticos como las condiciones de (a)

Dirichlet, que fija la temperatura ϕ , a un dado valor sobre un contorno particular y (b) Cauchy que fija el gradiente de la temperatura normal a la superficie.

$$(a) \quad \phi - \bar{\phi} = 0 \quad \text{en } \Gamma_{\phi} \quad (2-2.2)$$

$$(b) \quad n^T q + \alpha(\phi - \phi_{\text{ext}}) + \bar{q} = 0 \quad \text{en } \Gamma_q \quad (2-2.3)$$

En las ecuaciones anteriores $\bar{\phi}$ es la temperatura con valor conocido en la frontera, α representa al coeficiente de convección radiación, $\bar{q}$ es el flujo o gradiente de la temperatura, con valor conocido en la frontera, ϕ_{ext} es la temperatura en el exterior del dominio, mientras que el resto de las variables quedan definidas con las siguientes expresiones:

Vector de normales al contorno:

$$n = [n_x, n_y]^T$$

Vector gradiente de temperatura:

$$q_n = [q_x, q_y] = -Dg = -D\nabla\phi$$

En donde el gradiente corresponde a:

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right]^T$$

Dependiendo de los valores seleccionados para la ecuación 2-2.3, es posible reproducir los siguientes casos en el contorno:

- (a) *Contorno aislante*. Conocido matemáticamente como condición de Neuman o condición de contorno natural que representa un flujo de calor cero en la interface del dominio con el medio circundante, de manera que:

$$n^T q = -\bar{q} \quad \text{por lo que} \quad \bar{q} = 0 \quad \text{y} \quad \alpha = 0$$

- (b) *Contorno con pérdida o aporte de flujo externo*:

$$n^T q = -\bar{q} \quad \text{por lo que} \quad \alpha = 0$$

- (c) *Contorno con pérdida o aporte de calor por convección – radiación*. En este caso existe una interacción del calor existente en el exterior ϕ_{ext} y la temperatura del dominio ϕ que de acuerdo con las leyes de la termodinámica se presentará un flujo en la interfase, representado por:

$$n^T q = -\alpha(\phi - \phi_{\text{ext}}) \quad \text{con lo que} \quad \alpha \neq 0$$

El factor α estrictamente representa el fenómeno de convección, mientras que el fenómeno de radiación sigue una ley más compleja pero que a efectos de simplificación se puede expresar de igual manera, por lo que α representa la contribución de ambos.

2-3 Formulación básica

La aplicación del método de los elementos finitos exige como punto de partida la existencia de una forma integral expresando el equilibrio global del sistema. Dicha forma integral puede obtenerse aplicando el método de los residuos ponderados a la ecuación diferencial (2-2.1) y las condiciones de contorno (2-2.3) quedando expresado como:

$$\int_{\Omega} [\nabla^T D \nabla \phi + \rho r] d\Omega - \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma_q} [n^T D \nabla \phi + \alpha (\phi - \phi_{ext}) + \bar{q}] \partial \Gamma_q \quad (2-3.1)$$

La condición de contorno (2-2.2) no necesita incluirse en la expresión anterior puesto que se satisface imponiendo directamente el valor de ϕ al valor prescrito en los contornos adecuados (condición forzada).

Tras integrar por partes el término $\nabla^T D \nabla \phi$ y reagrupar la ecuación (2-3.1), se obtiene (después de hacer $W = -\phi$):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W^T \rho c \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla^T W^T D \nabla \phi d\Omega + \int_{\Gamma_q} W^T \alpha \phi \partial \Gamma_q = \\ \int_{\Omega} W^T Q d\Omega - \int_{\Gamma_q} W^T q \partial \Gamma_q + \int_{\Gamma_q} W^T \alpha \phi_{ext} \partial \Gamma_q - \int_{\Gamma_{\phi}} W^T q_n \partial \Gamma_{\phi} \end{aligned} \quad (2-3.2)$$

Obsérvese que la última integral incluye el flujo normal en los contornos Γ_{ϕ} donde ϕ está prescrita. En la práctica este flujo se calcula “a posteriori”, una vez obtenidas las temperaturas en los nodos.

Se desarrolla a continuación, con más detalle, los pasos a seguir para pasar de la ecuación 2-3.1 a la 2-3.2, en el caso bidimensional que es el de interés.

Aplicando el método de los residuos ponderados la ecuación 2-3.1 para dos dimensiones queda:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} W \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q \right] dx dy - \iint_{\Omega} W \left[\rho c \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] dx dy + \\ + \oint_{\Gamma_q} \bar{W} \left[k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y + \alpha (\phi - \phi_{ext}) + \bar{q} \right] \partial \Gamma_q = 0 \end{aligned} \quad (2-3.3)$$

La primera integral de la ecuación 2-3.3 debe ser integrada por partes. Así por ejemplo se sabe que:

$$\iint_{\Omega} W \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy = \int dy \int W \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx = - \iint_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial x} k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy + \int_{\Gamma=\Gamma_q+\Gamma_{\phi}} W k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} dy$$

Donde :

$$u = W \Rightarrow du = \frac{\partial W}{\partial x} dx$$

$$dv = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Rightarrow v = k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Considerando esto, podemos reemplazar la primera integral de la ecuación 2-3.3 por la siguiente expresión :

$$\iint_{\Omega} W \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q \right] dx dy = - \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial W}{\partial x} k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] dx dy + \iint_{\Omega} W Q dx dy + \int_{\Gamma_q + \Gamma_{\phi}} W \left[k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} dy + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} dx \right] \quad (2.3.4)$$

Adoptando $\bar{W} = -W$, tras sustituir lo obtenido en la ecuación 2-3.4, en la ecuación 2-3.3, ésta nos queda:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial W}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial W}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] dx dy + \iint_{\Omega} W \left[\rho c \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] dx dy + \int_{\Gamma_q} \alpha W \phi d\Gamma = \\ \iint_{\Omega} W Q dx dy - \oint_{\Gamma_q} W [q - \alpha \phi_{ext}] d\Gamma - \int_{\Gamma_{\phi}} W q d\Gamma \end{aligned} \quad (2-3.5)$$

La ecuación 2-3.5 es igual a la ecuación 2-3.2, desarrollada para dos dimensiones y sin estar expresada en forma compacta.

La resolución analítica de esta ecuación es imposible en la mayor parte de los casos, por ello es necesario efectuar una aproximación discreta del problema.

2-4 Discretización por elementos finitos

2-4.1 Aproximación de la temperatura

Los elementos finitos permiten calcular la temperatura en cualquier punto interior de los mismos, interpolando su valor a partir de los hallados en los nodos. Para ello se define la matriz de funciones de interpolación N (también llamadas funciones de forma) y se expresa la temperatura ϕ , de un punto cualquiera del interior del elemento en función de las temperaturas de sus nodos $a^{(e)}$

$$\phi(x, y) = N(x, y) a^{(e)} \quad (2-4.1)$$

En un problema de Poisson el valor del campo de un punto cualquiera está definido por una única componente escalar. Asimismo el vector de temperaturas o de valores del campo en todos los nodos de la malla está compuesto por una única componente en cada uno de esos nodos, genéricamente en el nodo i del elemento (e) :

Se define el vector de funciones de forma como:

$$N = [N_1, \dots, N_i, \dots, N_n] \quad N_i = [N_i(x, y)]$$

Con las propiedades siguientes de las funciones de forma :

$$\begin{aligned}
 N_i(x_j, y_j) &= 1 & \text{si } i = j \\
 N_i(x_j, y_j) &= 0 & \text{si } i \neq j \\
 \sum N_i(x, y) &= 1
 \end{aligned}$$

Adviértase que N y $a^{(e)}$ están compuestas por tantos coeficientes como nodos tiene el elemento. Esta es una propiedad general que se cumple en todos los casos.

2-4.2 Aproximación del vector de gradientes

La expresión discretizada del vector de gradientes se obtiene como aplicación directa de la interpolación utilizada para el campo de temperaturas. En notación compacta se escribe:

$$g = \nabla \phi = \nabla N a^{(e)} = B a^{(e)} \quad (2-4.2)$$

donde: $B = \nabla N$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_i & N_n \\ N_1 & N_i & N_n \end{bmatrix}$$

B es la matriz gradiente de deformación del elemento y B_i es la submatriz asociada al nodo i .

$$B = [B_1 \quad B_i \quad B_n]$$

En general las funciones de forma vendrán expresadas en coordenadas naturales y no cartesianas utilizando elementos isoparamétricos. Aplicando la regla de la cadena.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\
 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}
 \end{aligned}$$

De donde se deduce:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J^{(e)}]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

donde aparece la matriz inversa del Jacobiano que contiene información sobre la transformación de entre coordenadas naturales y cartesianas.

La expresión anterior permite calcular todos los coeficientes de las matrices B_i .

2-4.3 Aproximación del campo de flujos

A partir de la ecuación siguiente

$$\mathbf{q} = -D\nabla\phi$$

es fácil deducir la expresión discretizada del campo de flujos.

$$\mathbf{q} = -D\mathbf{B}\mathbf{a}^{(e)} \quad (2-4.3)$$

Donde D es la matriz constitutiva que contiene los coeficientes de conductividad térmica.

2-5 Ecuaciones de la discretización

Sustituyendo la discretización 2-4.1, 2-4.2 en 2-3.2 y haciendo $\mathbf{W} = \mathbf{N}$ (método de Galerkin) se obtiene un sistema matricial de ecuaciones que puede escribirse en la forma:

$$\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (2-5.1)$$

En 2-5.1, $\mathbf{a}$, es el vector de incógnitas que contiene la temperatura de todos los nodos de la malla, y $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{f}$ son la matriz de capacidad térmica o matriz de masa, matriz de rigidez global del dominio, y el vector de flujos nodales equivalentes que pueden obtenerse ensamblando las contribuciones elementales definidas por:

$$\mathbf{C}^{(e)} = \int_{\Omega} \rho c \mathbf{N}^T \mathbf{N} \frac{\partial \phi}{\partial t} \partial \Omega^{(e)}$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T D \mathbf{B} \partial \Omega^{(e)} + \alpha \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \partial \Gamma_q^{(e)}$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho r \partial \Omega - \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}^T q \partial \Gamma_q + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}^T \alpha \phi_{\text{ext}} \partial \Gamma_q^{(e)} - \int_{\Gamma_{\phi}} \mathbf{n}^T \mathbf{N}^T q_n \partial \Gamma_{\phi}^{(e)}$$

El cálculo de las integrales anteriores se suele realizar con técnicas numéricas de integración o bien explícitamente cuando sea factible.

Las matrices y vectores elementales se ensamblan en las correspondientes expresiones globales en la forma usual.

2-5.1 Caso Estacionario

La solución estacionaria implica únicamente resolver el sistema de ecuaciones:

$$K a = f \quad (2 - 5.2)$$

Obtenidas las temperaturas nodales pueden obtenerse los gradientes térmicos y los flujos de calor en cada punto mediante las ecuaciones 2-4.2 y 2-4.3, respectivamente. Asimismo, pueden obtenerse los flujos de calor a través de los contornos con temperaturas prescriptas.

2-5.2 Caso transitorio

La solución del problema transitorio exige integrar en el tiempo la ecuación de Poisson 2-5.1. Utilizando un esquema de diferencias finitas trapezoidal generalizado se obtiene:

$$\left[\frac{M}{\Delta t} + \alpha K \right] a^t = \alpha f^t + (1 - \alpha) f^{t-1} + \left[\frac{M}{\Delta t} - (1 - \alpha) K \right] a^{t-1} \quad (2-5.3)$$

donde α define el punto de colocación de la ecuación diferencial, es decir:

$$a^\alpha = \alpha a^t + (1 - \alpha) a^{t-1}$$

La ecuación anterior permite obtener el valor de las temperaturas en el tiempo t en función de las temperaturas en el instante $t-1$ y de los valores de las “fuerzas” en t y $t-1$.

Puede demostrarse que el esquema es incondicionalmente estable para $\alpha \geq \frac{1}{2}$

En la práctica se recomienda tomar $\alpha = 2/3$ (Galerkin) ó $\alpha = 1$ (integración hacia atrás). La integración de $\alpha = 0$ (método explícito de Euler) es ventajosa si la matriz C es diagonal, puesto que en este caso la solución es explícita y no precisa la inversión de ninguna matriz. La única dificultad en este caso se debe a que el sistema de integración es condicionalmente estable y exige la utilización de incrementos de tiempos pequeños que vienen gobernados por la condición :

$$\Delta t = \frac{L}{\omega}$$

siendo ω el mayor valor propio del sistema homogéneo.

$$[K + C\omega\Delta t] a = 0$$

Existen dos posibilidades para diagonalizar la matriz C :

Diagonalización por suma de filas

Se expresa por:

$$C_{Di i} = \sum C_{ij} \quad (2-5.4)$$

$$C_{Dij} = 0$$

en dónde la diagonal de la matriz de capacidad calorífica es la suma de todos los elementos contenidos en la fila i-ésima.

Diagonalización por conservación de capacidad calorífica

Se expresa por:

$$C_{Dii} = p \int_{\Omega} N_i^T \rho c N_i d\Omega \quad (2-5.5)$$

$$C_{Dij} = 0$$

con:

$$\sum C_{ii} = \int_{\Omega} \rho c d\Omega = p$$

de manera que la nueva matriz C conserve la misma capacidad calorífica que la matriz original.

NOTA: podemos decir que el planteamiento discreto comporta:

- Dividir el dominio en una malla de elementos finitos (se divide el dominio en elementos hasta cubrir la totalidad de la superficie).
- Aplicar la ecuación de Poisson sobre el dominio y aprovechar las propiedades matemáticas que conllevan los elementos finitos para obtener finalmente un sistema de ecuaciones algebraicas.
- Resolver el sistema y obtener el resultado del campo incógnita (temperatura ya que todos los demás derivan de él).

Este es el proceso estándar de resolución de un problema. El programa ED-Poiss de resolución de la ecuación de Poisson, lo realiza según las etapas que se enumeran a continuación y que se presentarán en detalle en el capítulo 4.

- 1- Cálculo de la rigidez del dominio
- 2- Cálculo del vector de temperaturas nodales equivalentes
- 3- Imposición de las condiciones de contorno
- 4- Resolución del sistema lineal de ecuaciones
- 5- Cálculo de flujos
- 6- Cálculo de flujos reacción

En la Figura 2-1, se muestra el esquema del **Diagrama de flujo de Cálculo** sobre el que está basado EDPOISS.

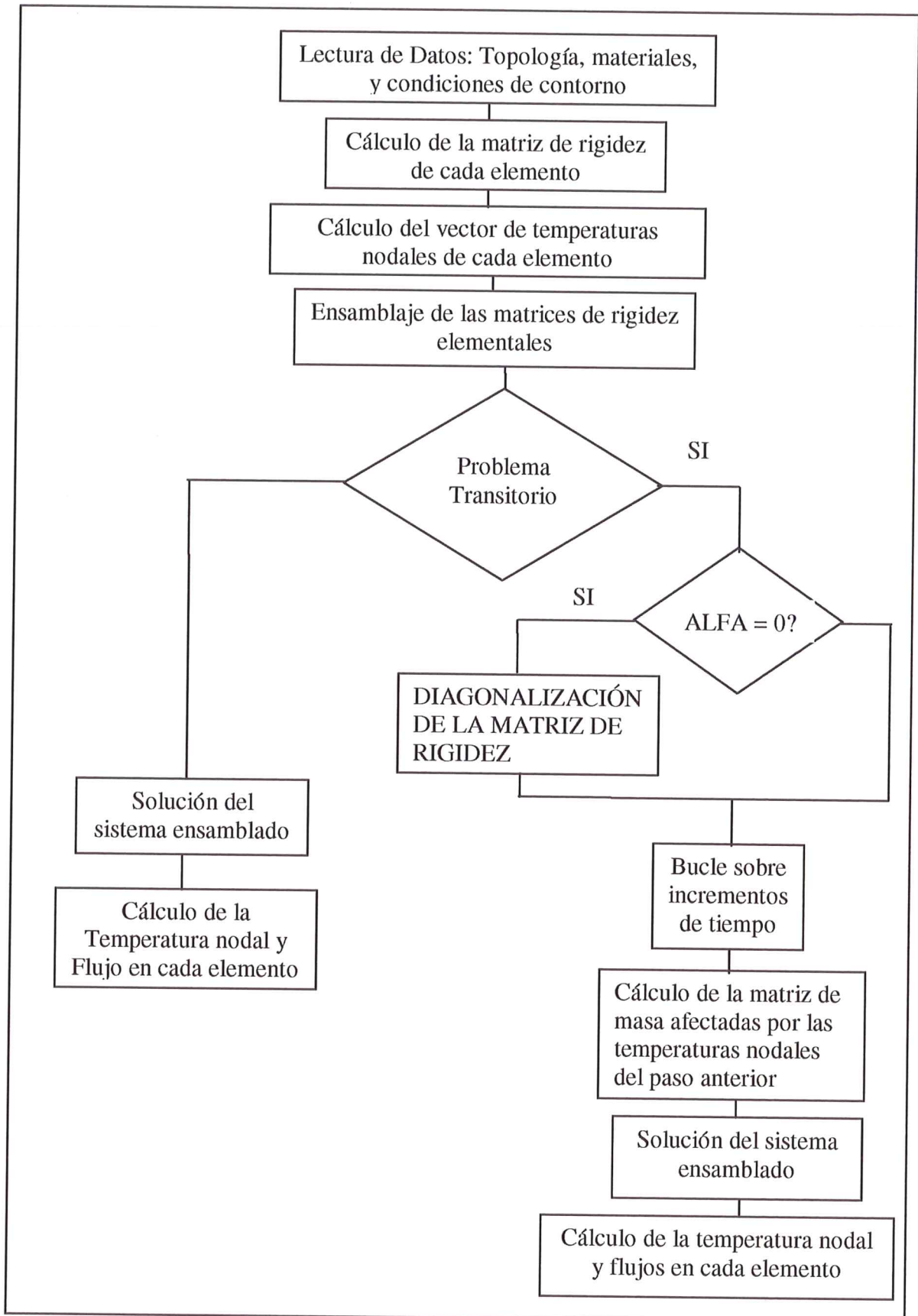


Figura 2-1 Esquema del diagrama de flujo de cálculo

Capítulo 3

Presentación de los programas usados

3-1 Introducción

Los programas usados para el desarrollo de este trabajo fueron:

- EDPOISS
- CALTEP

CALTEP es un programa para el cálculo de la ecuación de POISSON transitoria y estacionaria . Este módulo solo es el de proceso (cálculo), razón por la cual para efectuar el análisis de un problema hay que utilizar un preprocesador (generación y dibujo de la malla) , en este caso CALGEN, y un post procesador gráfico, GID, para la visualización en forma gráfica de los resultados. El programa caltep esta escrito en Fortran . La extencion del archivo de resultados es .RES, el archivo de entrada .DAT

No se darán detalles de Calgen (generador de malla) y de CALTEP solo los necesarios, ya que en sus manuales correspondientes se puede encontrar toda la información necesaria respecto del uso y definiciones de los mismos. En este trabajo simplemente se ha utilizado Caltep en aquellos ejemplos que no se pudieron resolver con EDPOISS.

EDPOISS es un paquete de programas que contiene los tres módulos, el preproceso, el proceso, y el post proceso. Sus archivos de resultados se pueden visualizar también con GID, que es un poco más potente ya que incluye algunas herramientas de representación de resultados adicionales. Los archivos que genera el preprocesador son extensión .GEN, los del proceso son .DAT y los del post proceso son.....

Se mencionan las extensiones de los archivos pues uno puede ingresar en ellos para disponer de la información que contienen.

3-2 Tipo de problemas que se pueden resolver

Tanto mediante el uso de EDPOISS como de CALTEP se pueden resolver el mismo tipo de problemas, los cuales se mencionan a continuación:

- (a) Estacionario
- (b) Transitorio sin diagonalización
- (c) Transitorio con diagonalización por suma de filas

(d) Transitorio con diagonalización por masa equivalente

Con las distintas condiciones de contorno que fueron mencionadas en el capítulo 2, ecuaciones 2-2.2 a 2-2.7

Con ambos programas, además de problemas bidimensionales, se pueden resolver problemas unidimensionales, utilizando un valor pequeño (material aislante) para el coeficiente de conductividad térmica, k , en una de las dimensiones.

3-3 Tipo de materiales usados

Los materiales usados en estos programas son de conductividad térmica constante e isotropos, esto es, aquellos cuyas propiedades son las mismas en todas las direcciones.

3-4 Elementos finitos utilizables

Para el análisis de cada tipología de problema pueden utilizarse los elementos isoparamétricos (permiten operar con formas de elementos irregulares, incluyendo la posibilidad de lados curvos) siguientes:

- Elemento lineal de 2 nodos (CALTEP)
- Elemento triangular de 3 nodos
- Elemento triangular de 6 nodos
- Elemento cuadrilátero lagrangiano de 4 y 9 nodos
- Elemento cuadrilátero serendípito de 8 nodos
- Elemento hexagonal serendípito de 20 nodos tridimensional (CALTEP)

3-5 Tipo de condiciones que admite

Para cada problema se admiten únicamente los siguientes tipos de condiciones:

- Temperaturas puntuales nodales
- Generación interna de calor
- Flujo exterior repartido sobre los lados de los elementos
- Condición de convección radiación
- Temperatura del medio externo constante
- Temperatura puntual inicial (Transitorio)

3-6 Limitaciones del programa EDPOISS

- En el caso del programa EDPOISS cuando se intenta resolver un problema con condiciones de contorno de Cauchy (ecuación 2-2.3 y 2-2.7) en todo el contorno de la geometría, el programa no lo calcula, Esto se debe a que la *primera operación* que realiza éste, es la *verificación de los datos de entrada* ya que dispone de una subrutina de control de datos, la cual una vez leídos los datos geométricos y del

material de la malla realiza una serie de comprobaciones básicas que garanticen mínimamente la ausencia de errores antes de comenzar el cálculo de las matrices y vectores de cada elemento y, al no encontrar una temperatura prescrita en algún punto del contorno, directamente no realiza el cálculo. Esto es un FALLO o limitación de este programa, ya que cuando hay contornos con convección/radiación no es necesario prescribir una temperatura, debido a que la matriz de rigidez en este caso no será singular ya que esta condición contribuye con un término adicional sobre ella evitando la singularidad de la misma. Con CALTEP este fallo que acabamos de mencionar no ocurre, es decir este tipo de problemas se pueden resolver con este programa.

- Otra limitación que presenta es cuando uno intenta ejecutar el post-proceso con determinados ejemplos de conducción de calor en Estado Transitorio, en este caso no nos permite el acceso directo del post-procesador al archivo de resultados de ese ejemplo. Este inconveniente se produce a consecuencia de que falla el mecanismo de transpaso de información entre el buffer de almacenamiento de resultados, generados en el proceso, y el archivo de escritura correspondiente (fenómeno denominado flush), que es desde donde lee el post-procesador los datos, bajo estas circunstancias, un debe salir del postproceso y volver a ingresar al archivo de resultados para poder así visualizarlo.

El programa Edpoiss permite trabajar con mayor número de nodos y elementos que CALTEP. Como referencia, se citan a continuación las limitaciones más importantes de CALTEP.

3-6.1 Limitaciones de CALTEP

Los valores límites que admite el programa CALTEP, para la resolución de problemas, son los siguientes:

- Máximo número de nodos : 200
- Máximo número de elementos :200
- Máximo número de dimensiones: 3
- Máximo número de materiales :10
- Máximo número de grados de libertad: 3
- Máximo número de nodos prescritos: 200
- Máximo numero de nodos por elemento: 27
- Máximo número de prescripciones nodales : 200
- Máximo número total de temperaturas nodales : 600

Capítulo 4

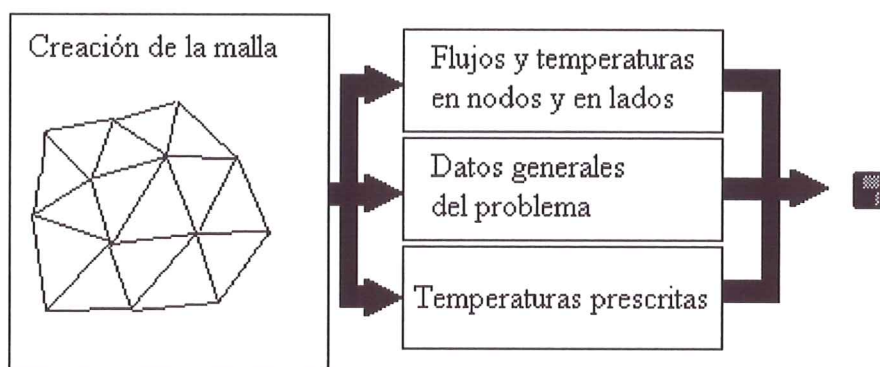
Resolución de problemas con EDPOISS

4-1 EDPOISS Preproceso

4-1.1 Creación / Edición de un Problema

Para analizar un problema de resolución de la ecuación de Poisson utilizando el método de los elementos finitos se requiere una fase previa de generación de datos. Este programa se ocupa de dicha fase de preparación de datos que se conoce con el nombre de preproceso. Por preproceso se entiende la preparación y definición de la malla (geometría), la imposición de las temperaturas prescritas, y la aplicación de los diferentes flujos actuantes.

Esquema de creación de un problema



Veamos como se implementa este esquema.

Implementación del esquema

La implementación de dicho esquema en ED-Poiss-preproceso es la siguiente:

a- Selección del tipo de análisis: En primer lugar se debe seleccionar el tipo de problema que se desea resolver. Los tipos de análisis presentes en esta primera versión son:

- a.1 Estacionario
- a.2 Transitorio sin diagonalización
- a.3 Transitorio con diagonalización por suma de filas.
- a.4 Transitorio con diagonalización por masa equivalente.

b - Selección del material y elemento: El usuario debe indicar el tipo de material y el tipo de elemento con el que se realizará el cálculo. El programa dispone de una librería de materiales en la que se pueden editar los valores de los parámetros y seleccionar el tipo de material deseado.

c- Definición de la geometría y de la malla Se deben crear uno a uno los elementos que componen la malla. Para ello se selecciona el modo de edición de creación de elemento. Para cambiar un nodo de su posición original se utiliza el modo de edición de nodo con el que se puede editar la posición del nodo dentro de la malla.

d- Imposición de temperaturas en los nodos Simplemente seleccionando el tipo de prescripción que se desea imponer en los nodos. La prescripción puede ser:

- d.1 Temperatura prescrita: Prescribe la temperatura en un nodo.
- d.2 Temperatura inicial: prescribe una temperatura inicial para el proceso de análisis transitorio.
- d.3 Convección / Radiación: Impone la existencia de convección /Radiación en un lado del elemento perteneciente al contorno.

e- Flujos puntuales y externos y generación interna de calor:

- e.1 Generación interna de calor: Es una de las opciones globales del problema.
- e.2 Flujos puntuales nodales: flujos aplicados en los nodos.
- e.3 Cargas distribuidas en un lado : Flujo y temperatura externa actuantes sobre un lado del elemento.

Y por último, una vez generados todos estos datos, se salvan en un archivo en el formato deseado y se procede a su análisis mediante el programa ED-Poiss.

4-1.2 Generación de un Problema – Entrada de Datos

a - Selección del tipo de análisis

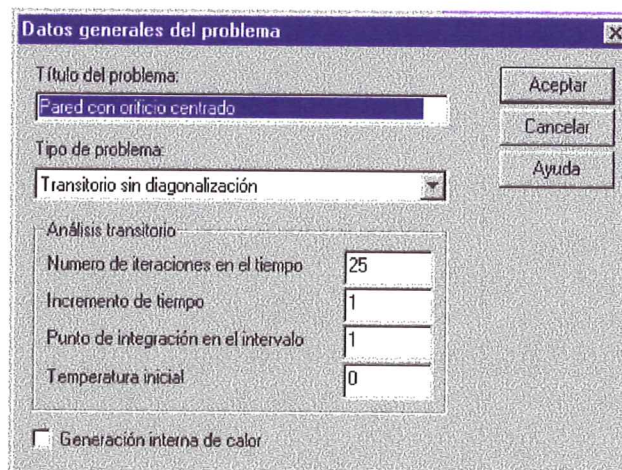


Figura 4-1.1

La primera operación que se realiza es la selección del tipo de análisis que se efectuará, para ello del menú EDICION, opción PROBLEMA se despliega la caja de diálogo que se muestra en la Figura 4-1.1, sobre la cual uno define lo siguiente:

Título del problema

Cadena de caracteres identificativos del problema. A nivel informativo únicamente.

Tipo de problema

- Estacionario- Caso estacionario (Ecuación 1-3.6 y 2-5.2)
- Transitorio sin diagonalización (Ecuación 2-5.3) – Caso transitorio si $\alpha = 0$ (coeficiente de convección / radiación) no diagonaliza
- Transitorio con diagonalización por suma de filas(Ecuación 2-5.3 y 2-5.4) - Caso transitorio si $\alpha = 0$ diagonalización por suma de filas.
- Transitorio con diagonalización por masa equivalente (Ecuación 2-5.3 y 2-5.5)- Caso transitorio si $\alpha = 0$ diagonalización por conservación de masa.

Análisis transitorio

En el caso de que se seleccione alguno de los tipos de análisis transitorios mencionados anteriormente se deben introducir los siguientes parámetros:

Número de iteraciones en el tiempo: un número entero que indique el número de iteraciones que se realizarán.

Incremento de tiempo: Incremento de tiempo en cada iteración

Punto de colocación de la ecuación diferencial α , (Cap.2-5.2): Esquema de integración temporal.

Temperatura inicial: Temperatura inicial generalizada. Introduzca un valor cuando desee que todos los nodos tengan la misma temperatura inicial. Esta opción solo estará activa si no se han definido diferentes temperaturas iniciales para cada nodo.

Generación interna de calor

Seleccione si se considera o no la generación interna de calor

b - Selección del material y elemento

La opción Elemento del menú de Biblioteca ofrece la posibilidad de seleccionar el tipo de elemento utilizado para realizar el análisis.

ED-Poiss-preproceso muestra la caja de diálogo Selección del tipo de elemento donde se puede realizar la elección. Los tipos de elementos que se pueden usar ya fueron definidos en el Capítulo 3 sección 3-3.

Material (menú Biblioteca)

La opción Material del menú de Biblioteca ofrece la posibilidad de seleccionar el tipo de material utilizado para realizar el análisis.

ED-Poiss-preproceso muestra la caja de diálogo Biblioteca de materiales donde se puede realizar la selección, creación, edición o borrado de materiales.

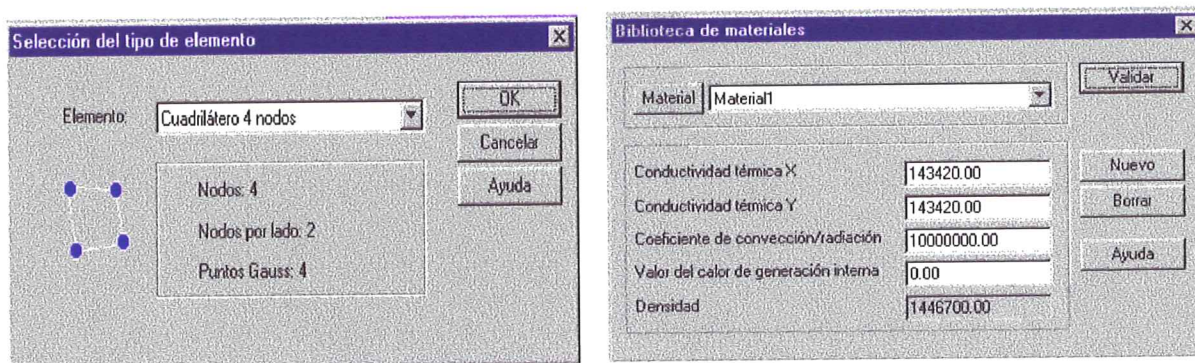


Figura 4-1.2

En la Figura 4-1.2 podemos observar la selección del tipo de elemento a utilizar y las propiedades que debemos suministrar para que el material quede bien definido.(ver ecuación 1-3.3)

- . Conductividad térmica en la dirección x, K_x
- . Conductividad térmica en la dirección y, K_y
- . Coeficiente de convección radiación. α
- . Valor del calor de generación interna $pr = q_v$
- . Densidad. Aquí lo que se menciona como densidad en realidad es el producto de la **densidad por la capacidad calorífica** ($\rho \cdot C$)

Unidades: si bien el programa no trabaja en un sistema de unidades concreto, es importante, por tanto introducir los datos en un sistema de unidades coherente. A continuación se muestra un ejemplo.

Propiedad	Unidades
k: (k_x , k_y)	W/m°C
α	W/m ² °C
q_v	W/m ³
$\rho \cdot C$	Joule/m ³ °C

Una vez definido el tipo de análisis a realizar, propiedades de los materiales y el elemento, se debe proceder a dibujar la geometría del problema y la malla deseada. Para ello en primer lugar se debe definir la escala gráfica de representación que aparecerá en la pantalla activando la opción **Dibujo** del menú **Opciones**. En el cuadro de diálogo que aparece, Figura 4-1.3, se fijan los valores mínimos y máximos de las coordenadas x y, así como los aspectos activados/desactivados que se deseen obtener en la pantalla

(Tamaño de la red auxiliar, numeración de nodos y elementos, representación de los flujos de calor, etc)

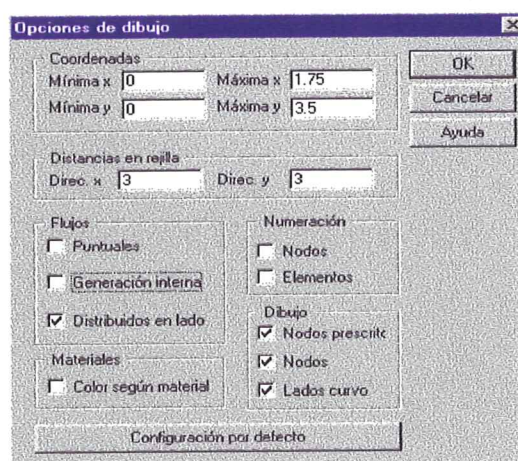


Figura 4-1.3

Fijados todos los parámetros anteriores ya se puede comenzar a dibujar la malla necesaria para el estudio que pretendemos realizar, en nuestro caso una pared con un orificio ubicado en el centro de la misma, Figura 4-1.4. En este ejemplo se utiliza un solo material, pero en caso de utilizar más de uno, se dibuja primero aquella zona que corresponde a un material y luego la que corresponde a otro y así sucesivamente. Para facilitar el trazado de la malla se puede activar la rejilla, el origen de los ejes coordenados y/o utilizar las líneas auxiliares mediante los botones correspondientes. Todas estas herramientas auxiliares son de mucha ayuda para dibujar la geometría del problema de interés.

Rejilla y líneas auxiliares: Ingresando al **menú ver**, opción **rejilla** se muestra u oculta la rejilla que previamente se halla definido, respecto de las líneas auxiliares se debe ingresar al **menú ver**, opción **barra de herramientas** y de esta forma se muestra u oculta la barra de herramientas. Por defecto en el programa tanto la rejilla como las líneas auxiliares están definidas en color blanco que es el mismo color de definición del fondo de la ventana, debido a esto si uno no lo cambia puede llegar a la conclusión errónea de que no funcionan. Para cambiar los colores de las mismas basta con desplegar del **menú opciones** la selección **colores** y modificar allí ya sea el color del fondo de ventana o bien el color de las líneas auxiliares, rejilla etc.

Los elementos se definen mediante el ratón activando la opción **Elemento** del **menú de Herramientas** o bien directamente presionando sobre el botón correspondiente. Para definir las coordenadas de cada nodo con el botón derecho del ratón aparece un cuadro de diálogo que solicita el ingreso de las coordenadas de ese nodo, o bien si uno aprieta el botón izquierdo, directamente selecciona las coordenadas del punto donde esta ubicado en ese instante.

Si se desea corregir la posición de alguno de los nodos dibujados se activa la opción **Nodos** del **menú Herramientas** o bien directamente presionando sobre el botón correspondiente. En el cuadro de diálogo que aparece se pueden introducir los nuevos valores de las coordenadas del nodo en cuestión.

Importante: Cuando se borra algún elemento para reemplazarlo por otro, una vez finalizadas todas las correcciones sobre la malla, se debe reenumerar la estructura sino al querer salir del preproceso nos indicara un error. Para reenumerar se debe desplegar el menú **Herramientas** opción **Renumerar**

Finalizada la malla, con los elementos reenumerados, el proceso de entrada de datos se completa, introduciendo seguidamente las condiciones de contorno. En la Figura 4-1.4, se muestra el ejemplo seleccionado con sus condiciones de contorno sobre el lateral superior, temperatura prescrita, sobre el lateral derecho condición de convección - radiación.

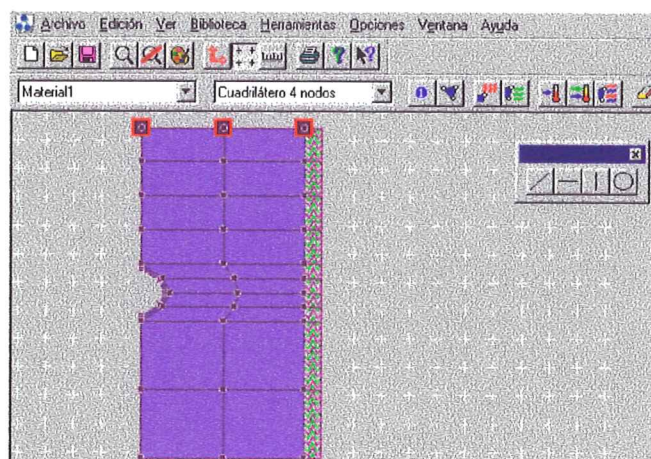


Figura 4-1.4

Las condiciones de contorno se pueden aplicar usando los botones de la barra de herramientas, a continuación se presentan los mismos:

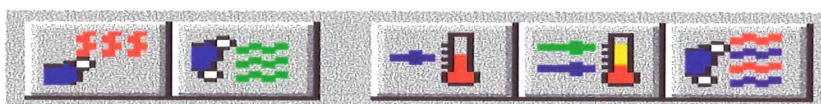


Figura 4-1.5

El primer botón a la izquierda de la Figura 4-1.5, se utiliza para definir la condición de flujo puntual sobre los nodos. (Ecuación 2-2.3)

El segundo botón se utiliza para introducir flujo de calor sobre los contornos, es decir para imponer condiciones de contorno del tipo 2-2.3: Contorno aislante, Pérdida o aporte de flujo externo, convección/radiación (En este último caso es para ingresar el flujo y la temperatura del medio con el cual intercambia calor).

El tercero define la condición de temperatura prescrita, al activarlo en la caja de dialogo solicita el valor de temperatura. (Ecuación 2-2.2)

El cuarto sirve para definir la temperatura inicial en un problema transitorio (Ecuación 1-4.1), se utiliza cuando tengo distintas temperaturas iniciales en los nodos de la geometría. Si la temperatura inicial es uniforme, directamente defino su valor en la caja de diálogo del menú **Edición – Problema**.

El quinto sirve para definir cuales son los contornos con condición de convección radiación.

Los datos creados pueden guardarse presionando el botón correspondiente y dando un nombre al archivo, en este caso TT.GEN.

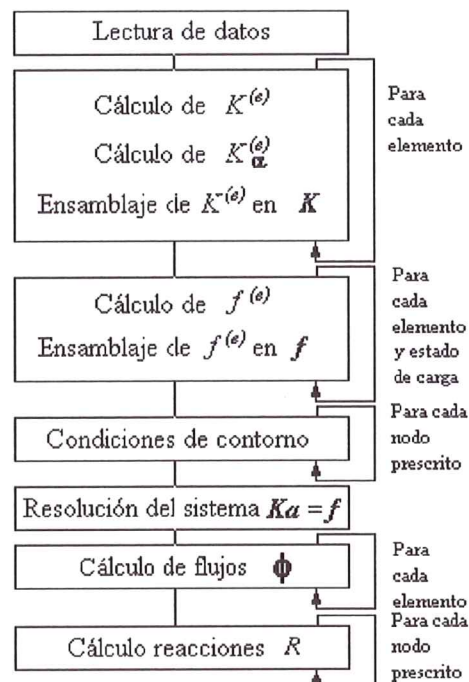
4-2 EDPOISS PROCESO

El programa EDPOISS proceso es la parte más específica del paquete de programas ya que el contiene el módulo de resolución según las técnicas del método de los elementos finitos. Este programa admite tres niveles de tutoría por parte del ordenador y dos modos de resolución. Los diferentes niveles permiten ajustar la marcha del proceso al grado de conocimiento del usuario, y los modos de resolución, realizar el proceso guiados por el ordenador (ejemplos) o sin guía (ejercicios).

4-2.1 Esquema de Resolución de un Problema

Antes de examinar el esquema de resolución del problema conviene destacar que aunque el esquema es siempre el mismo, la resolución puede ser tutorizada o no, para ello existen tres niveles diferentes y dos modos de resolución del problema.

Esquema de resolución: Típicamente la resolución de un problema por elementos finitos sigue el siguiente esquema:



Implementación del esquema

La implementación de dicho esquema en ED-Poiss es la siguiente:

1- Cálculo de la rigidez del dominio El usuario selecciona un elemento y realiza el cálculo de su matriz de rigidez. A continuación, y una vez calculada ésta, la ensambla en la matriz global de rigidez del dominio. Para ello el usuario debe:

- 1.1 - Del menú **Cálculo** seleccionar la opción **matriz de rigidez**.
- 1.2- Seleccionar con el boton izquierdo del ratón un elemento no calculado.

1.3 - Aparece la caja de diálogo de cálculo. Se realiza el proceso mostrado, si el elemento está sometido a procesos de convección/radiación se calcula la matriz de convección y a continuación se ensambla la matriz del elemento en la matriz de rigidez global, siguiendo las instrucciones que aparecen en la pantalla.

1.4 - Repetir el proceso para todos los elementos del dominio.

2- Cálculo del vector de temperaturas nodales equivalentes El usuario selecciona un elemento cargado y realiza el cálculo del vector de temperaturas nodales equivalentes. Si el elemento no está cargado el vector equivalente es cero, por lo que no es necesario calcularlo. A continuación, y una vez calculado éste, se ensambla en el vector del dominio. Para ello el usuario debe:

2.1 - Del menú **Cálculo** seleccionar la opción **Vector temperaturas elemental**.

2.2 - Seleccionar con el botón izquierdo del ratón un elemento cargado y no calculado.

2.3 - Aparece la caja de diálogo de cálculo. En esta caja aparecen los diferentes estados de carga a los que está sometido el elemento. Los casos de carga en gris no afectan al elemento.

2.4 - Se resuelven uno por uno todos los casos.

2.5 - Se ensambla el vector del elemento en el vector de temperaturas global, siguiendo las instrucciones que aparecen en la pantalla.

2.6 - Repetir el proceso para todos los elementos del dominio.

3- Imposición de las condiciones de contorno El usuario selecciona un nodo con temperatura prescrita, es decir un nodo apoyado e impone las condiciones de contorno. Para ello:

3.1 - Del menú **Cálculo** seleccionar la opción **Condiciones de contorno**.

3.2 - Seleccionar con el botón izquierdo del ratón un nodo con temperatura prescrita y no calculado.

3.3 - Aparece la caja de diálogo de cálculo.

3.4 - Se imponen las condiciones de contorno siguiendo las instrucciones de la pantalla.

3.5 - Repetir el proceso para todos los nodos coaccionados o prescritos.

4- Resolución del sistema lineal de ecuaciones. Del ensamblaje de las matrices de rigidez y los vectores de flujos de cada elemento se ha llegado a un sistema lineal de ecuaciones del tipo:

$$K u = f$$

Para resolver el sistema simplemente:

4.1 - Del menú **Cálculo** seleccionar la opción **Resolución sistema**.

4.2 - Aparece la caja de diálogo de cálculo.

4.3 – El sistema lineal ya está resuelto. El vector incógnita es el vector de temperaturas del problema.

5- Cálculo de flujos El usuario selecciona un elemento y realiza el cálculo del vector de flujos para cada punto de integración. Para ello el usuario debe:

5.1 - Del menú **Cálculo** seleccionar la opción **Flujos**

5.2- Seleccionar con el boton izquierdo del ratón un elemento no calculado.

5.3 - Aparece la caja de diálogo de cálculo. Se realiza el proceso mostrado para cada punto de integración.

5.4 - Repetir el proceso para todos los elementos del dominio.

6- Cálculo de flujos reacción El usuario selecciona un nodo con temperatura prescrita y calcula los flujos reacción en dicho nodo. Para ello:

6.1 - Del menú **Cálculo** seleccionar la opción **Flujos reacción**.

6.2 - Seleccionar con el boton izquierdo del ratón un nodo con temperatura prescrita y no calculado.

6.3 - Aparece la caja de diálogo de cálculo.

6.4 - Se calcula los flujos reacción siguiendo las instrucciones de la pantalla.

6.5 - Repetir el proceso para todos los nodos prescritos.

Notas:

- Este es el proceso estándar de resolución de un problema de cálculo de la ecuación de Poisson por elementos finitos con ED-Poiss. Si desea generar un archivo de resultados para el postproceso gráfico seleccione la opción Salvar Como del menú Archivo. El archivo generado está en formato ASCII (texto) y contiene la información generada a lo largo del proceso de cálculo (flujos, flujos reacción) y algunas más (flujos nodales alisados, etc.). Uno puede editar el archivo generado para ver los valores numéricos en cada nodo de la malla.
- La resolución presentada es la que realiza el programa para un problema estacionario, para los problemas transitorios, el ordenador realiza el cálculo completo sin mostrarlo y una vez finalizado el mismo, abre el programa de post proceso para la visualización de los resultados.
- Se puede utilizar el programa en modo ejercicio para el cálculo de un problema, sin pasar por todas las etapas intermedias, esto se hace desplegando el **menú cálculo** y luego **postproceso**, sale un cartel de aviso que el problema no ha sido resuelto aún y si uno quiere resolverlo ahora. Dándole el SI, el programa efectúa el cálculo sin mostrarlo y pasa directamente al postproceso, para visualizar los resultados.

4-2.2 Ejemplo de aplicación del esquema de resolución de un problema

Se desarrollará a continuación el cálculo del problema presentado en la sección 4-1.2, se ha seleccionado el nivel avanzado para resolverlo pues el nivel principiante e intermedio limitan la cantidad de elementos en que esta discretizada la geometría. Al iniciar el programa POISSON proceso, se adopta primero el nivel de resolución, avanzado, se abre el archivo correspondiente tt.GEN, el programa carga el archivo verificando en primer lugar los datos de entrada y si esta todo correcto lo muestra en pantalla.

4-2.2.1 Cálculo de la matriz rigidez de la estructura

Se comienza seleccionando la opción matriz de rigidez del menú **Cálculo** o el botón correspondiente de la barra de botones y se procede a evaluar la matriz de rigidez de cada elemento de la malla. En la pantalla aparece el elemento seleccionado con su numeración local y global, los puntos de Gauss (en este caso hay cuatro), y las expresiones analíticas utilizadas. En este modo de resolución el programa no muestra cada una de las operaciones que realiza, pero es posible conocerlas con solo presionar sobre los botones que corresponden a cada término auxiliar.

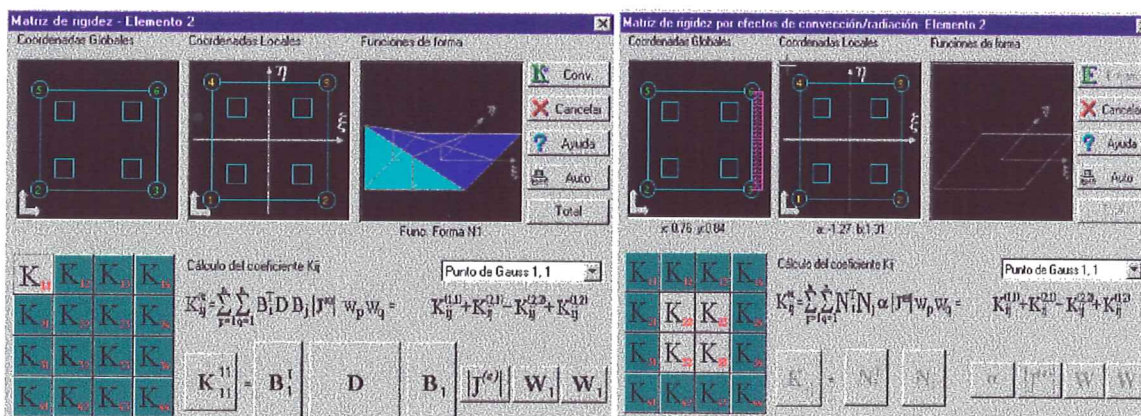


Figura 4-2.1

a - Matriz de rigidez elemental

En la Figura 4-2.1 (izquierda) podemos observar el cálculo de la submatriz k_{11} del elemento 2, ya calculada todas las anteriores, puede verse en esta figura que el primer botón a la derecha no indica el ensamble de todas ellas sino K(conv), ello indica que este elemento tiene sobre uno de sus lados la condición de convección radiación. La etapa siguiente es calcular la contribución de esta condición sobre la matriz de rigidez (Figura 4-2.1 derecha) aparecen los términos que contribuyen en este fenómeno.

b - Ensamblaje

Terminado el cálculo de la matriz de rigidez del elemento considerado hay que ensamblarla en la matriz de rigidez total, Figura 4-2.2 derecha. El procedimiento puede ser manual, paso a paso o bien automático mediante la opción Auto.

c - Matriz de rigidez total

Los pasos descritos anteriormente se realizan para cada elemento de la malla, obteniendo como resultado final la matriz de rigidez total, Figura 4-2.2 izquierda.

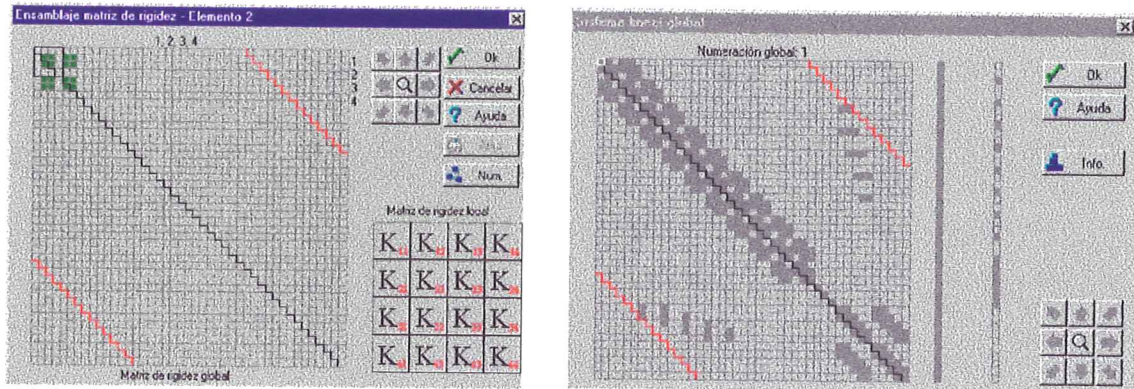


Figura 4-2.2

4-2.2.2- Cálculo del vector de temperaturas nodales equivalentes

El cálculo del vector de temperaturas nodales equivalentes se inicia activando la opción **vector temperatura elemental** del menú **Cálculo** o presionando el botón correspondiente de la barra de botones, lo que permite seleccionar un elemento de la malla cargado.

a - Vector de temperaturas nodales elemental

Al activar el elemento cargado aparece un cuadro de diálogo que muestra activas las barras correspondientes a los tipos de cargas que actúan sobre el elemento y que pueden ser: Flujos puntuales nodales, generación interna de calor y temperatura y flujos repartidos sobre un lado. En nuestro ejemplo se nos presenta el tercer caso ya que algunos de los elementos están sometidos a la condición de convección radiación, por lo tanto al seleccionar por ejemplo el elemento 2, se presenta el cuadro de la Figura 4-2.3 (izquierda)

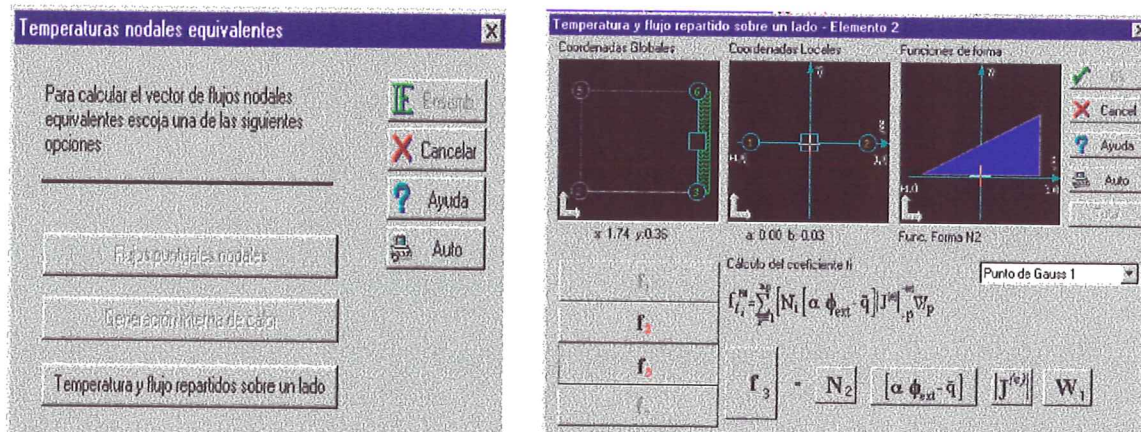


Figura 4-2.3

b – Ensamblaje

Finalizado el cálculo del vector de temperaturas nodales elementales del elemento 2, seguidamente debe ensamblarse en el vector de fuerzas total. El ensamblaje puede realizarse manualmente o bien en forma automática mediante el botón Auto. En la Figura 4-2.4 (Izquierda), puede verse el vector de cargas del elemento 2 ensamblado en el vector de flujos equivalentes global.

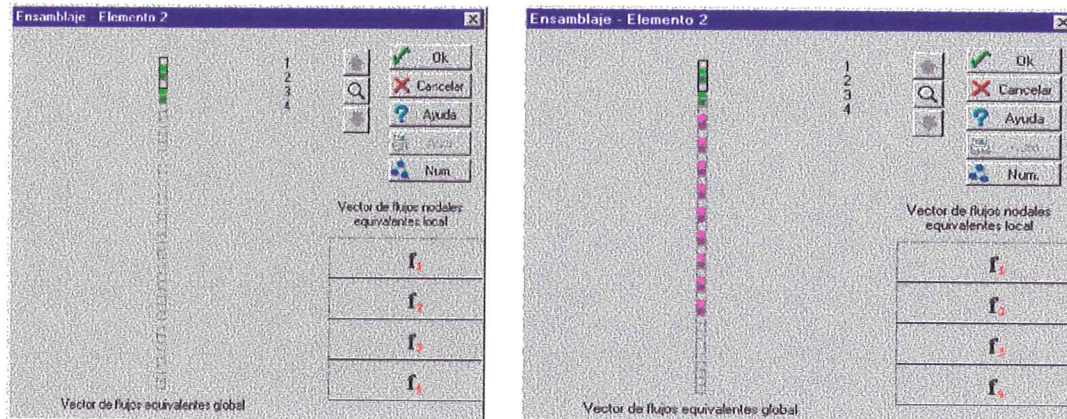


Figura 4-2.4

c – Vector de temperatura nodal total

El proceso descrito en los apartados anteriores se repite para cada elemento de la malla y como resultado final se obtiene el vector de temperaturas nodales global del sistema. Figura 4-2.4 (derecha).

4-2.2.3 Condiciones de contorno (Temperaturas prescritas)

Activando el botón correspondiente a la barra de botones o seleccionando la opción **Condiciones de contorno** del menú **cálculo** pueden introducirse los nodos con temperatura prescrita (En el ejemplo 31, 32, 33). Así por ejemplo, en la Figura 4-2.5 puede verse la pantalla resultante al introducir las condiciones del nodo 33 de la malla, que afectan el grado de libertad 33, después de haber incorporado las otras dos.

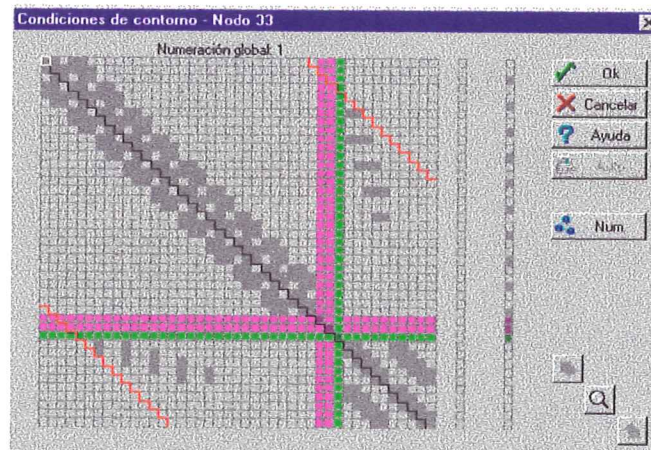


Figura 4-2.5

El proceso que se realiza es eliminar filas y columnas asociadas a el grado de libertad restringido. Dado que el nivel de resolución es avanzado, la operación puede hacerse manualmente, o bien optar por la forma automática, activando el botón Auto.

Introducidas las condiciones de contorno del ejemplo considerado se obtiene como resultado el sistema de ecuaciones representado esquemáticamente en la Figura 4-2.5, en la que pueden apreciarse las filas y columnas de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas eliminadas

4-2.2.4 Resolución del sistema de Ecuaciones

Se resuelve a continuación el sistema de ecuaciones, presionando el botón correspondiente de la barra de botones o activando **Resolución del Sistema**, del menú **Cálculo**. Al llegar a este punto, el programa permite ver, activando los botones situados en la parte inferior derecha, los coeficientes de la matriz de rigidez, Figura 4-2.6.

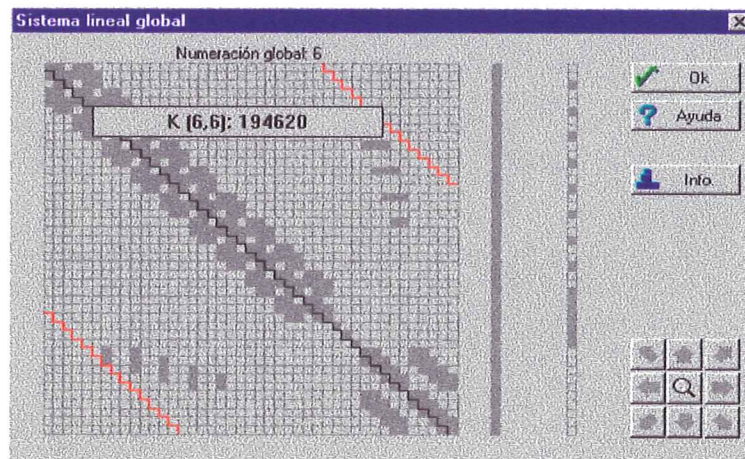


Figura 4-2.6

4-2.2.5 Cálculo del vector de flujo

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones se calcula el vector de flujos para cada elemento, en cada uno de los puntos de Gauss. En la discretización del problema se ha utilizado el elemento cuadrilátero de cuatro nodos con cuatro puntos de Gauss. Luego marcando cada elemento con el ratón el programa calcula el término de flujo de calor asociado a cada nodo evaluado en dichos puntos de integración, Figura 4-2.7.

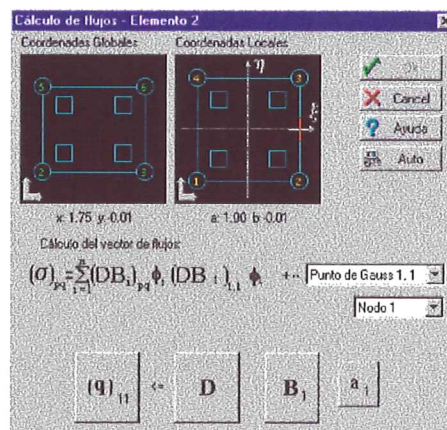


Figura 4-2.7

Cuando uno realiza el cálculo del vector de flujos, como podemos observar en la figura 4-2.7, el programa no nos habilita a el ingreso de la opción OK, es decir que la única posibilidad que hay es de que lo calcule en forma automática en todos los puntos.

4-2.2.6 Cálculo de los flujos de reacción

El cálculo de las reacciones en los nodos prescritos es el punto final del análisis del problema. Para ello, se activa el botón correspondiente de la barra de botones o la opción **Reacciones** del menú **Cálculo**. En pantalla aparece una flecha acompañada con la letra R que permite elegir los nodos restringidos. Una vez seleccionado uno de estos se presenta la matriz de rigidez indicando el grado de libertad afectado y presionando Fórmula puede verse la expresión analítica utilizada para el cálculo de las reacciones de dicho nodo. En este ejemplo se ha seleccionado el nodo 32, Figura 4-2.7 (izquierda). Si se quiere tener acceso a los valores numéricos de los coeficientes del sistema de ecuaciones se presiona sobre los botones situados en la parte inferior derecha de la pantalla.

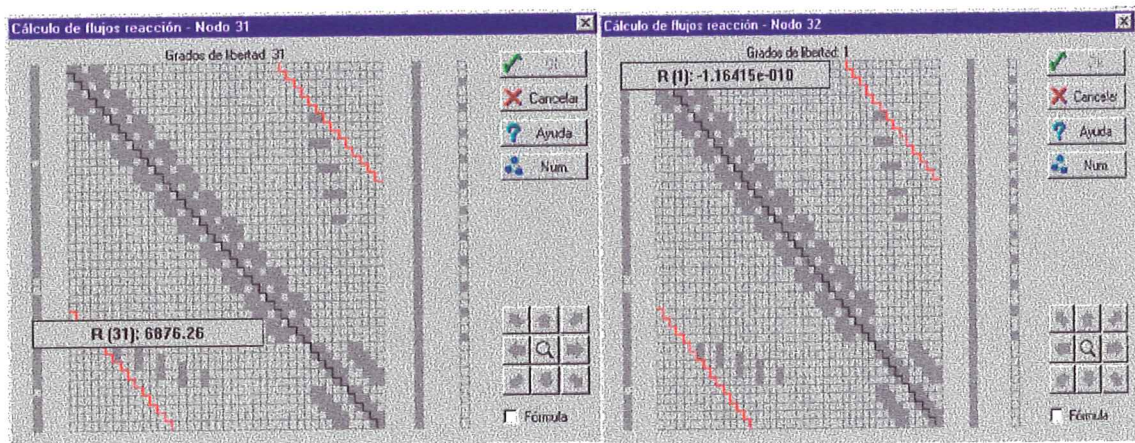


Figura 4-2.7

Puede observarse en la figura 4-2.7 (izquierda), que la opción OK, no está activada, esto es porque en realidad no es necesario que efectuemos el cálculo nodo por nodo, sino que el programa ya lo ha calculado de antemano, es decir que cuando ingresamos con el primer nodo prescrito si recorremos la primera columna que aparece que es la que corresponde a las reacciones de los nodos prescritos veremos que ya están calculados sus valores.

En la Figura 4-2.7 (derecha), podemos observar que en nodos no prescritos nos arroja un valor de flujo de reacción, esto se debe a error de redondeo del ordenador, los valores son del orden de 1.10^{-10} .

4-3 Postproceso

Descripción:

ED-Poiss-Postproceso es un visualizador de resultados de un problema de análisis por elementos finitos. ED-Poiss-Postproceso se limita a representar los resultados obtenidos en la fase de cálculo.

4-3.1 Como se visualizan los resultados en ED-Poiss Postproceso

Una vez analizado un problema utilizando el método de los elementos finitos se requiere un fase de análisis de los datos generados. ED-Poiss es un potente postprocesador que permite una visión cualitativa del análisis realizado. En ingeniería es importante no solo calcular, sino además visualizar los resultados calculados.

- Proceso a seguir:

1. **Abra un archivo de resultados:** En primer lugar debe abrir un archivo de resultados calculado previamente con ED-Poiss proceso. Para abrir el archivo seleccione la opción del menú **abrir**.

Al programa puede accederse :

- De forma directa, abriendo el archivo de resultados de un problema previamente resuelto.
- Desde el programa EDPOISS proceso, al concluir el proceso de análisis del problema en cuestión. Para ello basta con activar el botón correspondiente de la barra de botones o bien la opción **postproceso** del menú **Cálculo**.

Al abrir el archivo de resultados de un problema determinado, se presenta una pantalla en la que puede verse: el contorno de la estructura, la barra de herramientas mas usuales en la parte superior y un grupo de botones a la derecha del cuadro. Los botones de la parte derecha también permiten acceder a las opciones de la barra de herramientas.

2. **Visualización de Resultados:** se presenta a continuación los tipos de representación de resultados que se pueden visualizar.
 - **Distribución de temperaturas o flujos utilizando isolíneas.**
 - **Distribución de temperaturas o flujos utilizando isoáreas.**
 - **La malla, y la numeración nodal de una estructura o dominio.**

Isolíneas: Muestra los resultados dibujando líneas de igual valor numérico.

Isoáreas: Muestra los resultados dibujando áreas de igual valor numérico.

Geometría: Muestra la caja de diálogo que permite modificar las opciones de geometría: mostrar el contorno de la estructura o la malla, mostrar los puntos de Gauss, los materiales, etc.

Etiquetas: Muestra la caja de diálogo que permite modificar las etiquetas: mostrar u ocultar la numeración de los nodos, elementos, puntos de Gauss etc.

PostScript: Genera un archivo de impresión PostScript.

4-3.2 Ejemplo de visualización de resultados:

1. Se abre un archivo de resultados en nuestro caso t.res: Para abrir el archivo seleccione la opción del menú **abrir**. En la pantalla aparecerá el contorno de la geometría del problema seleccionado, como se muestra en la Figura 4-3.1 izquierda.

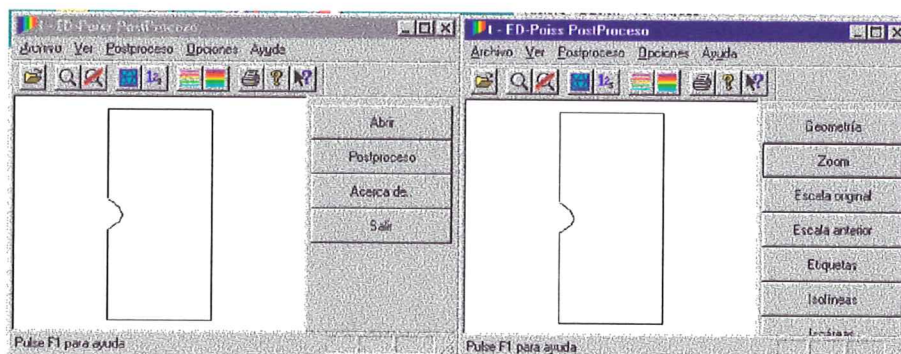


Figura 4-3.1

2. Se selecciona a continuación la opción **postproceso** de la barra de botones o del Menú. Se desplegará sobre la barra de botones las diferentes opciones de análisis, Figura 4-3.1 derecha.
3. Se selecciona el estado de carga (Esta opción es solo para los problemas transitorios, es el instante de tiempo en el que se desea visualizar los resultados del cálculo, en un problema transitorio es la primera definición que debemos dar): Seleccione la opción **selección del estado de carga** del menú **opciones**. Seleccione el análisis y el paso que desee. En las Figuras 4-3.2 se muestran las pantallas que aparecen cuando se selecciona esta opción.

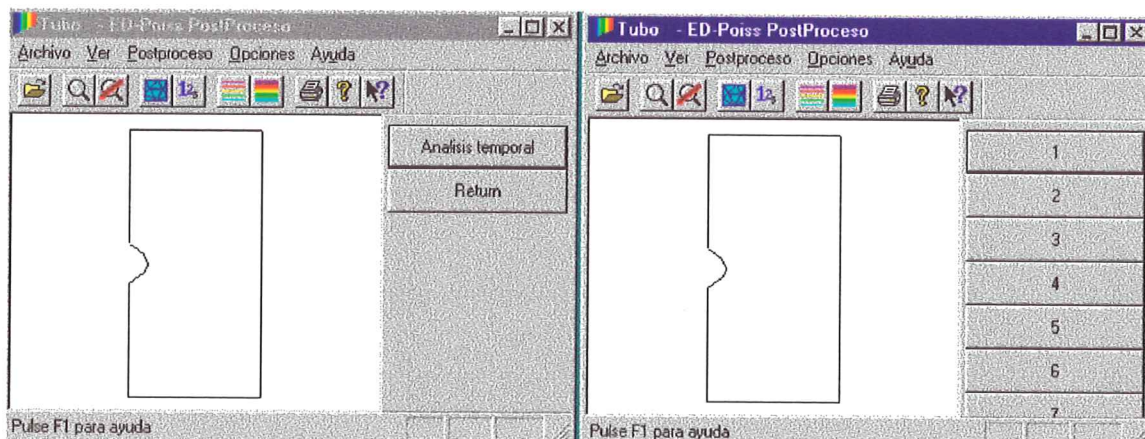


Figura 4-3.2

4. Se selecciona la opción **isolíneas / isoáreas** : Del menú **postproceso**.

También se puede visualizar las isolíneas / isoáreas pulsando el botón correspondiente de la barra de herramientas.

5. En la caja de diálogo “**Selección de resultados**”: Seleccione entre los resultados la opción **Temperatura / Flujo suavizado**. Si se selecciona **Flujo suavizado** entonces aparece una lista de las componentes disponibles para este tipo de resultado, en el caso de temperatura por ser un escalar tiene una única componente.
6. Se elige una de las componentes (Para el caso de Flujo): Por ejemplo “[**Flujo suavizado**]” (módulo del flujo), y se pulsa OK.

En la parte inferior derecha de la pantalla aparece una ventana con una leyenda de los valores numéricos correspondientes a cada color. Si esta ventana no apareciese puede activarla con la opción **Valores numéricos** del menú **Ver**.

Nota: El resultado visualizado es de tipo “matricial”. Es decir se puede visualizar cualquiera de las componentes obtenidas durante el proceso de calculo o calculadas por el programa de postproceso. En este caso las componentes de flujo suavizado que aparecen son:

X Flujo suavizado: Flujo Fx
 X Flujo suavizado: Flujo Fy
 |Flujo suavizado|: Módulo del flujo F

Con el método de los elementos finitos obtenemos el valor del flujo en los puntos de Gauss. Posteriormente, el programa, realiza una extrapolación de los resultados obtenidos a los nodos. Este proceso se conoce como suavizado (smoothing en inglés). El resultado mostrado es un flujo extrapolado a los nodos.

Para nuestro ejemplo las representaciones obtenidas se muestran a continuación:

En la Figura 4-3.3 izquierda, se muestra la representación de isoáreas de temperatura con sus valores numéricos y sobre la derecha la representación de isolíneas de temperatura.

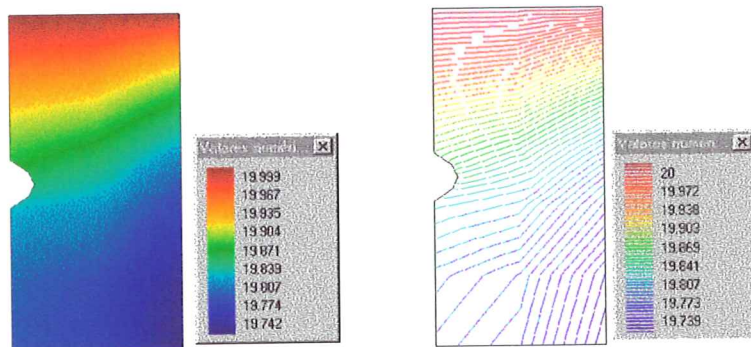


Figura 4-3.3

En la Figura 4-3.4 Izquierda, se presenta la gráfica de las isoáreas del módulo del flujo suavizado y en la figura derecha la representación de las las isolíneas.

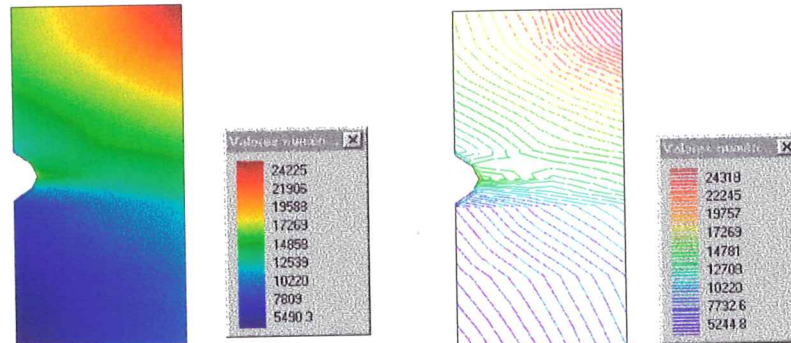


Figura 4-3.4

Nota : Cuando uno intenta ejecutar el post-proceso con determinados ejemplos de conducción de calor en **Estado transitorio**, aparece un cuadro de diálogo como el que se muestra en la Figura 4-3.5, no permitiendo el acceso directo del post-procesador al archivo de resultados de ese ejemplo. Este inconveniente se produce a consecuencia de que falla el mecanismo de transpaso de información entre el buffer de almacenamiento de resultados, generados en el proceso, y el archivo de escritura correspondiente (fenómeno denominado flush), que es desde donde lee el post-procesador los datos.

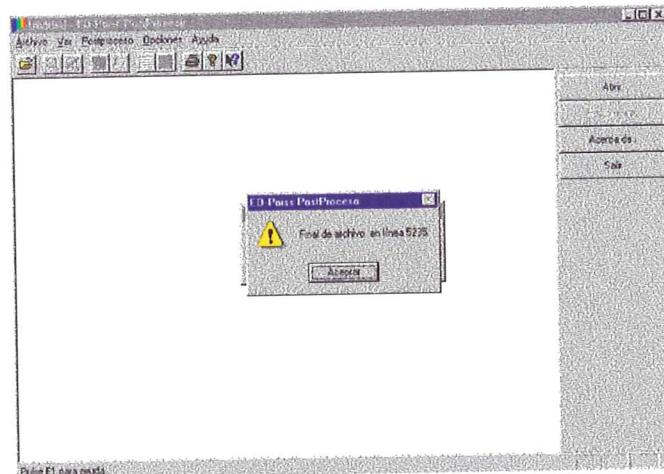


Figura 4-3.5

En este caso se debe salir del postproceso y volver a ingresar para poder visualizar los resultados obtenidos.

capítulo 5

Resolución de Problemas

5.1 Problemas en estado estacionario

Se desarrollarán en esta sección ejemplos de transferencia de calor por conducción en estado estacionario, en una y dos dimensiones. Al no depender la variable considerada del factor tiempo, su resolución es más simple y el análisis de las soluciones obtenidas mediante ambos métodos, analítico y numérico, es más fácil de realizar. Además, sabemos que el estado estacionario es aquel que alcanza un sistema en estado transitorio cuando se estabiliza, de aquí que, los valores de las soluciones presentadas en esta sección podrán servir de comparación con la solución a la que tiende finalmente un problema transitorio.

5.1.1 Problemas unidimensionales

Como primer ejemplo se desarrollo el caso de una placa plana de pequeño espesor, 0.06 (comparado con su longitud, 0.50), sometida a distintas condiciones de contorno. Se utilizó para discretizar la geometría 150 elementos triangulares de tres nodos. Las propiedades asignadas la material son: $k_x = 2.0$, $k_y = 0.01$ y $\rho c = 2.4$.

Un esquema de la geometría considerada se muestra en la Figura 5-1.1

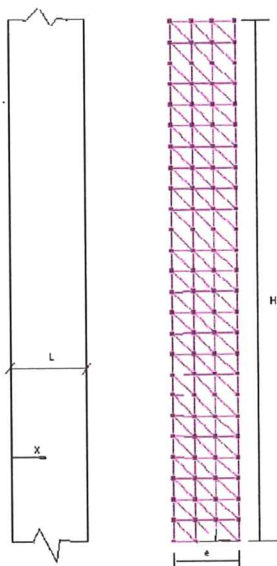


Figura 5-1.1

A continuación se presenta la resolución de este problema para dos situaciones diferentes:

• Placa plana con condiciones de contorno tipo Dirichlet

En este caso la ecuación diferencial que representa este problema es la ecuación de Laplace, con las siguientes condiciones de frontera:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad \begin{aligned} T(x) = T(0) = T_0 & \quad \text{en } x = 0 \\ T(x) = T(L) = T_L & \quad \text{en } x = L \end{aligned}$$

La ecuación 1.1 se puede separar e integrar dos veces para obtener:

$$T(x) = c_1 * x + c_2$$

evaluando las constantes de integración c_1 y c_2 , a través de la aplicación de las condiciones de frontera, nos conduce a la expresión final del tipo:

$$T(x) = T_0 - \frac{T_0 - T_L}{L} * X$$

De acuerdo a la ecuación anterior, la variación de temperatura es lineal.

Para el calculo del flujo de calor se puede usar la Ley de Fourier :

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx}$$

Dado que en estado estable q_x es constante, directamente se separa e integra esta ecuación llegando a la expresión:

$$q_x = \frac{kA}{L} (T_0 - T_L)$$

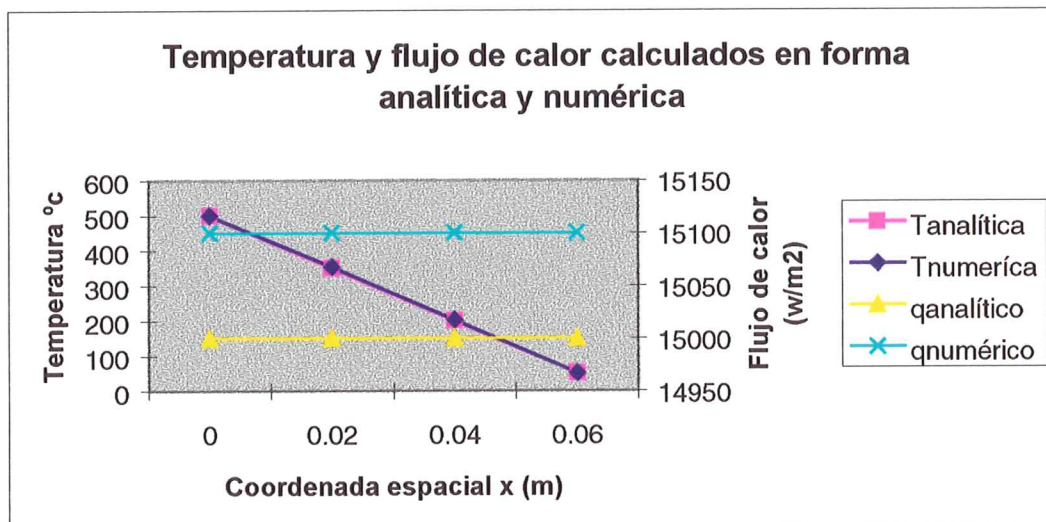


Figura 5-1.2

En la Figura 5-1.1, podemos observar que los valores de temperatura calculados analítica y numéricamente casi no difieren. Intuitivamente se esperaban estos resultados ya que la variación del campo de temperaturas es de tipo lineal y el campo de flujo de calor constante y los elementos usados son triángulos de tres nodos cuyas funciones de

forma para el ajuste de la temperatura es lineal, y por lo tanto el flujo de calor se ajusta mediante una constante.

A continuación se presentan las gráficas que se obtienen del programa EDPOISS para el análisis de este ejemplo

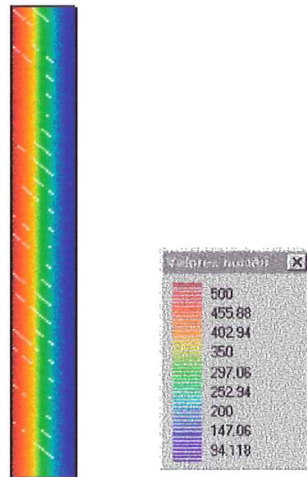


Figura 5-1.3

En esta primera gráfica, Figura 5-1.3, se muestran las isolíneas de temperaturas, las cuales son paralelas entre sí, lo cual concuerda con el perfil teórico lineal de temperaturas.

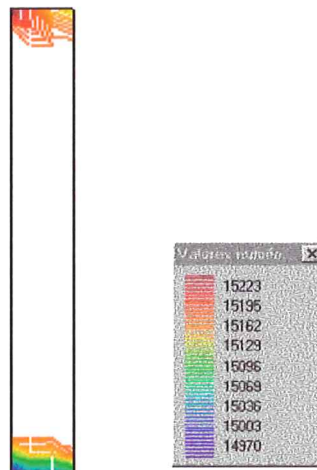


Figura 5-1.4

Esta última gráfica, Figura 5-1.4, se incorporo para mostrar como aparece la visualización gráfica, ya sea de isolíneas o de isoáreas, cuando la variable que se está representando tiene un valor constante. En este caso esta corresponde a isolíneas del módulo del flujo suavizado.

La representación de los extremos se debe a errores de redondeo en el cálculo.

Sobre este mismo esquema se considerara ahora el caso en que exista generación interna de calor:

• Placa con generación interna de calor

La ecuación que representa el fenómeno es:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{q_v}{k} = 0 \quad \text{con :} \quad \phi(x=L) = 50^\circ\text{C} \quad \text{y} \quad \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_{x=0} = 0$$

Cuya solución es:

$$\phi(x) = T_L + \frac{\dot{q}}{2k} (L^2 - x^2)$$

$$\frac{q_x}{A} = \dot{q} x$$

A continuación se muestra en la Figura 5-1.5, la gráfica los valores de la solución analítica y numérica de temperatura y flujo de calor. Se debe tener en cuenta que el valor asignado a la generación de energía interna es de 1000.

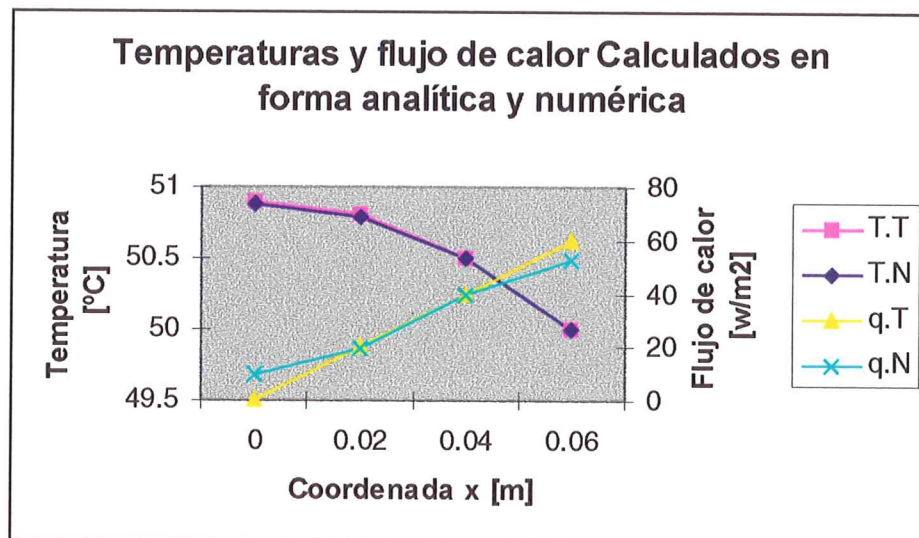


Figura 5-1.5

En la misma se observa que:

- Los valores de temperatura calculados numéricamente, difieren mínimamente del valor calculado en forma analítica.
- Los valores del flujo de calor se ajustan bien en casi todo el intervalo salvo en los extremos que existe una diferencia de aproximadamente el 12% entre el valor analítico y el numérico
- Se ha utilizado para el ajuste triángulos de tres nodos, los cuales ajustan linealmente a la temperatura y son de gradiente constante, (en este caso la temperatura varía en forma cuadrática y el flujo en forma lineal) pero debido a la cantidad de elementos que se uso, el ajuste es bueno.

En la Figura 5-1.6 se muestran las gráficas correspondientes a isolíneas de Temperatura y del módulo del Flujo suavizado con su cuadro de valores correspondiente.

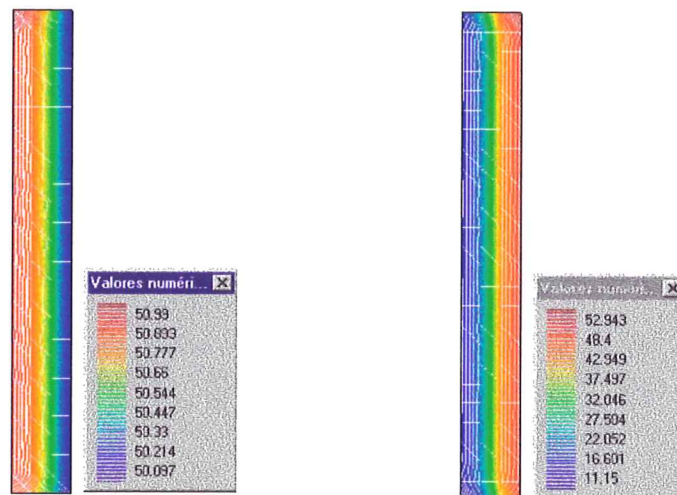


Figura 5-1.6

5-1.2 Problemas Estacionarios Bidimensionales

- Transferencia de calor en un cilindro hueco con temperatura constante en las paredes laterales del mismo. Condición de contorno de Dirichlet (archivo sanpe.gen)

En la Figura 5-1.7, se muestra la geometría del problema considerado. La misma es un cilindro de diámetro interior 4 y diámetro exterior 7. las propiedades adjudicadas al material fueron $k_x=k_y=140000$. Se ha utilizado para la discretización una malla de 36 elementos triangulares de tres nodos

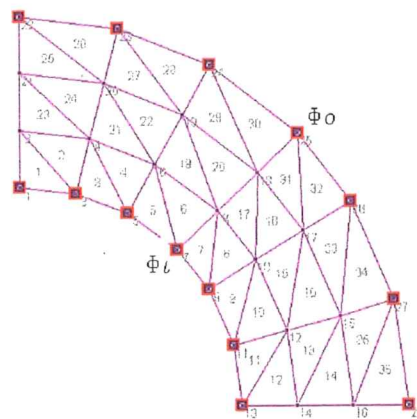


Figura 5-1.7

Para la conducción de calor estable a través de una pared cilíndrica en la dirección radial, la ecuación de Laplace toma la forma:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = 0$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene:

$$\phi = C_1 \ln r + C_2$$

Aplicándole las condiciones de frontera de tipo Dirichlet:

$$\phi(r_i) = \phi_i \quad ; \quad \phi(r_o) = \phi_o$$

Se llega a la Ecuación que representa la distribución de temperaturas:

$$\phi = \phi_i - \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_o}{r_i}} (\phi_i - \phi_o)$$

La ecuación que representa el flujo de calor es:

$$\frac{q}{A} = k * \frac{1}{r} * \frac{(\phi_i - \phi_o)}{\ln \frac{r_o}{r_i}}$$

En las gráficas de las Figuras 5-1.8 y 5-1.9, se muestran los valores de la solución analítica (en rojo) y numérica (en azul), tanto de temperatura, como de flujo de calor para el caso en que $\phi_i = 700^\circ\text{C}$ y $\phi_o = 200^\circ\text{C}$.

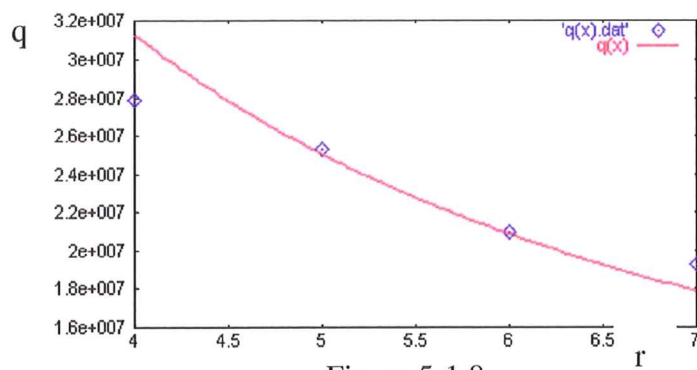


Figura 5-1.8

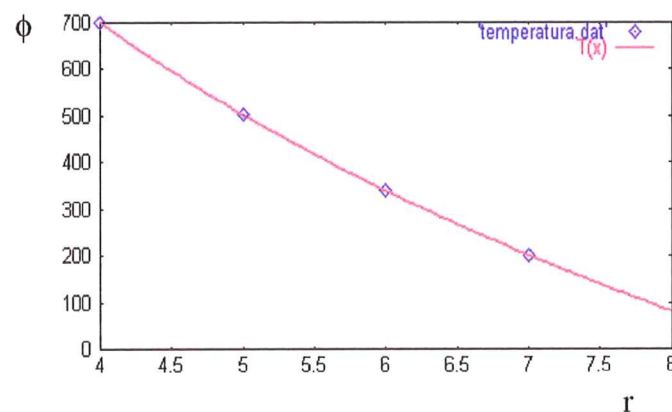


Figura 5-1.9

En este caso la temperatura varía radialmente tal como se puede observar en la Figura 5-1.10 izquierda, en la gráfica de la derecha se muestra la variación del flujo de calor con sus valores numéricos

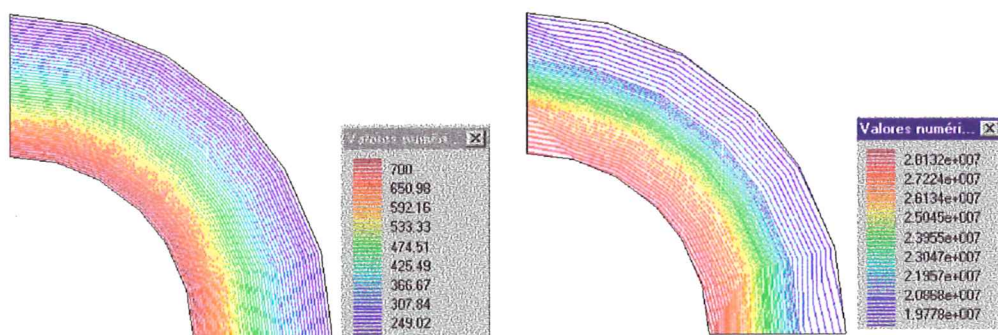


Figura 5-1.10

- Transferencia de calor en un cilindro hueco con generación interna de calor, condición de convección radiación en la pared lateral externa y adiabático en la pared lateral interna

En principio se debe aclarar que este problema fue resuelto con **CALTEP**, debido a que EDPOISS no resuelve ningún tipo de problema sino se prescribe una temperatura en algún punto de la malla.

En la Figura 5-1 11, se muestra la geometría del problema considerado, un cilindro de radio interior 4 y exterior 7, con $k_x=k_y= 140000$, $\rho c= 1.4 \cdot 10^6$, $\alpha = 510^2$ con generación interna de calor igual a 510^5 , Temperatura del fluido que rodea al sólido 200 y discretizada con 36 elementos triangulares de 3 nodos.

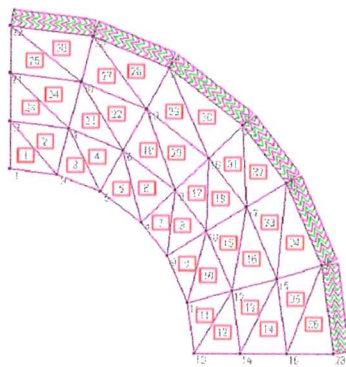


Figura 5-1.11

La ecuación de conducción que se considera en este caso es:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$

La integración de esta ecuación nos conduce a:

$$\phi = \frac{q_v r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2$$

Que con las condiciones de contorno:

$$\text{En } r = r_1 \quad q = 0 \quad \text{ó} \quad \left(\frac{d\phi}{dr} \right)_{r=r_1} = 0$$

$$\text{En } r = r_2 \quad \left(\frac{d\phi}{dr} \right) = -\frac{\alpha}{\lambda} (\phi_{w2} - \phi_{f2})$$

Se obtiene la siguiente expresión para el campo de temperaturas:

$$\phi = \phi_{f2} + \frac{q_v r_2}{2\alpha} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 2 \ln \frac{r}{r_2} - \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right]$$

La expresión para el flujo de calor para el radio exterior del cilindro, donde tenemos la condición de convección radiación, es:

$$q = \alpha(\phi_2 - \phi_f) = \frac{q_v r_2}{2\alpha} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right]$$

Que con nuestros valores da 2357 y el calculado numéricamente 2119, es decir se comete un error de aproximadamente el 10%.

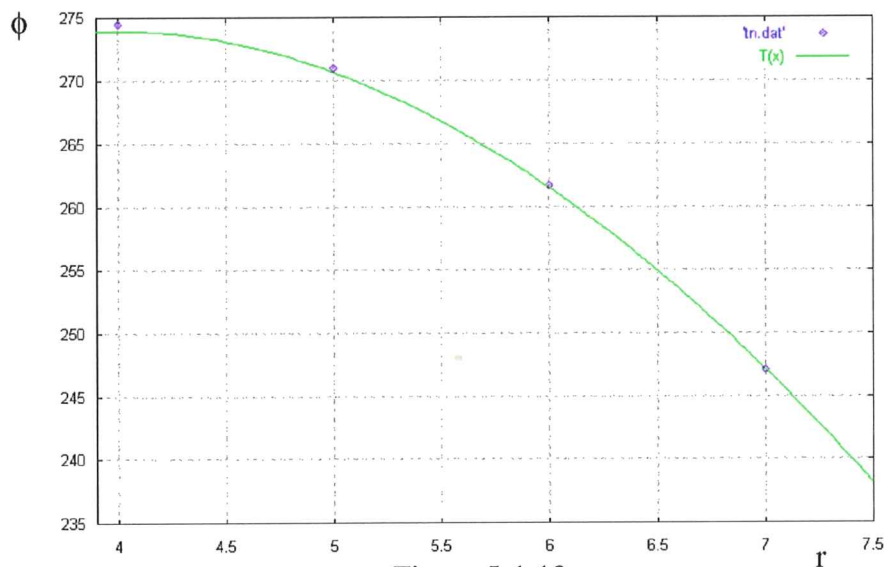


Figura 5-1.12

La gráfica de la Figura 5-1.12, se representa el campo de temperaturas analítico (en verde) y numérico (azul), viendo en la misma que ambos coinciden muy bien, la diferencia entre ambos valores es muy pequeña.

- Transferencia de calor en un cilindro hueco con generación interna de calor, temperatura prescrita en la pared lateral externa y adiabático en la pared lateral interna

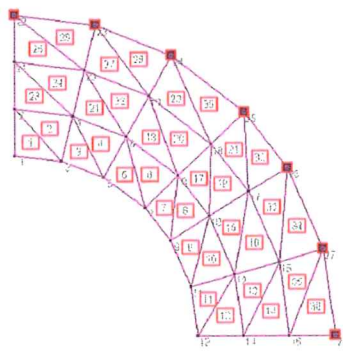


Figura 5-1.13

El análisis de este caso surge a consecuencia del ejemplo anterior y se lo puede considerar de esta forma cuando el coeficiente de transferencia de calor de la superficie es suficientemente grande ($\alpha \rightarrow \infty$), luego la temperatura del fluido se iguala con la temperatura de la superficie de la pared del tubo. En este caso $k_x = 140$, $k_y = 140$, generación de calor interna igual a 1000 y temperatura prescrita de 200.

La expresión para la temperatura se nos reduce a la forma:

$$\phi = \phi_2 - \frac{q_v r_2^2}{4k} \left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 2 \ln \frac{r}{r_2} - \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right]$$

y la expresión para el flujo de calor tiene la siguiente expresión:

$$\frac{q}{A} = -k \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

Que en este caso en particular queda expresado como:

$$\frac{q}{A} = 500r - \frac{8000}{r}$$

Los resultados analíticos (verde) y numéricos (azul) de temperatura y flujo de calor se pueden apreciar en las gráficas de las Figuras 5-1.14 Los resultados calculados mediante EDPOISS de este ejemplo presentan solo un pequeño error que es del tipo de error de redondeo, de aproximadamente el 5 %.

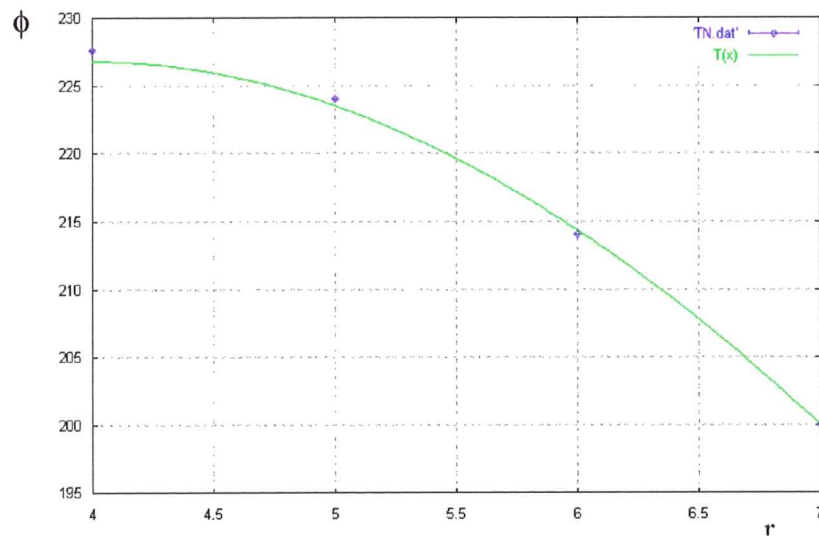


Figura 5-1.14

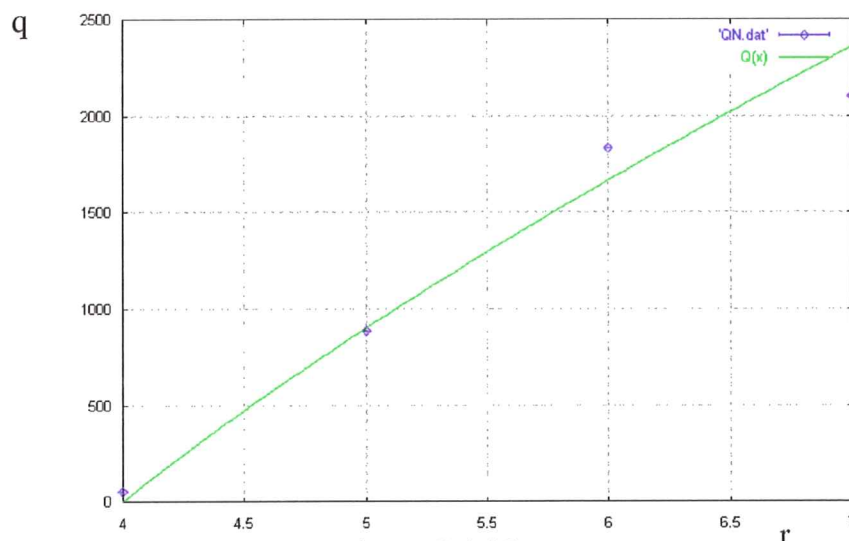


Figura 5-1.15

- Transferencia de calor en un cilindro hueco con paredes laterales aisladas y temperatura prescrita en los extremos

En la Gráfica de la Figura 5-1.16 se muestra la geometría del problema que se analiza en este caso. La misma está discretizada en 36 elementos triangulares de tres nodos, las propiedades del material son $k_x = 140000$, $k_y = 140000$, las temperaturas de los extremos son 700 y 200

En una configuración de esta clase, al estar las paredes laterales aisladas, las líneas de flujo han de ser paralelas a ellas y seguir circunferencias concéntricas (dirección de θ), por lo que las isothermas serán radiales (perpendiculares a las líneas de flujo de calor).

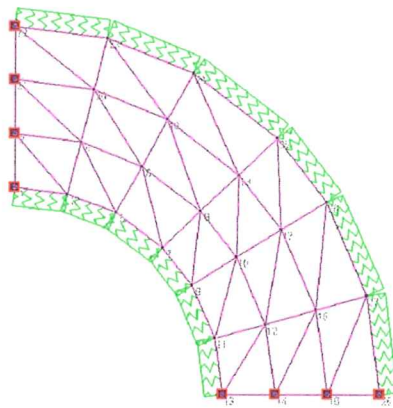


Figura 5-1.16

La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas que representa la conducción de calor es:

$$\nabla T^2 = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

y el único sumando a considerar en este caso, debido a las condiciones del problema es:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$$

Es decir, la ecuación a resolver es:

$$\frac{d^2 T}{d\theta^2} = 0 = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dT}{d\theta} \right)$$

Con las condiciones de contorno siguientes

$$T(0) = T_h$$

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right) = T_c$$

Luego el perfil de temperaturas viene dado por:

$$T(\theta) = T_h - (T_h - T_c)\theta$$

y el flujo de calor:

$$q(\theta) = \frac{2\lambda}{\pi} (T_h - T_c) \int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{r}$$

La solución numérica mediante Poisson de este problema es bastante buena como se podrá apreciar tanto en las gráficas y figuras que se muestran a continuación.

En la Figura 5-1.17 izquierda, se puede ver la forma de las isotermas de tipo radial, esto es debido a que la temperatura varía según el ángulo θ y en la Figura 5-1.17 derecha, se observa la variación radial del flujo de calor.

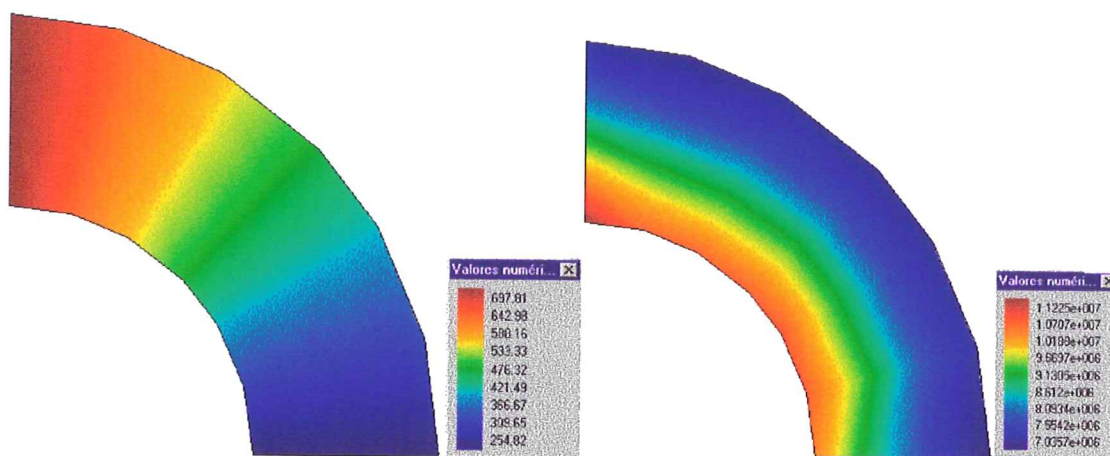


Figura 5-1.17

A continuación, en la gráfica de la Figura 5-1.18, se muestran las soluciones analítica y numérica. De observación de la misma se concluye que el ajuste de la temperatura es mejor que el del flujo de calor, siendo este igualmente bueno.

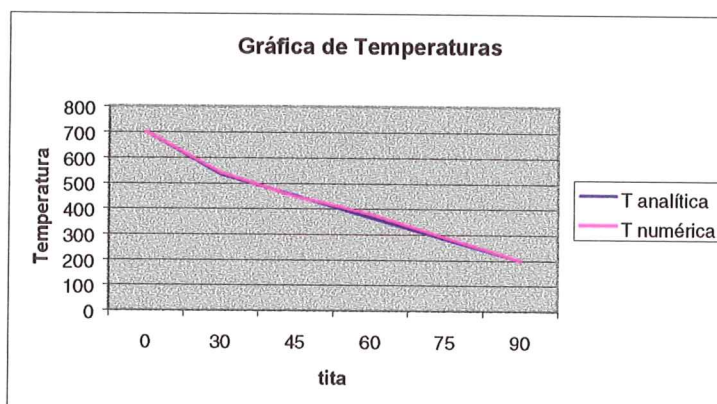


Figura 5-1.18

- placa sólida con condiciones de contorno tipo Dirichlet, de sección rectangular de determinadas dimensiones, en estado estacionario, sin generación interna de energía.

En la Figura 5-1.19, se muestra la geometría del problema, que es una placa cuadrada de lado 5, la misma fue discretizada con 50 elementos triangulares de seis nodos. Las propiedades del material son $k_x = 140000$, $k_y = 140000$, y las temperaturas en los contornos son: 250, 200, 150 y 50 respectivamente.

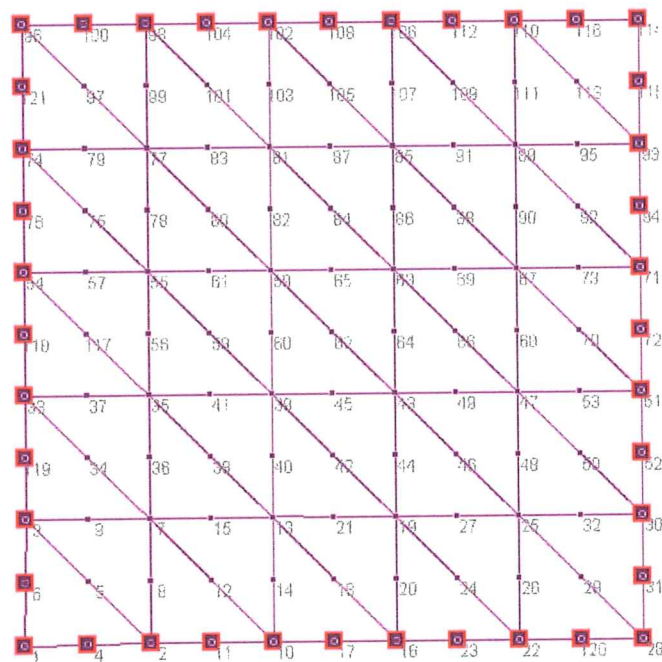


Figura 5-1.19

La ecuación diferencial que representa este fenómeno es la ecuación de Laplace en dos dimensiones

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Con las siguientes condiciones de contorno:

$$\phi_{x=0} = 250; \phi_{x=5} = 50; \phi_{y=0} = 100; \phi_{y=5} = 150$$

La solución analítica de este tipo de problemas son desarrollos en serie, que para este caso toma la forma:

$$\phi = \frac{4\phi_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{a} \sinh \frac{(b-y)(2n+1)\pi}{a} \operatorname{cosech} \frac{(2n+1)\pi b}{a}$$

En la Figura 5-1.20, podemos observar las variaciones de temperatura calculadas numéricamente en función de cada una de las coordenadas x e y .

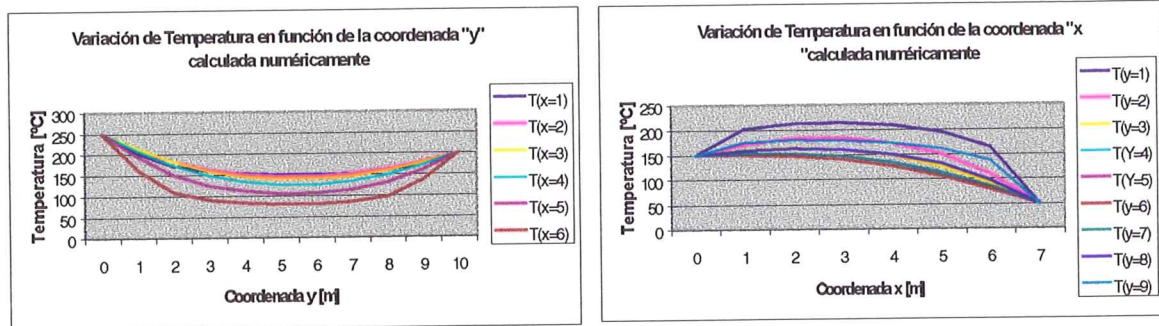


Figura 5-1.20

En la Figura 5-1.21, se graficó la solución analítica y la numérica para $y = 1$ e $y = 5$, en función de x . De la observación de la misma se ve claramente que, en este caso la solución numérica obtenida casi no difiere de los valores calculados en forma analítica.

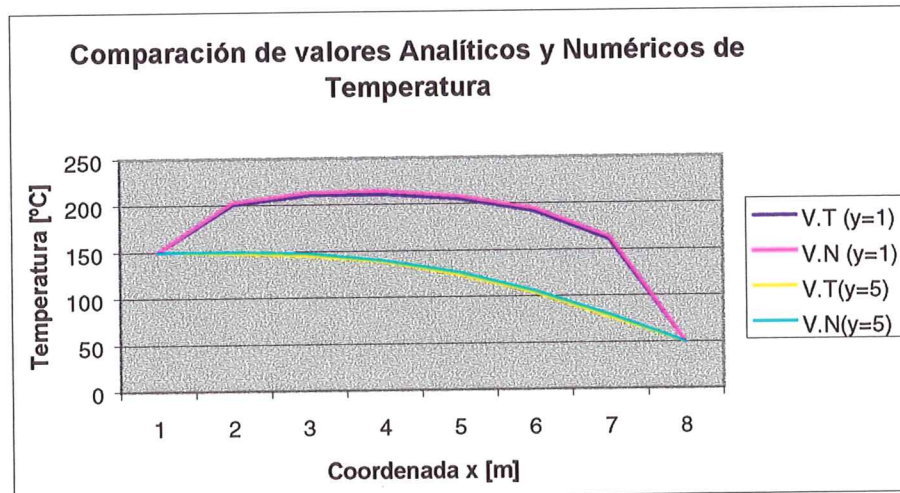


Figura 5-1.21

En la Figura 5-1.2: V.T : Valores calculados en forma analítica
V.N : valores calculados en forma numérica

Problema bidimensional con condiciones de contorno tipo Dirichlet o adiabáticas – Graficación de flujos

Se presentará a continuación un método gráfico de resolución de la ecuación de LAPLACE, que permite resolver problemas con condiciones de contorno simples, pero que por carecer de simetría, no tienen solución analítica.

Existe una técnica de solución gráfica, denominada graficación de flujos, que es rápida y que permite efectuar el análisis de sistemas bidimensionales con fronteras isotérmicas o adiabáticas. Esta técnica es un enfoque válido para resolver la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

En una pared semi infinita con temperatura superficial constante, las isotermas y líneas de flujo de calor aparecen como se muestra en la Figura 5-1.22. En la pared, las isotermas son rectas verticales y las líneas de flujo de calor son rectas horizontales perpendiculares a las isotermas.

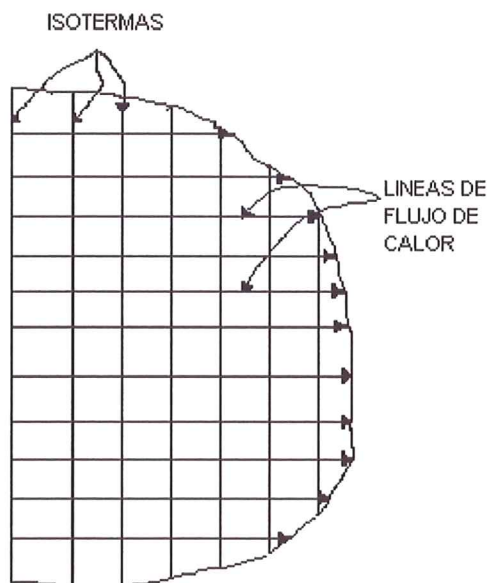


Figura 5-1.22

Si existe una diferencia constante de temperatura entre dos isotermas cualesquiera, entonces la distancia entre ellas indica la magnitud del gradiente de temperatura ; el espaciado estrecho indica un gradiente relativamente grande , en tanto que un gradiente pequeño esta asociado con un espaciado amplio. Ya que la transferencia de calor por conducción ocurre bajo la influencia de un gradiente de temperatura, es claro que no existe ninguna fuerza motriz para la transferencia de calor a lo largo de una isoterma. Por tanto se puede considerar que una línea de flujo de calor es una frontera aislada a través de la cual no se puede conducir el calor.

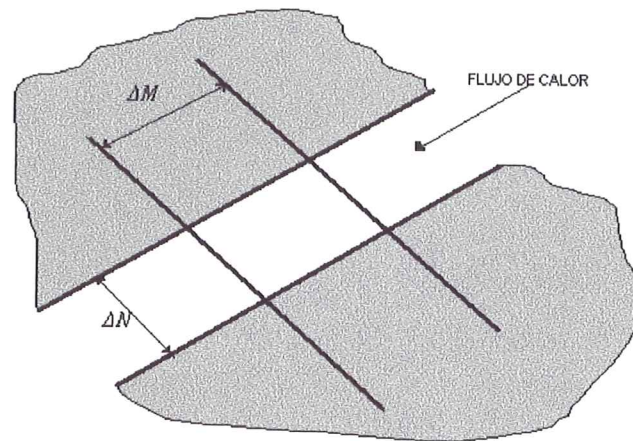


Figura 5-1.23

Estos conceptos son importantes cuando se considera un problema de conducción bidimensional. En la Figura 5-1.24, se muestra un conjunto de dos isotermas y de dos líneas de flujo de calor. Las dos isotermas difieren entre sí en la cantidad $\Delta\phi$, las líneas de flujo de calor son perpendiculares a las isotermas y forman un paso o tubo a través del cual puede fluir una cantidad de calor Δq .

Si en una sección transversal total hay N pasos de flujo de calor total, por cada uno de los cuales fluye una cantidad de calor Δq , la transferencia de calor total está dada por:

$$q_{\text{total}} = N\Delta q$$

Para el paso individual de flujo de calor mostrado, el gradiente de temperatura en forma de diferencia finita es:

$$\left[\frac{(\phi + \Delta\phi) - \phi}{\Delta M} \right] = \frac{\Delta\phi}{\Delta M}$$

Entonces para Δq la ecuación de la razón de FOURIER escrita para este caso da:

$$\Delta q = K\Delta N \frac{\Delta\phi}{\Delta M}$$

Si se construye la malla de isotermas / líneas de flujo de calor de manera que $\Delta M = \Delta N$, o sea que se forme un sistema de cuadrados curvilíneos; la expresión para Δq se reduce sencillamente a:

$$\Delta q = -k\Delta\phi$$

sin importar el tamaño de los cuadrados.

Para el flujo de calor entre dos fronteras isotérmicas a las temperaturas ϕ_h y ϕ_c , en donde $\phi_h > \phi_c$, con isotermas que dividen cada tubo de flujo en M divisiones, la diferencia de temperaturas entre isotermas adyacentes se expresa como:

$$\Delta\phi = \frac{\phi_h - \phi_c}{M}$$

Finalmente para un número total de N pasos de flujo entre las fronteras en ϕ_h y ϕ_c , cada uno con una cantidad Δq de flujo de calor, la transferencia total de calor es:

$$q_{\text{total}} = N\Delta q = Nk\Delta\phi = \frac{N}{M}k(\phi_h - \phi_c)$$

La razón $\frac{M}{N}$ se conoce como Factor de Forma, que para algunos casos sus expresiones están tabuladas, Figura 5-1.24. Concluimos entonces que la técnica de graficación de flujos es sencillamente una forma de determinar el valor para el factor de forma en un problema de conducción bidimensional de estado estable en donde las fronteras están a temperatura constante.

CONFIGURACION	FACTOR DE FORMA S $Q=KS(\phi_1 - \phi_0)$
Pared plana	$\frac{A}{L}$
Cilindro hueco r_o :Radio exterior r_i : Radio interior	$\frac{2\pi L}{\ln \frac{r_o}{r_i}}$
Cilindros circulares concéntricos r_o : radio exterior r_i : Radio interior	$\frac{2\pi L}{\ln \frac{r_o}{r_i}}$
Cilindros circulares excéntricos r_o :Radio exterior r_i : Radio interior e excentricidad	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(1 + \frac{\rho^2 - \epsilon^2}{2\rho}\right)} \quad \rho = \frac{r_i}{r_o} ; \epsilon = \frac{e}{r_o}$
Cilindro circular en un cilindro cuadrado	$\frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) - 0.27079}$
Cilindro circular en un cilindro hexagonal	$\frac{2\pi L}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right) - 0.10669}$
Cilindro horizontal enterrado de longitud L	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{\rho}{r}\right)}$

Figura 5-1.24

Este método cuando se ha aplicado a algunos casos con solución analítica conocida ha dado un error solo del 2%, es decir que aplicar este método con los cuidados adecuados da buenos resultados.

Las soluciones de los ejemplos que se presentan a continuación fueron comparadas con soluciones obtenidas usando graficación de flujos. En todos los problemas presentados los valores de temperaturas obtenidos con EDPOISS son muy buenos, no así los valores de flujo de calor, pero se presentan igualmente las graficas de ambos, temperatura y flujo, pues cualitativamente las formas de las gráficas es la correcta, las mismas se presentan a continuación

- **Placa bidimensional en estado estacionario con contornos isotérmicos y adiabáticos**

El primer caso que analizaremos consiste en una placa cuadrada de lado 5, con condiciones de contorno de Dirichlet y adiabáticas, como se muestra en la Figura 5-1.25, discretizada con 50 elementos triangulares de tres nodos. Se asignó a las propiedades del material los siguiente valores $k_x = k_y = 140000$. Las temperaturas en los contornos prescritos son 0 y 1.

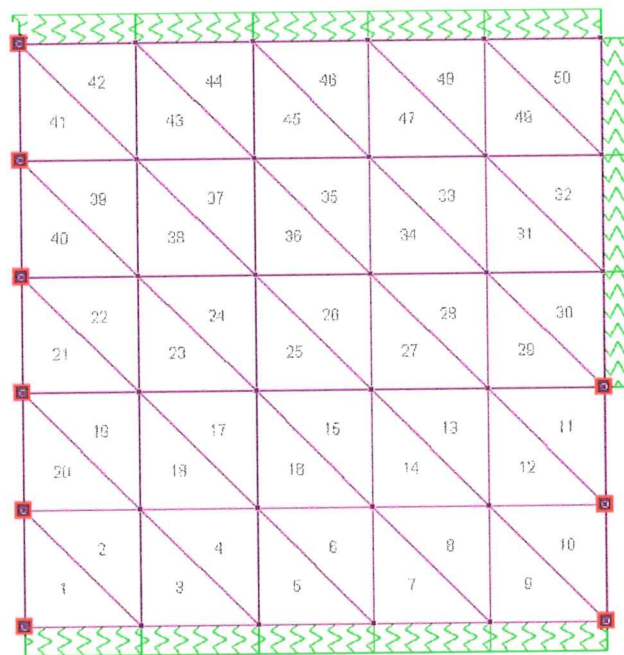


Figura 5-1.25

En la Figura 5-1.26, se puede observar la forma que adquieren las isotermas de temperatura. De izquierda a derecha, las mismas se van curvando, debido a que parten de una pared isotérmica, líneas de temperatura casi rectas, hacia una cuyo contorno tiene condiciones de temperatura prescrita y flujo de calor cero (adiabática).

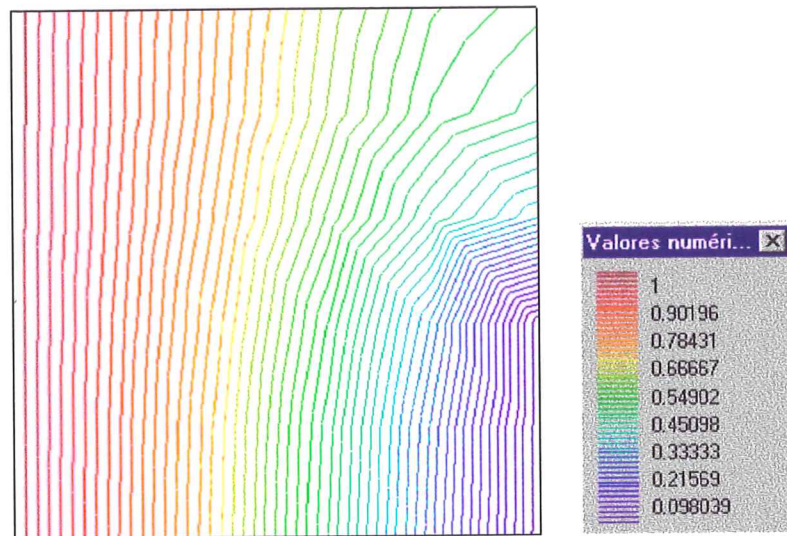


Figura 5-1.26

En la Figura 5-1.27, se muestra la gráfica del módulo del flujo de calor, junto con sus valores numéricos, si bien los valores no son los correctos, si lo es la tendencia de los mismos. Los valores obtenidos mediante la técnica de graficación de flujos son del orden de $1 \cdot 10^4$.

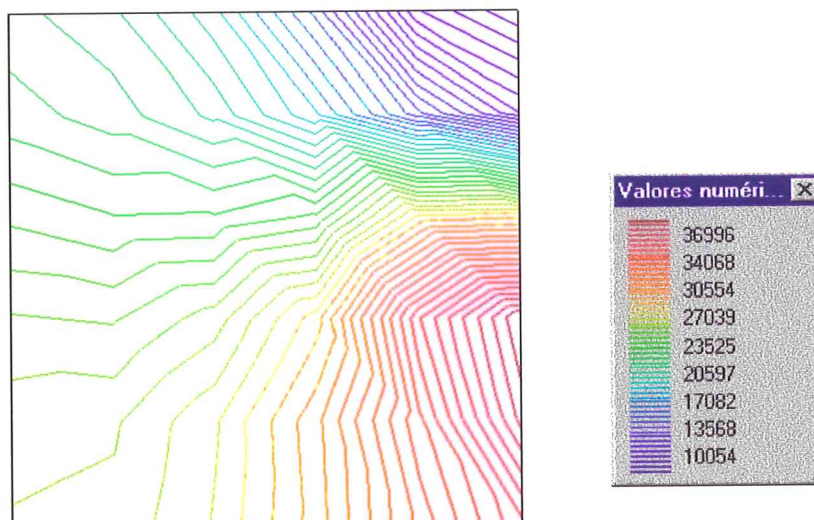


Figura 5-1.27

- **Cilindro circular en un cilindro cuadrado con contornos prescritos**

En la Figura 5-1.28, se representa la geometría a analizar, la misma es un cuarto de un cuadrado de lado 2.5, con un orificio central de radio 0.50. La discretización se realizó con 42 elementos cuadriláteros de cuatro nodos. Las propiedades del material son $k_x = k_y = 140000$. Las temperaturas en los contornos son 100 y 400.

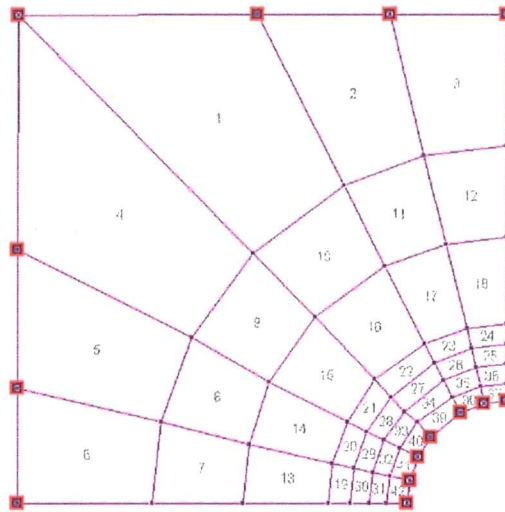


Figura 5-1.28

Para optimizar el cálculo se utilizaron elementos más pequeños en la zona de mayor gradiente, pero aun así no fue suficiente para obtener buenos valores del flujo de calor.

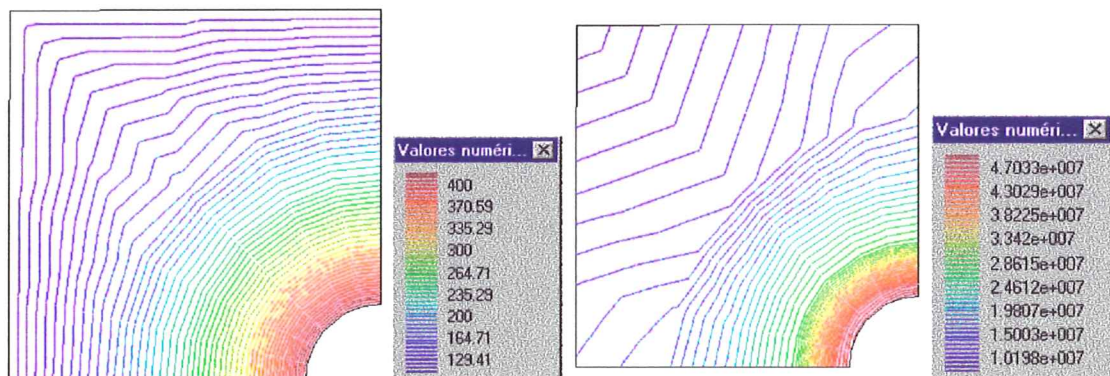


Figura 5-1.29

Nuevamente en este caso, los valores de temperatura coinciden con los valores calculados con el método de graficación de flujos, pero no así el flujo de calor, el cual puede calcularse con el factor de forma adecuado, cuya expresión figura en la tabla de la Figura 5-1.24. El valor calculado de esta manera es del orden de 10^5 .

- **Cilindro circular en un cilindro cuadrado excéntrico con condiciones de contorno de Dirichlet**

En la Figura 5-1.30, se representa la geometría a analizar, la misma es la mitad de una placa cuadrada de lado 5 y 2.5 con un orificio excéntrico de radio 0.50. La discretización se realizó con 106 elementos cuadriláteros de ocho

odos. Las propiedades del material son $k_x = k_y = 140000$. Las temperaturas en los contornos son 100 y 400.

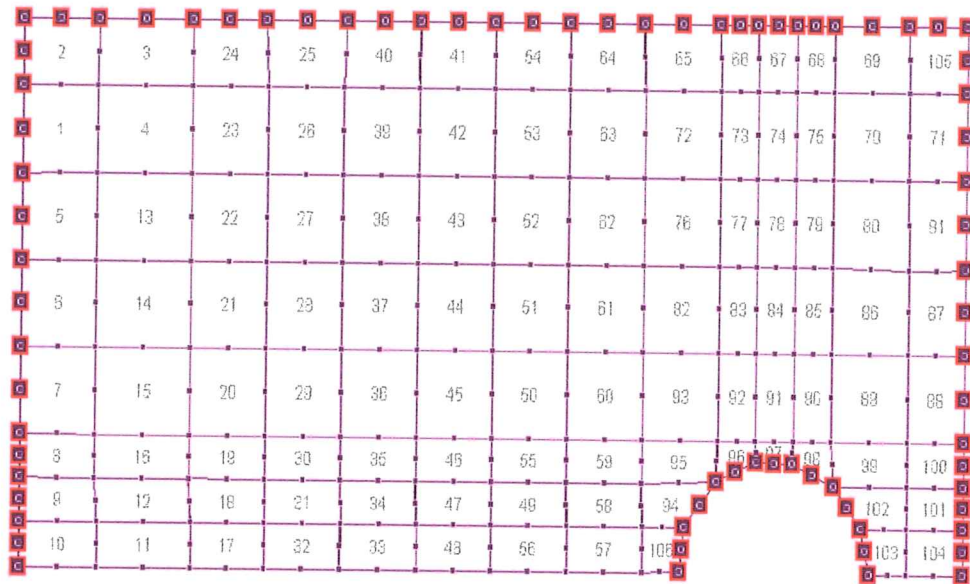


Figura 5-1.30

Nuevamente en este caso los valores de temperatura coinciden. En la gráfica de la Figura 5-1.31, se puede observar que debido a que el orificio esta ubicado en forma excéntrica, las isotermas de temperatura ya no son simétricas, como en el caso anterior, sino que se están desplazadas, esto concuerda perfectamente con la realidad física del problema.

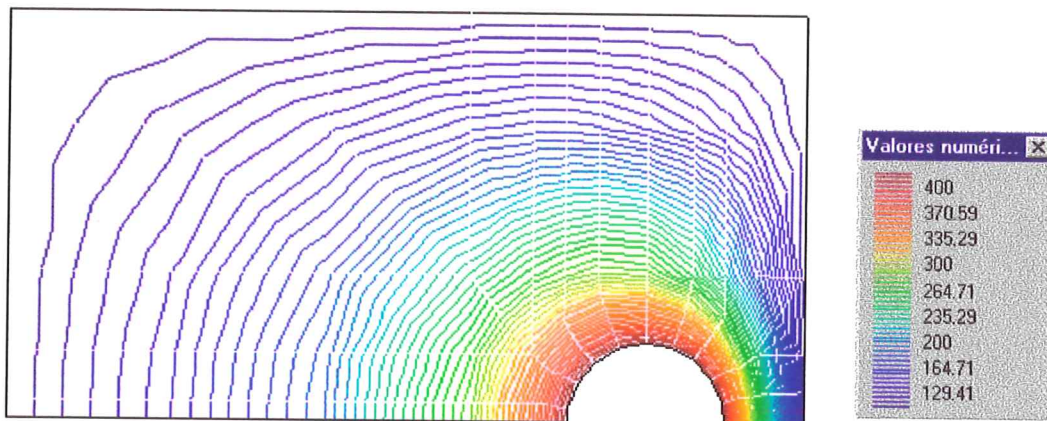


Figura 5-1.31

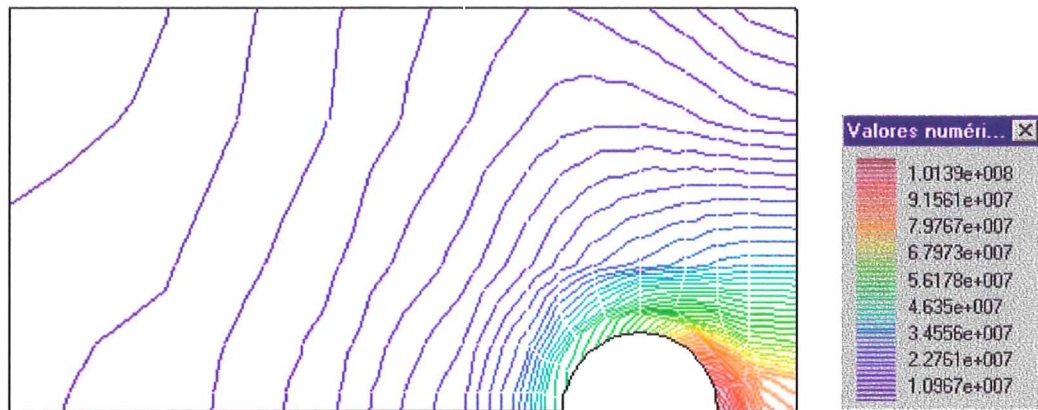


Figura 5-1.32

En la gráfica de la Figura 5-1.32 está representado el módulo del flujo de calor, si bien la forma y distribución de las curvas es la correcta, no coinciden los ordenes de los valores numéricos. El cálculo del flujo de calor por el método de graficación de flujo, en la zona de mayor flujo da un valor del orden de $1 \cdot 10^6$, es decir que tenemos mas de un orden de magnitud de diferencia.

5-2 Problemas en estado transitorio

5-2.1 Problemas unidimensionales

- Placa plana en estado transitorio, con condición de temperatura constante

Para realizar el estudio de este problema se ha considerado una placa de espesor 1.5, la cual se ha discretizado con 84 elementos triangulares de seis nodos. En la Figura 5-2.1, se muestra la geometría discretizada.

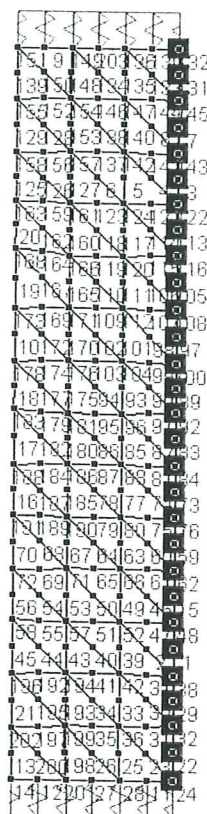


Figura 5-2.1

La solución analítica para el caso en que uno de los contornos de la geometría se mantiene a 0°C, sobre el otro contorno se aplica la condición de simetría y la temperatura inicial sea ϕ_0 , que para nuestro ejemplo toma el valor 100.

La ecuación diferencial que representa este fenómeno es:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{k_x}{\rho c} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

con las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dx} &= 0 & \text{en } x=0 & \text{ y } \phi=0 & x=L \\ \phi &= \phi_0 & \text{en } t=0 \end{aligned}$$

En este caso la solución en temperatura es del tipo:

$$\phi = \frac{4\phi_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} e^{-\left[\frac{k_x}{\rho c} (2n+1)^2 \pi^2 \frac{t}{L^2}\right]} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

Esta expresión admite una simplificación importante para tiempos grandes o valores de $k_x/\rho c$ mayores que 0.1. en este caso basta con calcular solo el primer término de la serie. Esto hace posible una representación gráfica de estos resultados, es decir, que para este caso uno puede hacer la solución mediante el uso de gráficas realizadas para este fin.

En nuestro ejemplo, sobre uno de los contornos de la geometría se ha prescrito una temperatura $\phi = 0^\circ\text{C}$ sobre el otro contorno se considera la condición de simetría e inicialmente la placa se encontraba a 100°C . Las propiedades del material son $k_x = 140000$, $k_y = 10$, $\rho c = 1400000$

En las Figuras 5-2.2 y 5-2.3 se muestran los gráficos de temperatura y flujo de calor para dos tiempos diferentes.

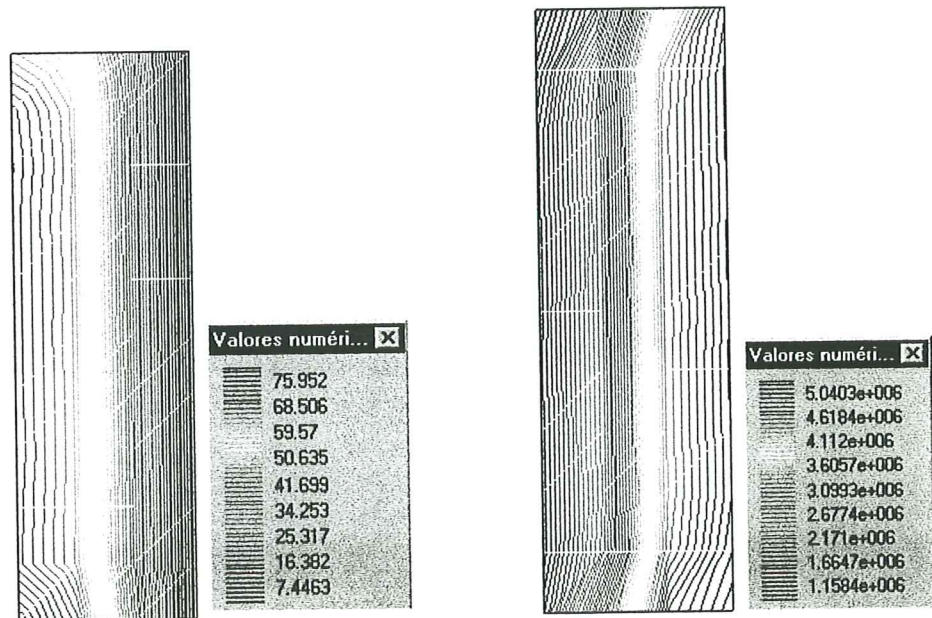


Figura 5-2.2

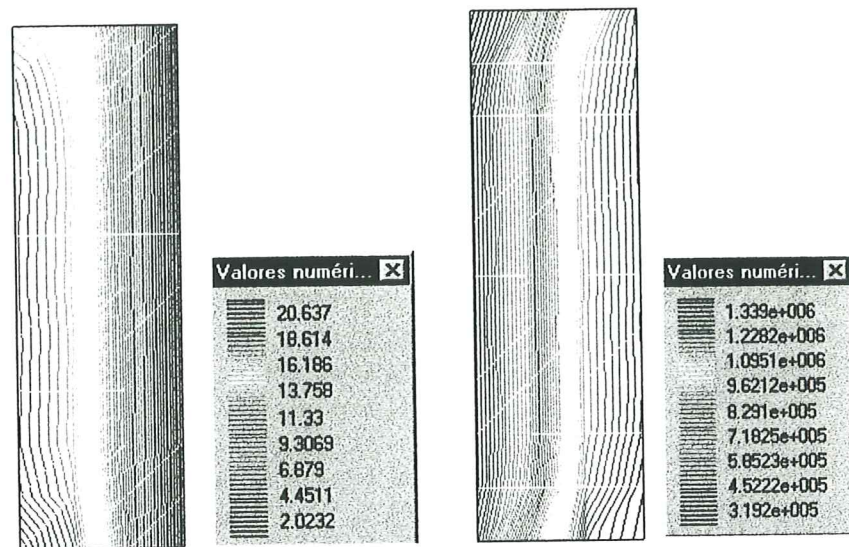


Figura 5-2.3

De la observación de las figuras anteriores se puede ver que la tendencia tanto de la temperatura como del flujo para tiempos distintos es la correcta, en el caso de la temperatura la misma tiende a la de estado estacionario que es de 0°C y en el caso del flujo de calor, al incrementarse el tiempo el flujo disminuye, cuando se alcance el estacionario el flujo de calor será cero.

Las temperaturas calculadas en forma analítica y numérica tienen buena coincidencia, y respecto del flujo de calor la solución presenta un error de aproximadamente del 10% respecto del valor teórico

A continuación se muestran en las graficas de las Figuras 5-2.4 y 5-2.5, la solución analítica y numérica de la evolución de temperatura y módulo del flujo de calor en el tiempo, en un punto de la geometría

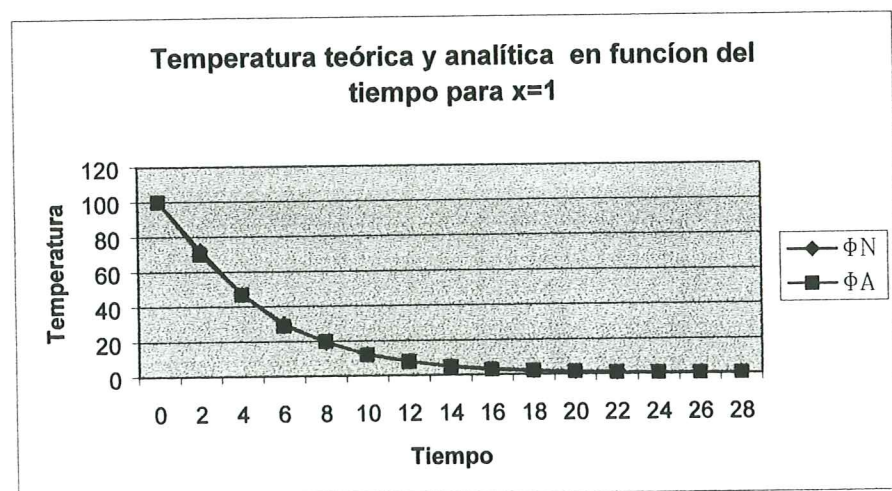


Figura 5-2.4

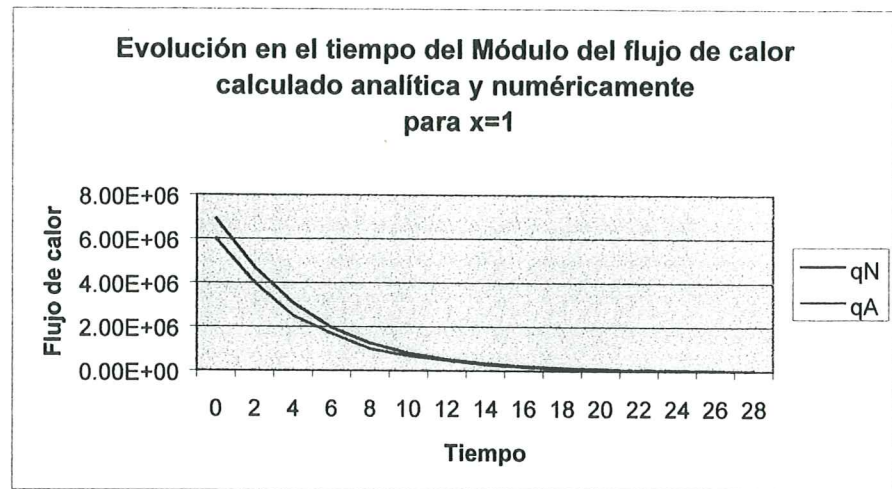


Figura 5-2.5

En la Figura 5-2.5, podemos apreciar que los valores del módulo del flujo de calor difieren de los valores analíticos en los primeros intervalos de tiempo siendo luego el ajuste mucho mejor.

- Placa plana con condición de temperatura inicial cero, con flujo de calor constante, q_0 , en uno de sus contornos y Temperatura cero en el otro

La geometría propuesta es la misma que la del caso anterior, con las mismas propiedades físicas. En este caso la temperatura inicial es cero, se prescribe en uno de sus contornos temperatura cero y en el otro un flujo de calor de 100000.

La solución analítica para este problema es:

$$\phi = \frac{2q_0x}{k_x} - \frac{8q_0L}{k_x\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} e^{\left[\frac{k_x(2n+1)^2\pi^2}{\rho c} \frac{t}{4L^2} \right]} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}$$

En el estado estacionario, el flujo de calor para este problema es constante e igual al calor que ingresa por el contorno, como flujo de calor prescrito, que en este caso, se le asignó un valor igual a 100000, como se puede apreciar en la gráfica de la Figura 5-2.6, es el valor al que tiende la solución a valores grandes de tiempo. Es decir que nuevamente la tendencia de la solución es correcta.

Respecto de los valores de temperatura, los mismos son coincidentes con los obtenidos por medio de la solución analítica

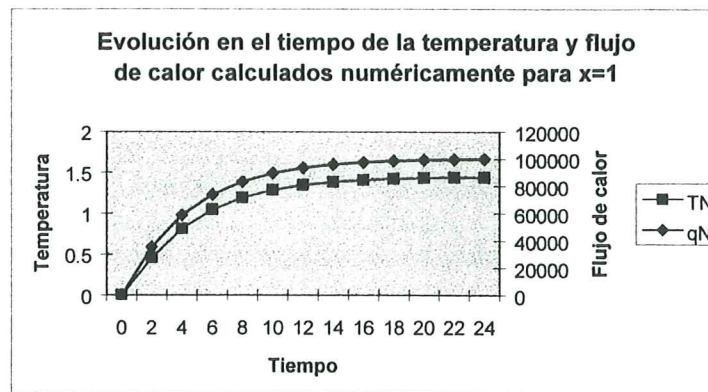


Figura 5-2.6

5-2.2 Problemas Bidimensionales

- Cilindro circular con temperatura inicial cero y su superficie exterior mantenida a la temperatura ϕ_0 constante.

En la Figura 5-2.7, se muestra la geometría que corresponde a este problema, la misma es un cilindro macizo de radio igual a 5. Se discretizo con 41 elementos triangulares de tres nodos. Las propiedades del material son $k_x = 140000$, $k_y = 140000$, $\rho c = 1400000$, la temperatura en el contorno prescrito es igual a 200.

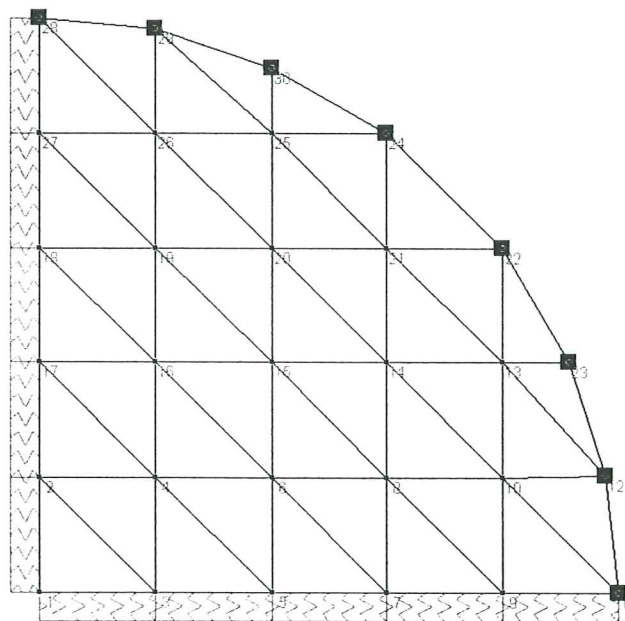


Figura 5-2.7

En este caso la expresión de la solución analítica es:

$$\phi = \phi_0 - \frac{2\phi_0}{r_e} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\left[-\frac{\rho c}{k} \alpha_n^2 t\right]} \frac{J_0(r \alpha_n)}{\alpha_n J_1(r_e \alpha_n)}$$

Donde:

r_e es el radio exterior del cilindro

J son las funciones de Bessel

α_n son las raíces positivas de $J_0(\alpha r_e) = 0$

Las solución de esta ecuación se suele presentar en forma gráfica de $\frac{\phi}{\phi_0}$ en función

de $\frac{r}{r_e}$ para distintos valores del parámetro $\frac{\rho c}{k} \frac{t}{r_e^2}$

En la Figura 5-2.8, se muestran los valores de temperaturas calculados analítica y numericamente, de la observación de la misma se vuelve a concluir que los valores numéricos son muy próximos a los valores analíticos es decir que el error que se comete es muy pequeño. En este caso la solución analítica de flujo de calor no fue calculada.

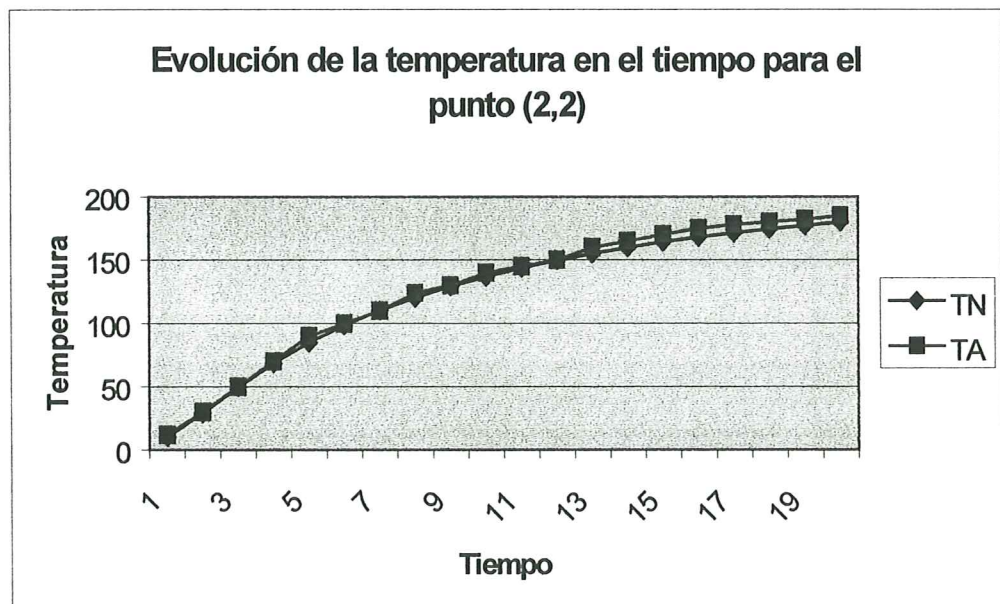


Figura 5-2.8

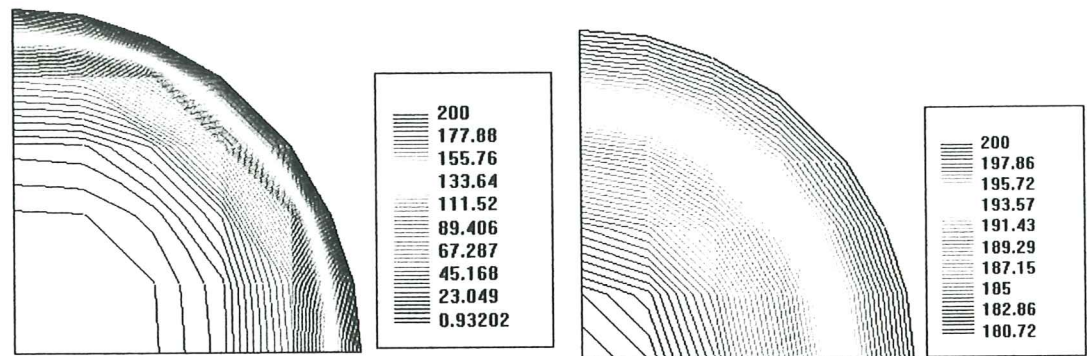


Figura 5-2.9

En las gráficas de la Figura 5-2.9 se muestran los diagramas de temperaturas para dos instantes de tiempos distintos. Vemos que en este caso las isoterms de temperaturas son radiales.

Aunque no se ha calculado analíticamente el flujo de calor se presentan las graficas de los resultados obtenidos pues físicamente la tendencia de evolución que presentan es correcta como se puede apreciar en las Figuras 5-2.10 y 5-2.11.

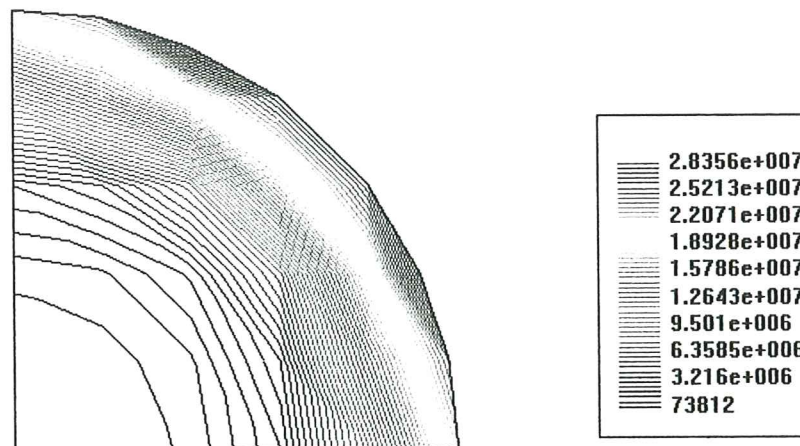


Figura 5-2.10



Figura 5-2.11

- Placa cuadrada con condiciones de contorno tipo Dirichlet en dos de sus lados y sus otros lados con condición de flujo de calor cero (Lados adiabáticos) o condición de simetría

En la Figura 5-2.11, se muestra la geometría que se analizará en este ejemplo, la misma es un cuadrado de lado 5, las propiedades del material son $k_x=k_y=140000$, $\rho c=1400000$, la temperatura en los contornos laterales es de 100°C . En la discretización se han utilizado 50 elementos triangulares de tres nodos.

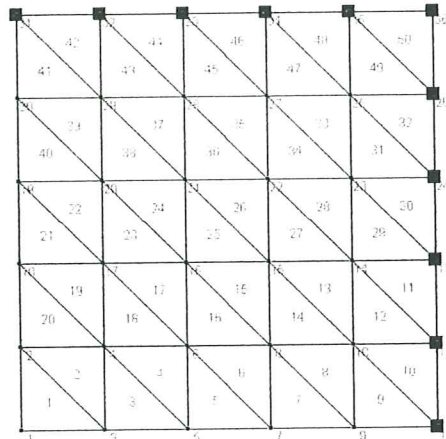


Figura 5-2.12

En un caso como este es fácil intuir que en el estado estacionario, la temperatura en toda la placa será uniforme e igual a 100°C y el flujo de calor será nulo. A estos valores es a los que debe tender el estado transitorio de este ejemplo.

Si intentamos resolver el caso estacionario la solución de flujo de calor que nos arroja el programa se puede visualizar en la Figura.5-2.13, Vemos que el programa de visualización ha representado una variación del flujo de calor. Esta gráfica es errónea aunque el resultado en sí mismo es correcto. A continuación se tratará de dar una explicación a esto.

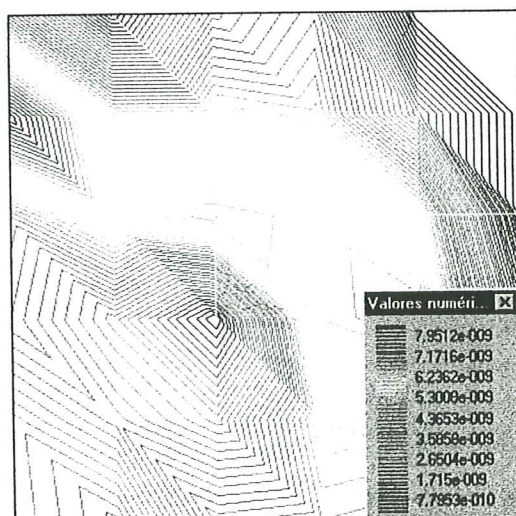


Figura 5-2.13

El postprocesador para representar los resultados lo que hace es tomar el mayor y menor valor que encuentra de la variable que representará gráficamente y los asigna como extremos del intervalo (puede verse esto en el cuadro de valores numéricos) y luego asigna los valores intermedios. En este caso tan particular, como mencionamos antes el flujo de calor es nulo, pero aquí debido a errores numéricos no da cero sino del orden de 10^{-9} que a los efectos de cálculo está dando bien pero el programa como tiene valores del mismo orden pero distinto valor numérico no lo considera como constante y debido a ello opera de la forma convencional produciendo una gráfica de distribución de flujos de calor. La conclusión muy importante que se quiere hacer notar es que siempre se deben analizar las gráficas de la visualización de los resultados en el post proceso con criterio físico, para asegurarse de que ante casos como este uno pueda evitar conclusiones erróneas respecto de los resultados obtenidos.

A continuación se muestran las gráficas de evolución de la temperatura y el flujo de calor en el tiempo, Figuras 5-2.14 y 5-2.15, para un nodo determinado de la malla, y para tres esquemas de integración temporal diferentes.

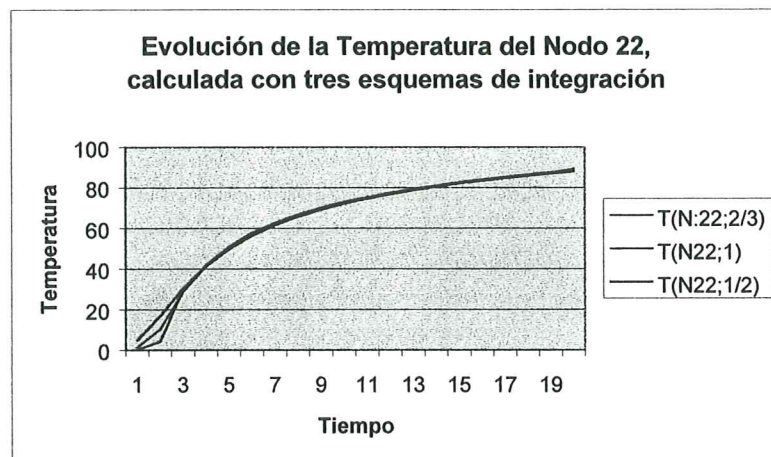


Figura 5-2.14

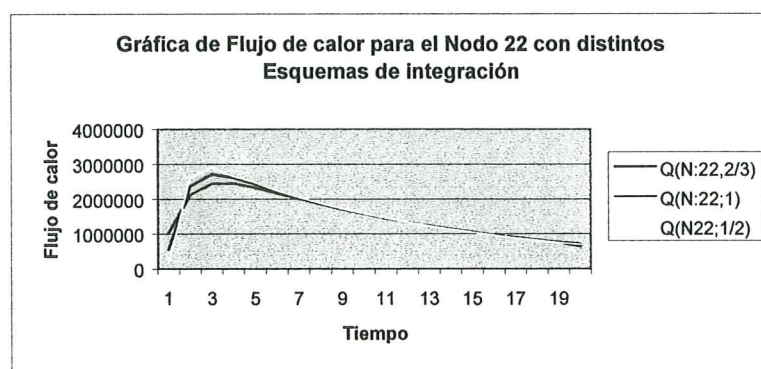


Figura 5-2.15

Se puede observar en ambas gráficas que los valores calculados mediante los tres esquemas de integración, $\alpha = 1/2$; $\alpha = 2/3$ (Galerkin) y $\alpha = 1$ (Integración hacia atrás) dan valores distintos para los primeros instantes de tiempo pero para tiempos mayores los valores son casi coincidentes.

Se incorporan a continuación algunas de las gráficas obtenidas en el post proceso realizado con GID durante el análisis de este simple ejemplo

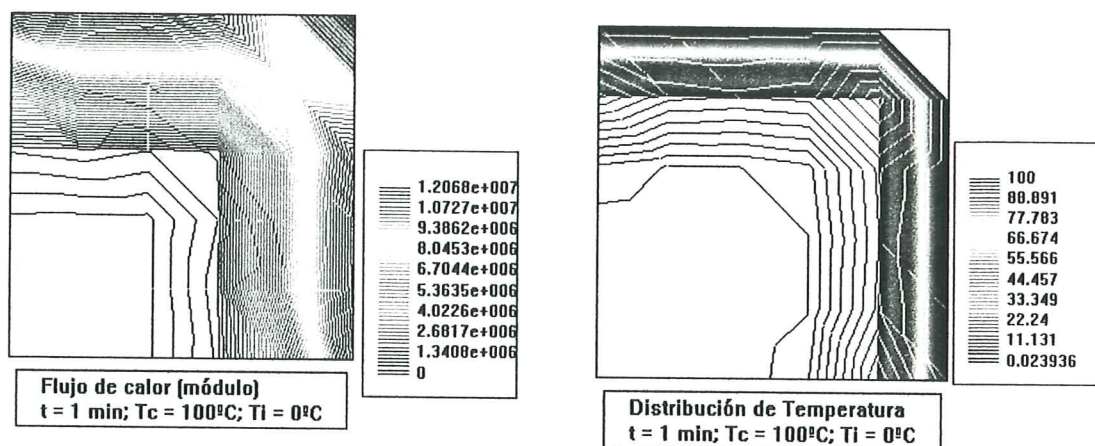


Figura 5-2.16

En las gráfica de la Figura 5-2.16, derecha e izquierda se muestra la forma de los perfiles de temperaturas y flujo de calor en el tiempo $t = 1$ min, de la grafica de temperatura se ve claramente como las isotermas son rectas paralelas a los lados con temperatura constante y la modificación de las mismas sobre el extremo de la placa debido a esta perturbación.

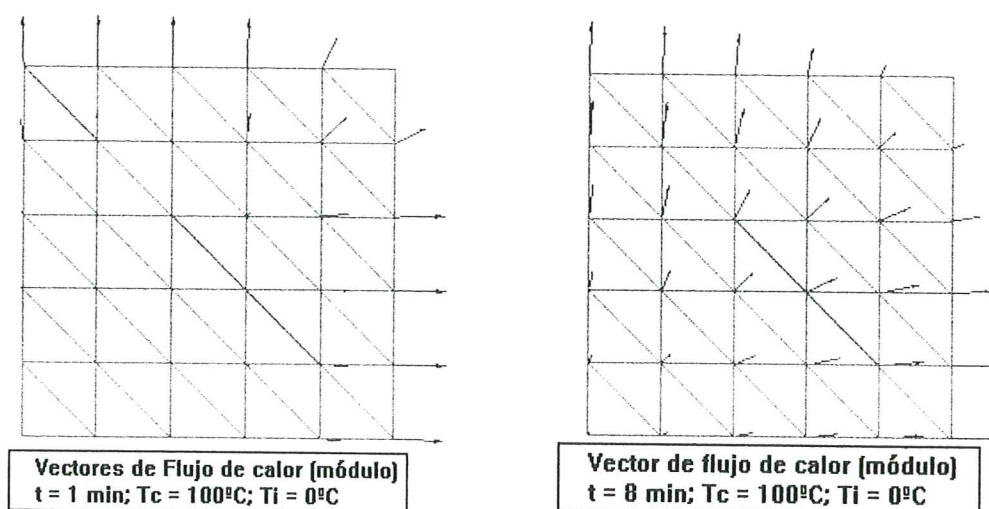


Figura 5-2.17

En estas dos últimas gráficas, Figura 5-2.17, se representa el Vector módulo del flujo de calor para dos tiempos distintos. En el se ve claramente como varía el flujo de calor en el tiempo Este tipo de representación es de mucha ayuda en el análisis de resultados, ya que visualmente es fácil de ver hacia donde se dirige el flujo de calor y donde hay menor o mayor flujo, cosa que con el otro tipo de gráficas no es tan directo. Este tipo de visualización no se puede realizar con el postprocesador del EDPOISS ya que el mismo no dispone de representación vectorial grafica de variables.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

En este capítulo se tratará de poner de manifiesto las características del programa EDPOISS, cuya validación fue objeto de este trabajo.

Presentaremos a continuación algunos comentarios generales respecto al uso de este programa y seguidamente las conclusiones más importante obtenidas durante el desarrollo del presente trabajo.

6-1 Comentarios generales

1. El proceso de instalación y desinstalación del programa es muy sencillo, de modo que es muy adecuado para aquellos que no han tenido demasiado contacto con los ordenadores. El programa original esta comprimido y protegido en dos disquetes con dos instalaciones, por si una fallara, pero se debe tener en cuenta que se puede instalar y desinstalar cuantas veces se desee.
2. El sistema de ayuda del bloque Edpoiss preproceso, proceso y postproceso esta muy bien diseñada para poder utilizarla a medida que el operario inexperto se relaciona con el programa, pero en los índices de ayuda ante cada comando que se explica se lo hace en forma literal y no se le ha incorporado el dibujo correspondiente. Esto dificulta el poder asociarse rápidamente con dichos comandos Respecto de la ayuda teórica, la misma es muy completa y esta desarrollada en una forma fácil de seguir.
3. Como herramienta educativa es muy poderosa, ya que introduce al operario del programa en la utilización práctica del método de los elementos finitos, explicando al mismo tiempo los detalles de cada una de las etapas del cálculo en una forma amplia, simple y en todo momento relacionando los valores numéricos de los cálculos que se van efectuando con sus expresiones matemáticas.
4. Desde el programa de proceso al de post proceso se tiene acceso directo, es decir estando en el programa de proceso, sin salir de el, se puede entrar en el de post proceso, no siendo de esta forma la relación entre el programa de pre proceso y proceso. Al no tener un acceso directo entre ambos, se pierde tiempo cuando

estando en el proceso, se desea cambiar algún dato de entrada y para ello debe salir del proceso, ingresar al preproceso, efectuar el cambio, salir e ingresar nuevamente en el proceso. Todo esto sería mucho más dinámico si se pudiese ingresar de un programa a otro directamente sin salir de uno de ellos.

5. El programa presenta limitaciones en el número de elementos y nodos en que puede discretizarse la estructura, limitando de esta forma la precisión de los resultados obtenidos en caso de tener geometrías grandes.
6. Al no disponer de un sistema de mallado automático, en caso de tener muchos elementos, la discretización de la geometría resulta engorrosa
7. Para mejorar los resultados es bueno tener en cuenta que se puede ingresar al fichero de datos y poder cambiar allí el número de puntos de gauss con la finalidad de aumentar la precisión del cálculo, ya que por defecto el programa asigna el mínimo número de puntos de Gauss correspondiente a cada configuración de los distintos elemento, por ejemplo, para el triángulo de tres nodos un solo punto de gauss y para el cuadrilátero de cuatro nodos dos puntos de gauss por cada dirección en el plano.
8. Una herramienta de visualización que no tiene el posproceso es el poder visualizar el flujo mediante vectores, esta forma de representación es muy útil, ya que, permite analizar el problema fácilmente cuando no se tiene demasiada experiencia con los otros tipos de representaciones.

6-2 Conclusiones

1. En este programa el cálculo del flujo de calor se realiza en los puntos de Gauss, es decir en estos puntos el valor es exacto, pero el que se asigna a los nodos se corresponde con el de flujo alisado. Dependiendo del tipo de alisado que se efectúe los valores tendrán mayor o menor exactitud. En este caso en particular el tipo de alisado que se aplica es un promedio simple de los valores en los puntos de Gauss, para poder visualizar esto supongamos tener una geometría discretizada con cuadriláteros de cuatro nodos (Figura 6-1).

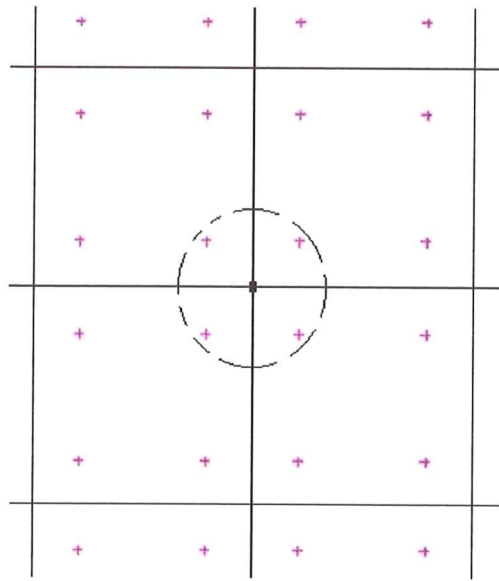


Figura 6 - 1

Para un nodo cualquiera como el señalado, Cuando se realiza el alisado lo que se hace es sumar los cuatro valores de flujo calculados en los cuatro puntos de gauss que rodean a ese nodo y que pertenecen a elementos diferentes y luego se lo divide por cuatro.

Indudablemente esta es una técnica de alisado un poco grosera, de allí que esto justifica que los valores de flujo calculados de esta forma presenten diferencias importantes respecto a los valores calculados en forma analítica.

2. Con la finalidad de mejorar la exactitud y precisión del cálculo, es recomendable tener siempre presente la posibilidad de trabajar con mayor cantidad de número de elementos, es decir, trabajar con elementos más pequeños, sin olvidarse de la limitación impuesta por el número máximo de elementos y nodos con que trabaja el programa.
3. El programa no trabaja en un sistema de unidades concreto, es muy importante, por lo tanto, introducir los datos en un sistema de unidades coherente. Cuando se habla de datos se incluye tanto las propiedades físicas como geométricas .
4. Tanto para el caso transitorio como para el estacionario siempre debemos prescribir una temperatura en algún punto del contorno de la geometría para que el programa efectúe el cálculo (Capítulo 3-6) Esta condición lamentablemente limita mucho el tipo de problemas que se puede resolver.
5. En la resolución de los problemas en estado estacionario, salvo la limitación presentada en el punto anterior (4), el programa resuelve todo tipo de problemas

con las distintas combinaciones de condiciones de contorno que se le impongan. En todos los casos si el problema esta bien condicionado arroja muy buenos resultados en la variable temperatura y con algún porcentaje de error, por lo mencionado en el punto 1, en la variable flujo de calor.

6. En los problemas desarrollados, tanto en los casos estacionarios como en los transitorios si bien el valor del flujo de calor presenta en ciertos casos errores de gran magnitud, la tendencia de los mismos es la correcta, con lo que se concluye que realmente la fuente de error en el cálculo del mismo es la clase de alisado que se efectúa.
7. En el estado transitorio, los problemas que resuelve están limitados a aquellos casos con temperatura prescrita y flujos de calor en los contornos, cuando se incorpora la condición de convección radiación en alguno de los contornos, el programa efectúa el calculo pero los resultados que arroja no son correctos. Es decir que de tener que resolver un problema con condiciones de convección- radiación, los resultados obtenidos no son confiables.
8. En los problemas transitorios, según el tipo de problema analizado la solución obtenida dependía fuertemente o no del esquema de integración temporal utilizado, en algunos casos se ha logrado un buen ajuste de los valores de evolución de temperatura en el tiempo, independientemente del esquema de integración utilizado, Galerkin o integración hacia atrás, en estos casos, los valores difieren un poco en los primeros instantes de tiempo, pero luego son coincidentes. En los casos más adversos se observó una discrepancia total entre los valores obtenidos por medio de los diferentes esquemas de integración temporal.
9. El postprocesador para representar los resultados lo que hace es tomar el mayor y menor valor que encuentra de la variable que representará gráficamente y los designa como límites superior e inferior y luego asigna los valores intermedios, si se necesita realizar una análisis más detallado de los valores que asume cada punto de la malla, es necesario ingresar a los archivos de resultados en donde se dispone de toda la información puntual. En estos archivos tenemos acceso a los valores calculados en los puntos de Gauss y de esta forma se puede ver que tanto afecta a la variable de interés el tipo de alisado que se efectúa , es decir cuan parecidos o dispares son los valores que se están promediando.
10. Cuando se ejecuta el post-proceso con determinados ejemplos de conducción de calor en **Estado transitorio**, no permite el acceso directo a la información del posproceso, apareciendo un mensaje de error. Este inconveniente se produce a consecuencia de que falla el mecanismo de traspaso de información entre el buffer de almacenamiento de resultados, generados en el proceso, y el archivo de escritura correspondiente (fenómeno denominado flush), que es desde donde lee el post-procesador los datos. En casos como este, se pueden visualizar los resultados cerrando el programa de posproceso y volviendo a ingresar en él

Transferencia de calor por conducción. Verificación del programa ED-Poiss

**S.I. Robles
F. Zárate**

Transferencia de calor por conducción. Verificación del programa ED-Poiss

S.I. Robles

F. Zárate

Publicación CIMNE Nº 161, Febrero 1999



FUNDACIÓ POLITÈCNICA DE CATALUNYA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

MASTER EN METODOS NUMERICOS PARA EL CALCULO Y DISEÑO EN INGENIERIA

“TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONDUCCION VERIFICACION DEL PROGRAMA ED-POISS”

Tesis de Master
Presentada por:

Sandra I. Robles

Dirigida por:

Francisco Zárate

Barcelona,

9/12/1998

PRESENTACIÓN

La resolución de todo problema de ingeniería requiere un proceso de abstracción en sentido directo e inverso, consistente en la creación de un modelo basado en las leyes de la física y de la química adecuadas para el sistema y proceso considerados, la resolución de las ecuaciones que definan el mismo mediante herramientas matemáticas, y la interpretación del resultado para adaptarlo a la realidad.

La creación de modelos que describan con precisión un cierto fenómeno natural no es en general difícil, lo difícil es resolver las ecuaciones planteadas y obtener resultados cuantitativos.

En el estudio de la conducción de calor en el interior de un sólido, si pretendemos ajustarnos a la realidad considerando medios anisótropos, con propiedades en función de la temperatura, condiciones de contorno con coeficientes variables con la temperatura, radiación y alteraciones de simetría, prácticamente no podríamos resolver ningún caso en forma analítica.

En definitiva, las soluciones posibles utilizando los métodos analíticos que se podrían denominar exactos, son extraordinariamente escasas y se reducen a unos pocos casos que ya han sido resueltos por los pioneros de la transmisión del calor.

Actualmente con el desarrollo y creciente potencialidad de los ordenadores existen una serie de técnicas numéricas que permiten resolver este tipo de problemas, y una de ellas, que es en la que centraremos nuestro estudio, es el Método de los Elementos Finitos. Merece destacarse que por ser un método aproximado con el pueden obtenerse soluciones a problemas variados y complejos.

La finalidad de este trabajo, es la validación de un programa de cálculo numérico de la ecuación de POISSON, usando para ello soluciones analíticas conocidas.

INDICE

Presentación

Objetivos y alcance de la Tesis.....	I
--------------------------------------	---

PARTE I:

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Capítulo 1 Fundamentos teóricos de la transferencia de calor por conducción

1-1 Introducción.....	1
1-2 Conceptos generales.....	2
1-2.2 Gradiente de temperatura.....	2
1-2.3 Flujo de calor- Ley de Fourier.....	3
1-2.4 Conductividad térmica.....	4
1-2.4.1 Conductividad térmica de sólidos.....	4
1-3 Ecuaciones que rigen este fenómeno.....	4
1-3.1 Simplificaciones de la Ecuación Diferencial de la conducción.....	8
1-4 Dominio y condiciones de contorno.....	9

Capítulo 2 El Método de los Elementos Finitos

2-1 Introducción.....	12
2-2 Ecuaciones básicas.....	12
2-3 Formulación básica.....	13
2-4 Discretización por Elementos Finitos.....	14
2-4.1 Aproximación de la temperatura.....	14
2-4.2 Aproximación del vector de gradientes	15
2-4.3 Aproximación del campo de flujos.....	15
2-5 Ecuaciones de la discretización.....	16
2-5.1 Caso Estacionario.....	16
2-5.2 Caso Transitorio.....	17

PARTE III:

EJEMPLOS DE APLICACION Y CONCLUSIONES

Capítulo 5 Resolución de problemas planteados

5-1 Problemas en Estado Estacionario.....	42
5-1.1 Problemas unidimensionales	42
5-1.2 Problemas Estacionarios Bidimensionales.....	47
5-2 Problemas en Estado Transitorio.....	64
5-2.1 Problemas Unidimensionales.....	64
5-2.2 Problemas Bidimensionales.....	67

Capítulo 6 Conclusiones

6-1 Comentarios generales.....	74
6-2 Conclusiones.....	75

OBJETIVOS Y ALCANCE DE LA TESIS

El curso de Master del cual esta Tesina es consecuencia, es mi primer contacto con los métodos numéricos y programación en ordenadores. Debido a esta situación, he abordado un tema que me permita incursionar en las distintas etapas del proceso de aplicación de este método, persiguiendo el aprendizaje de conceptos básicos de la técnica de los Elementos Finitos.

El trabajo que se presenta tiene como objetivo fundamental, la validación del programa EDPOISS, el cual es un programa educativo de Elementos Finitos, que resuelve la Ecuación de Poisson, que rige entre otros fenómenos la transmisión de calor por conducción. La validación del mismo se efectuará mediante la comparación de resultados obtenidos de la resolución de problemas con solución analítica conocida.

Además, se explicará de forma detallada como resolver un problema con esta herramienta y por otra parte se analizará y valorará diversos aspectos referentes a este programa.

Sandra Isabel Robles
Barcelona, Diciembre 1998

PARTE I

FUNDAMENTOS TEORICOS

ANEXO

Nomenclatura

ϕ	Temperatura [°C]
t	Tiempo [minutos]
ρ	Densidad [Kg/m ³]
C	Capacidad calorífica [Joule /m ³ °C]
$q_v=\rho r$	Densidad de calor por generación interna [Watt/m ³]
k	Conductividad térmica [W/m°C]
α	Coefficiente de convección - radiación [W/m ² °C]
λ	Difusividad térmica [m ² /s]
D	Matriz constitutiva formada por las conductividades térmicas
$\bar{q}$	Flujo de calor externo
Γ_ϕ	Contorno donde esta prescrita la temperatura
Γ_q	Contorno donde esta prescrito el flujo
Ω	Dominio total de la geometría considerada

Capítulo 1

Fundamentos Teóricos de la transferencia de calor por conducción

1-1 Introducción

La transferencia de calor es la ciencia de los procesos espontáneos irreversibles de propagación de calor en el espacio. Por proceso de propagación de calor se entiende como el cambio en energía interna entre elementos individuales, siendo estos regiones del medio considerado.

El calor puede transmitirse en tres formas distintas, por *conducción*, por *convección* y por *radiación*.

Conducción de calor: Se la identifica como el proceso de transporte molecular de calor en los cuerpos debido a variaciones de temperatura en el medio considerado. La conducción *pura* solo es posible en los sólidos

Convección de calor: Este fenómeno solo es posible en medios fluidos. Este término se aplica al transporte de calor que ocurre cuando volúmenes de un medio fluido se mueven desde regiones a una dada temperatura a otra de temperatura diferente. En este caso el transporte de calor está ligado con el movimiento del medio.

Radiación térmica: es el proceso de propagación de calor a través de ondas electromagnéticas dependiendo este proceso solo de la temperatura y las propiedades ópticas del emisor. El proceso involucra la conversión de la energía interna en energía de radiación.

Centraremos nuestro estudio en la *conducción del calor* ya que los programas de Elementos Finitos que se utilizaron para este trabajo (EDPOISS y CALTEP) realizan el cálculo de la transferencia de calor solo por este mecanismo y con propiedades constantes.

El gradiente de temperatura es un vector normal a la superficie isotérmica y positivo en la dirección de las temperaturas crecientes. Es numéricamente igual a la derivada de la temperatura en esa dirección, es decir:

$$\text{grad } \phi = n_0 \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (1-2.3)$$

Donde:

$\vec{n}_0$: Vector unitario normal a la superficie isotérmica y positivo en la dirección de temperaturas crecientes.

$\frac{\partial \phi}{\partial n}$: Derivada de la temperatura a lo largo de la normal

El valor del gradiente de temperatura, no es el mismo para diferentes puntos de la superficie isotérmica, y es mayor cuanto menor es la distancia entre las superficies. Aquí nos referiremos al valor del gradiente de la temperatura como la magnitud del mismo, el cual se considera negativo en la dirección de temperaturas decrecientes.

1-2.3 Flujo de calor- Ley de Fourier

La propagación del calor requiere que la distribución de temperaturas en el medio considerado sea no uniforme. Esto implica que la transferencia por conducción requiere que el gradiente de temperatura en varios puntos del cuerpo sea mayor que cero. De acuerdo con la ley de Fourier, la cantidad de calor dQ_t que pasa a través de un elemento de una superficie isotérmica dF por intervalo de tiempo dt es proporcional al gradiente de temperatura, esto es:

$$dQ_t = -K \frac{\partial \phi}{\partial n} dF dt \quad (1-2.4)$$

El factor de proporcionalidad K , en la ecuación (1-2.4), define la habilidad de la sustancia para conducir el calor, y se la denomina *conductividad térmica*.

La cantidad de calor transferida a través de la unidad de área de superficie isotérmica por unidad de tiempo se la denomina velocidad de flujo de calor y es un vector determinado por la relación:

$$\vec{q} = -n_0 K \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (1-2.5)$$

El vector velocidad de flujo de calor es normal a la superficie isotérmica, y es positivo en la dirección de temperaturas decrecientes, debido a que el calor siempre fluye desde las secciones más calientes del cuerpo a las más frías. Consecuentemente, los vectores $\vec{q}$ y $\text{grad } t$, están sobre la misma recta pero en direcciones opuestas, lo que explica el signo menos en la ecuación (1-2.4) y (1-2.5)

(b) *Parámetros físicos constantes*

(c) *La deformación del sólido considerado, causada por variaciones de temperatura, es muy pequeña en relación a su volumen total*

(d) *Las fuentes de calor internas [que en el caso general pueden ser del tipo $q_v=f(x,y,z,t)$] están uniformemente distribuidas en el sólido.*

La derivación de la ecuación diferencial de conducción está basada sobre la Ley de Conservación de la Energía, que para nuestro propósito se puede formular de la siguiente forma:

La cantidad de calor dQ , que ingresa a un elemento de volumen por conducción desde el exterior y de las fuentes de calor internas, durante el intervalo de tiempo dt es igual al cambio en energía interna o entalpía de la sustancia contenida en ese volumen

$$dQ_1 + dQ_2 = dQ \quad \text{Ec(1-3.1)}$$

Donde:

dQ_1 : Cantidad de calor que ingresa al volumen elemental en el intervalo de tiempo dt

dQ_2 : Cantidad de calor liberada dentro del elemento de volumen dv por las fuentes internas de energía, en el intervalo de tiempo dt .

dQ : Cambio en la energía interna o entalpía de la sustancia contenida en dv en el tiempo dt .

De forma de desarrollar cada uno de los términos de la ecuación (1-3.1), consideraremos un paralelepípedo elemental con lados dx , dy , dz , dibujado de forma tal que sus lados sean paralelos a los planos coordenados, tal como se muestra en la Figura 1-1

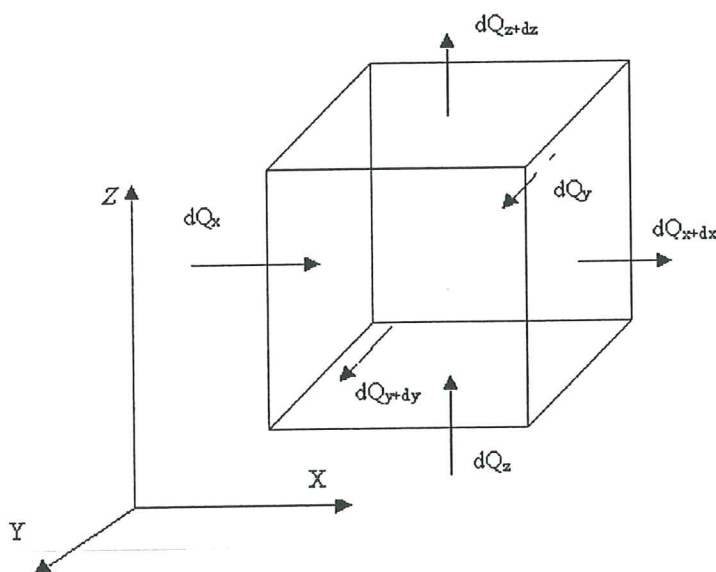


Figura 1-1

El tercer término de la ecuación(1-3.1), depende de la naturaleza termodinámica del proceso.

En el caso de un proceso isocórico (volumen constante) todo el calor transferido al elemento de volumen será utilizado en cambiar la energía interna de la sustancia confinada en este volumen, esto es: $dQ = dU$

Considerando la energía interna por unidad de volumen como $u = u(t, \phi)$ podemos definir:

$$dU = C_v \frac{\partial \phi}{\partial t} dt dv = c_v \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} dt dv \quad (e)$$

Donde:

C_v : capacidad calorífica a volumen constante por unidad de volumen, $J/m^3 K$

c_v : capacidad calorífica a volumen constante por unidad de masa, J/KgK

ρ : densidad de la sustancia, Kg/m^3

Sustituyendo los resultados obtenidos en (c), (d) y (e) en la ecuación (1-3.1), tenemos

$$c_v \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_v \quad (1-3.2)$$

$$c_v \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\text{div } \vec{q} + q_v$$

la expresión de la ecuación (1-3.2), es la *Ecuación Diferencial de Energía para procesos de transferencia de calor a Volumen Constante*

En los sólidos la transferencia de calor obedece la ley de Fourier.:

$$\vec{q} = -K(\nabla \phi)$$

. Debemos recordar que las proyecciones del vector que representa la velocidad de flujo de calor sobre los ejes coordenados ox , oy , oz se determinan por las expresiones:

$$q_x = -k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad q_y = -k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad q_z = -k_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Sustituyendo en la ecuación (1-3.2), las expresiones obtenidas para las proyecciones del vector flujo de calor, obtenemos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{c_p} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] + \frac{q_v}{c_p} \quad (1-3.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{c_p} \text{div} (K \text{ grad } \phi) + \frac{q_v}{c_p} \quad (1-3.4)$$

La expresión (1-3.3), como la ecuación(1-3.4), se denominan ecuaciones diferenciales de la conducción. Establece la relación entre las variaciones de temperatura en el espacio y el tiempo.

La ecuación(1-3.4), tiene la misma forma que aquella que representa el caso más general con propiedades variables, es decir $\lambda(x,y,z,t)$, $c(x,y,z,t)$ y $\rho(x,y,z,t)$, para

- Si consideramos la existencia de fuente de calor interna, pero el campo de temperaturas corresponde a una conducción estacionaria, esto es $T = T(x,y,z)$, la ecuación diferencial de conducción se la conoce con el nombre de **Ecuación de POISSON**

$$\frac{K}{cp} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{cp} = 0 \quad (1-3.6)$$

- Finalmente, para el caso de estado estacionario sin fuentes de energía interna, la ecuación(1-3.) toma la forma de la **Ecuación de LAPLACE**:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (1-3.7)$$

1-4 Dominio y condiciones de contorno

Debido a que la ecuación diferencial de conducción está basada en leyes generales de la física, describe el fenómeno de conducción en el caso más general. Por lo tanto, se puede decir que esta ecuación diferencial describe toda clase de fenómenos de conducción. Para particularizar un proceso de los muchos posibles y darle una descripción matemática completa, es necesario disponer de una descripción matemática de todas las peculiaridades particulares del proceso considerado. Estas particularidades o características conjuntamente con la ecuación diferencial dan una descripción matemática completa del proceso de conducción de calor en consideración.

- (a) *Características geométricas*
- (b) *Condiciones físicas*
- (c) *Condición inicial de temperatura*
- (d) *Condiciones de contorno*

- (a) **Características geométricas:** están determinadas por la forma y tamaño del cuerpo
- (b) **Condiciones físicas :** están dadas por sus propiedades físicas, tales como K , ρ , c_v etc.
- (c) **Condiciones iniciales,** estas deben suministrarse en el caso del estudio de procesos transitorios; Establecen la ley de distribución de la temperatura en el cuerpo, en el momento inicial. En el caso general, puede describirse analíticamente como:

$$\text{En } t = 0 \quad \phi = f(x, y, z) \quad (1-4.1)$$

Si la distribución de temperaturas es uniforme la condición inicial se representa:

Este tipo de ley describe la transferencia de calor entre el cuerpo y sus alrededores durante el enfriamiento o calentamiento del cuerpo. Este proceso se describe a través de la ley de Newton.. De acuerdo con esta ley, la cantidad de calor que se extrae por unidad de superficie del cuerpo, en la unidad de tiempo, es proporcional a la diferencia entre la temperatura ϕ_s del sólido y la temperatura del medio ϕ_f :

$$q = \alpha(\phi_s - \phi_f) \quad (1-4.6)$$

Donde α es un factor de proporcionalidad, denominado coeficiente de transferencia de calor. Sus unidades son por ejemplo: $W/m^2.K$.

El coeficiente de transferencia de calor es la medida de la intensidad de calor transferido entre la superficie del cuerpo y su entorno, y es numéricamente igual a la cantidad de calor ganado o perdido por unidad de área, unidad de tiempo con una diferencia de temperatura de un grado entre la superficie y el entorno.

De acuerdo con la ley de conservación de la energía, la cantidad de calor que se extrae por unidad de área en la unidad de tiempo, Ecuación (1-3.1), es igual a la cantidad de calor que ingresa al cuerpo (Ecuación (1-2.5))

$$\alpha(\phi_s - \phi_f) = -K \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_s \quad (1-4.7)$$

Donde n es la normal a la superficie del cuerpo, y el subíndice s indica que la temperatura y el gradiente de temperaturas pertenecen a la superficie.

las condiciones de contorno de tercera clase pueden finalmente escribirse como:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_s = -\frac{\alpha}{K}(\phi_s - \phi_f) \quad (1-4.8)$$

(d.4) - Condiciones de contorno de cuarta clase

Definen el proceso de conducción de calor entre cuerpos simples o sistemas de cuerpos y su entorno. Se asume que los cuerpos están en perfecto contacto (las superficies en contacto están a la misma temperatura). Bajo estas condiciones los flujos de calor a través de las superficies de contacto son iguales, esto es:

$$K_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right)_w = K_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right)_w$$

Dado un problema descrito por la ecuación (1-3.5), el objetivo que se plantea es conocer en cualquier punto del dominio el campo escalar de temperaturas y el campo de flujos o gradientes.

Un análisis riguroso precisa de la integración de la ecuación diferencial (1-3.5) que expresa el fenómeno. El planteamiento matemático-analítico de dichas ecuaciones da lugar a la formulación continua del problema.

Otra forma de resolver el mismo problema es a través del MEF con el cual podemos conocer los campos anteriores en cualquier punto del dominio a partir de los valores hallados en ciertos puntos. Para ello es necesario dividir el dominio en subdominios (elementos finitos) formando una malla. El planteamiento de las ecuaciones que se obtienen y su resolución dan lugar a la formulación discreta del problema.

Dirichlet, que fija la temperatura ϕ , a un dado valor sobre un contorno particular y (b) Cauchy que fija el gradiente de la temperatura normal a la superficie.

$$(a) \quad \phi - \bar{\phi} = 0 \quad \text{en } \Gamma_{\phi} \quad (2-2.2)$$

$$(b) \quad n^T q + \alpha(\phi - \phi_{\text{ext}}) + \bar{q} = 0 \quad \text{en } \Gamma_q \quad (2-2.3)$$

En las ecuaciones anteriores $\bar{\phi}$ es la temperatura con valor conocido en la frontera, α representa al coeficiente de convección radiación, $\bar{q}$ es el flujo o gradiente de la temperatura, con valor conocido en la frontera, ϕ_{ext} es la temperatura en el exterior del dominio, mientras que el resto de las variables quedan definidas con las siguientes expresiones:

Vector de normales al contorno:

$$n = [n_x, n_y]^T$$

Vector gradiente de temperatura:

$$q_n = [q_x, q_y] = -Dg = -D\nabla\phi$$

En donde el gradiente corresponde a:

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right]^T$$

Dependiendo de los valores seleccionados para la ecuación 2-2.3, es posible reproducir los siguientes casos en el contorno:

- (a) *Contorno aislante*. Conocido matemáticamente como condición de Neuman o condición de contorno natural que representa un flujo de calor cero en la interface del dominio con el medio circundante, de manera que:

$$n^T q = -\bar{q} \quad \text{por lo que} \quad \bar{q} = 0 \quad \text{y} \quad \alpha = 0$$

- (b) *Contorno con pérdida o aporte de flujo externo*:

$$n^T q = -\bar{q} \quad \text{por lo que} \quad \alpha = 0$$

- (c) *Contorno con pérdida o aporte de calor por convección – radiación*. En este caso existe una interacción del calor existente en el exterior ϕ_{ext} y la temperatura del dominio ϕ que de acuerdo con las leyes de la termodinámica se presentará un flujo en la interfase, representado por:

$$n^T q = -\alpha(\phi - \phi_{\text{ext}}) \quad \text{con lo que} \quad \alpha \neq 0$$

El factor α estrictamente representa el fenómeno de convección, mientras que el fenómeno de radiación sigue una ley más compleja pero que a efectos de simplificación se puede expresar de igual manera, por lo que α representa la contribución de ambos.

2-3 Formulación básica

La aplicación del método de los elementos finitos exige como punto de partida la existencia de una forma integral expresando el equilibrio global del sistema. Dicha forma integral puede obtenerse aplicando el método de los residuos ponderados a la ecuación diferencial (2-2.1) y las condiciones de contorno (2-2.3) quedando expresado como:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} W \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q \right] dx dy = & - \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial W}{\partial x} k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] dx dy + \\ & + \iint_{\Omega} W Q dx dy + \int_{\Gamma_q + \Gamma_p} W \left[k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} dy + k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} dx \right] \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Adoptando $\bar{W} = -W$, tras sustituir lo obtenido en la ecuación 2-3.4, en la ecuación 2-3.3, ésta nos queda:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial W}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial W}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] dx dy + \iint_{\Omega} W \left[\rho c \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] dx dy + \int_{\Gamma_q} \alpha W \phi d\Gamma = \\ \iint_{\Omega} W Q dx dy - \int_{\Gamma_q} W [q - \alpha \phi_{ext}] d\Gamma - \int_{\Gamma_p} W q d\Gamma \end{aligned} \quad (2-3.5)$$

La ecuación 2-3.5 es igual a la ecuación 2-3.2, desarrollada para dos dimensiones y sin estar expresada en forma compacta.

La resolución analítica de esta ecuación es imposible en la mayor parte de los casos, por ello es necesario efectuar una aproximación discreta del problema.

2-4 Discretización por elementos finitos

2-4.1 Aproximación de la temperatura

Los elementos finitos permiten calcular la temperatura en cualquier punto interior de los mismos, interpolando su valor a partir de los hallados en los nodos. Para ello se define la matriz de funciones de interpolación N (también llamadas funciones de forma) y se expresa la temperatura ϕ , de un punto cualquiera del interior del elemento en función de las temperaturas de sus nodos $a^{(e)}$

$$\phi(x, y) = N(x, y) a^{(e)} \quad (2-4.1)$$

En un problema de Poisson el valor del campo de un punto cualquiera está definido por una única componente escalar. Asimismo el vector de temperaturas o de valores del campo en todos los nodos de la malla está compuesto por una única componente en cada uno de esos nodos, genéricamente en el nodo i del elemento (e) :

Se define el vector de funciones de forma como:

$$N = [N_1, \dots, N_i, \dots, N_n] \quad N_i = [N_i(x, y)]$$

Con las propiedades siguientes de las funciones de forma :

2-4.3 Aproximación del campo de flujos

A partir de la ecuación siguiente

$$q = -D\nabla\phi$$

es fácil deducir la expresión discretizada del campo de flujos.

$$q = -DBa^{(e)} \quad (2-4.3)$$

Donde D es la matriz constitutiva que contiene los coeficientes de conductividad térmica.

2-5 Ecuaciones de la discretización

Sustituyendo la discretización 2-4.1, 2-4.2 en 2-3.2 y haciendo $W = N$ (método de Galerkin) se obtiene un sistema matricial de ecuaciones que puede escribirse en la forma:

$$C \frac{\partial a}{\partial t} + Ka = f \quad (2-5.1)$$

En 2-5.1, a, es el vector de incógnitas que contiene la temperatura de todos los nodos de la malla, y C, K, f son la matriz de capacidad térmica o matriz de masa, matriz de rigidez global del dominio, y el vector de flujos nodales equivalentes que pueden obtenerse ensamblando las contribuciones elementales definidas por:

$$C^{(e)} = \int_{\Omega} \rho c N^T N \frac{\partial \phi}{\partial t} \partial \Omega^{(e)}$$

$$K^{(e)} = \int_{\Omega} B^T D B \partial \Omega^{(e)} + \alpha \int_{\Gamma_q} N^T N \partial \Gamma_q^{(e)}$$

$$f^{(e)} = \int_{\Omega} N^T \rho r \partial \Omega - \int_{\Gamma_q} N^T q \partial \Gamma_q + \int_{\Gamma_q} N^T \alpha \phi_{ext} \partial \Gamma_q^{(e)} - \int_{\Gamma_{\phi}} n^T N^T q_n \partial \Gamma_{\phi}^{(e)}$$

El cálculo de las integrales anteriores se suele realizar con técnicas numéricas de integración o bien explícitamente cuando sea factible.

Las matrices y vectores elementales se ensamblan en las correspondientes expresiones globales en la forma usual.

2-5.1 Caso Estacionario

La solución estacionaria implica únicamente resolver el sistema de ecuaciones:

$$C_{Dii} = \sum C_{ij} \quad (2-5.4)$$

$$C_{Dij} = 0$$

en dónde la diagonal de la matriz de capacidad calorífica es la suma de todos los elementos contenidos en la fila i-ésima.

Diagonalización por conservación de capacidad calorífica

Se expresa por:

$$C_{Dii} = p \int_{\Omega} N_i^T \rho c N_i d\Omega \quad (2-5.5)$$

$$C_{Dij} = 0$$

con:

$$\sum C_{ii} = \int_{\Omega} \rho c d\Omega = p$$

de manera que la nueva matriz C conserve la misma capacidad calorífica que la matriz original.

NOTA: podemos decir que el planteamiento discreto comporta:

- Dividir el dominio en una malla de elementos finitos (se divide el dominio en elementos hasta cubrir la totalidad de la superficie).
- Aplicar la ecuación de Poisson sobre el dominio y aprovechar las propiedades matemáticas que conllevan los elementos finitos para obtener finalmente un sistema de ecuaciones algebraicas.
- Resolver el sistema y obtener el resultado del campo incógnita (temperatura ya que todos los demás derivan de él).

Este es el proceso estándar de resolución de un problema. El programa ED-Poiss de resolución de la ecuación de Poisson, lo realiza según las etapas que se enumeran a continuación y que se presentarán en detalle en el capítulo 4.

- 1- Cálculo de la rigidez del dominio
- 2- Cálculo del vector de temperaturas nodales equivalentes
- 3- Imposición de las condiciones de contorno
- 4- Resolución del sistema lineal de ecuaciones
- 5- Cálculo de flujos
- 6- Cálculo de flujos reacción

En la Figura 2-1, se muestra el esquema del **Diagrama de flujo de Cálculo** sobre el que está basado EDPOISS.

Capítulo 3

Presentación de los programas usados

3-1 Introducción

Los programas usados para el desarrollo de este trabajo fueron:

- EDPOISS
- CALTEP

CALTEP es un programa para el cálculo de la ecuación de POISSON transitoria y estacionaria . Este módulo solo es el de proceso (cálculo), razón por la cual para efectuar el análisis de un problema hay que utilizar un preprocesador (generación y dibujo de la malla) , en este caso CALGEN, y un post procesador gráfico, GID, para la visualización en forma gráfica de los resultados. El programa caltep esta escrito en Fortran . La extencion del archivo de resultados es .RES, el archivo de entrada .DAT

No se darán detalles de Calgen (generador de malla) y de CALTEP solo los necesarios, ya que en sus manuales correspondientes se puede encontrar toda la información necesaria respecto del uso y definiciones de los mismos. En este trabajo simplemente se ha utilizado Caltep en aquellos ejemplos que no se pudieron resolver con EDPOISS.

EDPOISS es un paquete de programas que contiene los tres módulos, el preproceso, el proceso, y el post proceso. Sus archivos de resultados se pueden visualizar también con GID, que es un poco más potente ya que incluye algunas herramientas de representación de resultados adicionales. Los archivos que genera el preprocesador son extensión .GEN, los del proceso son .DAT y los del post proceso son.....

Se mencionan las extensiones de los archivos pues uno puede ingresar en ellos para disponer de la información que contienen.

3-2 Tipo de problemas que se pueden resolver

Tanto mediante el uso de EDPOISS como de CALTEP se pueden resolver el mismo tipo de problemas, los cuales se mencionan a continuación:

- (a) Estacionario
- (b) Transitorio sin diagonalización
- (c) Transitorio con diagonalización por suma de filas

material de la malla realiza una serie de comprobaciones básicas que garanticen mínimamente la ausencia de errores antes de comenzar el cálculo de las matrices y vectores de cada elemento y, al no encontrar una temperatura prescrita en algún punto del contorno, directamente no realiza el cálculo. Esto es un FALLO o limitación de este programa, ya que cuando hay contornos con convección/radiación no es necesario prescribir una temperatura, debido a que la matriz de rigidez en este caso no será singular ya que esta condición contribuye con un término adicional sobre ella evitando la singularidad de la misma. Con CALTEP este fallo que acabamos de mencionar no ocurre, es decir este tipo de problemas se pueden resolver con este programa.

- Otra limitación que presenta es cuando uno intenta ejecutar el post-proceso con determinados ejemplos de conducción de calor en Estado Transitorio, en este caso no nos permite el acceso directo del post-procesador al archivo de resultados de ese ejemplo. Este inconveniente se produce a consecuencia de que falla el mecanismo de transpaso de información entre el buffer de almacenamiento de resultados, generados en el proceso, y el archivo de escritura correspondiente (fenómeno denominado flush), que es desde donde lee el post-procesador los datos, bajo estas circunstancias, un debe salir del postproceso y volver a ingresar al archivo de resultados para poder así visualizarlo.

El programa Edpoiss permite trabajar con mayor número de nodos y elementos que CALTEP. Como referencia, se citan a continuación las limitaciones más importantes de CALTEP.

3-6.1 Limitaciones de CALTEP

Los valores límites que admite el programa CALTEP, para la resolución de problemas, son los siguientes:

- Máximo número de nodos : 200
- Máximo número de elementos :200
- Máximo número de dimensiones: 3
- Máximo número de materiales :10
- Máximo número de grados de libertad: 3
- Máximo número de nodos prescritos: 200
- Máximo numero de nodos por elemento: 27
- Máximo número de prescripciones nodales : 200
- Máximo número total de temperaturas nodales : 600

c- Definición de la geometría y de la malla Se deben crear uno a uno los elementos que componen la malla. Para ello se selecciona el modo de edición de creación de elemento. Para cambiar un nodo de su posición original se utiliza el modo de edición de nodo con el que se puede editar la posición del nodo dentro de la malla.

d- Imposición de temperaturas en los nodos Simplemente seleccionando el tipo de prescripción que se desea imponer en los nodos. La prescripción puede ser:

- d.1 Temperatura prescrita: Prescribe la temperatura en un nodo.
- d.2 Temperatura inicial: prescribe una temperatura inicial para el proceso de análisis transitorio.
- d.3 Convección / Radiación: Impone la existencia de convección /Radiación en un lado del elemento perteneciente al contorno.

e- Flujos puntuales y externos y generación interna de calor:

- e.1 Generación interna de calor: Es una de las opciones globales del problema.
- e.2 Flujos puntuales nodales: flujos aplicados en los nodos.
- e.3 Cargas distribuidas en un lado : Flujo y temperatura externa actuantes sobre un lado del elemento.

Y por último, una vez generados todos estos datos, se salvan en un archivo en el formato deseado y se procede a su análisis mediante el programa ED-Poiss.

4-1.2 Generación de un Problema – Entrada de Datos

a - Selección del tipo de análisis

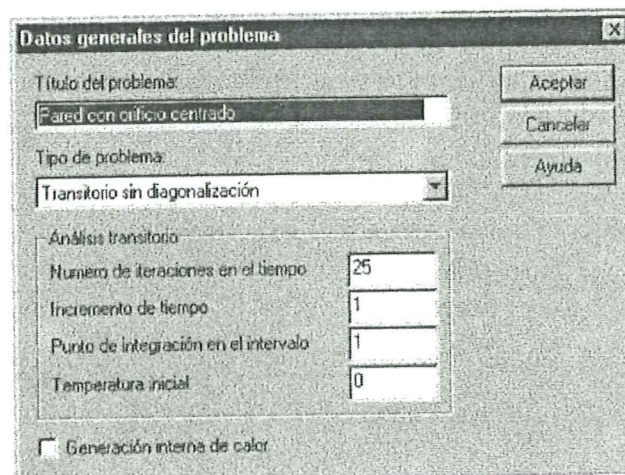


Figura 4-1.1

La primera operación que se realiza es la selección del tipo de análisis que se efectuará, para ello del menú EDICION, opción PROBLEMA se despliega la caja de diálogo que se muestra en la Figura 4-1.1, sobre la cual uno define lo siguiente:

La opción Material del menú de Biblioteca ofrece la posibilidad de seleccionar el tipo de material utilizado para realizar el análisis.

ED-Poiss-preproceso muestra la caja de diálogo Biblioteca de materiales donde se puede realizar la selección, creación, edición o borrado de materiales.

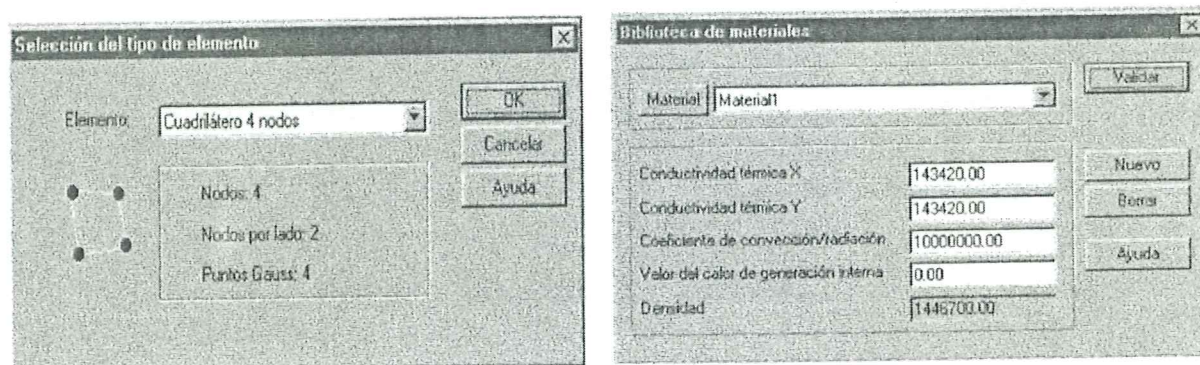


Figura 4-1.2

En la Figura 4-1.2 podemos observar la selección del tipo de elemento a utilizar y las propiedades que debemos suministrar para que el material quede bien definido. (ver ecuación 1-3.3)

- . Conductividad térmica en la dirección x, K_x
- . Conductividad térmica en la dirección y, K_y
- . Coeficiente de convección/radiación. α
- . Valor del calor de generación interna q_v
- . Densidad. Aquí lo que se menciona como densidad en realidad es el producto de la *densidad por la capacidad calorífica* ($\rho \cdot C$)

Unidades: si bien el programa no trabaja en un sistema de unidades concreto, es importante, por tanto introducir los datos en un sistema de unidades coherente. A continuación se muestra un ejemplo.

Propiedad	Unidades
$k: (k_x, k_y)$	$W/m^{\circ}C$
α	$W/m^2 \cdot ^{\circ}C$
q_v	W/m^3
$\rho \cdot C$	$Joule/m^3 \cdot ^{\circ}C$

Una vez definido el tipo de análisis a realizar, propiedades de los materiales y el elemento, se debe proceder a dibujar la geometría del problema y la malla deseada. Para ello en primer lugar se debe definir la escala gráfica de representación que aparecerá en la pantalla activando la opción **Dibujo** del menú **Opciones**. En el cuadro de diálogo que aparece, Figura 4-1.3, se fijan los valores mínimos y máximos de las coordenadas x e y, así como los aspectos activados/desactivados que se deseen obtener en la pantalla

Importante: Cuando se borra algún elemento para reemplazarlo por otro, una vez finalizadas todas las correcciones sobre la malla, se debe reenumerar la estructura sino al querer salir del preproceso nos indicara un error. Para reenumerar se debe desplegar el menú **Herramientas** opción **Renumerar**

Finalizada la malla, con los elementos reenumerados, el proceso de entrada de datos se completa, introduciendo seguidamente las condiciones de contorno. En la Figura 4-1.4, se muestra el ejemplo seleccionado con sus condiciones de contorno sobre el lateral superior, temperatura prescrita, sobre el lateral derecho condición de convección - radiación.

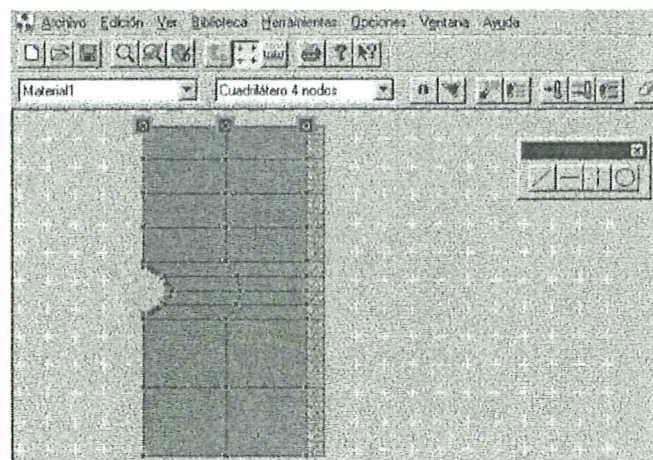


Figura 4-1.4

Las condiciones de contorno se pueden aplicar usando los botones de la barra de herramientas, a continuación se presentan los mismos:

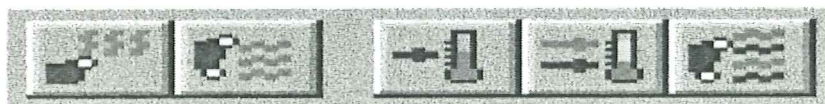


Figura 4-1.5

El primer botón a la izquierda de la Figura 4-1.5, se utiliza para definir la condición de flujo puntual sobre los nodos. (Ecuación 2-2.3)

El segundo botón se utiliza para introducir flujo de calor sobre los contornos, es decir para imponer condiciones de contorno del tipo 2-2.3: Contorno aislante, Pérdida o aporte de flujo externo, convección/radiación (En este último caso es para ingresar el flujo y la temperatura del medio con el cual intercambia calor).

El tercero define la condición de temperatura prescrita, al activarlo en la caja de dialogo solicita el valor de temperatura. (Ecuación 2-2.2)

El cuarto sirve para definir la temperatura inicial en un problema transitorio (Ecuación 1-4.1), se utiliza cuando tengo distintas temperaturas iniciales en los nodos de la geometría. Si la temperatura inicial es uniforme, directamente defino su valor en la caja de diálogo del menú **Edición – Problema**.

El quinto sirve para definir cuales son los contornos con condición de convección radiación.

Los datos creados pueden guardarse presionando el botón correspondiente y dando un nombre al archivo, en este caso TT.GEN.

1.3 - Aparece la caja de diálogo de cálculo. Se realiza el proceso mostrado, si el elemento está sometido a procesos de convección/radiación se calcula la matriz de convección y a continuación se ensambla la matriz del elemento en la matriz de rigidez global, siguiendo las instrucciones que aparecen en la pantalla.

1.4 - Repetir el proceso para todos los elementos del dominio.

2- Cálculo del vector de temperaturas nodales equivalentes El usuario selecciona un elemento cargado y realiza el cálculo del vector de temperaturas nodales equivalentes. Si el elemento no está cargado el vector equivalente es cero, por lo que no es necesario calcularlo. A continuación, y una vez calculado éste, se ensambla en el vector del dominio. Para ello el usuario debe:

2.1 - Del menú **Cálculo** seleccionar la opción **Vector temperaturas elemental**.

2.2 - Seleccionar con el botón izquierdo del ratón un elemento cargado y no calculado.

2.3 - Aparece la caja de diálogo de cálculo. En esta caja aparecen los diferentes estados de carga a los que está sometido el elemento. Los casos de carga en gris no afectan al elemento.

2.4 - Se resuelven uno por uno todos los casos.

2.5 - Se ensambla el vector del elemento en el vector de temperaturas global, siguiendo las instrucciones que aparecen en la pantalla.

2.6 - Repetir el proceso para todos los elementos del dominio.

3- Imposición de las condiciones de contorno El usuario selecciona un nodo con temperatura prescrita, es decir un nodo apoyado e impone las condiciones de contorno. Para ello:

3.1 - Del menú **Cálculo** seleccionar la opción **Condiciones de contorno**.

3.2 - Seleccionar con el botón izquierdo del ratón un nodo con temperatura prescrita y no calculado.

3.3 - Aparece la caja de diálogo de cálculo.

3.4 - Se imponen las condiciones de contorno siguiendo las instrucciones de la pantalla.

3.5 - Repetir el proceso para todos los nodos coaccionados o prescritos.

4- Resolución del sistema lineal de ecuaciones. Del ensamblaje de las matrices de rigidez y los vectores de flujos de cada elemento se ha llegado a un sistema lineal de ecuaciones del tipo:

$$K u = f$$

Para resolver el sistema simplemente:

4.1 - Del menú **Cálculo** seleccionar la opción **Resolución sistema**.

4.2 - Aparece la caja de diálogo de cálculo.

4-2.2 Ejemplo de aplicación del esquema de resolución de un problema

Se desarrollará a continuación el cálculo del problema presentado en la sección 4-1.2, se ha seleccionado el nivel avanzado para resolverlo pues el nivel principiante e intermedio limitan la cantidad de elementos en que esta discretizada la geometría.

Al iniciar el programa POISSON proceso, se adopta primero el nivel de resolución , avanzado, se abre el archivo correspondiente tt.GEN , el programa carga el archivo verificando en primer lugar los datos de entrada y si esta todo correcto lo muestra en pantalla.

4-2.2.1 Cálculo de la matriz rigidez de la estructura

Se comienza seleccionando la opción matriz de rigidez del menú **Cálculo** o el botón correspondiente de la barrar de botones y se procede a evaluar la matriz de rigidez de cada elemeto de la malla. En la pantalla aparece el elemento seleccionado con su numeración local y global, los puntos de Gauss(en este caso hay cuatro), y las expresiones analíticas utilizadas. En este modo de resolución el programa no muestra cada una de las operaciones que realiza, pero es posible conocerlas con solo presionar sobre los botones que corresponden a cada término auxiliar.

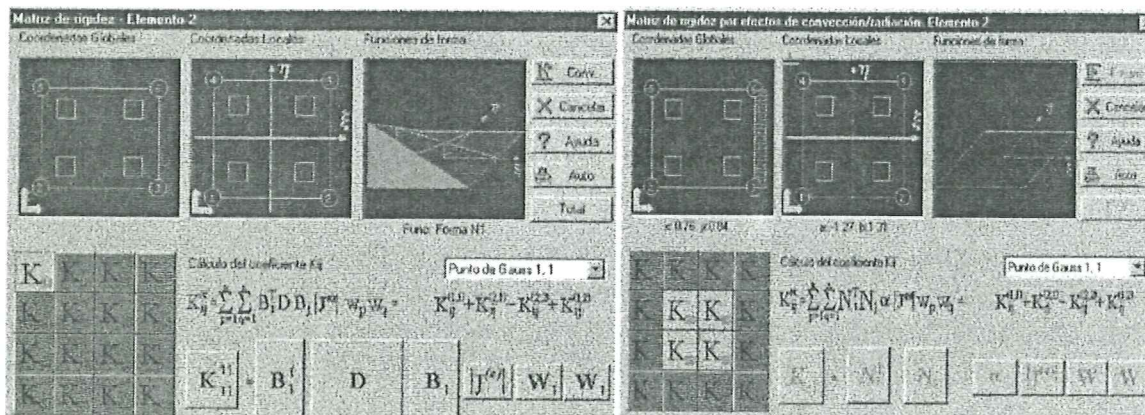


Figura 4-2.1

a - Matriz de rigidez elemental

En la Figura 4-2.1 (izquierda) podemos observar el cálculo de la submatriz k_{11} del elemento 2 , ya calculada todas las anteriores, puede verse en esta figura que el primer botón a la derecha no indica el ensamble de todas ellas sino K(conv), ello indica que este elemento tiene sobre uno de sus lados la condición de convección radiación. La etapa siguiente es calcular la contribución de esta condición sobre la matriz de rigidez (Figura 4-2.1 derecha) aparecen los términos que contribuyen en este fenómeno.

b - Ensamblaje

Terminado el cálculo de la matriz de rigidez del elemento considerado hay que ensamblarla en la matriz de rigidez total, Figura 4-2.2 derecha. El procedimiento puede ser manual, paso a paso o bien automático mediante la opción Auto.

b – Ensamblaje

Finalizado el cálculo del vector de temperaturas nodales elementales del elemento 2, seguidamente debe ensamblarse en el vector de fuerzas total. El ensamblaje puede realizarse manualmente o bien en forma automática mediante el botón Auto. En la Figura 4-2.4 (Izquierda), puede verse el vector de cargas del elemento 2 ensamblado en el vector de flujos equivalentes global.

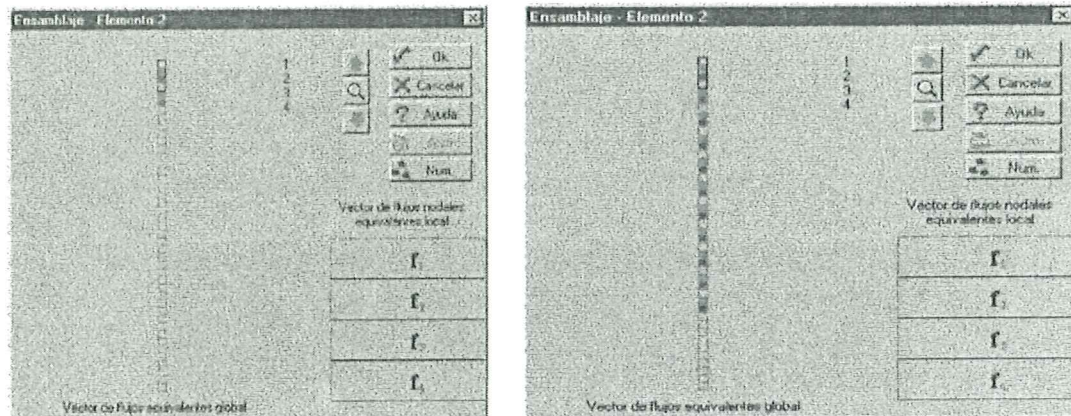


Figura 4-2.4

c – Vector de temperatura nodal total

El proceso descrito en los apartados anteriores se repite para cada elemento de la malla y como resultado final se obtiene el vector de temperaturas nodales global del sistema. Figura 4-2.4 (derecha).

4-2.2.3 Condiciones de contorno (Temperaturas prescritas)

Activando el botón correspondiente a la barra de botones o seleccionando la opción **Condiciones de contorno** del menú **cálculo** pueden introducirse los nodos con temperatura prescrita (En el ejemplo 31, 32, 33). Así por ejemplo, en la Figura 4-2.5 puede verse la pantalla resultante al introducir las condiciones del nodo 33 de la malla, que afectan el grado de libertad 33, después de haber incorporado las otras dos.

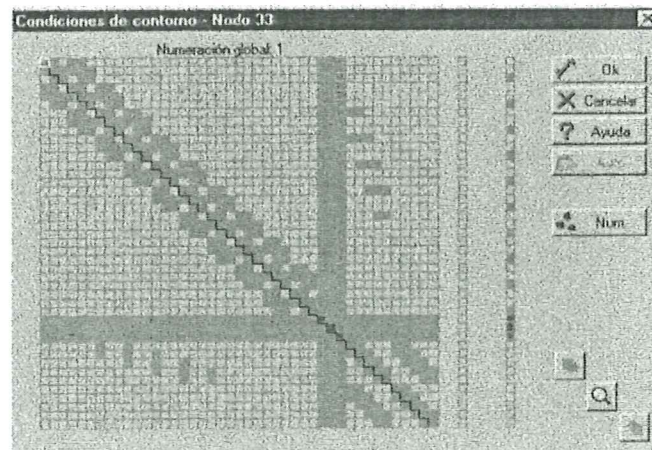


Figura 4-2.5

Cuando uno realiza el cálculo del vector de flujos, como podemos observar en la figura 4-2.7, el programa no nos habilita a el ingreso de la opción OK, es decir que la única posibilidad que hay es de que lo calcule en forma automática en todos los puntos.

4-2.2.6 Cálculo de los flujos de reacción

El cálculo de las reacciones en los nodos prescritos es el punto final del análisis del problema. Para ello, se activa el botón correspondiente de la barra de botones o la opción **Reacciones** del menú **Cálculo**. En pantalla aparece una flecha acompañada con la letra R que permite elegir los nodos restringidos. Una vez seleccionado uno de estos se presenta la matriz de rigidez indicando el grado de libertad afectado y presionando Fórmula puede verse la expresión analítica utilizada para el cálculo de las reacciones de dicho nodo. En este ejemplo se ha seleccionado el nodo 32, Figura 4-2.7 (izquierda). Si se quiere tener acceso a los valores numéricos de los coeficientes del sistema de ecuaciones se presiona sobre los botones situados en la parte inferior derecha de la pantalla.

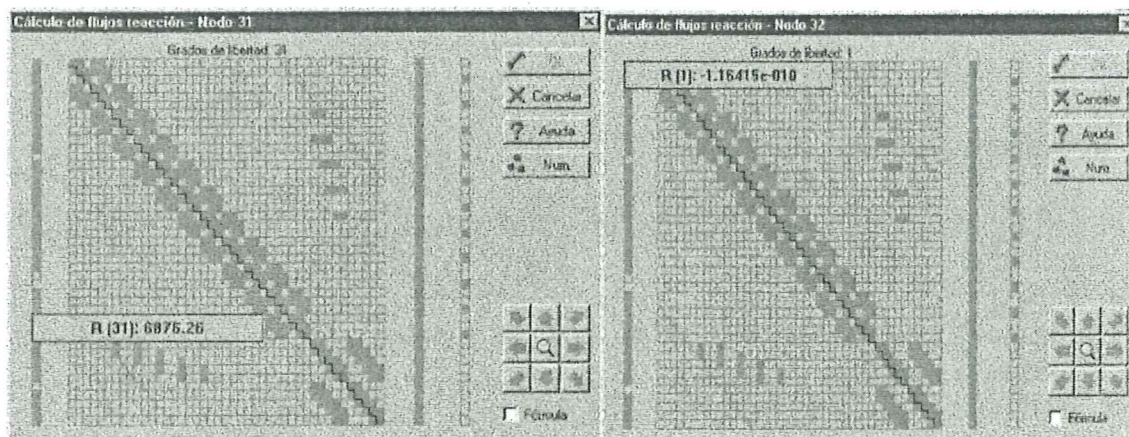


Figura 4-2.7

Puede observarse en la figura 4-2.7 (izquierda), que la opción OK, no esta activada, esto es porque en realidad no es necesario que efectuemos el cálculo nodo por nodo, sino que el programa ya lo ha calculado de antemano, es decir que cuando ingresamos con el primer nodo prescrito si recorremos la primera columna que aparece que es la que corresponde a las reacciones de los nodos prescritos veremos que ya están calculados sus valores.

En la Figura 4-2.7 (derecha), podemos observar que en nodos no prescritos nos arroja un valor de flujo de reacción, esto se debe a error de redondeo del ordenador, los valores son del orden de 1.10^{-10} .

Etiquetas: Muestra la caja de diálogo que permite modificar las etiquetas: mostrar u ocultar la numeración de los nodos, elementos, puntos de Gauss etc.

PostScript: Genera un archivo de impresión PostScript.

4-3.2 Ejemplo de visualización de resultados:

1. Se abre un archivo de resultados en nuestro caso t.res: Para abrir el archivo seleccione la opción del menú **abrir**. En la pantalla aparecerá el contorno de la geometría del problema seleccionado, como se muestra en la Figura 4-3.1 izquierda.

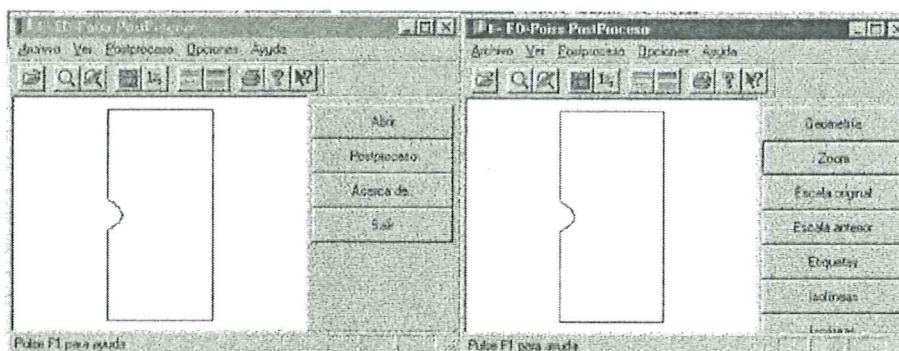


Figura 4-3.1

2. Se selecciona a continuación la opción **postproceso** de la barra de botones o del Menú. Se desplegará sobre la barra de botones las diferentes opciones de análisis, Figura 4-3.1 derecha.
3. Se selecciona el estado de carga (Esta opción es solo para los problemas transitorios, es el instante de tiempo en el que se desea visualizar los resultados del cálculo, en un problema transitorio es la primera definición que debemos dar): Seleccione la opción **selección del estado de carga** del menú **opciones**. Seleccione el análisis y el paso que desee. En las Figuras 4-3.2 se muestran las pantallas que aparecen cuando se selecciona esta opción.

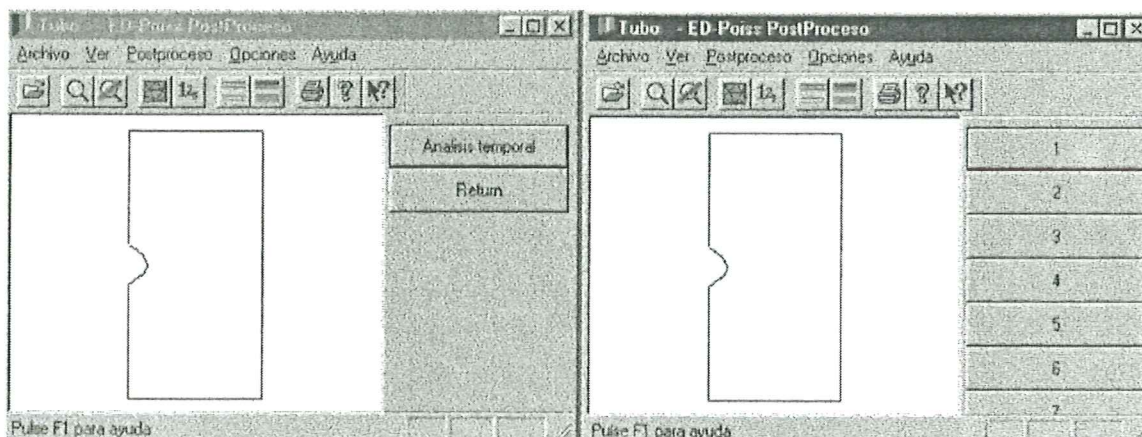


Figura 4-3.2

En la Figura 4-3.4 Izquierda, se presenta la gráfica de las isoáreas del módulo del flujo suavizado y en la figura derecha la representación de las las isolíneas.

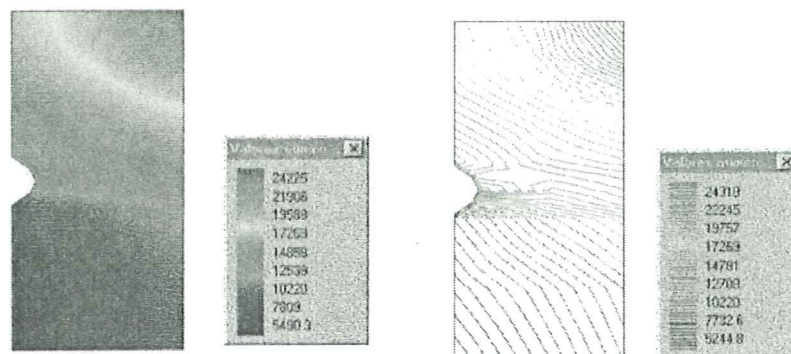


Figura 4-3.4

Nota : Cuando uno intenta ejecutar el post-proceso con determinados ejemplos de conducción de calor en **Estado transitorio**, aparece un cuadro de diálogo como el que se muestra en la Figura 4-3.5, no permitiendo el acceso directo del post-procesador al archivo de resultados de ese ejemplo. Este inconveniente se produce a consecuencia de que falla el mecanismo de transpaso de información entre el buffer de almacenamiento de resultados, generados en el proceso, y el archivo de escritura correspondiente (fenómeno denominado flush), que es desde donde lee el post- procesador los datos.



Figura 4-3.5

En este caso se debe salir del postproceso y volver a ingresar para poder visualizar los resultados obtenidos.

• Placa plana con condiciones de contorno tipo Dirichlet

En este caso la ecuación diferencial que representa este problema es la ecuación de Laplace, con las siguientes condiciones de frontera:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad \begin{aligned} T(x) &= T(0) = T_0 & \text{en } x = 0 \\ T(x) &= T(L) = T_L & \text{en } x = L \end{aligned}$$

La ecuación 1.1 se puede separar e integrar dos veces para obtener:

$$T(x) = c_1 * x + c_2$$

evaluando las constantes de integración c_1 y c_2 , a través de la aplicación de las condiciones de frontera, nos conduce a la expresión final del tipo:

$$T(x) = T_0 - \frac{T_0 - T_L}{L} * X$$

De acuerdo a la ecuación anterior, la variación de temperatura es lineal.

Para el calculo del flujo de calor se puede usar la Ley de Fourier :

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx}$$

Dado que en estado estable q_x es constante, directamente se separa e integra esta ecuación llegando a la expresión:

$$q_x = \frac{kA}{L} (T_0 - T_L)$$

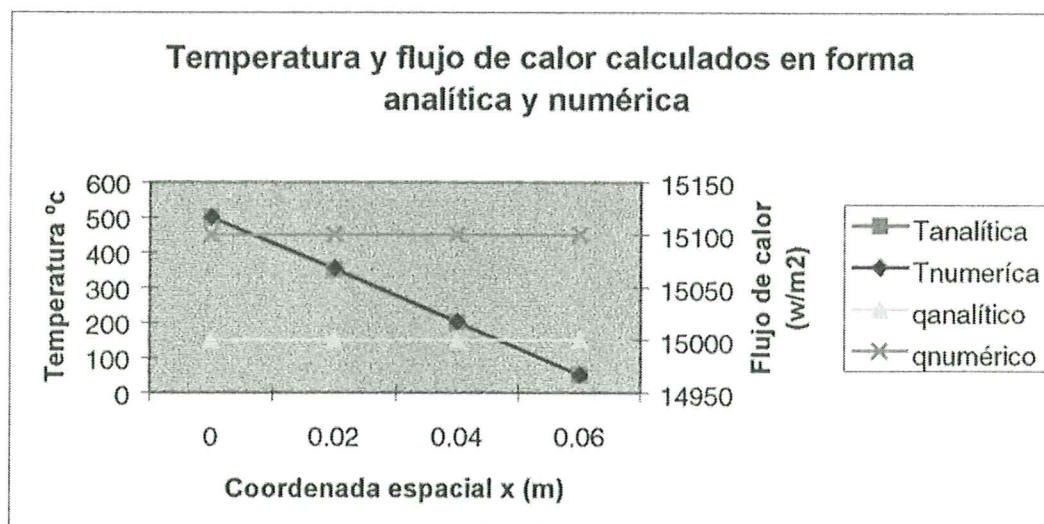


Figura 5-1.2

En la Figura 5-1.1, podemos observar que los valores de temperatura calculados analítica y numéricamente casi no difieren. Intuitivamente se esperaban estos resultados ya que la variación del campo de temperaturas es de tipo lineal y el campo de flujo de calor constante y los elementos usados son triángulos de tres nodos cuyas funciones de

La representación de los extremos se debe a errores de redondeo en el cálculo.

Sobre este mismo esquema se considerara ahora el caso en que exista generación interna de calor:

• Placa con generación interna de calor

La ecuación que representa el fenómeno es:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{q_v}{k} = 0 \quad \text{con:} \quad \phi(x=L) = 50^\circ\text{C} \quad \text{y} \quad \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_{x=0} = 0$$

Cuya solución es:

$$\phi(x) = T_L + \frac{\dot{q}}{2k}(L^2 - x^2)$$

$$\frac{q_x}{A} = \dot{q} x$$

A continuación se muestra en la Figura 5-1.5, la gráfica los valores de la solución analítica y numérica de temperatura y flujo de calor. Se debe tener en cuenta que el valor asignado a la generación de energía interna es de 1000.

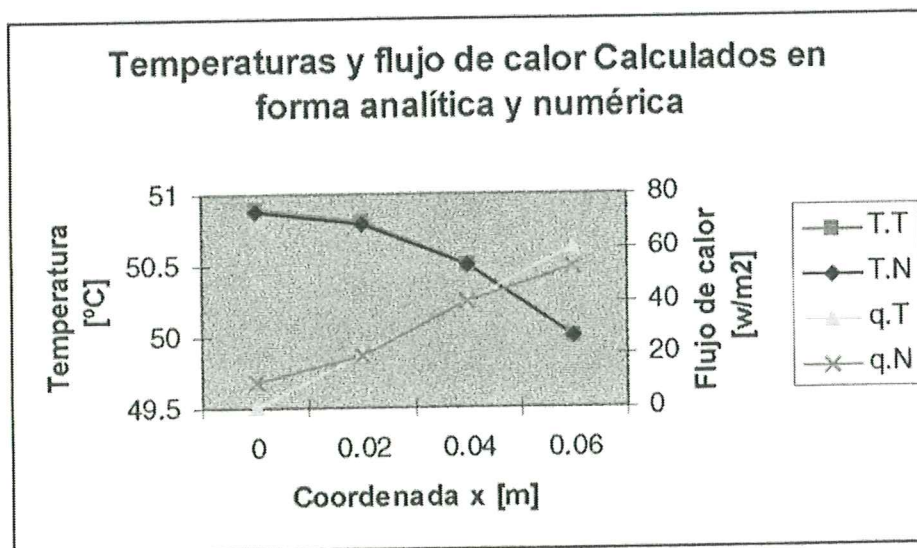


Figura 5-1.5

En la misma se observa que:

5-1.2 Problemas Estacionarios Bidimensionales

- Transferencia de calor en un cilindro hueco con temperatura constante en las paredes laterales del mismo. Condición de contorno de Dirichlet (archivo sanpe.gen)

En la Figura 5-1.7, se muestra la geometría del problema considerado. La misma es un cilindro de diámetro interior 4 y diámetro exterior 7. las propiedades adjudicadas al material fueron $k_x=k_y=140000$. Se ha utilizado para la discretización una malla de 36 elementos triangulares de tres nodos

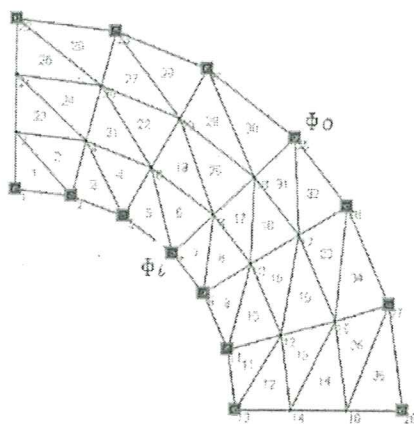


Figura 5-1.7

Para la conducción de calor estable a través de una pared cilíndrica en la dirección radial, la ecuación de Laplace toma la forma:

$$\frac{d}{dr} = \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = 0$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene:

$$\phi = C_1 \ln r + C_2$$

Aplicándole las condiciones de frontera de tipo Dirichlet:

$$\phi(r_i) = \phi_i \quad ; \quad \phi(r_o) = \phi_o$$

Se llega a la Ecuación que representa la distribución de temperaturas:

$$\phi = \phi_i - \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_o}{r_i}} (\phi_i - \phi_o)$$

La ecuación que representa el flujo de calor es:

$$\frac{q}{A} = k * \frac{1}{r} * \frac{(\phi_i - \phi_o)}{\ln \frac{r_o}{r_i}}$$

En las gráficas de las Figuras 5-1.8 y 5-1.9, se muestran los valores de la solución analítica (en rojo) y numérica (en azul), tanto de temperatura, como de flujo de calor para el caso en que $\phi_i = 700^\circ\text{C}$ y $\phi_o = 200^\circ\text{C}$.

- Transferencia de calor en un cilindro hueco con generación interna de calor, condición de convección radiación en la pared lateral externa y adiabático en la pared lateral interna

En principio se debe aclarar que este problema fue resuelto con **CALTEP**, debido a que EDPOISS no resuelve ningún tipo de problema sino se prescribe una temperatura en algún punto de la malla.

En la Figura 5-1.11, se muestra la geometría del problema considerado, un cilindro de radio interior 4 y exterior 7, con $k_x=k_y= 140000$, $\rho c= 1.4 \cdot 10^6$, $\alpha = 510^2$ con generación interna de calor igual a 510^5 , Temperatura del fluido que rodea al sólido 200 y discretizada con 36 elementos triangulares de 3 nodos.

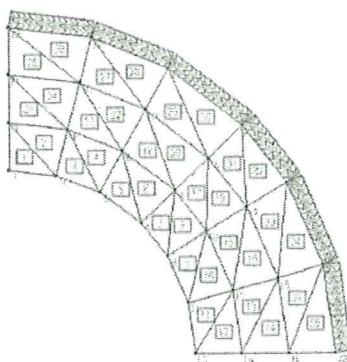


Figura 5-1.11

La ecuación de conducción que se considera en este caso es:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$

La integración de esta ecuación nos conduce a:

$$\phi = \frac{q_v r^2}{4\lambda} + C_1 \ln r + C_2$$

Que con las condiciones de contorno:

$$\text{En } r = r_1 \quad q = 0 \quad \text{o} \quad \left(\frac{d\phi}{dr} \right)_{r=r_1} = 0$$

$$\text{En } r = r_2 \quad \left(\frac{d\phi}{dr} \right) = -\frac{\alpha}{\lambda} (\phi_{w2} - \phi_{f2})$$

Se obtiene la siguiente expresión para el campo de temperaturas:

$$\phi = \phi_{f2} + \frac{q_v r_2}{2\alpha} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] + \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 2 \ln \frac{r}{r_2} - \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right]$$

La expresión para el flujo de calor para el radio exterior del cilindro, donde tenemos la condición de convección radiación, es:

$$q = \alpha (\phi_2 - \phi_f) = \frac{q_v r_2}{2\alpha} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right]$$

$$\phi = \phi_2 - \frac{q_v r_2^2}{4k} \left[1 + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 2 \ln \frac{r}{r_2} - \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right]$$

y la expresión para el flujo de calor tiene la siguiente expresión:

$$\frac{q}{A} = -k \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

Que en este caso en particular queda expresado como:

$$\frac{q}{A} = 500r - \frac{8000}{r}$$

Los resultados analíticos (verde) y numéricos (azul) de temperatura y flujo de calor se pueden apreciar en las gráficas de las Figuras 5-1.14 Los resultados calculados mediante EDPOISS de este ejemplo presentan solo un pequeño error que es del tipo de error de redondeo, de aproximadamente el 5 %.

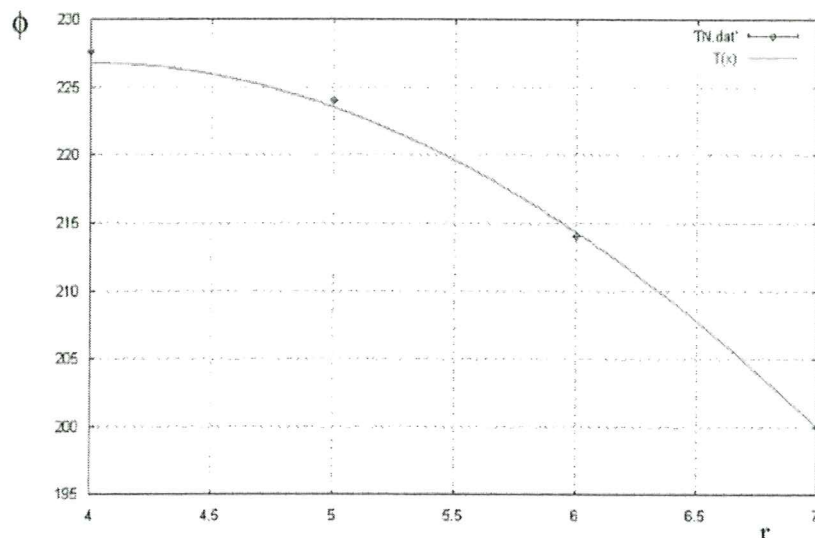


Figura 5-1.14

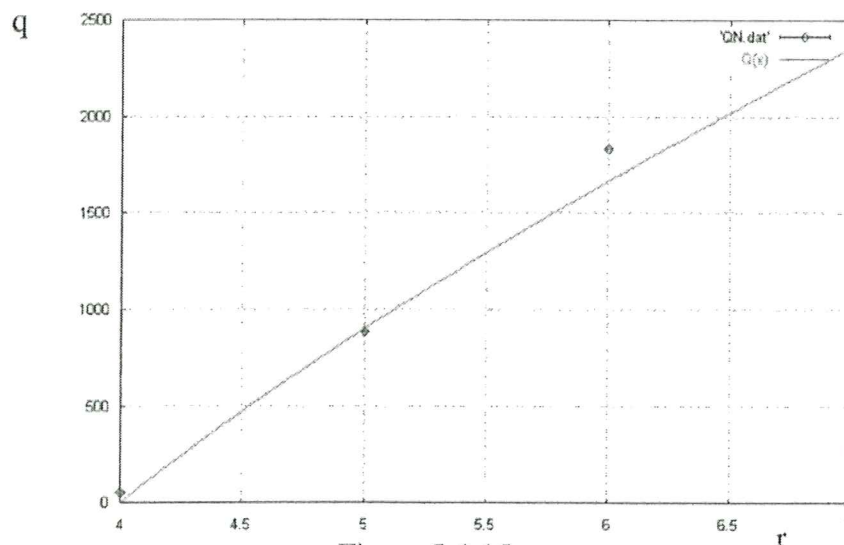


Figura 5-1.15

$$T(\theta) = T_h - (T_h - T_c)\theta$$

y el flujo de calor:

$$q(\theta) = \frac{2\lambda}{\pi} (T_h - T_c) \int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{r}$$

La solución numérica mediante Poisson de este problema es bastante buena como se podrá apreciar tanto en las gráficas y figuras que se muestran a continuación.

En la Figura 5-1.17 izquierda, se puede ver la forma de las isoterms de tipo radial, esto es debido a que la temperatura varía según el ángulo θ y en la Figura 5-1.17 derecha, se observa la variación radial del flujo de calor.

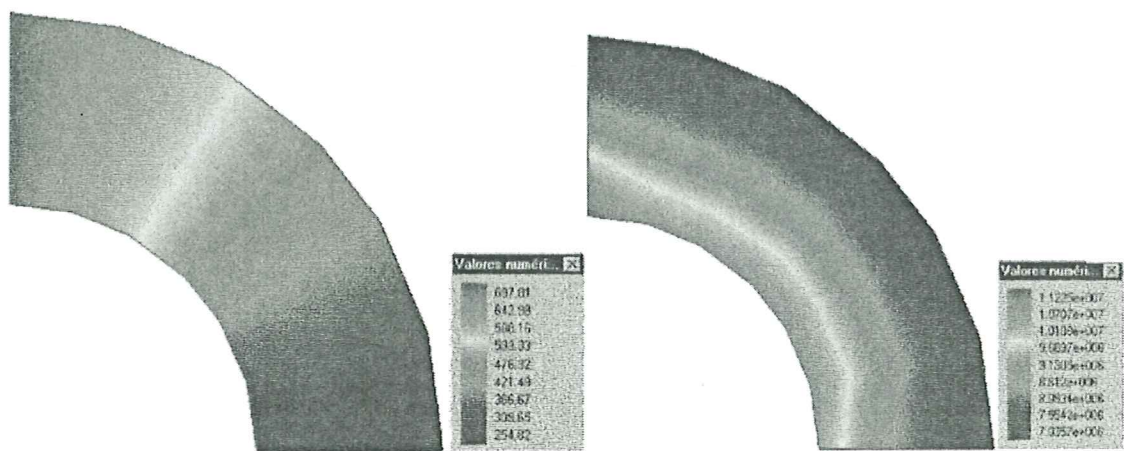


Figura 5-1.17

A continuación, en la gráfica de la Figura 5-1.18, se muestran las soluciones analítica y numérica. De observación de la misma se concluye que el ajuste de la temperatura es mejor que el del flujo de calor, siendo este igualmente bueno.

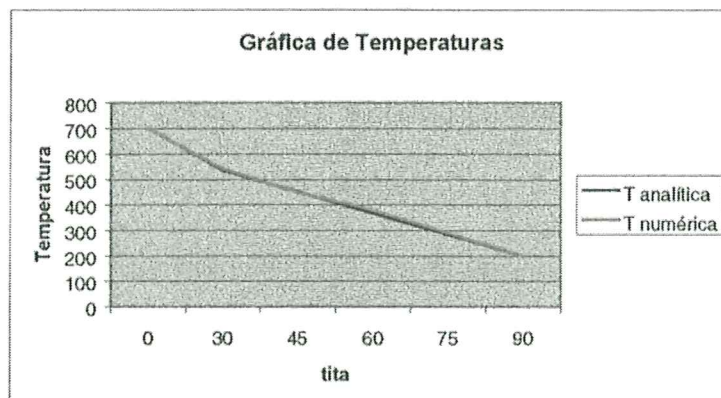


Figura 5-1.18

En la Figura 5-1.20, podemos observar las variaciones de temperatura calculadas numéricamente en función de cada una de las coordenadas x e y .

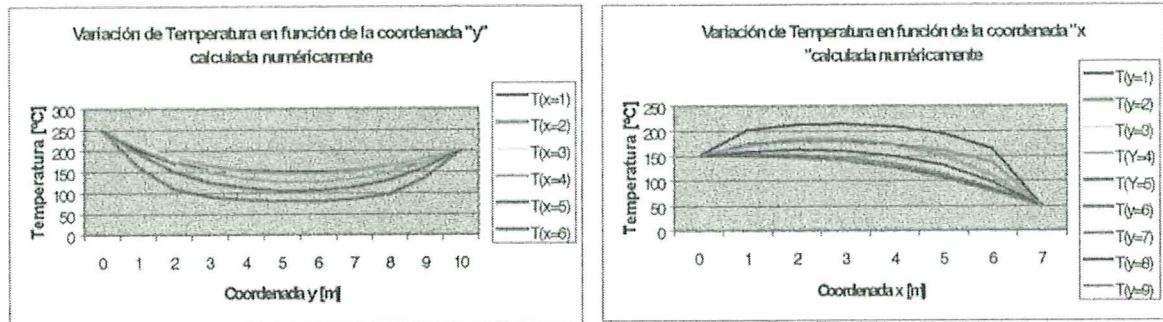


Figura 5-1.20

En la Figura 5-1.21, se graficó la solución analítica y la numérica para $y = 1$ e $y = 5$, en función de x . De la observación de la misma se ve claramente que, en este caso la solución numérica obtenida casi no difiere de los valores calculados en forma analítica.

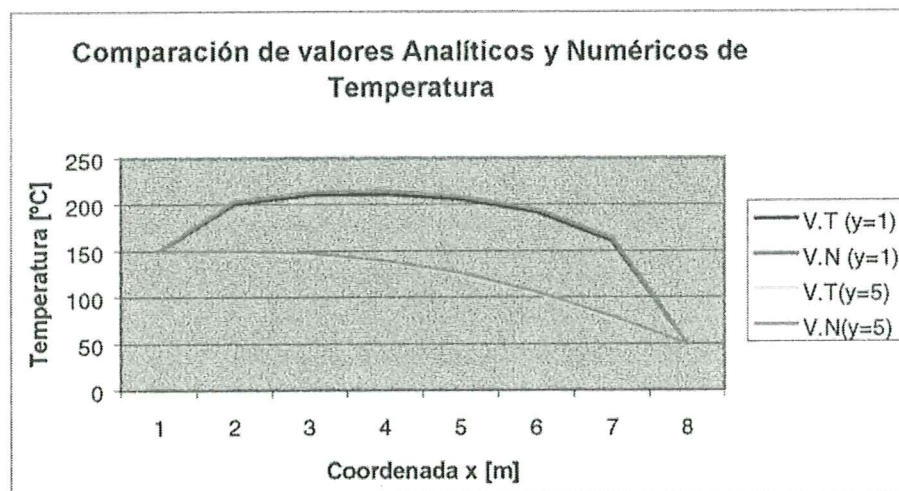


Figura 5-1.21

En la Figura 5-1.2: V.T : Valores calculados en forma analítica
V.N :valores calculados en forma numérica

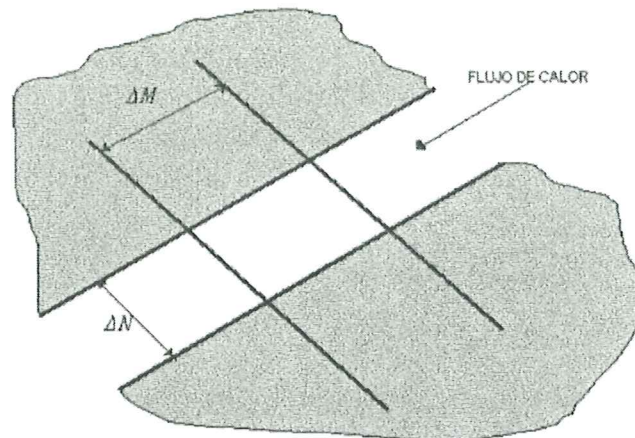


Figura 5-1.23

Estos conceptos son importantes cuando se considera un problema de conducción bidimensional. En la Figura 5-1.24, se muestra un conjunto de dos isotermas y de dos líneas de flujo de calor. Las dos isotermas difieren entre sí en la cantidad $\Delta\phi$, las líneas de flujo de calor son perpendiculares a las isotermas y forman un paso o tubo a través del cual puede fluir una cantidad de calor Δq .

Si en una sección transversal total hay N pasos de flujo de calor total, por cada uno de los cuales fluye una cantidad de calor Δq , la transferencia de calor total está dada por:

$$q_{\text{total}} = N\Delta q$$

Para el paso individual de flujo de calor mostrado, el gradiente de temperatura en forma de diferencia finita es:

$$\left[\frac{(\phi + \Delta\phi) - \phi}{\Delta M} \right] = \frac{\Delta\phi}{\Delta M}$$

Entonces para Δq la ecuación de la razón de FOURIER escrita para este caso da:

$$\Delta q = K\Delta N \frac{\Delta\phi}{\Delta M}$$

Si se construye la malla de isotermas / líneas de flujo de calor de manera que $\Delta M = \Delta N$, o sea que se forme un sistema de cuadrados curvilíneos; la expresión para Δq se reduce sencillamente a:

$$\Delta q = -k\Delta\phi$$

sin importar el tamaño de los cuadrados.

Para el flujo de calor entre dos fronteras isotérmicas a las temperaturas ϕ_h y ϕ_c , en donde $\phi_h > \phi_c$, con isotermas que dividen cada tubo de flujo en M divisiones, la diferencia de temperaturas entre isotermas adyacentes se expresa como:

Este método cuando se ha aplicado a algunos casos con solución analítica conocida ha dado un error solo del 2%, es decir que aplicar este método con los cuidados adecuados da buenos resultados.

Las soluciones de los ejemplos que se presentan a continuación fueron comparadas con soluciones obtenidas usando graficación de flujos. En todos los problemas presentados los valores de temperaturas obtenidos con EDPOISS son muy buenos, no así los valores de flujo de calor, pero se presentan igualmente las graficas de ambos, temperatura y flujo, pues cualitativamente las formas de las gráficas es la correcta, las mismas se presentan a continuación

- **Placa bidimensional en estado estacionario con contornos isotérmicos y adiabáticos**

El primer caso que analizaremos consiste en una placa cuadrada de lado 5, con condiciones de contorno de Dirichlet y adiabáticas, como se muestra en la Figura 5-1.25, discretizada con 50 elementos triangulares de tres nodos. Se asignó a las propiedades del material los siguiente valores $k_x = k_y = 140000$. Las temperaturas en los contornos prescritos son 0 y 1.

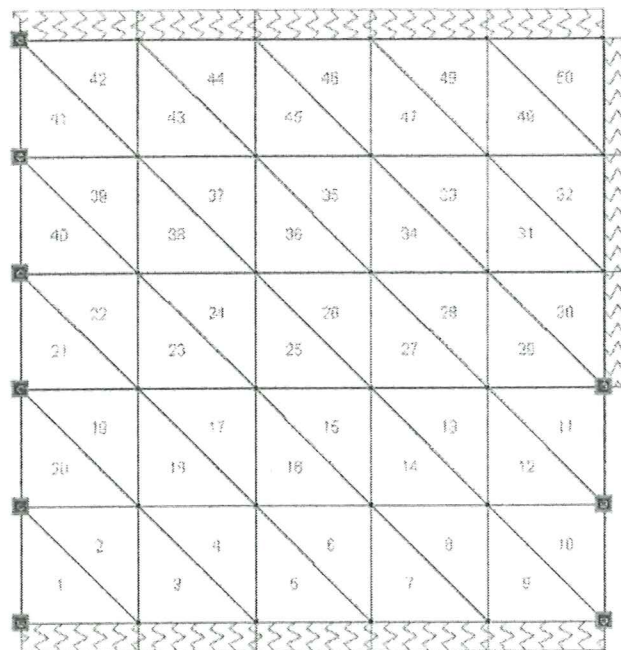


Figura 5-1.25

En la Figura 5-1.26, se puede observar la forma que adquieren las isotermas de temperatura. De izquierda a derecha, las mismas se van curvando, debido a que parten de una pared isotérmica, líneas de temperatura casi rectas, hacia una cuyo contorno tiene condiciones de temperatura prescrita y flujo de calor cero (adiabática).

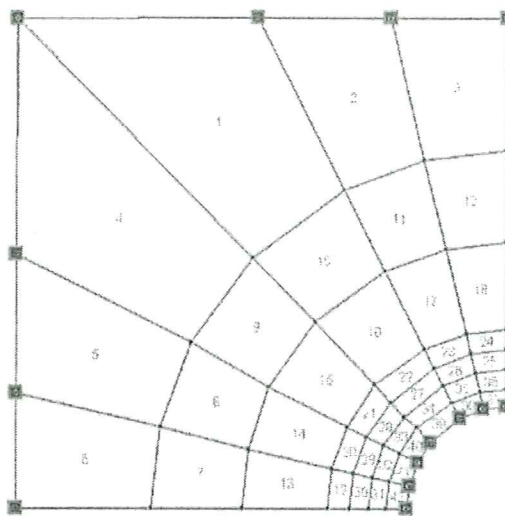


Figura 5-1.28

Para optimizar el cálculo se utilizarón elementos más pequeños en la zona de mayor gradiente, pero aun así no fue suficiente para obtener buenos valores del flujo de calor.

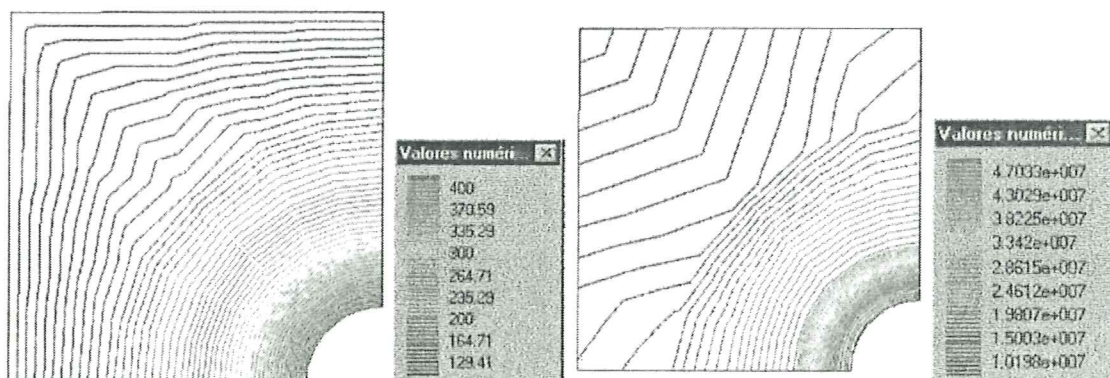


Figura 5-1.29

Nuevamente en este caso, los valores de temperatura coinciden con los valores calculados con el método de graficación de flujos, pero no así el flujo de calor, el cual puede calcularse con el factor de forma adecuado, cuya expresión figura en la tabla de la Figura 5-1.24. El valor calculado de esta manera es del orden de 10^5 .

- **Cilindro circular en un cilindro cuadrado excéntrico con condiciones de contorno de Dirichlet**

En la Figura 5-1.30, se representa la geometría a analizar, la misma es la mitad de una placa cuadrada de lado 5 y 2.5 con un orificio excéntrico de radio 0.50. La discretización se realizó con 106 elementos cuadriláteros de ocho

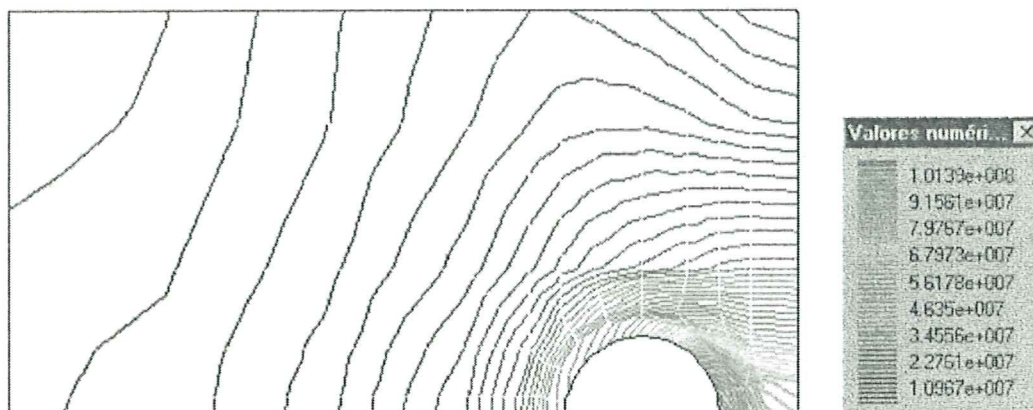


Figura 5-1.32

En la gráfica de la Figura 5-1.32 está representado el módulo del flujo de calor, si bien la forma y distribución de las curvas es la correcta, no coinciden los ordenes de los valores numéricos. El cálculo del flujo de calor por el método de graficación de flujo, en la zona de mayor flujo da un valor del orden de $1 \cdot 10^6$, es decir que tenemos mas de un orden de magnitud de diferencia.

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dx} &= 0 & \text{en } x=0 & \text{ y } \phi=0 & x=L \\ \phi &= \phi_0 & \text{en } t=0 \end{aligned}$$

En este caso la solución en temperatura es del tipo:

$$\phi = \frac{4\phi_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} e^{-\left[\frac{k_x}{\rho c} (2n+1)^2 \pi^2 \frac{t}{L^2}\right]} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

Esta expresión admite una simplificación importante para tiempos grandes o valores de $k_x/\rho c$ mayores que 0.1. en este caso basta con calcular solo el primer término de la serie. Esto hace posible una representación gráfica de estos resultados, es decir, que para este caso uno puede hallar la solución mediante el uso de gráficas realizadas para este fin.

En nuestro ejemplo, sobre uno de los contornos de la geometría se ha prescrito una temperatura $\phi = 0^\circ\text{C}$ sobre el otro contorno se considera la condición de simetría e inicialmente la placa se encontraba a 100°C . Las propiedades del material son $k_x = 140000$, $k_y = 10$, $\rho c = 1400000$

En las Figuras 5-2.2 y 5-2.3 se muestran los gráficos de temperatura y flujo de calor para dos tiempos diferentes.

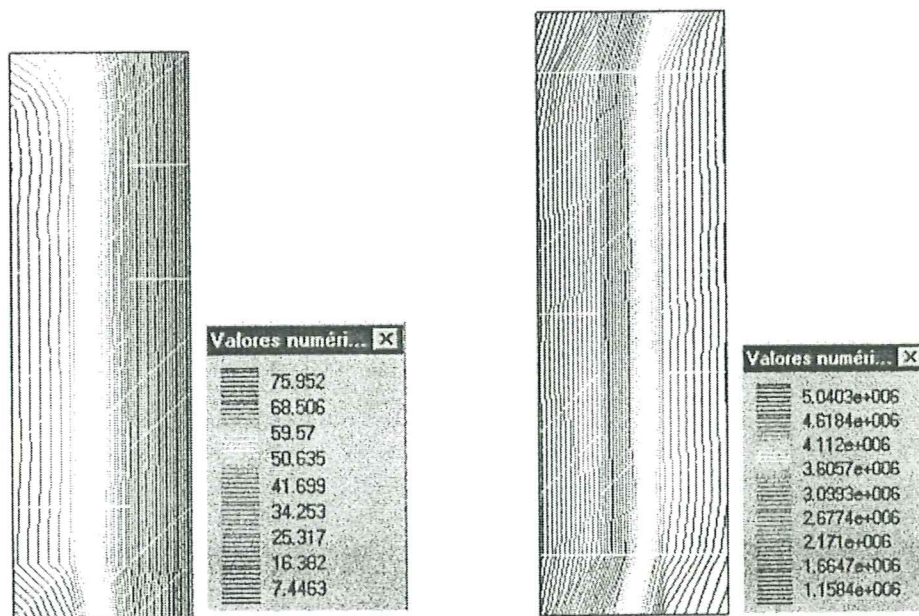


Figura 5-2.2

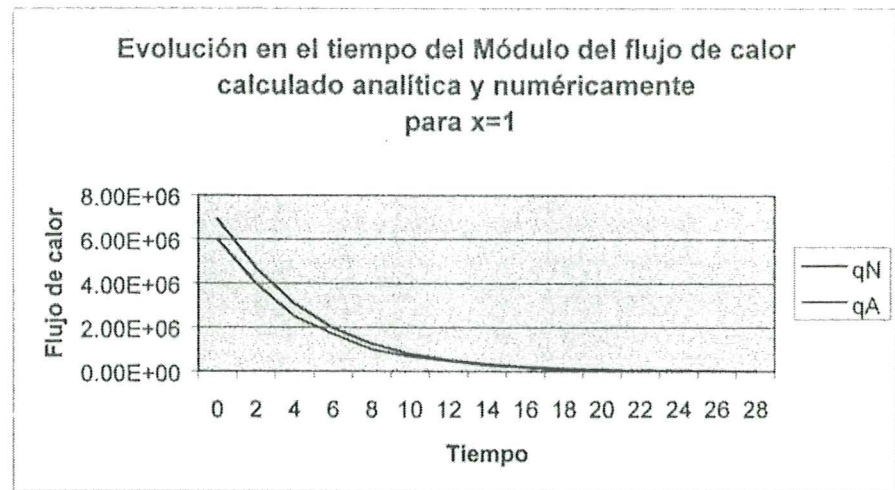


Figura 5-2.5

En la Figura 5-2.5, podemos apreciar que los valores del módulo del flujo de calor difieren de los valores analíticos en los primeros intervalos de tiempo siendo luego el ajuste mucho mejor.

- Placa plana con condición de temperatura inicial cero, con flujo de calor constante, q_0 , en uno de sus contornos y Temperatura cero en el otro

La geometría propuesta es la misma que la del caso anterior, con las mismas propiedades físicas. En este caso la temperatura inicial es cero, se prescribe en uno de sus contornos temperatura cero y en el otro un flujo de calor de 100000.

La solución analítica para este problema es:

$$\phi = \frac{2q_0x}{k_x} - \frac{8q_0L}{k_x\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} e^{\left[-\frac{k_x}{\rho c} (2n+1)^2 \pi^2 \frac{t}{4L^2} \right]} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2L}$$

En el estado estacionario, el flujo de calor para este problema es constante e igual al calor que ingresa por el contorno, como flujo de calor prescrito, que en este caso, se le asignó un valor igual a 100000, como se puede apreciar en la gráfica de la Figura 5-2.6, es el valor al que tiende la solución a valores grandes de tiempo. Es decir que nuevamente la tendencia de la solución es correcta.

Respecto de los valores de temperatura, los mismos son coincidentes con los obtenidos por medio de la solución analítica

En este caso la expresión de la solución analítica es:

$$\phi = \phi_0 - \frac{2\phi_0}{r_e} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\left[-\frac{\rho c}{k} \alpha_n^2 t\right]} \frac{J_0(r\alpha_n)}{\alpha_n J_1(r_e \alpha_n)}$$

Donde:

r_e es el radio exterior del cilindro

J son las funciones de Bessel

α_n son las raíces positivas de $J_0(\alpha r_e) = 0$

Las solución de esta ecuación se suele presentar en forma gráfica de $\frac{\phi}{\phi_0}$ en función

de $\frac{r}{r_e}$ para distintos valores del parámetro $\frac{\rho c}{k} t$

En la Figura 5-2.8, se muestran los valores de temperaturas calculados analítica y numericamente, de la observación de la misma se vuelve a concluir que los valores numéricos son muy próximos a los valores analíticos es decir que el error que se comete es muy pequeño. En este caso la solución analítica de flujo de calor no fue calculada.

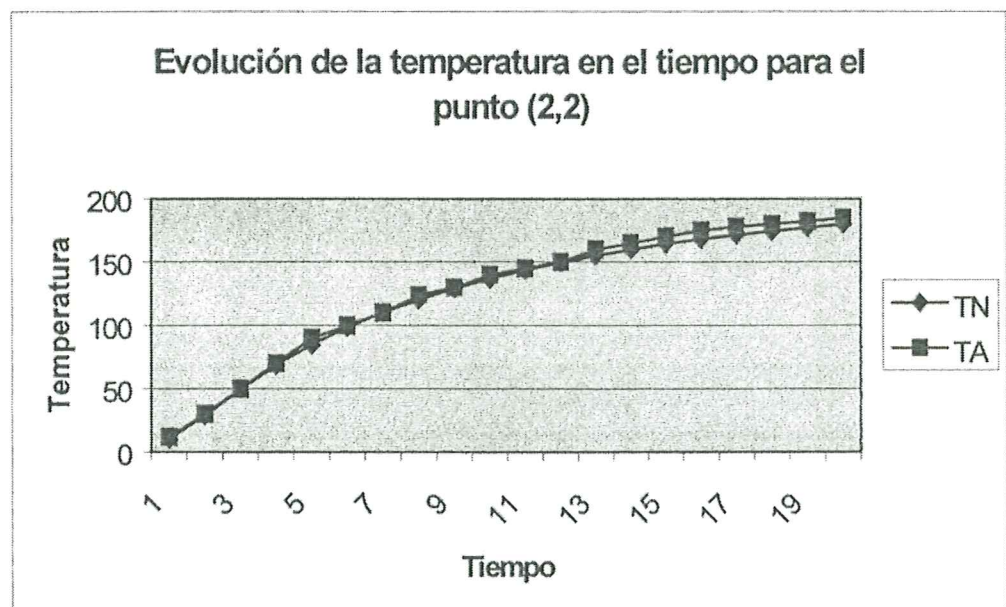


Figura 5-2.8

- Placa cuadrada con condiciones de contorno tipo Dirichlet en dos de sus lados y sus otros lados con condición de flujo de calor cero (Lados adiabáticos) o condición de simetría

En la Figura 5-2.11, se muestra la geometría que se analizará en este ejemplo, la misma es un cuadrado de lado 5, las propiedades del material son $k_x=k_y=140000$, $\rho c=1400000$, la temperatura en los contornos laterales es de 100°C . En la discretización se han utilizado 50 elementos triangulares de tres nodos.

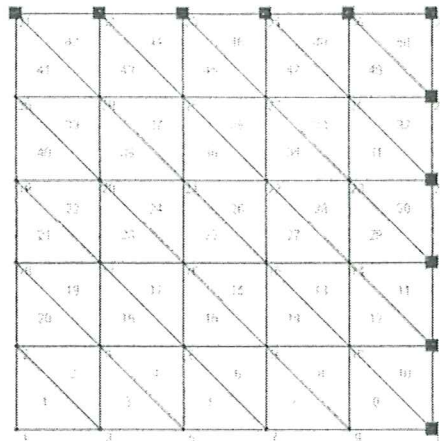


Figura 5-2.12

En un caso como este es fácil intuir que en el estado estacionario, la temperatura en toda la placa será uniforme e igual a 100°C y el flujo de calor será nulo. A estos valores es a los que debe tender el estado transitorio de este ejemplo.

Si intentamos resolver el caso estacionario la solución de flujo de calor que nos arroja el programa se puede visualizar en la Figura.5-2.13, Vemos que el programa de visualización ha representado una variación del flujo de calor. Esta gráfica es errónea aunque el resultado en sí mismo es correcto. A continuación se tratará de dar una explicación a esto.

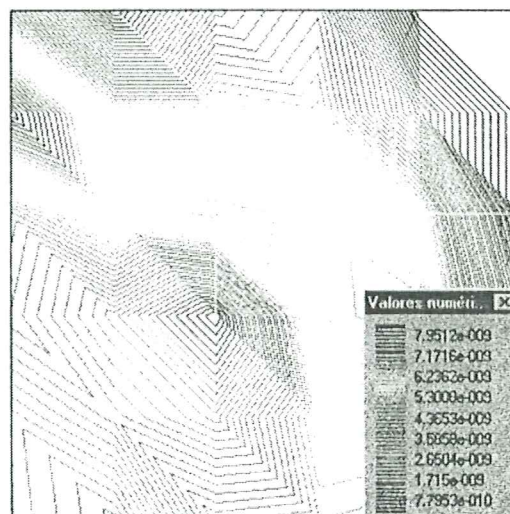


Figura 5-2.13

Se incorporan a continuación algunas de las gráficas obtenidas en el post proceso realizado con GID durante el análisis de este simple ejemplo

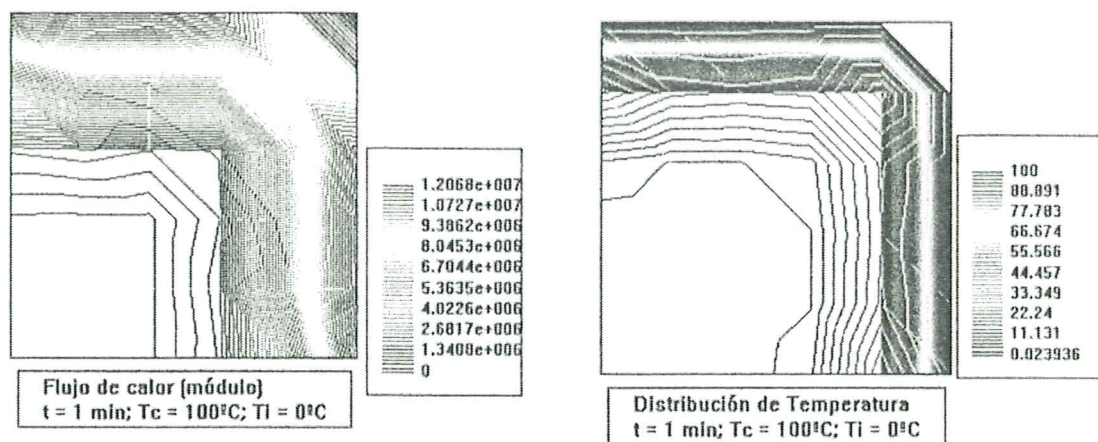


Figura 5-2.16

En las gráficas de la Figura 5-2.16, derecha e izquierda se muestra la forma de los perfiles de temperaturas y flujo de calor en el tiempo $t = 1$ min, de la gráfica de temperatura se ve claramente como las isotermas son rectas paralelas a los lados con temperatura constante y la modificación de las mismas sobre el extremo de la placa debido a esta perturbación.

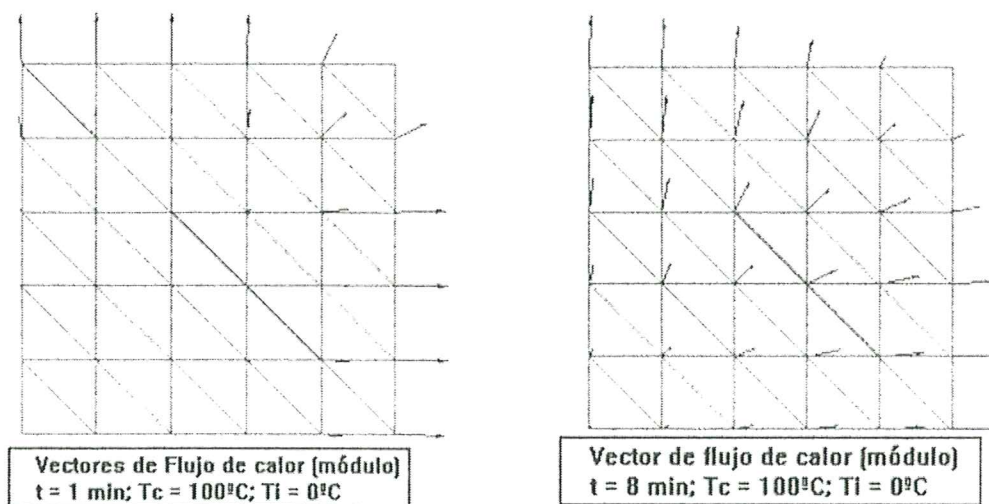


Figura 5-2.17

En estas dos últimas gráficas, Figura 5-2.17, se representa el Vector módulo del flujo de calor para dos tiempos distintos. En ellas se ve claramente como varía el flujo de calor en el tiempo. Este tipo de representación es de mucha ayuda en el análisis de resultados, ya que visualmente es fácil de ver hacia donde se dirige el flujo de calor y donde hay menor o mayor flujo, cosa que con el otro tipo de gráficas no es tan directo. Este tipo de visualización no se puede realizar con el postprocesador del EDPOISS ya que el mismo no dispone de representación vectorial gráfica de variables.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

En este capítulo se tratará de poner de manifiesto las características del programa EDPOISS, cuya validación fue objeto de este trabajo.

Presentaremos a continuación algunos comentarios generales respecto al uso de este programa y seguidamente las conclusiones más importante obtenidas durante el desarrollo del presente trabajo.

6-1 Comentarios generales

1. El proceso de instalación y desinstalación del programa es muy sencillo, de modo que es muy adecuado para aquellos que no han tenido demasiado contacto con los ordenadores. El programa original esta comprimido y protegido en dos disquetes con dos instalaciones, por si una fallara, pero se debe tener en cuenta que se puede instalar y desinstalar cuantas veces se desee.
2. El sistema de ayuda del bloque Edpoiss preproceso, proceso y postproceso esta muy bien diseñada para poder utilizarla a medida que el operario inexperto se relaciona con el programa, pero en los índices de ayuda ante cada comando que se explica se lo hace en forma literal y no se le ha incorporado el dibujo correspondiente. Esto dificulta el poder asociarse rápidamente con dichos comandos Respecto de la ayuda teórica, la misma es muy completa y esta desarrollada en una forma fácil de seguir.
3. Como herramienta educativa es muy poderosa, ya que introduce al operario del programa en la utilización práctica del método de los elementos finitos, explicando al mismo tiempo los detalles de cada una de las etapas del cálculo en una forma amplia, simple y en todo momento relacionando los valores numéricos de los cálculos que se van efectuando con sus expresiones matemáticas.
4. Desde el programa de proceso al de post proceso se tiene acceso directo, es decir estando en el programa de proceso, sin salir de el, se puede entrar en el de post proceso, no siendo de esta forma la relación entre el programa de pre proceso y proceso. Al no tener un acceso directo entre ambos, se pierde tiempo cuando

con las distintas combinaciones de condiciones de contorno que se le impongan. En todos los casos si el problema esta bien condicionado arroja muy buenos resultados en la variable temperatura y con algún porcentaje de error, por lo mencionado en el punto 1, en la variable flujo de calor.

6. En los problemas desarrollados, tanto en los casos estacionarios como en los transitorios si bien el valor del flujo de calor presenta en ciertos casos errores de gran magnitud, la tendencia de los mismos es la correcta, con lo que se concluye que realmente la fuente de error en el cálculo del mismo es la clase de alisado que se efectúa.
7. En el estado transitorio, los problemas que resuelve están limitados a aquellos casos con temperatura prescrita y flujos de calor en los contornos, cuando se incorpora la condición de convección radiación en alguno de los contornos, el programa efectúa el calculo pero los resultados que arroja no son correctos. Es decir que de tener que resolver un problema con condiciones de convección- radiación, los resultados obtenidos no son confiables.
8. En los problemas transitorios, según el tipo de problema analizado la solución obtenida dependía fuertemente o no del esquema de integración temporal utilizado, en algunos casos se ha logrado un buen ajuste de los valores de evolución de temperatura en el tiempo, independientemente del esquema de integración utilizado, Galerkin o integración hacia atrás, en estos casos, los valores difieren un poco en los primeros instantes de tiempo, pero luego son coincidentes. En los casos más adversos se observó una discrepancia total entre los valores obtenidos por medio de los diferentes esquemas de integración temporal.
9. El postprocesador para representar los resultados lo que hace es tomar el mayor y menor valor que encuentra de la variable que representará gráficamente y los designa como límites superior e inferior y luego asigna los valores intermedios, si se necesita realizar una análisis más detallado de los valores que asume cada punto de la malla, es necesario ingresar a los archivos de resultados en donde se dispone de toda la información puntual. En estos archivos tenemos acceso a los valores calculados en los puntos de Gauss y de esta forma se puede ver que tanto afecta a la variable de interés el tipo de alisado que se efectúa , es decir cuan parecidos o dispares son los valores que se están promediando.
10. Cuando se ejecuta el post-proceso con determinados ejemplos de conducción de calor en **Estado transitorio**, no permite el acceso directo a la información del posproceso, apareciendo un mensaje de error. Este inconveniente se produce a consecuencia de que falla el mecanismo de traspaso de información entre el buffer de almacenamiento de resultados, generados en el proceso, y el archivo de escritura correspondiente (fenómeno denominado flush), que es desde donde lee el post-procesador los datos. En casos como este, se pueden visualizar los resultados cerrando el programa de posproceso y volviendo a ingresar en él