

Desarrollo del Método de Puntos Finitos en Mecánica de Fluidos

C. Sacco

Desarrollo del Método de Puntos Finitos en Mecánica de Fluidos

C. Sacco

Monografía CIMNE N°-66, Abril 2002

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA
Edificio C1, Campus Norte UPC
Gran Capitán s/n
08034 Barcelona, España

Primera edición: Abril 2002

DESARROLLO DEL MÉTODO DE PUNTOS FINITOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS
Monografía CIMNE M 66
© Los autores

ISBN: 84-95999-00-5

Depósito legal: B-23164-2002

A Patricia.

Agradecimientos

Quiero expresar mi gratitud y agradecimiento a todas las personas que, de una forma u otra, han hecho que el trabajo desarrollado en esta tesis llegara a buen fin.

Índice General

1	Introducción	1
1.1	Objetivos	2
1.2	Revisión de los principales métodos sin mallas	3
1.3	Contenido	6
2	Funciones de aproximación	9
2.1	Introducción	9
2.2	Construcción de una aproximación	9
2.3	Aproximación mediante <i>Mínimos Cuadrados</i>	13
2.4	Aproximación mediante <i>Mínimos Cuadrados Ponderados</i>	14
2.4.1	Funciones de ponderación	15
2.4.2	Funciones de forma	16
2.4.3	Consistencia u orden de la aproximación	19
2.4.4	<i>Mínimos Cuadrados Ponderado Móviles</i>	20
2.4.5	<i>Mínimos Cuadrados Ponderados Fijos</i>	25
2.4.6	Análisis de las funciones de forma	29
2.5	Conclusiones	40
3	El Método de Puntos Finitos	41
3.1	Introducción	41
3.2	Esquema de discretización mediante colocación puntual	42
3.3	El Método de Puntos Finitos	44
3.4	Ecuación de convección difusión	46
3.4.1	Definición del error de la aproximación	47
3.4.2	Condiciones de contorno de Dirichlet	47
3.4.3	Condiciones de contorno de Neumann	54
3.4.4	Análisis del término convectivo	62
3.4.5	Convección difusión con una fuente externa variable	72
3.5	Conclusiones	74

4	Generalización del método de <i>Puntos Finitos</i> a 2D y 3D	77
4.1	Introducción	77
4.2	Funciones de forma	77
4.2.1	Proceso de minimización	79
4.3	Nubes	81
4.4	Ecuación de convección difusión	83
4.4.1	Ecuación de difusión con condiciones de Dirichlet (2D)	84
4.4.2	Ecuación de difusión con condiciones de Neumann (2D)	96
4.4.3	Implementación de las condiciones de Neumann	98
4.4.4	Contornos curvos	106
4.4.5	Refinamiento adaptativo	108
4.4.6	Ecuación de convección difusión con convección dominante	109
4.4.7	Esquema estabilizado de orden superior	119
4.4.8	Ecuación de convección difusión transitoria	122
4.4.9	Ecuación de convección difusión (3D)	127
4.5	Conclusiones	131
5	<i>Puntos Finitos</i> aplicados a la mecánica de fluidos	133
5.1	Introducción	133
5.2	Ecuaciones de Navier Stokes	133
5.2.1	Ecuaciones de Navier Stokes para flujo incompresible	136
5.2.2	Algoritmos de resolución	137
5.2.3	Algoritmo de Pasos Fraccionados	138
5.2.4	Ecuaciones de flujo incompresible estabilizadas mediante <i>Cálculo Finitesimal</i>	139
5.2.5	Pasos fraccionados estabilizados	142
5.2.6	Estabilización de tercer orden	145
5.2.7	Comparación de los algoritmos	146
5.2.8	Discretización de las ecuaciones 2D mediante <i>Puntos Finitos</i>	147
5.3	Ejemplos numéricos	152
5.3.1	Problema de Stokes:	153
5.3.2	Problema de Navier Stokes	157
5.3.3	Problema de Euler	168
5.3.4	Navier Stokes 3D	175
5.4	Conclusiones	178
6	Generación de nubes	179
6.1	Introducción	179
6.2	Nubes formadas por los puntos más cercanos	179
6.2.1	Descripción del procedimiento	179

6.2.2	Casos particulares que presentan dificultades	181
6.3	Triangulación local de Delaunay	182
6.3.1	Generación de una nube en el interior del dominio	183
6.3.2	Generación de una nube en el contorno	185
6.4	Comparación de ambos métodos	186
6.5	Conclusiones	186
7	Conclusiones y líneas futuras de investigación	189

Índice de Figuras

2.1	Modelo computacional para un método sin malla.	10
2.2	Esquema de la interpolación mediante <i>Mínimos Cuadrados</i>	15
2.3	Esquema de interpolación mediante <i>Mínimos Cuadrados Ponderados Móviles</i>	21
2.4	Esquema de interpolación mediante <i>Mínimos Cuadrados Ponderados Fijos</i>	25
2.5	Multievaluación de un punto arbitrario \mathbf{x}_k , mediante la aproximación FLS.	27
2.6	Funciones de forma obtenidas con $m = 3$ y $n_p = 5$. a) funciones de forma, b) derivada primer.	28
2.7	Esquema del dominio y de la función de ponderación.	29
2.8	Funciones de forma para distintas bases polinómicas. a) constantes, b) lineales, c) cuadráticas y d) cúbicas.	30
2.9	Funciones de forma lineales ($m = 2$) para a) $n_p = 3$, b) $n_p = 5$, c) $n_p = 7$	31
2.10	Funciones de forma cuadráticas ($m = 3$) para a) $n_p = 3$, b) $n_p = 5$, c) $n_p = 7$	32
2.11	Distribución de puntos con distancias variables.	33
2.12	Funciones de forma lineales: a) $h/\varepsilon = 2$, b) $h/\varepsilon = 20$, c) $h/\varepsilon = 100$	33
2.13	Funciones de forma cuadráticas: a) $h/\varepsilon = 2$, b) $h/\varepsilon = 20$, c) $h/\varepsilon = 100$	34
2.14	Función de forma N_i obtenida con distintas funciones de ponderación.	35
2.15	Función de ponderación de Gauss: a) variación del factor de apuntamiento β , b) variación del exponente k , c) variación del radio de influencia γ	36
2.16	Función de forma N_i para distintos valores de β : a) $\beta = 1./d_{\max}$, b) $\beta = 1.5/d_{\max}$, c) $\beta = 2./d_{\max}$, d) $\beta = 2.5/d_{\max}$	37
2.17	Variación del número de condición de la matriz \mathbf{A} con respecto la distancia entre puntos.	39
3.1	Esquema del dominio, la fuente externa y las condiciones de contorno.	47

3.2	Nubes de 3, 5 y 7 puntos para el punto i perteneciente al a) interior del dominio, b) conterno del dominio.	49
3.3	Comparación del resultado teórico con el obtenido mediante MPF, para una distribución de puntos equiespaciada.	50
3.4	Convergencia de la solución para nubes de 3, 5 y 7 puntos.	51
3.5	Comparación del resultado teórico con el obtenido mediante MPF, para una distribución de puntos arbitraria.	52
3.6	Convergencia de la solución para nubes de 3, 5 y 7 puntos para una distribución de puntos arbitraria.	52
3.7	Evolución del error de la solución en función del parámetro β	53
3.8	Evolución del error de la solución en función del exponente k	54
3.9	Convergencia de la solución utilizando distintas bases polinómicas.	55
3.10	Esquema del dominio, la fuente externa y las condiciones de contorno.	55
3.11	Comparación del resultado teórico con el obtenido mediante MPF, para una distribución de puntos equiespaciados.	57
3.12	Comparación del resultado teórico con el obtenido mediante MPF, para una distribución de puntos arbitraria.	57
3.13	Convergencia para el problema con condición de contorno de Neumann para nubes de 3, 5 y 7 puntos, en una distribución de puntos equiespaciada.	58
3.14	Convergencia para el problema con condición de contorno de Neumann para nubes de 3, 5 y 7 puntos, en una distribución de puntos arbitraria.	59
3.15	Dominio de balance para un punto de contorno.	60
3.16	Convergencia para el problema con condición de contorno de Neumann estabilizada para nubes de 3, 5 y 7 puntos, en una distribución de puntos equiespaciada.	62
3.17	Convergencia para el problema con condición de contorno de Neumann estabilizada para nubes de 3, 5 y 7 puntos, en una distribución de puntos aleatoria.	63
3.18	Esquema del dominio y las condiciones de contorno.	63
3.19	Resultados del problema de convección difusión para distintos valores de γ , obtenidos con $n_p = 3$ y $m = 3$	65
3.20	Difusión introducida a través de la discretización espacial en función del número de Peclet.	67
3.21	Dominio de balance para un punto interior del dominio.	68
3.22	Resultados de las ecuaciones de convección difusión estabilizada para distintos valores de γ , obtenidos con $n_p = 3$ y $m = 3$	71
3.23	Resultado de la ecuación de convección difusión para $\gamma = 5$. a) $n_p = 5$, b) $n_p = 7$	72

3.24	Esquema del dominio, la carga externa y condiciones de contorno. . .	72
3.25	Convergencia de la solución utilizando $Q(x)$ aproximada y $Q(x)$ calculados exactamente.	74
3.26	Comparación entre los resultado obtenido con un esquema estabilizado y sin estabilizar.	75
4.1	Función de ponderación de Gauss en dos dimensiones.	79
4.2	Distribuciones de puntos inapropiada para una interpolación cuadrática.	82
4.3	Distribución de puntos apropiada.	82
4.4	Distribución de puntos dependiente de ε	83
4.5	Esquema de la geometría y condiciones de contorno.	85
4.6	Convergencia de la solución para una distribución de puntos uniforme.	87
4.7	Convergencia de la solución para una distribución de puntos aleatoria.	88
4.8	Convergencia de la solución para una distribución de puntos homogénea.	88
4.9	Distribuciones de puntos utilizadas para la resolución del problema. (121 puntos).	89
4.10	Contornos de la función $\hat{\phi}$ para los distintos tipos de distribuciones de puntos.	90
4.11	Convergencia de la solución frente a la variación del número de puntos en cada nube.	92
4.12	Distribuciones de puntos aleatorias.	93
4.13	Convergencia de la solución, para la distribución de puntos movidos arbitrariamente $0.25h$	94
4.14	Convergencia de la derivadas, para la distribución de puntos movida arbitrariamente $0.25h$	94
4.15	Convergencia de la función. Distribución de puntos aleatoria.	95
4.16	Convergencia de las derivadas. Distribución de puntos aleatoria.	96
4.17	Esquema de la geometría y condiciones de contorno.	97
4.18	Convergencia de la solución para los distintos tipos de distribuciones de puntos.	98
4.19	Convergencia de la formulación estandar y de la formulación con funciones de forma modificadas en el contorno.	102
4.20	Convergencias de la formulación estandar y la formulación estabilizada en el contorno.	105
4.21	Esquema de la geometría y condiciones de contorno para el problema de flujo potencial.	106
4.22	Flujo alrededor de un cilindro de longitud infinita. a) detalle de la distribución de puntos; b), c) y d) isoclinas de velocidad.	108
4.23	Convergencia del método de <i>Puntos Finitos</i> ante un refinamiento adaptativo.	109

4.24	Dominio bidimensional para el balance de flujos.	110
4.25	Esquema del dominio y las condiciones de contorno.	115
4.26	Resultados del problema 1 , isolneas de ϕ para a) esquema sin estabilizar, b) estabilización en la dirección de las líneas de corriente y c) estabilización en dirección del fluido y del gradiente.	117
4.27	Resultados del problema 1 , comparación de los resultados obtenidos para los distintos esquemas, graficados en un corte en dirección x	118
4.28	Esquema del dominio y de las condiciones de contorno.	119
4.29	Resultados del problema 2 . Isolneas de ϕ , estabilizada en la dirección de las líneas de corriente.	120
4.30	Resultados del problema 2 . Curvas realizadas a lo largo de los cortes A-A, B-B y C-C.	120
4.31	Resultados del problema 2 . Isolneas de ϕ , estabilizado en la dirección de las líneas de corriente y del gradiente de la incógnita.	121
4.32	Resultados del problema 2 . Curvas graficadas a lo largo de los cortes A-A, B-B y C-C.	121
4.33	Isolneas de ϕ obtenidas con un esquema de resolución transitorio.	126
4.34	Comparación de los resultados estacionario y el transitorio a lo largo del corte B-B.	126
4.35	Convergencia de la solución con respecto al número de iteraciones.	127
4.36	Convergencia de la solución para una distribución de puntos movidos hasta $.25h$	129
4.37	Convergencia de las derivadas para una distribución de puntos movidos hasta $.25h$	129
4.38	Convergencia de la función para una distribución de puntos aleatoria.	130
4.39	Convergencia de las derivadas para una distribución de puntos aleatoria.	131
5.1	Flujo confinado en una cavidad. Esquema del dominio y de las condiciones de contorno.	153
5.2	Flujo confinado en una cavidad. Isolneas de: a) presión, b) velocidad $ \mathbf{u} $, c) velocidad u , d) velocidad v	155
5.3	Flujo confinado en una cavidad. Comparación del perfil de velocidades u obtenidos mediante <i>Puntos Finitos</i> (FPM) y <i>Elementos Finitos</i> (MEF).	156
5.4	Flujo confinado en una cavidad. Comparación del perfil de velocidades v obtenidos mediante <i>Puntos Finitos</i> (FPM) y <i>Elementos Finitos</i> (MEF).	156
5.5	Flujo confinado en una cavidad. Distribución de puntos utilizada para los ejemplos con $Re = 400$ y $Re = 1000$	158

5.6	Flujo confinado en una cavidad. Isolneas de presión (arriba) y de velocidad (abajo), $Re = 400$	159
5.7	Flujo confinado en una cavidad. Isolneas de presión (arriba) y de velocidad (abajo), $Re = 1000$	160
5.8	Flujo confinado en una cavidad. Comparación del perfil de la componente de la velocidad u a lo largo de una línea vertical que pasa por el centro de la cavidad, $Re = 400$	161
5.9	Flujo confinado en una cavidad. Comparación del perfil de la componente de la velocidad u a lo largo de una línea vertical que pasa por el centro de la cavidad, $Re = 1000$	161
5.10	Flujo sobre un escalón inverso. Esquema del dominio y de las condiciones de contorno.	162
5.11	Flujo sobre un escalón inverso. Detalle de la distribución de puntos.	162
5.12	Flujo sobre un escalón inverso. Contornos de presión (arriba) y de velocidad (abajo).	163
5.13	Flujo sobre un escalón inverso. Comparación de los perfiles de velocidad: a) posición 2.55 <i>S</i> y b) posición 6.11 <i>S</i>	163
5.14	Flujo alrededor de un cilindro. Esquema de la geometría y las condiciones de contorno.	164
5.15	Flujo alrededor de un cilindro. Discretización del dominio mediante puntos y detalle de la misma en la zona mas densificada.	165
5.16	Flujo alrededor de un cilindro. Variación de la fuerza vertical producida por la presión con respecto al tiempo.	166
5.17	Flujo alrededor de un cilindro. Isolneas de velocidad.	167
5.18	Flujo alrededor de un cilindro. Vectores de velocidad detrás del cilindro.	168
5.19	Flujo alrededor de un perfil NACA 0012. Geometría y condiciones de contorno.	169
5.20	Flujo alrededor de un perfil NACA 0012. Distribución de puntos y detalle en la zona cercana al perfil.	170
5.21	Flujo alrededor de un perfil NACA 0012. Isolineas de velocidad.	171
5.22	Flujo alrededor de un perfil NACA 0012. Geometría y condiciones de contorno.	172
5.23	Flujo alrededor de un perfil NACA 0012. Detalle de la distribución de puntos.	172
5.24	Flujo alrededor de un perfil NACA 0012. Resultados de velocidad (izquierda) y presión (derecha), obtenidos con: a) estabilización de tercer orden y b) estabilización de segundo orden.	173
5.25	Flujo alrededor de un perfil NACA 0012. Convergencia de la velocidad para el problema con la estabilización de 2 ^{do} y 3 ^{er} orden.	174

5.26	Flujo alrededor de un perfil NACA 0012. Resultados de velocidad (izquierda) y presión (derecha), obtenidos para a) nubes balanceadas y b) nubes sin balancear.	175
5.27	Flujo alrededor de un perfil NACA 0012. Comparación de los resultados obtenidos mediante el MPF y resultados experimentales.	176
5.28	Flujo alrededor de un perfil NACA 0012. Coeficiente de presión para $\alpha = 0^\circ, 5^\circ$ y 10°	176
5.29	Flujo en un escalón inverso a $R_e = 100$. Contornos de velocidad (arriba) y de presión (abajo).	177
6.1	Generación de nubes. Variación del radio de la circunferencia para aumentar la cantidad de puntos en la nube.	180
6.2	Generación de nubes. a) Nube que atraviesa el contorno. b) Nube corregida.	181
6.3	Generación de una nube de contorno.	182
6.4	Esquema de una nube desbalanceada.	182
6.5	Discretización típica de capa límite.	183
6.6	Triangulación de Delaunay, pasos para la generación de una nube. . .	184
6.7	Defecto en la triangulación inicial.	185
6.8	Triangulación de Delaunay, pasos para la generación de una nube de un contorno.	186
6.9	Nubes generadas con cada uno de los métodos descritos.	187

Capítulo 1

Introducción

Desde la década de los cincuenta hasta la actualidad venimos experimentando grandes avances en el área de la informática y de las formulaciones matemáticas. Estos desarrollos han posicionado al cálculo numérico en un lugar importante en diversos ámbitos la investigación y la industria en general. La simulación numérica brinda a estas disciplinas una herramienta que le permite conocer la respuesta de un sistema sometido a solicitaciones de naturaleza mecánica, térmica, química, etc. En algunos ámbitos, los modelos matemáticos han alcanzado tal grado de desarrollo que han ido reemplazado en gran parte a las costosas experimentaciones, especialmente en el cálculo de estructuras mecánicas donde existen programas comerciales cuyos resultados están certificados. Otra área en la que las herramientas numéricas se han tornado indispensables es la aerodinámica, donde su uso ha posibilitado alcanzar formas muy optimizadas, lo cual no hubiera sido posible mediante ensayos en túneles de viento.

Los requerimientos de la industria y las potenciales aplicaciones de la simulación numérica han hecho de la misma toda una rama de la tecnología en la cual se vinculan diversas disciplinas científicas, principalmente la Matemática, la Física, la Química, la Ingeniería y otras. Nótese que un área de la importancia conceptual y científica como es la dinámica de fluidos ha resultado tan prolífica gracias al empuje de las ciencias Médicas. En particular los aportes realizados en las modernas formulaciones basadas en modelos matemáticos capaces de emular comportamientos biológicos.

El tratamiento numérico de los fenómenos físicos que se han ido planteando a lo largo de los años se han llevado a cabo utilizando principalmente alguno de los siguientes métodos, el Método de las Diferencias Finitas, el Método de los Volúmenes Finitos y el Método de los Elementos Finitos. En la denominación de las tres técnicas se incluye la palabra Finito. Esto no es sólo una coincidencia, sino que es el concepto fundamental sobre el que se basa la simulación numérica: la posibilidad de transformar un medio continuo en un medio discreto.

Haciendo una revisión cronológica tenemos que situar en primer lugar al Método de las Diferencias Finitas. Este método fue el punto de partida de la simulación y permitió la resolución de una amplia gama de problemas. Sin embargo las mallas estructuradas requeridas para la discretización del problema comenzó a ser un limitación cada vez más difícil de superar a medida que se planteaban geometrías más complejas.

El Método de los Volúmenes Finitos vino a cubrir las deficiencias presentadas por su antecesor, ya que la formulación del mismo permitía utilizar mallas no estructuradas. Esta técnica se basa en la forma integral de las ecuaciones, lo que conceptualmente permitía una mejor representación de los fenómenos físicos. Sin embargo algunas dificultades en la implementación de las condiciones de contorno forzaron a la búsqueda de nuevas alternativas

Sin dudas actualmente el MEF (Método de los Elementos Finitos) es el método más difundido y utilizado. Los excelentes resultados que brindan sus numerosas aplicaciones lo han transformado en una herramienta muy potente y al mismo tiempo económica, si se compara con los beneficios que conlleva su utilización.

Los ingentes recursos en tiempo y máquina requeridos para las tareas de preproceso (entiéndase generación de malla principalmente) ha supuesto en cualquier de los casos anteriores un insalvable cuello de botella. Los algoritmos de generación de mallas no brindan una respuesta acorde a los requerimientos de velocidad y eficiencia. Un ejemplo de ello se encuentra en la simulación de choques de automóviles donde la discretización requiere un tiempo aproximado de un mes de trabajo, mientras que la simulación se realiza en menos de 24 horas.

La presente tesis nace como respuesta a la inquietud de explorar un método que permita resolver las ecuaciones diferenciales sin depender de una discretización conforme. En particular nos centraremos en el llamado "Método de los Puntos Finitos" que se engloba dentro de la familia de los métodos sin malla (*Meshless Method*) por los que la industria ha demostrado un inusitado interés.

1.1 Objetivos

Dejar sentadas las bases de la aplicación de método de *Puntos Finitos* a la mecánica de los fluidos se puede considerar como el principal objetivo de la tesis. Para alcanzar la meta propuesta será necesario afrontar una serie de dificultades propias del planteo e implementación de una técnica poco estudiada, sobre la cual existen mas interrogantes que respuestas concretas.

El trabajo se dividió en dos etapas claramente diferenciadas. En la primer etapa se estudiará el método de *Puntos Finitos* para lograr un conocimiento más integral del mismo tratando, en lo posible, de identificar sus virtudes y defectos. Para

este comentido se comenzará con la resolución de problemas simples como el de Poisson, la complejidad de las aplicaciones se irán incrementado hasta llegar al planteo del problema de Convección Difusión transitorio. Finalmente se extenderá la formulación a problemas bidimensionales y tridimensionales, con lo cual se dará por finalizada la primera etapa del trabajo.

En la segunda etapa se planteará la aplicación del método de *Puntos Finitos* para la resolución de las ecuaciones de flujo incompresible, tanto en dos como en tres dimensiones. El algoritmo resultante será validado mediante la resolución de diferentes problemas de índole netamente académico, los que clasificaremos según su naturaleza como problemas de Stokes, de Navier Stokes y de Euler.

1.2 Revisión de los principales métodos sin mallas

Los métodos numéricos más difundidos, sin dudas son: el Método de los Elementos Finitos (MEF), el Método de Volúmenes Finitos (MVF) y el Método de las Diferencias Finitas (MDF). Todos ellos presentan una característica común en la necesidad de una malla o grilla a efectos de realizar la discretización, y además, tanto en el MEF como en el MVF se usan estas grillas para la evaluación de las integrales provenientes de la formulación en la que se basan. A pesar de muchos años de investigación y del desarrollo de potentes algoritmos para resolver los problemas planteados por la generación de las mallas, aún no se ha encontrado una solución óptima. Para paliar estas dificultades aparecieron nuevos métodos numéricos cuyo objetivo primordial consiste en independizar el cálculo de las funciones de aproximación de las discretizaciones conformes.

Si bien los orígenes de los métodos sin malla datan de la década del 70, recién en el año 1996 Oñate y colaboradores [OÑA 96a] propusieron las dos condiciones básicas que una aproximación numérica debe cumplir para ser considerada como una técnica "mesh-free". Estas condiciones son:

- La discretización de las incógnita y sus derivadas pueden ser representados exclusivamente en términos de las coordenadas de un conjunto de puntos pertenecientes al dominio de análisis.
- En caso de ser necesaria la evaluación de integrales, debería ser realizada en forma independiente al procedimiento de interpolación.

Para encontrar los primeros trabajos en los que se menciona el concepto de aproximación sin malla tenemos que remontarnos hasta fines de la década del 70. De estos trabajos hay que destacar el presentado en el año 1977 por Lucy [LUC 77] en el que dio a conocer el método denominado *Smooth Particle Hydrodynamics* (SPH). En

forma conceptual, podemos decir que este método se basa en la división de la materia en un número finito de partículas a las que se les asocian algunas propiedades físicas. En sus orígenes este método se desarrolló con el objetivo de modelar fenómenos astrofísicos, como por ejemplo, el movimiento de cuerpos celestes o explosiones de estrellas. En el año 1982 Monaghan [MON 82] publicó un artículo en el cual dio un marco teórico al SPH, y con ello se renovó el interés de los investigadores acerca de las posibilidades que se abrían en torno a esta técnica.

El SPH es un método simple y que se adapta fácilmente a cualquier tipo de problema, aunque estas cualidades se consiguen a costa de una aproximación poco precisa. En las aplicaciones prácticas las deficiencias en la aproximación pueden ser paliadas mediante discretizaciones realizadas con una gran cantidad de puntos, que por otro lado es indispensable en formulaciones Lagrangianas, ámbito en el que emplea generalmente este método. Recientemente se han logrado mejoras sustanciales en el SPH, ejemplo de ello es el trabajo presentado por Sweigle [SWE 95] en el que se muestra el origen de la inestabilidad espacial conocida como *tensile stability*, y presenta una solución para dicho problema.

En forma prácticamente paralela se desarrolló un método denominado *Generalized Finite Difference (GFD)*. Con esta técnica se pretendía aprovechar las características de las Diferencias Finitas pero independizándose de las grillas conformes que hasta ese momento eran indispensables para su aplicación. Los primeros aportes a este método se deben a Perrone y Kao [PER 75], sin embargo, recién en el año 1980, y gracias a un trabajo de Liszka y Orkisz [LIS 80], el GFD apareció como un opción válida y suficientemente robusta. En este trabajo se desarrolla una interesante técnica de interpolación para distribuciones de puntos arbitrarias, basada en las fórmulas de diferencias finitas generalizadas. Este método, de la misma forma que el SPH, utiliza un procedimiento de colocación puntual con lo que se obtiene un sistema de ecuaciones discretas.

Si bien el método en sí presenta grandes limitaciones, la técnica de interpolación que se utiliza en la aproximación fue utilizada para una amplia gama de aplicaciones, entre las que podemos nombrar:

- cálculo de derivadas en problemas resueltos mediante el FEM y el FDM.
- interpolación de resultados entre el FEM y el FDM.
- Interpolación de datos experimentales.

Enlazando con la línea de trabajo surgida con el SPH apareció un nuevo método llamado *Reproducing Kernel Particle Method (RKPM)* [LIU 95a], [LIU 95b], [LIU 95c]. En este método, y a través de las transformaciones conocidas como "Wavelet", se añade una función de corrección a las funciones de forma obtenidas a

través del SPH. Esta corrección permiten solventar los problemas de precisión en zonas cercanas al contornos o cuando el número de partículas empleadas es pequeño. En general quienes utilizan el RKPM se decantaron por esquemas de resolución de Galerkin, sin embargo en un trabajo presentado por Aluru [ALU 00], utilizó una aproximación del tipo *Reproducing Kernel* combinada con un esquema de colocación puntual, con lo cual se obtuvieron resultados muy prometedores.

Más recientemente surgió una nueva línea de investigación basada en la técnica denominada *Moving Least Square* (MLS). El primer trabajo en el que se utilizó este tipo de interpolación data del año 1992 y fue desarrollado por Nayroles y colaboradores [NAY 92]. El método propuesto fue bautizado con el nombre de *Diffuse Element Method* (DEM), y con él se pretendió hacer una generalización del Método de los Elementos Finitos, aunque la formulación tenía una serie de simplificaciones en la imposición de las condiciones de contorno y en el cálculo de las derivadas, que fueron muy cuestionadas por diferentes autores. A pesar de estos inconvenientes el DEM presentaba algunas ventajas frente al FEM motivo por el que se continuó trabajando en él. Entre estas ventajas hay que destacar la posibilidad de obtener funciones de forma con continuidad C^1 de manera simple.

Para la discretización espacial del DEM se utilizaba una formulación integral de Galerkin, por este motivo era necesario definir una malla de fondo mediante la cual se evalúan las integrales, aunque dicha malla no necesariamente, debía estar ligada a la geometría.

Otro método basado en interpolaciones tipo MLS surgió de sucesivas mejoras introducidas en el DEM, llevadas a cabo principalmente por Belytschko y colaboradores [BEL 94a], [BEL 96a], [BEL 96b]. El método resultante es conocido con el nombre de *Element Free Galerkin Method* (EFGM). En líneas generales en estos trabajos se solucionaron los inconvenientes en el cálculo de las derivadas y se utilizaron multiplicadores de Lagrange para la correcta imposición de las condiciones de contorno de tipo Dirichlet. Este método tiene como principal desventaja su elevado costo computacional, provocado por el cálculo de las derivadas en forma estricta, sin embargo los excelentes resultados obtenidos para problemas propagación de fracturas, sin necesidad de producir sucesivos remallados, como se debe hacer cuando se utiliza el FEM, hizo que el interés por el mismo crezca en forma continua. En los artículos citados se muestra que la aproximación realizada mediante EFGM mejora sensiblemente las propiedades de convergencia del FEM.

Dentro de esta línea de trabajo Duarte [DUA 95a], [DUA 95b], [DUA 96] y Babuska [BAB 95] hicieron un significativo aporte a la comprensión de las características y las propiedades de la interpolación realizada mediante MLS reconociendo las funciones de forma que se obtienen con este método como un caso particular de la Partición de la Unidad. A partir de estos trabajos surgieron dos nuevos métodos: el *hp Clouds* y la *Partition of Unity Finite Element Method* (PUFEM).

Siguiendo la línea de los métodos basados en formulaciones débiles es necesario mencionar los trabajos realizados por Atluri y colaboradores que dieron lugar a dos familias de métodos utilizadas para la resolución de problemas de elasticidad. El primero de estos métodos es el *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG) [ATL 98], [ATL 00a], [ATL 00b] donde se combinan la interpolación mediante mínimos cuadrados ponderados móviles y una formulación débil local llevada a cabo a través de residuos ponderados locales. La aplicación de la forma *Débil Asimétrica Local* y las funciones de aproximación de mínimos cuadrados móviles dieron lugar al método llamado *Local Boundarie Integral Equations* (LBIE) [ATL 00c], [ZHU 98]. Este método permite evaluar las integrales fácilmente al llevarse a cabo en dominios regulares (círculos en 2D y esferas en 3D).

El *Meshless Finite Element Method* (MFEM) [IDE 01a], [IDE 01b] presentado muy recientemente por Idelsohn y colaboradores es una interesante propuesta. En la misma se recogen todas las bondades del FEM aunque se independizan las funciones de forma de las conectividades de los elementos. Según los autores este método puede ser interpretado como un método de elementos finitos utilizando elementos de formas geométricas distintas, o como un método sin malla con nubes de puntos formadas por todos los puntos que pertenecen a una esfera vacía.

Finalmente tenemos que mencionar el método que se presenta en esta tesis que ha sido bautizado con el nombre de *Finite Point Method* (FPM) o *Método de Puntos Finitos* (MPF). Este método propuesto por Oñate, Zienkiewicz, Idelsohn y Taylor [OÑA 95], [OÑA 96a], [OÑA 96b], [OÑA 00a] surge de la combinación de las funciones de forma obtenidas mediante el MLS y la técnica de colocación puntual. Este esquema se completa con una novedosa forma de tratar las condiciones de contorno, basada en ecuaciones de balance de flujos.

1.3 Contenido

La tesis se dividió en 7 capítulos, cada uno de ellos está estructurado de forma similar, constando de una introducción, el desarrollo del mismo y finalmente se presentan unas breves conclusiones. En el *Capítulo 1* se realiza una introducción del trabajo y se describen suscintamente algunas de las principales líneas de investigación sobre los métodos sin mallas. El análisis de distintos tipos de aproximaciones se lleva a cabo en el *Capítulo 2*, donde además se incluyen algunos aspectos relacionados con la implementación numérica. En el *Capítulo 3* se presentan los elementos necesarios para abordar la resolución mediante el método de los *Puntos Finitos* de problemas unidimensionales, mientras que en el *Capítulo 4* se extienden los conceptos previos a dos y tres dimensiones. En el *Capítulo 5* se plantean las ecuaciones para flujo incompresible y se deriva un algoritmo de resolución de las mismas. El algoritmo es

validado a través de diversos problemas de aplicación.

La generación de las nubes se constituyó en un importante desafío por este motivo se decidió incluir en el *Capítulo 6* algunas de las soluciones propuesta. Finalmente en el *Capítulo 7* se exponen las conclusiones y se dejan algunas inquietudes para investigaciones futuras.

Capítulo 2

Funciones de aproximación

2.1 Introducción

En este capítulo se describen en forma pormenorizada las técnicas de aproximación en la que se fundamenta el *Método de Puntos Finitos*. Con este fin planteamos la técnica de minimización conocida como *Mínimos Cuadrados*, deteniéndonos en el análisis de algunas características relacionadas con su formulación. Trabajaremos sobre variante de dicha técnica (*Mínimos Cuadrados Ponderados Fijos*), con la cual definiremos funciones que, dado un conjunto de puntos arbitrarios, nos permitan aproximar una incógnita cualquiera sin necesidad de cumplir con las restricciones impuestas por las aproximaciones mediante interpolación. Se estudiarán una serie de parámetros, introducidos mediante la formulación y finalmente se tratarán algunos aspectos relacionados con la implementación numérica de las mismas.

2.2 Construcción de una aproximación

En este apartado se presenta una técnica que permita aproximar una función escalar cualquiera $u(x)$ en un dominio cerrado $\Omega \in \mathcal{R}^d, d = 1, 2, 3$. La definición de dicha aproximación se realiza empleando únicamente un conjunto de puntos \mathbf{x}_j con $j = 1, \dots, n$ pertenecientes al dominio Ω .

Como ocurre en la mayor parte de las aproximaciones numéricas, el problema se plantea en forma local, para lo cual el dominio se divide en subdominios que identificaremos como Ω_i . Generalmente estos subdominios están asociados a un punto \mathbf{x}_i y se generan mediante un disco (dos dimensiones) o una esfera (tres dimensiones) y lo denominaremos dominio de influencia. Cada subdominio contendrá n_p puntos y el conjunto que forman lo identificaremos como $\mathcal{Q}(\mathbf{x}_i)$ donde el subíndice i indica que se trata del conjunto de puntos contenidos en Ω_i . Este conjunto se lo conoce

como nube de puntos.

Una característica distintiva de los métodos sin mallas radica en la posibilidad de que los subdominios se puedan solapar entre si y por lo tanto tendremos que

$$\sum_{i=1}^n \Omega_i > \Omega$$

En la figura (2.1) se muestra una representación de los subdominios generados mediante discos.

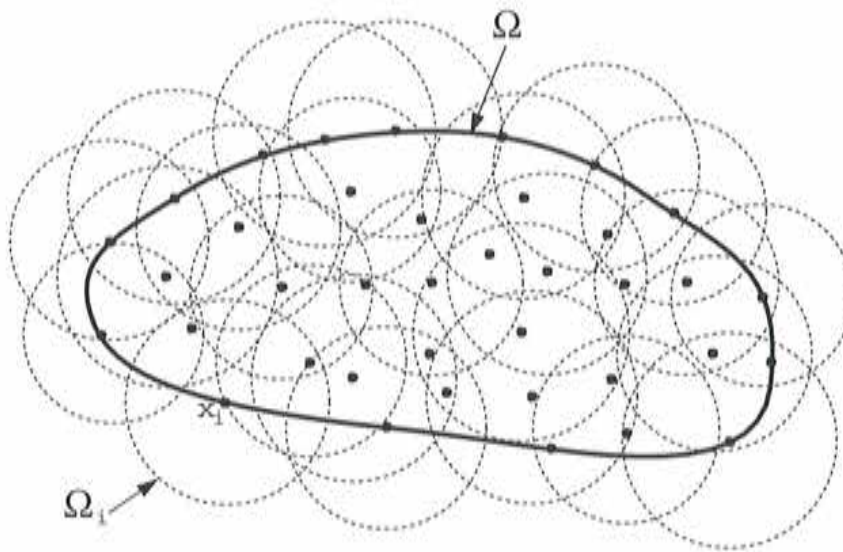


Figura 2.1: Modelo computacional para un método sin malla.

Una vez definidos los subdominios podemos plantear una función de aproximación para cada uno de ellos, de forma que:

$$u(\mathbf{x}) \cong \hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) \alpha_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

donde m es el número de términos de la base de aproximación, $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ es el vector que contiene las m funciones de la base y $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ es el vector de coeficientes que multiplica a cada uno de los términos de la base.

Para la construcción de la aproximación, por su flexibilidad y simplicidad, las bases polinómicas son las más apropiadas. Su expresión general es:

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k] \quad (2.2)$$

aunque no hay que descartar el uso de otro tipo de base, ya que existen problemas con soluciones que se adaptan a otro tipo de aproximación como, por ejemplo, soluciones discontinuas. En este caso parece apropiado introducir funciones discontinuas en dicha base.

Dentro de las bases polinómicas, las que se utilizan con mayor frecuencia son las de primer y segundo grado, que para el caso bidimensional (2D) y tridimensional (3D) están dados por

Base polinómica de primer grado (lineal):

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(x, y) &= [1, x, y]^T \quad \text{2D, } m = 3 \\ \mathbf{p}(x, y, z) &= [1, x, y, z]^T \quad \text{3D, } m = 4\end{aligned}$$

Base polinómica de segundo grado (cuadrática):

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(x, y) &= [1, x, y, x^2, xy, y^2]^T \quad \text{2D, } m = 6 \\ \mathbf{p}(x, y, z) &= [1, x, y, z, xy, xz, yz, x^2, y^2, z^2]^T \quad \text{3D, } m = 10\end{aligned}$$

Las expresiones de los m coeficientes $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ se pueden obtener evaluando la función de aproximación en cada uno de los n_p puntos del subdominio Ω_i de forma tal que

$$\mathbf{u}^h = \begin{Bmatrix} u_1^h \\ u_2^h \\ \vdots \\ u_{n_p}^h \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_{n_p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{n_p}^T \end{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

donde $u_j^h = u^h(\mathbf{x}_j)$ son los valores de la función incógnita y $\hat{u}_j = \hat{u}(\mathbf{x}_j)$ son los valores aproximados en cada punto del subdominio. Finalmente el vector $\mathbf{p}_j = \mathbf{p}(\mathbf{x}_j)$ contiene la base de aproximación evaluada en el punto de coordenadas \mathbf{x}_j . El conjunto de los n_p vectores \mathbf{p}_j se agrupan en la matriz \mathbf{P} .

Del sistema de ecuaciones planteado en (2.3) se pueden extraer los coeficiente $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$, aunque para ello, es necesario que la matriz \mathbf{P} no sea singular. Para que esto ocurra es condición necesaria que el número de puntos (n_p) sea igual a la cantidad de monomios de la base (m), además estos monomios deben ser linealmente independiente. Sin embargo estas dos condiciones no son suficiente para garantizar que la matriz \mathbf{P} no sea singular, ya que se debe cumplir que la distribución de los puntos tiene que ser *no degenerada* [DUA 95b]. Para funciones de aproximación lineales, esta condición se traduce en

- si $\Omega \in \mathcal{R}^d$, en el subdominio Ω_i deben existir $d + 1$ puntos y sus vectores de posición deben formar un elemento *simplex* de rango no nulo.

Suponiendo que se cumplen las condiciones que garantizan la no singularidad de matriz \mathbf{P} , de forma que los coeficiente $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ se pueden obtener a partir de

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{u}^h \quad (2.4)$$

En la ecuación (2.4) tanto la matriz \mathbf{P}^{-1} como el vector \mathbf{u}^h son constantes en cada subdominio, de esta forma podemos reemplazar $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ por $\boldsymbol{\alpha}$, con lo cual nos queda

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{u}^h \quad (2.5)$$

Substituyendo (2.5) en la ecuación (2.1) obtenemos la expresión de la función de aproximación para un subdominio determinado,

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{u}^h \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_i \quad (2.6)$$

Utilizando una notación más estandar podemos escribir:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \mathbf{u}^h \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_i \quad (2.7)$$

con

$$\mathbf{N}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}^{-1} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_i \quad (2.8)$$

Este vector estará compuesto por una serie de funciones

$$[\mathbf{N}^i]^T(\mathbf{x}) = [N_1^i(\mathbf{x}), N_2^i(\mathbf{x}), \dots, N_{n_p}^i(\mathbf{x})] \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_i \quad (2.9)$$

que representan la funciones de forma del punto definidas en el dominio Ω_i ; estas funciones son las que se utilizan en el método de los *Elementos Finitos* y cumplen con la condición estandar de interpolación [ZIE 89]. Esto implica que la solución aproximada pasa por los puntos del dominio, y por lo tanto $\hat{u}(\mathbf{x}_j) = u_j^h$, o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} N_j^i(\mathbf{x}_i) &= 1 & j &= i \\ N_j^i(\mathbf{x}_i) &= 0 & j &\neq i; \quad i, j = 1, \dots, n_p \end{aligned} \quad (2.10)$$

La obtención de las funciones de forma mediante esta técnica es muy poco flexible para ser utilizada en los métodos sin mallas, principalmente debido a la restricción que impone la condición $m = n_p$. La situación con la cual esperamos encontrarnos a la hora de realizar una aproximación es que el número de puntos (n_p) en cada subdominio sea completamente arbitrario, lo que nos lleva a definir tres posibilidades:

- 1º) $n_p > m$
- 2º) $n_p = m$
- 3º) $n_p < m$

En el primer caso el problema no tiene solución posible, por lo tanto la única opción es incrementar el número de puntos en el subdominio, con lo cual se transformará en una de las dos opciones restantes, siempre que queramos conservar el orden de la aproximación; el segundo caso es el que acabamos de presentar y que da lugar a las funciones de forma del FEM y FVM entre otros métodos; en el tercer caso, que por otro lado es el más común en el ámbito de los métodos sin malla, la solución propuesta es realizar una aproximación mediante la técnica de *Mínimos Cuadrados*.

2.3 Aproximación mediante *Mínimos Cuadrados*

Dados los valores de una variable cualquiera en un número de puntos arbitrario la técnica de *Mínimos Cuadrados* (LS según sus siglas en inglés) nos permite obtener una función que se ajusta a dichos valores minimizando el error global.

Para plantear el problema de minimización se construye un funcional discreto $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ que depende del cuadrado de la diferencia entre el valor de la aproximación local $\hat{u}(\mathbf{x})$, dada por la ecuación (2.1) y el valor de los parámetros u^h en cada punto del dominio. Su expresión es la siguiente:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \sum_{j \in \mathcal{Q}(\mathbf{x}_i)} [u_j^h - \hat{u}(\mathbf{x}_j)]^2 = \sum_{j \in \mathcal{Q}(\mathbf{x}_i)} [u_j^h - \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})]^2 \quad (2.11)$$

Minimizamos este funcional con respecto a los m parámetros $\alpha_i(\mathbf{x})$ con lo cual:

$$\frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{x})}{\partial \alpha_i(\mathbf{x})} = -2 \left[\sum_{j \in \mathcal{Q}(\mathbf{x}_i)} \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) [u_j^h - \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \alpha_i(\mathbf{x})] \right] = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (2.12)$$

desarrollando la expresión anterior:

$$\sum_{j \in \mathcal{Q}(\mathbf{x}_i)} \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) u_j^h = \sum_{j \in \mathcal{Q}(\mathbf{x}_i)} \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \alpha_i(\mathbf{x}) \quad i = 1, \dots, m \quad (2.13)$$

Reescribiendo la ecuación anterior en forma matricial tendremos,

$$(\mathbf{P} \mathbf{P}^T) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{P} \mathbf{u}^h \quad (2.14)$$

Si observamos las expresiones de las matrices \mathbf{P} todas sus componentes son constante, como así también lo son los valores de \mathbf{u}^h , por lo tanto podemos reemplazar $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ por $\boldsymbol{\alpha}$. Introduciendo las siguientes definiciones $\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{P}^T$ y $\mathbf{B} = \mathbf{P}$, podemos reescribir la igualdad anterior como:

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{B} \mathbf{u}^h \quad (2.15)$$

Luego si la matriz \mathbf{A} tiene inversa, de la ecuación (2.15) se pueden obtener los coeficientes del polinomio,

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}^h \quad (2.16)$$

Una vez obtenidos los coeficientes es posible la construcción de la aproximación de la función $\hat{u}(\mathbf{x})$ para cada subdominio,

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}^h \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_i \quad (2.17)$$

Por analogía con la notación usada en el Método de los Elementos Finitos, definimos la función de forma, con lo cual tendremos,

$$\mathbf{N}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_i \quad (2.18)$$

siendo $\mathbf{N}^T(\mathbf{x})$ un vector que contiene a las n_p funciones de forma del punto \mathbf{x}_i . Ver ecuación (2.9).

Las funciones de formas obtenidas mediante este método ya no cumplen con las condiciones standard de interpolación, ver [ZIE 89], ya que:

$$\begin{aligned} N_j^i(\mathbf{x}_i) &< 1 & j = i \\ N_j^i(\mathbf{x}_i) &\neq 0 & j \neq i; \quad i, j = 1, \dots, n_p \end{aligned} \quad (2.19)$$

y por lo tanto tendremos que $\hat{u}(\mathbf{x}_i) \neq u_i^h$. Para evaluar la incógnita se deberá usar la expresión

$$\hat{u}(\mathbf{x}_i) = \sum_{j \in \mathcal{Q}(\mathbf{x}_i)} N_j^i(\mathbf{x}_i) u_j^h \quad (2.20)$$

Para una mayor comprensión de esta aproximación, en la figura (2.2) se representa esquemáticamente una función cualquiera $\hat{u}(\mathbf{x})$ y los valores nodales u_j^h para un dominio arbitrario Ω_i .

2.4 Aproximación mediante *Mínimos Cuadrados Ponderados*

En el procedimiento de interpolación presentado previamente se minimiza de forma global el error dentro de la nube correspondiente; existe una variante de gran interés de esta formulación aplicable para los casos en que la información local es más importante que la información global. En estos casos es lógico pensar que los puntos que se encuentran más cercanos al punto de interés tengan mayor influencia que los puntos que están más alejados del mismo. Esta variante consiste en añadir una función que actúe como ponderación en el proceso de minimización.

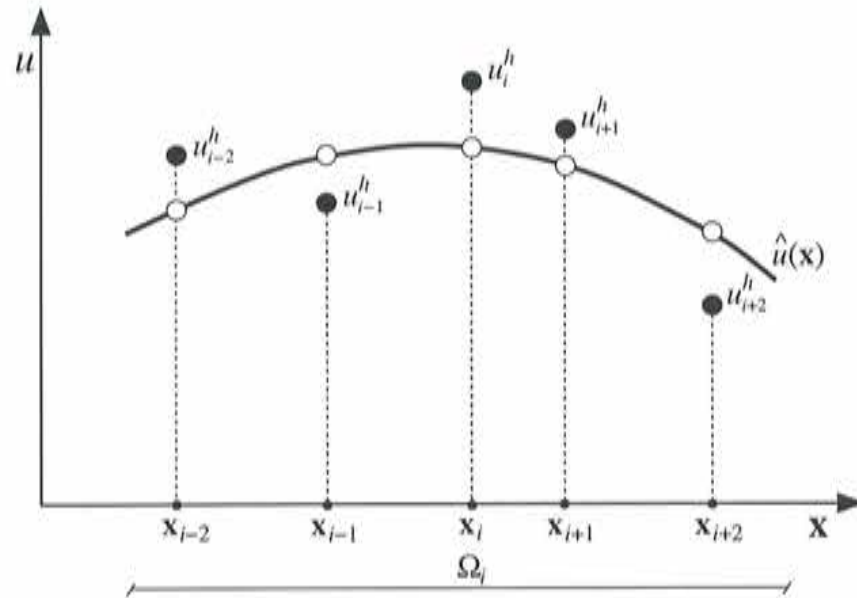


Figura 2.2: Esquema de la interpolación mediante *Mínimos Cuadrados*.

2.4.1 Funciones de ponderación

A continuación haremos una descripción de las funciones de ponderación que se utilizan en este tipo de aproximación. Para ello comenzaremos recordando que al subdominio $\Omega_i \in \Omega$ lo hemos denominado dominio de influencia. Este subdominio queda determinado por el punto de coordenadas \mathbf{x}_i denominado "punto estrella" y una longitud d_{\max} . A la función de ponderación $\varphi(\mathbf{x})$ asociada al dominio de influencia centrado en \mathbf{x}_i la identificaremos como $\varphi_i(\mathbf{x})$.

Siguiendo la definición propuesta por Monaghan [MON 82], las funciones de ponderación deben satisfacer, las siguientes condiciones :

- 1) $\varphi_i(\mathbf{x}_i) = 1$
- 2) $\varphi_i(\mathbf{x}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_i$
- 3) $\varphi_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \notin \Omega_i$
- 4) $\varphi_i(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_i$

En general las funciones de ponderación se expresan como una función de la distancia, la cual se define como $d = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$. Existe un grupo de funciones que han utilizado por diversos autores ([NAY 92], [BEL 94a], [LU 94]) con este fin, por lo cual es conveniente proponerlas para un posterior análisis. Estas son:

Función cónica

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = 1 - \left(\frac{d}{d_{\max}}\right)^k$$

Función gaussiana

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \frac{\text{Exp}(-(d/\beta)^k) - \text{Exp}(-(d_{\max}/\beta)^k)}{1 - \text{Exp}(-(d_{\max}/\beta)^k)}$$

Función senoidal

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left[\pi \frac{d}{d_{\max}}\right]\right)$$

Función polinómica de 4^{to} orden

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = 1 - 6 \left(\frac{d}{d_{\max}}\right)^2 + 8 \left(\frac{d}{d_{\max}}\right)^3 - 3 \left(\frac{d}{d_{\max}}\right)^4$$

Los coeficientes k y β que aparecen en las funciones cónica y gaussiana permiten modificar las características de las mismas y sus valores serán determinados posteriormente. El otro coeficiente que aparece en todas las funciones es d_{\max} (radio de influencia), generalmente este coeficiente es proporcional a la distancia al punto más lejano respecto al punto estrella. En este trabajo se definió como:

$$d_{\max} = \gamma \cdot \max_{j \in \mathcal{Q}(\mathbf{x}_i)} [d_j] \quad (2.21)$$

siendo γ una constante mayor que uno, y d_j es la distancia entre el punto estrella y el punto de coordenadas \mathbf{x}_j :

$$d_j = \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| = \sqrt{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^2} \quad (2.22)$$

La constante γ se introduce para que la función de ponderación no se haga cero en el punto más alejado de la nube.

2.4.2 Funciones de forma

La obtención de las funciones de forma se realiza planteando una aproximación de *Mínimos Cuadrados* a la que le añadimos una función de ponderación que nos permitirá dar más relevancia a ciertos valores.

Se define la aproximación local según (2.1) utilizando una base polinómica $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$. De la misma forma que en el apartado anterior se plantea el funcional discreto \mathbf{J} con el que se evalúa el cuadrado del error entre la aproximación local $\hat{u}(\mathbf{x})$ y los parámetros u^h , este error es ponderado mediante una función de peso $\varphi(\mathbf{x})$. La

expresión de dicho funcional será:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \sum_{j \in \mathcal{Q}(\mathbf{x}_i)} \varphi(\mathbf{x}) [u_j^h - \hat{u}(\mathbf{x}_j)]^2 = \sum_{j \in \mathcal{Q}(\mathbf{x}_i)} \varphi(\mathbf{x}) [u_j^h - \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})]^2 \quad (2.23)$$

Para simplificar la notación podemos escribir la ecuación (2.23) en forma matricial:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = [\mathbf{u}^h - \mathbf{P}^T \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})]^T \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) [\mathbf{u}^h - \mathbf{P}^T \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})] \quad (2.24)$$

Las dimensiones de las matrices están dadas por m (número de términos de la base) y n_p (número de puntos de la nube) y contienen los siguientes términos:

Valores de la incógnita

$$\mathbf{u}^h = [u_{(1)}^h, u_{(2)}^h, \dots, u_{(n_p)}^h]^T \quad \text{orden } (n_p \times 1)$$

Coefficientes del polinomio

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = [\alpha_1(\mathbf{x}), \alpha_2(\mathbf{x}), \dots, \alpha_m(\mathbf{x})]^T \quad \text{orden } (m \times 1)$$

Monomios de la base polinómica de orden m evaluados en los n_p puntos de la nube

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_{(1)}) & p_1(\mathbf{x}_{(2)}) & \cdots & p_1(\mathbf{x}_{(n_p)}) \\ p_2(\mathbf{x}_{(1)}) & p_2(\mathbf{x}_{(2)}) & \cdots & p_2(\mathbf{x}_{(n_p)}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(\mathbf{x}_{(1)}) & p_m(\mathbf{x}_{(2)}) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_{(n_p)}) \end{bmatrix} \quad \text{orden } (m \times n_p)$$

Función de ponderación evaluada en los n_p puntos de la nube

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(1)}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(2)}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{(n_p)}) \end{bmatrix} \quad \text{orden } (n_p \times n_p)$$

En estas matrices los subíndices puestos entre paréntesis indican que estamos utilizando la numeración local.

La obtención de los coeficientes $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ se realiza a través de la minimización del funcional $\mathbf{J}(\mathbf{x})$, definido en ecuación (2.24), con respecto a cada uno de los coeficientes.

$$\frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})} = -2 [\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) [\mathbf{P} \mathbf{u}^h - \mathbf{P}^T \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})]] = 0 \quad (2.25)$$

esta expresión se puede reordenar de forma tal que:

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) \mathbf{P} \mathbf{u}^h = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) \mathbf{P} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (2.26)$$

Introduciendo las siguientes expresiones:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{P} \mathbf{P}^T = \sum_{j \in \mathcal{Q}(\mathbf{x}_i)} \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \quad (2.27)$$

y

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{P} = [\varphi(\mathbf{x}) \mathbf{p}(x_1), \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{p}(x_2), \dots, \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{p}(x_{n_p})] \quad (2.28)$$

esta forma la ecuación (2.26) se transforma en:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u}^h \quad (2.29)$$

y, si la matriz $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ no es singular, se pueden despejar los coeficientes:

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u}^h \quad (2.30)$$

Una vez obtenidos los coeficientes podemos reescribir la aproximación de la función incógnita:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u}^h \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_i \quad (2.31)$$

Nuevamente introducimos el concepto de la función de forma:

$$\mathbf{N}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_i \quad (2.32)$$

Es importante destacar que si se selecciona la función de ponderación $\varphi(\mathbf{x}) = 1$ se obtiene una interpolación de mínimos cuadrados estandar. También hay que mencionar que por el carácter de la minimización se sigue cumpliendo que $\hat{u}(\mathbf{x}_j) \neq u_j^h$. Por lo tanto $\hat{u}(\mathbf{x})$ es el valor real de la aproximación que debe satisfacer las ecuaciones diferenciales y los u^h son simplemente parámetros de la aproximación, que carecen de sentido físico.

Teniendo en cuenta la definición de las propiedades de las funciones de ponderación podemos introducir la siguiente cambio en la notación

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j \in \mathcal{Q}(\mathbf{x}_i)} N_j^i(\mathbf{x}) u_j^h = \sum_{j=1}^n N_j^i(\mathbf{x}) u_j^h \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_i$$

debido a que los puntos que no pertenecen a $\mathcal{Q}(\mathbf{x}_i)$ están ponderados por la función nula y por lo tanto no tienen efecto en el proceso de minimización.

2.4.3 Consistencia u orden de la aproximación

La aproximación realizada mediante *Mínimos Cuadrados*, los coeficientes α son constantes en cada subdominio Ω_i y el orden de la aproximación es directamente el orden del polinomio $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ que se utiliza como función base. Por otro lado en el método de *Mínimos Cuadrados Ponderados* los coeficientes α son función de las coordenadas \mathbf{x} , por esta razón la función de aproximación $\hat{u}(\mathbf{x})$ puede contener términos de mayor orden que los introducidos en la base polinómica. por este motivo resulta de vital importancia demostrar que la función definida puede aproximar, por lo menos, las funciones de la base $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ [TAY 95].

Para ello, consideramos la siguiente aproximación:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x})u_j^h \quad (2.33)$$

donde la función de forma está definida como:

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (2.34)$$

proponemos la siguiente aproximación:

$$\hat{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x})\mathbf{U}_j^h \quad (2.35)$$

siendo,

$$\hat{\mathbf{U}} = [\hat{u}_1(\mathbf{x}), \hat{u}_2(\mathbf{x}), \hat{u}_3(\mathbf{x}), \dots, \hat{u}_n(\mathbf{x})] \quad (2.36)$$

y

$$\mathbf{U}_j^h = [u_{j1}^h, u_{j2}^h, u_{j3}^h, \dots, u_{jn}^h] \quad (2.37)$$

son los valores locales. Le asignamos a cada u_{jl}^h el valor del polinomio $p_l(\mathbf{x}_j)$ por lo tanto:

$$\mathbf{U}_j^h = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \quad (2.38)$$

Usando la definición de la función de interpolación de la ecuación (2.32) tendremos:

$$\hat{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x})\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{P}^T \quad (2.39)$$

donde,

$$\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_1) \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

por otra parte sabemos que por definición $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})\mathbf{P}$, reemplazando en (2.39) tenemos:

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})\mathbf{P}\mathbf{P}^T \quad (2.41)$$

además $\Phi(\mathbf{x})\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ por definición, por lo tanto:

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \quad (2.42)$$

lo que implica que podemos interpolar exactamente cualquier función incluida en la base $\mathbf{p}(\mathbf{x})$. Si la base utilizada para definir la función la interpolación es polinómica y además está completa, podremos interpolar exactamente a todas las funciones polinómicas incluidas en dicha base, por lo tanto, el polinomio de primer orden está incluido ($m = 1$) esto implica que:

$$\sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) = 1 \quad (2.43)$$

esta propiedad conocida como *Partición de la Unidad* y que se cumple para cualquier $\mathbf{x} \in \Omega_i$, fue reconocida por Babuska [BAB 95], y permitió utilizar toda la teoría desarrollada en torno a esta técnica a los *Mínimos Cuadrados Ponderados*.

2.4.4 *Mínimos Cuadrados Ponderado Móviles*

Este método fue propuesto por primera vez por Lancaster y Salkauskas [LAN 81] quienes publicaron un detallado análisis del mismo. Nayroles y colaboradores [NAY 92] aplicaron esta teoría en el ámbito de el método de los Elementos Difusos.

En la aproximación por *Mínimos Cuadrados Ponderados Móviles* (MLS) se define el tamaño y la forma de la función de ponderación $\varphi(\mathbf{x})$ y es trasladada sobre el dominio de forma que se obtenga su valor máximo en el punto de coordenadas \mathbf{x}_k donde la función $\hat{u}(\mathbf{x})$, o sus derivadas deben ser evaluadas. Este punto \mathbf{x}_k es una posición arbitraria y no es necesariamente coincidente con algún punto \mathbf{x}_i de la nube. Además el dominio de influencia Ω_k ahora está ligado al punto \mathbf{x}_k por lo tanto se irá moviendo a medida que nos traslademos.

En la figura (2.3) se puede ver un esquema de esta clase de aproximación.

Para obtener los coeficientes se plantea un funcional equivalente al de la ecuación (2.23) para cada punto arbitrario \mathbf{x}_k , la nube queda definida por todos los puntos \mathbf{x}_j que se encuentran dentro del subdominio Ω_k . A la función de ponderación móvil centrada en el punto \mathbf{x}_k la definimos como $\varphi_k(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_k) = \sum_{j=1}^n \varphi_k(\mathbf{x}_j) [u_j^h - \mathbf{p}_j^T \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})]^2 \quad (2.44)$$

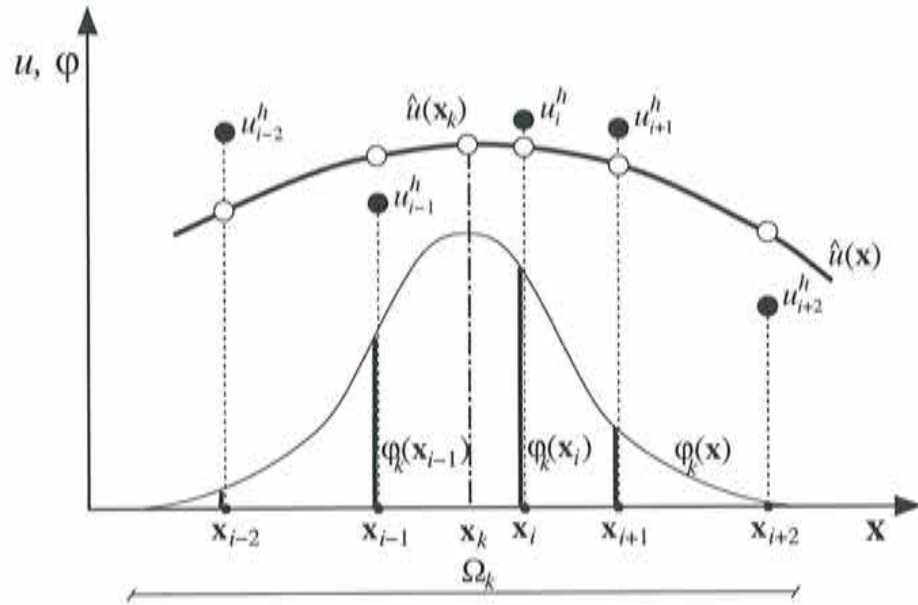


Figura 2.3: Esquema de interpolación mediante *Mínimos Cuadrados Ponderados Móviles*.

como podemos ver el funcional planteado es función de la coordenada \mathbf{x}_k que como ya hemos definido, son completamente arbitrarias.

Las propiedades que debe cumplir la función de ponderación móvil son equivalentes a las ya definidas, aunque en este caso nos debemos referir al dominio de influencia móvil :

$$\begin{cases} \varphi_k(x_k) = 1 \\ \varphi_k(x) \neq 0 & \forall x \in \Omega_k \\ \varphi_k(x) = 0 & \forall x \in \Omega_k \end{cases}$$

Nuevamente recurrimos a la minimización del funcional $\mathbf{J}(\mathbf{x}_k)$ con lo que obtendremos expresión equivalente a (2.30) en la cual reemplazamos \mathbf{x} por \mathbf{x}_k :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_k) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{B}(\mathbf{x}_k) \mathbf{u}^h \quad (2.45)$$

donde las matrices $\mathbf{A}(\mathbf{x}_k)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{x}_k)$ están definidas por:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_k) = \sum_{j=1}^n \varphi_k(\mathbf{x}_j) \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \quad (2.46)$$

y

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}_k) = [\varphi_k(\mathbf{x}_1) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1), \varphi_k(\mathbf{x}_2) \mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, \varphi_k(\mathbf{x}_n) \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)] \quad (2.47)$$

finalmente, si la matriz $\mathbf{A}(\mathbf{x}_k)$ no es singular se pueden calcular los coeficientes:

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{A}(\mathbf{x}_k)^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}_k) \mathbf{u}^h \quad (2.48)$$

Es importante notar que en este caso, al depender α de las coordenadas \mathbf{x}_k , debemos invertir la matriz $\mathbf{A}(\mathbf{x}_k)$ en cada punto \mathbf{x}_k en que sea necesario evaluar la función de aproximación $\hat{u}(\mathbf{x})$ o sus derivadas. Para evitar el alto costo que esto implica, algunos autores [LU 94] propusieron la construcción de una base polinómica ortogonal con respecto a la función de ponderación, para lo cual se valieron del procedimiento de Gram-Schmidt. De la aplicación de esta técnica se obtiene una matriz $\mathbf{A}(\mathbf{x}_k)$ diagonal.

Sin embargo esta idea fue dejada de lado cuando se comprobó [HEG 96] que la diagonalización de la matriz presenta un coste computacional similar a la inversión de la misma.

Una vez obtenidos los coeficientes podemos reconstruir la aproximación $\hat{u}(\mathbf{x})$. Como comentamos previamente \mathbf{x}_k es una posición arbitraria, por lo tanto proponemos reemplazarla por \mathbf{x} , ya que $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_k$; de esta forma podemos escribir:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^T(\mathbf{x})\mathbf{u}^h \quad (2.49)$$

donde las funciones de forma se definen mediante,

$$\mathbf{N}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (2.50)$$

Consistencia

Como ya hemos demostrado esta aproximación es consistente hasta el orden k si la base está constituida por el polinomio completo de orden k . Ver demostración en el apartado (2.4.3).

Derivabilidad

El orden de derivabilidad de las funciones de forma depende directamente de la función de ponderación. En el trabajo presentado por Lancaster y Salkauskas [LAN 81] se demuestra que si la base primaria \mathbf{p} es continuamente derivable hasta el orden k en Ω y la función de ponderación φ es continuamente derivable hasta orden l en Ω , esto implica que las funciones de forma son continuamente derivables hasta el orden $\min(k, l)$ en el dominio Ω . Si la base de aproximación es polinómica tendremos que \mathbf{p} es infinitamente derivable en Ω , lo que implica que $k = \infty$. Por lo tanto el $\min(k, l) = l$ de lo que se desprende que las funciones de forma \mathbf{N} son derivables continuamente hasta el orden l .

Basándonos en esta prueba podemos construir una función de forma continuamente derivable hasta el orden deseado simplemente seleccionando una función de ponderación suficientemente derivable.

Cálculo de las derivadas

El cálculo de las derivadas en una aproximación realizada mediante MLS no es trivial, esto es motivado por la presencia de la función de ponderación. Partiremos de una aproximación dada por

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^T(\mathbf{x})\mathbf{u}^h \quad (2.51)$$

suponiendo que la función de ponderación es derivable hasta el orden $l \geq 2$, entonces su primera derivada es

$$\frac{\partial \hat{u}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{N}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u}^h \quad (2.52)$$

reemplazando $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ por la expresión de la ecuación (2.50) donde, para simplificar la expresión quitamos (\mathbf{x}) , obtenemos:

$$\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \frac{\partial [\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}]}{\partial \mathbf{x}} \right] \quad (2.53)$$

En esta expresión podemos diferenciar claramente dos términos; en primer lugar tenemos

$$\frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (2.54)$$

que no presenta ninguna dificultad debido a que solo es necesario conocer las derivadas de los términos de la base. En el segundo término tenemos,

$$\mathbf{p}^T \frac{\partial [\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}]}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{p}^T \frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.55)$$

La evaluación de las derivadas de la matriz \mathbf{B} sólo dependen de las derivadas de la función de ponderación, en cambio las derivadas de la matriz \mathbf{A}^{-1} , que como recordaremos es función de \mathbf{x} , presenta una elevada complejidad. Para simplificar la expresión anterior se recurre a la siguiente igualdad:

$$\frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^{-1} \quad (2.56)$$

Sustituyendo (2.54), (2.55), (2.56) en (2.53) obtenemos:

$$\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{p}^T \left[\mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^{-1} \right] \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{x}} \right] \quad (2.57)$$

donde las derivadas de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} están dadas por:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}_j)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \quad (2.58)$$

y

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial \varphi(\mathbf{x}_1)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{p}(\mathbf{x}_1), \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}_2)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}_n)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{p}(\mathbf{x}_n) \right] \quad (2.59)$$

Es importante recordar que $\varphi_k(\mathbf{x}_j) = \varphi(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)$, y como \mathbf{x}_k es una posición arbitraria la hemos reemplazado por \mathbf{x} de forma que $\varphi_k(\mathbf{x}_j) \equiv \varphi(\mathbf{x}_j)$.

El procedimiento para obtener la segunda derivada es semejante y la expresión final a la que se arriba es la siguiente

$$\frac{\partial^2 \hat{u}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \mathbf{u}^h \quad (2.60)$$

en donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{N}^T}{\partial \mathbf{x}^2} = & 2 \left[\mathbf{p}^T \mathbf{G} - \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^{-1} \right] \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{x}} \right] + \\ & + \frac{\partial^2 \mathbf{p}^T}{\partial \mathbf{x}^2} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{p}^T \left[\mathbf{H} \mathbf{B} - \mathbf{A}^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial \mathbf{x}^2} \right] \end{aligned} \quad (2.61)$$

en esta expresión se introdujo la siguiente notación

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^{-1} \quad (2.62)$$

y

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}^2} \mathbf{A}^{-1} \quad (2.63)$$

Como podemos observar el cálculo de la derivada segunda presenta una complejidad significativa.

Buena muestra de ello es formulación del DEM llevada a cabo por Nayroles [NAY 92] donde se propuso aproximar las derivadas despreciando los términos en los que aparecían derivadas de la función de ponderación, con lo cual se simplifica notablemente su tratamiento. Con esta hipótesis las expresiones se reducen a

$$\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \mathbf{x}} \cong \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (2.64)$$

para la primera derivada y

$$\frac{\partial^n \mathbf{N}^T}{\partial \mathbf{x}^n} \cong \frac{\partial^n \mathbf{p}^T}{\partial \mathbf{x}^n} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (2.65)$$

para las derivadas de mayor orden.

2.4.5 Mínimos Cuadrados Ponderados Fijos

La técnica de *Mínimos Cuadrados Ponderados Fijos* (FLS), como su nombre lo indica, pertenece a la familia de métodos derivados a través de la minimización del error entre la aproximación y los valores puntuales. Más concretamente podemos considerar al FLS como un caso particular del método de MLS.

Como ya hemos visto, en el MLS la función de ponderación está definida en todo el dominio Ω_i y además mantiene su forma constante teniendo su valor máximo en el punto cualquiera \mathbf{x} donde se evalúa la aproximación. Sin embargo esta función puede cambiar el soporte mediante dos operaciones básicas como lo son la traslación y la contracción/dilatación. Estas propiedades permiten una definición global y única de las funciones de forma.

Como respuesta a la necesidad de simplificar la implementación de la técnica de MLS se propuso que los coeficientes del vector $\alpha(\mathbf{x})$ sean constantes, propuesta que dio lugar a la aproximación difusa que hemos mencionado en el *Capítulo 1*. Por otro lado esta misma idea, aunque justificada mediante otros argumentos dio origen a la técnica denominada *Mínimos Cuadrados Fijos*. En la figura (2.4) podemos observar la forma en que actúa la función de ponderación fija en el nodo estrella.

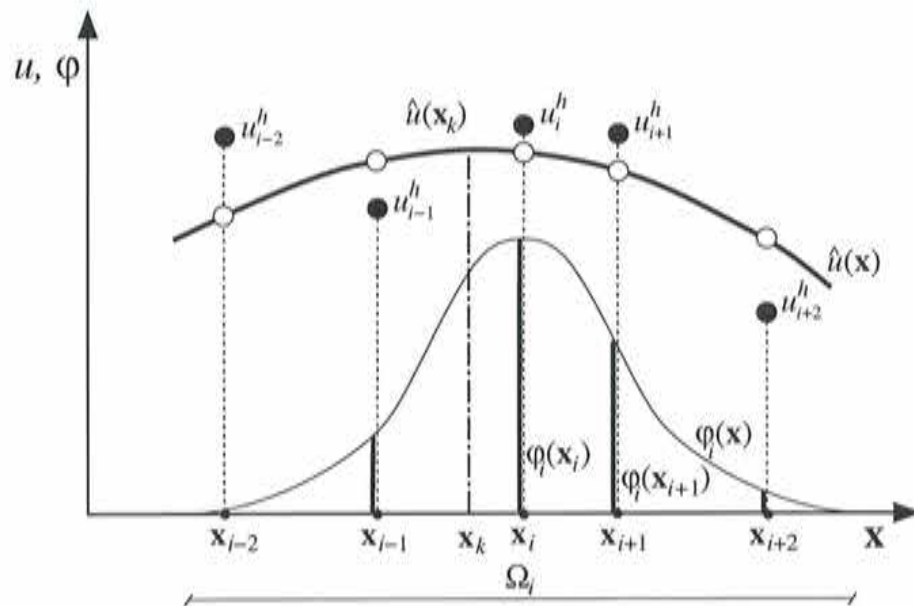


Figura 2.4: Esquema de interpolación mediante *Mínimos Cuadrados Ponderados Fijos*.

Este tipo de aproximación es muy simple y presenta algunas ventajas frente al MLS. Dado un subdominio Ω_i se define una función de ponderación de forma tal que

el valor máximo se obtiene en \mathbf{x}_i punto estrella. Esta función, que denominaremos como $\varphi_i(\mathbf{x}_j) = \varphi(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)$, cumple las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \varphi_i(\mathbf{x}_i) = 1 \\ \varphi_i(\mathbf{x}) \neq 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega_i \\ \varphi_i(\mathbf{x}) = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega_i \end{cases}$$

Como hemos en los casos anteriores planteamos un funcional que minimice el error ponderado mediante la función definida previamente, al tratarse de una función fija no depende de \mathbf{x} , con lo cual el funcional discreto se escribe de la siguiente forma:

$$\mathbf{J} = \sum_{j=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}_j) [u_j^h - \mathbf{p}_j^T \boldsymbol{\alpha}]^2 \quad (2.66)$$

minimizando dicha expresión e introduciendo las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} se obtienen:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{B}\mathbf{u}^h \quad (2.67)$$

a partir de esta expresión, si la matriz \mathbf{A} no es singular, podemos obtener los coeficientes $\boldsymbol{\alpha}$ para la aproximación realizada en el punto \mathbf{x}_i :

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}^h \quad (2.68)$$

las matrices tienen la misma expresión que en el MLS pero es importante notar que las funciones de ponderación son constantes y quedan definidas por el punto estrella, de modo que:

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}_j) \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \quad (2.69)$$

y

$$\mathbf{B} = [\varphi_i(\mathbf{x}_1) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1), \varphi_i(\mathbf{x}_2) \mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, \varphi_i(\mathbf{x}_n) \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)] \quad (2.70)$$

Una vez definidas las matrices podemos escribir la aproximación de la función incógnita en cada subdominio

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}^h \quad (2.71)$$

si queremos introducir el concepto de función de forma tal como lo hicimos previamente tenemos que,

$$\mathbf{N}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (2.72)$$

de esta forma la ecuación (2.71) puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \mathbf{u}^h \quad (2.73)$$

Las funciones obtenidas mediante el método de *Mínimos Ponderados Fijos* sólo son válidas en un entorno del punto estrella, esto es consecuencia directa de haber fijado la función de ponderación a dicho punto.

Otra característica de la aproximación es que para un punto arbitrario $\mathbf{x}_k \in \Omega$, nos encontraremos con que dicho punto estará multievaluado, tanto en la función misma como en sus derivadas.

En la figura (2.5) se puede observar el problema de multievaluación en la aproximación.

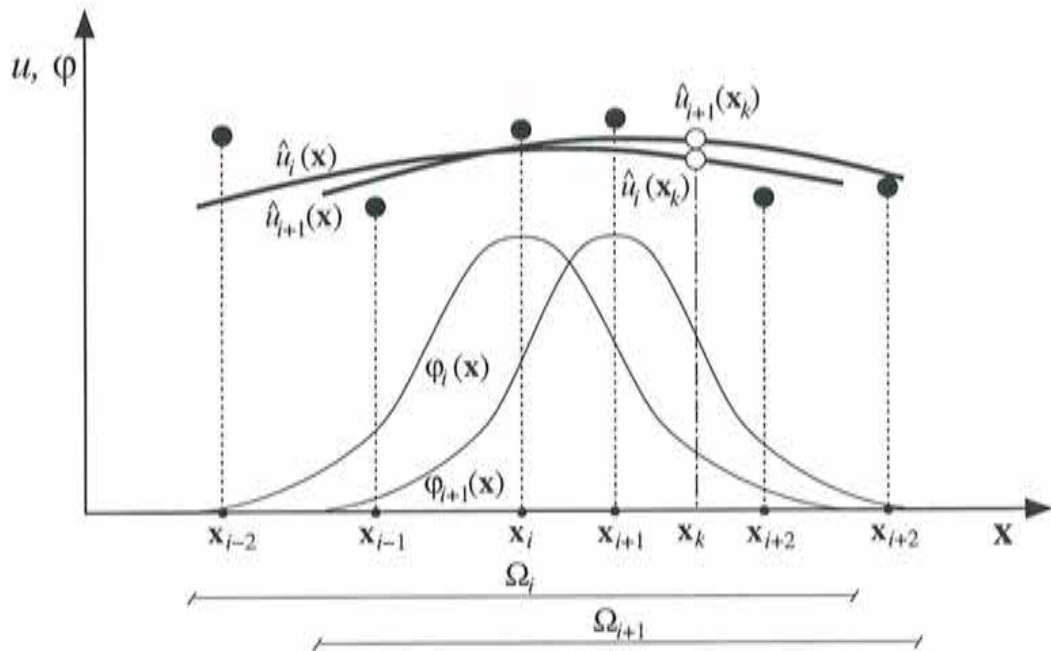


Figura 2.5: Multievaluación de un punto arbitrario \mathbf{x}_k , mediante la aproximación FLS.

Esta aproximación cumple, aunque en forma local, con las propiedades de Existencia y Consistencia del MLS, sin embargo no puede brindar una solución globalmente continua ni siquiera en el dominio de influencia Ω_i .

Obtención de las derivadas

La obtención de las derivadas de las funciones de forma ponderadas con una función de peso fija no presentan dificultades debido a que los coeficientes α son constantes en cada subdominio. Como consecuencia de ello el orden de derivabilidad depende exclusivamente de la base de interpolación. Utilizando una base de interpolación polinómica, obtendremos una aproximación derivable hasta un orden ∞ .

Dada la aproximación de las incógnitas mediante la ecuación (2.73) su derivada es

$$\frac{\partial \hat{u}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{N}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u}^h \quad (2.74)$$

reemplazando la función de forma según la ecuación (2.72) y derivando:

$$\frac{\partial \mathbf{N}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{p}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (2.75)$$

de la misma forma se pueden calcular las derivadas de mayor orden:

$$\frac{\partial^k \mathbf{N}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^k} = \frac{\partial^k \mathbf{p}^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^k} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (2.76)$$

En el ejemplo de la figura (2.6) se presentan las funciones de forma y las derivadas primeras de las mismas. En este caso se utilizó una base polinómica de segundo grado ($m = 3$) y una función de ponderación de Gauss. La nube está formada por cinco puntos equidistantes entre sí ($n_p = 5$).

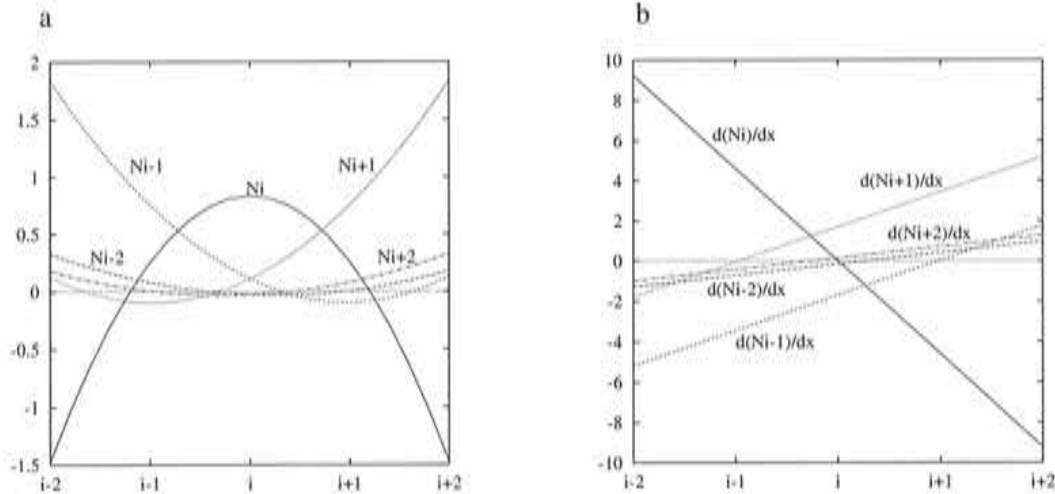


Figura 2.6: Funciones de forma obtenidas con $m = 3$ y $n_p = 5$. a) funciones de forma, b) derivada primer.

Como era previsible, al depender solamente de las derivadas de la base de interpolación, las derivadas primeras varían linealmente.

2.4.6 Análisis de las funciones de forma

En la construcción de las funciones de forma intervienen diversos parámetros como, por ejemplo, el número de puntos, la base de interpolación, las características de las funciones de ponderación o la definición del área de influencia. La posibilidad de controlar todos estos parámetros nos permite adecuar las funciones de forma a las necesidades del problema planteado. Para ello a continuación identificaremos la forma en que influye cada uno de estos factores previamente enumerados.

Base primaria de interpolación

Sin lugar a dudas, la definición de la base de interpolación es el factor primordial en la construcción de la aproximación.

Para realizar este estudio se utilizó un dominio unidimensional discretizado mediante puntos equidistantes, el dominio de influencia o soporte del punto x_i es $\Omega_i = 4.1h$, siendo $h = |x_i - x_{i-1}|$ la distancia entre dos puntos contiguos, con lo cual el conjunto $\mathcal{Q}(x_i) = [x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ quedará conformado por 5 puntos. Como función de ponderación se utilizó en todos los casos la campana de Gauss. En la figura (2.7) se muestra esquemáticamente lo previamente descrito.

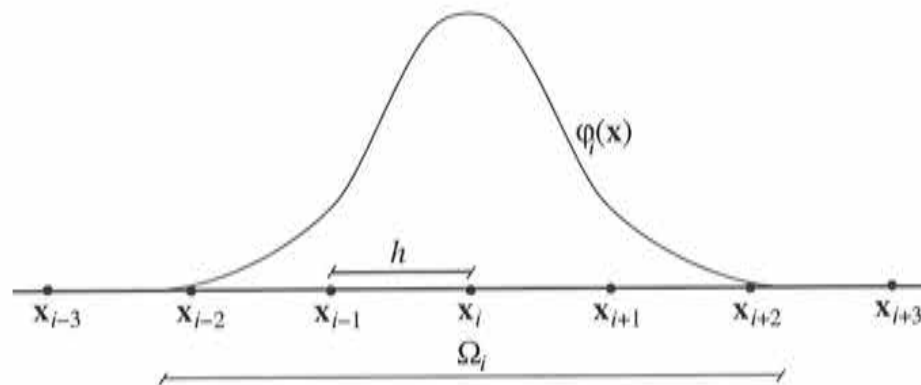


Figura 2.7: Esquema del dominio y de la función de ponderación.

En la tabla presentada a continuación con las diferentes bases polinómicas unidimensionales utilizadas para la construcción de las funciones de forma.

a) Constante	$[1]$
b) Lineal	$[1, x]$
c) Cuadrática	$[1, x, x^2]$
d) Cúbica	$[1, x, x^2, x^3]$

En la figura (2.8) se pueden ver las funciones de forma que se obtienen para las bases de interpolación presentadas en la tabla anterior.. En los cuatro casos

expuestos se observa la condición de no interpolación, que se traduce en que $N_i(x_i) \neq 1$ y $N_j(x_i) \neq 0$ para $j = 1, n_p$ con $j \neq i$, aunque, como se puede apreciar a medida que $m \rightarrow n_p$ las funciones de forma tienden a satisfacer la condición de interpolación que se obtendría haciendo $m = n_p$. También se puede observar como la aproximación se deteriora rápidamente a medida que nos alejamos del punto estrella.

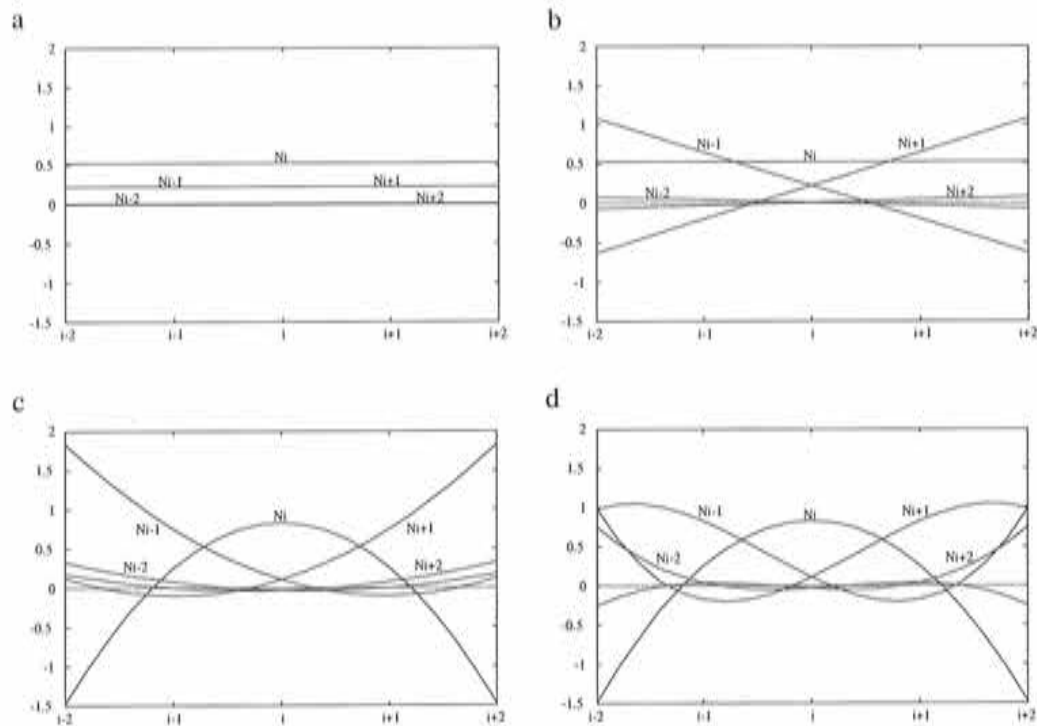


Figura 2.8: Funciones de forma para distintas bases polinómicas. a) constantes, b) lineales, c) cuadráticas y d) cúbicas.

Distribución de puntos en la nube

Estudiar la influencia de la cantidad de puntos y la posición de los mismos nos permitirá conocer la sensibilidad del método ante estos dos aspectos. Una formulación robusta debería presentar una baja sensibilidad frente a variaciones tanto de la posición como, de la cantidad de puntos que conforman la discretización. Esto nos permitirá agregar, quitar o mover puntos conservando el orden de aproximación.

Los métodos en los que se obtienen las funciones de forma a través de interpolación demuestran una notable sensibilidad a la calidad de las mallas, o lo que es

lo mismo, a lo posición de los puntos. Ejemplo de ello son los errores numéricos producidos por los grandes gradientes que se introducen en las funciones de forma cuando existen dos puntos muy cercanos entre sí. Este inconveniente produce severas limitaciones en los generadores de malla y en los criterios de adaptividad.

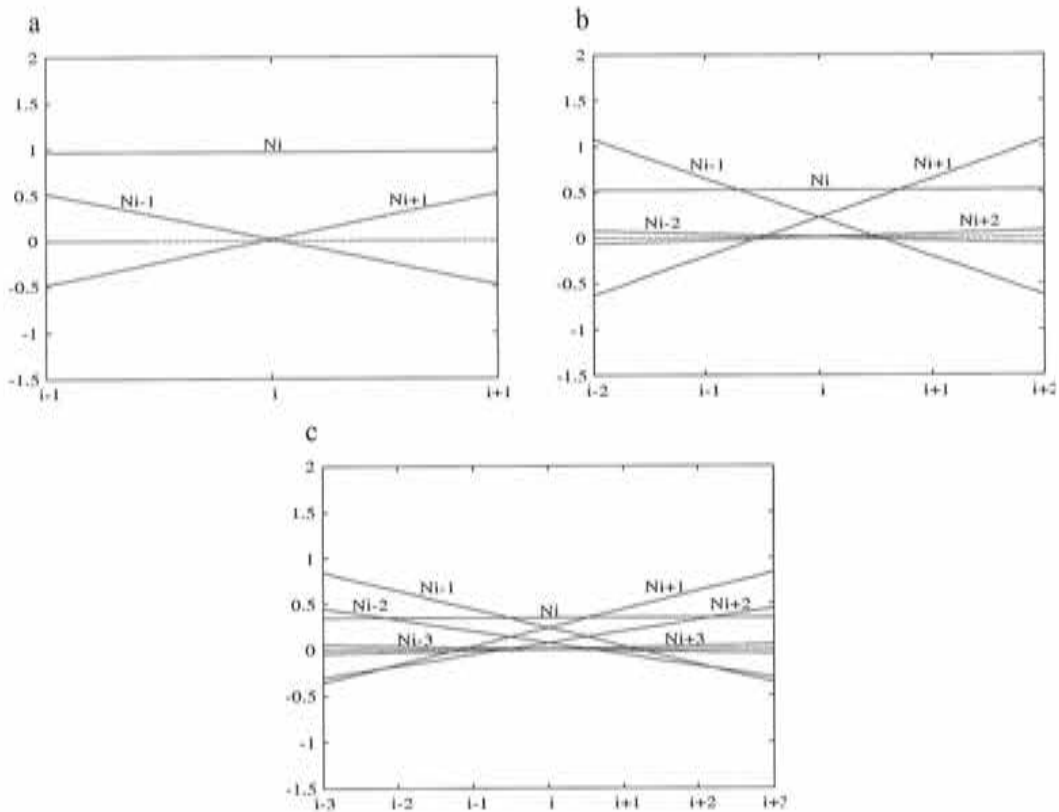


Figura 2.9: Funciones de forma lineales ($m = 2$) para a) $n_p = 3$, b) $n_p = 5$, c) $n_p = 7$.

En las figuras (2.9) (2.10) se puede observar la forma de las funciones de interpolación obtenidas variando la cantidad de puntos en el dominio, manteniendo iguales la base de interpolación la función de ponderación y la dimensión del dominio de influencia.

Los puntos están distribuidos en forma equiespaciados y el punto estrella se encuentra localizado en la posición x_i . Se calcularon las funciones de forma mediante bases de interpolación lineal ($m = 2$) y cuadrática ($m = 3$) y con 3, 5 y 7 puntos.

En la figura (2.9) (funciones de forma lineales) se puede ver como el valor de la N_i varía notablemente con el aumento del número de puntos, lo que se puede interpretar como una alta sensibilidad a la variación de la cantidad de puntos. En el caso de

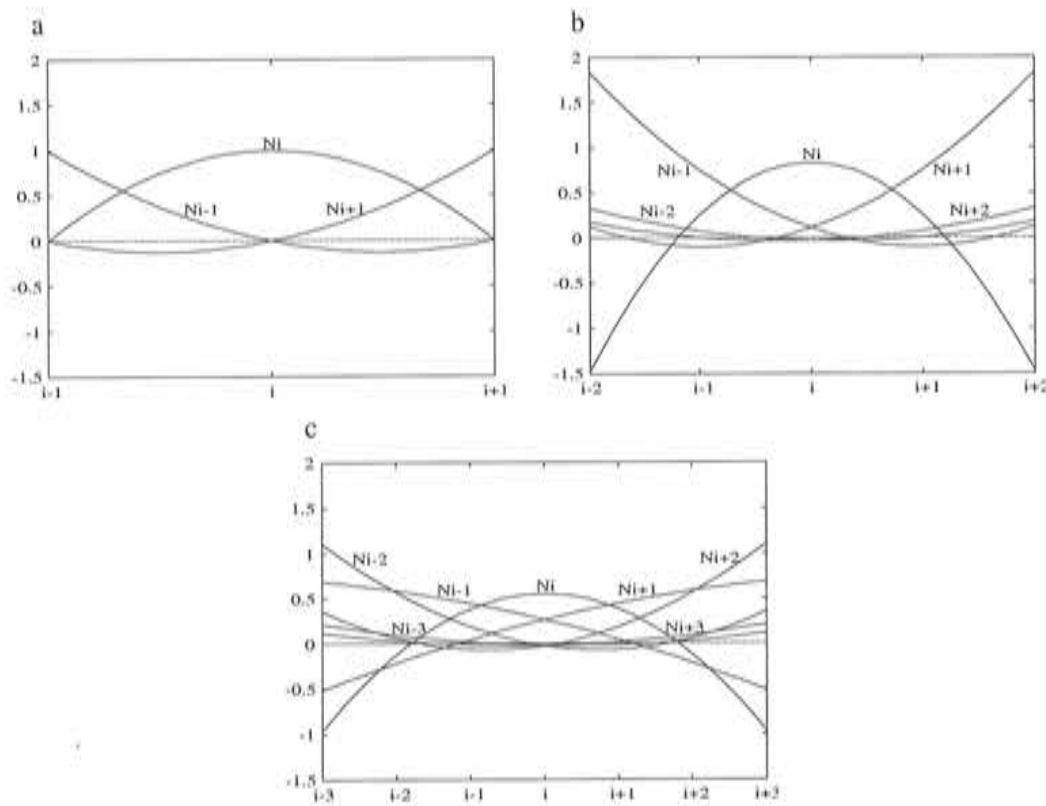


Figura 2.10: Funciones de forma cuadráticas ($m = 3$) para a) $n_p = 3$, b) $n_p = 5$, c) $n_p = 7$.

las funciones de forma cuadráticas (2.10) la N_i varía en forma más gradual, con lo cual se puede decir que es menos sensible [OÑA 95]. Estos resultados nos permiten concluir que cuanto mayor sea el orden de la base polinómica la aproximación será menos sensible a la cantidad de puntos que componen la nube.

El otro aspecto a estudiar radica en la posibilidad de introducir o mover puntos sin que la distancia entre los mismos deteriore la aproximación. Para ello hemos tomado un dominio con 5 puntos ($n_p = 5$), dos de los cuales se ubican a una distancia variable ε con respecto al punto estrella x_i , ver figura (2.11); como función de ponderación utilizamos la campana de Gauss. Definimos el parámetro ε de forma tal que si $h/\varepsilon = 1$ los puntos quedan equiespaciados.

De la misma forma que en el estudio realizado previamente, utilizamos las bases de interpolación lineal y cuadrática. En las figuras (2.12) y (2.13) se muestran las funciones de forma que se obtienen, para tres posiciones distintas de los puntos $i - 1$ y $i + 1$. Estas posiciones representadas por la relación h/ε son las siguientes: a) $h/\varepsilon = 2$, b) $h/\varepsilon = 20$ y c) $h/\varepsilon = 100$.

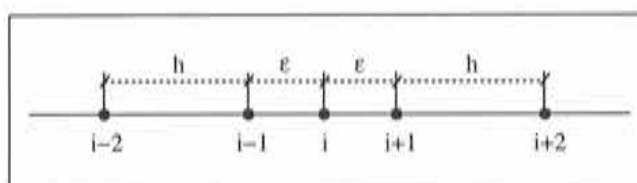


Figura 2.11: Distribución de puntos con distancias variables.

A medida que $\varepsilon \rightarrow 0$, lo que implica que $h/\varepsilon \rightarrow \infty$, las funciones de forma N_{i-1} , N_i y N_{i+1} tienden a ser iguales. En el caso extremo en que $x_{i-1} = x_i = x_{i+1}$ tendremos $N_{i-1} = N_i = N_{i+1}$.

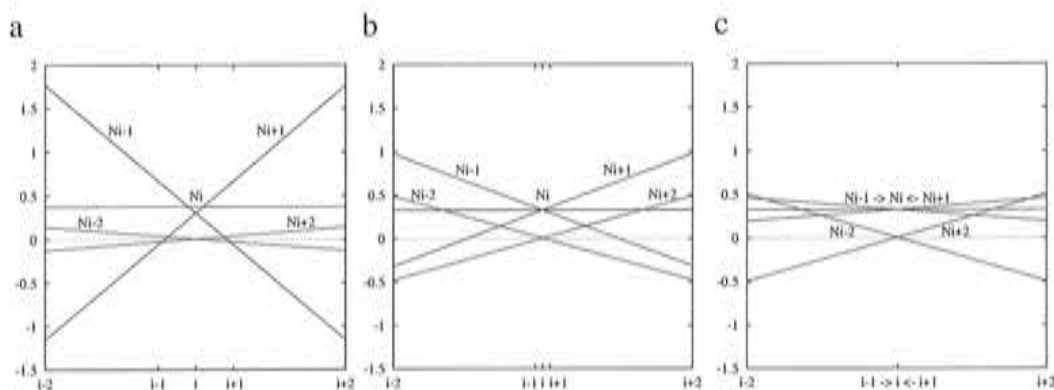


Figura 2.12: Funciones de forma lineales: a) $h/\varepsilon = 2$, b) $h/\varepsilon = 20$, c) $h/\varepsilon = 100$.

Este breve estudio nos permite concluir, que la aproximación no presenta dificultades, ni siquiera para el caso más extremo en el que dos o más puntos están superpuestos. Por otro lado es importante puntualizar que la posición de los puntos influye de manera similar en las funciones de forma lineales como en las funciones de forma cuadráticas, por lo tanto es independiente de la base de aproximación.

Es muy importante tener en cuenta que si hiciéramos el mismo estudio con una base de interpolación cúbica el problema tendería a la singularidad a medida que $\varepsilon \rightarrow 0$ pues la distribución de puntos se transformaría en *degenerada* [DUA 95a] para una base cúbica.

Función de ponderación

La función de ponderación juega un papel preponderante en la construcción de una aproximación mediante el método de FLS. Dicha función es la encargada de proporcionarle un carácter más o menos local al proceso de minimización, ello dependerá

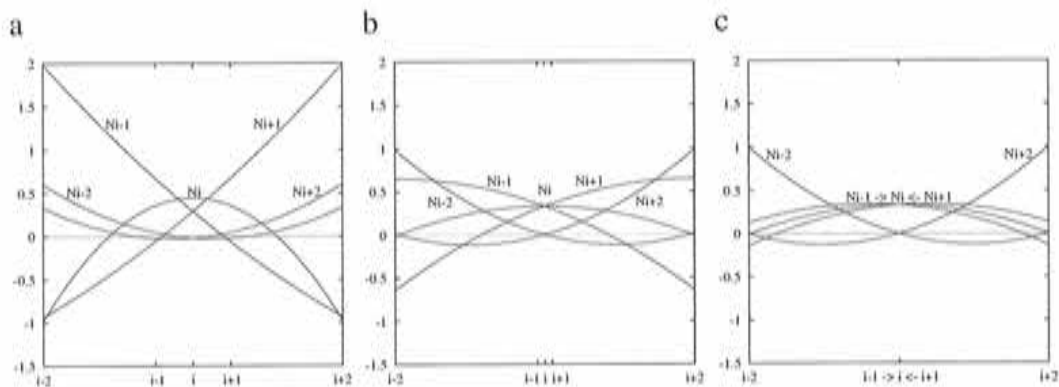


Figura 2.13: Funciones de forma cuadráticas: a) $h/\varepsilon = 2$, b) $h/\varepsilon = 20$, c) $h/\varepsilon = 100$.

tanto de su forma como de la definición del dominio de influencia Ω_i . Por otro lado, si bien la elección de la función de ponderación es libre (siempre que cumpla las condiciones enumeradas previamente), una mala selección de la misma puede llevar a problemas de mal condicionamiento de la matriz \mathbf{A} , o producir un suavizado excesivo de la solución al perder el carácter local la aproximación. El primero de estos inconvenientes está dado por una diferencia muy grande entre el peso dado al punto estrella y a los restantes puntos de la nube (la función de peso tiende al Delta de Dirac). En cambio, el suavizado se produce debido a la asignación de un peso similar a todos los puntos de la nube (la función de peso tiende a un valor constante).

A continuación se presentan las funciones de forma que se obtuvieron utilizando las funciones de ponderación definidas en el apartado (2.4.3).

En la figura (2.14), y para mejor comprensión, sólo se encuentran representadas las funciones de forma del punto estrella. En los cuatro casos se utilizó el mismo dominio de influencia Ω_i , de forma que en todas se usó el mínimo d_{\max} .

Las funciones Cónica y Sinusoidal, que son más suaves, dan como resultado funciones de forma más aplanada. Las dos funciones de ponderación restantes dan como resultado una función de forma que preserve más el carácter local de la misma. Sin embargo, la mayor flexibilidad de la función Gaussiana hace de ella la candidata ideal para este cometido. La flexibilidad a la que nos referimos está dada por el parámetro β , conocido como factor de apuntamiento y por el exponente k , que permiten ajustar de manera muy sencilla la forma de esta función.

Cada uno de los parámetros mencionados actúan produciendo distintos efectos en la función de Gauss, por este motivo consideramos importante hacer un breve

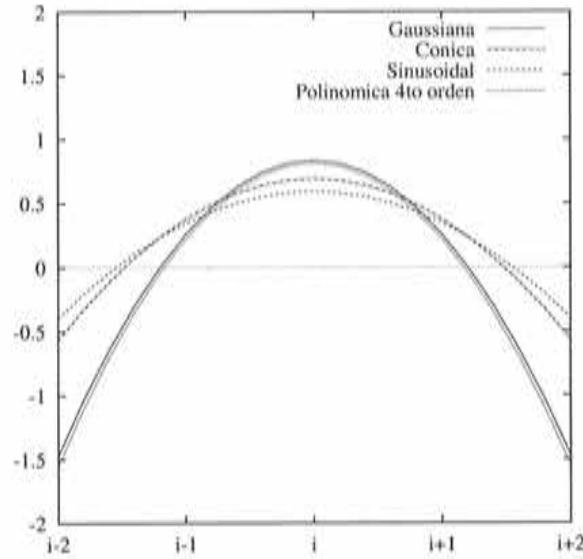


Figura 2.14: Función de forma N_i obtenida con distintas funciones de ponderación. análisis de los mismo. La expresión de la función está dada por:

$$\varphi_i(x) = \frac{\text{Exp}\left(-\left(\frac{d}{\beta}\right)^k\right) - \text{Exp}\left(-\left(\frac{d_{\max}}{\beta}\right)^k\right)}{1 - \text{Exp}\left(-\left(\frac{d_{\max}}{\beta}\right)^k\right)} \quad (2.77)$$

donde:

$$d = \sqrt{x^2 - x_i^2} \quad (2.78)$$

y

$$\beta = c \cdot d_{\max} \quad (2.79)$$

también se introduce un parámetro γ que nos permitirá variar el radio de influencia de la función de ponderación, de forma que

$$d_{\max} = \gamma \cdot \max_{j=1}^{n_p} (d_j) \quad (2.80)$$

En la figura (2.15) se puede apreciar el efecto de la variación de β , k y γ . El aumento de β (o disminución de c) y de γ producen un aumento en la ponderación de todos los puntos de la nube, excepto en el punto estrella que por definición siempre es uno. En cambio al incrementar el valor del exponente k se produce una ponderación mayor de los puntos cercanos al punto estrella mientras que los más alejados pierden peso. De esta observación podemos concluir que mediante la combinación adecuada

de los parámetros intervinientes en la función de Gauss podremos reproducir el efecto de todas las funciones de ponderación planteadas en el apartado (2.4.3).

Como ejemplo de ello en la figura (2.16) se muestran las funciones de forma que se obtienen para distintos valores del factor de apuntamiento β .

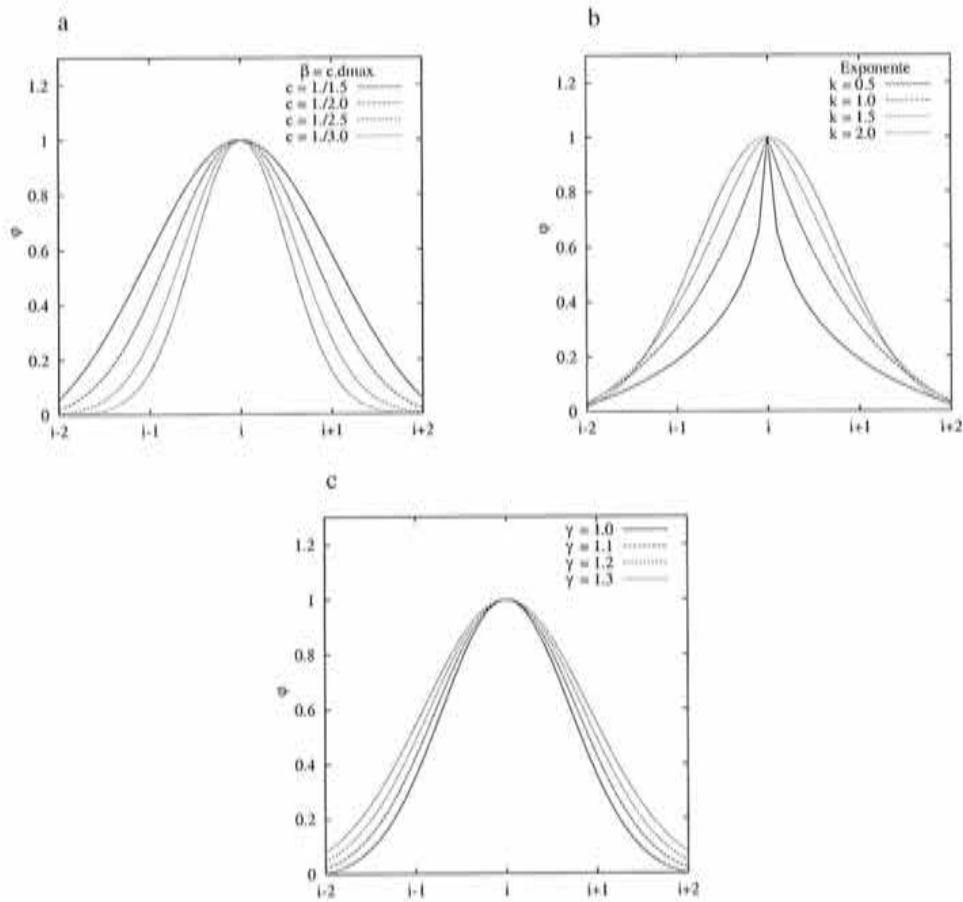


Figura 2.15: Función de ponderación de Gauss: a) variación del factor de apuntamiento β , b) variación del exponente k , c) variación del radio de influencia γ .

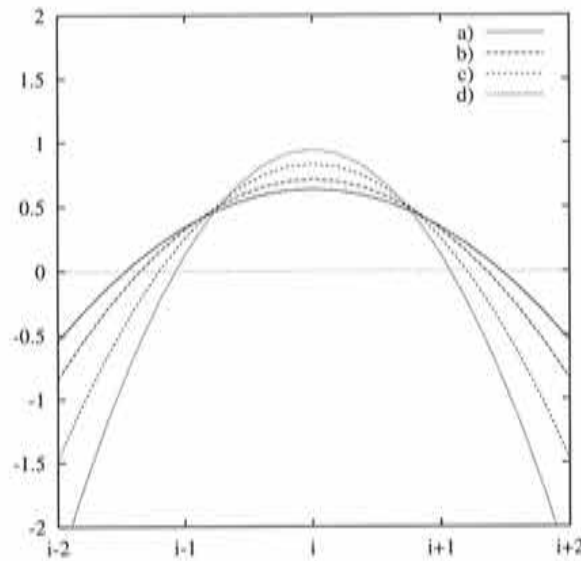


Figura 2.16: Función de forma N_i para distintos valores de β : a) $\beta = 1./d_{\max}$, b) $\beta = 1.5/d_{\max}$, c) $\beta = 2./d_{\max}$, d) $\beta = 2.5/d_{\max}$,

Definición de la base de interpolación

Para la correcta definición de los interpolantes la inversión de la matriz \mathbf{A} debe realizarse con precisión. Desde el punto de vista numérico, la inversión de una matriz puede representar grandes dificultades si no se tiene en cuenta la condición de la misma.

Si observamos la composición de la matriz \mathbf{A} nos encontramos con que la misma está formada por dos matrices de *Vandermonde* multiplicadas por una matriz diagonal. Como resultado de este producto se obtiene una matriz con características similares a las matrices de *Vandermonde*. Estas matrices son bien conocido por sus problema de mal condicionamiento.

Haciendo un análisis de la composición de \mathbf{A} observaremos que los coeficientes dependen de las coordenadas x_i de los puntos de la nube elevados a distintas potencias, con lo cual, si dichas coordenadas distan de la unidad estaremos ante una matriz mal condicionada, y por lo tanto pueden aparecer problemas numéricos al invertir la misma. Para ilustrar lo que estamos comentando proponemos un problema sencillo:

Ejemplo: definimos un dominio unidimensional $\Omega = [-100, 100]$ discretizado mediante 201 puntos equiespaciados. A cada nube le asignamos 5 puntos y una base polinómica cuadrática $\mathbf{p} = [1, x, x^2]$, como función de ponderación utilizamos la

función Gaussiana.

Construiremos la matriz \mathbf{A} para dos puntos distintos, el punto \mathbf{p}_i^1 cuya coordenada es $x = 0$ y el punto \mathbf{p}_i^2 ubicado en $x = 90$, con lo cual, para el punto \mathbf{p}_i^1 tendremos la nube formada por los siguientes puntos

<i>Punto</i>	$i - 2$	$i - 1$	i	$i + 1$	$i + 2$
coordenada x	-2.	-1.	0.	1.	2.

con lo cual:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} .189e^{+1} & .139e^{-16} & .100e^{+1} \\ .139e^{-16} & .100e^{+1} & .000e^0 \\ .100e^{+1} & .000e^0 & .145e^{+1} \end{bmatrix}$$

mientras que la nube del punto \mathbf{p}_i^2 la forman

<i>Punto</i>	$i - 2$	$i - 1$	i	$i + 1$	$i + 2$
coordenada x	88.	89.	90.	91.	92.

de forma que:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} .189e^{+1} & .170e^{+3} & .153e^{+5} \\ .170e^{+3} & .153e^{+5} & .138e^{+7} \\ .153e^{+5} & .138e^{+7} & .124e^{+9} \end{bmatrix}$$

Las funciones de forma deben ser idénticas tanto para el punto \mathbf{p}_i^1 como para \mathbf{p}_i^2 , sin embargo para el primer caso es necesario invertir una matriz cuyo número de condición es $.48e^1$, en cambio la matriz que se obtiene en el punto \mathbf{p}_i^2 tiene un número de condición de $.36e^{11}$ lo que puede producir resultados numéricos erróneos al invertir \mathbf{A} .

Para evitar este tipo de problema se propone el uso de bases polinómicas definidas en forma local, para lo cual se asocia al punto estrella de cada nube un sistema de ejes locales, de forma que las nuevas coordenadas quedan definidas como $(x - x_i)$.

Con este nuevo sistema de coordenadas, una base polinómica de orden k será:

$$\mathbf{p}^T(x) = [1, (x - x_i), (x - x_i)^2, \dots, (x - x_i)^k] \quad (2.81)$$

de esta forma tendremos la misma matriz \mathbf{A} para los punto \mathbf{p}_i^1 y \mathbf{p}_i^2 , y por lo tanto el número de condición es el mismo.

La introducción de las bases definidas en forma local resuelve el problema del mal condicionamiento producido por la distancia al origen, sin embargo se puede observar que el número de condición ahora depende de las unidades que se utilizan

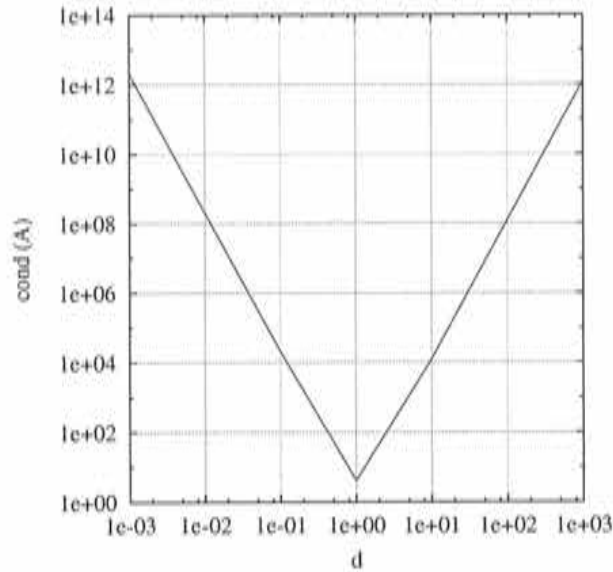


Figura 2.17: Variación del número de condición de la matriz \mathbf{A} con respecto a la distancia entre puntos.

en el problema, ya que dependiendo de los mismos los valores de $(x - x_i)$ pueden ser muy distintas de la unidad.

En la figura (2.17) se muestra como varía el número de condición de la matriz \mathbf{A} calculada en el punto x_i frente a la variación de la distancia entre puntos. Para ello se introduce un parámetro d que nos permite aumentar ($1 < d < \infty$) o disminuir ($0 < d < 1$) la distancia entre los puntos.

De esta gráfica se desprende que el mejor resultado se obtiene para valores de coordenadas cercanos a la unidad ($d \cong 1$). Con la introducción de una longitud característica de la nube es posible adimensionalizar la base. Una opción es utilizar el mismo radio de influencia d_{\max} , de esta forma la base polinómica queda como:

$$\mathbf{p}^T(x) = \left[1, \left(\frac{x - x_i}{d_{\max}} \right), \dots, \left(\frac{x - x_i}{d_{\max}} \right)^k \right] \quad (2.82)$$

La adimensionalización introducida afecta al cálculo de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} pero no introduce ninguna variación en las funciones de forma, lo que puede ser fácilmente demostrado para el caso unidimensional. Esta idea fue presentada por Nayroles y colaboradores, aunque con un objetivo distinto [NAY 91b], [NAY 92].

Lu y colaboradores [LU 94] propusieron una forma alternativa para prevenir problemas numéricos consistente en diagonalizar la matriz \mathbf{A} mediante la ortogonalización de las bases polinómicas utilizando el método de *Gram-Schmidt*. Esta

técnica fue aplicada con éxito tanto para la obtención de una aproximación MLS en el ámbito de los *Element Free Galerkin* como en una aproximación FLS para *Puntos Finitos* [VER 00].

2.5 Conclusiones

En este capítulo se presentó una técnica mediante la cual es posible obtener, a partir de un conjunto de puntos distribuidos en forma arbitraria, una función de aproximación para una variable escalar cualquiera. En la primera parte se propuso una solución mediante la técnica de *Mínimos Cuadrados* y para otorgarle un carácter local a este tipo de aproximación se introdujo el efecto de una función de ponderación, lo que dio lugar a la técnica denominada *Mínimos Cuadrados Ponderados*. Dentro de esta última se analizaron dos opciones, los *Mínimos Cuadrados Ponderados* con funciones de ponderación *Móviles* y *Fijas*, entendiendo esta última como un caso particular de la primera.

Se puso mayor énfasis en la aproximación de *Mínimos Cuadrados Ponderados Fijos* que más tarde utilizaremos en la formulación del *Método de los Puntos Finitos*. Fueron analizadas en profundidad las características de las funciones de forma y los efectos producidos en las mismas por las variaciones de diversos parámetros propios de la formulación como, por ejemplo, las bases de aproximación, la distribución de los puntos y la función de ponderación.

Finalmente se hicieron algunas puntualizaciones referentes a posibles problemas de orden numérico en la construcción de la aproximación y se plantearon las soluciones pertinentes.

Capítulo 3

El Método de Puntos Finitos

3.1 Introducción

Una vez finalizada la descripción del procedimiento para la aproximación de una función centraremos nuestra atención en la técnica de discretización que aplicaremos para la resolución de las ecuaciones diferenciales. Hasta la fecha todos los desarrollos se han basado principalmente en dos alternativas para llevar a cabo esta tarea; la primera de ellas consiste en una formulación débil del tipo Galerkin. Entre los métodos que se basan en dicha técnica podemos mencionar *Diffuse Element Method* [NAY 91a], [NAY 92], *Element Free Galerkin* [BEL 95], [BEL 96b] y *Reproducing Kernel Particle Method* [LIU 95c]; la segunda alternativa está basada en el método de colocación puntual, entre los métodos que la utilizan encontramos *Smooth Particle Hydrodynamics* [LUC 77], *Generalized Finite Difference* [LIS 80] y *Finite Points Method* [OÑA 95], [OÑA 97], [OÑA 00a]. La principal diferencia entre las dos técnicas radica en que en la formulación débil, se deben integrar las ecuaciones sobre una grilla, que puede o no estar ligada al dominio, mientras que en el método de colocación puntual se satisface la ecuación diferencial sólo en determinados puntos.

Existe una variante para la formulación débil en el cual la integración se realiza sobre los puntos y fue propuesta por Beissel y Belitschko en [BEI 96]. En este artículo se demuestra que para obtener resultados aceptables, esta técnica requiere una estabilización que le permita eliminar un modo oscilatorio, cuya longitud de onda es dos veces la distancia entre los puntos.

3.2 Esquema de discretización mediante colocación puntual

Es importante notar que, dadas las características de las funciones de aproximación que se obtienen mediante FLS, el esquema de discretización mediante colocación puntual resulta ser, sin lugar a dudas, el más apropiado. Especialmente si tenemos en cuenta que dichas funciones son discontinuas y multievaluadas. Por otro lado esta combinación nos permite formular, lo que podemos denominar como un *verdadero método sin malla*.

El primer trabajo en el que se propone combinar las funciones de aproximación generadas a través de un proceso de minimización y un esquema de colocación se debe a Batina [BAT 93] y fue presentado en el año 93.

La técnica de colocación puntual, utilizada principalmente en el método de *Diferencias Finitas*, se basa en satisfacer las ecuaciones diferenciales en una cantidad determinada de puntos del dominio, lo que nos permite transformar las mismas a un sistema de ecuaciones algebraicas.

Comenzaremos planteando las ecuaciones de gobierno de un problema de contorno general definido en un cierto dominio Ω con condiciones de contorno impuestas sobre Γ . La solución a este problema será una función $u(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in \Omega$. Tenemos que,

$$\begin{aligned} A[u(\mathbf{x})] - b(\mathbf{x}) &= 0 && \text{en } \Omega \\ B[u(\mathbf{x})] - t(\mathbf{x}) &= 0 && \text{en } \Gamma_t \\ u(\mathbf{x}) - u_p(\mathbf{x}) &= 0 && \text{en } \Gamma_u \end{aligned} \quad (3.1)$$

En el contorno se consideran solo dos tipos de condiciones, de Neumann en Γ_t , y de Dirichlet en Γ_u de forma que $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_u$.

Reemplazando la solución exacta $u(\mathbf{x})$ por la aproximación discreta $\hat{u}(\mathbf{x})$ que satisface las ecuaciones (3.1) tendremos:

$$\begin{aligned} A[\hat{u}(\mathbf{x})] - b(\mathbf{x}) &= 0 && \text{en } \Omega \\ B[\hat{u}(\mathbf{x})] - t(\mathbf{x}) &= 0 && \text{en } \Gamma_t \\ \hat{u}(\mathbf{x}) - u_p(\mathbf{x}) &= 0 && \text{en } \Gamma_u \end{aligned} \quad (3.2)$$

Para que este sistema de ecuaciones tenga solución única es necesario que el número de puntos de colocación sea igual al número de incógnitas, por lo tanto la ecuación diferencial será satisfecha en $n - n_t - n_u$ puntos donde n es el número total de puntos en el dominio mientras que n_t y n_u es el número de puntos que se encuentran en el contorno Γ_t y Γ_u respectivamente, las condiciones de contorno se aplicarán en los $n_t + n_u$ puntos restantes.

Para cada punto interior se satisface la ecuación

$$A(\hat{u}(\mathbf{x}_i)) - b(\mathbf{x}_i) = 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, (n - n_t - n_u) \quad (3.3)$$

En los puntos con condición de contorno de Neumann tendremos:

$$B(\hat{u}(\mathbf{x}_i)) - t(\mathbf{x}_i) = 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, n_t \quad (3.4)$$

mientras que en los puntos con condición de contorno del tipo Dirichlet se de satisfacer que

$$\hat{u}(\mathbf{x}_i) - u_p(\mathbf{x}_i) = 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, n_u \quad (3.5)$$

Reemplazando $\hat{u}(\mathbf{x})$ por una forma discreta cualquiera:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) u_j^h \quad (3.6)$$

llegamos al siguiente sistema de n ecuaciones algebraicas con n incógnitas

$$\mathbf{K} \mathbf{u}^h = \mathbf{f} \quad (3.7)$$

donde $\mathbf{K} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ es la matriz de coeficientes, $\mathbf{u}^h \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ es el vector de incógnitas y $\mathbf{f} \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ es el término independiente.

Para un punto interior de coordenadas \mathbf{x}_i , la matriz \mathbf{K} tiene la siguiente expresión:

$$K_{ij} = A(N_j(\mathbf{x}_i)) \quad \text{con } j = 1, \dots, n \quad (3.8)$$

en donde cada término viene dado por la aplicación del operador diferencial A sobre las funciones de forma $N_j(\mathbf{x})$ evaluadas en el punto de colocación \mathbf{x}_i . De la misma forma si \mathbf{x}_i es un punto perteneciente al contorno Γ_t tendremos:

$$K_{tj} = B(N_j(\mathbf{x}_i)) \quad \text{con } j = 1, \dots, n \quad (3.9)$$

y en el caso de un punto \mathbf{x}_m perteneciente al contorno Γ_u cada coeficiente vendrá dado por:

$$K_{mj} = N_j(\mathbf{x}_m) \quad \text{con } j = 1, \dots, n \quad (3.10)$$

El uso de la técnica de colocación puntual presenta ventajas y desventajas frente a la formulación integral, por eso es importante remarcarlas en este punto:

- en la formulación débil es posible reducir el orden máximo de las derivadas lo que nos permite trabajar con funciones de interpolación de menor grado, en el método de colocación el orden máximo de la derivadas está dado por las ecuaciones diferencial de gobierno.

- en la formulación débil se obtiene una matriz de rigidez \mathbf{K} simétrica, mientras que en la colocación puntual no se puede garantizar la simetría de la misma.
- una vez obtenidas las funciones de forma y sus derivadas, la aplicación del método de colocación es más sencillo y rápido.
- en la formulación débil es necesario la definición de una malla para llevar a cabo la integración, además deben obtenerse las funciones de forma y sus derivadas en cada punto de integración.
- la implementación de las condiciones de contorno presentan grande dificultades cuando se discretiza mediante el método de Galerkin (formulación débil) [BEL 94a], [NAY 91a].

3.3 El Método de Puntos Finitos

Una vez introducidos los dos elementos esenciales del *Método de Puntos Finitos*, la técnica de aproximación y la técnica de discretización, estamos en condiciones de describir los pasos a seguir para la aplicación del método para la resolución de un problema cualquiera. Los mismos se pueden dividir de la siguiente forma:

1. Dado un dominio Ω discretizado mediante n puntos, asignamos a cada uno de los puntos un conjunto $\mathcal{Q}(\mathbf{x}_i)$ formado por n_p puntos, este conjunto lo hemos denominado nube de puntos.

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}_i) = \left\{ \mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}, \mathbf{x}_{(3)}, \dots, \mathbf{x}_{(n_p)} \right\} \quad (3.11)$$

El dominio de influencia Ω_i queda definido por la misma nube. El subíndice entre paréntesis indica que estamos haciendo a una numeración local.

2. Mediante el proceso de minimización obtendremos las funciones de aproximación y sus derivadas.

Planteamos la aproximación de la incógnita $\hat{u}(\mathbf{x})$ para una nube cualquiera de coordenadas \mathbf{x}_i

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}^h \quad (3.12)$$

donde

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \left[1, \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{d_{\max}}, \dots, \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{d_{\max}} \right)^k \right] \quad (3.13)$$

es una base polinómica de orden k , expresada mediante un sistema de coordenadas adimensionalizadas. Para más detalles sobre la conveniencia de usar este tipo de adimensionalización ver la página (37).

Las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} están dada por:

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n_p} \varphi_i(\mathbf{x}_{(j)}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_{(j)}) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_{(j)}) \quad (3.14)$$

y

$$\mathbf{B} = [\varphi_i(\mathbf{x}_{(1)}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_{(1)}), \varphi_i(\mathbf{x}_{(2)}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_{(2)}), \dots, \varphi_i(\mathbf{x}_{(n_p)}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_{(n_p)})] \quad (3.15)$$

Una vez calculada la inversa de la matriz \mathbf{A} , tendremos

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (3.16)$$

y por lo tanto la expresión general de la aproximación será:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \mathbf{u}^h = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^h \quad (3.17)$$

Para un punto determinado \mathbf{x}_i tendremos que

$$\hat{u}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^h \quad (3.18)$$

evaluando la base llegamos a que en ese punto quedará

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) &= \left[1, \left(\frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i}{d_{\max}} \right), \dots, \left(\frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i}{d_{\max}} \right)^k \right] \\ &= [1, 0, \dots, 0^k] \end{aligned} \quad (3.19)$$

y por lo tanto

$$\hat{u}(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^{n_p} C_{1j}^{-1} u_{(j)}^h \quad (3.20)$$

Para el cálculo de las derivadas en el mismo punto tenemos que

$$\frac{\partial \hat{u}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{N}^T(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u}^h = \frac{\partial \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}^h \quad (3.21)$$

donde la derivada de la base se expresa como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}} &= \left[0, \frac{1}{d_{\max}}, \dots, k \left(\frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i}{d_{\max}} \right)^{k-1} \right] \\ &= \left[0, \frac{1}{d_{\max}}, \dots, 0^{k-1} \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

de esta forma la expresión anterior se transforma en

$$\frac{\partial \hat{u}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{d_{\max}} \sum_{j=1}^{n_p} C_{2j}^{-1} u_{(j)}^h \quad (3.23)$$

En general podemos decir que

$$\frac{\partial^n \hat{u}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}^n} = \frac{n!}{(d_{\max})^n} \sum_{j=1}^{n_p} C_{(n+1)j}^{-1} u_{(j)}^h \quad (3.24)$$

3. Planteamos la ecuación diferencial y las correspondientes condiciones de contorno en cada punto del dominio (cada punto se utiliza como punto de colocación). De esta forma obtendremos un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas serán los valores nodales de los parámetros \mathbf{u}^h , de forma que:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{u}^h = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \quad (3.25)$$

Par clarificar este procedimiento a continuación se planteará un problema.

3.4 Ecuación de convección difusión

En este apartado se abordará la resolución de las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de convección difusión unidimensional y estacionario mediante la aplicación del Método de los *Puntos Finitos*, lo que nos permitirá estudiar algunas características de la aproximación propuesta.

El fenómeno de convección difusión queda definido a través de:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[k \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right] - u \frac{d\phi(x)}{dx} + Q(x) &= 0 & \text{en } \Omega \\ k \frac{d\phi(x)}{dn} - q_n &= 0 & \text{en } \Gamma_t \\ \phi(x) - \phi_p &= 0 & \text{en } \Gamma_u \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde k y u son parámetros físicos del problema, $Q(x)$ es el término de fuente, q_n es el valor del flujo impuesto y ϕ_p es el valor al cual se prescribe la incógnita. Con Ω se identifica al dominio en el cual está definido el problema, Γ_t es el contorno donde se prescribe el flujo normal (condición de Neumann) y Γ_u es el contorno en el cual se prescribe la incógnita (condición de Dirichlet).

3.4.1 Definición del error de la aproximación

Para estudiar como evoluciona la solución y la forma en que afectan a la misma los diversos factores presentes en la formulación propuesta, se define una norma del error, de modo que

$$e_\phi = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (\phi_j - \hat{\phi}_j)^2}{\sum_{j=1}^n (\phi_j)^2}} \quad (3.27)$$

donde ϕ_j es la solución analítica del problema en el punto \mathbf{x}_j , mientras que $\hat{\phi}_j$ es la solución calculada en dicho punto.

3.4.2 Condiciones de contorno de Dirichlet

En este primer caso se propone resolver las ecuaciones de convección difusión definiendo los siguientes valores, $u = 0$, $k = 1$ y $Q(x) = -\sin(\pi x)$, con lo cual nos queda definido un problema de Poisson. En ambos contornos se aplican condiciones de Dirichlet imponiendo que $\phi_p = 0$. En la figura (3.1) se esquematiza el dominio, la fuente aplicada sobre el mismo y las condiciones de contorno.

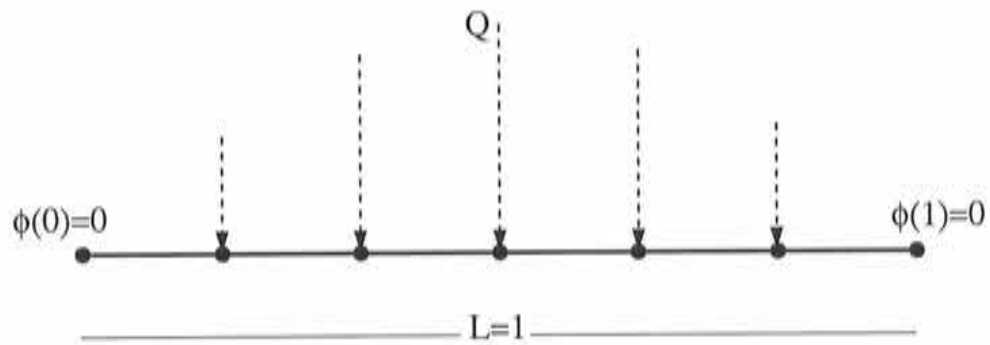


Figura 3.1: Esquema del dominio, la fuente externa y las condiciones de contorno.

Reemplazando los valores propuestos en las ecuaciones (3.26) el problema resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} &= \sin(\pi x) && \text{para } 0 < x < 1 \\ \phi(x) &= 0 && \text{en } x = 0 \\ \phi(x) &= 0 && \text{en } x = 1 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Este problema presenta la siguiente solución analítica:

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi x) \quad (3.29)$$

Discretización

Aproximamos la incógnita $\phi(x)$ mediante la técnica de los *Mínimos Cuadrados Ponderados Fijos* que se propuso en el *Capítulo 2*, en donde se expresa que,

$$\phi(x) \cong \hat{\phi}(x) = \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\phi}^h = \sum_{j=1}^n N_j^i(x) \phi_j^h \quad (3.30)$$

Reemplazando la aproximación definida por (3.30) en (3.28) obtenemos un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas serán los valores nodales ϕ_j^h . La expresión de dicho sistema será,

- Interior del dominio, $0 < x < 1$:

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \frac{d^2 N_j^i(x_i)}{dx^2} & \text{con } j = 1, \dots, n \\ f_i &= \sin(\pi x_i) \end{aligned} \quad (3.31)$$

- Contornos, $x = 0$ y $x = 1$:

$$\begin{aligned} K_{ij} &= N_j^i(x_i) & \text{con } j = 1, \dots, n \\ f_i &= 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Recordar que: $N_j^i(x) = 0 \forall x_j \notin \mathcal{Q}(x_i)$.

Se realizaron dos tipos de discretizaciones, una mediante una distribución de puntos equiespaciados y otra con puntos distribuidos en forma aleatoria, excepto los puntos del contorno. Para el estudio de la convergencia se utilizaron 6 distribuciones de punto distintas conformadas por 11, 21, 41, 81, 161 y 321 puntos.

Influencia de la nube

La cantidad de puntos mediante los cuales se definen las funciones de forma es generalmente arbitraria, por este motivo es muy importante ver la forma en que afectan las nubes a la solución.

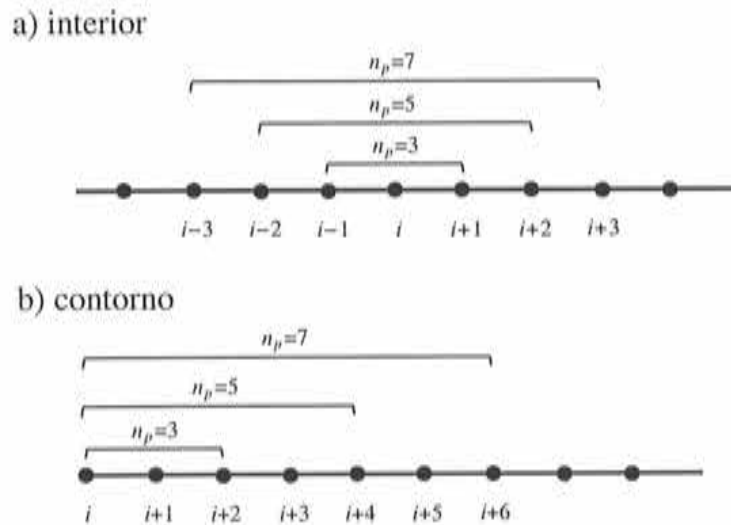


Figura 3.2: Nubes de 3, 5 y 7 puntos para el punto i perteneciente al a) interior del dominio, b) contorno del dominio.

Para analizar este punto se definieron nubes de 3, 5 y 7 puntos ($n_p = 3, 5, 7$ respectivamente), en las nubes interiores la cantidad de puntos se eligió de forma que haya el mismo número de puntos a ambos lados del punto estrella como se puede ver en la figura (3.2 a)). En los puntos del contorno las nubes están desplazadas hacia el interior del dominio, como se refleja en el esquema de la figura (3.2 b)).

A modo de referencia en la figura (3.3) se muestran el resultado teórico (línea continua) y el calculado (cruces), en este caso se trata del dominio discretizado mediante 41 puntos equiespaciados, los cuales se indican con un círculo en dicha figura. Estos resultados corresponden a nubes de 5 puntos.

Para este estudio tomamos la base polinómica $\mathbf{p} = [1, x, x^2]$ y la función de Gauss como ponderación. La convergencia obtenida utilizando las distintas nubes de puntos se puede observar en la figura (3.4), donde se gráfica el error, definido por (3.27), con respecto a h (distancia entre puntos contiguos). Es importante resaltar que cuando $n_p = 3$ la función de peso no tiene ninguna efecto debido a que el proceso de minimización se transforma en interpolación, de esta forma el esquema obtenido es equivalente a un esquema en diferencias finitas de segundo orden.

Como era de esperar para nubes de 3 puntos la convergencia es cuadrática. En los otros dos casos se puede observar un comportamiento oscilatorio para los casos discretizados mediante 11, 21 y 41 puntos. A medida que aumentamos la cantidad de puntos, la convergencia tiende a ser cuadrática en todos los casos, aunque la curva queda desplazada. Este comportamiento oscilatorio se debe a que la aproximación que se realiza en los contornos es de menor orden, y por lo tanto cuando

tenemos discretizaciones más finas, la influencia del error producido en los contornos es menor.

En los casos anteriores se utilizaron puntos equiespaciados para discretizar el dominio. A continuación se muestra un estudio similar al anterior, realizado en dominios con 11, 21, 41, 81, 161 y 321 puntos distribuidos en forma completamente arbitraria mediante una función "random". En la figura (3.5) se presentan los resultados numéricos y teóricos obtenidos con 41 puntos. Las condiciones son las mismas que las presentadas en el ejemplo previo.

Para realizar las curvas de convergencia definimos una distancia a través del parámetro h que nos permite caracterizar cada una de las distribuciones de puntos y cuya expresión está dada por

$$h = \frac{L}{n - 1} \quad (3.33)$$

donde L es la longitud del dominio y n es el número total de puntos.

Las curvas obtenida en la figura (3.6) no muestran un comportamiento bien definido como el que se observa en los casos anteriores, sin embargo la pendiente media es de 1.98 para $n_p = 3$, 1.93 para $n_p = 5$ y 2.12 para $n_p = 7$, estos valores nos permiten decir que la convergencia no se deteriora con la distorsión de las nubes.

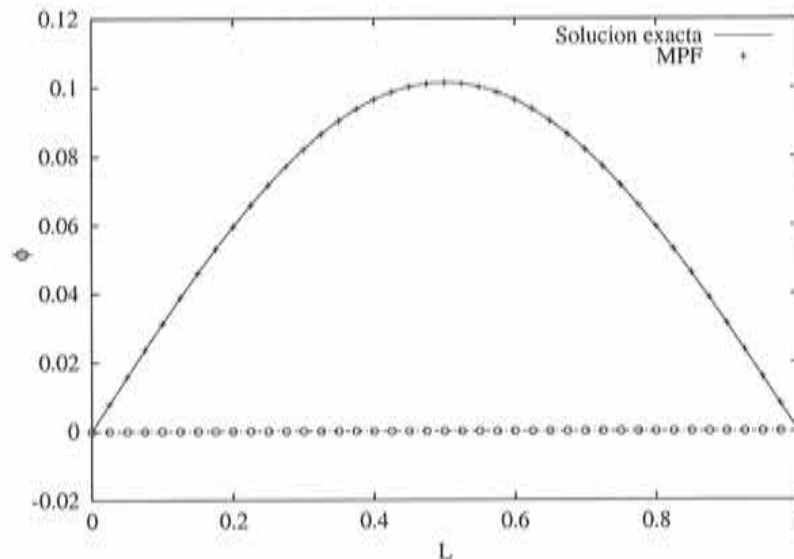


Figura 3.3: Comparación del resultado teórico con el obtenido mediante MPF, para una distribución de puntos equiespaciada.

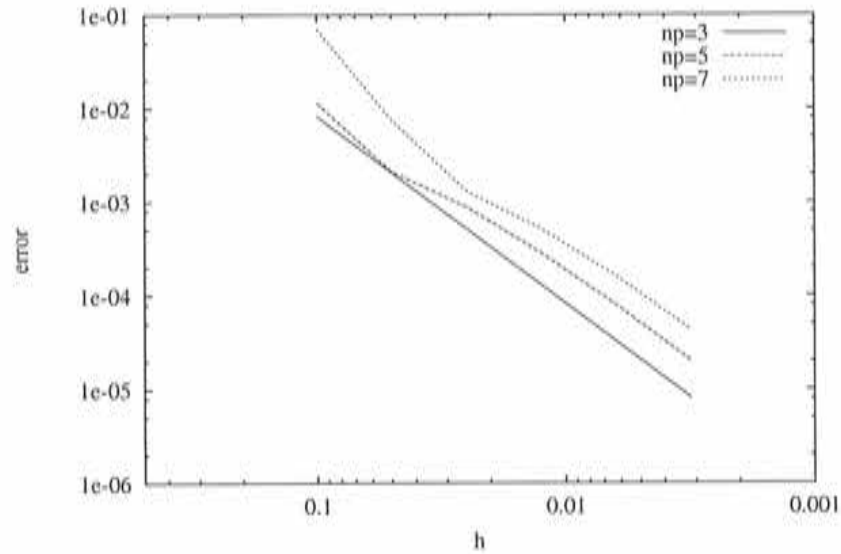


Figura 3.4: Convergencia de la solución para nubes de 3, 5 y 7 puntos.

Influencia de la función de ponderación

En el *Capítulo 2* se mostró como afectaban a las funciones de forma las distintos tipos de ponderaciones. A continuación podremos corroborar como estos cambios influyen en las propiedades de convergencia del método de puntos. La expresión de la función de Gauss, que como ya hemos mencionado, es la más apropiada por su flexibilidad, para un punto estrella x_i es:

$$\varphi_i(x) = \frac{\text{Exp}(-(d/\beta)^k) - \text{Exp}(-(d_{\max}/\beta)^k)}{1 - \text{Exp}(-(d_{\max}/\beta)^k)} \quad (3.34)$$

con

$$d = \sqrt{(x - x_i)^2} \quad (3.35)$$

En la figura (3.7) se muestra como varía el error para distintos valores de β dejando el exponente $k = 2$.

En estas curvas se representa el error para nubes formadas por 3, 5 y 7 puntos tanto para la distribución de puntos equiespaciados como aleatoria. En el caso de nubes formadas por 3 puntos el error es constante, como ya hemos mencionado en este caso la función de ponderación no tiene efecto alguno. En el caso de distribución equiespaciada se observa que la tendencia es equivalente para nubes de 5 y 7 puntos. Al aumentar el valor de β el peso de los puntos más alejados tiende a cero, con lo cual los puntos que actúan son los más cercanos al punto estrella lo que lleva a reproducir el resultado obtenido con 3 puntos por nube. En todos los casos, para

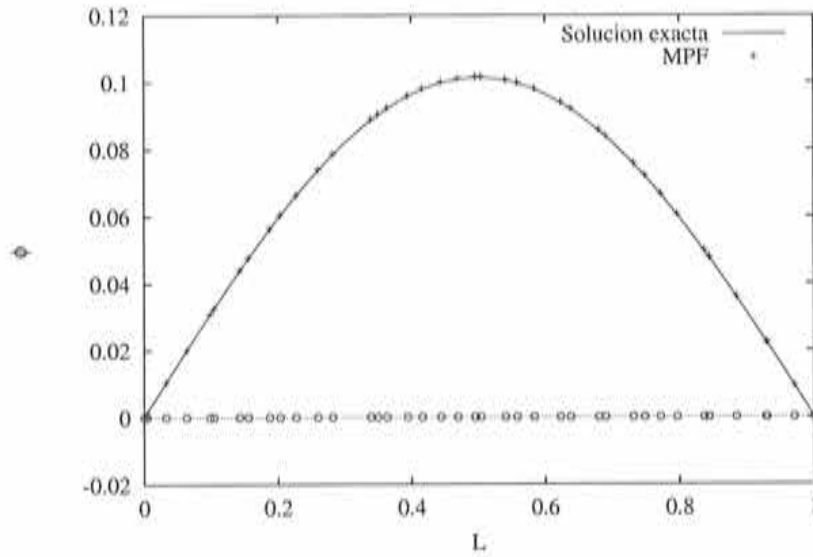


Figura 3.5: Comparación del resultado teórico con el obtenido mediante MPF, para una distribución de puntos arbitraria.

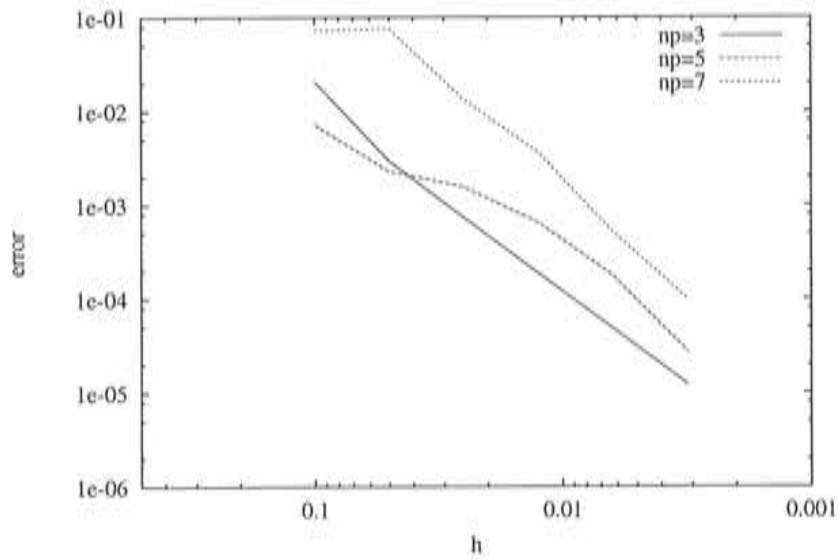


Figura 3.6: Convergencia de la solución para nubes de 3, 5 y 7 puntos para una distribución de puntos arbitraria.

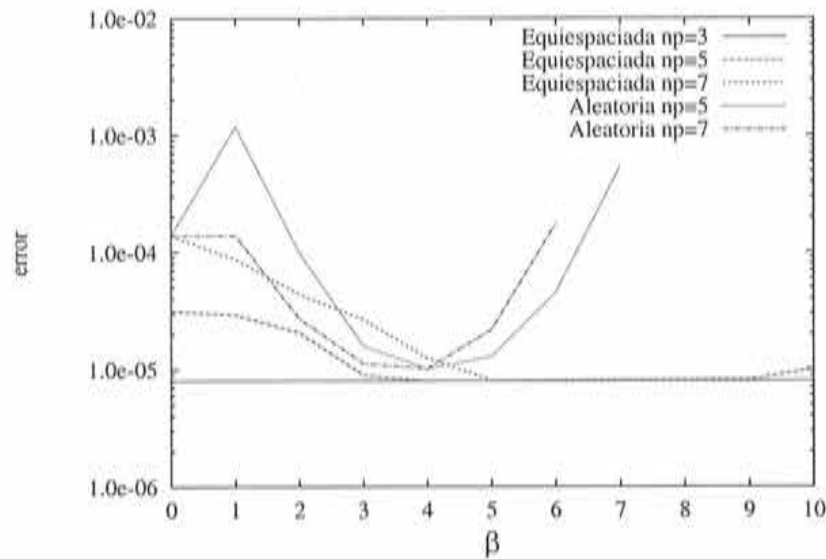


Figura 3.7: Evolución del error de la solución en función del parámetro β .

valores de β mayores a 10 el peso asignado a los puntos de la nube, excepto el punto estrella, es muy pequeño lo que produce un mal condicionamiento de la matriz \mathbf{A} y por lo tanto no es posible obtener resultados.

El comportamiento observado para los casos en los cuales la distribución de puntos se generó de forma aleatoria es algo dispar pero se puede distinguir claramente que para valores de β comprendidos entre 2.5 y 3.5 se obtienen el error mínimo.

El otro parámetro libre en la función de Gauss es el exponente k . La variación del mismo refleja un comportamiento muy semejante al observado con β . En la figura (3.8) se muestra como evoluciona el error con respecto al valor del exponente, este estudio se realizó para las distintas nubes de puntos ($n_p = 3, 5, 7$) y para las dos distribuciones de puntos propuestas.

Se puede observar que para la distribución de puntos equiespaciada todas las curvas tienden al valor obtenido con la nube de tres puntos. Por otro lado para las distribuciones de puntos aleatorias se aprecia claramente una región (alrededor del valor 2.5) en la cual el error es mínimo.

Influencia de la base de aproximación

El orden de las funciones de aproximación viene dado por la base que se utiliza en el proceso de minimización. En este trabajo se utilizaron bases polinómicas completas de forma tal que para una función de forma de orden m la base unidimensional tiene

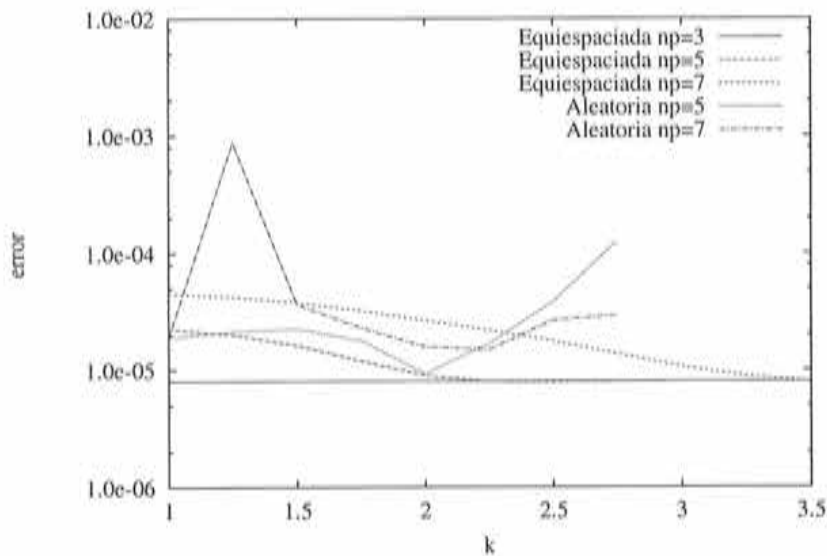


Figura 3.8: Evolución del error de la solución en función del exponente k .

la forma siguiente:

$$\mathbf{p}^T = [1, x, \dots, x^m] \quad (3.36)$$

En el problema planteado en (3.28) es necesario calcular la derivada segunda de la incógnita, esto limita la elección de la base polinómica, ya que se debe cumplir $m \geq 2$ con lo que se excluyen las aproximación lineal y constante. En la figura (3.9) se gráfica la convergencia que se obtiene para distintas bases polinómicas. Para no cambiar otros parámetros, excepto la base, se utiliza nubes formadas por 7 puntos, mientras que en la función de ponderación se fijaron los parámetros $\beta = 3$ y $k = 2$.

Se obtuvieron resultados con polinomios completos de 2^{do}, 3^{er}, 4^{to} y 5^{to} grado y los se presentan en la figura (3.9). En esta gráfica sin dudas resalta el hecho de haber obtenido prácticamente la misma convergencia de $O(h^2)$ para el polinomio cuadrático y cúbico. Lo mismo se ocurre para el caso de los polinomios de 4^{to} y 5^{to} orden, los cuales presentan una convergencia de $O(h^4)$.

3.4.3 Condiciones de contorno de Neumann

Este tipo de condiciones de contorno, como ya veremos requiere de un tratamiento especial. Para conocer el comportamiento de la condición de Neumann planteamos el mismo problema de Poisson presentado en (3.4.2), al cual le hemos cambiado la condición de contorno en uno de los extremos. En el esquema de la figura (3.10) se

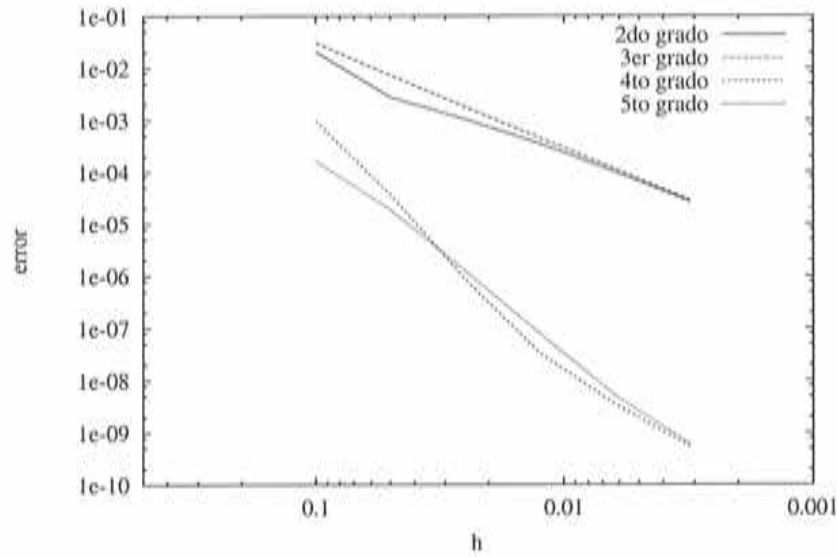


Figura 3.9: Convergencia de la solución utilizando distintas bases polinómicas.

muestra el dominio, la fuente $Q(x)$ y las condiciones de contorno, de Dirichlet en $x = 0$ y de Neumann en $x = 1$.

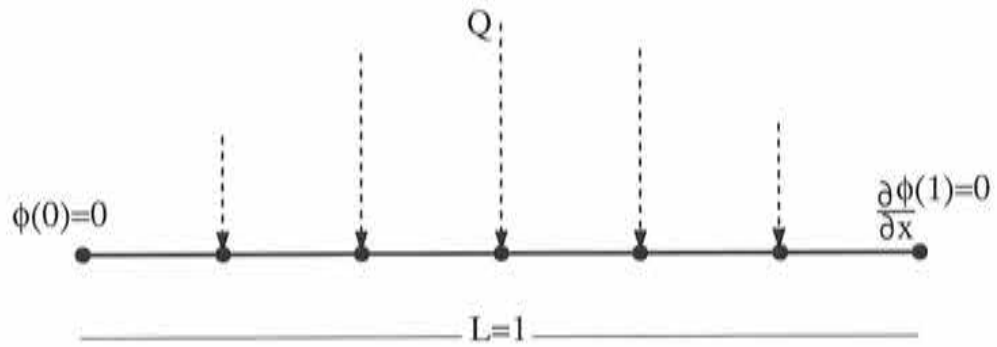


Figura 3.10: Esquema del dominio, la fuente externa y las condiciones de contorno.

El nuevo problema queda expresado de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} &= \sin(\pi x) & \text{para } 0 < x < 1 \\
 \phi(x) &= 0 & \text{para } x = 0 \\
 \frac{d\phi(x)}{dx} &= 0 & \text{para } x = 1
 \end{aligned}
 \tag{3.37}$$

La solución analítica del problema planteado será:

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi x) + \frac{x}{\pi} \quad (3.38)$$

Discretización

Reemplazamos la función $\phi(x)$ por la aproximación,

$$\phi(x) \cong \hat{\phi}(x) = \sum_{j=1}^n N_j^i(x) \phi_j^h \quad (3.39)$$

Reemplazando en la ecuación (3.37), de esta forma obtendremos un sistema de ecuaciones en el cual las incógnitas serán los valores nodales ϕ_j^h . Cada uno de los términos de este sistema de ecuaciones estará dado por:

- Interior del dominio, $0 < x < 1$:

$$K_{ij} = \frac{d^2 N_j^i(x_i)}{dx^2} \quad \text{con } j = 1, \dots, n \quad (3.40)$$

$$f_i = \sin(\pi x_i)$$

- Contorno Neumann, $x = 1$:

$$K_{ij} = \frac{dN_j^i(x_i)}{dx} \quad \text{con } j = 1, \dots, n \quad (3.41)$$

$$f_i = 0$$

- Contornos Dirichlet, $x = 0$:

$$K_{ij} = N_j^i(x_i) \quad \text{con } j = 1, \dots, n \quad (3.42)$$

$$f_i = 0$$

Para dar al lector una idea cualitativa de los resultados en las figura (3.11) se muestra la comparación del resultado analítico y el calculado. En el ejemplo mostrado se utilizó el dominio discretizado con 41 puntos equiespaciados, mientras que en la figura (3.12) se muestran los resultados del mismo problema, pero con los puntos distribuidos aleatoriamente.

Las nubes utilizadas en ambos casos están formadas por 5 puntos, y la base polinómica de interpolación es cuadrática, $\mathbf{p}^T = [1, x, x^2]$. Los resultados obtenidos en ambos casos muestran una excelente concordancia con los resultados teóricos.

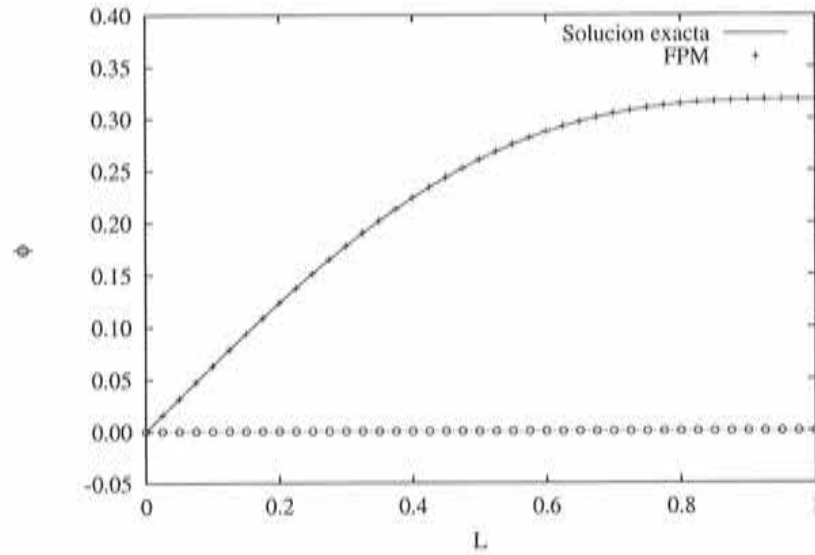


Figura 3.11: Comparación del resultado teórico con el obtenido mediante MPF, para una distribución de puntos equiespaciados.

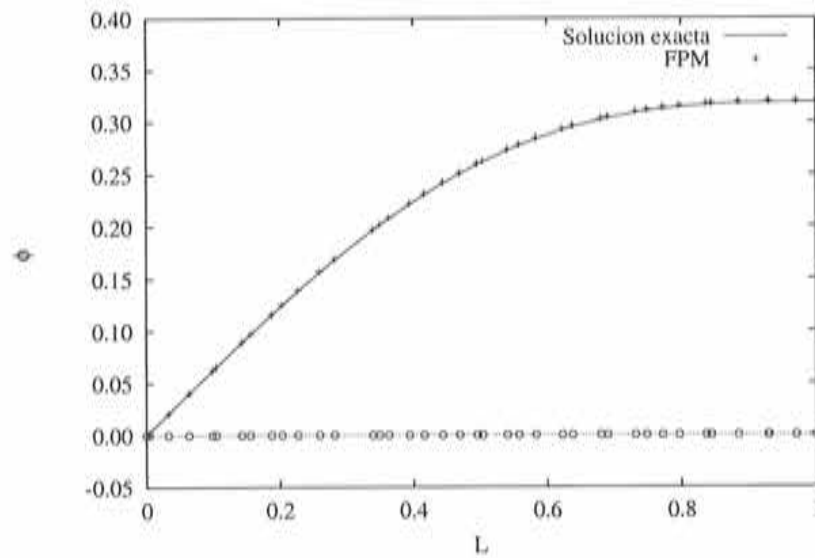


Figura 3.12: Comparación del resultado teórico con el obtenido mediante MPF, para una distribución de puntos arbitraria.

Influencia de las nubes

De la misma forma que en el problema planteado antes, realizamos un estudio de convergencia para aproximaciones realizadas mediante nubes con distinta cantidad de puntos. La definición de dichas nubes en el interior, como en el contorno son la que se presentan en la figura (3.2). Definimos una distancia h como la distancia entre dos puntos contiguos (en el caso de distribuciones equiespaciadas) o una distancia media entre dos puntos contiguos en la distribución arbitraria.

$$h = \frac{L}{n - 1} \quad (3.43)$$

En la figura (3.13), se presentan las curvas de convergencia para las cuales se utilizaron nubes con 3, 5 y 7 puntos. El mismo estudio desarrollado sobre las distribuciones de puntos arbitrarias se pueden apreciar en la figura (3.14).

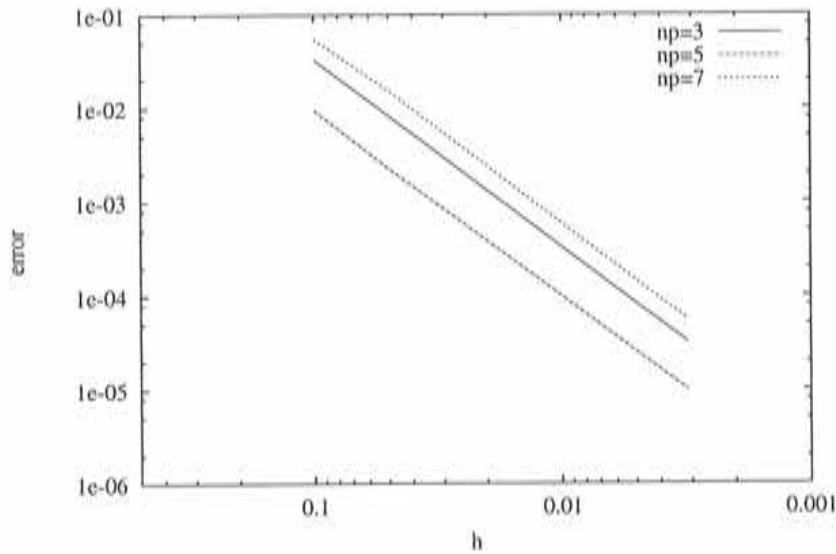


Figura 3.13: Convergencia para el problema con condición de contorno de Neumann para nubes de 3, 5 y 7 puntos, en una distribución de puntos equiespaciada.

Para la distribución de puntos equiespaciada encontramos que, independientemente del tipo de nube que utilizemos, la convergencia es cuadrática, como se puede apreciar en la figura (3.13). De estos resultados, debemos destacar que, a diferencia de lo que ocurre en el ejemplo anterior, los mejores resultados se obtienen con la aproximación realizada mediante nubes de 5 punto.

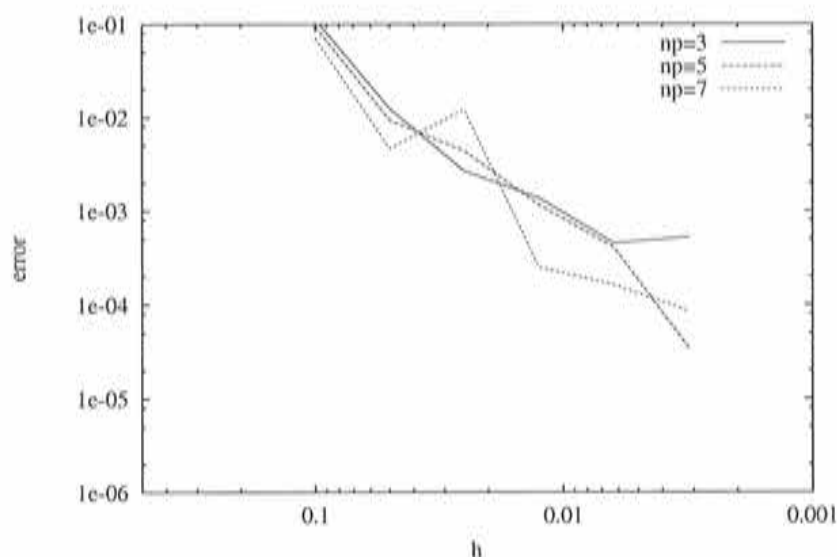


Figura 3.14: Convergencia para el problema con condición de contorno de Neumann para nubes de 3, 5 y 7 puntos, en una distribución de puntos arbitraria.

Por otro lado, los resultados logrados en las distribuciones de puntos aleatorios muestran un comportamiento muy irregular para los tres tipos de nubes utilizadas (figura (3.14)). Las oscilaciones no aparecen cuando trabajamos con condiciones de Dirichlet exclusivamente, por lo tanto, parece lógico suponer que estos problemas son producidos por la condición de Neumann.

Condición de contorno estabilizada

En la formulación presentada, en el contorno de Neumann se trata de satisfacer sólo la ecuación correspondiente a dicha condición, y como pudimos observar, en ciertos casos quedó de manifiesto un notorio deterioro en las propiedades de convergencia del método.

Estas mismas dificultades ya había sido manifestadas por otros autores aunque utilizando otras técnicas, como por ejemplo las *Diferencias Finitas*. Para abordar este tipo de problemas se han planteado diversas alternativas entre las que podemos mencionar el agregado de un punto ficticio fuera del dominio o, el uso de multiplicadores de Lagrange, entre otros.

A través de la teoría del *Cálculo Finitesimal* podemos deducir lo que podemos llamar como "forma estabilizada de las condiciones de contorno" [OÑA98], [OÑA 00b]. Con este fin se plantea una ecuación de balance de flujos en un dominio de dimensiones finitas; para el caso unidimensional que estamos tratando este dominio se

limita a un segmento \overline{AB} en el que el punto x_B pertenece al contorno y el punto x_A pertenece al dominio. La longitud de \overline{AB} se define como $h/2$. En la figura (3.15) se muestra un esquema del dominio en el que se plantea el balance.

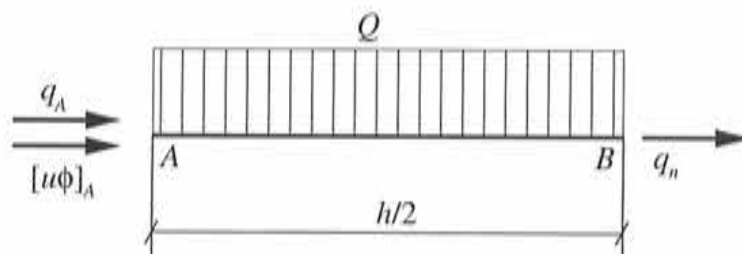


Figura 3.15: Dominio de balance para un punto de contorno.

El equilibrio de los flujos en el segmento \overline{AB} , asumiendo que la fuente Q es constante en dicho segmento, tiene la siguiente expresión:

$$q_n - q(x_A) - [u\phi]_{x_A} - \frac{h}{2}Q = 0 \quad (3.44)$$

donde q_n es el flujo normal prescrito en el contorno, $q(x_A)$ es el flujo producido por la difusión en el punto x_A y $[u\phi]_{x_A}$ es el flujo advectivo en el mismo punto. Desarrollando estos términos en serie de Taylor alrededor del punto x_B , tendremos:

$$q(x_A) = q(x_B) - \frac{h}{2} \frac{dq}{dx} \Big|_{x_B} + O(h^2) \quad (3.45)$$

y

$$[u\phi]_{x_A} = [u\phi]_{x_B} - \frac{h}{2} \frac{d[u\phi]}{dx} \Big|_{x_B} + O(h^2) \quad (3.46)$$

Aplicando la Ley de Fourier para el flujo tendremos que

$$q(x_A) = -k \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x_A} \quad (3.47)$$

con lo cual la ecuación (3.45) se puede escribir como:

$$-k \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x_A} = -k \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x_B} + \frac{h}{2} \frac{d}{dx} \left[k \frac{d\phi}{dx} \right] \Big|_{x_B} + O(h^2) \quad (3.48)$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación de balance propuesta en (3.44) y eliminando los términos de orden superior obtenemos,

$$q_n + k \frac{d\phi}{dx} - [u\phi] - \frac{h}{2} \left[-\frac{d[u\phi]}{dx} + \frac{d}{dx} \left[k \frac{d\phi}{dx} \right] + Q \right] = 0 \quad (3.49)$$

donde todos los términos están evaluados en el punto x_B que es el punto de contorno en el cual está prescrita la condición de Neumann.

Como se puede observar el término que aparece multiplicado por $h/2$ es exactamente el residuo en el interior del dominio. Ahora si hacemos que

$$r = -\frac{d[u\phi]}{dx} + \frac{d}{dx} \left[k \frac{d\phi}{dx} \right] + Q \quad (3.50)$$

llegamos a la siguiente expresión:

$$q_n + k \frac{d\phi}{dx} - [u\phi] - \frac{h}{2} r = 0 \quad (3.51)$$

Debemos tener en cuenta que si el flujo prescrito es de naturaleza difusiva, como ocurre generalmente, el término $[u\phi]$ desaparece y la expresión finalmente queda:

$$q_n + k \frac{d\phi}{dx} - \frac{h}{2} r = 0 \quad (3.52)$$

En esta expresión el signo del término conductivo depende de la forma en que se defina la dirección normal que puede ser entrante o saliente respecto al dominio. Para evitar inconvenientes en dicha definición expresamos la ecuación (3.52) como:

$$q_n + k \frac{d\phi}{dn} - \frac{h}{2} r = 0 \quad (3.53)$$

donde se introdujo la derivada según la dirección normal.

El problema planteado con las ecuaciones (3.37) puede ser planteado en términos de la condición de contorno estabilizada, esto implica que ahora tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} &= \sin(\pi x) && \text{para } 0 < x < 1 \\ \phi(x) &= 0 && \text{para } x = 0 \\ \frac{d\phi(x)}{dn} - \frac{h}{2} \left[\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - \sin(\pi x) \right] &= 0 && \text{para } x = 1 \end{aligned} \quad (3.54)$$

En la ecuación de la condición de contorno la estabilización se introdujo un parámetro h al que se conoce como longitud característica. Este parámetro, según la teoría del *Cálculo Finitesimal*, se puede interpretar como la distancia existente entre el punto del contorno y el punto interior más cercano.

Para la distribución de puntos equiespaciada observamos que con la aplicación de la estabilización los resultados mejoran sensiblemente, figura (3.16). Nuevamente los mejores resultados se obtienen, como en el caso sin estabilizar, con nubes formadas por cinco puntos. Este hecho es muy relevante porque ello indica que se puede

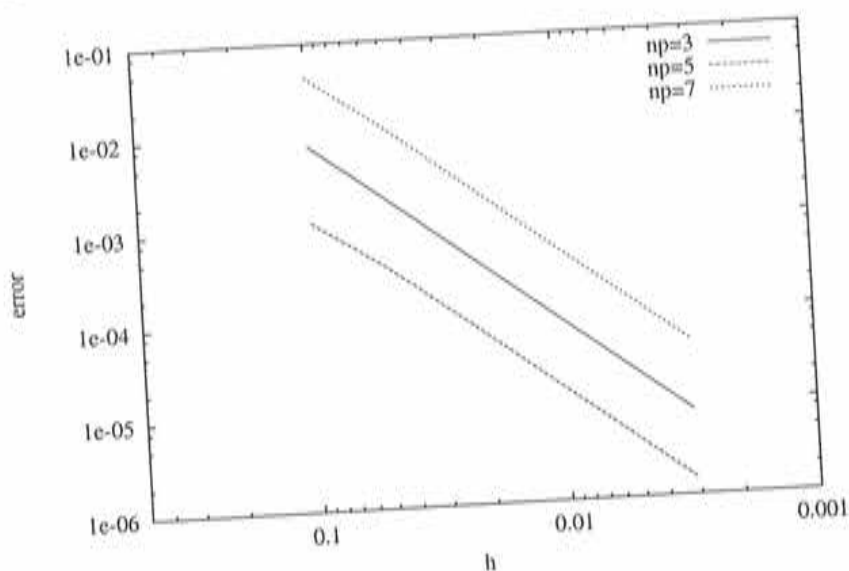


Figura 3.16: Convergencia para el problema con condición de contorno de Neumann estabilizada para nubes de 3, 5 y 7 puntos, en una distribución de puntos equiespaciada.

mejorar la aproximación de *Diferencias Finitas* o *Elementos Finitos* que es la que se obtiene utilizando nubes de 3 puntos.

Por otro lado se puede ver en la figura (3.17) que la mejora de los resultados es más que notoria para las distribuciones de punto aleatoria, aunque el error es prácticamente el mismo independientemente de la cantidad de puntos que formen la nube.

Estos resultados nos permiten concluir que con la aplicación de la teoría del *Cálculo Finitesimal* se logra una forma natural, y a su vez muy efectiva de estabilizar la solución de problemas con condiciones de contorno de Neumann.

Es necesario mencionar que se realizaron estudios de los efectos producidos por las variaciones de la función de ponderación, como en el apartado anterior, y de la base de interpolación. Los resultados mostraron un comportamiento similar a los ya presentados, motivo por el cual no se consideró necesario incluirlos.

3.4.4 Análisis del término convectivo

Es bien conocido que la resolución de las ecuaciones de convección difusión trae aparejado problemas de inestabilidades numéricas. Estos inconvenientes están asociados con el uso de esquemas centrados en la discretización espacial.

Este fenómeno producido por los términos convectivos se pueden observar en el método de los *Elementos Finitos* [COD 93], [FRA 92], [OÑA98], de las *Diferencias*

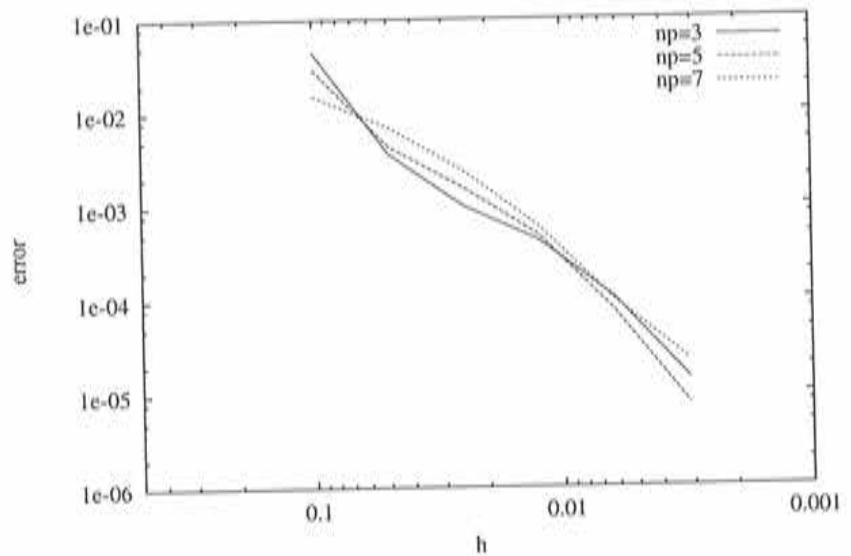


Figura 3.17: Convergencia para el problema con condición de contorno de Neumann estabilizada para nubes de 3, 5 y 7 puntos, en una distribución de puntos aleatoria.

Finitas [PAT 80], [HIR 90] y de *Volúmenes Finitos* [HIR 90], [IDE 94], y podría ser de otra forma, también afecta al método de *Puntos Finitos* [OÑA 00b].

Para estudiar la forma en que se manifiestan las inestabilidades numéricas tomamos el problema de convección-difusión con condiciones de contorno de Dirichlet en $x = 0$ y en $x = 1$. En el esquema de la figura (3.18) se pueden apreciar las características del problema planteado.

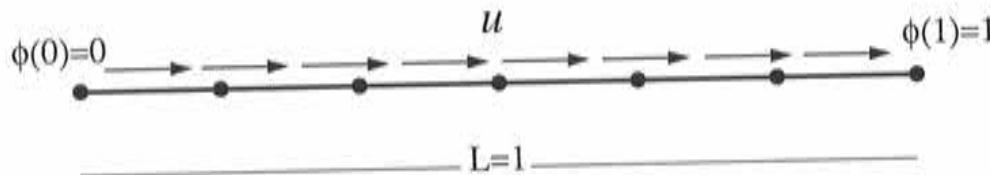


Figura 3.18: Esquema del dominio y las condiciones de contorno.

Haciendo que la fuente externa $Q(x) = 0$, tendremos:

$$\begin{aligned} u \frac{d\phi(x)}{dx} - k \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} &= 0 & \text{para } 0 < x < 1 \\ \phi(x) &= 0 & \text{para } x = 0 \end{aligned}$$

$$\phi(x) = 1 \quad \text{para } x = 1$$

donde k y u son constantes.

Para simplificar el tratamiento es conveniente introducir el número de Peclet γ , y que está definido como

$$\gamma = \frac{uh}{2k} \quad (3.56)$$

este número adimensional depende de los parámetros físicos del problema u y k , además es función de h que es una distancia característica. El número de Peclet nos da una idea de la importancia relativa de la convección frente a la difusión. Podemos decir que la convección es dominante cuando $|\gamma|$ es grande y que dominan los efectos difusivos cuando $|\gamma|$ es pequeño.

Con esta definición podemos reescribir el problema anterior de forma que

$$\begin{aligned} \gamma \frac{d\phi(x)}{dx} - \frac{h}{2} \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} &= 0 & \text{para } 0 < x < 1 \\ \phi(x) &= 0 & \text{para } x = 0 \\ \phi(x) &= 1 & \text{para } x = 1 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Las ecuaciones (3.57) pueden ser resueltas en forma analítica y su expresión es:

$$\phi(x) = \frac{1 - e^{\frac{2\gamma x}{h}}}{1 - e^{\frac{2\gamma L}{h}}} \quad (3.58)$$

Discretización

Utilizamos la misma aproximación que en los problemas anteriores y que está dada por,

$$\phi(x) \cong \hat{\phi}(x) = \sum_{j=1}^n N_j^i(x) \phi_j^h \quad (3.59)$$

Reemplazando esta aproximación en las ecuaciones (3.57) obtenemos el sistema discreto de ecuaciones algebraicas lineales, cuyas incógnitas serán los parámetros nodales ϕ_j^h . En cada punto de colocación la expresión de la matriz y del término independiente será:

- Interior del dominio, $0 < x < 1$:

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \gamma \frac{dN_j^i(x_i)}{dx} - \frac{h}{2} \frac{d^2N_j^i(x_i)}{dx^2} & \text{con } j = 1, \dots, n \\ f_i &= 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

- Contornos Dirichlet, $x = 0$:

$$\begin{aligned} K_{ij} &= N_j^i(x_i) & \text{con } j = 1, \dots, n \\ f_i &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

- Contornos Dirichlet, $x = 1$:

$$\begin{aligned} K_{ij} &= N_j^i(x_i) & \text{con } j = 1, \dots, n \\ f_i &= 1 \end{aligned} \quad (3)$$

En la figura (3.19) se muestran los resultados para distintos valores del número de Peclet. En estos resultados se aprecia claramente la aparición de oscilaciones espurias para $\gamma \geq 5$.

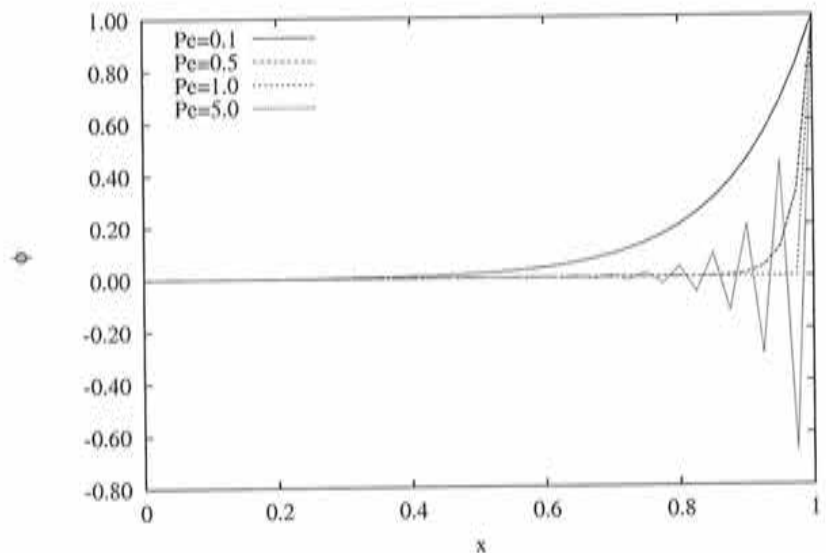


Figura 3.19: Resultados del problema de convección difusiva para distintos valores obtenidos con $n_p = 3$ y $m = 3$.

Como ya hemos comentado, un número de Peclet grande implica que los términos convectivos predominan sobre los términos difusivos, por este motivo se dice que la inestabilidad está ligada con el predominio de la convección. Este tipo de oscilaciones, como era de prever son de la misma naturaleza que las que aparecen discretizando con otros métodos numéricos como el FEM, FD y FV.

Análisis de la inestabilidad numérica

Las causas por las cuales se producen las inestabilidades numéricas en la resolución del problema de convección difusión, se pueden encontrar realizando un análisis del error de truncación que se introduce a través de la discretización de las ecuaciones. Para realizar este análisis proponemos discretizar las ecuaciones de convección difusión mediante funciones de forma cuadráticas con nubes formadas por 3 puntos, con lo que obtenemos un esquema equivalente al que se plantea en *Diferencias Finitas* utilizando un esquema centrado.

Aplicando lo previamente mencionado llegamos a la siguiente expresión:

$$(1 - \gamma)\hat{\phi}(x_{i-1}) - 2\hat{\phi}(x_i) + (1 + \gamma)\hat{\phi}(x_{i+1}) = 0 \quad (3.63)$$

desarrollando en serie de Taylor la función $\hat{\phi}(x)$ en torno al punto x_i tendremos:

$$\hat{\phi}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n \hat{\phi}(x_i)}{dx^n} \frac{(x_i - x)^n}{n!} \quad (3.64)$$

reemplazando esta expansión en serie en la ecuación (3.63) y reagrupando los términos se llega a:

$$\gamma \frac{d\hat{\phi}(x_i)}{dx} - \left[\frac{h}{2} + \frac{h}{4\gamma^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\gamma)^{2n}}{(2n)!} - \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\gamma)^{2n-1}}{(2n-1)!} - 1 \right] \right] \frac{d^2 \hat{\phi}(x_i)}{dx^2} = 0 \quad (3.65)$$

Por otro lado sabemos que:

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (3.66)$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (3.67)$$

reemplazando estas expresiones en la ecuación (3.65) tendremos

$$\gamma \frac{d\hat{\phi}(x_i)}{dx} - \left[\frac{h}{2} + \frac{h}{4\gamma^2} [\cosh(2\gamma) - \gamma \sinh(2\gamma) - 1] \right] \frac{d^2 \hat{\phi}(x_i)}{dx^2} = 0 \quad (3.68)$$

En la ecuación resultante observamos que cuando se discretiza mediante un esquema centrado en realidad se está resolviendo un problema de convección difusión modificado que responde a las siguientes ecuaciones,

$$\gamma \frac{d\hat{\phi}(x)}{dx} - \frac{h}{2} (1 + k^*) \frac{d^2 \hat{\phi}(x)}{dx^2} = 0 \quad (3.69)$$

donde $k^* = \frac{1}{2\gamma^2} [\cosh(2\gamma) - \gamma \sinh(2\gamma) - 1]$ es una difusión adicional introducida por efecto de la discretización. El coeficiente k^* solo es función del número de Peclet γ ; graficando la función $(1 - k^*(\gamma))$ (ver fig. (3.20)) encontramos que a medida que aumenta el número de Peclet la función, que para $|\gamma| = 0$ vale 1, disminuye su valor hasta hacerse nula en $|\gamma| = 1.365$ y luego cambia de signo. Esto es lo que motiva la inestabilidad del esquema presentado, ya que el problema se torna infradifusivo.

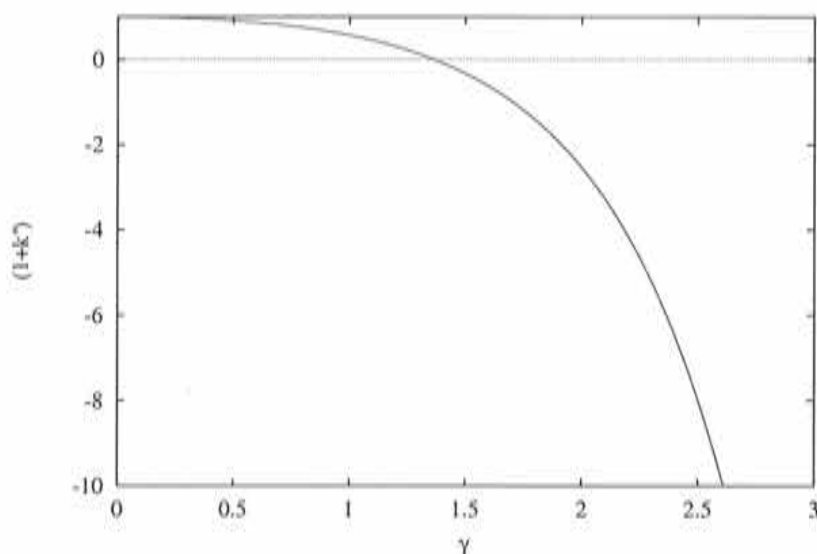


Figura 3.20: Difusión introducida a través de la discretización espacial en función del número de Peclet.

El análisis que se realizó en esta apartado, sin dudas, es muy simplificado, embargo en la literatura se pueden encontrar un tratamiento muy extenso, en esos trabajos podemos citar [BRO 82], [HUG 89], [DUA 96].

Estabilización de las ecuaciones mediante *Cálculo Finitesimal*

Como hemos mencionado en el apartado previo la inestabilidad numérica que aparece en la resolución de las ecuaciones de convección-difusión está motivada por la resolución de una ecuación modificada que resulta infradifusiva por el efecto del término k^* . Por esta razón la solución clásica a este problema se planteó en el sentido de agregar una cierta cantidad de difusión que logre equilibrar lo que se pierde por efecto de la discretización. La mayoría de las técnicas de estabilización dan como resultado la aplicación de una función de forma modificada como función de tes

la formulación de Galerkin, esto dio lugar a algunos de los métodos más utilizados en la actualidad como por ejemplo *Petrov-Galerkin*, *GLS* o *SUPG* entre otros. Una amplia y detallada descripción de estas técnicas se pueden encontrar en [KEL 80], [HUG 86], [HUG 89], [COD 92], [COD 93].

El método del *Cálculo Finitesimal* [OÑA 97], [OÑA 00b], al que nos referiremos mediante *FC*, se basa en la modificación de la ecuación diferencial que rigen el problema, y nos ofrece una forma alternativa muy eficiente de tratar los problemas asociados con las inestabilidades numérica.

Con esta técnica los términos de estabilización surgen directamente del planteo de una ecuación de balance de flujos en un contexto discreto a las ecuaciones diferenciales de gobierno del fenómeno.

Tomemos la ecuación (3.55) a la cual le añadimos una fuente externa $Q(x)$ arbitraria, lo que nos permitirá extender el desarrollo al caso más general. A continuación planteamos el balance de flujos en un segmento \overline{AB} de longitud h , como se muestra en la figura (3.21), además, en esta figura se representan los flujos entrantes y salientes en cada extremo del subdominio que hemos tomado.

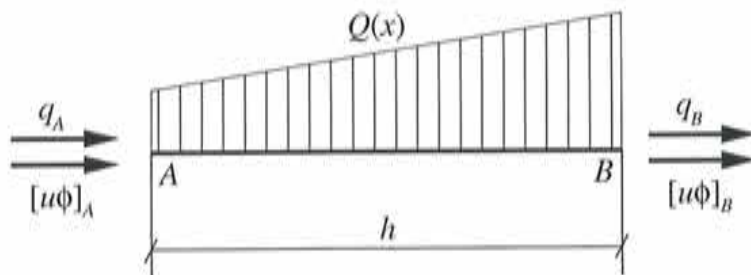


Figura 3.21: Dominio de balance para un punto interior del dominio.

Como primera aproximación suponemos que el término de fuente $Q(x)$ varía linealmente en el segmento \overline{AB} , con lo cual la sumatoria de flujos será:

$$\sum \text{flujos} = [\text{flujo}]_{x_A} - [\text{flujo}]_{x_B} + \frac{1}{2}[Q(x_A) + Q(x_B)]h = 0 \quad (3.70)$$

Como es sabido el flujo se compone de dos partes; una convectiva y la otra difusiva, de forma que:

$$[\text{flujo}]_x = q(x) + [u\phi](x) \quad (3.71)$$

Reemplazando en la expresión anterior

$$q(x_A) + [u\phi](x_A) - q(x_B) - [u\phi](x_B) + \frac{1}{2}[Q(x_A) + Q(x_B)]h = 0 \quad (3.72)$$

podemos introducir el siguiente cambio $x_A = x_B - h$, además como x_B es un punto arbitrario lo reemplazamos directamente por x , con lo cual

$$q(x-h) + [u\phi](x-h) - q(x) - [u\phi](x) + \frac{1}{2}[Q(x-h) + Q(x)]h = 0 \quad (3.72)$$

Los términos expresados en el punto $x-h$ pueden desarrollarse en serie de Taylor en torno al punto x de forma tal que,

$$q(x-h) = q(x) - h \left. \frac{dq}{dx} \right|_x + \frac{h^2}{2} \left. \frac{d^2q}{dx^2} \right|_x - O(h^3) \quad (3.73)$$

$$[u\phi](x-h) = [u\phi](x) - h \left. \frac{d[u\phi]}{dx} \right|_x + \frac{h^2}{2} \left. \frac{d^2[u\phi]}{dx^2} \right|_x - O(h^3) \quad (3.74)$$

$$Q(x-h) = Q(x) - h \left. \frac{dQ}{dx} \right|_x + O(h^2) \quad (3.75)$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación (3.72) y despreciando los términos de mayor orden llegamos a,

$$\begin{aligned} & -\frac{dq(x)}{dx} - \frac{d[u\phi](x)}{dx} + Q(x) + \\ & + \frac{h}{2} \left[\frac{d^2q(x)}{dx^2} + \frac{d^2[u\phi](x)}{dx^2} - \frac{dQ(x)}{dx} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

Haciendo uso de la ley de Fourier, es posible poner los flujos en función de ϕ haciendo,

$$q(x) = -k \frac{d\phi(x)}{dx} \quad (3.77)$$

y suponiendo que $u(x) = cte$ podemos reescribir la ecuación (3.76) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi(x)}{dx} \right) - u \frac{d\phi(x)}{dx} + Q(x) - \\ & - \frac{h}{2} \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi(x)}{dx} \right) - u \frac{d\phi(x)}{dx} + Q(x) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

recordando que el residuo está dado por

$$r = \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi(x)}{dx} \right) - u \frac{d\phi(x)}{dx} + Q(x) \quad (3.79)$$

reemplazando (3.80) en la ecuación (3.79) podemos escribir:

$$r - \frac{h}{2} \frac{dr}{dx} = 0 \quad (3.80)$$

Es muy importante destacar que en la ecuación (3.81) cuando $h \rightarrow 0$ se recupera la ecuación diferencial de convección difusión estandar en su forma infinitesimal.

En general el término de estabilización se expresa en función del parámetro τ (tiempo intrínseco) ampliamente utilizado en la literatura de *Elementos Finitos* [HUG 86], para lo cual reemplazamos $h = 2\tau u$, reemplazando llegamos a

$$r - \tau u \frac{dr}{dx} = 0 \quad (3.82)$$

siendo:

$$\tau = \frac{\alpha \bar{h}}{2|u|} \quad (3.83)$$

donde $\alpha \bar{h}$ se puede obtener utilizando el mismo argumento utilizado en el procedimiento de Petrov-Galerkin para elementos finitos, que consiste en obtener el valor exacto en cada nodo para el problema unidimensional. De esta forma $\alpha = \coth(\gamma) - \frac{1}{\gamma}$, y \bar{h} es una longitud característica medida a lo largo de la línea de corriente. Finalmente la ecuación a resolver tiene la siguiente expresión:

$$r - \frac{\alpha \bar{h}}{2|u|} u \frac{dr}{dx} = 0 \quad (3.84)$$

Haciendo uso de la formulación estabilizada podemos replantear el problema de convección difusión dado por las ecuaciones (3.57) con lo cual las ecuaciones diferenciales de gobierno del problema se transformarán en:

$$\gamma \frac{d\phi(x)}{dx} - \frac{h}{2} \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - \frac{\alpha \bar{h}}{2|u|} u \frac{d}{dx} \left[\gamma \frac{d\phi(x)}{dx} - \frac{h}{2} \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} \right] = 0 \quad \text{para } 0 < x < 1 \quad (3.85)$$

las condiciones de contorno quedan de la misma forma:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= 0 & \text{para } x = 0 \\ \phi(x) &= 1 & \text{para } x = 1 \end{aligned} \quad (3.86)$$

Una vez planteado el nuevo problema, reemplazamos los valores de $\phi(x)$ por su aproximación $\hat{\phi}(x)$ y además, definimos $\bar{h} = h$ (longitud característica de la nube). Finalmente desarrollamos la expresión de (3.85) llegamos a:

$$\gamma \frac{d\hat{\phi}(x)}{dx} - \frac{h}{2} \left(\frac{\gamma \alpha}{|u|} u + 1 \right) \frac{d^2\hat{\phi}(x)}{dx^2} + \frac{\alpha h^2}{4|u|} u \left[\frac{d^3\hat{\phi}(x)}{dx^3} \right] = 0 \quad \text{para } 0 < x < 1 \quad (3.87)$$

Si la aproximación se realiza mediante polinomios de segundo grado tendremos que

$$\frac{d^3\hat{\phi}(x)}{dx^3} = 0 \quad (3.88)$$

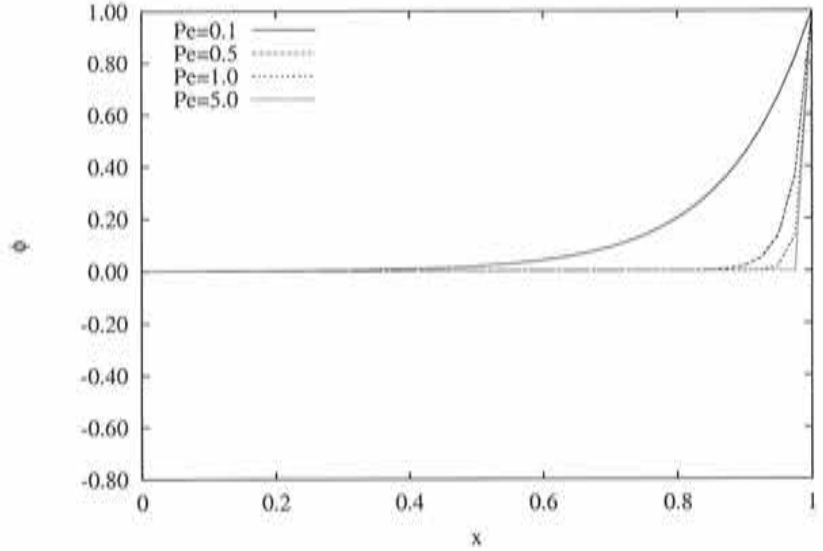


Figura 3.22: Resultados de las ecuaciones de convección-difusión estabilizada para distintos valores de γ , obtenidos con $n_p = 3$ y $m = 3$.

con lo cual obtenemos una ecuación de convección-difusión estándar con el término difusivo modificado. Reemplazando $\alpha = \coth(\gamma) - \frac{1}{\gamma}$, finalmente el sistema de ecuaciones queda como:

$$\begin{aligned} \gamma \frac{d\hat{\phi}(x)}{dx} - \frac{h}{2} \left((\gamma \coth(\gamma) - 1) \frac{u}{|u|} + 1 \right) \frac{d^2 \hat{\phi}(x)}{dx^2} &= 0 & \text{para } 0 < x < 1 \\ \hat{\phi}(x) &= 0 & \text{para } x = 0 \\ \hat{\phi}(x) &= 1 & \text{para } x = 1 \end{aligned} \quad (3.19)$$

En la gráfica (3.22) se muestran los resultados para los distintos valores de Pe mediante la resolución del sistema de ecuaciones modificado. En la figura (3.19) muestran los resultados sin estabilización para los mismos casos. Es evidente que la aplicación del FC introdujo la estabilización necesaria para eliminar las oscilaciones espurias.

Realizando la aproximación mediante nubes de 5 y 7 puntos se observan resultados similares a los obtenidos con nubes de 3 puntos, esto se ilustra en la figura (3.23) donde se resolvió el problema con un número de Peclet de 5 utilizando la formulación sin estabilización y la formulación estabilizada. Este último ensayo es importante debido a que la deducción de la estabilización se hizo para una nube de tres puntos y que por lo tanto interpolaba los valores en cada punto.

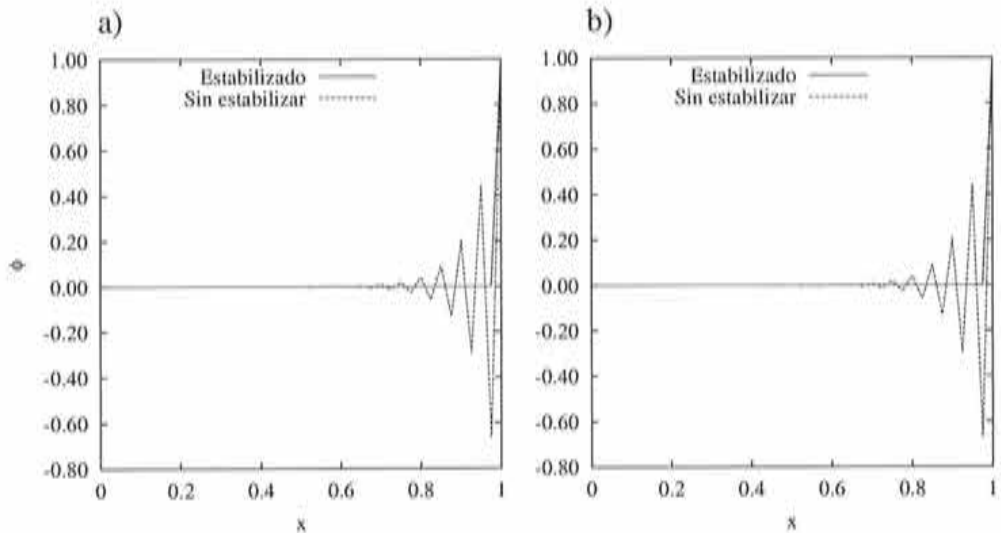


Figura 3.23: Resultado de la ecuación de convección difusión para $\gamma = 5$. a) $n_p = 5$, b) $n_p = 7$.

3.4.5 Convección difusión con una fuente externa variable

A diferencia de lo que ocurre con otros métodos numéricos, el añadido de una fuente externa variable debe ser tratado de forma muy cuidadosa para no introducir errores en la aproximación mediante el método de los *Puntos Finitos*. Para explicar dichas dificultades retomamos las ecuaciones de convección difusión definida en (3.26) en la que proponemos una fuente variable $Q(x) = -\sin(\pi x)$; las condiciones impuestas en ambos contornos son del tipo Dirichlet con $\phi_p = 0$. En la figura (3.24) se muestran las características generales del problema planteado.

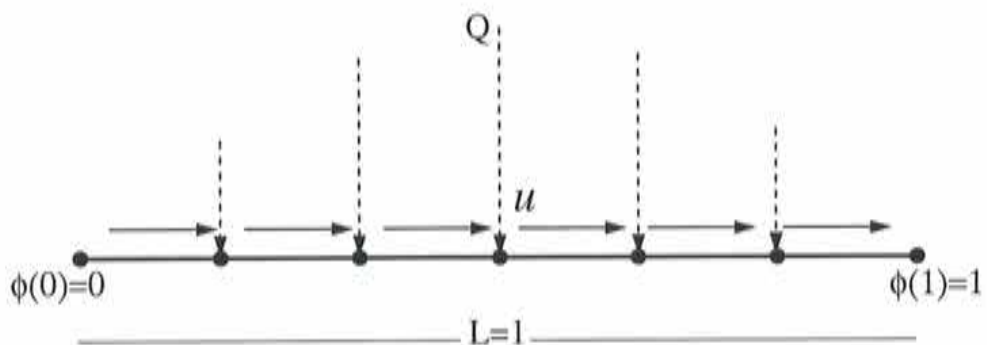


Figura 3.24: Esquema del dominio, la carga externa y condiciones de contorno.

Las ecuaciones que describen el problema planteado tienen la siguiente expresión

$$\begin{aligned} -u \frac{d\hat{\phi}(x)}{dx} + k \frac{d^2\hat{\phi}(x)}{dx^2} + Q(x) &= 0 & \text{para } 0 < x < 1 \\ \hat{\phi}(x) &= 0 & \text{para } x = 0 \\ \hat{\phi}(x) &= 0 & \text{para } x = 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Aplicando la estabilización mediante el *Cálculo Finitesimal* tendremos la siguiente ecuación modificada

$$\begin{aligned} & -u \frac{d\hat{\phi}(x)}{dx} + k \frac{d^2\hat{\phi}(x)}{dx^2} + Q(x) - \\ & - \frac{\alpha \bar{h}}{2|u|} u \frac{d}{dx} \left[-u \frac{d\hat{\phi}(x)}{dx} + k \frac{d^2\hat{\phi}(x)}{dx^2} + Q(x) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

desarrollando el término de estabilización y tomando u y k como valores constantes

$$\begin{aligned} & -u \frac{d\hat{\phi}(x)}{dx} + k \frac{d^2\hat{\phi}(x)}{dx^2} + Q(x) - \\ & - \frac{\alpha \bar{h}}{2|u|} u \left[-u \frac{d^2\hat{\phi}(x)}{dx^2} + k \frac{d^3\hat{\phi}(x)}{dx^3} + \frac{dQ(x)}{dx} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

en esta ecuación se debe prestar especial atención al término de la derivada de la fuente externa que proviene de la estabilización. Para el cálculo de dicha derivada $Q(x)$ debe ser aproximada de alguna forma, y lo más razonable es hacer uso de funciones de forma con que se aproxima $\hat{\phi}(x)$, por lo tanto

$$Q(x) = \sum_{j=1}^n N_j^i(x) Q_j^h \quad (3)$$

siendo la derivada,

$$\frac{dQ(x)}{dx} = \sum_{j=1}^n \frac{dN_j^i(x)}{dx} Q_j^h \quad (3)$$

Tanto en la función como en la derivada nos encontramos con los Q_j^h que son los parámetros de la aproximación que, a diferencia de lo que ocurre cuando se realiza una interpolación, (como en el FEM o FD) en nuestro caso los $Q_j^h \neq Q(x_j)$. Para la obtención de dichos valores se puede hacer uso de la ecuación (3.93) ya que $Q(x)$ es conocido, por lo tanto, planteando dicha ecuación en cada punto de colocación del dominio obtendremos un sistema de ecuaciones que nos permitirá calcular

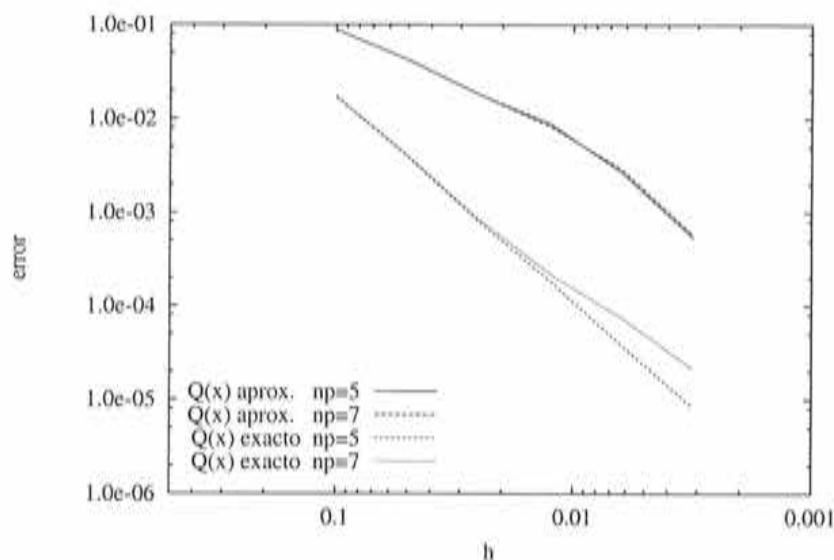


Figura 3.25: Convergencia de la solución utilizando $Q(x)$ aproximada y $Q(x)$ calculados exactamente.

parámetros Q_j^h . Con estos valores estamos en condiciones de calcular la derivada del término de la fuente externa en forma correcta.

Otra opción posible es realizar la aproximación suponiendo que los $Q_j^h = Q(x_j)$. Esta suposición, como se observa en la figura (3.25), introduce un error importante para nubes con $n_p > m$.

En la figura (3.26) se muestra el resultado estabilizado mediante la técnica expuesta previamente para nubes formadas por 5 puntos y con la aproximación cuadrática ($n_p = 5$ y $m = 3$) donde se aprecia como la estabilización elimina las oscilaciones producidas por el término convectivo.

3.5 Conclusiones

En este capítulo quedaron sentadas las bases generales del método de los *Puntos Finitos* y además se mostraron algunas características de la aproximación y la influencia que tienen en los resultados diversos parámetros, siendo los de mayor relevancia la cantidad de puntos en cada nube, la función de peso y el grado del polinomio de aproximación.

La selección de la función de Gauss como función de ponderación dio un resultado muy satisfactorio ya que se obtuvo una buena aproximación en todos los problemas propuestos, incluido en los que se discretizó mediante una distribución de puntos

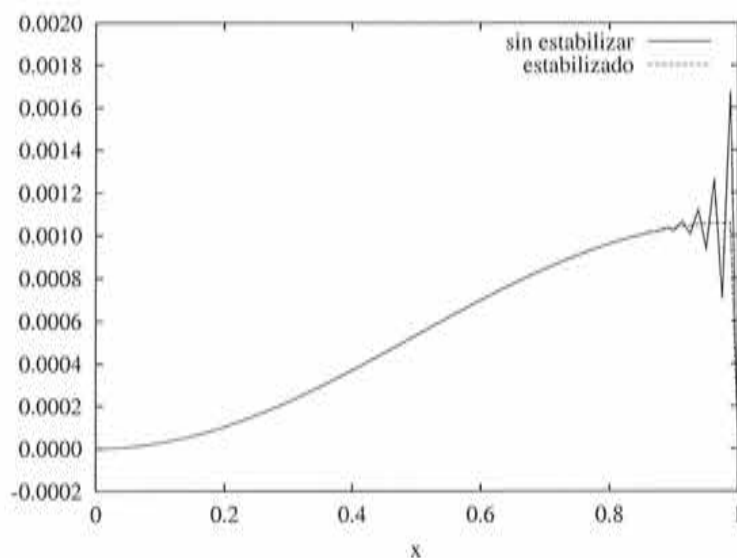


Figura 3.26: Comparación entre los resultado obtenido con un esquema estabilizado y sin estabilizar.

aleatoria, para un amplio rango de valores de los parámetros β y k . Esto nos permite aseverar que el método presenta una baja sensibilidad a las variaciones de la función de ponderación. Sin embargo mediante el análisis de las curvas obtenidas para diferentes valores de los parámetros mencionados se pudieron establecer los valores de los mismos con los cuales los resultados eran mejores. Estos se pudieron corroborar para todos los casos presentados en esta tesis.

Otra conclusión importante se puede extraer de las curvas de convergencia utilizando polinomios de diferente grado, donde pudimos observar que la aproximación de tercer y quinto grado no mejora los resultados que se obtienen con polinomios de segundo y cuarto grado respectivamente, este hecho es independiente de la cantidad de puntos que forman la nube y de la función de ponderación que se utilice.

Otro punto a destacar es la introducción de la estabilización para problemas dominados por los fenómenos convectivos y para la implementación de las condiciones de contorno del tipo Neumann, partiendo del concepto de balance de flujos en el dominio finito. La aplicación de esta técnica denominada *Cálculo Finitesimal* elimina las oscilaciones, añadiendo una cantidad de difusión equivalente a la que se pierde por efecto de la discretización.

Finalmente se presentó la particularidad que se presenta en problemas con fuentes externas variables, y la importancia de su correcto tratamiento.

Capítulo 4

Generalización del método de *Puntos Finitos* a 2D y 3D

4.1 Introducción

La extensión del método de *Puntos Finitos* al espacio bidimensional y tridimensional no presenta mayores dificultades, ya que el proceso de aproximación de las funciones mediante la técnica de mínimos cuadrados ponderados, y la discretización mediante colocación puntual, se realizan en forma completamente análoga a lo que se presentó previamente para el problema unidimensional.

En este capítulo se presentarán diferentes problemas regidos por la ecuación de convección-difusión, tanto en régimen transitorio como estacionario. Para el tratamiento de los mismos se propondrán y compararán distintas formas de implementar las condiciones de contorno y se extenderá el método de estabilización de problemas de convección dominante a dos y tres dimensiones.

Para simplificar el tratamiento teórico presentaremos los desarrollos para problemas 2D, pero los mismos podrán ser extendidos al espacio tridimensional con mayores dificultades.

4.2 Funciones de forma

El proceso de obtención de las funciones de forma bidimensionales se realiza en la misma forma que en el caso unidimensional. Para ello, como primer paso, debe seleccionarse un conjunto de puntos que formarán la nube de puntos. Diferentes nubes deben cumplir con las condiciones propuestas por Duarte en [DUA 95b], las cuales consisten en que el número de puntos que forman la nube (n_p) debe ser mayor o igual que la cantidad de términos linealmente independientes de la base polinómica.

aproximación (m), además la distribución de los mismos tiene que ser *no degenerada*. Un análisis más detallado de estas condiciones se pueden ver en el apartado 2.2.

Para la construcción de la función de aproximación, además es necesario definir la base de interpolación y la función de ponderación,

- Base de interpolación:

como en el caso unidimensional solo utilizaremos bases polinómicas completas, algunos ejemplos pueden ser:

lineal:

$$\mathbf{p}(x, y) = [1, x, y]^T \quad m = 3 \quad \text{en } \mathcal{R}^2$$

$$\mathbf{p}(x, y, z) = [1, x, y, z]^T \quad m = 4 \quad \text{en } \mathcal{R}^3$$

cuadrática:

$$\mathbf{p}(x, y) = [1, x, y, x^2, xy, y^2]^T \quad m = 6 \quad \text{en } \mathcal{R}^2$$

$$\mathbf{p}(x, y, z) = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3]^T \quad m = 10 \quad \text{en } \mathcal{R}^3$$

- Función de ponderación:

Tras haber realizado numerosas pruebas con el problema unidimensional se optó por la función Gaussiana para que actúe como función de ponderación. Su expresión esta dada por

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \frac{\text{Exp}(-(d/\beta)^k) - \text{Exp}(-(d_{\max}/\beta)^k)}{1 - \text{Exp}(-(d_{\max}/\beta)^k)} \quad (4.1)$$

donde β y k son los parámetros que definen la forma de la función de Gauss, $d = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$ siendo (x_i, y_i) las coordenadas del punto estrella y finalmente $d_{\max} = \alpha \cdot \max |d|$. De esta forma queda definida una función de revolución centrada en el punto estrella. Esto se puede observar en el esquema de la figura (4.1).

En el apartado (2.4.6) se mostró que con esta función es posible reproducir el efecto de ponderación de la mayoría de las funciones de peso utilizadas con este fin, esta versatilidad es conferida por las distintas combinaciones de los parámetros β , k y d_{\max} .

Para el problema tridimensional solo cambia la definición de la distancia, suponiendo que el punto estrella se encuentra en (x_i, y_i, z_i) tendremos que

$$d = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \quad (4.2)$$

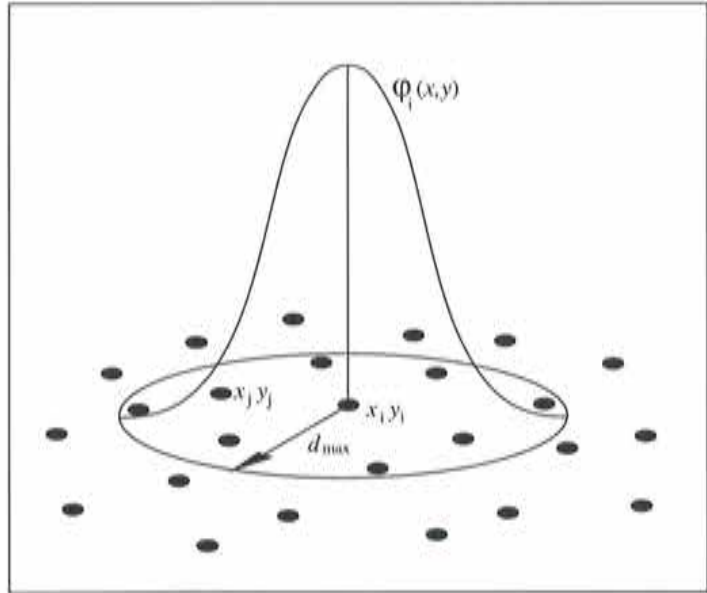


Figura 4.1: Función de ponderación de Gauss en dos dimensiones.

4.2.1 Proceso de minimización

Planteando el proceso de minimización de un funcional equivalente a planteado en una dimensión presentado en el apartado 2.4.2, arribamos a la obtención de una función de aproximación $\hat{\phi}(x, y)$ cuya expresión es

$$\phi(x, y) \cong \hat{\phi}(x, y) = \mathbf{p}^T(x, y) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \phi^h \quad (4.2.1)$$

A efectos de evitar problemas numéricos hacemos uso de la base polinomial definida en forma local y adimensionalizada a través de d_{\max} . Para un punto con coordenadas (x_i, y_i) tendremos la siguiente aproximación:

$$\hat{\phi}(x, y) = \mathbf{p}^T(x, y) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \phi^h \quad (4.2.2)$$

con una base definida como

$$\mathbf{p}^T(x, y) = \left[1, \frac{x - x_i}{d_{\max}}, \frac{y - y_i}{d_{\max}}, \dots, \left(\frac{x - x_i}{d_{\max}} \right)^k, \left(\frac{y - y_i}{d_{\max}} \right)^k \right]$$

Las expresiones de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} están dadas por:

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n_p} \varphi_i(x, y) \mathbf{p}(x_{(j)}, y_{(j)}) \mathbf{p}^T(x_{(j)}, y_{(j)}) \quad (4.2.3)$$

y

$$\mathbf{B} = [\varphi_i(x_{(1)}, y_{(1)}) \mathbf{P}(x_{(1)}, y_{(1)}), \dots, \varphi_i(x_{(n_p)}, y_{(n_p)}) \mathbf{P}(x_{(n_p)}, y_{(n_p)})] \quad (4.6)$$

donde el subíndice entre paréntesis indica que se utilizan índices locales.

Reemplazando $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}$ tendremos

$$\hat{\phi}(x, y) = \mathbf{P}^T(x, y) \mathbf{C}^{-1} \phi^h \quad (4.7)$$

Recordemos que como método de discretización, se utiliza colocación puntual y por lo tanto es necesario conocer los valores de la función y sus derivadas en el punto de colocación que coincide con el punto estrella. Al hacer uso de un sistema de coordenadas local este punto será el $(0, 0)$, por lo tanto la evaluación de las funciones se simplifica de manera notable, como se muestra a continuación. Dado que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^T(x_i, y_i) &= \left[1, \frac{x_i - x_i}{d_{\max}}, \frac{y_i - y_i}{d_{\max}}, \dots, \left(\frac{x_i - x_i}{d_{\max}} \right)^k, \left(\frac{y_i - y_i}{d_{\max}} \right)^k \right] \\ &= [1, 0, 0, \dots, 0, 0] \end{aligned} \quad (4.8)$$

con lo cual

$$\hat{\phi}(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^{n_p} C_{1j}^{-1} \phi_{(j)}^h \quad (4.9)$$

A modo de ejemplo a continuación se presenta el cálculo de la derivada primera respecto de la coordenada x . Como ya se ha mostrado anteriormente la derivada de la función de aproximación es:

$$\frac{\partial \hat{\phi}(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{P}^T(x, y)}{\partial x} \mathbf{C}^{-1} \phi^h \quad (4.10)$$

ya que la matriz \mathbf{C}^{-1} es constante. La derivada de la base evaluada en el punto (x_i, y_i) queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}^T(x_i, y_i)}{\partial x} &= \left[0, \frac{1}{d_{\max}}, 0, \dots, k \left(\frac{x_i - x_i}{d_{\max}} \right)^{k-1}, 0 \right] \\ &= \left[0, \frac{1}{d_{\max}}, 0, \dots, 0, 0 \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

con lo cual

$$\frac{\partial \hat{\phi}(x_i, y_i)}{\partial x} = \frac{1}{d_{\max}} \sum_{j=1}^{n_p} C_{2j}^{-1} \phi_{(j)}^h \quad (4.12)$$

La derivada segunda queda como

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}(x_i, y_i)}{\partial x^2} = \frac{2}{(d_{\max})^2} \sum_{j=1}^{n_p} C_{Aj}^{-1} \phi_{(j)}^h \quad (4)$$

La extensión del cálculo de la función y sus derivadas en aproximaciones tridimensionales es completamente análogo.

4.3 Nubes

Sin dudas la principal dificultad con la que nos enfrentamos al abordar problemas 2D o 3D radica en la selección de los puntos que formarán las nubes, adquiriendo especial relevancia esta dificultad en los puntos del contorno donde las nubes tienen características muy particulares.

Como ya hemos mencionado la cantidad de puntos que forman estas nubes tiene que ser mayor o igual que el número de términos linealmente independientes de la base de interpolación ($n_p \geq m$). Esta condición, si bien es necesaria, no es suficiente. La otra condición necesaria es que para un sistema de ejes ortogonales arbitrarios (ξ, η) se puedan proyectar la cantidad mínima de puntos (esta dependerá de la base) en ambas direcciones (a una distribución de puntos que cumple esta condición la denominamos *no degenerada*). En caso de no cumplirse alguna de estas condiciones nos encontraremos con que la matriz \mathbf{A} , calculada mediante la ecuación (4.5), es singular, o mal condicionada.

En las figuras siguientes se plantean esquemáticamente algunos ejemplos para ilustrar lo previamente comentado. Para ello suponemos que estamos aproximando mediante una base de interpolación polinómica completa con 6 términos linealmente independientes (polinomio cuadrático), por lo tanto tendremos que tener, como mínimo, $n_p \geq 6$.

En la figura (4.2) se presentan dos ejemplos¹:

- a) en este caso podemos observar que si proyectamos los puntos en las direcciones (ξ, η) , en una de ellas (ξ) sólo tendremos 2 puntos, lo que no es suficiente para realizar una interpolación cuadrática en dicha dirección.
- b) este caso es equivalente al anterior, excepto que el sistema (ξ, η) respectivamente en el cual el problema es singular, no coincide con los ejes globales.

En la figura (4.3) se muestran dos ejemplos en los cuales la distribución de puntos cumple con la condición requerida.

¹en los esquemas de las nubes se muestra con un círculo vacío el punto estrella, aunque no es relevante su posición.

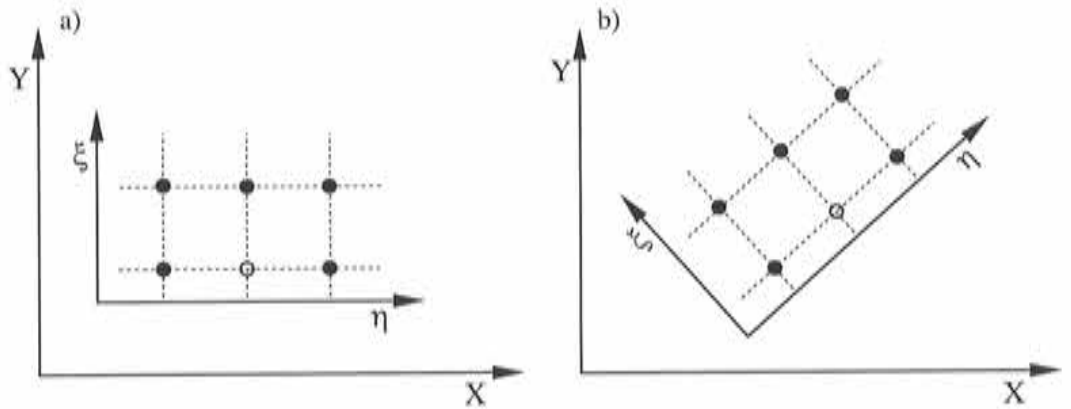


Figura 4.2: Distribuciones de puntos inapropiada para una interpolación cuadrática.

- a) en este caso los puntos no están alineado, y se puede comprobar que esta condición se cumple para cualquier sistema de ejes (ξ, η) .
- b) en este caso los puntos están alineados pero es posible proyectar la cantidad suficientes puntos en cualquier sistema de ejes ortogonales, por lo tanto, cumple la condición.

La obtención de \mathbf{A}^{-1} se realiza en forma numérica y como es bien sabido, debido a los errores de truncamiento, se puede llegar a invertir una matriz que analíticamente debía ser singular, lo que produce resultados completamente erróneos. Por este motivo hay que establecer un criterio eficiente para decidir cuando se considera que una matriz es singular o no lo es.

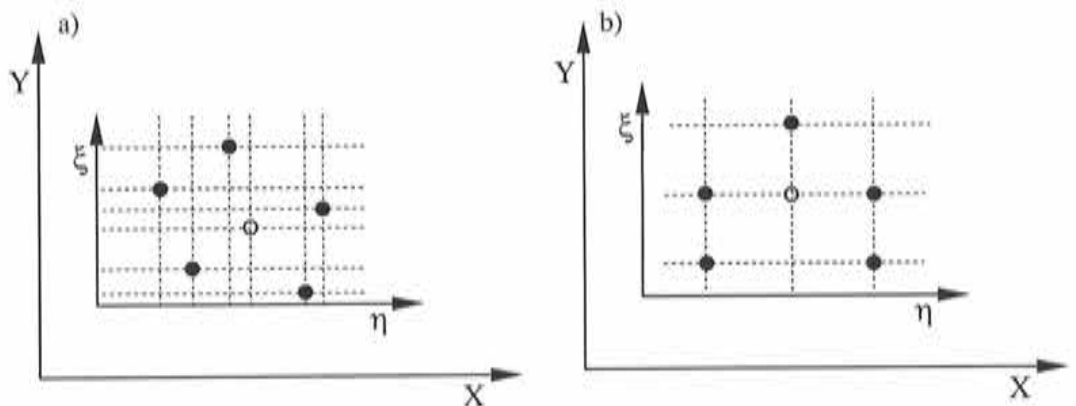


Figura 4.3: Distribución de puntos apropiada.

En la figura (4.4) se muestra un ejemplo donde se cumplen las dos condiciones necesarias para realizar la aproximación. Sin embargo, en la dirección ξ tenemos que dos de los tres puntos necesarios están a una distancia ε . Si esta distancia es pequeña la matriz \mathbf{A} , si bien no es singular, puede estar mal condicionada y los resultados son, como en el caso anterior, erróneos.

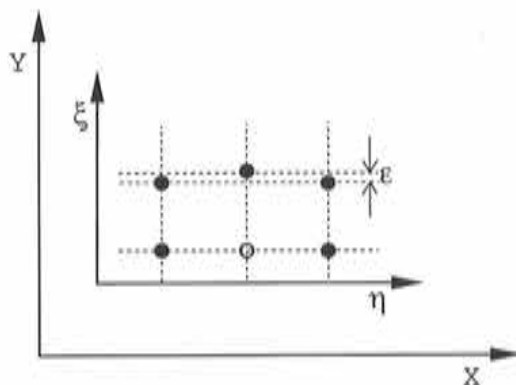


Figura 4.4: Distribución de puntos dependiente de ε .

Las posibilidades de encontrarnos con problemas como los mencionados previamente nos hizo plantear alguna forma de detectarlos de antemano, para lo cual utilizando el número de condición de \mathbf{A} , se creó un índice el que nos muestra que podemos denominar la "calidad de la nube". Esto nos permite, a la hora de seleccionar los puntos asegurarnos de obtener una buena aproximación.

La metodología utilizada se traduce en hacer simplemente la comprobación de que,

$$\text{cond}(\mathbf{A}) \leq k_{\mathbf{A}} \quad (4)$$

donde $k_{\mathbf{A}}$ es una constante k (se tomaron valores entre 20 y 200) multiplicada por el número de condición de la matriz \mathbf{A} de una nube considerada como óptima. En el caso de polinomios cuadráticos en 2D esta nube considerada como ideal está constituida por 7 puntos que forman un hexaedro perfecto con el punto estrella en el centro del mismo.

4.4 Ecuación de convección difusión

En esta sección se abordará la solución de la ecuación de convección difusión estacionaria en un dominio Ω , con condiciones de contorno de tipo Dirichlet en

y de Neumann Γ_t . Las ecuaciones diferenciales que gobiernan este problema y sus condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned} \nabla^T [\mathbf{D}\nabla\phi(\mathbf{x})] - \mathbf{u}^T \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{x}) &= 0 & \text{en } \Omega \\ \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{D}\nabla\phi(\mathbf{x}) - q_n &= 0 & \text{en } \Gamma_t \\ \phi(\mathbf{x}) - \phi_p &= 0 & \text{en } \Gamma_u \end{aligned} \quad (4.15)$$

en esta expresión tenemos los siguientes operadores y matrices:

operador gradiente

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \text{en } \mathcal{R}^2; \quad \nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{en } \mathcal{R}^3 \quad (4.16)$$

matriz de difusión

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \quad \text{en } \mathcal{R}^2; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad \text{en } \mathcal{R}^3 \quad (4.17)$$

vector velocidad

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \text{en } \mathcal{R}^2; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \text{en } \mathcal{R}^3 \quad (4.18)$$

versor en la dirección normal al contorno (saliente)

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \quad \text{en } \mathcal{R}^2; \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad \text{en } \mathcal{R}^3 \quad (4.19)$$

Mientras que $Q(\mathbf{x})$ es una fuente externa, q_n es un flujo normal prescrito y ϕ_p es el valor prescrito de la incógnita.

4.4.1 Ecuación de difusión con condiciones de Dirichlet (2D)

A continuación se presentan dos problemas de Poisson que nos permitirán estudiar algunas características de la formulación presentada, además se presentarán algunas comparaciones con otros métodos.

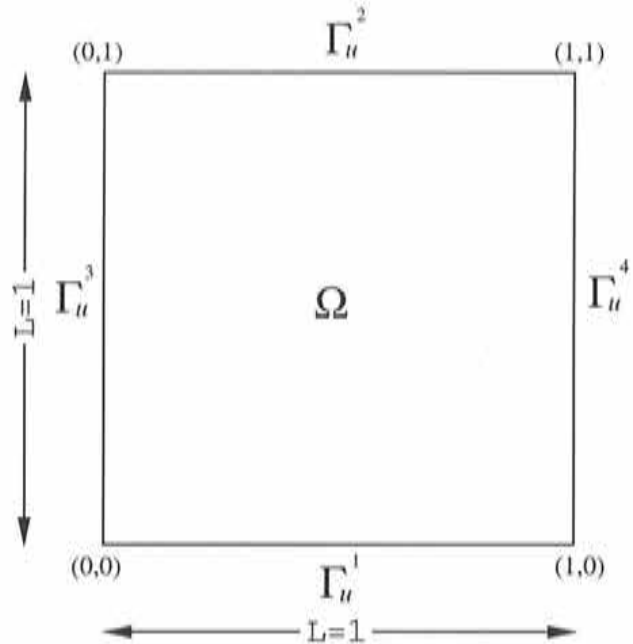


Figura 4.5: Esquema de la geometría y condiciones de contorno.

Problema 1

En este primer ejemplo estudiaremos exclusivamente los términos difusivos de la ecuación (4.15), para lo cual tomamos $u = 0$, $v = 0$, $k_x = 1$ y $k_y = 1$. En los contornos se imponen condiciones de Dirichlet. En la figura (4.5) se presenta el esquema del problema y las condiciones de contorno. Una vez reemplazados los valores del vector \mathbf{v} y de la matriz \mathbf{D} , la ecuación se reduce a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (4)$$

Las condiciones de contorno se definieron de forma que:

$$\begin{aligned} \phi &= -y^3 && \text{en } \Gamma_u^1 \\ \phi &= -1 - y^3 + 3y^2 + 3y && \text{en } \Gamma_u^2 \\ \phi &= -x^3 && \text{en } \Gamma_u^3 \\ \phi &= -1 - x^3 + 3x^2 + 3x && \text{en } \Gamma_u^4 \end{aligned}$$

con lo cual el problema planteado tiene como solución analítica una función polinómica cúbica, cuya expresión es

$$\phi(x, y) = -x^3 - y^3 + 3xy^2 + 3x^2y \quad (4)$$

Este problema fue resuelto por Aluru en [ALU 00] utilizando una técnica de colocación puntual y con una aproximación basada en el *Reproducing Kernel*, lo que nos permitirá contrastar las prestaciones del método de *Puntos Finitos* con una técnica de características similares.

Para el estudio de la convergencia es necesario definir una dimensión característica h , siguiendo el trabajo de Aluru se definió que

$$h = h_x = h_y = \frac{L}{\sqrt{n} - 1} \quad (4.22)$$

donde L es la longitud del lado del dominio (ver fig. (4.5)) y n es el número total de puntos utilizados en la discretización.

El cálculo del error de la solución y de sus derivadas se realiza mediante un estimador de error global, cuya expresión está dada por

$$e = \frac{1}{\phi_{\max}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\phi_j - \hat{\phi}_j)^2} \quad (4.23)$$

La distribución de los puntos en un dominio determinado se puede realizar de numerosas formas, por este motivo hemos escogido tres formas distintas a las que denominaremos distribución **estructurada**, distribución **aleatoria** y distribución **homogénea**.

Distribución de puntos estructurada

Este tipo de distribución se logra dividiendo el dominio mediante una grilla equiespaciada. Para obtener la convergencia de este problema se utilizaron 4 distribuciones distintas, cada una de ellas formada por 5×5 , 11×11 , 21×21 y 41×41 puntos a lo largo de las direcciones x e y respectivamente. Como función base utilizamos un polinomio cuadrático y la campana de Gauss como función ponderación, cuyos parámetros se obtuvieron de los estudios unidimensionales realizados en el *Capítulo 3*.

En la figura (4.6) se pueden observar las curvas de convergencia de la función y de sus derivadas. La pendiente de la curva de ϕ es 2.82 y para las derivadas se obtuvo una velocidad de convergencia de 2.26, siendo la misma tanto para x como para y . Para este mismo problema en el trabajo presentado por Aluru se obtiene una velocidad de convergencia de 2.7 para la función y de 2.32 para las derivadas.

Distribución de puntos aleatoria

Para constatar la influencia que tiene la posición de los puntos sobre la aproximación se resolvió el mismo problema usando distribuciones de puntos completamente

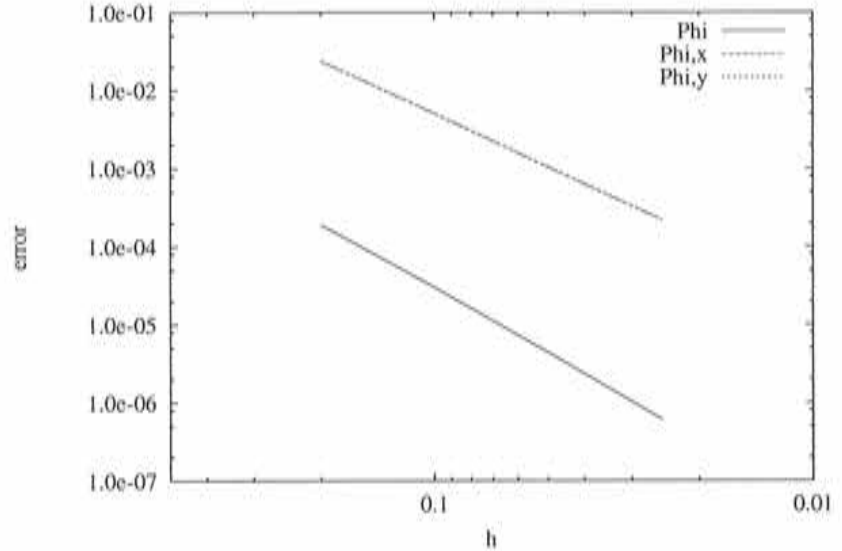


Figura 4.6: Convergencia de la solución para una distribución de puntos uniformemente aleatorias, excepto en los contornos. Para ello se tomaron 4 distribuciones con 121, 441 y 1681 puntos. Tanto la base polinómica como la función de ponderación que se utilizaron son las mismas que en el caso de una distribución **estructurada**.

En la figura (4.7) se pueden ver las curvas de convergencia de las cuales se obtiene una pendiente media, debido a que las curvas no son rectas; la pendiente de la curva para la incógnita $\hat{\phi}$ es de 2.74, para la derivada respecto a x es 1.75 y para la derivada respecto a y es 1.73. Para este ejemplo los valores reportados por Aluru fueron 2.01 para la incógnita y de 2.16 para la derivada respecto a x y 1.90 para la derivada respecto a y , aunque en el trabajo citado no se aclara el procedimiento seguido para calcular esos valores.

Distribución de puntos homogénea

La tercer distribución de puntos se generó mediante un método que mantiene cierta "homogeneidad" en lo que respecta a la distancia entre los puntos, sin ser la misma que una distribución estructurada como se propuso en el primer caso. Mediante este método se generaron 4 distribuciones con 25, 121, 441 y 1681 puntos respectivamente. Se usó la misma base polinómica y la misma función de ponderación que en los dos casos anteriores.

En la figura (4.8) la pendiente media calculada para la incógnita es de 2.83, para la derivada respecto a x es de 2.54 y para la derivada respecto a y es de 2.51. Para este tipo de distribuciones no se contaban con otros resultados que permitieran rea-

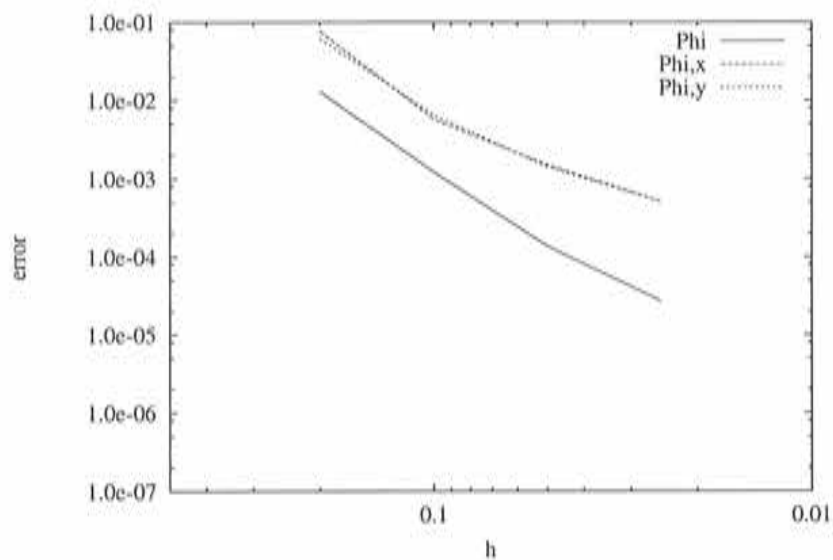


Figura 4.7: Convergencia de la solución para una distribución de puntos aleatoria.

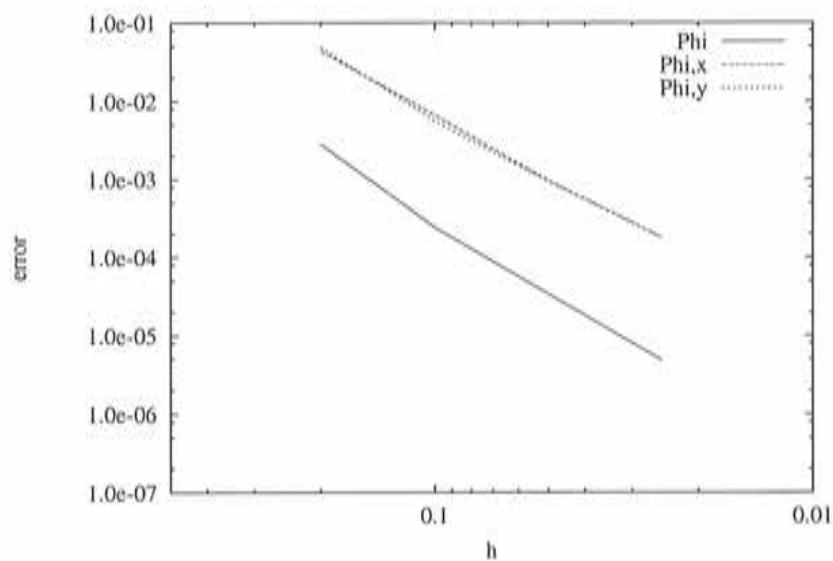


Figura 4.8: Convergencia de la solución para una distribución de puntos homogénea.

comparaciones, pero se consideró importante incluirlos porque los generadores de puntos disponibles brindan resultados de esta clase.

Comparación de los resultados

Para una mayor comprensión de lo que implica cada una de las distribuciones de puntos que hemos propuesto, en la figura (4.9) se muestran, a modo de ejemplo, una de cada una de ellas (todas formadas por 121 puntos). Mientras que en la figura (4.10) presentamos los resultados que se obtuvieron con las discretizaciones previamente mostradas. Como podemos observar en esta figura, cualitativamente no se aprecian diferencias en los resultados.

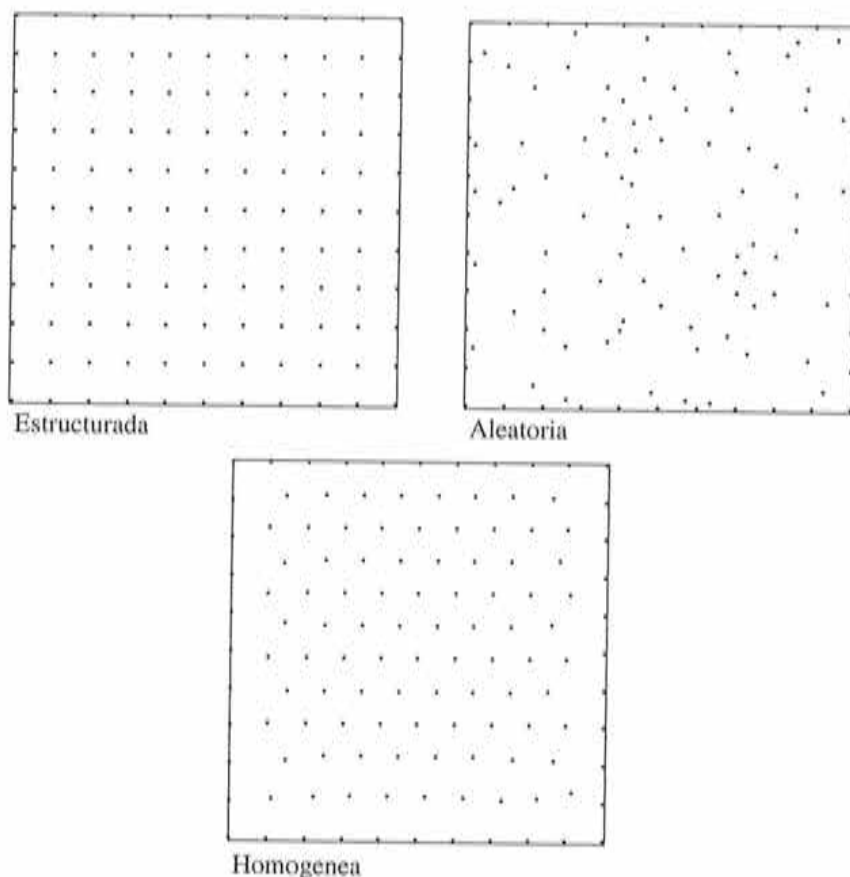


Figura 4.9: Distribuciones de puntos utilizadas para la resolución del problema. (121 puntos).

La velocidad de convergencia de la función obtenida en los tres casos planteados

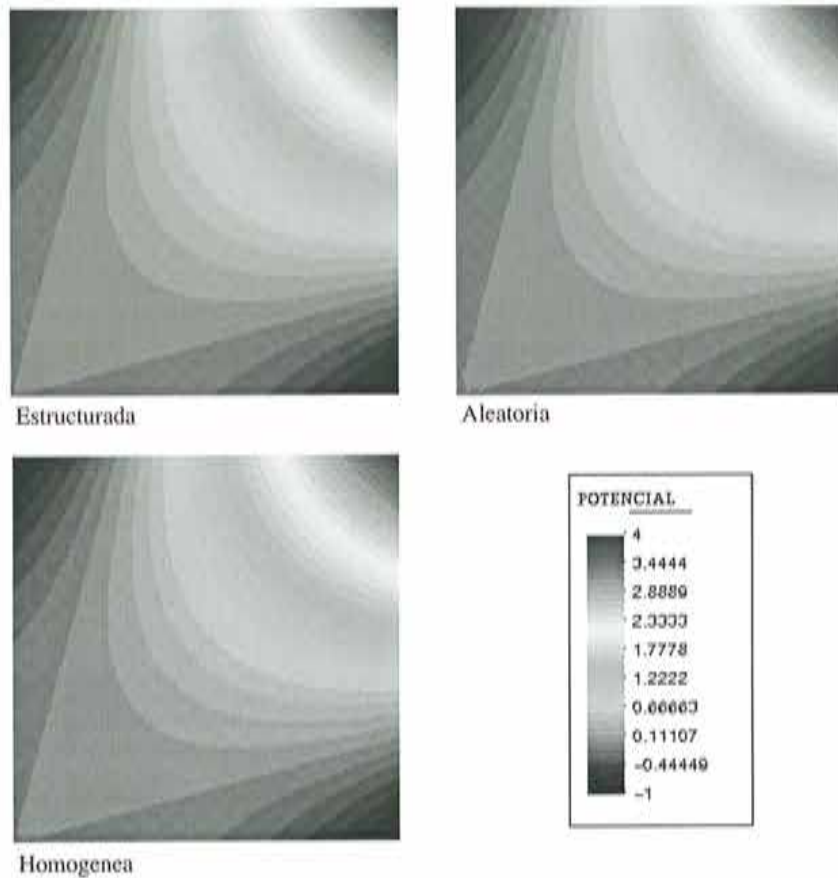


Figura 4.10: Contornos de la función $\hat{\phi}$ para los distintos tipos de distribuciones de puntos.

es similar, en cambio en las derivadas se observa un claro deterioro en la aproximación realizada con una distribución de puntos aleatoria.

	Función	Derivada x	Derivada y
Estructurada	2.82	2.26	2.26
Aleatoria	2.74	1.75	1.73
Homogénea	2.83	2.54	2.51

Por otro lado hay que destacar que el error global de la aproximación de la función, para un h determinado, tiene una amplia variación para las distintas distribuciones, por ejemplo para $h = 0.1$ obtenemos

	error ϕ
Estructurada	3.0×10^{-5}
Aleatoria	1.2×10^{-3}
Homogénea	2.4×10^{-4}

en cambio esta diferencia es prácticamente inexistente para los errores de las mallas, como lo demuestran las curvas (4.6), (4.7) y (4.8).

Efecto del número de puntos de la nube

En el estudio realizado previamente se utilizaron nubes formadas por 12 puntos para todos los casos. Sin dudas, el número de puntos que conforma cada nube es una variable muy importante en la aproximación, por ello tomamos el eje N discretizado mediante 441 puntos y variamos el número de puntos de cada nube entre 10 y 26. En las curvas de la figura (4.11) se observa que el comportamiento de la función es similar para las distribuciones de punto aleatoria y homogénea, mejorando a medida que aumentamos el número de puntos, sin embargo en el caso estructurado la aproximación se deteriora a medida aumentamos la cantidad de puntos en la misma nube. Finalmente hay que destacar que a medida que el tamaño de la nube aumenta en todos los casos se tiende a un mismo error.

Ejemplo 2

El segundo ejemplo planteado, como el anterior, es un problema de Poisson con condiciones de contorno de Dirichlet aunque en este caso se añade una fuente externa. El dominio es un cuadrado cuyos lados tienen longitud uno. Para el análisis de convergencia se generaron cuatro distribuciones con 25, 81, 289 y 1089 puntos en una de ellas. Además estos puntos se distribuyeron de dos formas distintas; en la primera se generó una distribución estructurada y luego estos puntos se movieron en forma aleatoria hasta un máximo de $0.25h$, donde h es la distancia entre los puntos. En el segundo caso la distribución se hizo en forma completamente aleatoria. El problema es el siguiente:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = Q(x, y) \quad \text{en } \Omega \quad (4.12)$$

donde la fuente externa es una función exponencial

$$Q(x, y) = (kyx(1-y)(1-x))^2 (e^{kzy(1-x)(1-y)} / (1 - e^{k/16})) \quad (4.13)$$

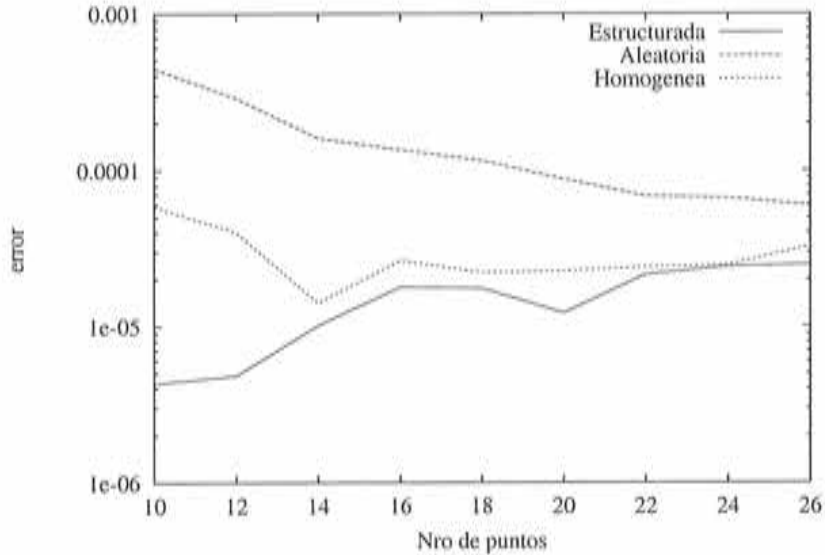


Figura 4.11: Convergencia de la solución frente a la variación del número de puntos en cada nube.

con $k = 200$, y las condiciones de contorno son simplemente

$$\phi = 0 \quad \text{en } \Gamma \quad (4.26)$$

El problema así planteado tiene como solución analítica

$$\phi(x, y) = (1 - e^{kzy(1-x)(1-y)}) / (1 - e^{k/16}) \quad (4.27)$$

En la figura (4.12) se muestran dos distribuciones de puntos que se utilizaron en este ejemplo.

La importancia de este ejemplo radica en que existen una gran cantidad de resultados obtenidos con diversos métodos lo que no permite una buena evaluación del método de los *Puntos Finitos*. Los errores que se grafican en las curvas de convergencia, se obtuvieron promediando los resultados de 10 distribuciones distintas, aunque con la misma cantidad de puntos, esto se realizó para los dos casos que se presentan a continuación. En las curvas de convergencia se muestran los resultados obtenidos con:

- *Meshless Finite Element Method* (MFEM)
- *Element Free Galerkin Method* (EFGM)
- *Smooth Particle Hydrodynamics* (SPH)

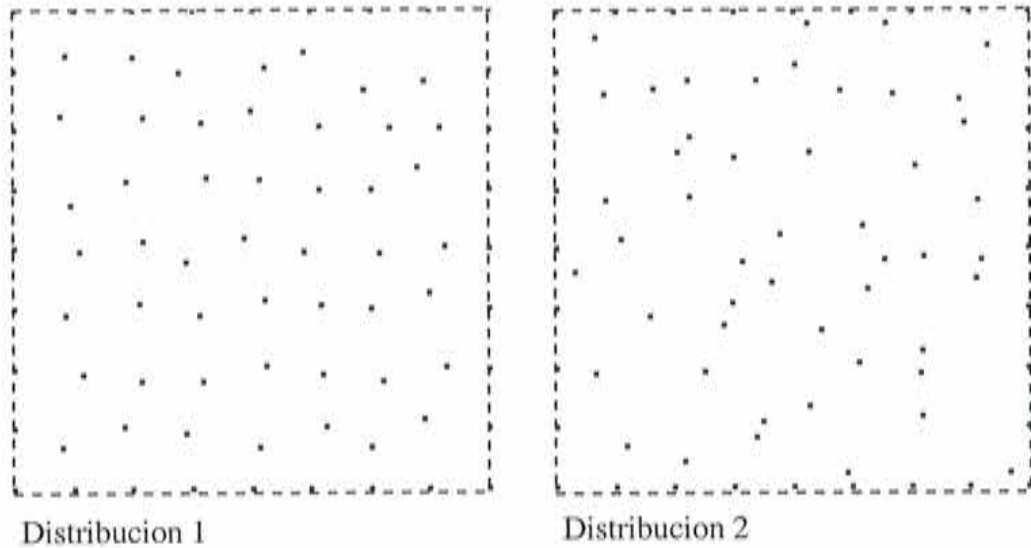


Figura 4.12: Distribuciones de puntos aleatorias.

- *Finite Element Method* (FEM)

Es necesario aclarar que tanto h como la norma del error se calcularon según ecuaciones (4.22) y (4.23).

Distribución 1: En la distribución en la que los puntos se movieron arbitrariamente una distancia $0.25h$, en general, todos los métodos logran una convergencia similar para la solución, como queda reflejado en la figura (4.13). En el caso de las derivadas se destaca el comportamiento del método de *Puntos Finitos*, donde la velocidad de convergencia es notoriamente superior al resto de los métodos, llegando a ser cuadrática (ver fig. (4.14)).

A continuación se presenta una tabla donde se pueden apreciar las velocidades de convergencia para cada uno de los métodos. En todos los casos el cálculo de las mismas se realizó tomando valores medios.

Método	Función	Derivada x	Derivada y
FEM	2.13	1.42	1.43
MFEM	2.51	1.42	1.42
SPH	1.96	1.34	1.38
EFGM	2.04	0.98	1.02
FPM	2.12	2.09	2.04

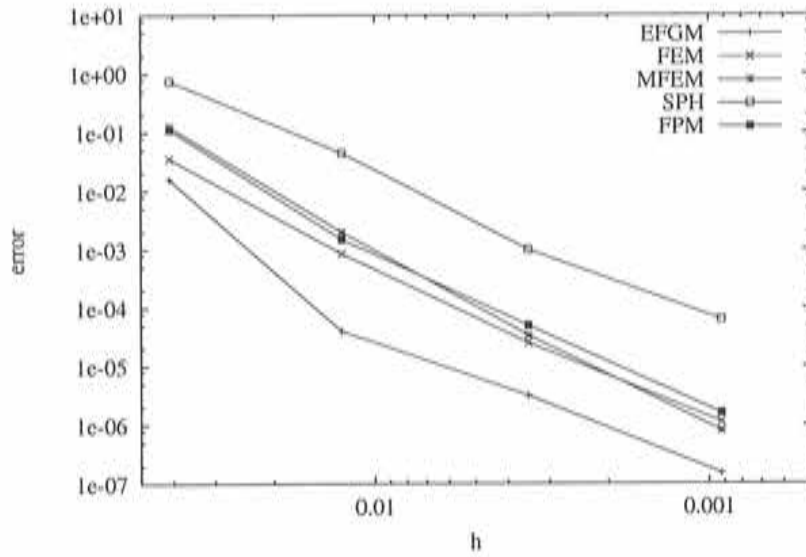


Figura 4.13: Convergencia de la solución, para la distribución de puntos movidos arbitrariamente $0.25h$.

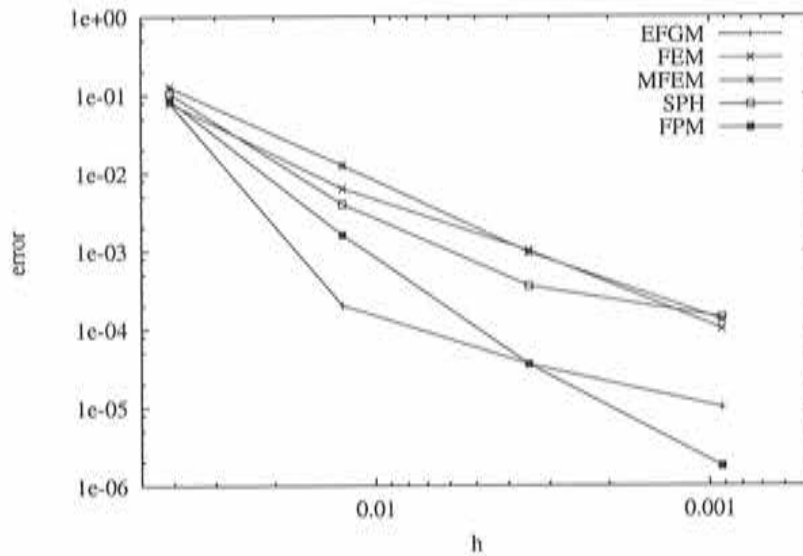


Figura 4.14: Convergencia de la derivadas, para la distribución de puntos movida arbitrariamente $0.25h$.

Distribución 2: En el caso de los puntos distribuidos en forma aleatoria se tuvieron resultados de convergencia de la solución son semejantes a los anteriores, mientras que para las derivadas en el FPM la convergencia lograda es semejante a los otros métodos. Por otro lado el SPH desmejora sensiblemente sus prestaciones.

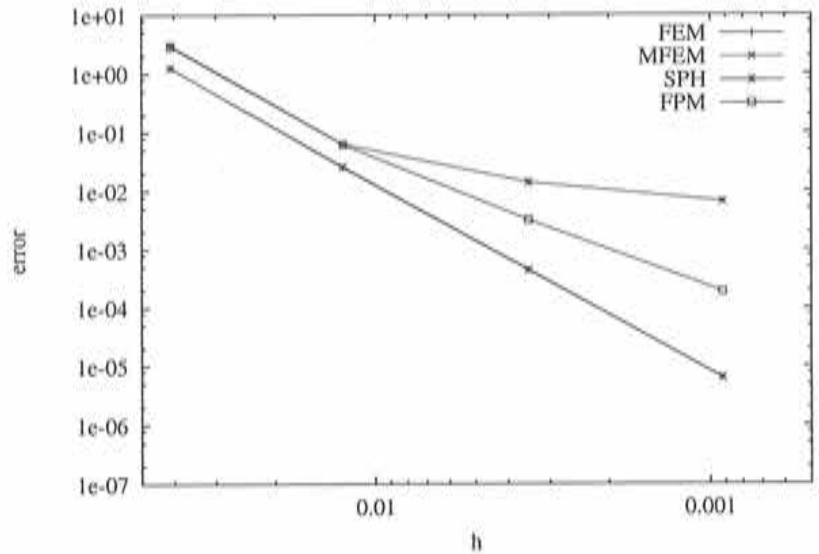


Figura 4.15: Convergencia de la función. Distribución de puntos aleatoria.

Los resultados de las curvas se resumen en el siguiente cuadro:

Método	Función	Derivada x	Derivada y
FEM	2.48	1.32	1.41
MFEM	2.48	1.42	1.39
SPH	1.31	0.75	0.82
FPM	1.95	1.43	1.45

De estos ejemplos se puede concluir que el comportamiento del método de los elementos finitos se pueden considerar muy bueno, ya que los resultados son similares. Además hay que destacar que las otras técnicas presentadas están basadas en formulaciones débiles de Galerkin, lo que conlleva una dificultad adicional a la hora de su implementación.

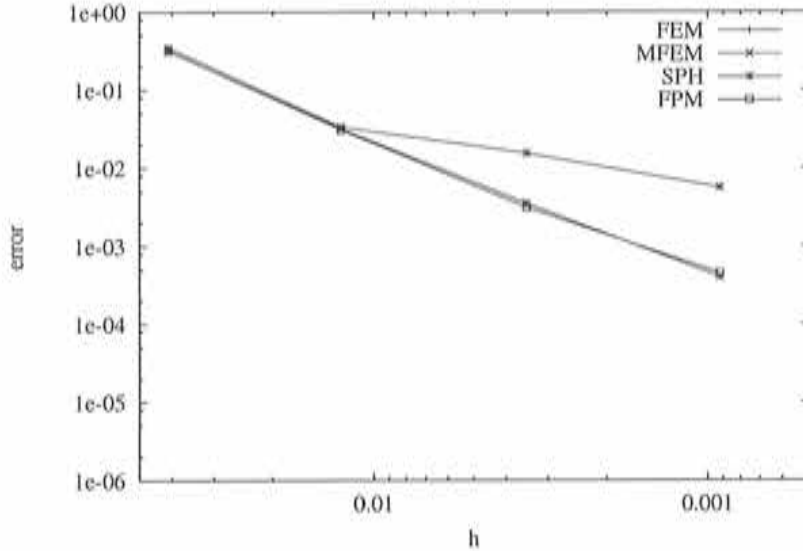


Figura 4.16: Convergencia de las derivadas. Distribución de puntos aleatoria.

4.4.2 Ecuación de difusión con condiciones de Neumann (2D)

Para el estudio de las condiciones de contorno de Neumann tomamos problema de Poisson con $k_x = 1$ y $k_y = 1$ y $Q(x) = 0$. En dos de los contornos imponemos la derivada (Neumann), mientras que en los otros dos restante fijamos el valor de la función (Dirichlet). Este ejemplo fue planteado por Aluru utilizando un método de colocación puntual [ALU 00]. En la figura (4.17) se muestra un esquema con las condiciones de contorno y el dominio.

El problema se plantea mediante:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (4.28)$$

con condiciones de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \phi &= -y^3 && \text{en } \Gamma_u^1 \\ \phi &= -1 - y^3 + 3y^2 + 3y && \text{en } \Gamma_u^2 \end{aligned}$$

y condiciones de Neumann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial n} &= -3x^2 && \text{en } \Gamma_t^1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= -3 + 6x + 3x^2 && \text{en } \Gamma_t^2 \end{aligned}$$

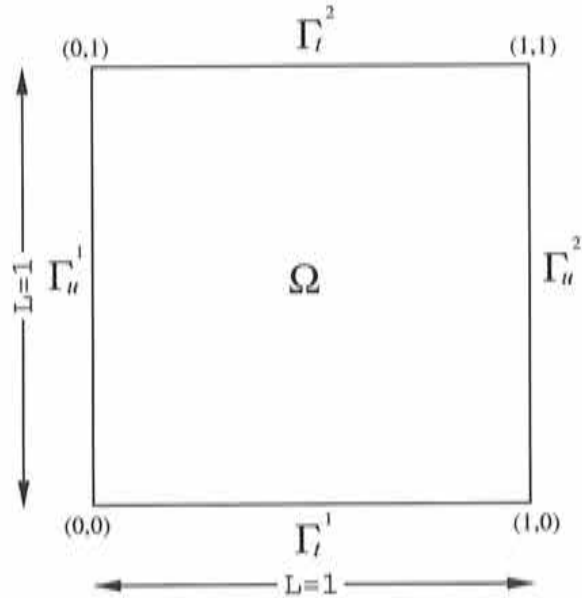


Figura 4.17: Esquema de la geometría y condiciones de contorno.

Como primer punto cabe aclarar que el cálculo de la derivada en la dirección normal se realiza de forma tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = n_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + n_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (4.1)$$

en donde (n_x, n_y) son las componentes del versor normal \mathbf{n} en el punto del contorno y su dirección es saliente respecto del dominio.

El problema planteado de esta forma tiene la misma solución polinómica que el primer ejemplo propuesto,

$$\phi(x, y) = -x^3 - y^3 + 3xy^2 + 3x^2y \quad (4.2)$$

Nuevamente recurrimos a los tres tipos de distribuciones de puntos previamente definidas (**estructurada**, **aleatoria** y **homogénea**), con lo cual, podremos comprobar cómo afectan en la implementación de la condición de contorno en derivada las posiciones de los puntos, a través de la convergencia de la solución.

En la figura (4.18) queda claramente reflejado el deterioro que se produce en la convergencia, si se comparan dichas curvas con las obtenidas para el problema con condiciones de Dirichlet exclusivamente. Por este motivo a continuación se estudiarán algunos métodos que permitan mejorar la aplicación de este tipo de condiciones.

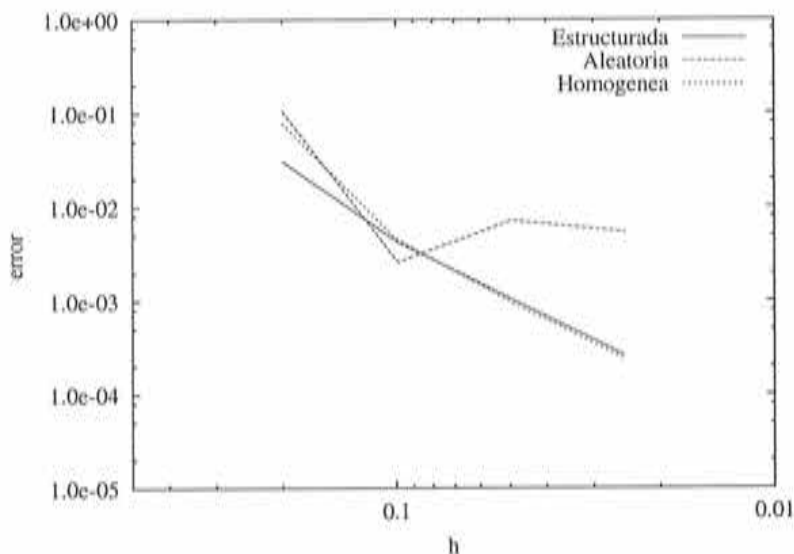


Figura 4.18: Convergencia de la solución para los distintos tipos de distribuciones de puntos.

4.4.3 Implementación de las condiciones de Neumann

Los problemas observados en la convergencia son producidos, sin lugar a dudas, por la forma en que se impone la condición de contorno de Neumann. Estos inconvenientes, ampliamente conocidos en el ámbito de las *Diferencias Finitas*, han dado lugar a una gran cantidad de formulaciones alternativas, como por ejemplo la aproximación mediante volúmenes de control o el método del punto ficticio, entre otros [AND 84].

En esta tesis se contemplaron dos formulaciones que permiten imponer esta clase de condiciones de contorno. La primera solución se plantea desde el punto de vista de la modificación de las funciones de aproximación para que satisfagan, por construcción, dichas condiciones de contorno. En la segunda propuesta se deducirá una forma estabilizada de la condición de contorno de Neumann.

Condición impuesta por construcción

Desarrollamos una función de aproximación a la que se le impone que satisfaga la condiciones de contorno en derivada en un punto determinado. Para ello suponemos que el punto $\mathbf{x}_t \in \Gamma_t$ y tiene una normal \mathbf{n}_t apuntando en dirección saliente respecto al dominio.

La aproximación para dicho punto será:

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T \boldsymbol{\alpha} \quad (4.1)$$

con una base polinómica de orden m ,

$$\mathbf{p}^T = [1, \mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}^m] \quad (4.2)$$

y los respectivos coeficiente

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1}] \quad (4.3)$$

Por otro lado se sabe que el punto \mathbf{x}_i debe satisfacer la condición de contorno:

$$\left. \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x_i} = q_n \quad (4.4)$$

Una vez planteado el problema, el primer paso consiste en escribir la aproximación en un sistema coordenado normal-tangente, lo que simplificará el tratamiento sustancialmente, por lo tanto, tendremos la base polinómica definida mediante

$$\bar{\mathbf{p}}^T = [1, \mathbf{n}, \dots, \mathbf{n}^m] \quad (4.5)$$

y los coeficientes expresados en el nuevo sistema

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = [\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_{m+1}] \quad (4.6)$$

con lo cual la función de aproximación queda expresada como

$$\check{\phi}(\mathbf{n}) = \bar{\mathbf{p}}^T(\mathbf{n}) \bar{\boldsymbol{\alpha}} \quad (4.7)$$

Este cambio del sistema de coordenadas nos permite determinar directamente el coeficiente $\bar{\alpha}_2$, siempre que se utilice el sistema de ejes locales, ya que

$$\left. \frac{\partial \check{\phi}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x_i} = q_n \implies \bar{\alpha}_2 = q_n \quad (4.8)$$

con lo cual el número de coeficientes a determinar ahora será m .

A continuación se procede a plantear el funcional, que tras ser minimizado su forma ponderada, como se expuso en el *Capítulo 2*, nos da como resultado la siguiente expresión ya conocida

$$\mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{B} \phi^h \quad (4.9)$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son matrices que dependen de las coordenadas de los puntos de la nube y de la función de ponderación. Para mostrar el procedimiento seguido para la implementación de la condición de contorno en la función de forma es conveniente escribir (4.39) en su forma matricial de forma que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \sum 1\varphi_{jj}1 & \sum 1\varphi_{jj}n_j & \sum 1\varphi_{jj}n_j^2 & \cdots & \sum 1\varphi_{jj}n_j^m \\ \sum n_j\varphi_{jj}1 & \sum n_j\varphi_{jj}n_j & \sum n_j\varphi_{jj}n_j^2 & \cdots & \sum n_j\varphi_{jj}n_j^m \\ \sum n_j^2\varphi_{jj}1 & \sum n_j^2\varphi_{jj}n_j & \sum n_j^2\varphi_{jj}n_j^2 & \cdots & \sum n_j^2\varphi_{jj}n_j^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum n_j^m\varphi_{jj}1 & \sum n_j^m\varphi_{jj}n_j & \sum n_j^m\varphi_{jj}n_j^2 & \cdots & \sum n_j^m\varphi_{jj}n_j^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\alpha}_3 \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_{m+1} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} 1\varphi_{11} & 1\varphi_{22} & 1\varphi_{33} & \cdots & 1\varphi_{n_p n_p} \\ n_1\varphi_{11} & n_2\varphi_{22} & n_3\varphi_{33} & \cdots & n_{n_p}\varphi_{n_p n_p} \\ n_1^2\varphi_{11} & n_2^2\varphi_{22} & n_3^2\varphi_{33} & \cdots & n_{n_p}^2\varphi_{n_p n_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_1^m\varphi_{11} & n_2^m\varphi_{22} & n_3^m\varphi_{33} & \cdots & n_{n_p}^m\varphi_{n_p n_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^h \\ \phi_2^h \\ \phi_3^h \\ \vdots \\ \phi_{n_p}^h \end{bmatrix} \quad (4.40) \end{aligned}$$

en esta expresión n_j es la coordenada en el nuevo sistema de referencia para el nodo j y φ_{jj} es la función de ponderación evaluada en el mismo punto.

Eliminando del sistema de ecuaciones el coeficiente ya conocido, en este caso $\bar{\alpha}_2$, obtendremos:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \sum 1\varphi_{jj}1 & 0 & \sum 1\varphi_{jj}n_j^2 & \cdots & \sum 1\varphi_{jj}n_j^m \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \sum n_j^2\varphi_{jj}1 & 0 & \sum n_j^2\varphi_{jj}n_j^2 & \cdots & \sum n_j^2\varphi_{jj}n_j^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum n_j^m\varphi_{jj}1 & 0 & \sum n_j^m\varphi_{jj}n_j^2 & \cdots & \sum n_j^m\varphi_{jj}n_j^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\alpha}_3 \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_{m+1} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} 1\varphi_{11} & 1\varphi_{22} & 1\varphi_{33} & \cdots & 1\varphi_{n_p n_p} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n_1^2\varphi_{11} & n_2^2\varphi_{22} & n_3^2\varphi_{33} & \cdots & n_{n_p}^2\varphi_{n_p n_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_1^m\varphi_{11} & n_2^m\varphi_{22} & n_3^m\varphi_{33} & \cdots & n_{n_p}^m\varphi_{n_p n_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^h \\ \phi_2^h \\ \phi_3^h \\ \vdots \\ \phi_{n_p}^h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum 1\varphi_{jj}n_j \\ -1 \\ \sum n_j^2\varphi_{jj}n_j \\ \vdots \\ \sum n_j^m\varphi_{jj}n_j \end{bmatrix} [q_n] \quad (4.41) \end{aligned}$$

donde q_n es el valor al que hemos prescrito la derivada normal. Si representamos las matrices modificadas \mathbf{A} y \mathbf{B} mediante $\tilde{\mathbf{A}}$ y $\tilde{\mathbf{B}}$ respectivamente y con $\tilde{\mathbf{Q}}$ al nuevo término que surge de eliminar el coeficiente conocido podemos escribir la ecuación (4.41) de forma compacta como,

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \tilde{\mathbf{B}}\boldsymbol{\phi}^h - \tilde{\mathbf{Q}}q_n \quad (4.42)$$

a partir de lo que se pueden obtener los coeficiente,

$$\bar{\alpha} = \bar{\mathbf{A}}^{-1} \bar{\mathbf{B}} \phi^h - \bar{\mathbf{A}}^{-1} \bar{\mathbf{Q}} q_n \quad (4.30)$$

lo que podemos escribir como:

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_\phi - \bar{\alpha}_q \quad (4.31)$$

en donde $\bar{\alpha}_\phi$ es la parte de la aproximación que depende de los valores nodales parámetro ϕ^h y $\bar{\alpha}_q$ es un coeficiente constante que depende del valor prescrito o derivada.

Sustituyendo los coeficientes en la expresión en (4.31) tendremos

$$\check{\phi}(\mathbf{n}) = \bar{\mathbf{p}}^T(\mathbf{n}) \bar{\alpha} = \bar{\mathbf{p}}^T(\mathbf{n}) \bar{\alpha}_\phi - \bar{\mathbf{p}}^T(\mathbf{n}) \bar{\alpha}_q \quad (4.32)$$

Finalmente es conveniente reescribir la función de forma en el sistema coordenado global aplicando la transformación adecuada, con lo cual

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \alpha_\phi - \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \alpha_q \quad (4.33)$$

lo que simplificará el posterior tratamiento de las ecuaciones.

Ecuación modificada

Una vez obtenidas las funciones de formas adaptadas al problema que se está tratando el planteamiento varía respecto al planteamiento original en lo que a la condición de contorno respecta. En el dominio interior se procede de la misma forma, planteando (se plantea la forma discreta, donde $\phi(x, y)$ fue reemplazado por $\hat{\phi}(x, y)$

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (4.34)$$

haciendo uso de las funciones de forma calculada según (4.31), simplemente se plantea la misma ecuación que en el dominio interior

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } \Gamma_t \quad (4.35)$$

y finalmente para el contorno de Dirichlet:

$$\hat{\phi} = \phi_p \quad \text{en } \Gamma_u \quad (4.36)$$

aunque esta condición podría ser tratada de la misma forma que la de Neumann.

En la figura (4.19) se pueden observar las curvas de convergencia que se obtienen mediante la formulación previamente expuesta. Las mejoras en la solución quedan claramente reflejadas en el caso de una distribución de puntos **aleatoria**, incluso en los casos de distribuciones de puntos **estructurada** y **homogénea**, que no presentaban problemas de inestabilidad, el error mejora notablemente. Esto nos permite demostrar la efectividad de la formulación propuesta.

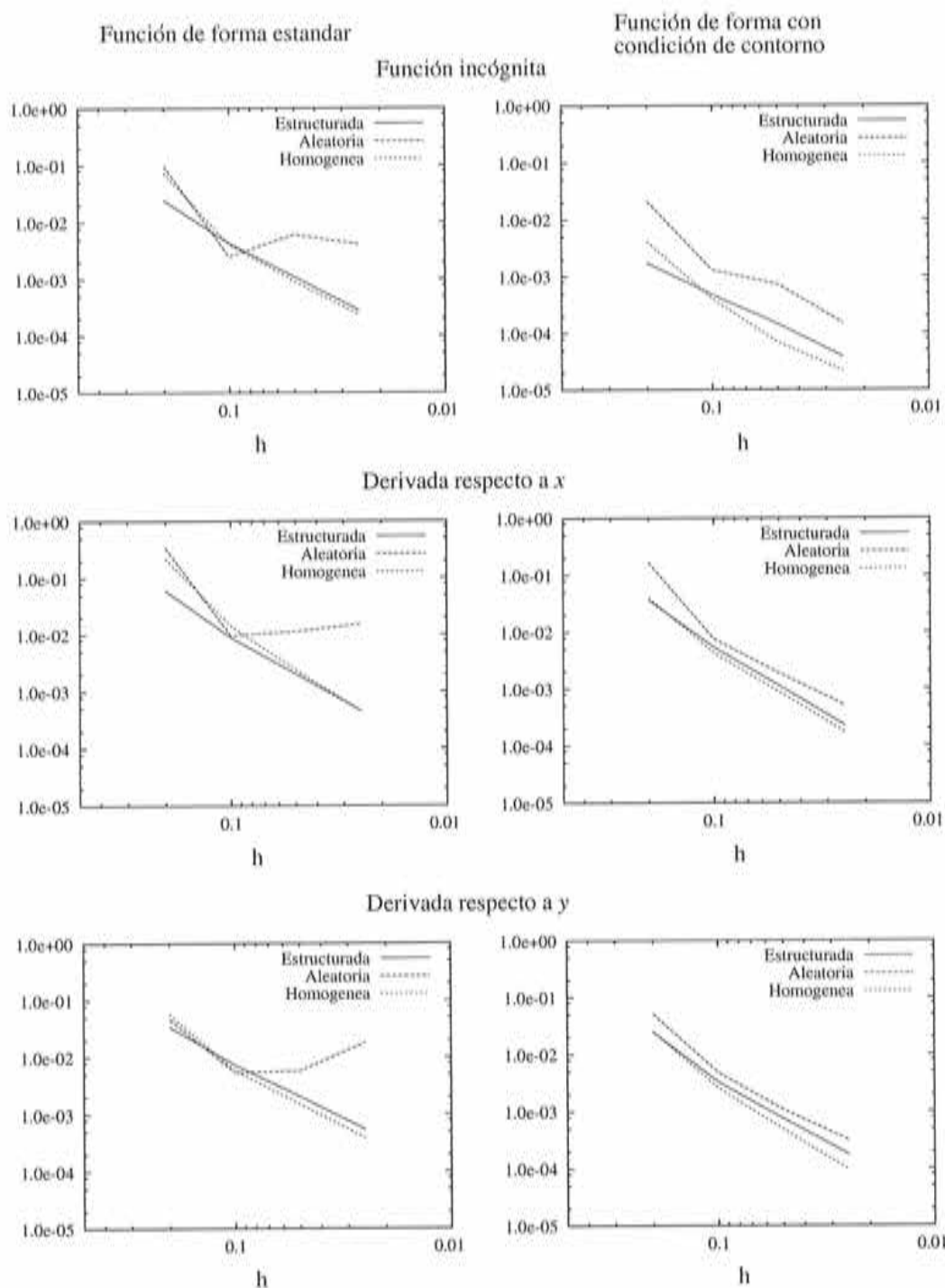


Figura 4.19: Convergencia de la formulación estandar y de la formulación con funciones de forma modificadas en el contorno.

Estabilización de la condición de contorno de Neumann

Si bien la construcción de la función de interpolación con la condición de contorno impuesta dio un excelente resultado, se estudió la aplicación de la técnica de balance de flujos planteado en forma incremental (*Cálculo Finitesimal*), esta alternativa fue planteado en el apartado (3.4.3) para problemas unidimensionales.

Planteando el balance de flujos en un contorno para el problema que ha sido planteado llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} - q_n - \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathbf{n} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] = 0 \quad \text{en } \Gamma_t \quad (4.49)$$

En esta ecuación se pueden reconocer los términos inherentes a la condición de contorno, a los que se le añade un término, en el cual está incluido el residuo de la ecuación definida en el interior del dominio, para simplificar podemos decir que

$$r = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (4.50)$$

con lo cual la ecuación (4.50) se reduce a:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} - q_n - \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \mathbf{n} [r] = 0 \quad \text{en } \Gamma_t \quad (4.51)$$

En el término de estabilización aparece un vector \mathbf{h} cuyas componentes son hn_x y $hn_y = hn_y$ en donde h es una longitud característica del problema, generalmente asociado a las dimensiones de la nube y n_x , n_y son las componentes de \mathbf{n} , vector normal al contorno.

Reemplazando \mathbf{h} por sus componentes en la ecuación (4.50) tendremos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} - q_n - \frac{1}{2} [h n_x^2 + h n_y^2] r = 0 \quad (4.52)$$

y simplificando esta expresión llegamos a la expresión final

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} - q_n - \frac{1}{2} hr = 0 \quad (4.53)$$

En este apartado se derivó la forma estabilizada de la ecuación de contorno para un problema puntual, aunque se puede aplicar a cualquier tipo de problema, la expresión a la que se arriba es la misma, excepto que r dependerá del problema que se está resolviendo [OÑA 96c], [OÑA 97], [OÑA98].

Ecuación modificada

La aplicación del concepto de estabilización lleva a una modificación de las ecuaciones de contorno, con lo cual el nuevo problema discreto planteado varía respecto a las ecuaciones del problema continuo, de forma que:

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (4.55)$$

con las condiciones de Neumann

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} - \frac{h}{2} \left[\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} \right] = q_n \quad \text{en } \Gamma_t \quad (4.56)$$

y las condiciones de Dirichlet

$$\hat{\phi} = \phi_p \quad \text{en } \Gamma_u \quad (4.57)$$

Con la resolución del problema estabilizado se elimina por completo el problema de inestabilidad producido por la imposición de la condición de Neumann, esto resulta especialmente notorio en el caso de la distribución de puntos aleatoria. En la figura (4.20) se muestran las curvas de convergencia para la función y sus derivadas, en donde las mejoras en los resultados quedan claramente reflejadas, para todos los casos presentados.

Comparación de las tres técnicas

Las mejoras logradas a partir de la estabilización de la condiciones de contorno dio un resultado muy similar a los obtenidos mediante la modificación de la función de forma. En el cuadro que se presenta a continuación se hace una comparación de las velocidades de convergencia de la solución y sus derivadas, para los tres esquemas estudiados y las tres distribuciones de puntos que hemos definido antes. Para simplificar la notación identificaremos como: **Estandar** al esquema originalmente planteado; **Modificado** al esquema obtenido mediante la introducción de la condición de contorno en las funciones de forma y **Estabilizado** al esquema estabilizado, resultante de la aplicación de la técnica del *Cálculo Finitesimal*.

	Estandar			Modificado			Estabilizado		
	ϕ	ϕ_x	ϕ_y	ϕ	ϕ_x	ϕ_y	ϕ	ϕ_x	ϕ_y
Estructurada	1.97	2.14	1.89	1.87	2.29	2.09	1.93	2.24	2.11
Aleatoria	-	-	-	1.91	1.90	1.87	1.69	1.92	1.84
Homogénea	2.02	2.44	1.96	1.91	2.33	2.36	1.81	2.33	2.33

Estos valores de la velocidad de convergencia se obtuvieron haciendo una media de las pendientes en cada tramo de la curva.

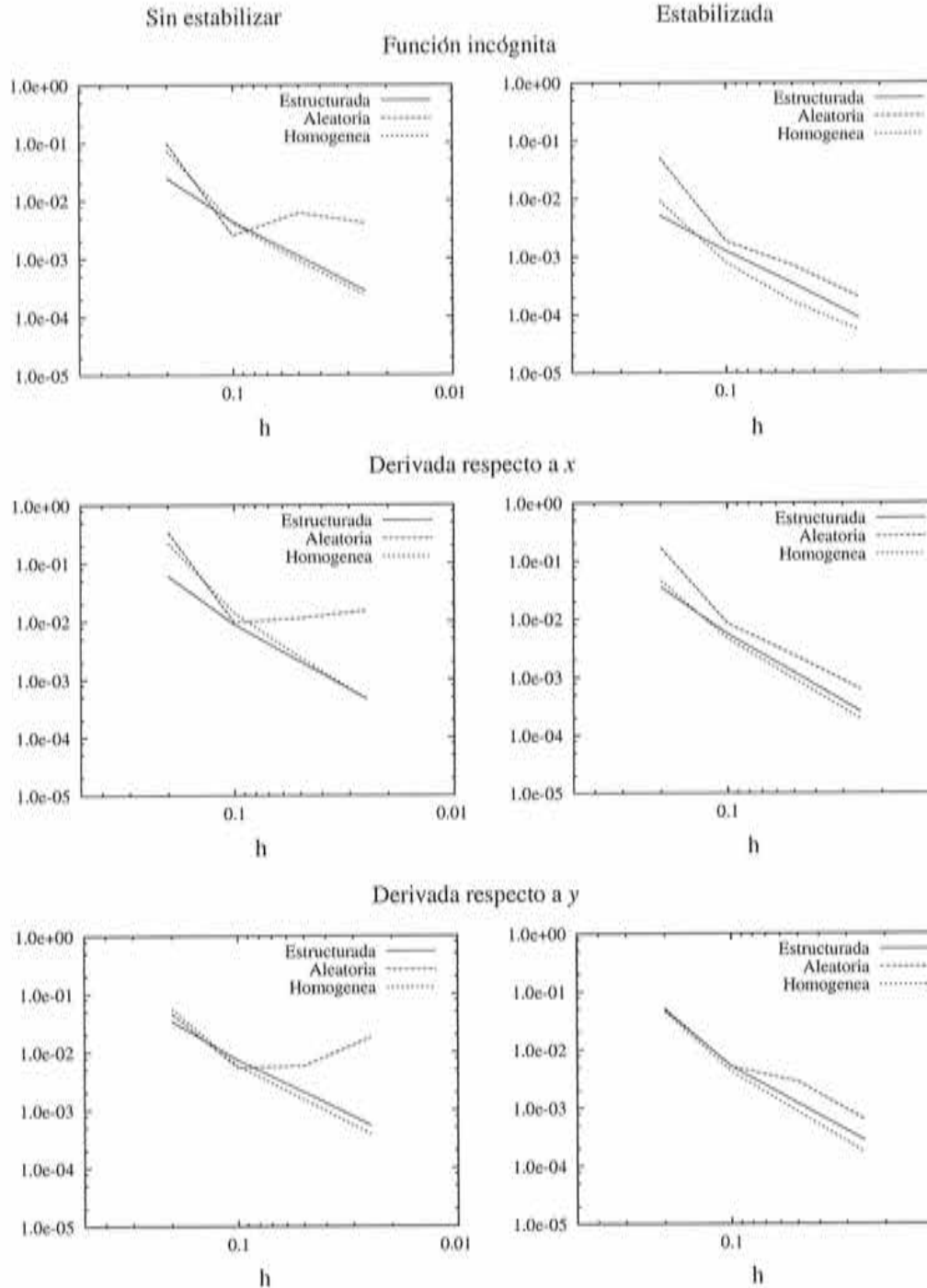


Figura 4.20: Convergencias de la formulación estándar y la formulación estabilizada en el contorno.

4.4.4 Contornos curvos

En el ejemplo presentado previamente las condiciones en derivada se han impuesto sobre contornos sin curvatura, lo que simplifica notablemente el tratamiento del problema. A continuación se presenta un ejemplo en donde la curvatura de un contorno produce importantes gradientes lo que permitirá verificar la eficacia de las dos técnicas presentadas para eliminar la inestabilidad en el contorno.

Para ello se plantea un problema de flujo potencial alrededor de un cilindro [ZIE 89]. En el dominio tendremos

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (4.58)$$

con condiciones de Dirichlet

$$\begin{aligned} \phi &= 0 & \text{en } \Gamma_u^1 \\ \phi &= L & \text{en } \Gamma_u^2 \end{aligned}$$

y condiciones de Neumann

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \Gamma_t$$

En la figura (4.21) se representa esquemáticamente la geometría y las condiciones de contorno.

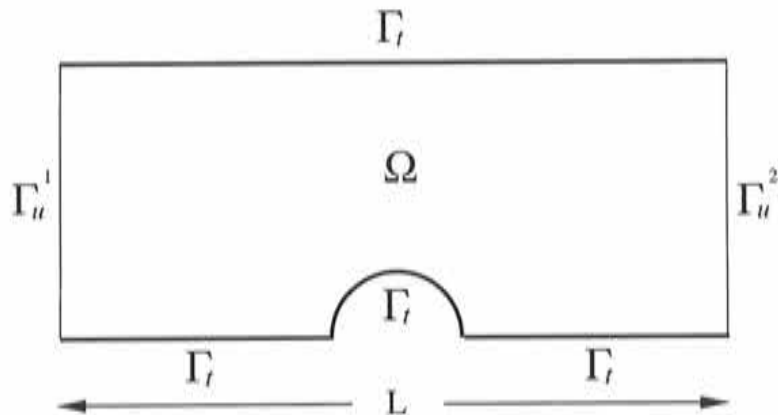


Figura 4.21: Esquema de la geometría y condiciones de contorno para el problema de flujo potencial.

En esta ecuación de flujo potencial la incógnita $\phi(x, y)$ carece de significado físico, sin embargo

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u \quad (4.59)$$

es la velocidad en la dirección x y

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = v \quad (4)$$

es la componente de la velocidad según la dirección y . El problema planteado en esta forma representa un cilindro de longitud infinita sumergido en una corriente uniforme con velocidad $V = (1, 0)$.

Este problema tiene solución analítica, siempre que los contornos del dominio estén lo suficientemente alejados, y dicha solución está dada por

$$\phi(x, y) = c^2 \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + (x - x_1) \quad (4)$$

y sus derivadas

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} = 1 + c^2 \frac{(y - y_0)^2 - (x - x_0)^2}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = -2c^2 \frac{(y - y_0)(x - x_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^2} \quad (4)$$

En estas expresiones (x_0, y_0) son las coordenadas del centro del cilindro y x_1 la posición de contorno en el que se impone la condición $\phi = 0$.

Para la resolución de este problema se usó una distribución de puntos formada por 972 puntos distribuidos de forma homogénea. En la figura (4.22-a) se muestra un detalle de la discretización, mientras que en las figuras (4.22-b), (4.22-c) y (4.22-d) se grafican las isolíneas de velocidad $|V|$, recordemos que

$$|V| = \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2} \quad (4)$$

estos resultados corresponden a los esquemas **estandar**, **estabilizado** y **modificado** respectivamente. En esta figura apelamos simplemente a los valores cualitativos ya que a simple vista se puede apreciar las deficiencias en la aproximación estandar a pesar de usar una distribución de puntos homogénea, que en el ejemplo anterior presentaba dificultades. En cambio los resultados b) y c) se adaptan perfectamente al contorno curvo.

Si bien la discretización usada no es lo suficientemente fina, los errores calculados para la función como para sus derivadas, dejan constancia de las mejoras que producen los dos esquemas propuestos:

	Función	Derivada x	Derivada y
Estandar	1.3×10^{-3}	6.4×10^{-2}	6.8×10^{-1}
Modificado	7.1×10^{-4}	5.7×10^{-3}	5.8×10^{-2}
Estabilizado	7.4×10^{-4}	8.1×10^{-3}	9.2×10^{-2}

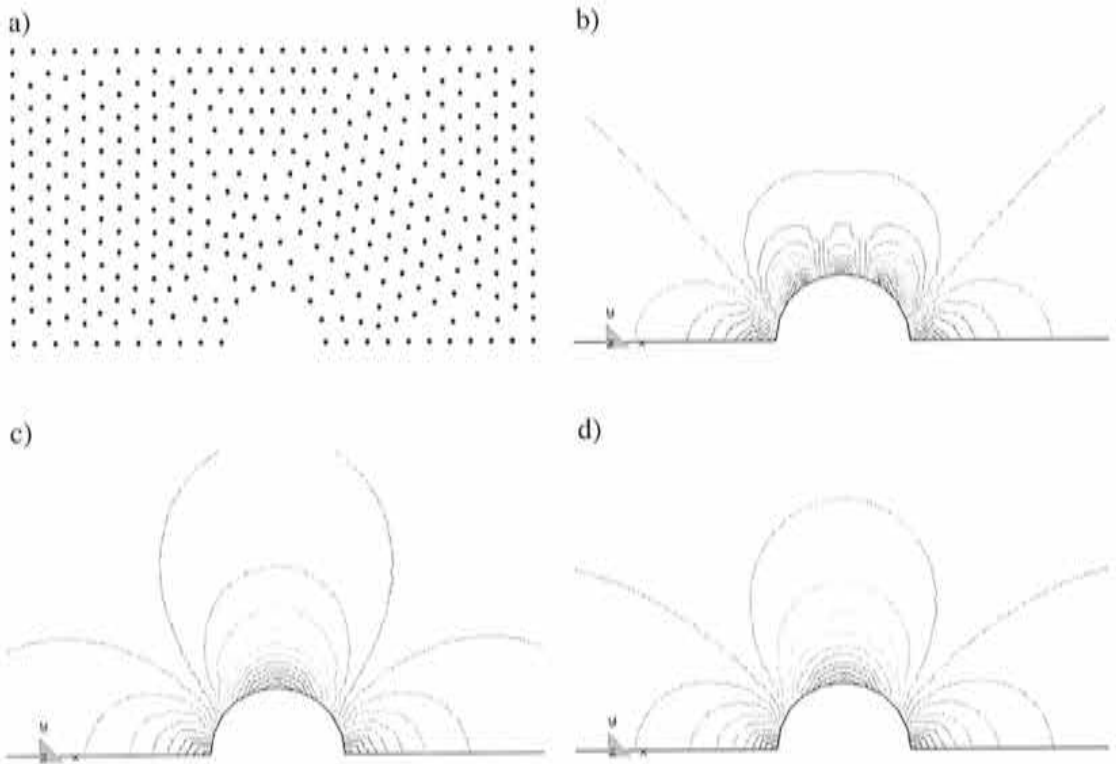


Figura 4.22: Flujo alrededor de un cilindro de longitud infinita. a) detalle de la distribución de puntos; b), c) y d) isoclinas de velocidad.

4.4.5 Refinamiento adaptativo

En los apartados anteriores hemos conseguido disminuir el error global de la aproximación mediante el aumento sistemático del número de puntos distribuidos en todo el dominio. Sin embargo esta estrategia para mejorar el resultado no siempre es la más conveniente, especialmente cuando el error local presenta una disparidad muy notoria entre los distintos puntos. El problema del cilindro sumergido en una corriente uniforme es un ejemplo claro de este tipo de disparidades, ya que los errores más importantes se concentran en la región cercana al cilindro, donde aparecen los mayores gradientes.

El refinamiento adaptativo, que consiste en concentrar puntos en las regiones necesarias, nos permite disminuir el error manteniendo la misma cantidad de puntos. Para comprobar la eficacia del refinamiento adaptativo en el método de *Punto Finito* se resolvió el problema de flujo potencial, discretizado mediante 732 puntos, que en refinamientos sucesivos se fueron concentrando en la región donde el error era mayor.

Para graficar la evolución del error se definió un parámetro que relaciona las distancias entre los puntos contiguos cuya expresión es D_{\min}/D_{\max} en donde

$$D = \min_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n |x_i - x_j| \quad (4.22)$$

y

$$D_{\min}/D_{\max} = \frac{\min(D)}{\max(D)} \quad (4.23)$$

En la figura (4.23) se presentan los resultados obtenidos, haciendo uso de las dos técnicas estudiadas para imponer la condición de contorno de Neumann. Estas gráficas nos permite constatar la efectividad del procedimiento de refinamiento adaptativo. Por otro lado podemos verificar que el comportamiento es similar para tanto para la formulación **estabilizada** como la **modificada**. Esta última apreciación nos da una base sólida para decidir el uso de la formulación estabilizada ya que, computacionalmente es más sencilla de implementar y además resulta más eficiente si tenemos en cuenta el tiempo de cálculo.

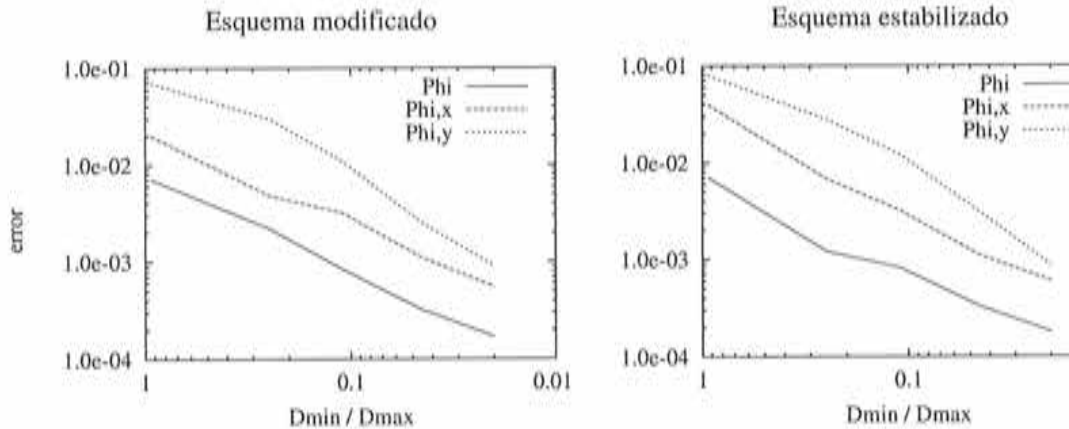


Figura 4.23: Convergencia del método de *Puntos Finitos* ante un refinamiento adaptativo.

4.4.6 Ecuación de convección difusión con convección dominante

En los apartados anteriores hemos realizado un exhaustivo análisis de problemas críticos exclusivamente por el término difusivo de la ecuación de convección difusión. A continuación estudiaremos dicha ecuación en forma completa.

Recordemos que el problema de convección difusión, en un dominio Ω con contornos $\Gamma = \Gamma_u \cap \Gamma_t$, queda definido mediante las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \nabla^T [\mathbf{D}\nabla\phi(\mathbf{x})] - \mathbf{u}^T \cdot \nabla\phi(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{x}) &= 0 && \text{en } \Omega \\ \mathbf{n}^T \cdot \mathbf{D}\nabla\phi(\mathbf{x}) - q_n &= 0 && \text{en } \Gamma_t \\ \phi(\mathbf{x}) - \phi_p &= 0 && \text{en } \Gamma_u \end{aligned} \quad (4.67)$$

Como es conocido, y además ya se mostró para el caso unidimensional, es indispensable encontrar una forma estabilizada de estas ecuaciones para poder resolver problemas con altos números de Peclet.

Estabilización de la convección

El predominio de los términos convectivos por sobre los difusivos trae aparejado problemas de inestabilidad numérica, estos son provocados por los errores que se introducen a través de la discretización (ver apartado (3.4.4)). Este tipo de dificultades, que ya hemos analizado, para problemas unidimensionales también ocurre cuando se trabaja en 2D o 3D. Por este motivo comenzaremos planteando directamente la forma estabilizada, para lo que recurriremos a la técnica del *Cálculo Finitesimal*.

Por simplicidad haremos el planteo en un dominio bidimensional, aunque como se verá, los resultados se pueden extrapolar directamente a problemas 3D.

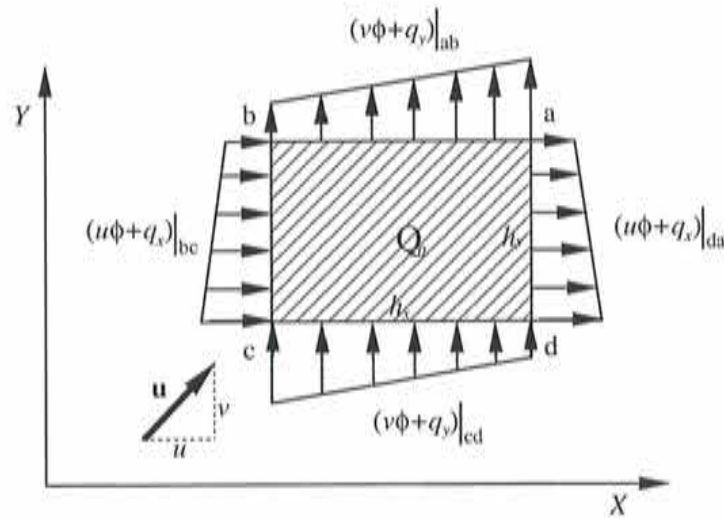


Figura 4.24: Dominio bidimensional para el balance de flujos.

Consideremos un dominio rectangular arbitrario de dimensiones h_x y h_y , como se muestra en la figura (4.24). En este dominio planteamos el balance de flujos, asumiendo que los mismos varían linealmente a lo largo de cada lado.

La ecuación de balance en la dirección x , se expresa de la siguiente forma:

$$\sum \text{flujos } x = \frac{1}{2} [f_x(x_b, y_b) + f_x(x_c, y_c)] h_y - \frac{1}{2} [f_x(x_a, y_a) + f_x(x_d, y_d)] h_y \quad (4)$$

mientras que para la dirección y será:

$$\sum \text{flujos } y = \frac{1}{2} [f_y(x_d, y_d) + f_y(x_c, y_c)] h_x - \frac{1}{2} [f_y(x_b, y_b) + f_y(x_a, y_a)] h_x \quad (4)$$

Suponiendo que el término de fuente varía linealmente en el dominio llegamos

$$\sum \text{fuente} = \frac{1}{4} [Q(x_a, y_a) + Q(x_b, y_b) + Q(x_c, y_c) + Q(x_d, y_d)] h_x h_y \quad (4)$$

En las expresiones anteriores f_x y f_y representan el flujo total, en las direcciones x y y respectivamente. Como los puntos que definen el dominio son arbitrarios podemos expresar un punto de coordenadas (x_a, y_a) directamente como (x, y) , además, de h_x y h_y es posible expresar la posición de los puntos restante en función de (x, y) con lo cual:

$$\begin{aligned} \sum \text{flujos } x &= \frac{1}{2} [f_x(x - h_x, y) + f_x(x - h_x, y - h_y)] h_y - \\ &\quad - \frac{1}{2} [f_x(x, y) + f_x(x, y - h_y)] h_y \end{aligned} \quad (4)$$

de la misma forma

$$\begin{aligned} \sum \text{flujos } y &= \frac{1}{2} [f_y(x, y - h_y) + f_y(x - h_x, y - h_y)] h_x - \\ &\quad - \frac{1}{2} [f_y(x - h_x, y) + f_y(x, y)] h_x \end{aligned} \quad (4)$$

y finalmente,

$$\sum \text{fuente} = Q_0 h_x h_y = Q \left(x - \frac{h_x}{2}, y - \frac{h_y}{2} \right) h_x h_y \quad (4)$$

Una vez obtenidas las expresiones de los flujos y de los términos de fuente planteamos la ecuación de equilibrio, de forma que:

$$\sum \text{flujos } x + \sum \text{flujos } y + \sum \text{fuente} = 0 \quad (4)$$

Expresamos los flujos en los puntos \mathbf{x}_b , \mathbf{x}_c y \mathbf{x}_d mediante una expansión en serie de Taylor entorno al punto \mathbf{x}_a o, lo que es lo mismo, entorno al punto (x, y) , hasta el tercer orden:

$$f(x - h_x, y) = f(x, y) - h_x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + O(h_x^3) \quad (4)$$

$$f(x, y - h_y) = f(x, y) - h_y \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{h_y^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + O(h_y^3) \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} f(x - h_x, y - h_y) &= f(x, y) - h_x \frac{\partial f}{\partial x} - h_y \frac{\partial f}{\partial y} + \\ &+ \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{h_y^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + h_x h_y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + O(h_x^3, h_y^3) \end{aligned} \quad (4.77)$$

y el término de fuente hasta segundo orden:

$$Q\left(x - \frac{h_x}{2}, y - \frac{h_y}{2}\right) = Q(x, y) - \frac{h_x}{2} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{h_y}{2} \frac{\partial Q}{\partial y} + O(h_x^2, h_y^2) \quad (4.78)$$

Reemplazando las expresiones de los flujos desarrolladas serie tendremos que

$$\sum \text{flujos } x = -h_y h_x \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{1}{2} h_y h_x^2 \frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2} + h_x h_y^2 \frac{\partial^2 f_x}{\partial x \partial y} \quad (4.79)$$

$$\sum \text{flujos } y = -h_y h_x \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{1}{2} h_x h_y^2 \frac{\partial^2 f_y}{\partial y^2} + h_y h_x^2 \frac{\partial^2 f_y}{\partial x \partial y} \quad (4.80)$$

y para el término de fuente

$$\sum \text{fuente} = h_x h_y Q - \frac{1}{2} h_y h_x^2 \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{2} h_x h_y^2 \frac{\partial Q}{\partial y} \quad (4.81)$$

sustituyendo (4.79), (4.80) y (4.81) en (4.74) llegamos a

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial f_x}{\partial x} - \frac{\partial f_y}{\partial y} + Q + \\ & + \frac{1}{2} h_x \frac{\partial^2 f_x}{\partial x^2} - \frac{1}{2} h_x \frac{\partial Q}{\partial x} + h_y \frac{\partial^2 f_x}{\partial x \partial y} + h_x \frac{\partial^2 f_y}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} h_y \frac{\partial^2 f_y}{\partial y^2} - \frac{1}{2} h_y \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (4.82)$$

Teniendo en cuenta que $f_x = u\phi + q_x$ y $f_y = v\phi + q_y$ arribamos a la siguiente expresión:

$$\nabla^T \cdot [\mathbf{u}\phi] + \nabla^T \cdot \mathbf{q} - Q - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) [\nabla^T \cdot [\mathbf{u}\phi] + \nabla^T \cdot \mathbf{q} - Q] = 0 \quad (4.83)$$

donde $\mathbf{u} = [u, v]^T$, $\mathbf{q} = [q_x, q_y]$ y $\mathbf{h} = [h_x, h_y]$.

Por otro lado, aplicando la Ley de Fourier para flujos

$$\mathbf{q} = -\mathbf{D}\nabla\phi \quad (4.84)$$

donde \mathbf{D} es la matriz de difusión (ver ecuación (4.17)). Introduciendo la expresión anterior en la ecuación (4.83) llegamos a:

$$\begin{aligned} & \nabla^T \cdot [\mathbf{u}\phi] - \nabla^T [\mathbf{D}\nabla\phi] - Q - \\ & - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) [\nabla^T \cdot [\mathbf{u}\phi] - \nabla^T [\mathbf{D}\nabla\phi] - Q] = 0 \end{aligned} \quad (4.84)$$

en la primer término se puede reconocer fácilmente la ecuación de convección estabilizada, por lo tanto si llamamos a:

$$r = \nabla^T \cdot [\mathbf{u}\phi] - \nabla^T [\mathbf{D}\nabla\phi] - Q \quad (4.85)$$

la forma estabilizada se puede escribir en forma compacta como:

$$r - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) r = 0 \quad (4.86)$$

Si observamos el resultado al que llegó para el problema unidimensional en la página (69) vemos que la expresión es la misma, lo que cambia en su aplicación es el cálculo del residuo.

Cálculo de las longitudes características

A pesar de que la ecuación estabilizada es consistente, ya que si ϕ es solución de la ecuación original, lo es también del problema estabilizado, es necesario hacer una correcta selección de las longitudes características \mathbf{h} para que la solución del problema discreto sea óptima.

Para la definición de dicha longitud característica nos basamos en los resultados unidimensionales, donde la longitud característica es definida siguiendo la dirección de flujo, con lo cual tendremos que

$$\mathbf{h} = 2\tau\mathbf{u} \quad (4.87)$$

En esta expresión se introdujo un parámetro τ , al que denominamos tiempo inercial seco. Este parámetro, que se define como:

$$\tau = \frac{\alpha \bar{h}}{2|\mathbf{u}|} \quad (4.88)$$

con lo cual:

$$\mathbf{h} = \frac{\alpha \bar{h}}{|\mathbf{u}|} \mathbf{u} \quad (4.89)$$

En esta última expresión se introdujo α que es una función que depende del número de Peclet y \bar{h} es una longitud que se define geoméricamente en cada r

En los problemas planteados en este trabajo se definió como \bar{h} a la distancia entre el punto estrella y el punto más cercano dentro de la misma nube.

La asunción de que la longitud característica \mathbf{h} se defina en la dirección de la velocidad \mathbf{u} es válido para casos en que la solución del problema ϕ es suave [HUG 86b] [HUG 89], sin embargo, no siempre es posible asegurar que la solución cumpla dicho requisito cuando estamos en presencia de gradientes importantes, como choques o capa límite. En general esta deficiencia en la estabilización se corrige mediante el añadido de un término en la dirección del gradiente de la incógnita ($\nabla\phi$).

Basándonos en la técnica de captura de choque (*shock capturing*) descomponemos la longitud característica en dos términos, uno que dependerá de la velocidad y el otro del gradiente de la incógnita, de forma que ahora

$$\mathbf{h} = k_1 \mathbf{u} + k_2 \mathbf{u}_t \quad (4.91)$$

donde \mathbf{u}_t se define de la siguiente forma,

$$\mathbf{u}_t = \frac{r(\phi)}{|\nabla\phi|^2} \nabla\phi \quad (4.92)$$

y tiene las características de un vector velocidad, pero su dirección viene dada por $\nabla\phi$.

Los valores de k_1 y k_2 se definen mediante

$$k_1 = \frac{\alpha' \bar{h}}{|\mathbf{u}|} \text{ y } k_2 = \frac{\beta' \bar{h}}{|\mathbf{u}_t|} \quad (4.93)$$

con lo cual el parámetro de estabilización finalmente es

$$\mathbf{h} = \frac{\alpha' \bar{h}}{|\mathbf{u}|} \mathbf{u} + \frac{\beta' \bar{h}}{|\mathbf{u}_t|} \mathbf{u}_t \quad (4.94)$$

Reemplazando \mathbf{h} en (4.87) obtenemos la expresión estabilizada;

$$r - \frac{1}{2} \frac{\alpha' \bar{h}}{|\mathbf{u}|} \mathbf{u} \cdot \nabla r - \frac{1}{2} \frac{\beta' \bar{h}}{|\mathbf{u}_t|} \mathbf{u}_t \cdot \nabla r = 0 \quad (4.95)$$

Analizando la expresión obtenida hay que destacar que el problema equivalente que se obtiene ya no es lineal, debido a que \mathbf{u}_t depende de ϕ . Las funciones α' y β' se determinaron basándonos en el trabajo de Codina [COD 93b] en el cual sus expresiones son:

$$\alpha' = \alpha'(\gamma) = \begin{cases} |\gamma| > 1 \\ |\gamma| < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{3} & |\gamma| \leq 3 \\ 1 & |\gamma| > 3 \\ \frac{2}{3} & \end{cases} \quad (4.96)$$

$$\beta' = \beta'(\gamma_t) = \max\left(0, 0.7 - \frac{1}{\gamma_t}\right) \quad (4)$$

en donde γ_t es el número de Peclet calculado con \mathbf{u}_t .

Ejemplos

A continuación se presentan varios ejemplos par mostrar el comportamiento de la formulación estabilizada a la que hemos arribado utilizando el *Cálculo Finitesimil*. La aproximación se realizó con funciones de forma cuadráticas ponderadas media una función de Gauss.

Problema 1

El primer problema que se plantea es una extensión del problema unidimensional presentado en (3.55) cuya representación esquemáticamente se puede ver en la figura (4.25).

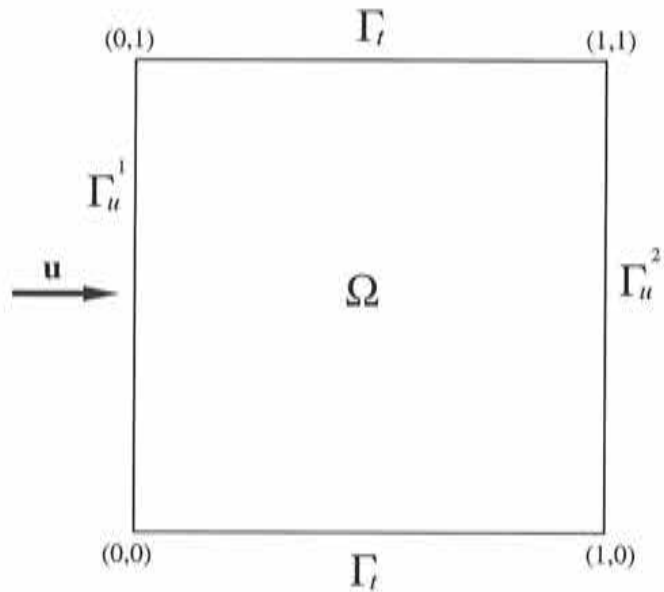


Figura 4.25: Esquema del dominio y las condiciones de contorno.

Este problema queda definido mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$-u \frac{\partial \phi}{\partial x} - v \frac{\partial \phi}{\partial y} + k \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (4)$$

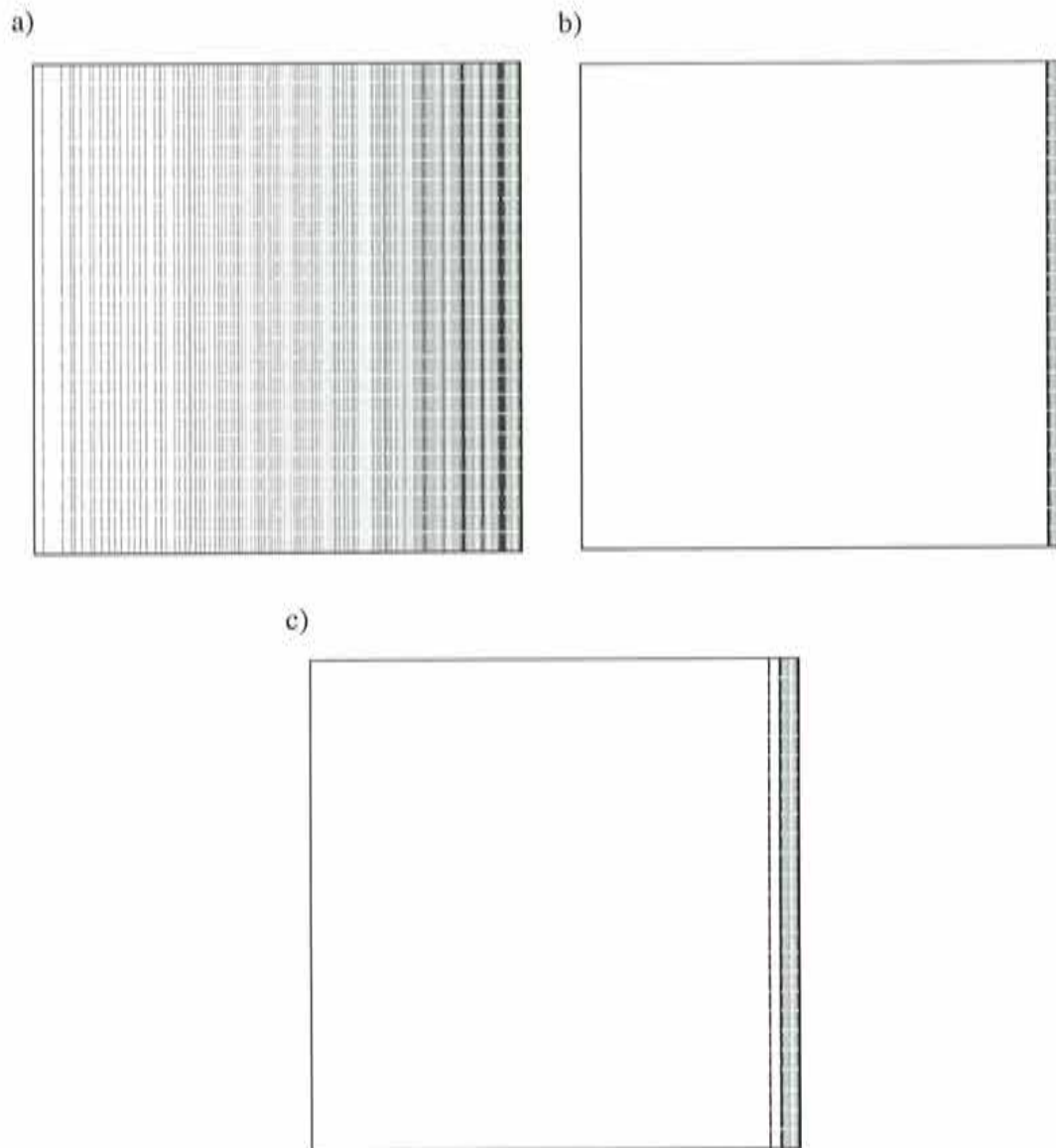


Figura 4.26: Resultados del problema 1, isolneas de ϕ para a) esquema sin estabi b) estabilización en la dirección de las líneas de corriente y c) estabilización en dire del fluido y del gradiente.

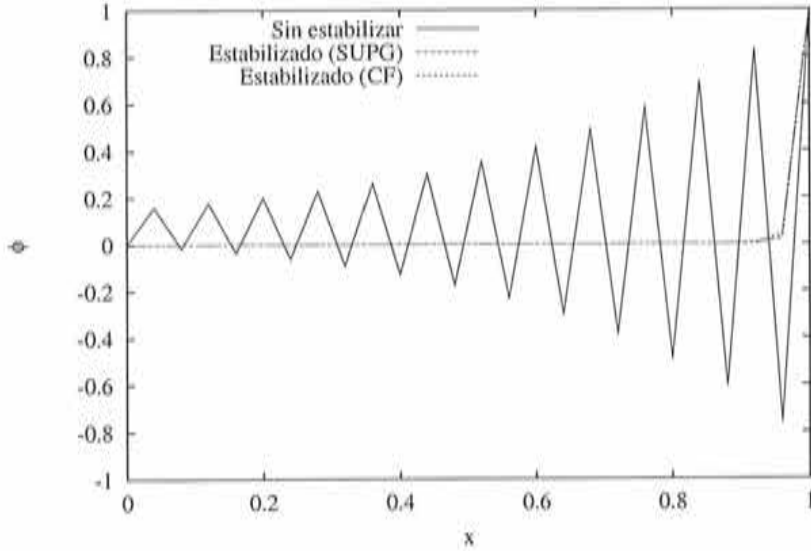


Figura 4.27: Resultados del problema 1, comparación de los resultados obtenidos para los distintos esquemas, graficados en un corte en dirección x .

y las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \phi &= 0 && \text{en } \Gamma_u^1 \\ \phi &= 1 && \text{en } \Gamma_u^2 \end{aligned} \quad (4.102)$$

Para la resolución del problema se usó una distribución de puntos uniforme de 30×30 . El vector velocidad se define como $\mathbf{u} = [\cos(\theta), -\sin(\theta)]$ con $\theta = \arctan(2)$, mientras que la constante de difusión $k = 1e^{-6}$.

Los resultados que se obtienen sin usar ningún tipo de estabilización son completamente oscilatorios, por este motivo no se presenta. En las figuras (4.29) y (4.30) se pueden ver los resultados obtenidos con la formulación estabilizada únicamente en la dirección del fluido, de las mismas se desprende que la estabilización introducida no es suficiente para eliminar las oscilaciones en la dirección x , lo que se puede apreciar más claramente en las curvas de la figura (4.30).

El añadido de la estabilización en la dirección del gradiente eliminó las oscilaciones y por otro lado, no afectó la solución en las zonas en la que la misma era correcta lo que se puede observar en las figuras (4.31) y (4.32).

La aplicación de la estabilización se realizó en forma iterativa; en un primer paso se calculamos ϕ usando simplemente la estabilización en la dirección del fluido, con este resultado se calculó \mathbf{u}_t y β' y con estos valores se vuelve a resolver el problema. En este caso se llegó al resultado final en 3 iteración.

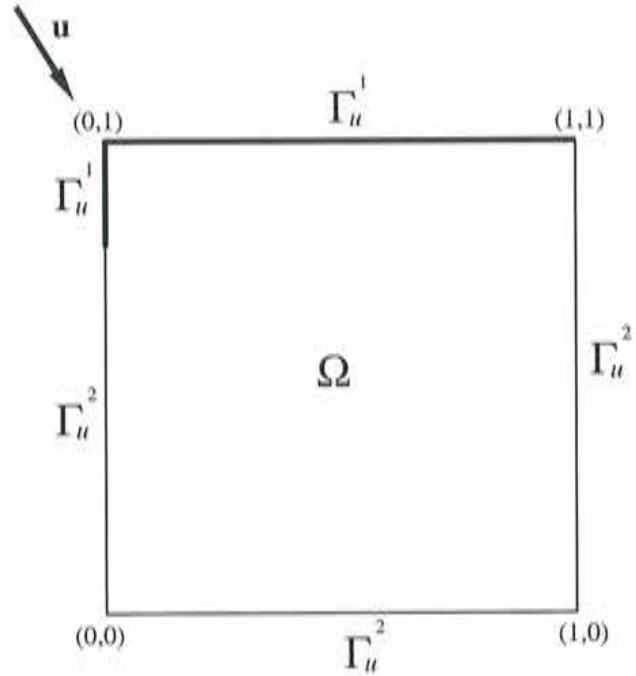


Figura 4.28: Esquema del dominio y de las condiciones de contorno.

4.4.7 Esquema estabilizado de orden superior

La obtención de un esquema de estabilización de mayor orden se puede realizar simplemente desarrollando la expresión de los flujos en serie de Taylor de mayor orden ([OÑA 96c]). Otra opción para obtener este tipo de esquema se basa en tomar la ecuación estabilizada como una ecuación de balance mejorada. De esta forma obtendremos un residuo r^1 (lo denominamos residuo mejorado) cuya expresión será:

$$r^1 = r - \frac{1}{2} (\mathbf{h}' \cdot \nabla) r \quad (4.103)$$

Una vez calculado este residuo se vuelve a aplicar la técnica de estabilización en forma tal que:

$$r^1 - \frac{1}{2} (\mathbf{h}'' \cdot \nabla) r^1 = 0 \quad (4.104)$$

reemplazando (4.103) en (4.104) llegamos a

$$r - \left[\frac{1}{2} (\mathbf{h}' \cdot \nabla) - \frac{1}{4} (\mathbf{h}'' \cdot \nabla) (\mathbf{h}' \cdot \nabla) \right] r = 0 \quad (4.105)$$

Suponiendo que los vectores \mathbf{h}' y $\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{h}'' \cdot \mathbf{h}'$ tienen un valor constante dentro de la nube; para un problema bidimensional tendremos que la nueva forma estabilizada

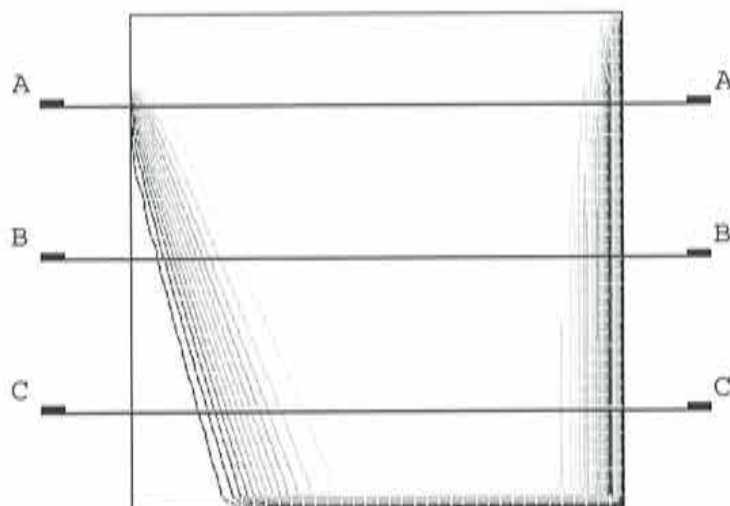


Figura 4.29: Resultados del problema 2. Isolneas de ϕ , estabilizada en la dirección de las líneas de corriente.

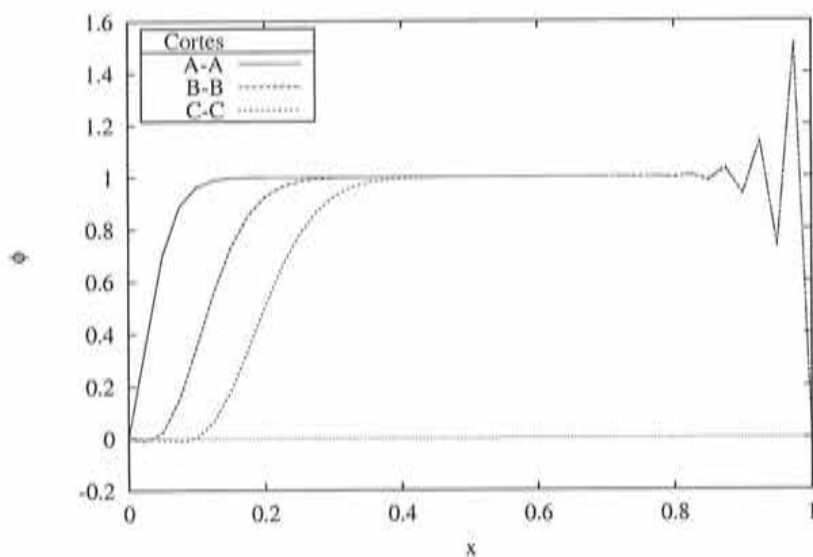


Figura 4.30: Resultados del problema 2. Curvas realizadas a lo largo de los cortes A-A, B-B y C-C.

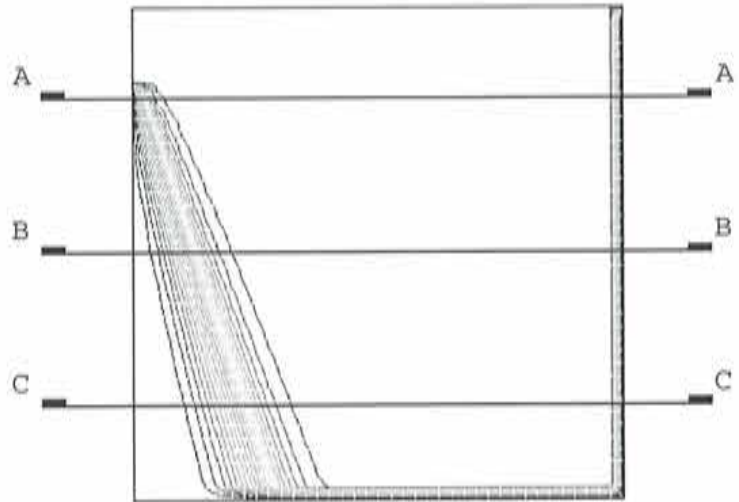


Figura 4.31: Resultados del problema 2. Isolíneas de ϕ , estabilizado en la dirección de las líneas de corriente y del gradiente de la incógnita.

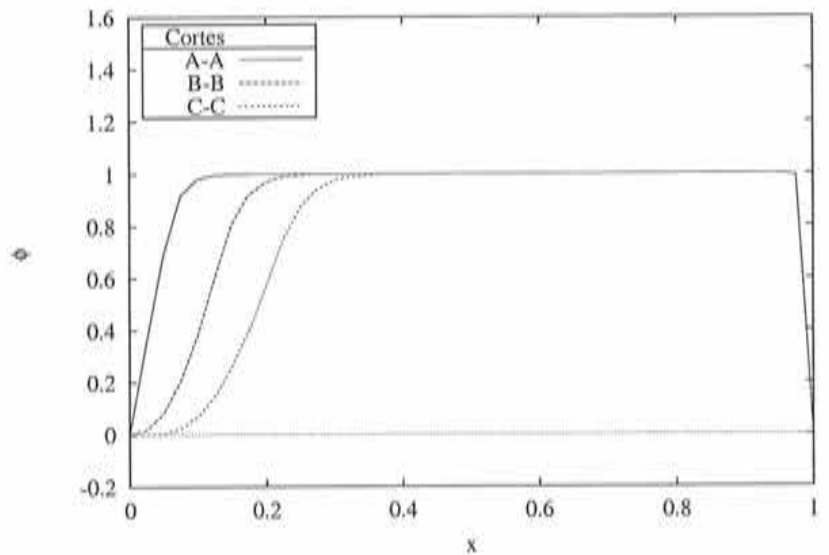


Figura 4.32: Resultados del problema 2. Curvas graficadas a lo largo de los cortes A-A, B-B y C-C.

se expresa como:

$$r - \left[\frac{h_x}{2} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{h_y}{2} \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\hat{h}_x^2}{4} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \frac{\hat{h}_x \hat{h}_y}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} - \frac{\hat{h}_y^2}{4} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (4.106)$$

Seguendo el procedimiento expuesto previamente es posible obtener esquemas estabilizados de órdenes superiores. Este tipo de estabilización se utiliza en las ecuaciones de Navier Stokes que se presentarán en el *Capítulo 5*.

4.4.8 Ecuación de convección difusión transitoria

Hasta este punto hemos estudiado el fenómeno de convección difusión en su forma estacionaria, osea dejando de lado cualquier variación de las incógnitas con respecto al tiempo. En general la mayoría de los problemas de fluidomecánica que se abordarán más adelante tienen soluciones transitorias, por este motivo se introducirá el tiempo para analizar el tratamiento del mismo.

Teniendo en cuenta que nuestro problema de convección difusión depende de t debemos reescribir su expresión,

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla^T [\mathbf{D} \nabla \phi(\mathbf{x}, t)] + \mathbf{u}^T \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}, t) + Q(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (4.107)$$

con condiciones de contorno de Neumann

$$\mathbf{n}^T \cdot \mathbf{D} \nabla \phi(\mathbf{x}, t) - q_n = 0 \quad \text{en } \Gamma_t \quad (4.108)$$

y condiciones de Dirichlet

$$\phi(\mathbf{x}, t) - \phi_p = 0 \quad \text{en } \Gamma_u \quad (4.109)$$

Cuando se plantea el problema transitorio, además de las condiciones de contorno, es necesario definir las condiciones iniciales del problema

$$\phi(\mathbf{x}, t^0) = \phi^0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \cup \Gamma_t \cup \Gamma_u \quad (4.110)$$

en el problema transitorio todos los parámetros y constante que aparecen en esta ecuación y sus condiciones de contorno pueden ser función del tiempo.

Existen diversas técnicas para abordar la discretización temporal de este problema, y en nuestro caso hemos optado por la forma más clásica, que consiste en utilizar un esquema en diferencias, de forma que:

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = \theta r^{n+1} + (1 - \theta) r^n \quad (4.111)$$

donde $\phi^n = \phi(\mathbf{x}, t^n)$, $r^n = r[\phi(\mathbf{x}, t^n)]$, $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ y θ es un parámetro con el cual se pueden obtener distintos esquemas de discretización temporal. Los valores más habituales son 0, 1/2 o 1, que corresponden a un esquema de Euler hacia atrás, Crank Nicholson y Euler hacia adelante respectivamente. Estos esquemas ofrecen características de aproximación distintas, obteniéndose para $\theta = 1/2$ el menor orden de aproximación $O(\Delta t^2)$, como contrapartida el esquema resultante es explícito. Con el método de Euler hacia atrás (*backward Euler*) $\theta = 0$ el error de aproximación es mayor, siendo el mismo $O(\Delta t)$, pero el esquema resultante es implícito, motivo por el cual resulta muy atractivo. Finalmente tenemos el esquema de Euler hacia adelante (*forward Euler*) que es de orden $O(\Delta t)$ y además el esquema resultante es explícito, con lo cual no presenta ningún tipo de ventaja frente a los otros dos. La diferencia muy importante entre los dos primeros esquemas radica en que mientras el primero es incondicionalmente estable, en el Euler hacia atrás la estabilidad depende del paso de tiempo con el que se avanza. Por este motivo es necesario calcular el incremento de tiempo de forma que garantice la estabilidad numérica del esquema.

La ventaja que implica obtener un esquema implícito dio lugar a la elección del método de Euler hacia atrás, con lo cual la forma discreta se expresa como:

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = -\mathbf{u}^T \cdot \nabla \phi^n + \nabla^T [\mathbf{D} \nabla \phi^n] - Q \quad \text{en } \Omega \quad (4.112)$$

Mientras que las condiciones de contorno

$$\mathbf{n}^T \cdot \mathbf{D} \nabla \phi^n - q_n = 0 \quad \text{en } \Gamma_t \quad (4.113)$$

y

$$\phi^{n+1} - \phi_p = 0 \quad \text{en } \Gamma_u \quad (4.114)$$

donde el superíndice n implica que la incógnita está evaluada en el instante de tiempo t^n . Como ya se dijo Q , q_n y ϕ_p pueden ser funciones del tiempo, con lo cual se deberían evaluar en t^n .

Discretización

Aplicando la técnica de *Puntos Finitos* aproximamos las incógnitas del problema transitorio mediante

$$\phi^n \cong \hat{\phi}^n = \sum_{j=1}^n N_j^i(\mathbf{x}) (\phi_j^h)^n \quad (4.115)$$

como se puede ver en la aproximación propuesta la dependencia del tiempo está reflejada en los parámetros de la aproximación, siendo las funciones de forma dependientes del espacio. Sustituyendo (4.115) en (4.112) tendremos:

$$\frac{\hat{\phi}^{n+1} - \hat{\phi}^n}{\Delta t} = -\mathbf{u}^T \cdot \nabla \hat{\phi}^n + \nabla^T [\mathbf{D} \nabla \hat{\phi}^n] - Q + TE^n \quad \text{en } \Omega \quad (4.116)$$

En la ecuación (4.116) TE^n contiene los términos provenientes de estabilización evaluados en el instante t^n , y su expresión es

$$TE^n = -\frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \left[\frac{\partial \hat{\phi}^n}{\partial t} + \mathbf{u}^T \cdot \nabla \hat{\phi}^n - \nabla^T [\mathbf{D} \nabla \hat{\phi}^n] - Q \right]^n \quad (4.117)$$

Oñate ha demostrado que aplicando el concepto de balance de flujos dentro de un dominio finito, y teniendo en cuenta las variaciones con respecto al tiempo se obtiene la misma expresión para los términos de estabilización que en el problema estacionario siempre que redefinamos el residuo de forma que

$$\bar{r} = \frac{\partial \hat{\phi}^n}{\partial t} + r \quad (4.118)$$

con lo cual la ecuación transitoria estabilizada se escribe de forma que

$$\bar{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{h} \cdot \nabla) \bar{r} = 0 \quad (4.119)$$

Estabilización de la condición de Neumann

Las expresión de la condición de contorno de tipo Neumann estabilizada se puede derivar aplicando el balance de flujos en un contorno [OÑA98] y la expresión resultante es la misma que se obtiene para el problema estacionario con el añadido del término de la derivada temporal; de forma que

$$\frac{\hat{\phi}^{n+1} - \hat{\phi}^n}{\Delta t} = -\mathbf{u}^T \cdot \nabla \hat{\phi}^n + \nabla^T [\mathbf{D} \nabla \hat{\phi}^n] - Q - \frac{h}{2} [\mathbf{n}^T \cdot \mathbf{D} \nabla \hat{\phi}^n - q_n] \quad \text{en } \Gamma_t \quad (4.120)$$

Finalmente la condiciones de contorno de Dirichlet se impone impone en forma fuerte en el paso de tiempo t^{n+1} de forma que:

$$\hat{\phi}^{n+1} = \phi_p \quad \text{en } \Gamma_u \quad (4.121)$$

La discretización del problema nos lleva a un sistema de ecuaciones cuya expresión es

$$\mathbf{M} (\phi^h)^{n+1} = \mathbf{f}^n \quad (4.122)$$

Con la aplicación de otros métodos como *FEM*, *FV* o *FD* se llega a una expresión similar, y para que el esquema de resolución resulte implícito se diagonaliza la matriz \mathbf{M} . En el método de *Puntos Finitos* no es posible realizar dicha diagonalización debido a que los valores de los parámetros $(\phi^h)^n$, no coinciden con los valores nodales $\hat{\phi}^n$. En caso de diagonalizar la matriz estaríamos imponiendo que

$(\phi^h)^n = \hat{\phi}^n$ lo cual puede conducir a importantes errores. Por lo tanto, el sistema (4.122) debe ser resuelto en forma explícita. Afortunadamente el sistema resultante es definido positivo y diagonalmente dominante, características que le permiten ser resuelto mediante unas pocas iteraciones del método de Gauss-Seidel, siendo el costo computacional muy bajo.

Evaluación del paso de tiempo

El esquema de Euler hacia atrás es condicionalmente estable, por lo tanto para garantizar la convergencia del mismo el paso de tiempo Δt debe satisfacer la condición de estabilidad. Dicha condición viene dada a través de $\Delta t \leq \Delta t_c$, siendo Δt_c el incremento de tiempo crítico (límite de la estabilidad). El valor de este paso de tiempo crítico se puede obtener a partir de la ecuación de *CD* unidimensional [COD 9]. De dicho análisis se deriva la siguiente expresión:

$$\Delta t = F_s \cdot \Delta t_c = \frac{F_s}{2 \left(\frac{4k}{h^2} + \frac{|u|}{h} \right)} \quad (4.123)$$

donde $|u|$ es la velocidad de transporte, k es el coeficiente de difusión y h es la distancia entre puntos. Este incremento de tiempo se calcula para cada punto y como paso de tiempo global se elige el menor de los incrementos locales. El factor de seguridad F_s se introduce para garantizar que en ningún punto se alcance el límite de estabilidad, ya que la expresión del Δt_c es una mera extrapolación del análisis unidimensional. En los problemas resueltos en esta tesis utilizamos $F_s \cong .8$.

Ejemplo

A continuación se presenta el **problema 2** resuelto en el apartado anterior (página (119)) pero en forma transitoria, con lo cual el problema

$$\phi^{n+1} = \phi^n - \Delta t \left[u \frac{\partial \phi}{\partial x} v \frac{\partial \phi}{\partial y} - k \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] \right]^n \quad \text{en } \Omega \quad (4.124)$$

las condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} &= 0 & \text{en } \Gamma_u^1 \\ \phi^{n+1} &= 1 & \text{en } \Gamma_u^2 \end{aligned} \quad (4.125)$$

Al ser un problema transitorio es necesario definir lo que denominamos las condiciones iniciales, para lo cual tomamos

$$\phi^0(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (4.126)$$

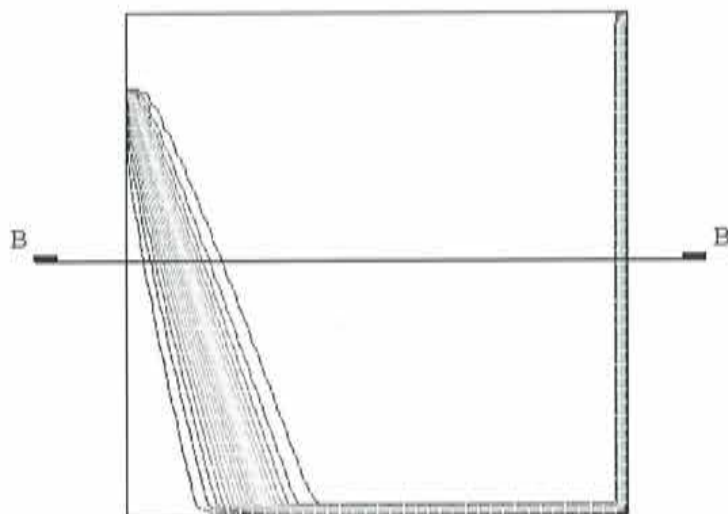


Figura 4.33: Isolneas de ϕ obtenidas con un esquema de resolución transitorio.

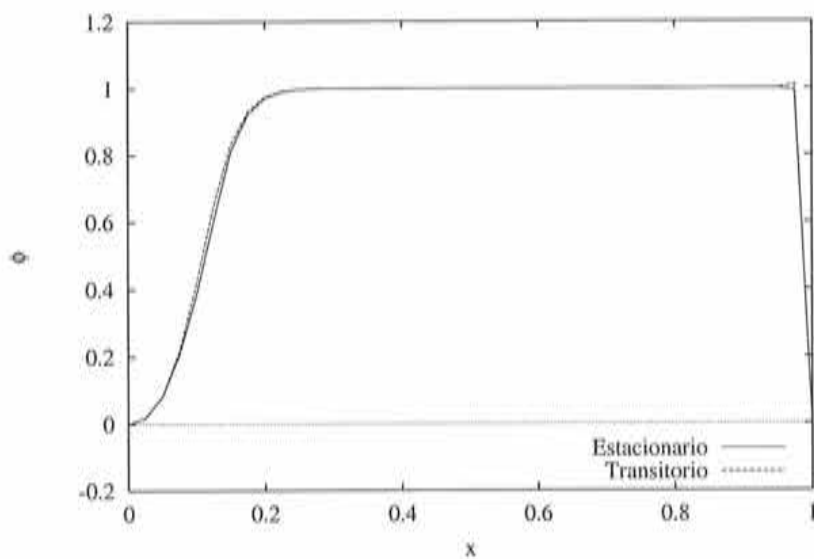


Figura 4.34: Comparación de los resultados estacionario y el transitorio a lo largo del corte B-B.

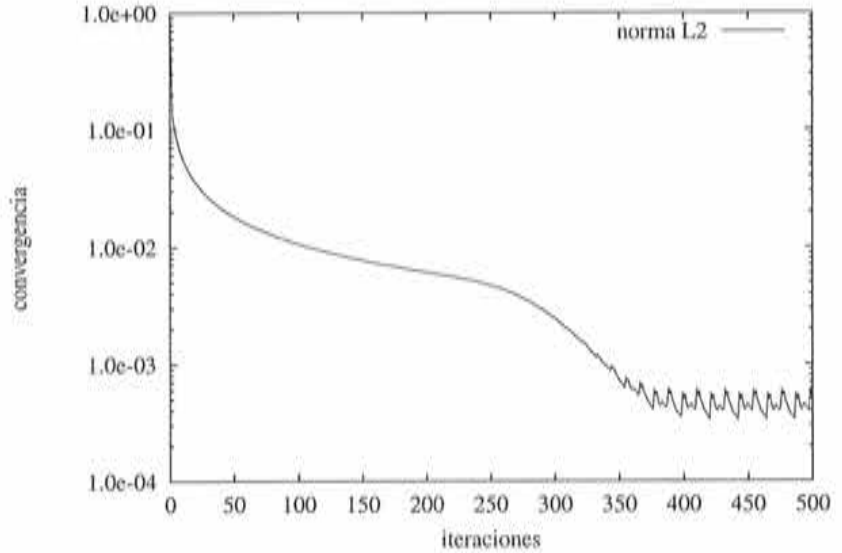


Figura 4.35: Convergencia de la solución con respecto al número de iteraciones

El problema planteado, como ya hemos visto, tiene una solución estacionaria; por lo tanto debemos esperar que aplicando el esquema transitorio la solución converja hacia el mismo resultado. En la figura (4.33) se muestra la solución a la verja hacia la misma configuración. Podemos observar que las discontinuidades se capturan correctamente sin que se produzcan oscilaciones. En la figura (4.34) se muestra la comparación de los valores de función obtenidos con el esquema estacionario y con el esquema transitorio a lo largo del corte B-B. Este resultado demuestra el excelente comportamiento que presenta el esquema transitorio, como ya hemos mencionado, resulta más eficiente. Finalmente en la figura (4.35) se presenta la curva de convergencia del residuo calculado mediante la ecuación (3.10). En esta curva hay que resaltar que las oscilaciones que se observa son producidas por la presencia de la estabilización transversal, pero no repercuten en la solución final. Este tipo de oscilaciones en la convergencia son muy comunes en problemas de flujo supersónico cuando se utiliza algún tipo de captura de choques.

4.4.9 Ecuación de convección difusión (3D)

En este apartado se presentan algunos resultados tridimensionales que se pueden comparar con los obtenidos con otros autores utilizando métodos distintos.

El problema planteado es del tipo de Poisson con una fuente volumétrica exponencial en la cual se definió $k = 200$, como dominio se tomó un cubo cuyos l

tienen longitud uno. El problema queda planteado de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = Q(x, y, z) \quad \text{en } \Omega \quad (4.127)$$

donde la fuente externa tiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) = & \left(-2kyz(1-y)(1-z) + (kyz(1-y)(1-z)(1-2x)^2)^2 \right. \\ & -2kzx(1-z)(1-x) + (kzx(1-z)(1-x)(1-2y)^2)^2 \\ & \left. -2kxy(1-y)(1-x) + (kxy(1-y)(1-x)(1-2z)^2)^2 \right) \\ & (-e^{kxyz(1-x)(1-y)(1-z)} / (1 - e^{k/64})) \end{aligned} \quad (4.128)$$

Como condición de contorno se impuso

$$\phi = 0 \quad \text{en } \Gamma \quad (4.129)$$

Este problema tiene la como solución,

$$\phi(x, y, z) = (1 - e^{kxyz(1-x)(1-y)(1-z)} / (1 - e^{k/64})) \quad (4.130)$$

El dominio se discretizó a través de dos tipos de distribuciones de puntos. La primera de ellas se obtuvo a partir de una distribución uniforme en la que luego los puntos se movieron aleatoria hasta $0.25h$, mientras que la segunda se realizó mediante una distribución completamente aleatoria. Para realizar las curvas de convergencia se utilizaron 4 discretizaciones con diferentes densidades de puntos $[5 \times 5 \times 5]$, $[9 \times 9 \times 9]$, $[17 \times 17 \times 17]$ y $[33 \times 33 \times 33]$, con lo que se obtienen 125, 729, 4913 y 35937 puntos respectivamente. En cada uno de los casos se tomó el valor de un error promedio de 4 ensayos diferente. En este ejemplo se incluyen comparaciones con resultados de:

- Elementos Finitos (FEM)
- Elementos finitos sin malla, (MFEM)

Para el primer tipo de distribución de puntos se obtuvieron los siguiente resultados:

Los valores de la velocidad de convergencia de la función y de sus derivadas ² quedan reflejados en el cuadro siguiente:

²Las curvas de derivadas se graficaron haciendo un promedio de las tres derivadas, ya que el comportamiento mostrado era muy similar.

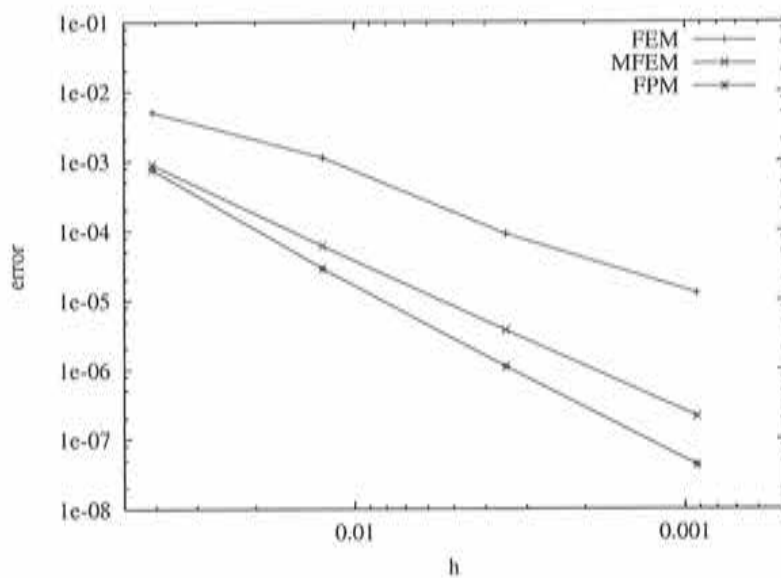


Figura 4.36: Convergencia de la solución para una distribución de puntos movidos hasta $.25h$.

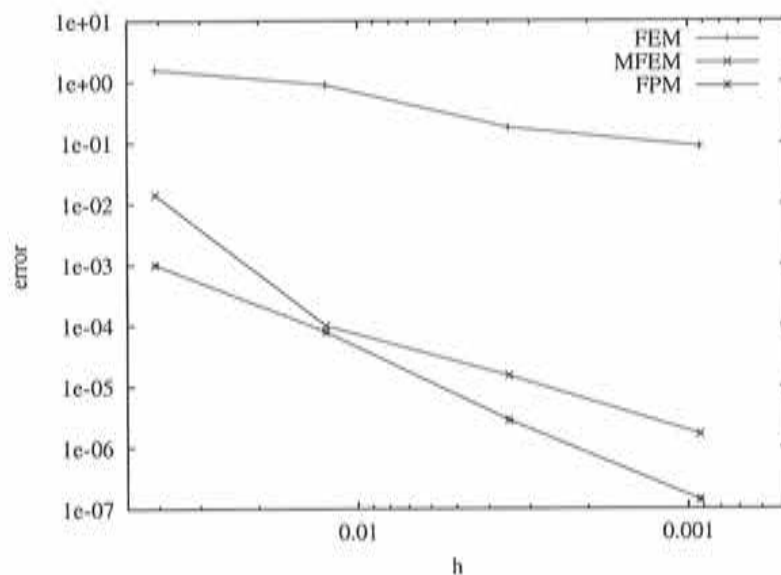


Figura 4.37: Convergencia de las derivadas para una distribución de puntos movidos hasta $.25h$.

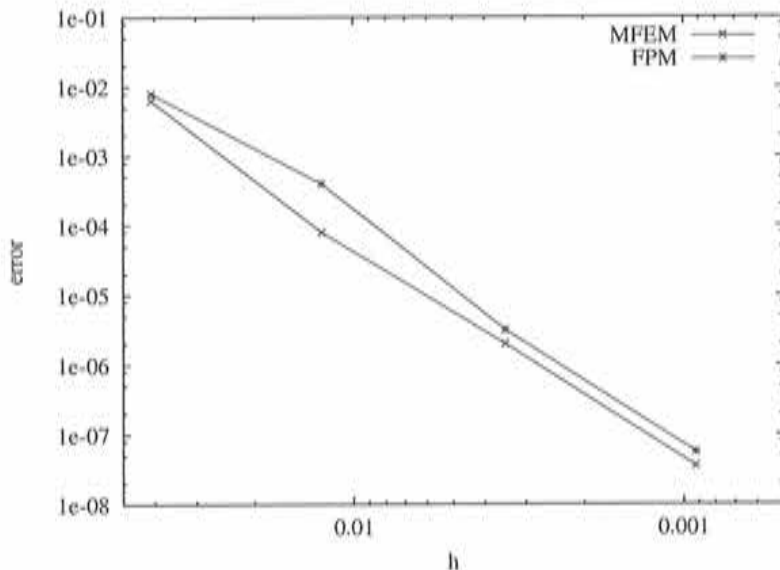


Figura 4.38: Convergencia de la función para una distribución de puntos aleatoria.

	Función	Derivada x	Derivada y	Derivada z
FEM	1.26	0.62	0.65	0.73
MFEM	1.71	1.61	1.70	1.72
FPM	1.93	1.83	1.77	1.80

Para las distribuciones de punto completamente aleatorias solo se incluyen los resultados del MFEM (*Meshless Finite Element Method*) y del método de *Puntos Finitos*, ya que con el FEM no se pudieron obtener resultados.

En la tabla presentada a continuación se muestran las velocidades de convergencia de la solución y las derivadas de la misma ³.

	Función	Derivada x	Derivada y	Derivada z
FEM	-	-	-	-
MFEM	2.43	1.52	1.46	1.46
FPM	2.37	1.61	1.66	1.57

Si bien en los problemas 2D el método de los *Elementos Finitos* se había mostrado como el de mejores características, en problemas tridimensionales se han puesto de manifiesto las limitaciones del mismo, no solo mostrando un gran deterioro en la

³Las curvas de derivadas se graficaron haciendo un promedio de las tres derivadas, ya que el comportamiento mostrado era muy similar.

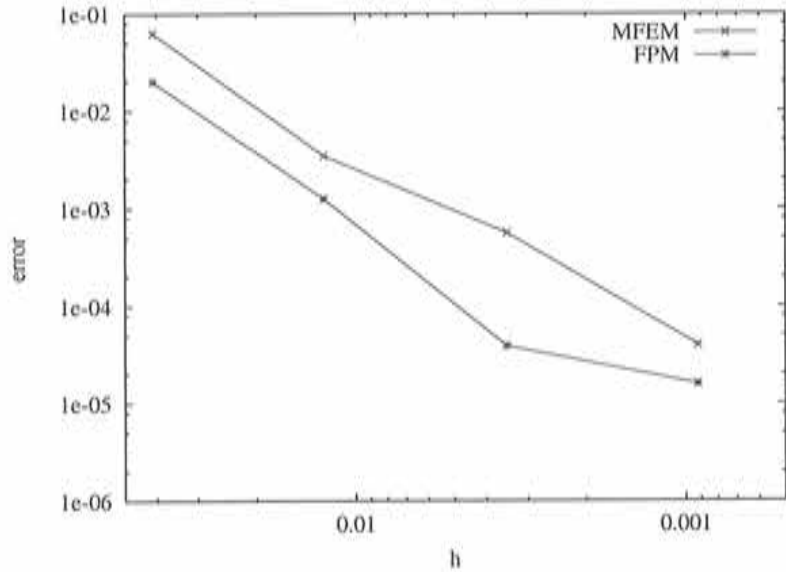


Figura 4.39: Convergencia de las derivadas para una distribución de puntos aleatoria. Se observa una velocidad de convergencia para una distribución de puntos aproximadamente regular, que es el primer ejemplo, sino que mediante el mismo fue imposible arribar a una solución alguna para la distribución completamente aleatoria.

Con respecto al MFEM hemos podido observar que ambos métodos, de características completamente distintas, presentan comportamientos muy semejantes. En estos casos no se han hecho comparaciones en cuanto a la eficiencia de cada uno, con lo cual es imposible sacar conclusiones sobre la conveniencia de utilizar MFEM o FPM.

4.5 Conclusiones

A lo largo del *Capítulo 4* se han sentado muchas de las bases de la técnica de *Puntos Finitos*, especialmente en lo que respecta al tratamiento de las condiciones de contorno de Neumann y la eliminación de las inestabilidades producidas por el predominio de los fenómenos convectivos a través de la implementación de una forma de estabilización derivada mediante el *Cálculo Finitesimal*. Dentro de este apartado hay que destacar la introducción de la estabilización transversal.

Se resolvieron numerosos problemas con los cuales se pudieron verificar las propiedades de convergencia del método. Estos resultados se compararon con otros métodos que mostraron comportamientos similares en ejemplos bidimensionales, sin embargo el problema 3D resuelto arrojó resultados muy alentadores ya que qued

mostrado que el método planteado pudo resolver sin mayores dificultades problemas en que el FEM no logró solucionar.

Finalmente se introdujo el tratamiento de problemas transitorios mediante una formulación implícita con lo que se llegó a un esquema simple y muy eficiente.

Capítulo 5

Puntos Finitos aplicados a la mecánica de fluidos

5.1 Introducción

En la primera parte del presente capítulo se presentan las ecuaciones de la mecánica de fluidos. Dentro de estas nos centraremos en las que describen el comportamiento de un flujo incompresible, tanto viscoso como invíscido. Para la resolución de las mismas se recurrirá al conocido algoritmo de *Pasos Fraccionados*, que conjuntamente con la aplicación del cálculo incremental nos permitirá obtener un algoritmo estabilizado. Finalmente se aplicará el método de los *Puntos Finitos* para obtener una forma discreta de las ecuaciones resultantes, y se plantearán una serie de problemas de índole netamente académico. Estos problemas se dividirán según la naturaleza de las ecuaciones.

5.2 Ecuaciones de Navier Stokes

Las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos están basadas en las siguientes leyes universales de conservación:

- Conservación de la masa
- Conservación del momento
- Conservación de la energía

La ecuación resultante de aplicar la conservación de la masa en el campo de la fluidomecánica es conocida como *ecuación de continuidad*. La conservación

momento es exactamente la segunda ley de Newton y cuando dicha ley es aplicada a un fluido se obtiene la *ecuación de momento*, finalmente la conservación de la energía satisface la bien conocida Primera Ley de la Termodinámica y la ecuación resultante de aplicar este postulado es conocida como *ecuación de la energía*.

Para cerrar el sistema de ecuaciones es necesario establecer algunas relaciones entre las diferentes propiedades del fluido, un ejemplo de este tipo de relación está dado por la ecuación de estado que vincula las variables termodinámicas presión, densidad y temperatura.

Este conjunto de ecuaciones es conocidas como *Ecuaciones de Navier Stokes*. Con ellas es posible modelar los diferentes comportamiento de un fluido. Teniendo en cuenta dicho comportamiento podemos distinguir dos clases de fluidos fundamentales, incompresible o compresible y viscoso o no viscoso.

El fluido incompresible se caracteriza porque los cambios en la presión no producen variaciones en la densidad del mismo, las únicas variaciones que se pueden observar en este tipo de fluido están dadas por cambios térmicos, pero este efecto se puede tratar en forma desacoplada. Por otro lado, el flujo compresible se caracteriza por una fuerte interacción entre los fenómenos mecánicos y termodinámicos.

La asunción de flujo no viscoso nos lleva a un grupo de ecuaciones conocidas como *Ecuaciones de Euler*. Estas ecuaciones representa fielmente la mayoría de los fenómenos, en los cuales los efectos inerciales predominan sobre los viscosos, o lo que es lo mismo, para números de Reynolds altos. Sin embargo los efectos viscosos, aún para Reynolds altos, introducen variaciones muy importantes en el desarrollo del flujo, como por ejemplo la formación de capas límites que a su vez es la principal responsable de la generación de turbulencia.

La derivación de las ecuaciones fundamentales se llevó a cabo siguiendo dos líneas fundamentalmente, una a través de la teoría cinética que ha sido descrita en detalle por Hirschfelder y coautores [HRS 54] y la otra mediante una aproximación fenomenológica expuesta en forma minuciosa por Shlichting [SCH 98].

A continuación presentaremos la forma general del grupo de ecuaciones fundamentales para un fluido contenido en un dominio Ω que se mueve a una velocidad $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ que es función de las coordenadas $\mathbf{x} \in \Omega$ y del tiempo $t \in [0, \infty)$. Para completar la descripción, es necesario introducir las variables termodinámicas, presión $p(\mathbf{x}, t)$, densidad $\rho(\mathbf{x}, t)$ y temperatura $T(\mathbf{x}, t)$. Estas tres propiedades son funciones escalares, que de la misma forma que la velocidad, son funciones de las coordenadas y del tiempo.

- Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5.1)$$

- Ecuación de momento

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta_{ij} p - \tau_{ij}) + \rho g_j = 0$$

- Ecuación de energía

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i e}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i p - q_i - \tau_{ij} u_j) + (\rho u_i g_i + r) = 0$$

En estas ecuaciones r representa una fuente de calor por unidad de masa y g_i es la aceleración producida por la gravedad. También hemos definido la variable denominada energía total por unidad de masa y su expresión es

$$e = e_0 + \frac{1}{2} u_i u_i$$

en esta expresión e_0 es la *energía interna* y el segundo término la *energía cinética*. Si el fluido que se está modelando es politrópico la energía interna se define como una función lineal de la temperatura

$$e_0 = C_v T$$

donde la constante C_v es el calor específico a volumen constante.

En la ecuación de energía aparece el flujo de calor q_i que, asumiendo la ley de Fourier, dependerá exclusivamente de la variación de la temperatura

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

finalmente debemos definir el tensor de tensiones desviatorio (se excluyen los términos isotrópicos de presión) que en el caso de asumir que el comportamiento de fluido es Newtoniano tiene la siguiente expresión:

$$\tau_{ij} = \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]$$

donde μ es la viscosidad.

Para que el sistema de ecuaciones esté completo es necesario introducir alguna relación de las propiedades termodinámicas del fluido como por ejemplo la ley de los gases ideales, cuya expresión es

$$p = \rho R T$$

en esta ecuación R es la constante universal de los gases.

La resolución del sistema de ecuaciones formado por (5.1), (5.2), (5.3) y (5.4) requiere la aplicación de condiciones de contorno e iniciales apropiadas. En lo que se refiere a las condiciones de contorno se las divide en tres grupos, siendo $\Gamma_u \cup \Gamma_t \cup \Gamma_m$ tenemos:

1. condiciones de Dirichlet (se impone el valor de la incógnita) en Γ_u
2. condiciones de Neumann (se imponen el valor de las derivadas) en Γ_t
3. condiciones mixtas (es una combinación de las dos anteriores) en Γ_m

En cuanto a las condiciones iniciales es necesario conocer el valor de todas las incógnitas en el dominio Ω para el instante de tiempo inicial.

El problema de imponer las condiciones de contorno como la condiciones iniciales es muy complejo y, hasta el momento actual, sigue siendo un tema sin una solución definitiva [HIG 86] de todas formas el desarrollo que se alcanzó no permite afrontar con éxito la mayoría de los problemas.

5.2.1 Ecuaciones de Navier Stokes para flujo incompresible

Las ecuaciones de flujo incompresible se obtienen a partir de la asunción de que el sonido, en dicho fluido, se propaga a una velocidad infinita ($c = \infty$), lo que se traduce en una densidad constante ($\rho = cte$). Otra consecuencia de esta suposición es que la ecuación de la energía se puede desacoplar y no es necesario tenerla en cuenta para calcular el campo de velocidades y la presión. Por lo tanto el sistema se reduce a:

- ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5.9)$$

- ecuación de momento

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta_{ij} p - \tau_{ij}) + g_j = 0 \quad (5.10)$$

es importante observar que la ecuación de continuidad ya no depende del tiempo y se transforma en una restricción para el campo de velocidades. Teniendo en cuenta dicha restricción las ecuaciones de momento podemos se pueden reescribir de forma que

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] + g_j = 0 \quad (5.11)$$

En lo que se refiere a las condiciones de contorno, por simplicidad solo utilizaremos condiciones del tipo de Dirichlet y de Neumann, $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{u}}(t) & \text{en } \Gamma_u \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}}(t) & \text{en } \Gamma_t \end{aligned}$$

con $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ definido como:

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} - \delta_{ij}p \quad (5)$$

y siendo \mathbf{n} el versor normal al contorno.

Finalmente es necesario introducir la condición inicial para el campo de velocidades

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \quad (5)$$

y a partir de estas velocidades se calcula el campo de presiones iniciales.

Es importante remarcar que al asumir que el fluido es incompresible, la presión deja de ser una variable termodinámica como ocurre cuando el flujo es compresible para pasar a ser una cantidad que permite establecer el equilibrio de fuerzas en cada punto.

5.2.2 Algoritmos de resolución

Una de las primeras técnicas propuestas para la resolución de las ecuaciones de Navier Stokes incompresibles utilizando las variables primarias (u_i, p) fue el método de compresibilidad artificial desarrollado por Chorin [CHO 67] a mediados de la década del 60. En este método la ecuación de continuidad es modificada mediante la introducción de una compresibilidad artificial que desaparece cuando el estado estacionario es encontrado. Con la adición de este término el sistema puede ser tratado de la misma forma que el problema compresible, desafortunadamente este método es muy sensible al factor que se introduce como compresibilidad artificial, requiere ser calculado adecuadamente. Otra limitación de esta técnica radica en la imposibilidad de obtener resultados transitorios suficientemente precisos.

Sin dudas la técnica más difundida para la resolución de las ecuaciones incompresibles se basa en transformar la ecuación de continuidad por un problema de Poisson cuya incógnita será la presión, de esta forma se separan los efectos de la presión y pueden ser calculados correctamente resolviendo un problema de naturaleza elíptica cuya solución es bastante sencilla. En general esto se logra dividiendo el problema en tres pasos fundamentales, primero se resuelve la ecuación de momento sin tener en cuenta los términos de la presión, a continuación se resuelve la ecuación de continuidad y finalmente se corrige la ecuación de momento. Este método es conocido como *Método de Pasos Fraccionados* o como *Método de Proyección*.

Esta técnica fue usada por primera vez por Harlow y Welch para resolver las ecuaciones de Navier Stokes incompresibles en el año 1965 [HAR 65], años más tarde apareció el método denominado *SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Limited Equations)* presentado por Patankar y Spalding en el año 1972 [PAT 72], y que es una de las técnicas más usadas para resolver problemas de flujos incompresibles mediante *Diferencias Finitas*. También es necesario recordar los trabajos de O

y coautores [GHI 77] [GHI 79] cuyos resultados son utilizados continuamente como referencia, especialmente para problema de fluido confinados.

5.2.3 Algoritmo de Pasos Fraccionados

La discretización temporal de las ecuaciones de Navier Stokes para flujo incompresible se realiza de forma que:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t \left[u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] + g_j \right]^{n+\theta} \quad (5.14)$$

y

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} = 0 \quad (5.15)$$

Para realizar la separación de las ecuaciones introducimos una variable auxiliar \bar{u}_j^{n+1} a la que denominamos momento fraccionario, siendo su expresión:

$$\bar{u}_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t \left[u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] + g_j \right]^{n+\theta} + \Delta t \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_j} \quad (5.16)$$

por lo tanto la ecuación de momento se puede escribir como:

$$u_j^{n+1} = \bar{u}_j^{n+1} - \Delta t \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j} - \gamma \frac{\partial p^n}{\partial x_j} \right] \quad (5.17)$$

En estas ecuaciones se introdujo el parámetro γ que puede tomar valores entre 0 y 1. Aplicando (5.15) a la ecuación (5.17) obtenemos:

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} - \Delta t \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} - \gamma \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right] = 0 \quad (5.18)$$

Como resultado de aplicar la restricción de incompresibilidad nos queda planteado el siguiente problema de Poisson,

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial \bar{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} + \gamma \frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i \partial x_i} \quad (5.19)$$

que nos permite calcular la presión en el paso de tiempo $n + 1$ para finalmente evaluar la velocidad u_j^{n+1} .

El algoritmo resultante se aplica siguiendo el siguiente esquema:

1. calcular el momento fraccionario \bar{u}_j^{n+1}

$$\bar{u}_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t \left[u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] + g_j \right]^{n+\theta} + \Delta t \gamma \frac{\partial p^n}{\partial x_j}$$

2. resolver el problema de Poisson para la presión p^{n+1}

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial \tilde{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} + \gamma \frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i \partial x_i}$$

3. calcular la velocidad real u_j^{n+1}

$$u_j^{n+1} = \tilde{u}_j^{n+1} - \Delta t \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j} - \gamma \frac{\partial p^n}{\partial x_j} \right]$$

4. volver al paso 1

Como se puede observar el esquema resultante es semi implícito ya que los p 1º y 3º se pueden resolver en forma implícita y el 2º paso, donde se calcula la presión es explícito. También es necesario incluir un término de estabilización para evitar problemas producidos por el término convectivo. Este esquema fue implementado añadiendo la estabilización en la ecuación de momento pero no se logró converger a un resultado satisfactorio. Las dificultades para la resolución de los problemas propuestos son producto de una inestabilidad numérica producida en la ecuación de continuidad. La inestabilidad numérica ha sido mencionada por otros autores para implementar este algoritmo mediante *Diferencias Finitas*.

5.2.4 Ecuaciones de flujo incompresible estabilizadas mediante *Cálculo Finitesimal*

Ante la falta de estabilidad numérica en el esquema presentado previamente se procedió a derivar las ecuaciones de Navier Stokes incompresibles a través del *Cálculo Finitesimal*, de esta forma obtenemos lo que denominamos la forma estabilizada [OÑA 00a], [OÑA 00c].

Ecuación de momento

$$r_i^m - \frac{1}{2} h_j^m \frac{\partial r_i^m}{\partial x_j} = 0 \quad (5.2.4)$$

donde

$$r_i^m = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta_{ij} p - \tau_{ij}) + \rho g_i \quad (5.2.5)$$

La ecuación de continuidad estabilizada,

$$r^d - \frac{1}{2} h_j^d \frac{\partial r^d}{\partial x_j} = 0 \quad (5.2.6)$$

donde:

$$\tau^d = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (5.23)$$

En estas ecuaciones \mathbf{h}^m y \mathbf{h}^d son vectores que contienen las longitudes características para la estabilización de la ecuación de momento y de continuidad respectivamente. Una vez obtenidas las ecuaciones estabilizadas nos interesa hacer que en la ecuación de continuidad aparezca el término de la presión, que como se apreciará más adelante nos brindará la estabilización necesaria para el algoritmo de pasos fraccionados.

Podemos calcular la longitud característica como,

$$h_i^d = -2\tau^d u_i \quad (5.24)$$

donde τ_i^d se denomina *tiempo intrínseco*. El signo negativo se introduce para obtener una estabilización positiva.

Por otro lado podemos escribir la siguiente igualdad:

$$u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right] - \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]^2 \quad (5.25)$$

en la cual podemos eliminar el término de mayor orden, con lo que

$$u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right] \cong \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right] \quad (5.26)$$

y, por otro lado, podemos reescribir la ecuación de momento de la siguiente forma

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta_{ij} p - \tau_{ij}) + g_i = -u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (5.27)$$

Con las expresiones propuestas podemos reescribir la ecuación (5.22) teniendo en cuenta (5.23) y (5.24) con lo cual:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \tau^d u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right] = 0 \quad (5.28)$$

haciendo uso de la relación (5.26) y de la ecuación derivada de la ecuación de momento (5.27) llegamos a

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \tau^d \frac{\partial \bar{\tau}_i^m}{\partial x_i} = 0 \quad (5.29)$$

donde

$$\bar{\tau}_i^m = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta_{ij} p - \tau_{ij}) + g_i \quad (5.30)$$

Condiciones de contorno

Aplicando nuevamente el concepto de balance podemos escribir la condición de Neumann como:

$$\sigma_{ij}n_j + \frac{1}{2}h_j^m n_j r_i^m = t_i \quad \text{en } \Gamma_t \quad (5.26)$$

donde aparece la ecuación de momento como término de estabilización. Las condiciones de contorno de Dirichlet en direcciones normal y tangente (n, t) tienen la siguiente expresión

$$u_t = u_t^p \quad \text{en } \Gamma_u \quad (5.27)$$

y

$$u_n - \frac{1}{2}h_j^d n_j r^d = u_n^p \quad \text{en } \Gamma_u \quad (5.28)$$

Reemplazando en la ecuación (5.33) las ecuaciones (5.26) y (5.27) reescribimos la condición de contorno

$$u_n - \tau^d n_i \bar{r}_i^m = u_n^p \quad \text{en } \Gamma_u \quad (5.29)$$

donde el parámetro de estabilización se expresó en forma de tiempo intrínseco.

Resumen de las ecuaciones estabilizadas

A continuación se presenta un resumen de las ecuaciones de Navier Stokes incompresibles estabilizadas mediante la aplicación del *Cálculo Finitesimal* y las condiciones de contorno derivadas de la misma forma.

- ecuación de momento

$$r_i^m - \frac{1}{2}h_j^m \frac{\partial r_i^m}{\partial x_j} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (5.30)$$

- ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \tau^d \frac{\partial \bar{r}_i^m}{\partial x_i} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (5.31)$$

- condición de contorno de Neumann

$$\sigma_{ij}n_j + \frac{1}{2}h_j^m n_j r_i^m = t_i \quad \text{en } \Gamma_t \quad (5.32)$$

- condición de contorno de Dirichlet

$$u_t = u_t^p \quad \text{en } \Gamma_u \quad (5.33)$$

$$u_n - \tau^d n_i \bar{r}_i^m = u_n^p \quad \text{en } \Gamma_u \quad (5.34)$$

donde r_i^m y \bar{r}_i^m se definen de la siguiente forma

$$r_i^m = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta_{ij} p - \tau_{ij}) + g_i \quad (5.40)$$

y

$$\bar{r}_i^m = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta_{ij} p - \tau_{ij}) + g_i \quad (5.41)$$

a estas ecuaciones hay que añadirle las condiciones iniciales para el campo de velocidades.

5.2.5 Pasos fraccionados estabilizados

Una vez desarrolladas las ecuaciones estabilizadas procederemos a aplicar el algoritmo de pasos fraccionados. Como el primer paso se procede a dividir la ecuación de momento, separando los términos de la presión. Para simplificar el tratamiento de estas ecuaciones haremos el desarrollo definiendo $\theta = 0$, lo que significa que utilizaremos el esquema de Euler hacia atrás, además definiremos $\gamma = 0$ con lo que se quita todo el término de la presión del primer paso ver ecuación (5.16),

$$\bar{u}_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t \left[\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_j + \frac{1}{2} h_j^m \frac{\partial r_i^m}{\partial x_j} \right]^n \quad (5.42)$$

y por otro lado

$$u_j^{n+1} = \bar{u}_j^{n+1} - \Delta t \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j} \right] \quad (5.43)$$

Aplicando la ecuación de continuidad estabilizada a (5.43) podremos derivar la expresión que nos permitirá evaluar el campo de presiones:

$$\frac{\partial \bar{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} = \Delta t \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \right] + \tau^d \frac{\partial \bar{r}_i^m}{\partial x_i} \quad (5.44)$$

desarrollando esta expresión

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} &= \Delta t \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \right] + \\ &+ \tau^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i \right]^{n+1} + \frac{\tau^d}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \right] \end{aligned} \quad (5.45)$$

Reagrupando los términos se obtiene,

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\rho}{(\Delta t + \tau^d)} \left[\frac{\partial \bar{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} - \tau^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i \right]^{n+1} \right] \quad (5.46)$$

simplificando podemos escribir

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\rho}{(\Delta t + \tau^d)} \left[\frac{\partial \tilde{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} - \tau^d \frac{\partial \tilde{r}_i^{n+1}}{\partial x_i} \right] \quad (5)$$

con

$$\tilde{r}_i^{n+1} = \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i \right]^{n+1} \quad (5)$$

La ecuación resultante, como se puede observar depende de los u_i^{n+1} que no conocemos, por lo tanto hacemos la siguiente suposición

$$\tilde{r}_i^{n+1} \cong \tilde{r}_i^n \quad (5)$$

de esta forma llegaremos a

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\rho}{(\Delta t + \tau^d)} \left[\frac{\partial \tilde{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} - \tau^d \frac{\partial \tilde{r}_i^n}{\partial x_i} \right] \quad (5)$$

en donde el término de la derecha está formado por valores del paso de tiempo anterior, con lo cual podemos calcular el campo de presiones. Si calculamos los valores de \tilde{r}_i^n en cada nodo y los interpolamos para calcular sus derivadas el término se puede interpretar como una estabilización de cuarto orden.

Condiciones de contorno

El desarrollo del algoritmo de pasos fraccionados nos lleva a resolver un problema de Poisson en el segundo paso, y como es sabido este tipo de problemas requiere imposición de condiciones en todos los contornos del dominio.

Tenemos que en los puntos en los que se prescribe la velocidad normal se debe satisfacer que

$$u_n - \tau^d n_i \tilde{r}_i^m = u_n^p \quad \text{en } \Gamma_u \quad (5)$$

utilizando esta condición y reemplazando en la ecuación (5.43) tendremos

$$u_n^p = \tilde{u}_j^{n+1} n_j - \Delta t \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j} \right] n_j + \tau^d n_i \tilde{r}_i^m \quad \text{en } \Gamma_u \quad (5)$$

reagrupando estos términos llegamos a

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta t}{\rho} \left[\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j} \right] n_j - \frac{1}{2} h \left[\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} \right] \frac{(\Delta t + \tau^d)}{\rho} = \\ & = -u_n^p + \tilde{u}_j^{n+1} n_j - \frac{1}{2} h \left[\frac{\partial \tilde{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} - \tau^d \frac{\partial \tilde{r}_i^n}{\partial x_i} \right] \quad \text{en } \Gamma_u \quad (5) \end{aligned}$$

de esta forma la condición de contorno de velocidad normal se obtiene una condición de tipo Neumann para el Laplaciano de la presión. La otra condición necesaria para resolver se obtiene de la imposición de la tensión normal,

$$p = n_i \tau_{ij} n_j - t_n^p \quad \text{en } \Gamma_t \quad (5.54)$$

donde τ_{ij} es el tensor de tensiones y t_n^p es el valor prescrito de la tensión en dirección normal. Otra opción es fijar directamente el valor de la presión

$$p = p^p \quad \text{en } \Gamma_t \quad (5.55)$$

Finalmente, si la componente tangencial de la velocidad está impuesta hacemos:

$$u_t = u_t^p \quad \text{en } \Gamma_u \quad (5.56)$$

y si lo que se impone es la tracción utilizamos

$$\sigma_{ij} n_j + \frac{1}{2} h_j^m n_j r_i^m = t_i \quad \text{en } \Gamma_t \quad (5.57)$$

de donde se puede despejar la componente tangencial de la velocidad.

Los pasos a seguir para la resolución del algoritmo presentado pueden ser resumidos en:

1. dados los valores de las incógnitas en t^n , calculamos el momento fraccionario \tilde{u}_j^{n+1} mediante

$$\tilde{u}_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t \left[\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_j + \frac{1}{2} h_j^m \frac{\partial r_i^m}{\partial x_j} \right] \quad \text{en } \Omega \quad (5.58)$$

2. con los \tilde{u}_j^{n+1} , obtener la presión p^{n+1} a partir de

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\rho}{(\Delta t + \tau^d)} \left[\frac{\partial \tilde{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} - \tau^d \frac{\partial \tilde{r}_i^n}{\partial x_i} \right] \quad \text{en } \Omega \quad (5.59)$$

donde la condiciones de contorno Neumann está dada por

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta t}{\rho} \left[\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j} \right] n_j - \frac{1}{2} h^d \left[\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} \right] \frac{(\Delta t + \tau^d)}{\rho} = \\ & = -u_n^p + \tilde{u}_j^{n+1} n_j - \frac{1}{2} h^d \left[\frac{\partial \tilde{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} - \tau^d \frac{\partial \tilde{r}_i^n}{\partial x_i} \right] \quad \text{en } \Gamma_u \end{aligned} \quad (5.60)$$

las condiciones de contorno de Dirichlet, si se prescribe la tensión normal

$$p = n_i \tau_{ij} n_j - t_n^p \quad \text{en } \Gamma_t \quad (5.61)$$

y si se prescribe la presión

$$p = p^p \quad \text{en } \Gamma_t \quad (5.62)$$

3. a partir de \tilde{u}_j^{n+1} y p^{n+1} se calculan las velocidades reales u_j^{n+1}

$$u_j^{n+1} = \tilde{u}_j^{n+1} - \Delta t \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j} \right] \quad \text{en } \Omega \quad (5)$$

4. se aplican las condiciones de contorno para la velocidad tangencial

$$u_t = u_t^p \quad \text{en } \Gamma_u \quad (5)$$

o si se prescribió la tracción en el contorno

$$t_i \sigma_{ij} n_j + \frac{1}{2} h_j^m n_j r_i^m t_i = t_t \quad \text{en } \Gamma_t \quad (5)$$

5. verificar convergencia y volver al paso 1

En estas ecuaciones presentadas previamente las expresiones de \tilde{r}_i^n y r_i^m e dadas por

$$\tilde{r}_i^n = \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i \right]^n \quad (5)$$

y

$$r_i^m = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta_{ij} p - \tau_{ij}) + g_i \quad (5)$$

5.2.6 Estabilización de tercer orden

En el apartado (4.4.7) se mostró el procedimiento para la obtención de una estabilización de orden superior. En algunos problemas que se presentaron en este capítulo hemos encontrado que al utilizar una estabilización de tercer orden se consigue mejorar sensiblemente los resultados.

En este apartado se presenta la forma en que la misma fue implementada y para una aproximación cuadrática nos encontraremos con una serie de dificultades en el cálculo de las derivadas. Para comenzar definiremos el residuo de las ecuaciones de momento:

$$r_i = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta_{ij} p - \tau_{ij}) + g_i \quad (5)$$

con lo cual la ecuación de momento se reduce a

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + r_i = 0 \quad (5)$$

En el apartado (4.4.7) se presenta la expresión general estabilizada que, para la ecuación que estamos tratando se traduce en

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + r_i - \left[\frac{1}{2} \left(h_j \frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{4} \left(\hat{h}_j \hat{h}_k \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_j \partial x_k} \right) \right] = 0 \quad (5.70)$$

Hay que destacar que en este caso tenemos dos longitudes características distintas \mathbf{h} y $\hat{\mathbf{h}}$ que serán definidas oportunamente.

Reemplazando en esta expresión r_i nos encontramos con que nuevo término que se introdujo involucra derivadas terceras y cuartas de las incógnitas, por este motivo para que la misma tenga algún efecto hay que utilizar polinomios de mayor grado, lo que hace al método más costoso computacionalmente hablando. La solución que se adoptó en este trabajo consistió en calcular los residuos r_i en cada punto del dominio y luego utilizar las mismas funciones de aproximación para interpolarlo, de forma que:

$$r_i^k = \sum_{j=1}^n N_j^k (r_i^h)_j \quad (5.71)$$

en esta ecuación r_i^k es la componente i ésima del residuo evaluada en el punto \mathbf{x}_k , por otro lado tendremos los parámetros \mathbf{r}_i^h . Para calcular en forma correcta las derivadas del residuo es necesario conocer estos parámetros, para lo cual hay que resolver el sistema de ecuaciones planteado en (5.71), el cual puede ser resuelto muy fácilmente con unas pocas iteraciones de Gauss-Seidel. La otra opción es aproximar estos parámetros suponiendo que en cada punto $r_i^k = (r_i^h)_k$ lo cual introducirá un error que dependerá de la definición de la nubes.

5.2.7 Comparación de los algoritmos

Si dejamos de lado las condiciones de contorno los algoritmos de Pasos Fraccionados estandar y estabilizados se diferencian por la expresión que se deriva para el cálculo de la presión que, como hemos mencionado, transforma la ecuación de continuidad en un problema de Poisson con la presión como incógnita. Mientras en el primer algoritmo tenemos

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial \tilde{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} \quad (5.72)$$

suponiendo que $\gamma = 0$ (ver apartado (5.2.3)), con la formulación estabilizada los valores de la presión se calculan mediante

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\rho}{(\Delta t + \tau^d)} \left[\frac{\partial \tilde{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} - \tau^d \frac{\partial \bar{r}_i^n}{\partial x_i} \right] \quad (5.73)$$

Si de esta última ecuación eliminamos el término en el que aparece \bar{r}_i^n , que en la mayoría de los casos es despreciable, excepto al inicio del cálculo, tendremos

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} \cong \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial \tilde{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} - \rho \frac{\tau^d}{\Delta t} \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i \partial x_i} \quad (5.72)$$

Comparando esta ecuación con (5.72) podemos decir que el término subrayado que actúa como estabilización, y su forma es equivalente al término de estabilización que se obtiene aplicando el método de los *Elementos Finitos* [COD 00], [VAZ 99] algoritmo de pasos fraccionados, que permite el uso de funciones de interpolación de igual orden para la velocidad y la presión satisfaciendo la condición de Babus-Brezzi.

5.2.8 Discretización de las ecuaciones 2D mediante Puntos Finitos

Para abordar la resolución del esquema propuesto previamente aproximamos las incógnitas mediante la técnica de *Puntos Finitos*. Para el caso bidimensional tendremos el campo de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t))$ y el campo de presión $p(\mathbf{x}, t)$. Dichas incógnitas serán aproximados en forma local mediante:

$$u(\mathbf{x}, t) \cong \hat{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^n N_j^i(\mathbf{x}) u_j^h \quad (5.73)$$

$$v(\mathbf{x}, t) \cong \hat{v}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^n N_j^i(\mathbf{x}) v_j^h \quad (5.74)$$

$$p(\mathbf{x}, t) \cong \hat{p}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^n N_j^i(\mathbf{x}) p_j^h \quad (5.75)$$

donde las $N_j^i(\mathbf{x})$ son las funciones de forma obtenidas mediante *Minimos Cuadrados Ponderados Fijos* (para más detalles de la obtención de estas funciones de aproximación se puede ver el *Capítulo 2*). Para todos los ejemplos de fluidos que se presentan en esta tesis, las funciones de aproximación se obtuvieron a partir de una base polinómica cuadrática y la ponderación se realizó con la función de Gauss cuyos parámetros han sido fijados ($\beta = 3$ y $k = 2.5$).

Además de las incógnitas del problema es necesario definir la aproximación de las siguientes variables auxiliares

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n N_j^i(\mathbf{x}) \tilde{u}_j^h \quad (5.76)$$

$$\tilde{v}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n N_j^i(\mathbf{x}) \tilde{v}_j^h \quad (5.79)$$

A partir de este punto para simplificar la notación reemplazamos (\mathbf{x}_i) por el subíndice i (por ejemplo $u(\mathbf{x}_i) = u_i$).

Antes de describir la implementación del algoritmo de *pasos fraccionados* en forma discreta es necesario mencionar algunas simplificaciones que se introdujeron en el algoritmo original, una vez comprobado, de forma numérica, que el error introducido era despreciable. La primera simplificación se introdujo en el término convectivo de la ecuación de momento

$$\hat{u}_i \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x} + \hat{v}_i \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial y} + \hat{u}_i \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y} \right) \cong \hat{u}_i \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x} + \hat{v}_i \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial y} \quad (5.80)$$

$$\hat{u}_i \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x} + \hat{v}_i \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y} + \hat{v}_i \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y} \right) \cong \hat{u}_i \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x} + \hat{v}_i \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y} \quad (5.81)$$

y por otro lado el término difusivo se redujo haciendo

$$\frac{\partial \hat{\tau}_{xx_i}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\tau}_{xy_i}}{\partial y} \cong \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial y^2} \quad (5.82)$$

$$\frac{\partial \hat{\tau}_{yx_i}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\tau}_{yy_i}}{\partial y} \cong \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial y^2} \quad (5.83)$$

Estas simplificaciones se realizaron a partir de la ecuación de continuidad estandar (Divergencia nula), ya que en el algoritmo que se desarrolló esta condición sólo se verifica en el régimen estacionario. De todas forma se pudo observar que, aún en el régimen transitorio los resultados no se veían afectados por estas suposiciones.

El primer paso del algoritmo consiste en obtener los valores de \hat{u}_i^{n+1} , \hat{v}_i^{n+1} a partir de los valores de \hat{u}_i^n , \hat{v}_i^n y \hat{p}_i^n evaluando la siguiente expresión en cada punto

$$\hat{r}_{x_i} = \hat{u}_i \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x} + \hat{v}_i \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial y^2} \right) + g_x \quad (5.84)$$

$$\hat{r}_{y_i} = \hat{u}_i \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x} + \hat{v}_i \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_i}{\partial y^2} \right) + g_y \quad (5.85)$$

$$\bar{u}_i^{n+1} = \hat{u}_i^n - \Delta t \left[\hat{r}_{x_i} + \frac{1}{2} \left[h_x^m \left[\frac{\partial \hat{r}_{x_i}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2} \right] + h_y^m \left[\frac{\partial \hat{r}_{x_i}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p_i}{\partial x \partial y} \right] \right] \right] \quad (5.86)$$

$$\bar{v}_i^{n+1} = \hat{v}_i^n - \Delta t \left[\hat{r}_{y_i} + \frac{1}{2} \left[h_x^m \left[\frac{\partial \hat{r}_{y_i}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p_i}{\partial y \partial x} \right] + h_y^m \left[\frac{\partial \hat{r}_{y_i}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p_i}{\partial y^2} \right] \right] \right] \quad (5.87)$$

el cálculo de las derivadas de los residuos \hat{r}_{x_i} y \hat{r}_{y_i} se resolvieron en forma analítica.

Si bien hemos comentado que el primer paso es explícito en realidad debe resolver un sistema de ecuaciones para hallar los parámetros \tilde{u}_j^h y \tilde{v}_j^h . En estas ecuaciones planteadas para obtener los parámetros no están acopladas con lo que se pueden resolver dos sistemas independientes, además, cada uno de estos sistemas se pueden resolver mediante pocas iteraciones de Gauss-Seidel. Cada sistema queda dado por:

$$\sum_{j=1}^n N_j^i(\mathbf{x}_i) \tilde{u}_j^h = \tilde{u}_i^{n+1} \quad \text{para } i = 1, n \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n N_j^i(\mathbf{x}_i) \tilde{v}_j^h = \tilde{v}_i^{n+1} \quad \text{para } i = 1, n \quad (5)$$

estos parámetros nos permitirán calcular las derivadas de \tilde{u}_i^{n+1} y \tilde{v}_i^{n+1} .

El paso siguiente consiste en la resolución del problema de Laplace para la presión. La matriz resultante tiene la siguiente expresión:

$$K_{ij} = \frac{(\Delta t + \tau^d)}{\rho} \left[\frac{\partial^2 N_j^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_j^i}{\partial y^2} \right] \quad \text{para } i = 1, n \quad (5)$$

para los puntos de contorno de Neumann:

$$K_{ij} = \frac{\Delta t}{\rho} \left[\frac{\partial N_j^i}{\partial x} n_x + \frac{\partial N_j^i}{\partial y} n_y \right] - \frac{h^d (\Delta t + \tau^d)}{2 \rho} \left[\frac{\partial^2 N_j^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_j^i}{\partial y^2} \right] \quad \forall i \in \Gamma_u \quad (5)$$

y para los puntos en el contorno de Dirichlet

$$K_{ij} = N_j^i \quad \forall i \in \Gamma_p \quad (5)$$

El término independiente del sistema será

$$f_i = \frac{\partial \tilde{u}_i^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_i^{n+1}}{\partial y} - \tau^d \left[\frac{\partial \hat{r}_{x_i}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{r}_{y_i}}{\partial y} \right]^n \quad \text{para } i = 1, n \quad (5)$$

para el contorno de Neumann

$$f_i = -u_n^p + \tilde{u}_i^{n+1} n_x + \tilde{v}_i^{n+1} n_y - \frac{h^d}{2} \left[\frac{\partial \tilde{u}_i^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}_i^{n+1}}{\partial y} - \tau^d \left[\frac{\partial \hat{r}_{x_i}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{r}_{y_i}}{\partial y} \right]^n \right] \quad \forall i \in \Gamma_u \quad (5)$$

y para los puntos en el contorno de Dirichlet

$$f_i = p^p \quad \forall i \in \Gamma_p \quad (5.95)$$

El sistema de ecuaciones planteado

$$\mathbf{Kp}^h = \mathbf{f} \quad (5.96)$$

nos permite el cálculo de los parámetros p_j^h que a continuación nos permitirá conocer la \hat{p}_j^{n+1} . La resolución de este sistema de ecuaciones se realiza mediante el método de Gradiente Biconjugados, además se hace uso de un preconditionador diagonal.

En el tercer paso se corrige el campo de velocidades haciendo uso de las presiones y los momentos fraccionarios calculados en los paso anterior,

$$\hat{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^{n+1} - \Delta t \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \hat{p}^{n+1}}{\partial x} \right] \quad (5.97)$$

$$\hat{v}_i^{n+1} = \bar{v}_i^{n+1} - \Delta t \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \hat{p}^{n+1}}{\partial y} \right] \quad (5.98)$$

Finalmente es necesario calcular los parámetros u_j^h y v_j^h que nos permitirá obtener las derivadas de las velocidades para el paso de tiempo siguiente, además en este paso se imponen las condiciones de contorno que involucran la componente tangencial de la velocidad, por lo tanto

$$\sum_{j=1}^n N_j^i(\mathbf{x}_i) u_j^h = \hat{u}_i^{n+1} \quad \text{para } i = 1, n \quad (5.99)$$

$$\sum_{j=1}^n N_j^i(\mathbf{x}_i) v_j^h = \hat{v}_i^{n+1} \quad \text{para } i = 1, n \quad (5.100)$$

en los contornos donde el valor de la componente tangencial está prescrita se plantea

$$-n_y \sum_{j=1}^n N_j^i(\mathbf{x}_i) u_j^h + n_x \sum_{j=1}^n N_j^i(\mathbf{x}_i) v_j^h = u_t^p \quad \forall i \in \Gamma_u \quad (5.101)$$

y si lo que se prescribe es la tracción, se plantea

$$t_i \sigma_{ij} n_j + \frac{1}{2} h_j^m n_j r_i^m t_i = t_t^p \quad \forall i \in \Gamma_t \quad (5.102)$$

que se traduce en

$$(n_x^2 - n_y^2) \frac{\mu}{\rho} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j^i(\mathbf{x}_i)}{\partial y} u_j^h + \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j^i(\mathbf{x}_i)}{\partial x} v_j^h \right] + 2n_x n_y \frac{\mu}{\rho} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j^i(\mathbf{x}_i)}{\partial x} v_j^h \right] -$$

$$-2n_x n_y \frac{\mu}{\rho} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j^i(\mathbf{x}_i)}{\partial x} u_j^h \right] = -\frac{h'}{2} [-n_y \hat{r}_{x_i} + n_x \hat{r}_{y_i}] + t_i^p \quad \forall i \in \Gamma_t \quad (5.103)$$

A diferencia de lo que sucede en el primer paso, en este caso no es posible desacoplar las ecuaciones, aunque de todas formas se puede resolver con el mismo método iterativo como el de Gauss Seidel.

Cálculo del paso de tiempo

Como consecuencia de la utilización de un esquema de Euler hacia atrás en la discretización temporal obtuvimos una formulación condicionalmente estable. Por este motivo es necesario calcular el paso de tiempo crítico, y en base a este valor obtener el paso de tiempo con el cual se avanza en el cálculo. Resolviendo el problema de convección difusión unidimensional se deduce que

$$\Delta t_c = \frac{1}{2 \left(\frac{4\mu}{h^2} + \frac{|\mathbf{u}|}{h} \right)} \quad (5.104)$$

En caso el caso de números de Reynolds alto la expresión se reduce a

$$\Delta t_c = \frac{\bar{h}}{2|\mathbf{u}|} \quad (5.105)$$

El valor de Δt_c se calcula en cada punto del dominio y, conociendo estos valores el paso de tiempo Δt se define como el menor incremento crítico multiplicado por un factor de seguridad F_s para garantizar la estabilidad. Por lo tanto

$$\Delta t = F_s \cdot \min_{i=1}^n |\Delta t_{c_i}| \quad (5.106)$$

En todos los problemas resueltos se usó un $F_s = .8$

Cálculo de los parámetros de estabilización

En la formulación estabilizada aparecen tres parámetros de estabilización diferentes, \mathbf{h}^m que contiene los parámetros de estabilización para las ecuaciones de momento, h^d que es el parámetro de estabilización de la condición de contorno de la ecuación de Laplace para la presión y τ^d para la estabilización de la presión. El vector \mathbf{h}^m se define para cada nube de forma que

$$h_i^m = \frac{\alpha \bar{h}}{|\mathbf{u}|} u_i \quad (5.107)$$

donde α es una función del número de Peclet y \bar{h} es una longitud asociada a la nube de puntos. Para añadir difusión en la dirección de los gradientes de la incógnita, y basándonos en la expresión (4.94) tendremos que:

$$h_{ik}^m = \frac{\alpha \bar{h}}{|\mathbf{u}|} u_i + \frac{\beta \bar{h}}{|\mathbf{u}_k^t|} u_{ik}^t \quad (5.108)$$

donde u_{ik}^t se calcula mediante:

$$u_{ik}^t = \frac{r_k}{|\nabla u_k|^2} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (5.109)$$

como podemos observar ahora el parámetro de estabilización es una matriz.

Otro parámetro necesario para completar la formulación es el que se introdujo mediante la estabilización de tercer orden y lo definimos en la dirección del flujo, de forma que

$$\hat{h}_i^m = \frac{\alpha \bar{h}}{|\mathbf{u}|} u_i \quad (5.110)$$

El parámetro de estabilización h^d es utilizado en la condición de contorno y se define, en forma local, como $h^d = \bar{h}$.

Para la ecuación de continuidad el parámetro de estabilización se expresó en forma tiempo intrínseco τ^d y lo definimos como el paso de tiempo crítico en cada punto,

$$\tau_j^d = \Delta t_{c_j} \quad \text{con } j = 1, \dots, n \quad (5.111)$$

Hay que tener especial cuidado con este parámetro debido a que depende de la velocidad y cuando la velocidad tiende a cero el parámetro de estabilización se hace muy grande. Para evitar este inconveniente se impone una cota superior, de forma que

$$\tau_j^d = \begin{cases} \Delta t_{c_j} & \text{si } \Delta t_{c_j} \leq \beta \min_{k=1}^n (\Delta t_{c_k}) \\ \beta \min_{j=1}^n (\Delta t_{c_j}) & \text{si } \Delta t_{c_j} \geq \beta \min_{k=1}^n (\Delta t_{c_k}) \end{cases} \quad (5.112)$$

y en los problemas numéricos que se presentan a continuación hemos tomado $\beta = 10$, tanto para 2D como para 3D.

5.3 Ejemplos numéricos

En este apartado se abordarán diversos problemas de la mecánica de fluidos incompresible que hemos diferenciado como problemas de Stokes, de Navier Stokes y de Euler, dependiendo de la relación entre los términos convectivos y los términos viscosos.

Los ejemplos que se presentan, en su mayoría, son de aplicación académica, y por lo tanto existen resultados teóricos, experimentales u obtenidos mediante la aplicación de alguna técnica numérica, lo que nos permitirán constatar la calidad de los resultados logrados mediante el método de los *Puntos Finitos*.

5.3.1 Problema de Stokes:

Flujo confinado en una cavidad

En el problema propuesto, un flujo muy viscoso está confinado en un dominio cuadrangular mientras en uno de los lados se impone una velocidad tangencial. El predominio de los efectos viscosos nos permite despreciar los términos convectivos y la estabilización de la ecuación de momento. Las condiciones de contorno para la velocidad y la presión se muestran en la figura (5.1). Como condición inicial se impone la velocidad a cero en todo el dominio, excepto en la pared móvil.

La discretización fue realizada mediante 40×40 puntos dispuestos en forma estructurada. Las nubes están formadas por 9 puntos formando un cuadrado de 3×3 .

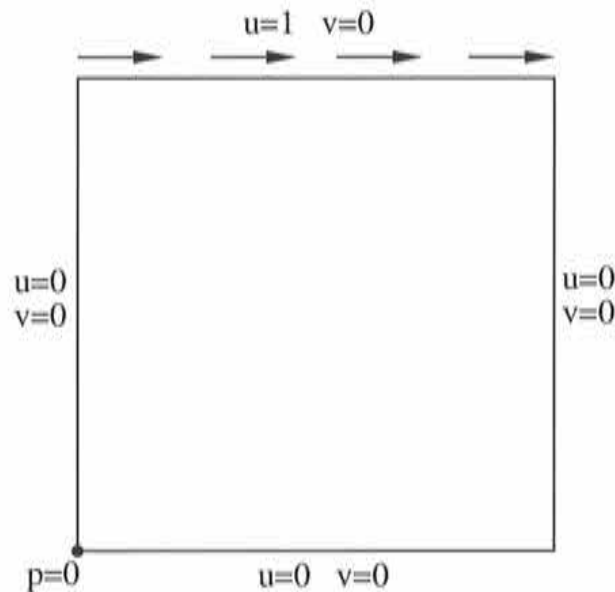


Figura 5.1: Flujo confinado en una cavidad. Esquema del dominio y de las condiciones de contorno.

En la figura (5.2) se muestran las isófonas de presión y de la velocidad, mientras que en las figuras (5.3) y (5.4) se comparan los perfiles de las componentes x e y

de la velocidad con los resultados obtenidos con un algoritmo de pasos fraccionados implementado mediante *Elementos Finitos* [VAZ 99], [ZIE 00], donde la malla utilizada estaba formada por elementos triangulares lineales. Los perfiles de velocidades u y v se obtuvieron a lo largo de las líneas que se muestran en las figuras (5.2-c) y (5.2-d) respectivamente.

Este problema nos permitió verificar la eficacia de la estabilización de la ecuación de continuidad, ya que sin dicha estabilización el esquema transitorio no lograba convergencia.

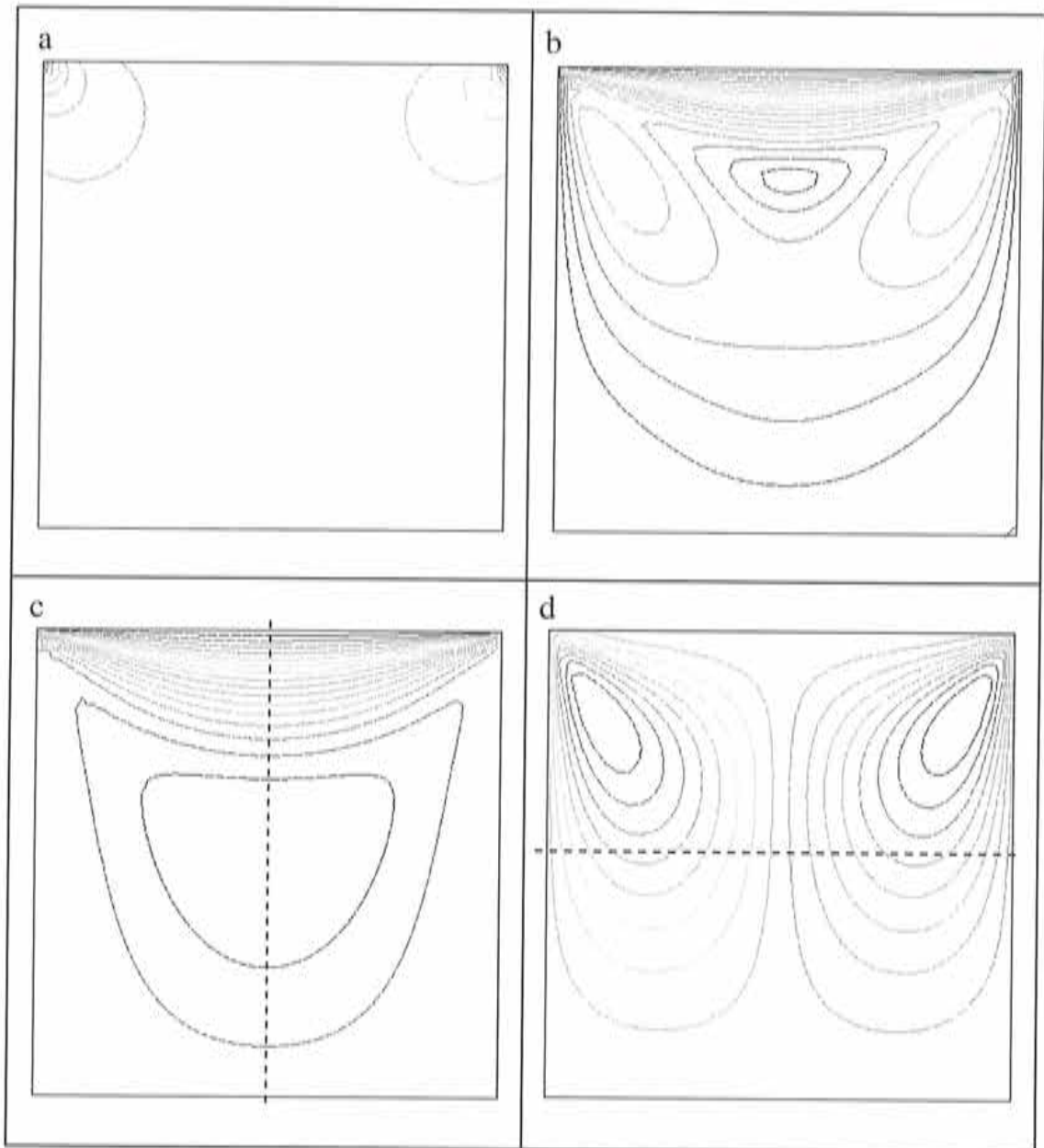


Figura 5.2: Flujo confinado en una cavidad. Isolfneas de: a) presión, b) velocidad $|\mathbf{u}|$, c) velocidad u , d) velocidad v .

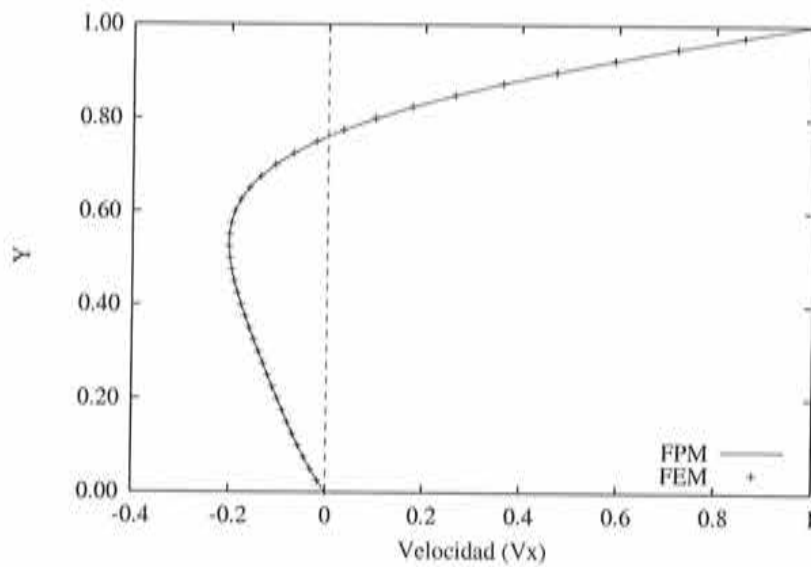


Figura 5.3: Flujo confinado en una cavidad. Comparación del perfil de velocidades u obtenidos mediante *Puntos Finitos* (FPM) y *Elementos Finitos* (MEF).

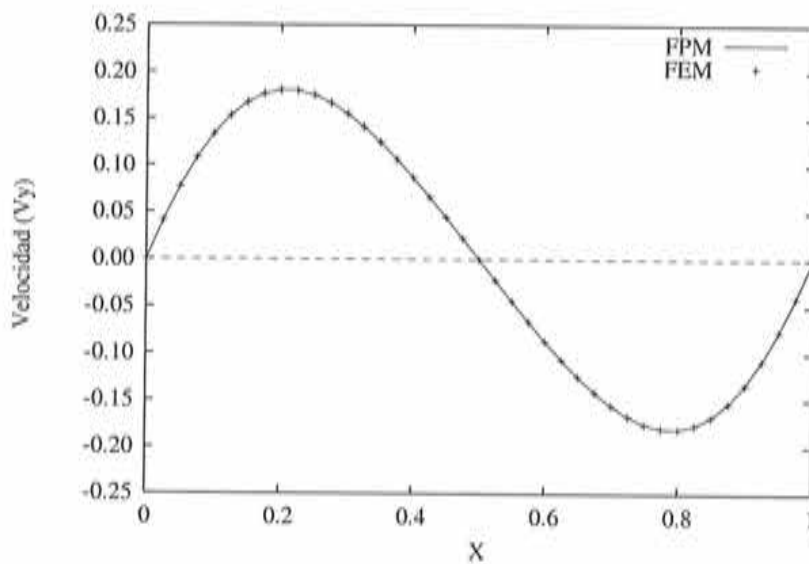


Figura 5.4: Flujo confinado en una cavidad. Comparación del perfil de velocidades v obtenidos mediante *Puntos Finitos* (FPM) y *Elementos Finitos* (MEF).

5.3.2 Problema de Navier Stokes

En este apartado se presentarán cuatro problemas bidimensionales, en tres de los cuales nos interesa conocer los resultados en régimen estacionario, mientras que en el restante centraremos nuestra atención en la capacidad del algoritmo de reproducir un solución transitorio. El primer problema que se plantea es el de un flujo confinado en una cavidad, el segundo problema es un flujo pasando un escalón inverso el tercero es conocido ejemplo de un cilindro sumergido en una corriente uniforme y finalmente se presenta un perfil aerodinámico. El último ejemplo que se presenta en este apartado es un escalón inverso pero tridimensional, lo que nos permitió comprobar la extensión del algoritmo.

Flujo confinado en una cavidad a $Re = 400$ y $Re = 1000$

El problema del flujo confinado en una cavidad a números de Reynolds medios y altos ha sido estudiado por una gran cantidad de investigadores, gracias a ello se ha transformado en un problema test obligatorio para la validación de cualquier algoritmo o método que aborde la resolución de las ecuaciones incompresibles de Navier Stokes. Los resultados presentados por Ghia en [GHI 82] se han convertido en la referencia más citada, en lo que se refiere al problema del flujo confinado en una cavidad. En este trabajo utilizaremos estos resultados para realizar las comparaciones.

Este problema tiene las mismas características físicas que el ejemplo presentado anteriormente, con lo cual, tanto la geometría como las condiciones de contorno se presentan en la figura (5.1). La discretización del dominio se realizó mediante 5660 puntos que se concentraron en la zonas cercanas a las paredes, lo que se puede apreciar en la figura (5.5). Las nubes de cada punto están formadas por un número de puntos que varía entre 12 y 20.

Con la configuración previamente descrita se resolvieron dos casos con distintos números de Reynolds, el primero con $Re = 400$ y el segundo con $Re = 1000$. En las figuras (5.6) y (5.7) se pueden apreciar los resultados que se obtuvieron, de los que hay que destacar el correcto comportamiento de la presión en las esquinas superiores de la cavidad donde, debido a la discontinuidad de la velocidad, existe una indeterminación. En estos dos puntos, como condición de contorno se impuso la velocidad nula ($\mathbf{u} = (0, 0)$) lo que se conoce como "*ramp condition*", no obstante el hecho de imponer la velocidad tangencial ($\mathbf{u} = (1, 0)$) en dichos puntos no mostró influencias significativas en el resultado final.

En las figuras (5.8) y (5.9) se presentan los perfiles de velocidad comparados con los resultados de Ghia. Se puede observar un sensible discrepancia de los mismos en la parte inferior del dominio, especialmente para el problema con el $Re = 1000$. Esta discrepancia se debe a que la discretización en la zona de la pared derecha,

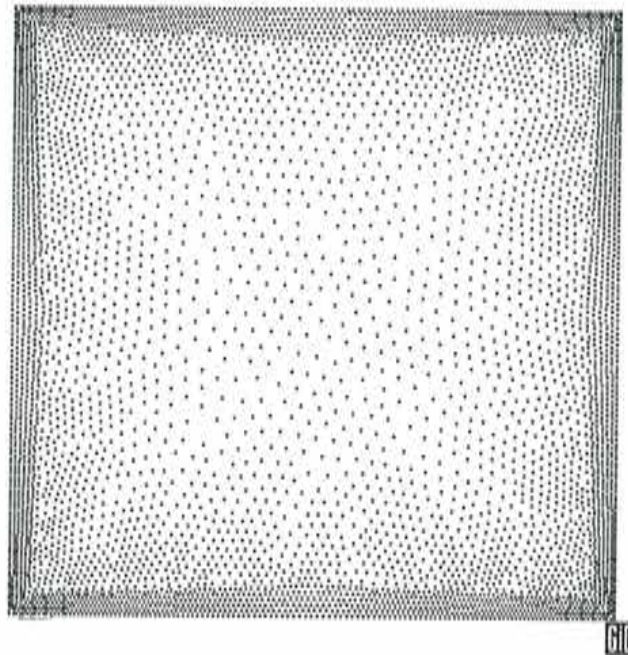


Figura 5.5: Flujo confinado en una cavidad. Distribución de puntos utilizada para los ejemplos con $Re = 400$ y $Re = 1000$.

donde choca el fluido, no es lo suficientemente fina. Los resultados utilizados para realizar la comparación fueron obtenidos con elementos de capa límite en esa zona lo que permite un mejor representación del flujo. De todas formas la comparación es muy satisfactoria.

Flujo sobre un escalón inverso a $Re = 389$

En este ejemplo el flujo se mueve en un conducto bidimensional que presenta un escalón inverso. La altura del escalón se define en forma proporcional a la altura de la entrada del conducto. La presencia del escalón produce un vórtice que ha sido estudiado en forma experimental y a partir de estos ensayos se obtuvieron perfiles de velocidad que compararemos con los resultados numéricos.

Un esquema de la geometría (no se respeta la escala) y las condiciones de contorno que definen el problema se muestran en la figura (5.10), en la misma también se señalan las posiciones de las cuales se obtuvieron las mediciones.

En la entrada del dominio se prescribió una velocidad constante ($\mathbf{u} = (1, 0)$) y en las paredes se impuso la condición de no deslizamiento ($\mathbf{u} = (0, 0)$), mientras que en la salida se prescribió la tensión normal a cero. Los efectos de la gravedad no fueron tenidos en cuenta. El número de Reynolds se calculó en función de la altura

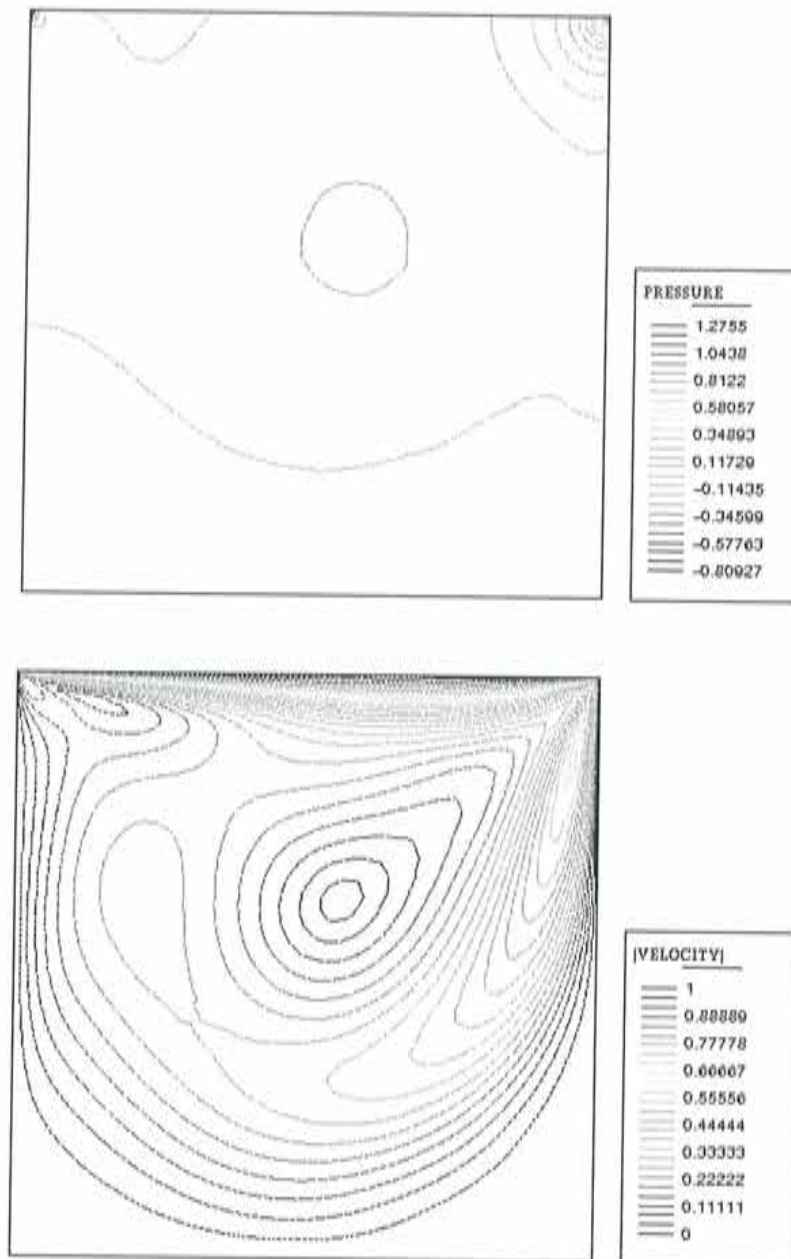


Figura 5.6: Flujo confinado en una cavidad. Isólfneas de presión (arriba) y de velocidad (abajo), $Re = 400$.

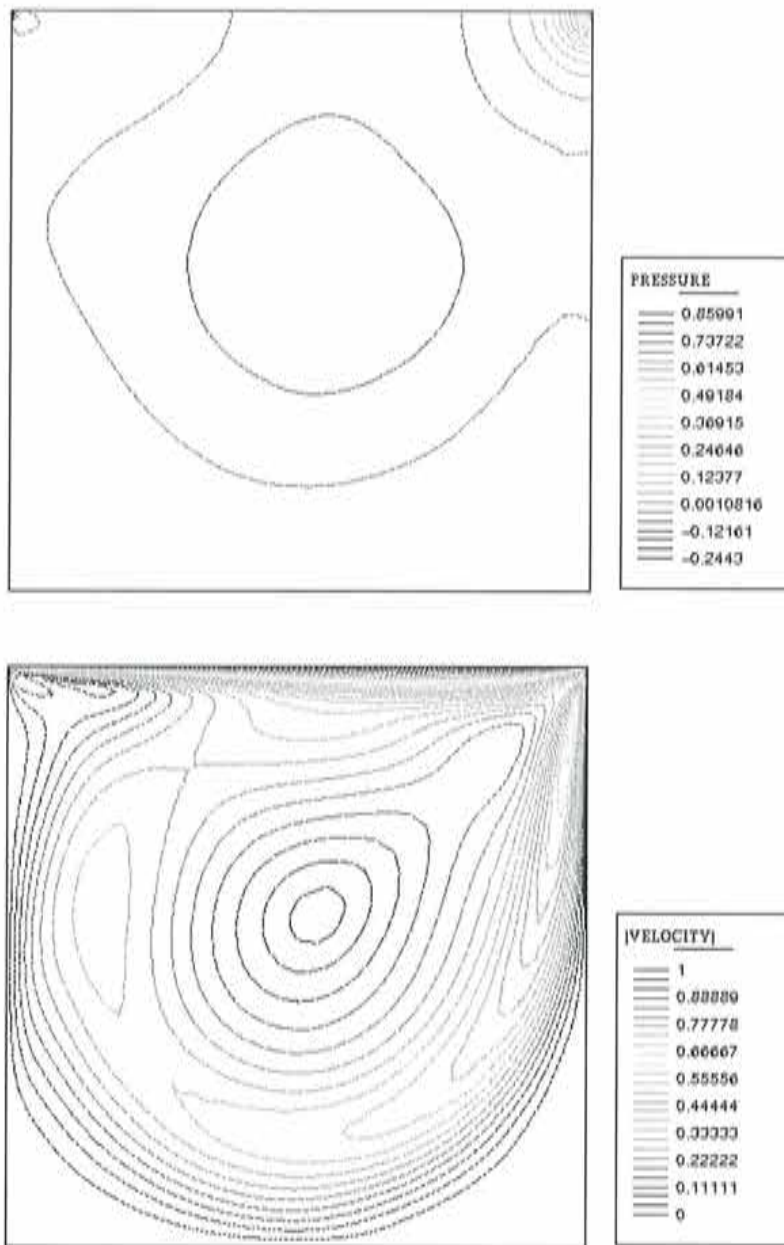


Figura 5.7: Flujo confinado en una cavidad. Isolneas de presión (arriba) y de velocidad (abajo), $Re = 1000$.

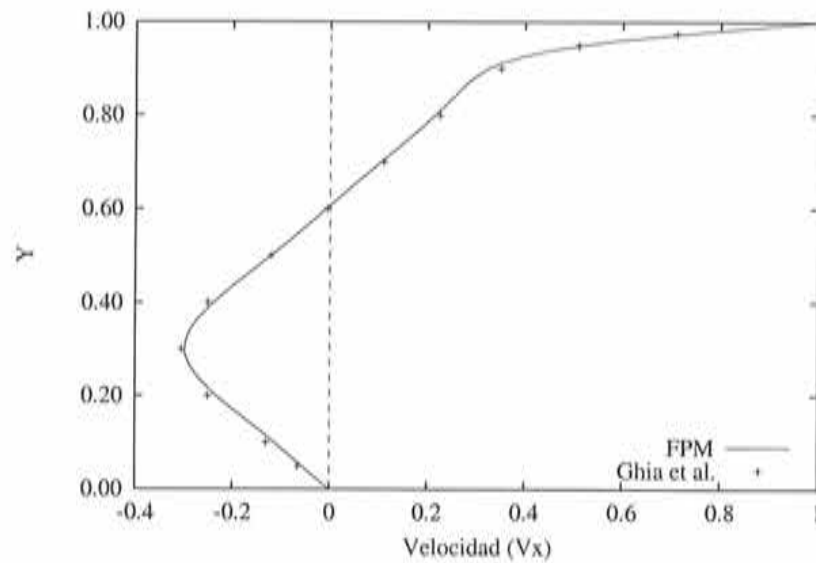


Figura 5.8: Flujo confinado en una cavidad. Comparación del perfil de la componente de la velocidad u a lo largo de una línea vertical que pasa por el centro de la cavidad, $Re = 400$.

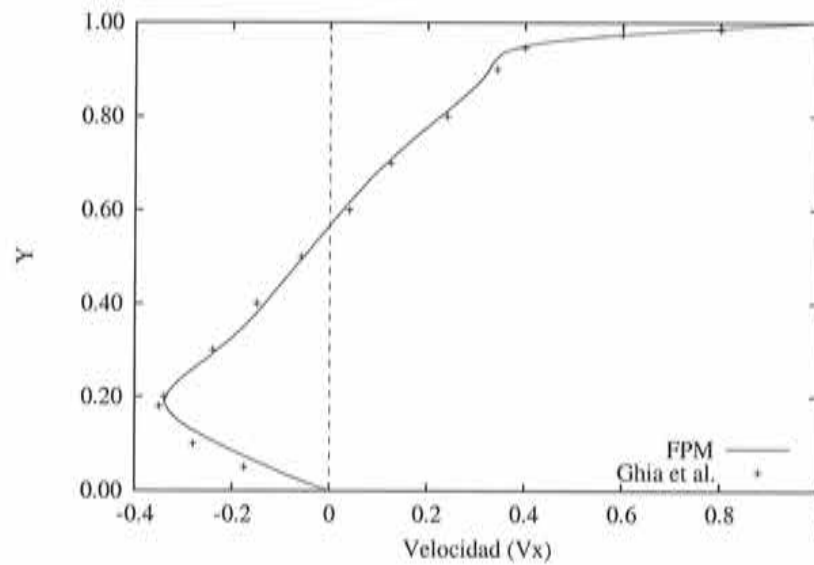


Figura 5.9: Flujo confinado en una cavidad. Comparación del perfil de la componente de la velocidad u a lo largo de una línea vertical que pasa por el centro de la cavidad, $Re = 1000$.

de la sección de entrada del conducto, siendo en este caso $Re = 389$.

La discretización se realizó mediante 8321 puntos dispuestos en forma homogénea en todo el dominio con una leve concentración en la esquina superior del escalón donde se producen importantes gradientes de presión. En la figura (5.11) se muestra el detalle de la distribución de puntos en la región del escalón.

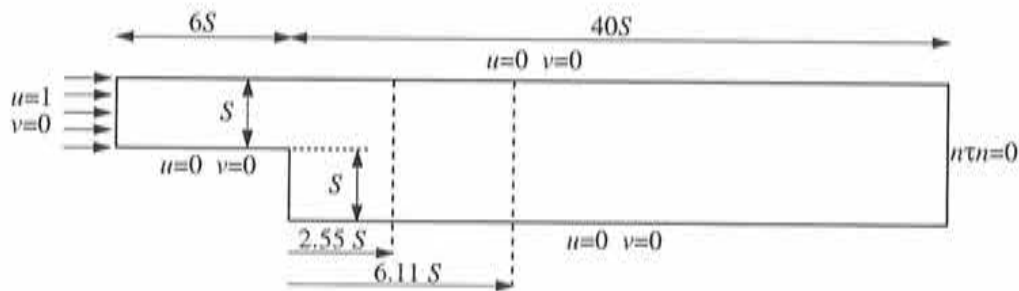


Figura 5.10: Flujo sobre un escalón inverso. Esquema del dominio y de las condiciones de contorno.

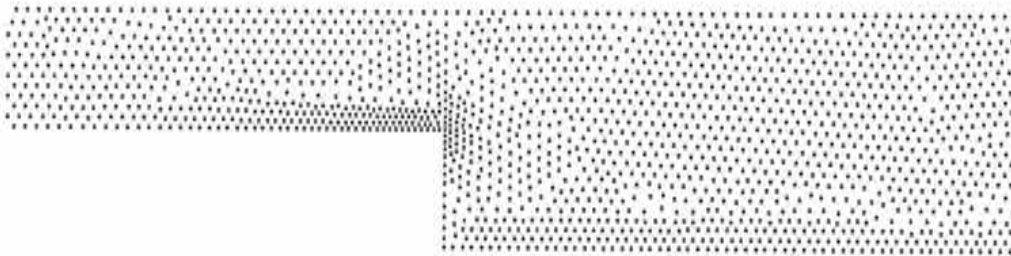


Figura 5.11: Flujo sobre un escalón inverso. Detalle de la distribución de puntos.

Como condición inicial se impuso un velocidad $\mathbf{u} = (1, 0)$ en todo el dominio y para arribar a la solución fueron necesarias 12000 iteraciones con lo cual se obtuvo un residuo para la velocidad del orden de 5×10^{-7} .

En las figuras (5.12) se muestran los contornos de presión y de velocidad que nos dan una idea clara del desarrollo del fluido en el interior del dominio. También nos permite apreciar la formación del vórtice detrás del escalón. La comparación con los resultados experimentales muestra una concordancia satisfactoria, esto se puede observar en la figura (5.13).



Figura 5.12: Flujo sobre un escalón inverso. Contornos de presión (arriba) y de velocidad (abajo).

Flujo alrededor de un cilindro a $Re = 100$

Este ejemplo es muy utilizado para la validación de técnicas numéricas debido a que, bajo ciertas condiciones, presenta un resultado periódico, permitiendo de esta forma comprobar el comportamiento del algoritmo en régimen transitorio.

El problema se trata de un cilindro sumergido en una corriente uniforme y el dominio exterior es rectangular. Como condiciones de contorno se impone $\mathbf{u} = (0, 0)$ sobre las paredes del cilindro, se prescribe la velocidad en la entrada $\mathbf{u} = (1, 0)$ y en las paredes superior e inferior del dominio se prescribe la componente normal de la velocidad ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$), finalmente se fija el valor de la presión en la salida, haciendo la tensión normal cero ($\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0$). El número de Reynolds se calcula basado en el diámetro del cilindro.

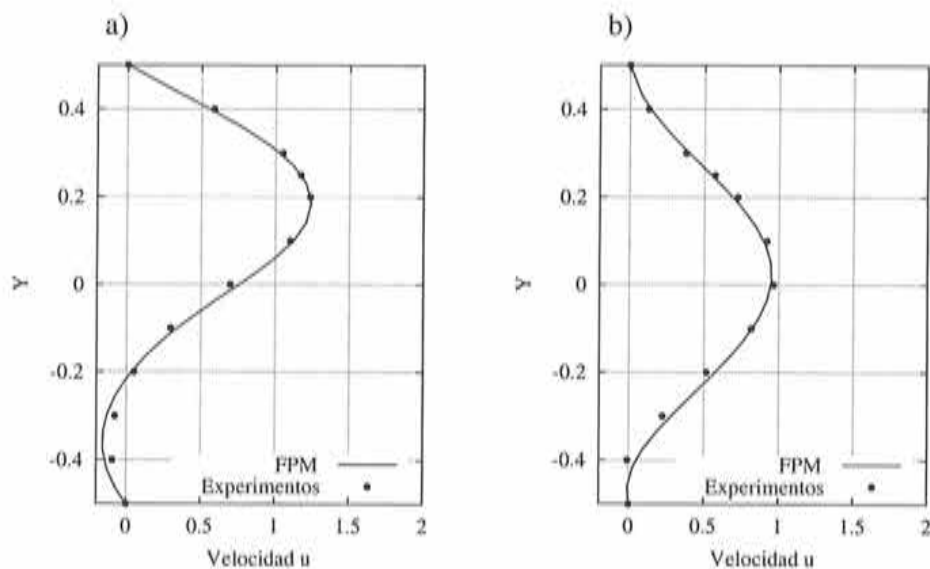


Figura 5.13: Flujo sobre un escalón inverso. Comparación de los perfiles de velocidad: a) posición $2.55S$ y b) posición $6.11S$.

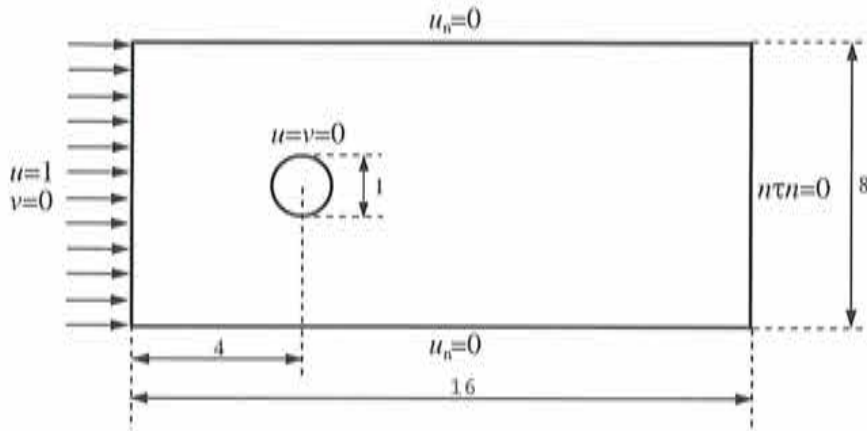


Figura 5.14: Flujo alrededor de un cilindro. Esquema de la geometría y las condiciones de contorno.

En la figura (5.14) se pueden ver en forma esquemática la geometría y las dimensiones del dominio de cálculo como así también las condiciones de contorno previamente mencionadas.

Para números de Reynolds menores a 40 se desarrollan dos vórtices simétricos detrás del cilindro y a medida que aumenta su valor los vórtices se vuelven inestables y comienzan a oscilar de forma periódica, este fenómeno fue descrito por von Karman. En el ejemplo propuesto se utilizó $Re = 100$, valor para el cual se puede encontrar una gran cantidad de resultados, tanto experimentales como numéricos [ENG 90], [TEZ 90].

El dominio se discretizó mediante 5155 puntos que, como se aprecia en la figura (5.15), se concentraron en la zona donde se encuentra el cilindro.

Para lograr que comiencen a oscilar los vórtices es necesario realizar una gran cantidad de pasos de tiempo. Para acelerar este proceso se introdujo una perturbación en el flujo durante 100 pasos y luego se quitó, de esta forma se produjo una asimetría en el flujo suficiente como para inducir la inestabilidad de los vórtices. Para alcanzar la solución periódica fueron necesarias 7000 iteraciones lo que equivale a 60 unidades de tiempo.

Los resultados se muestran en las figuras (5.17) y (5.18). En la primera de ellas se presentan, mediante isofneas de velocidad, cuatro instantes diferentes, estas imágenes nos permiten ver el movimiento de los vórtices. En la segunda figura se observan los vectores de velocidad detrás del cilindro, los cuales permiten apreciar la aparición, y posterior evolución de un vórtice (parte superior de las imágenes).

En la figura (5.16) se muestra la variación de la fuerza vertical producida por la presión respecto al tiempo, en esta imagen se evidencia el comportamiento periódico del flujo. Por otro lado el hecho de que tanto la amplitud como el período se

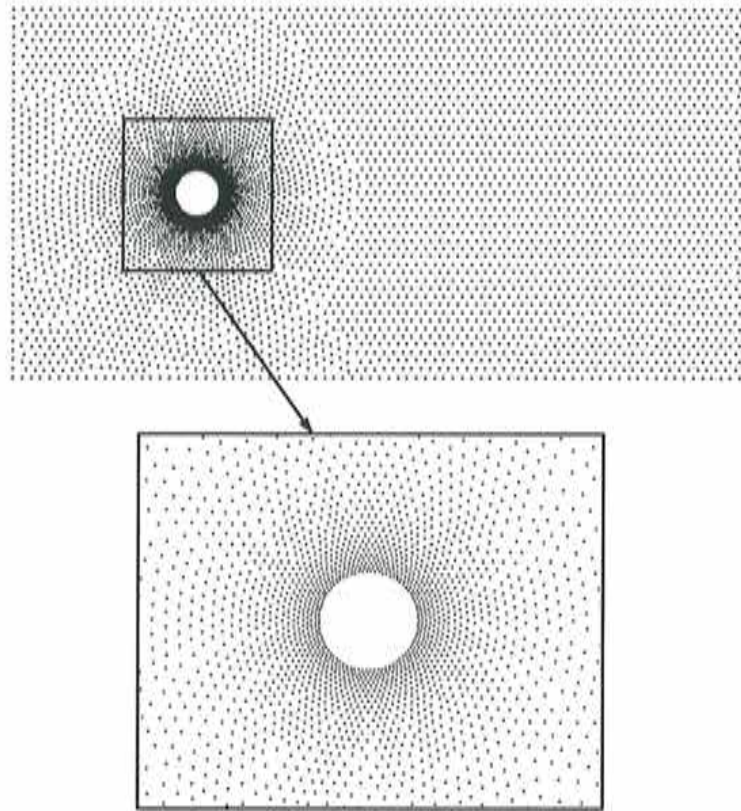


Figura 5.15: Flujo alrededor de un cilindro. Discretización del dominio mediante puntos y detalle de la misma en la zona mas densificada.

mantenga sin variaciones nos permite concluir que el algoritmo no es difusivo en el tiempo.

El período calculado en forma experimental por Roshko en [ROS 54] fue de 5.98 [s], en este trabajo se obtuvo un período de 6.08 [s], con lo cual el error es menor al 1.5%. Valores numéricos muy aproximados han sido obtenidos por otros autores [SIM 94].

Flujo alrededor de un perfil NACA 0012 a $Re = 10000$

El problema planteado tiene la particularidad de presentar una capa límite de pequeño espesor, con lo cual aparecen importantes gradientes en la velocidad en dirección normal al flujo, lo cual propicia la aparición de inestabilidades numéricas que no son eliminadas por la estabilización que se añade en la dirección de las líneas de corriente. Esto nos permite constatar la efectividad de la estabilización transversal que se introdujo.

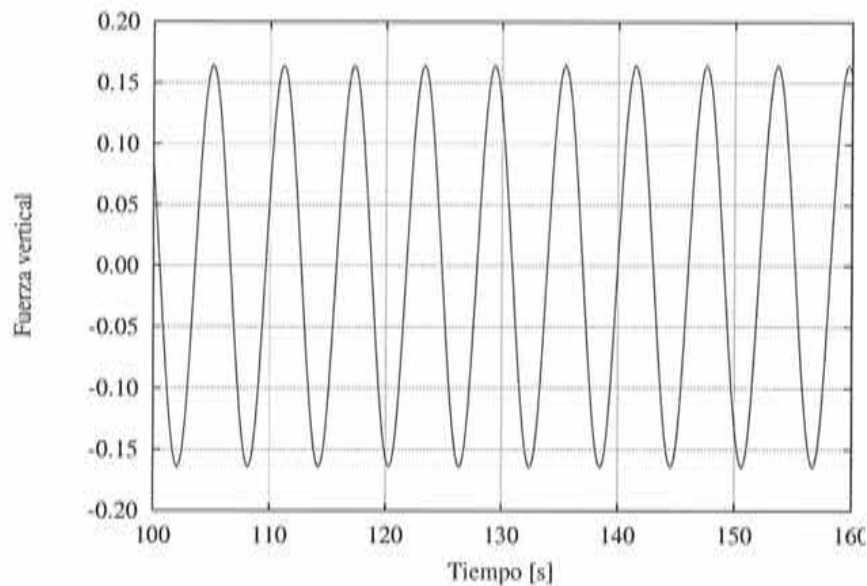


Figura 5.16: Flujo alrededor de un cilindro. Variación de la fuerza vertical producida por la presión con respecto al tiempo.

Como condiciones de contorno (ver fig. (5.19)) se impuso la velocidad sobre el perfil $\mathbf{u} = (0, 0)$, en la entrada del dominio se prescribió $\mathbf{u} = (1, 0)$, sobre las paredes laterales del mismo $u_n = 0$. y en la salida del dominio se prescribió la presión a cero.

La discretización se realizó mediante 14249 puntos, densificando la zona de la capa límite y la estela, lo que se puede apreciar en la figura (5.20). En la misma figura se muestra un detalle de la discretización en la capa límite.

La figura (5.21) muestra los resultados que se obtienen para este problema una vez alcanzado el estado estacionario en la cual hay que destacar el correcto desarrollo de la estela y la formación de la capa límite. Por otro lado si observamos detenidamente podemos apreciar una leve asimetría en las isolíneas de velocidad, esta asimetría es producida por la oscilación de la estela, que a simple vista es imperceptible.

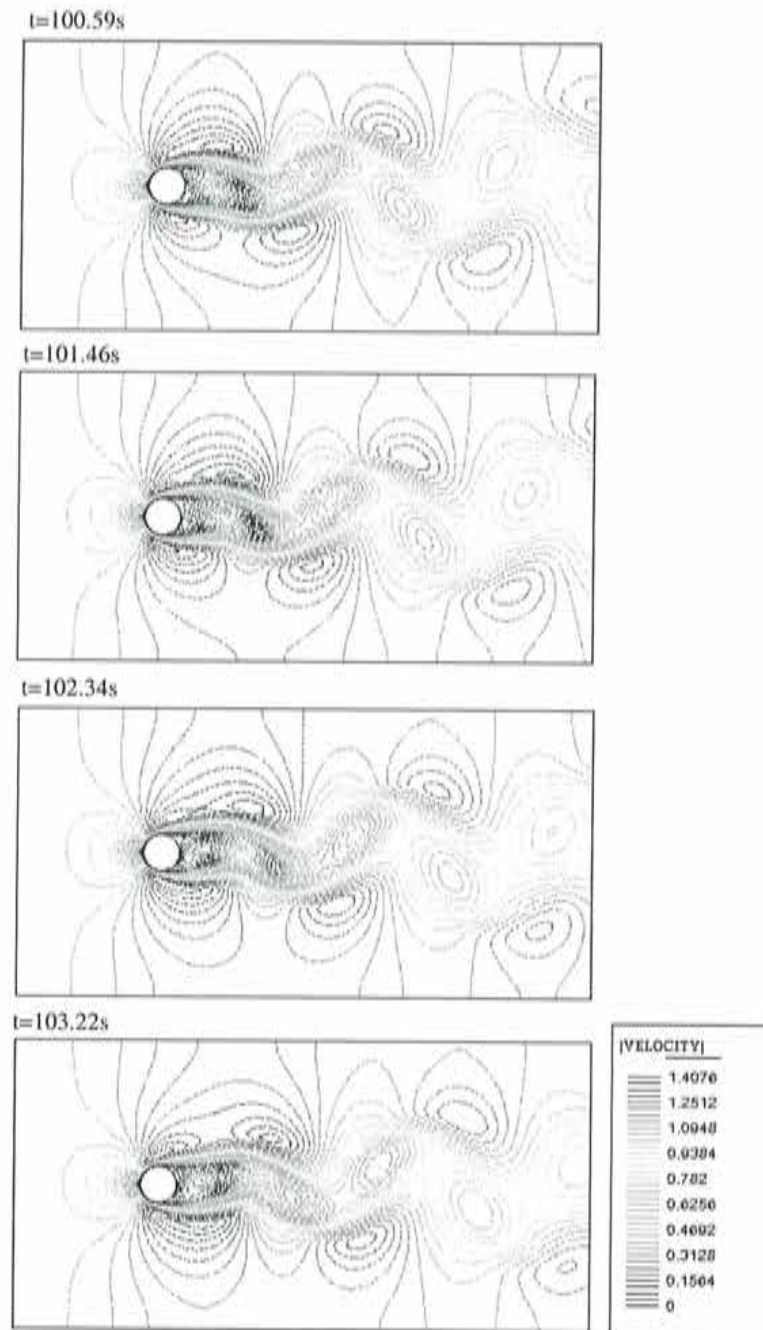


Figura 5.17: Flujo alrededor de un cilindro. Isolfneas de velocidad.

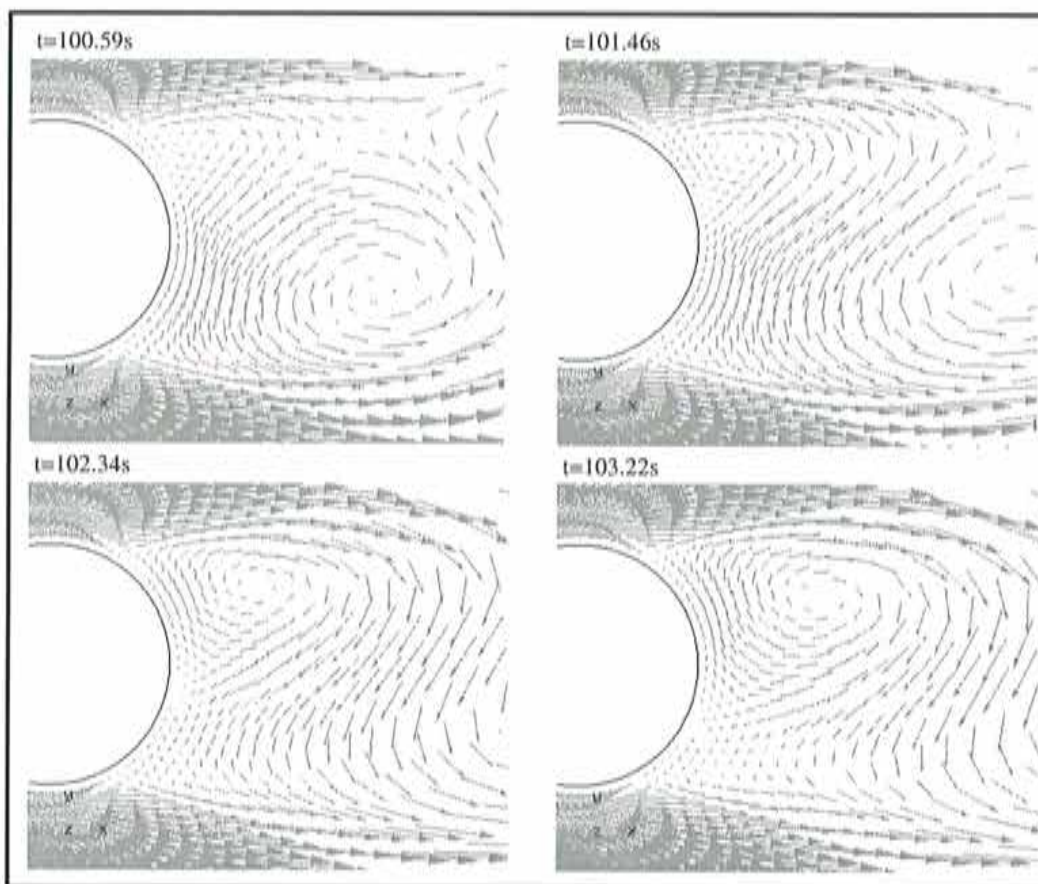


Figura 5.18: Flujo alrededor de un cilindro. Vectores de velocidad detrás del cilindro.

5.3.3 Problema de Euler

Sin dudas las ecuaciones de Euler han presentado las mayores dificultades debido a su naturaleza inestable. En la resolución de estos problemas es preponderante el papel que juega la estabilización numérica, especialmente para que su efecto, además de estabilizar, no introduzca un exceso de difusión.

Los problemas planteados fueron los únicos en los que apareció un severo problema producido por el desbalanceo de las nubes, con lo cual se debieron desarrollar nuevas técnicas de selección de puntos. Como respuesta a la dificultad presentada surgió un método de selección de nubes basado en la triangulación de Delaunay (ver *Capítulo 6*).

Como problema test se eligió un perfil aerodinámico sumergido en una corriente uniforme, a distintos ángulos de ataque.

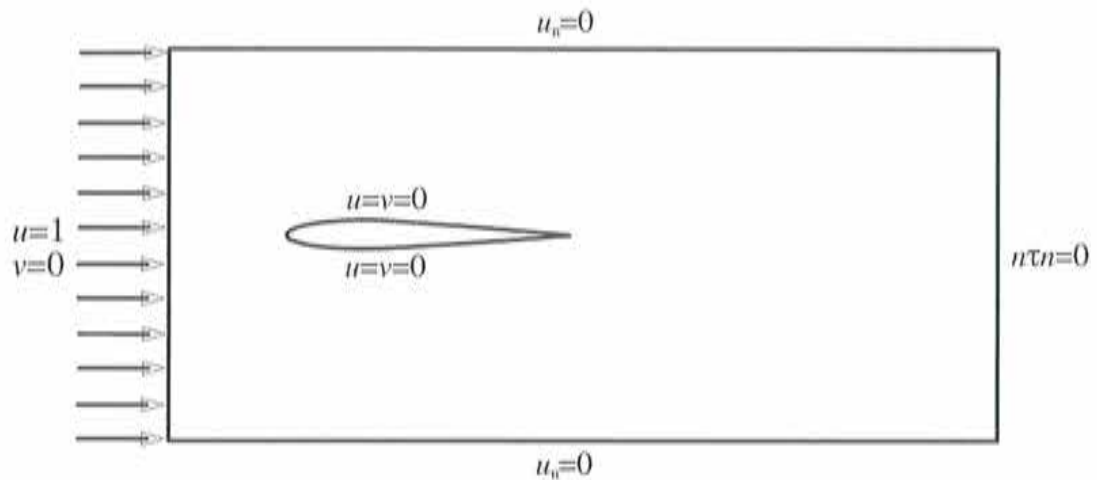


Figura 5.19: Flujo alrededor de un perfil NACA 0012. Geometría y condiciones de contorno.

Flujo alrededor de un perfil NACA 0012

El flujo alrededor del perfil NACA 0012, es uno de los problemas test más utilizados para evaluar los algoritmos numéricos que resuelven las ecuaciones de Euler, esto se debe a que existen una gran cantidad de resultados tanto numéricos como experimentales para este perfil aerodinámico.

Las características geométricas del problema y las condiciones de contorno se presentan en la figura (5.14).

Sobre el perfil se impuso como condición que la componente normal de la velocidad sea nula lo que da lugar a la condición de deslizamiento libre, lo que implica que la tensión tangencial entre el fluido y la pared también es nula. Otro aspecto a destacar es la imposición de la presión en la salida del dominio y no de la tensión como se hizo en otros ejemplos; esta decisión se debe a cuestiones de índole netamente práctica ya que conocemos de antemano que el flujo en la salida permanece sin perturbar, con lo cual la condición de $n\tau n = 0$ se traduce en $p = cte$.

La discretización se realizó mediante 5219 puntos concentrados en la zona cercana al perfil, especialmente en el punto de impacto y el borde de fuga del mismo. En la figura (5.23) se muestra un detalle de la distribución de punto.

Estabilización de mayor orden. Otra conclusión importante que se extrajo de este problema está relacionado con la estabilización de la ecuación de momento. Se comprobó que la derivada primera del residuo como estabilización no era suficiente para este tipo de problemas.

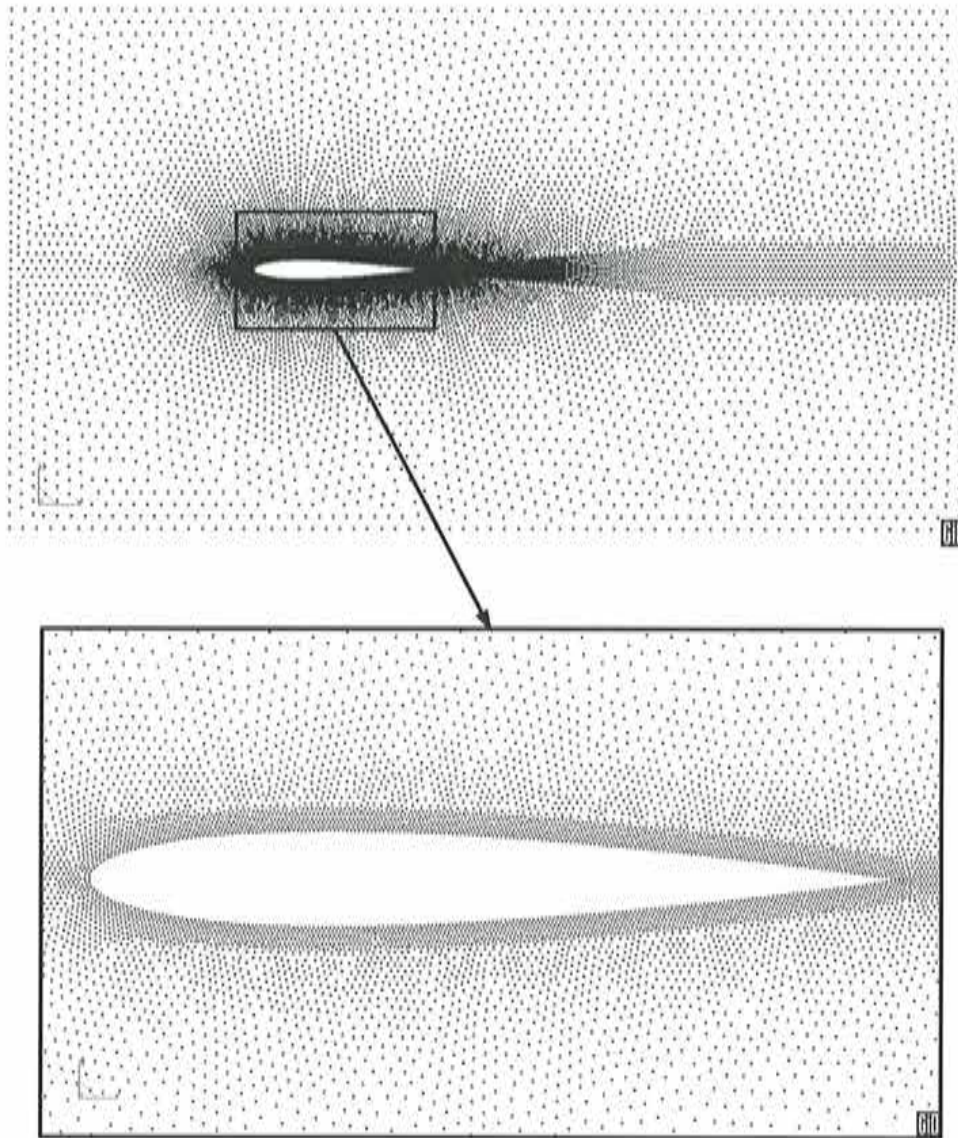


Figura 5.20: Flujo alrededor de un perfil NACA 0012. Distribución de puntos y detalle en la zona cercana al perfil.

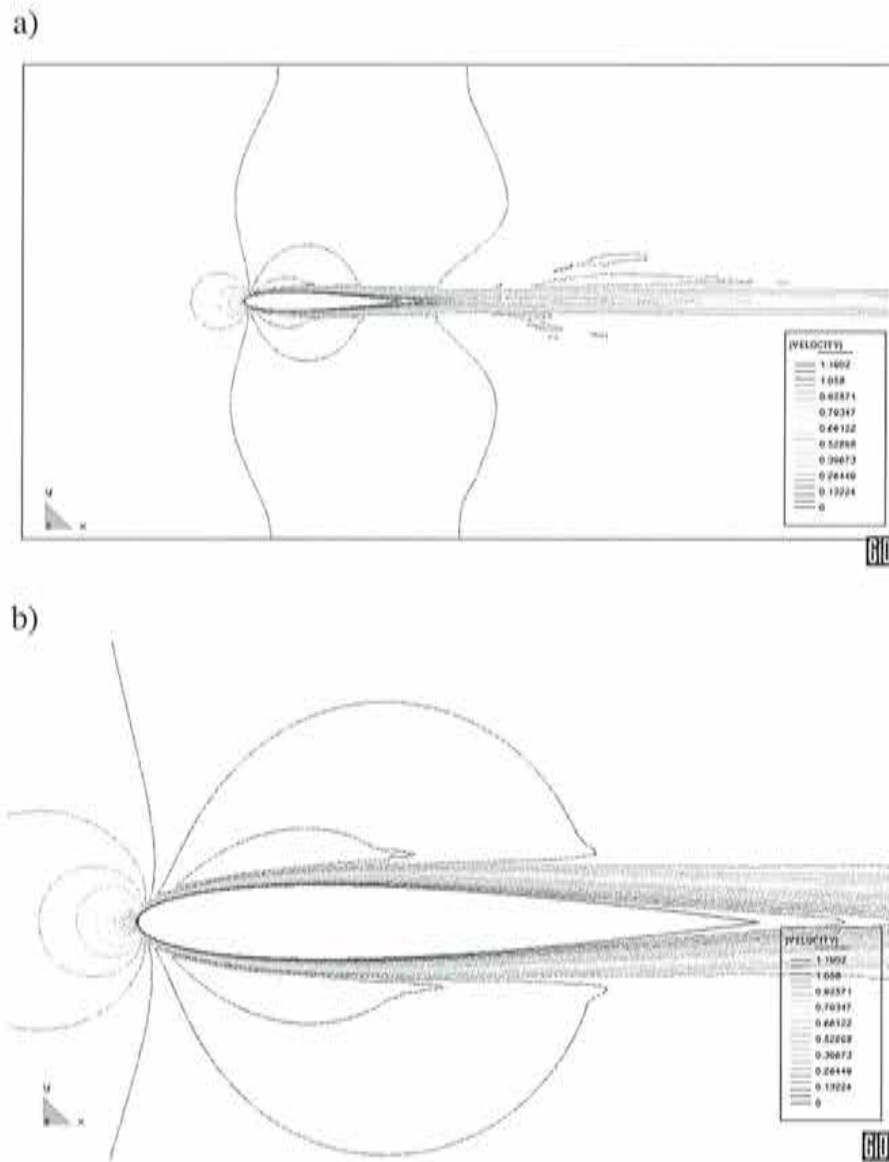


Figura 5.21: Flujo alrededor de un perfil NACA 0012. Isolineas de velocidad.

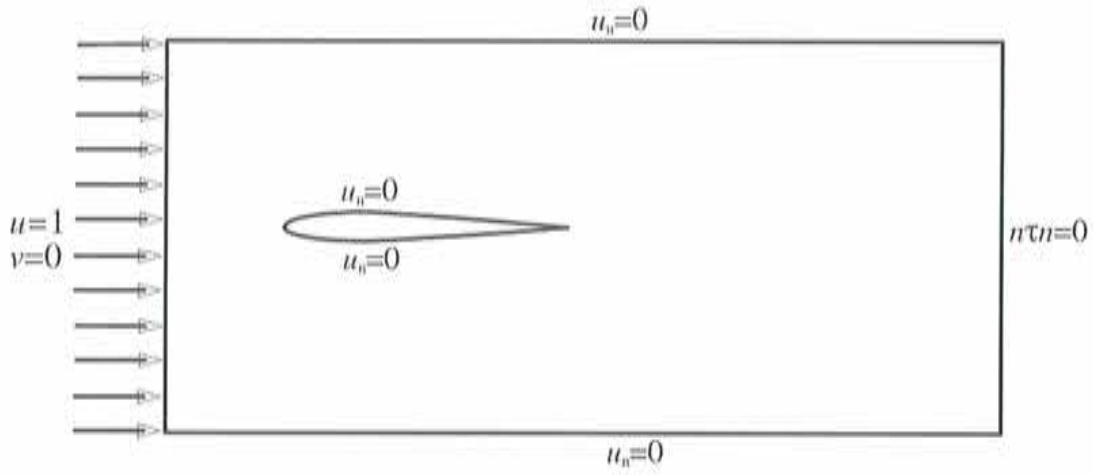


Figura 5.22: Flujo alrededor de un perfil NACA 0012. Geometría y condiciones de contorno.

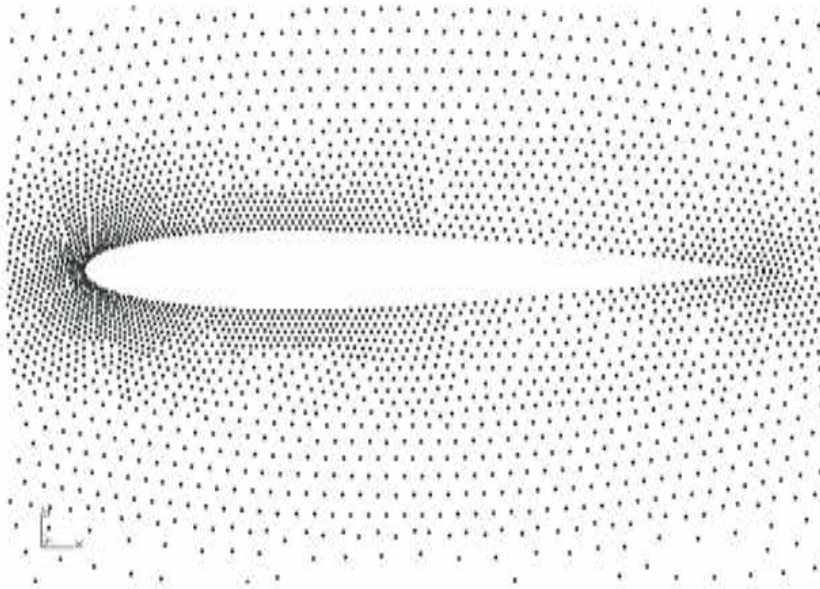


Figura 5.23: Flujo alrededor de un perfil NACA 0012. Detalle de la distribución de puntos.

En la figura (5.24) presentamos los resultados estabilizados mediante: a) estabilización de tercer orden; y b) estabilización de segundo orden. En la parte b) de esta figura se aprecian leves perturbaciones en las isofleas de velocidad que se incrementan en forma gradual deteriorando la solución.

Haciendo un análisis cualitativo de los resultados se llegó a la conclusión de que la estabilización de segundo orden es sobredifusiva en ciertas regiones y se ha observado que esta sobredifusión se hace más preponderante a medida que el problema converge. Si bien en un principio los resultados que se obtienen son correctos y el residuo es lo suficientemente pequeño la tendencia se revierte y el problema comienza a diverger aunque en forma gradual, como lo podemos observar en la curva de la convergencia de la velocidad, en la figura (5.25).

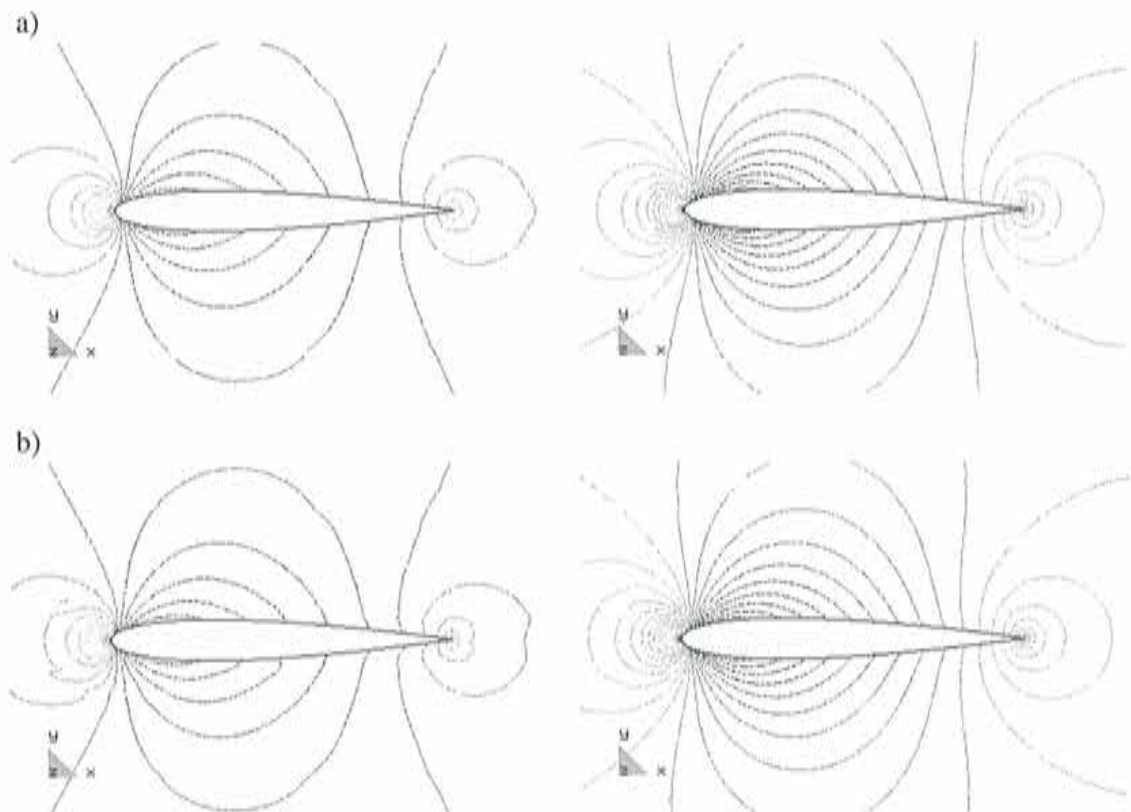


Figura 5.24: Flujo alrededor de un perfil NACA 0012. Resultados de velocidad (izquierda) y presión (derecha), obtenidos con: a) estabilización de tercer orden y b) estabilización de segundo orden.

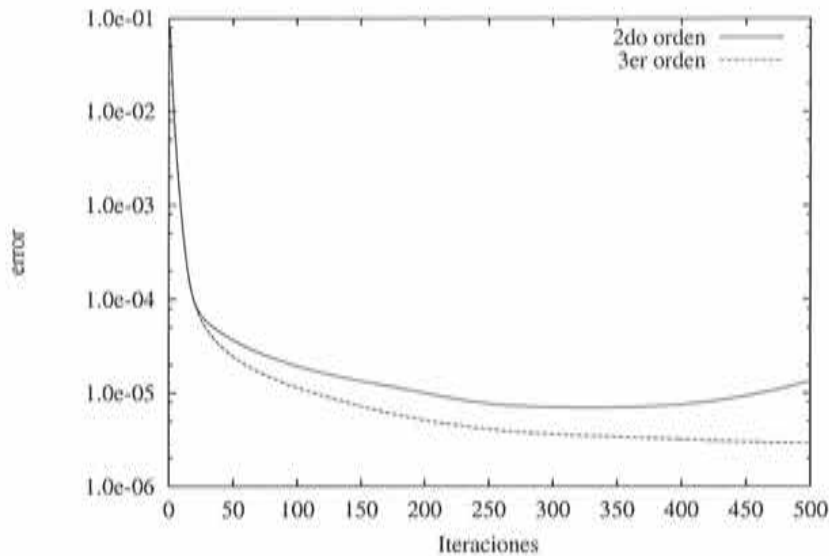


Figura 5.25: Flujo alrededor de un perfil NACA 0012. Convergencia de la velocidad para el problema con la estabilización de 2^{do} y 3^{er} orden.

Influencia de la distribución de puntos en las nubes. En los ejemplos de fluido que se presentaron anteriormente no se observaron problemas producidos por la distribución de puntos dentro de las nubes, motivo por el cual se utilizó la técnica más simple para su generación. La sensibilidad mostrada en los problemas resueltos mediante las ecuaciones de Euler (no se lograba convergencia) nos llevó a desarrollar una técnica de generación de nubes que nos permita controlar el balance en distribución de puntos en cada nube.

La importancia de la correcta selección de la nube de puntos queda reflejada en la figura (5.26) en la que se muestran los resultados de velocidad y la presión. Los resultados en a) se obtuvieron con las nubes calculadas en forma balanceada y en b) se generaron simplemente con un círculo que en ciertos puntos las nubes generadas están muy desbalanceadas.

Comparación de resultados: a continuación se presenta la distribución de presión (expresado como coeficiente de presión C_p) para el perfil NACA 0012 con distintos ángulos de ataque ($\alpha = 0^\circ, 5^\circ$ y 10°), además se muestra la comparación de los resultados obtenidos para $\alpha = 0^\circ$ con resultados experimentales [GHO 39].

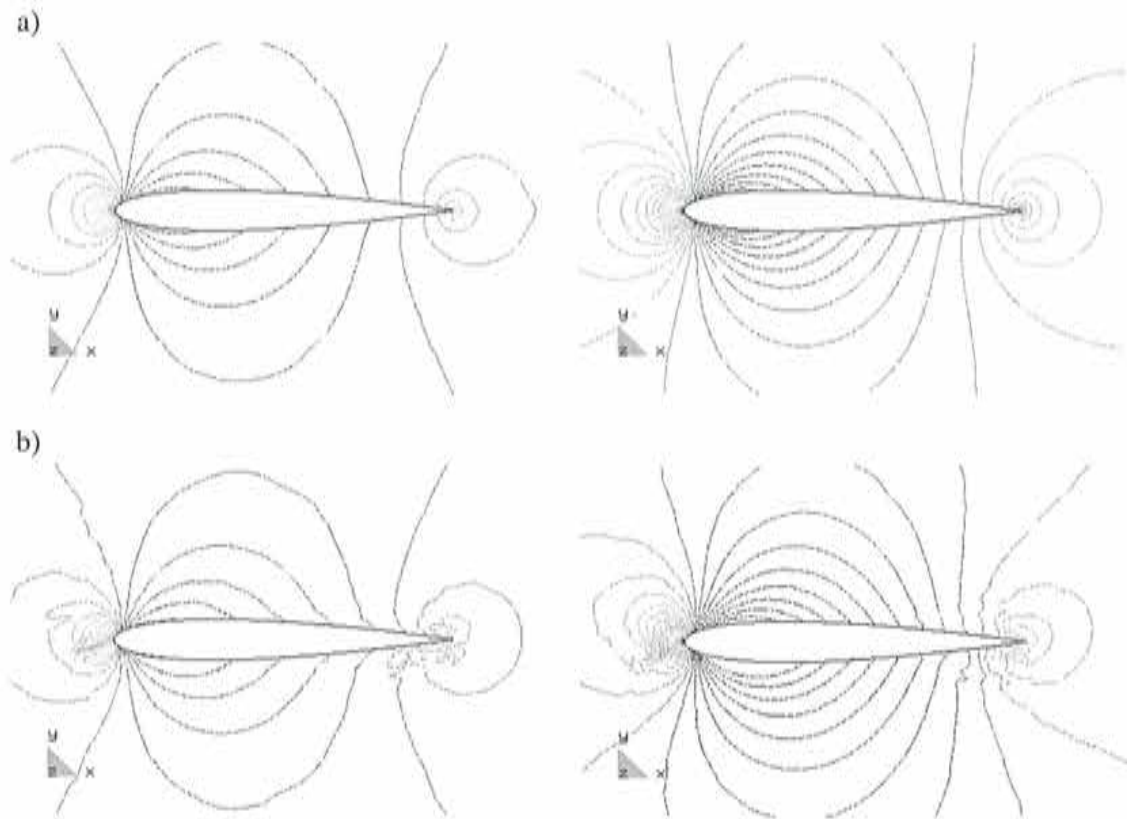


Figura 5.26: Flujo alrededor de un perfil NACA 0012. Resultados de velocidad (izquierda) y presión (derecha), obtenidos para a) nubes balanceadas y b) nubes sin balancear.

5.3.4 Navier Stokes 3D

En este apartado se presentan resultados del problema del escalón inverso tridimensional. La velocidad se fija a $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ en el ingreso del canal y en las paredes superior e inferior se impuso $\mathbf{u} = (0, 0, 0)$. En la salida del canal se prescribió la tensión normal a cero, haciendo $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0$. En las paredes laterales del mismo se impuso una condición de simetría, que se traduce la velocidad normal igual a cero $\mathbf{u}_n = 0$ y las dos componentes de la tensión tangencial nulas ($\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t}_1 = 0$, $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t}_2 = 0$). Recordemos que en el contorno tenemos definido un sistema de ejes $(\mathbf{n}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$. Este problema se resolvió para un número de Reynolds de 100, basado en la altura de la entrada del canal. La geometría se discretizó mediante 27219 puntos y hicieron falta 8000 pasos de tiempo para llegar a una solución estacionaria.

Los resultados obtenidos nos permiten constatar la efectividad del algoritmo en problemas tridimensionales. El paso de dos a tres dimensiones, computacionalmente hablando, no reviste ninguna dificultad por la naturaleza del algoritmo.

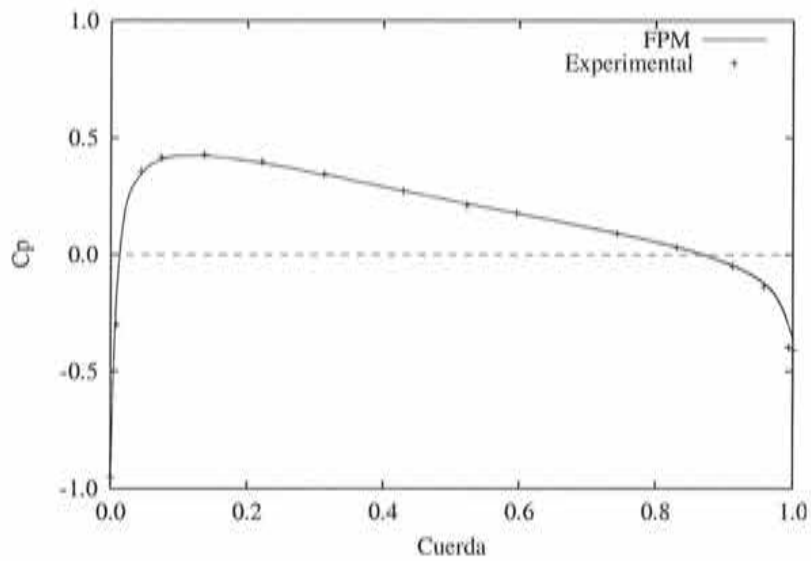


Figura 5.27: Flujo alrededor de un perfil NACA 0012. Comparación de los resultados obtenidos mediante el MPF y resultados experimentales.

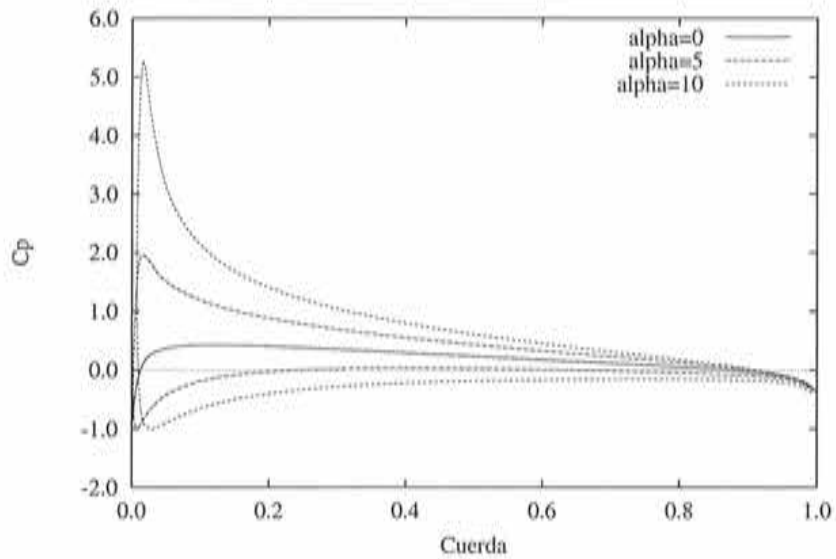


Figura 5.28: Flujo alrededor de un perfil NACA 0012. Coeficiente de presión para $\alpha = 0^\circ$, 5° y 10°

Contornos de velocidad



Contornos de presión



Figura 5.29: Flujo en un escalón inverso a $Re = 100$. Contornos de velocidad (arriba) y de presión (abajo).

5.4 Conclusiones

En este capítulo se presentó un algoritmo para resolver las ecuaciones de Navier Stokes incompresibles, donde el tratamiento de la restricción de la incompresibilidad se realizó mediante *Pasos Fraccionados*. Con la aplicación de la técnica de *Cálculo Finitesimal* se llegó a una forma estabilizada de dichas ecuaciones.

Con la resolución de diversos problemas se pusieron a prueba las diferentes facetas del algoritmo formulado, de las que debemos destacar la estabilización de la ecuación de incompresibilidad, la estabilización transversal y el las importantes mejoras introducidas mediante la estabilización de tercer orden.

En cuanto a la técnica de aproximación hay que mencionar que los resultados mostraron muy baja sensibilidad a la cantidad de puntos que se utilizaron en la construcción de cada nube, excepto en los problemas de Euler. Esta dificultades fueron superadas de forma satisfactoria con una técnica de generación de puntos basada en propiedades geométricas que se analizan en el *Capítulo 6*.

Capítulo 6

Generación de nubes

6.1 Introducción

La generación de las nubes resulta una de los puntos claves de los métodos sin malla. Este proceso debe realizarse de manera eficiente y rápida, ya que del mismo dependerán, en gran medida, las ventajas de este tipo de métodos frente a los métodos que utilizan mallas.

Si bien no era el objetivo de esta tesis el desarrollo de lo que podríamos denominar un "generador de nubes" fue necesario implementar algunos algoritmos. Con este fin se desarrollaron diferentes técnicas de las cuales se presentaron las que dieron mejores resultado. La primera, y más sencilla, se basa en la selección de los puntos según un criterio de distancia, mientras que la segunda, está basado en una técnica de generación de mallas denominada triangulación de Delaunay. De todas formas este punto requiere de futuros desarrollos que permitan obtener algoritmos robustos y más eficientes, especialmente para problemas tridimensionales donde el número de operaciones necesarias requiere de la optimización de los algoritmos.

6.2 Nubes formadas por los puntos más cercanos

6.2.1 Descripción del procedimiento

Sin lugar a dudas la obtención de un conjunto de puntos que cumplan con algunas condiciones, que enumeraremos más adelante se puede realizar de muy diversas maneras. Sin embargo el desafío es encontrar un algoritmo que sea capaz de resolver la mayor cantidad de situaciones posibles, como por ejemplo, una distribución de puntos con densidades de puntos muy dispares, o distribuciones de puntos densificadas solo en una dirección (capas límites u ondas de choque). A esto hay que agregarle la

complejidad adicional que presenta el tratamiento de los contornos, donde las nubes tienen la particularidad de tener su punto estrella en uno de los lados de la misma.

La forma más rápida e intuitiva de seleccionar un grupo de puntos para formar la nube es tomar los puntos que estén a una distancia $r_i < R$ donde R es un radio definido a partir del punto estrella, con lo cual queda definido un círculo centrado en el mismo. Una vez definido R se comprueba si la cantidad de puntos que quedan dentro del círculo es la adecuada. En caso de no ser suficientes se aumenta el radio, según algún criterio y si el número de puntos es mayor que el máximo deseado se procede a disminuir R . En el esquema mostrado en la figura (6.1) se aprecia la operación que describimos en el párrafo previo.

Basados en la experimentación numérica en problemas de fluido y de convección difusiva se definió que el número máximo de puntos en una nube es de 13 y el mínimo de 7 (interpolación cuadrática en 2D).

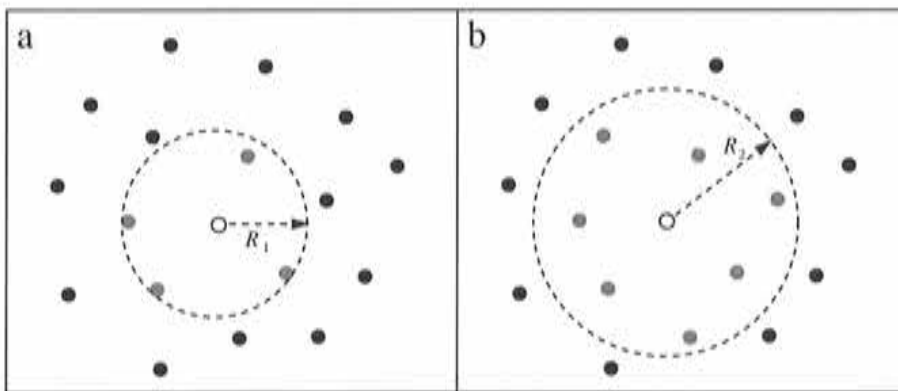


Figura 6.1: Generación de nubes. Variación del radio de la circunferencia para aumentar la cantidad de puntos en la nube.

Hay que prestar especial atención a geometrías con ángulos muy agudos, como por ejemplo, el borde de fuga de un perfil aerodinámico, ya que es posible que el círculo que se define mediante R atraviese el contorno (ver fig. (6.2-a)) y la nube formada incorpore puntos que no corresponden a la región. Si se verifica esta situación se modifica la circunferencia como se muestra en la figura (6.2-b).

El tratamiento de los contornos requiere de pequeñas modificaciones ya que el uso de la misma técnica nos lleva a formar nubes muy extendidas en la dirección tangente al contorno como lo muestra la figura (6.3). Para subsanar este inconveniente se optó por definir un elipsoide que tiene el radio mayor en la dirección normal al contorno como lo indica la figura (6.3). Los radios están definidos de forma que $R_{\max} = k \cdot R_{\min}$, en los casos presentados en esta tesis se tomó $k = 2$.

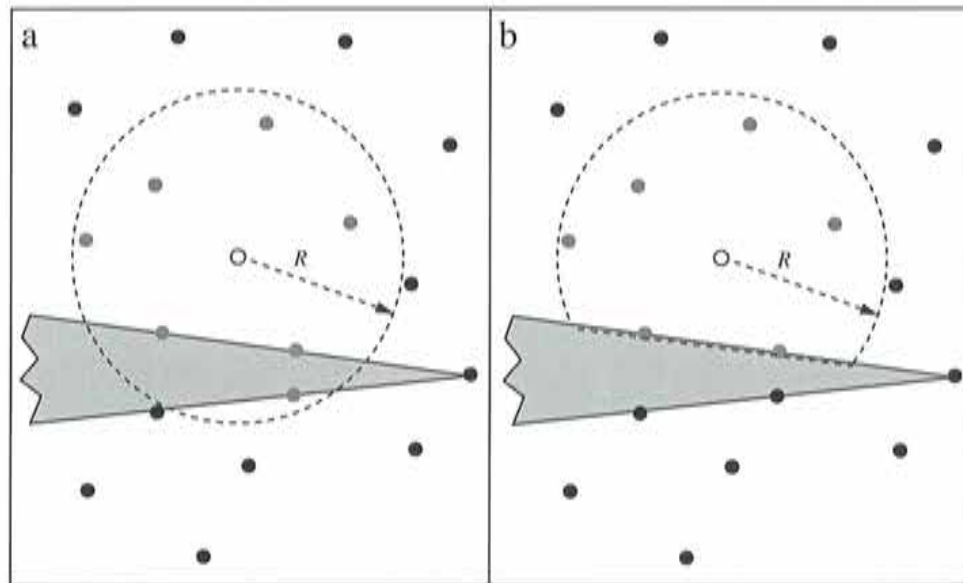


Figura 6.2: Generación de nubes. a) Nube que atraviesa el contorno. b) Nube corregida.

En la generación de las nubes de contorno hay que verificar, como en el caso de las nubes interiores, que la misma no atravesase un contorno.

La extensión del algoritmo presentado a problemas tridimensionales es inmediato ya que la circunferencia se transforma en una esfera y la elipse en un elipsoide de revolución.

6.2.2 Casos particulares que presentan dificultades

Como se puede apreciar el algoritmo presentado es muy sencillo y además muy eficiente para la mayoría de los problemas que se plantearon en esta tesis, tanto en dos dimensiones como en tres dimensiones. Sin embargo, existen problemas en los cuales la aplicación de esta técnica dio como resultado nubes cuya calidad es baja, como por ejemplo en el problema del perfil NACA 0012 en un flujo no viscoso (ver página 174), donde los resultados obtenidos son deficientes.

Cuando la densidad de puntos en un dominio es muy dispar, podemos encontrar situaciones como la que se presenta en la figura (6.4) donde la aplicación de la técnica desarrollada nos lleva a formar nubes desbalanceadas, y por lo tanto la función de aproximación definida para este tipo de nubes será incorrecta.

Si la densificación de puntos se realiza solo en una dirección aparecerán dificultades semejantes a la que se plantearon previamente. Un ejemplo de ello son los problemas en los que se modela la capa límite. En este caso solo es necesario densificar en dirección normal al contorno, ya que solo en esa dirección aparecen gradientes

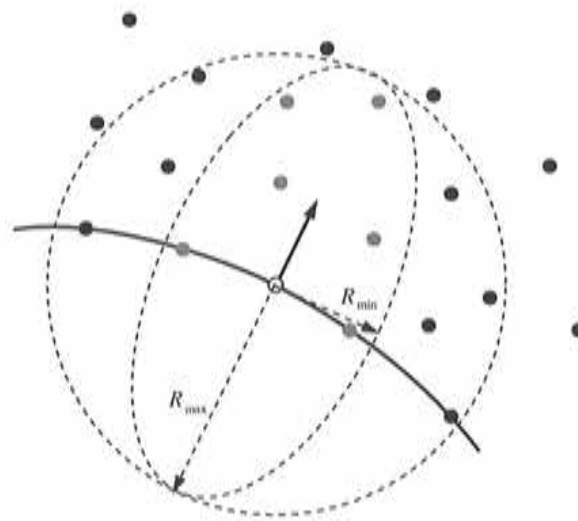


Figura 6.3: Generación de una nube de contorno.

importantes (ver fig. (6.5)).

6.3 Triangulación local de Delaunay

La triangulación de Delaunay es ampliamente conocida en el ámbito de la generación de mallas, siendo una de las técnicas más utilizadas. Este tipo de triangulación tiene la característica de ser única, excepto casos puntuales que comentaremos más

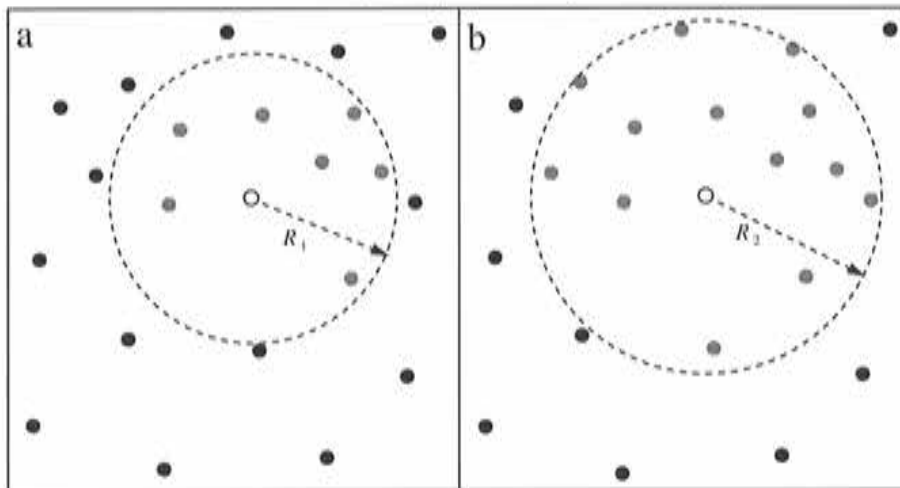


Figura 6.4: Esquema de una nube desbalanceada.

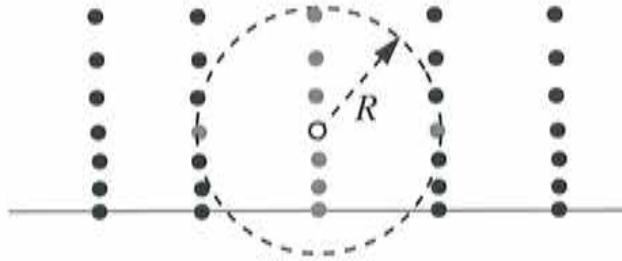


Figura 6.5: Discretización típica de capa límite.

adelante.. Por otro lado relaciona a cada punto con sus vecinos más cercanos de forma óptima para la aplicación del *Método de los Elementos Finitos*. Para aprovechar estas cualidades se propuso utilizar esta técnica para la construcción de las nubes.

6.3.1 Generación de una nube en el interior del dominio

A continuación se presentan los pasos a seguir:

1. se definen cuatro cuadrantes centrados en el punto estrella (1) y en cada uno de ellos se escoge el punto más cercano (2, 3, 4 y 5) (fig. (6.6-a)).
2. se forman cuatro triángulos uniendo cada uno de estos puntos con el punto estrella (fig. (6.6-b))
3. en cada triángulo generado se traza la circunferencia definida a través de los puntos que los componen, y se verifica si hay algún punto en el interior de dicho círculo. En caso de existir un punto interior se elimina el triángulo original y se crean dos nuevos triángulos. Para ejemplificar el procedimiento en la figura (6.6-c) se trazó el círculo definido por los puntos 1,4 y 5, en este caso el punto 6 queda en el interior del círculo, por lo tanto se elimina el triángulo 1,4,5 y se forman dos nuevos triángulos, el 1,4,6 y el 1,6,5. (fig. (6.6-d)).
4. se repite la operación hasta que ningún círculo contenga puntos en su interior, figuras (6.6-e), (6.6-f).
5. se forma la nube con los puntos contenidos en la triangulación..

Es posible que una vez formados los cuatro triángulos iniciales, uno de los puntos utilizados esté contenido en la circunferencia de alguno de los triángulos. En este caso se eliminan dos triángulos y se genera uno nuevo, eliminando uno de los puntos. Este procedimiento se muestra esquemáticamente en la figura (6.7).

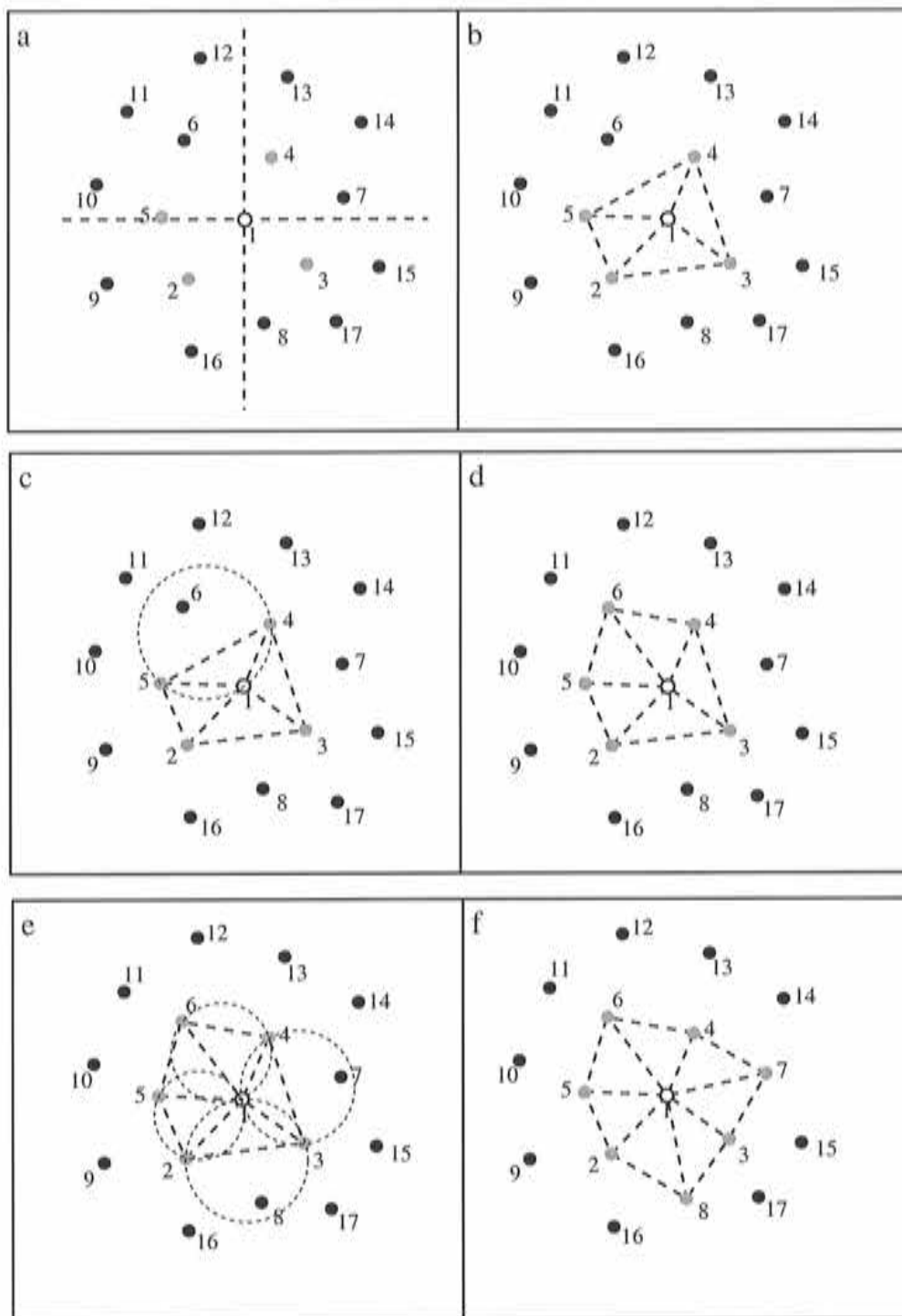


Figura 6.6: Triangulación de Delaunay, pasos para la generación de una nube.

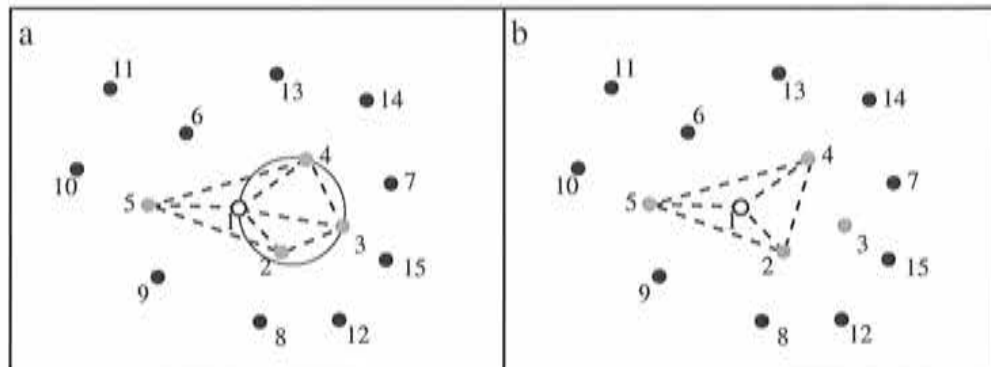


Figura 6.7: Defecto en la triangulación inicial.

Es muy importante destacar que con este método la nube obtenida es independiente de los puntos elegidos inicialmente, y además es única.

Si la cantidad de puntos que se obtienen mediante la triangulación no es suficiente, o si la calidad de la nube no es adecuada, se agrega una segunda capa de puntos, obtenidos de las nubes de cada uno de los puntos que forman la misma.

6.3.2 Generación de una nube en el contorno

Los contornos requiere un tratamiento especial, debido a que los puntos seleccionados para realizar la triangulación inicial no pueden ser arbitrarios como en el caso anterior. El procedimiento se puede resumir en los siguientes pasos:

1. se seleccionan dos puntos que pertenezcan al mismo contorno (puntos 2 y 5), uno a cada lado del punto estrella y un tercer punto que pertenezca al interior del dominio (punto 3); ver figura (6.8-a).
2. se generan tres triángulos, uno de los cuales estará formado por tres puntos de contorno, en la figura (6.8-b) se representa mediante un triángulo color negro. Este último puede tener área nula si los tres puntos están alineados.
3. se traza el círculo por los puntos de cada triángulo, exceptuando el formado por los puntos del contorno (fig. (6.8-c)), y se verifica si hay algún punto en su interior, en caso de ser así se procede a eliminar dicho triángulo y se generan dos nuevos, figura (6.8-d).
4. se repite la operación hasta que ningún círculo contenga puntos en su interior.

Finalmente se verifica si la cantidad de puntos de la nube es suficiente, y de no ser así se añade una segunda capa. En la mayor parte de las nubes que se forman en el contorno es necesario agregar una segunda capa.

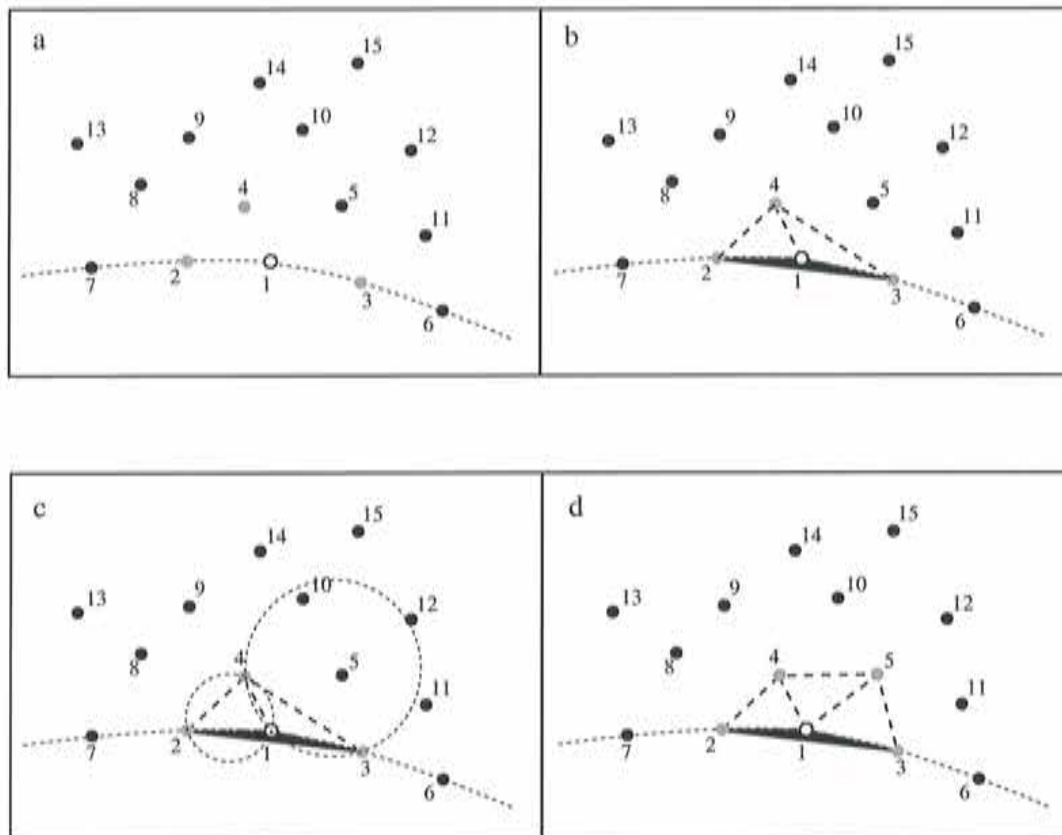


Figura 6.8: Triangulación de Delaunay, pasos para la generación de una nube de un contorno.

6.4 Comparación de ambos métodos

En la figura (6.9) se muestran algunos resultados obtenidos con ambos algoritmos, donde se puede observar como el método de triangulación local resuelve los inconvenientes que se presentaban con el primer método, y además dan el mismo resultado si la distribución de puntos es homogénea..

6.5 Conclusiones

Este capítulo no se inscribe dentro de los objetivos principales de la tesis, sin embargo se consideró que sería importante proponer, de forma simple, algunas alternativas para enfrentar el tema de la generación de las nubes. Como hemos demostrado a lo largo del trabajo, la constitución de las nubes tiene una considerable influencia en la resolución de los problemas, especialmente en los problemas de la mecánica de

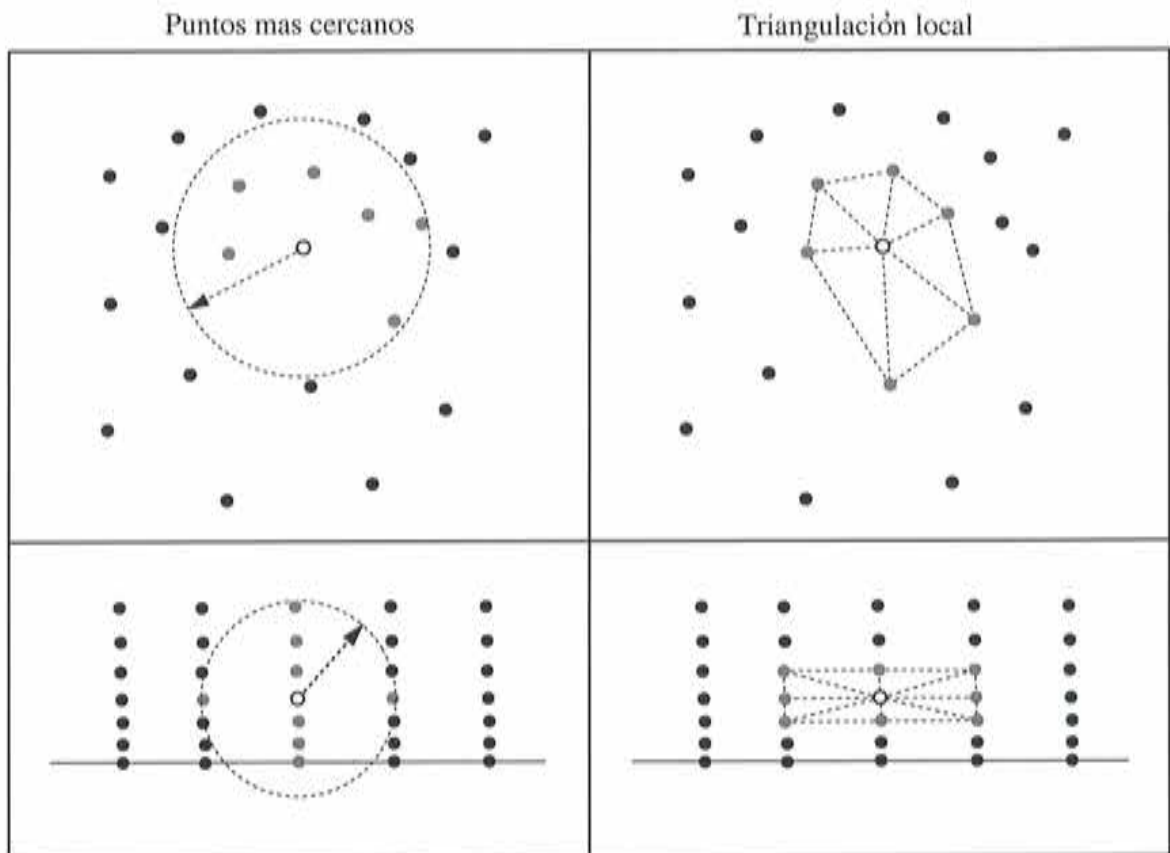


Figura 6.9: Nubes generadas con cada uno de los métodos descritos.

fluidos.

El método basado en la triangulación local de Delaunay surgió para cubrir una serie de deficiencias presentadas por el primer método propuesto, por lo tanto resulta más robusto y confiable al reproducir los buenos resultados del primer método y solventar sus inconvenientes. Ambos métodos fueron implementados en forma rudimentaria, motivo por el cual no podemos sacar conclusiones acerca de la eficiencia de los mismos.

Capítulo 7

Conclusiones y líneas futuras de investigación

En el presente trabajo de investigación se planteó una técnica de aproximación denominada Método de los Puntos Finitos. La misma se inscribe dentro de la familia de los métodos sin mallas surgidos como respuesta a algunas deficiencias mostradas por los métodos clásicos como el Método de los Elementos Finitos, el Método de los Volúmenes Finitos, etc. Las numerosas propuesta realizadas en este campo son una clara demostración de las expectativas que el nuevo concepto ha despertado en el mundo de los métodos numéricos.

El método de los Puntos Finitos es una técnica conceptualmente sencilla, y como se ha demostrado a lo largo del presente trabajo lo suficientemente versátil como para abordar una amplia variedad de problemas. Se puede decir que el método se sustenta en dos pilares fundamentales, aproximación mediante Mínimos Cuadrados Ponderados Fijos y discretización a través de Colocación Puntual.

Con respecto a la aproximación, se realizaron numerosos estudios que nos permitieron optimizar los parámetros incluidos en esta clase de funciones, los valores obtenidos pudieron ser corroborados en posteriores aplicaciones, tanto en problemas de Convección Difusión como de Mecánica de Fluidos. La utilización de bases de aproximación definidas localmente y adimensionalizadas es un aporte original de este trabajo, como así también la definición de un criterio de calidad de la nube de puntos basado en el cálculo del número de condición.

La Colocación Puntual en sí misma no reviste ninguna dificultad, siendo sin dudas, la técnica de discretización más sencilla. Sin embargo los problemas que se plantean para una correcta implementación de las condiciones de contorno hizo que la mayoría de los autores se decanten por las formulaciones débiles. Estas deficiencias se resolvieron mediante dos técnicas originales de este trabajo, la primera consiste en una formulación estabilizada y la segunda se realizó mediante una modificación

de las funciones de aproximación en los contornos. Ambas formulaciones, derivadas de puntos de vista completamente distintos, dieron resultados muy satisfactorios, sin añadir complejidad al tratamiento del problema.

La aplicación de la técnica del *Cálculo Finitesimal* para derivar una forma estabilizada de las ecuaciones de convección difusión y su posterior implementación mediante *Puntos Finitos* requirió de ingentes esfuerzos, especialmente en lo que se refirió a la definición de los parámetros de estabilización y al tratamiento de las fuentes externas. La formulación final a la que se arribó, junto al tratamiento de las condiciones de Neumann, se puede considerar como uno de los aportes más importantes de la tesis.

Algunos resultados alcanzados con la aplicación del método de los *Puntos Finitos* se compararon con los resultados obtenidos mediante otras técnicas, demostrando un excelente comportamiento en problemas bidimensionales, donde es necesario mencionar que la mayoría de los métodos lograron una buena performance. Sin embargo fue en los problemas tridimensionales donde se pudo apreciar una mejora sustancial en los resultados si los comparamos con los del método de los Elementos Finitos. Estos resultados son los que demuestran el potencial que posee la técnica presentada.

El objetivo principal que se había planteado en esta tesis, consistía en la resolución de las ecuaciones de la mecánica de fluidos incompresibles mediante una técnica sin malla. Para el cumplimiento del mismo hizo falta recorrer un largo camino, lo que se puede apreciar en el desarrollo de este trabajo.

La resolución del problema de fluidos incompresibles trajo aparejado algunas dificultades que no se observan en la aplicación de formulaciones débiles, siendo la más notoria de ellas el tratamiento de la incompresibilidad. El algoritmo de *Pasos Fraccionados*, que permite satisfacer la condición de Babůska-Brezzi, utilizando las mismas funciones de interpolación para el campo de velocidades y de presión, no brindó la respuesta esperada al ser implementado con el método de *Puntos Finitos*. Con la aplicación del *Cálculo Finitesimal* se obtuvo un algoritmo de características similares al anterior, aunque en el nuevo esquema aparecen unos términos que cumplen con la función de estabilizar la ecuación de incompresibilidad. Este novedoso esquema se complementa con una serie de aportes a la aplicación de las condiciones de contorno, especialmente para la condición de deslizamiento libre. Tanto el esquema resultante como su implementación mediante *Puntos Finitos* son aportes originales de la tesis.

Dentro de los numerosos problemas de flujo incompresible resueltos, cabe una mención especial a los que involucran a la ecuación de Euler, donde fue necesario la implementación de una estabilización de tercer orden con el fin de disminuir el exceso de difusión introducida por la estabilización de segundo orden.

Finalmente en la tesis se presentan dos técnicas de generación de nubes que fueron desarrolladas como herramientas auxiliares. La necesidad de una correcta

definición de las nubes puso de manifiesto que, si bien las mismas eran herramientas auxiliares, requería de una especial atención ya que en algunos problemas la posibilidad de alcanzar el éxito en la simulación dependía en gran medida de ellas. Los dos métodos que se propusieron son originales de este trabajo, aunque este tema debe ser abordado en trabajos futuros para dar una respuesta satisfactoria, en lo que hace a velocidad y prestaciones.

En el desarrollo de la tesis no se realizaron estudios comparativos en lo que se refiere a la velocidad en el cálculo frente a otros métodos, para dicho cometido haría falta una implementación numérica optimizada a tal efecto, aspecto que no se tuvo en cuenta por tratarse de un programa de cálculo utilizado como plataforma de ensayos. De todas formas para lograr una comparación realista se debería plantear, no solo lo que concierne al cálculo, sino todo lo que implica el preproceso del problema, siendo probablemente en este área donde se manifiesten las mayores ventajas del método.

En cuanto método en sí, existen numerosas pruebas por realizar como, por ejemplo, la utilización de otro tipo de funciones de aproximación en lugar de las bases polinómicas o cambiar el criterio de ponderación, entre otros.

En lo que se refiere a las ecuaciones de flujo compresible, sería muy provechoso una exploración de las posibilidades que brindan los esquemas monolíticos, donde algunas pruebas muy simples realizadas en este contexto, arrojaron buenos resultados.

No cabe dudas que queda mucho trabajo por realizar aún para lograr que el método de los *Puntos Finitos* se transforme en una herramienta numérica lo suficientemente potente y confiable. Gran parte del trabajo que resta por hacer se pueden resumir en dos problemas extremos: por un lado dotar al método de una base matemática mas sólida y por otro lado, realizar una programación "amigable" para que el método de *Puntos Finitos* pueda ser utilizado como una herramienta estandar en proyectos de ingeniería.

Bibliografía

- [ALU 00] Aluru N. R., "A point collocation method based on reproducing kernel approximation", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 47: 1083-1121 (2000).
- [AND 84] Anderson D. A., Tannehill J. C. and Pletcher R. H., "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", edited by Hemisphere Publishing Group, (1984).
- [ATL 98] Atluri S. N., Zhu T. L., "A New Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach in Computational Mechanics", *Comput. Mechanics*, 22: 117:127 (1998).
- [ATL 99] Atluri S. N., Kin H. G. et al. "A Critical Assessment of the Truly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG), and Local Boundary Integral Equation (LBIE) methods", *Comput. Mechanics*, 24: 348-372 (1999).
- [ATL 00a] Atluri S. N., Zhu T. L., "The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach for Solving Problems in Elasto-static", *Comput. Mechanics*, 25:169-179 (2000).
- [ATL 00b] Atluri S. N., Zhu T. L., "New Concepts in Meshless Methods", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 47(1-3): 537-556 (2000).
- [ATL 00c] Atluri S. N., Sladek J. et al., "The Local Boundary Integral Equation (LBIE) and it's Meshless Implementation for Linear Elasticity", *Comput. Mechanics*, 25:180-198 (2000).
- [BAB 95] Babuska I. and Melenk J. M., "The partition of unit finite element method", Technical Note BN-1185, Institute for physical Science and Technology, University of Maryland (1995).
- [BAT 93] Batina J., "A Gridless Euler/Navier Stokes solution algorithm for complex aircraft applications", AIAA 93-0333, Reno NV, January 11-14, (1993).

- [BEI 96] Beissel S. and Belytschko T. "Nodal Integration of the element-free Galerkin method", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193: 49:74 (1996).
- [BEL 94a] Belytschko T., Lu Y. and Gu L., "Element-free Galerkin methods", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 37: 186-195 (1994).
- [BEL 94b] Belytschko T., Gu L. and Lu Y., "Fracture and crack growth by element-free Galerkin methods", *Model. Simul. Mater. Sci. Engrg.*, 2: 519-534 (1994).
- [BEL 95] Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M. and Krysl P., "A coupled finite element-free Galerkin method", *Comput. Mechanics*, 17: 186-195 (1995).
- [BEL 96a] Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M. and Krysl P., "Meshless Methods: An Overview and Recent Developments", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 139: 3-47 (1996).
- [BEL 96b] Belytschko T., Krongauz Y., Fleming M., Organ D. and Liu W. K., "Smoothing and Accelerated Computations in the Element Free Galerkin Method", *Journal of Comput. and App. Math.*, 74: 111-126 (1996).
- [BRO 82] Brooks A. N. and Hughes T. J. R., "Streamline Upwind/Petrov Galerkin formulation for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier Stokes equations", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 32: 199-259 (1982).
- [CHO 67] Chotin A. J., "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems", *J. Comp. Phys*, Vol 2: 12-26 (1967).
- [COD 92] Codina R., Oñate E. and Cervera M., "The intrinsic time for the SUPG formulation using quadratic elements", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 94: 239-262 (1992).
- [COD 92b] Codina R., "A Finite Element Model for Incompressible Flow Problems", PhD thesis, Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona (1992).
- [COD 93] Codina R., "A finite element formulation for numerical solution of the convection-diffusion equation", Technical Report Monograph N° 14, International Center for Numerical Methods in Engineering (1993).

- [COD 93b] Codina R., "A discontinuity capturing crosswind dissipation for the finite element solution of the convection diffusion equation", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 110: 325-342 (1993).
- [COD 00] Codina R and Blasco J., "Stabilized finite element method for the transient Navier-Stokes equations based on a pressure gradient projection", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 182: 353-384 (2000).
- [DUA 95a] Duarte C. A. and Oden J. T., "Hp clouds - A Meshless Method to Solve Boundary-Value Problems", Technical Report 95-05, TICAM, The University of Texas at Austin (1995).
- [DUA 95b] Duarte C. A., "A review of Some Meshless Methods to Solve Partial Differential Equations", Technical Report 95-06, TICAM, The University of Texas at Austin (1995).
- [DUA 96] Duarte C. A. and Oden J. T., "An h - p adaptive method using clouds", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 139: 237-262 (1996).
- [ENG 90] Engelman M. S. and Jamnia M. A., "Transient flow past a circular cylinder: A bench-mark solution", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 11: 985-1000 (1990).
- [FRA 92] Franca L. P., Frey S. L. and Hughes T. J. R. "Stabilized finite elements methods: I. Application to the advective diffusive model", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 95: 253-276 (1992).
- [GAR 99] García J. and Oñate E., "Un método estabilizado para análisis de interacción fluido estructura con superficie libre", *Métodos Numéricos en Ingeniería*, Sevilla, España (1999).
- [GHI 77] Ghia K. N. and Hankey W. L. Jr, "Study of incompressible Navier-Stokes Equations in primitive variables using implicit numerical technique", AIAA paper 77-648, Albuquerque, New Mexico (1977).
- [GHI 79] Ghia K. N., Hankey W. L. Jr and Hodge J. K., "Use of primitive variables in the solution of incompressible Navier-Stokes equations", *AIAA J.* vol. 17: 298-301 (1979).
- [GHI 82] Ghia U., Ghia K. N., and Shin C. T., "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method", *J. Comput. Phys.*, 48:3 87-411, (1982).

- [GHO 39] Goett, H. J. Bullivant and W. Kenneth, "Tests of NACA 0009, 0012, and 0018 airfoils in the full-scale tunnel", NACA Report 647 (1939).
- [HAR 65] Harlow F. H. and Welch J. E., "Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface", *Phys. Fluids*, Vol 8: 2182-2189 (1965).
- [HEG 96] Hegen D., "Element-free Galerkin methods in combination with Finite Element approaches", *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, 135: 143-166 (1996).
- [HIG 86] Higdon R., "Initial-boundary value problems for linear hiperbolic systems", *SIAM Review*, 28(2): 177-217 (1986).
- [HIR 90] Hirsch C. "Numerical Computational of Internal and External Flow", Vol. 2, John Wiley and Sons, (1990).
- [HRS 54] Hirschfelder J. O., Curtiss C. F. and Bird R. B., "Molecular Theory of Gases and Liquids", Wiley, New York, (1954).
- [HUG 86] Hughes T. J. R. and Mallet M. "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: III. the generalized streamline operator for multidimensional advective-diffusive systems", *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, 58: 305-328 (1986).
- [HUG 86b] Hughes T. J. R., Mallet M. and Mizukami A. "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: II. beyond SUPG", *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, 54: 341-355 (1986).
- [HUG 89] Hughes T. J. R., Franca L. P. and Hulbert G. M., "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin least-square method for advective-difusive equations", *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, 73: 173-189 (1989).
- [IDE 94] Idelsohn S. R. and Oñate E., "Finite Elements and Finite Volumens. Two god Friends", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 37: 3323-3341 (1994).
- [IDE 01a] Idelsohn S. R., Oñate E., Calvo N. and Del Pin F., "The Meshless Finite Element Method", en revisión, (2001)
- [IDE 01b] Idelsohn S. R., Oñate E., Calvo N., Sacco C. and Del Pin F., " Galerkin Versus Point Collocation Methods in Mesh-Free Formulations", Sixth USCCM, Dearborn, Michigan, USA. Agosto 2001.

- [KEL 80] Kelly D. W., Nakazawa S., Zienkiewicz O. C. and Henrich J. C., "A note on upwind and anisotropic balancing dissipation in finite element approximation to convective diffusion problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.* 15: 1705-1711 (1980).
- [LAN 81] Lancaster P. and Salkauskas K., "Surfaces generated by moving least-squares methods", *Math. Comp.*, 37: 144-165 (1981).
- [LIU 95a] Liu W. K., Jun S. and Zhang Y. F. "Reproducing Kernel Particle Method", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 20: 1081-1106 (1995).
- [LIU 95b] Liu W. K. and Chen Y. F., "Wavelet and multiple scale reproducing kernel methods", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 21: 901-933 (1995).
- [LIU 95c] Liu W. K., Chen Y. F. and Uras R. A. "Enrichment of the finite element method with the reproducing kernel particle method", In J. J. F. Cory and J. L. Gordon (Eds). *Current Topics in Computational Mechanics*, 305: 253-258 (1995).
- [LIS 80] Liszka T. and Orkisz J., "The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics", *Comput. Struct.* 11: 83-95 (1980).
- [LU 94] Lu Y. Y., Belytschko T. and Gu L., "A new implementation of the Element-free Galerkin method", *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.* 113: 397-414 (1994).
- [LÓN 00] Löhner R., Sacco C., Oñate E. and Idelsohn "A Finite Point Method for Compressible Flow" to be published in *Int. J. Num. Meth. Engng* (2001), (aceptado)
- [LUC 77] Lucy L. B., "A numerical approach to the testing of the fission hypothesis", *The Astronomical Journal*, 82(12): 1013-1024 (1977).
- [MON 82] Monaghan J. J., "Why particle methods work", *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, 3(4): 422-433 (1982).
- [NAY 91a] Nayroles B., Touzot G. and Villon P., "La méthode des éléments diffus", *C.R. Acad. Sci. Paris*, t313, Serie II: 133-138 (1991).
- [NAY 91b] Nayroles B., Touzot G. and Villon P., "L' Approximation Diffuse" *C. R. Acad. Sci. Paris*, t313, Serie II: 293-296 (1991).

- [NAY 92] Nayroles B., Touzot G. and Villon P., "Generalizing de Finite Element method: diffuse approximation and diffuse elements", *Comp. Mech.* 10: 307-318 (1992).
- [OÑA 95] Oñate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O. C. and Fisher T., "A finite point method for analysis of fluid flow problems", *Proceedings of the 9th Int. Conference on Finite Elements Methods in Fluids, Venize, Italy, 25-12 October 1995.*
- [OÑA 96a] Oñate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O. C. and Taylor R. L., "A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow", *Int. J. Num. Meth. Eng.* 39: 3839-3866 (1996).
- [OÑA 96b] Oñate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. and Sacco C., "A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 139: 315-346 (1996).
- [OÑA 96c] Oñate E., "On the stabilization of numerical solution for advective-diffusive transport and fluid flow problems", *Technical Report N° 81 CIMNE (1996).*
- [OÑA 97] Oñate E., García J. and Idelsohn S. "Computation of the stabilization parameter for the finite elementt solution of advective-difusive problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 25: 1385-1407 (1997).
- [OÑA98] Oñate E., "Derivation of stabilized equations for numerical solutions of advective-diffusive transport and fluid flow problems", *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.* 151: 233-265 (1998).
- [OÑA 00a] Oñate E., Sacco C. and Idelsohn S., "A finite point method for incompressible flow problems", *Comput. Visual Sci.* 3: 67-75 (2000).
- [OÑA 00b] Oñate E. and Manzan M., "Stabilization Techniques for Finite Elements Analysis of Convection-Diffution Problems", *Publication CIMNE N° 183, February 2000.*
- [OÑA 00c] Oñate E., Sacco C. and Idelsohn S., "Meshless Analysis of Incompressible Flows Using the Finite Point Method", *Publication CIMNE N° 196, November 2000.*
- [PAT 72] Patankar S. V. and Spalding D. B., "A Calculation Procedure for Heat Mass and Momentum Transfer in Three-dimensional Parabolic Flows", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol 15: 1787-1806 (1972).

- [PAT 80] Patankar S. V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences, ed. Minkowycz, W. J. & Sparrow E. M., Hemisphere, Washington, (1980).
- [PER 75] Perrone N. and Kao R., "A general finite difference for arbitrary meshes", *Comput. Struct.* 5: 45-58 (1975).
- [ROS 54] Roshko A., "on the development of turbulent wakes from vortex street", Technical Report 1194 (1954).
- [SIM 94] Simo J. and Armero F., "Unconditional stability and long term behavior of transient algorithms for the incompressible Navier-Stokes equations", *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, 111: 111-154 (1994).
- [SCH 98] Schlichting H. "Boundary Layer theory" 6th ed., McGraw-Hill, New York (1968).
- [SWE 95] Swegle J. W., Hicks D. L. and Attaway S. W., "Smoothed particle hydrodynamics stability analysis", *J. Comput. Phys.* 116: 123-134 (1995).
- [TAY 95] Taylor R. L., Idelsohn S. R., Zienkiewicz O. C. and Oñate E., "Moving Least Square Approximation for Solution of Differential equations", Research Report 74, CIMNE, Barcelona (1995).
- [TEZ 90] Tezduyar T. E. and Liou J., "Computation of spatially periodic flows based on the vorticity-stream function formulation", *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, 83: 121-142 (1990).
- [VAZ 99] Vázquez M. "Numerical Modelling of Compressible Laminar and Turbulent Flow: The CBS Algorithm", Phd Thesis, Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona (1999).
- [VER 00] Verica i Roure M., "Análisis de Estructuras en el Campo Elástico Mediante Métodos sin Mallas", Trabajo final, Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals i Ports, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona (2000).
- [ZHU 98] Zhu T., Zhang J. D. and Atluri S. N., "A Local Boundary Integral Equation (LBIE) Method in Computational Mechanics, and a Meshless Discretization Approach", *Comput. Mechanics* 21: 223-235 (1998).
- [ZIE 89] Zienkiewicz O. C. and Taylor R. L., "The finite element method", McGraw Hill, vol I (1989).

- [ZIE 00] Zienkiewicz O. C. and Taylor R. L., "The finite element method", 5th ed. Three volumens. London: Butterworth-Heinemann, (2000).