

Integrales singulares e hipersingulares en la ecuación integral de las variaciones en el contorno

Javier Suárez y Rafael Gallego

Dpto. Mecánica Medios Continuos y Teoría de Estructuras
 E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
 Universidad de Granada, Colegio Máximo Cartuja
 18071 Granada, España
 Tel.: 34-958-24 99 61, Fax: 34-958-24 99 59
 e-mail: fjsuarez@ugr.es

Resumen

En el presente artículo exponemos los procedimientos empleados en el cálculo de las integrales singulares e hipersingulares obtenidas como consecuencia de la discretización de la que hemos llamado *ecuación integral de las variaciones en el contorno* (δBIE) propuesta por los autores para la resolución del *problema inverso de identificación* aplicado a problemas de potencial y a estados elastodinámicos antiplanos con variación armónica en el tiempo. La discretización de la ecuación integral en el contorno, transformándola en un sistema lineal de ecuaciones, previa aproximación de la frontera mediante elementos de contorno cuadráticos e isoparamétricos, ha conllevado el cálculo de la integral de funciones que incluyen la solución fundamental u^* , el flujo de la solución fundamental q^* y sus respectivos gradientes. En casos en los que el nodo de colocación está incluido en el elemento de integración, hemos obtenido singularidades del tipo $(\frac{1}{r})$ e hipersingularidades del tipo $(\frac{1}{r^2})$, para cuya integración hemos empleado procedimientos de regularización tomando uno o dos términos de su desarrollo en serie.

SINGULAR AND HYPERSINGULAR INTEGRALS IN THE INTEGRAL EQUATION OF VARIATIONS AT BOUNDARY

Summary

In this paper the procedures for computing singular and hypersingular integrals are presented. These integrals arise in the, so called *variation Boundary Integral Equation* (δBIE) developed by the authors for the solution of *identification inverse problems* in potential and acoustic problems. The discretization of the (δBIE) on the boundary quadratic isoparametric elements, to arrive to a algebraical system of equations, leads to the computation of functions whose kernels are the fundamental solution u^* , the flux of this solution q^* and their corresponding gradients. In the cases where the collocation point belongs to the integration element, $(\frac{1}{r})$ singularities and $(\frac{1}{r^2})$ hypersingularities are obtained. For the computation of such singularities, regularization by series expansions about the collocation point are employed.

INTRODUCCIÓN

Para la resolución del *problema inverso de identificación*, según la definición del mismo dada por Kubo¹⁷, aplicado a problemas de potencial y a estados elastodinámicos antiplanos con variación armónica en el tiempo, proponemos en^{16,6,7}, una formulación y una metodología. El procedimiento propuesto está basado en la que hemos llamado *ecuación integral de las variaciones en el contorno* (δBIE), deducida mediante el desarrollo de una formulación integral a partir del *cálculo de variaciones* en un doble planteamiento del problema directo, consecuencia de la doble consideración geométrica, geometría real y geometría supuesta, del dominio de definición.

La discretización de la ecuación integral obtenida para transformarla en un sistema lineal de ecuaciones, previa aproximación de la frontera mediante elementos de contorno cuadráticos e isoparamétricos, nos ha obligado al cálculo de la integral de funciones que incluyen la solución fundamental u^* , el flujo de la solución fundamental q^* y sus respectivos gradientes.

Cuando el nodo de colocación no está incluido en el elemento de integración, el integrando presenta siempre un comportamiento regular en el dominio de integración. En este caso el cálculo de la integral se ha hecho mediante aplicación de la fórmula de Gauss-Legendre.

Cuando el nodo de colocación está incluido en el elemento de integración, la función integrando puede presentar un comportamiento singular. En los casos de singularidad de tipo logarítmico, hemos empleado para el cálculo de la integral, la fórmula de Gauss-Logarítmica.

Hemos obtenido igualmente singularidades del tipo $(\frac{1}{r})$ e hipersingularidades del tipo $(\frac{1}{r^2})$ para cuya integración hemos empleado procedimientos de regularización tomando uno o dos términos de su desarrollo en serie. En el presente artículo exponemos el detalle de dichos procedimientos.

PROCEDIMIENTOS DE INTEGRACIÓN SINGULAR E HIPERSINGULAR

Huang y Cruse¹⁵, exponen la evolución y clasificación de las técnicas de integración singular e hipersingular en el Método de los Elementos de Contorno, que resumimos a continuación.

1. *Integración analítica*: La integración analítica sobre elementos de contorno lineales fue propuesta por Cruse^{2,3} y utilizada en problemas de elasticidad tridimensional. Adoptando un sistema local de coordenadas polares, las singularidades débiles y el Valor Principal de Cauchy se transforman en integrales regulares. Gray y otros⁸, utilizan el método de integración directa para el cálculo de integrales hipersingulares en mecánica de la fractura; exponen la integración analítica de la identidad de Somigliana. La integración analítica no es posible en los casos de funciones de forma genéricas y contornos curvilíneos.
2. *Métodos semianalíticos*: Las publicaciones de Guiggiani^{12,13,11,10} exponen el desarrollo asintótico de las funciones integrando, respecto al sistema local de coordenadas; la parte divergente de la integral singular o hipersingular puede ser separada mediante adición y sustracción de los correspondientes términos singulares o hipersingulares. Los términos singulares o hipersingulares separados se calculan analíticamente. Hayami¹⁴ propone la transformación de la integral sobre el contorno curvo en una integral sobre el plano tangente a la superficie curva en el punto de singularidad, que podemos calcular analíticamente. Cruse y Aithal⁵ aplican el procedimiento de Hayami a integrales *casi singulares*.
3. *Transformación singular de coordenadas*: En 1976 Lachat y Watson²⁰ proponen una transformación singular de coordenadas que hace cero el valor del jacobiano en el punto de singularidad. El procedimiento solo es aplicable a singularidades débiles.
4. *Integrales especiales gaussianas*: Una integral numérica especial gaussiana (ponderaciones especiales) fue propuesta por Pina y Fernandes²², para calcular la integral singular en la formulación de los elementos de contorno. Un procedimiento similar fue propuesto por Lean y Wexler²¹ usando el producto normal en integrales multidimensionales.
5. *Modificaciones en la ecuación integral*: Las publicaciones de Cruse⁴, Guidera y Lardner⁹, Bui¹, Weaver²⁷, Theocaris²⁶, Putot^{23,24}, y Balas y Sládek²⁵, proponen diversos procedimientos de reducción del orden de la singularidad, mediante la integración por partes de la ecuación integral.

6. *Aproximación de la parte finita:* La parte finita de una integral hipersingular es calculada mediante el empleo de fórmulas gaussianas, en las que pesos y puntos de interpolación pueden tomar valores complejos como expone Kutt^{19,18}.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DIRECTO

Problemas de Potencial

Los denominados *problemas de potencial*, consisten en la determinación de una función u , llamada potencial, que verifica la ecuación de Laplace en el dominio Ω , cuya frontera es Γ ; estando sometido el dominio Ω a condiciones de contorno que pueden ser tipo Dirichlet o tipo Newman; utilizando para el cálculo de u , la fórmula de Green.

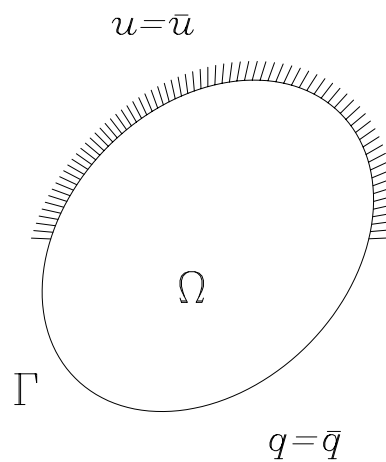


Figura 1

Ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 u = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

Condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1 \\ q &= \bar{q} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_2 \\ \Gamma &= \Gamma_1 + \Gamma_2 \end{aligned}$$

Representación integral:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} (u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})q(\mathbf{y}) - q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})u(\mathbf{y}))d\Gamma(\mathbf{y}) \quad (1)$$

siendo $u(\mathbf{y})$: función potencial; $u(\mathbf{x})$: valor de la función u en el punto $\mathbf{x} \in \Omega$; $\mathbf{x} \notin \Gamma$ que llamamos *polo*; $u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})$: función *solución fundamental*; la expresión de u^* en dominios bidimensionales es

$$u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\}$$

siendo r la distancia entre el *punto de observación* \mathbf{y} y el *polo* \mathbf{x} ; $q(\mathbf{y}) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ la derivada de u según la normal exterior a Γ ; $q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}}$ la derivada de u^* según la normal exterior a Γ , cuya expresión en dominios bidimensionales es,

$$q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}$$

Problema elastodinámico antiplano con variación armónica en el tiempo

El *problema elastodinámico antiplano con variación armónica en el tiempo* consiste en la determinación de la componente antiplana del campo de desplazamientos, función compleja u_3 , que verifica la ecuación del movimiento en el dominio Ω ; de frontera Γ , estando sometido Ω a condiciones de contorno que pueden ser de tipo Dirichlet o tipo Newman.

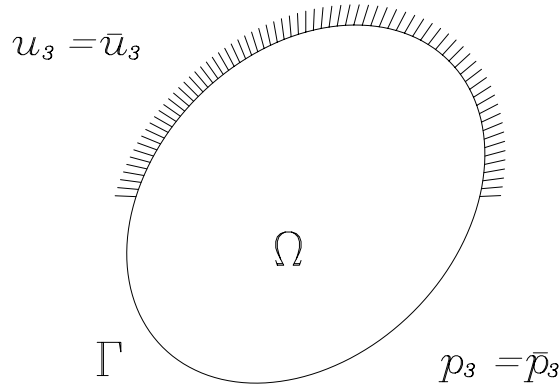


Figura 2

La ecuación del movimiento antiplano con variación armónica en el tiempo, supuestas nulas las cargas másicas, es la conocida ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 u_3 + \frac{w^2}{c_2^2} u_3 = 0$$

Condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{y} \in \Gamma_1, p_3(\mathbf{y}, t) &= \bar{p}_3 \\ \forall \mathbf{y} \in \Gamma_2, u_3(\mathbf{y}, t) &= \bar{u}_3 \\ \Gamma &= \Gamma_1 + \Gamma_2 \end{aligned}$$

Representación integral

$$u_3(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} p_3^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) u_3(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} u_3^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) p_3(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) \quad (2)$$

siendo, $u_3(\mathbf{y})$: componente antiplana del campo de desplazamientos; $u_3(\mathbf{x})$: valor de u_3 en el punto $\mathbf{x} \in \Omega$; $\mathbf{x} \notin \Gamma$ que llamamos polo; $p_3(\mathbf{y})$ componente antiplana del vector tensión, relacionada con u_3 , según la siguiente expresión

$$p_3 = \sigma_{3\alpha} n_\alpha = \mu u_{3,\alpha} n_\alpha = \mu \frac{\partial u_3}{\partial \mathbf{n}}$$

$u_3^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}), p_3^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})$ solución del *estado elastodinámico armónico fundamental*, cuya expresión es,

$$u_3^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\mu} K_0 \left(i \frac{wr}{c_2} \right)$$

$$p_3^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = -\frac{iw}{2\pi c_2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} K_1 \left(i \frac{wr}{c_2} \right)$$

siendo r : función radial referida al polo; K_0, K_1 : funciones modificadas de Bessel, de orden 0 y 1.

PROBLEMA INVERSO DE IDENTIFICACIÓN

Por ser similar su representación integral, expresión (1) para problemas de potencial y expresión (2) para el problema elastodinámico antiplano con variación armónica en el tiempo, el planteamiento del *problema inverso de identificación* que exponemos en el presente apartado es válido para ambos tipos de problemas. Mayormente emplearemos la notación correspondiente a los problemas de potencial.

Consideremos un dominio bidimensional $\tilde{\Omega}$, cuyo contorno es $\tilde{\Gamma}$. Consideremos la existencia de un hueco o defecto en $\tilde{\Omega}$, cuya geometría y posición es desconocida. El contorno $\tilde{\Gamma}$ queda por tanto dividido, en el contorno conocido Γ_C , y el contorno no conocido o contorno del hueco, $\tilde{\Gamma}_V$

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma_C + \tilde{\Gamma}_V$$

La resolución del problema inverso de identificación consiste en determinar la posición y geometría de $\tilde{\Gamma}_V$ conociendo el valor de un número M de mediciones experimentales en el contorno conocido Γ_C .

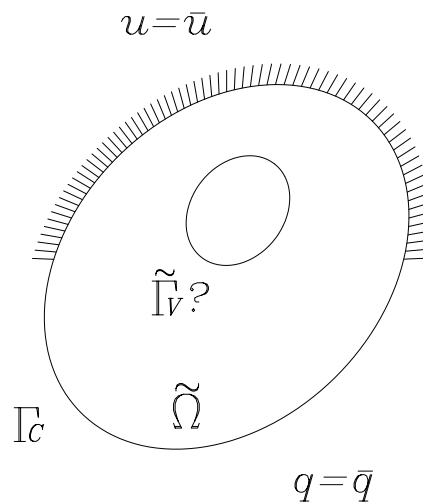


Figura 3

Disponemos por tanto de $M = M_u + M_q$ mediciones experimentales de *potencial* y *flujo de potencial* en Γ_C : M_u mediciones de potencial; M_q mediciones de flujo.

De esta forma el *potencial* resulta conocido en algunos puntos de Γ_{C_q} y el *flujo de potencial* resulta conocido en algunos puntos de Γ_{C_u}

$$\begin{aligned} u(\mathbf{y}_\alpha) &= \bar{u}(\mathbf{y}_\alpha), & \mathbf{y}_\alpha &\in \Gamma_{C_q} & \alpha &= 1, 2, \dots, M_u \\ q(\mathbf{y}_\beta) &= \bar{q}(\mathbf{y}_\beta), & \mathbf{y}_\beta &\in \Gamma_{C_u} & \beta &= 1, 2, \dots, M_q \end{aligned}$$

CÁLCULO DE LAS VARIACIONES

Puesto que la geometría real del hueco o defecto no es conocida, consideramos una geometría supuesta para el mismo, de contorno Γ_V , que llamaremos contorno variable, y que suponemos próximo a $\tilde{\Gamma}_V$. De esta forma, el dominio de integración queda definido doblemente, Ω y $\tilde{\Omega}$, según consideremos la geometría Γ_V ó $\tilde{\Gamma}_V$ del hueco.

La doble consideración del dominio de integración, Ω y $\tilde{\Omega}$, nos permite definir en Ω la magnitud vectorial que vamos a llamar *variación geométrica*, como el vector desplazamiento necesario para que cada punto de Ω alcance su posición real en $\tilde{\Omega}$.

Como se puede apreciar en la Figura 4 la variación geométrica es nula en los puntos de Γ_C y toma valores crecientes a medida que nos acercamos a Γ_V .

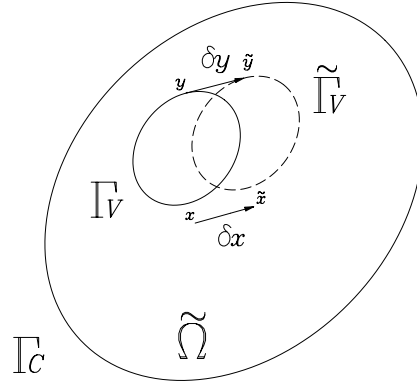


Figura 4

La doble consideración geométrica del dominio de definición del problema, Ω y $\tilde{\Omega}$, nos permite un doble planteamiento del problema de potencial, según se considere una u otra geometría. La representación integral en cada planteamiento es la siguiente

1. Planteamiento considerando la geometría supuesta Ω :

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, \Gamma_V) &= \int_{\Gamma_C} [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] d\Gamma_C(\mathbf{y}) \\ &+ \int_{\Gamma_V} [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] d\Gamma_V(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

2. Planteamiento considerando la geometría real $\tilde{\Omega}$:

Teniendo en cuenta que $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}}$ en el contorno Γ_C

$$\begin{aligned} u(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\Gamma}_V) &= \int_{\Gamma_C} [u^*(\mathbf{y}; \tilde{\mathbf{x}})q(\mathbf{y}, \tilde{\Gamma}_V) - q^*(\mathbf{y}; \tilde{\mathbf{x}})u(\mathbf{y}, \tilde{\Gamma}_V)] d\Gamma_C(\mathbf{y}) \\ &+ \int_{\tilde{\Gamma}_V} [u^*(\tilde{\mathbf{y}}; \tilde{\mathbf{x}})q(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\Gamma}_V) - q^*(\tilde{\mathbf{y}}; \tilde{\mathbf{x}})u(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\Gamma}_V)] d\tilde{\Gamma}_V(\tilde{\mathbf{y}}) \end{aligned}$$

El doble planteamiento del problema de potencial nos permite definir, para una configuración supuesta del hueco Γ_V dada, las siguientes dos variables:

- *variación de potencial*: aumento necesario de potencial en un punto fijo \mathbf{x} para pasar de la configuración supuesta del hueco a la configuración real

$$\delta u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, \tilde{\Gamma}_V) - u(\mathbf{x}, \Gamma_V)$$

- *variación de flujo de potencial*: aumento necesario de flujo de potencial en un punto fijo \mathbf{x} para pasar de la configuración supuesta del hueco a la configuración real, referido el flujo a la normal de la configuración supuesta

$$\begin{aligned} \delta q(\mathbf{x}) &= q(\mathbf{x}, \tilde{\Gamma}_V) - q(\mathbf{x}, \Gamma_V) = \\ &= \left(\nabla u(\mathbf{x}, \tilde{\Gamma}_V) - \nabla u(\mathbf{x}, \Gamma_V) \right) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, \Gamma_V) = \nabla \delta u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, \Gamma_V) \end{aligned}$$

El potencial $u(\mathbf{x}, \tilde{\Gamma})$ y el flujo de potencial $q(\mathbf{x}, \tilde{\Gamma})$ correspondientes a la geometría real del hueco lo conocemos en algunos puntos de Γ_C , a partir de las condiciones de contorno y las mediciones experimentales.

El potencial $u(\mathbf{x}, \Gamma)$, y el flujo de potencial $q(\mathbf{x}, \Gamma)$ correspondientes a la geometría supuesta del hueco, puesto que Γ_V es conocido, se determinará mediante aplicación directa del Método de los Elementos de Contorno.

ECUACIÓN INTEGRAL DE LAS VARIACIONES EN EL CONTORNO

En las referencias^{16,6}, se expone con detalle el desarrollo de una formulación integral para la resolución del problema inverso de identificación tal como ha sido planteado, a partir del cálculo de las variaciones en el contorno variable Γ_V , concluyendo en la que hemos llamado *ecuación integral de las variaciones en el contorno* (δBIE).

La ecuación integral obtenida es la siguiente

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} \in \Gamma &\Rightarrow \\ \frac{1}{2} \delta u(\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{2} \nabla u(\boldsymbol{\xi}) \cdot \delta \boldsymbol{\xi} &= \\ = \int_{\Gamma_C} u^* \delta q d\Gamma - \int_{\Gamma} q^* \delta u d\Gamma - \int_{\Gamma} \{q \nabla u^* - u \nabla q^*\} \cdot \delta \boldsymbol{\xi} d\Gamma + \\ + \int_{\Gamma_V} \{q \nabla u^* \cdot \delta \mathbf{y} - u \nabla q^* \cdot \delta \mathbf{y} - q^* \nabla u \cdot \delta \mathbf{y} - u \nabla u^* \cdot \delta \mathbf{m}\} d\Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

Se trata de una combinación lineal de integrales en el contorno, que relaciona los valores de las variables $u, q, \delta u, \delta q$ y las magnitudes vectoriales $\delta \mathbf{y}, \delta \boldsymbol{\xi} = \delta \mathbf{y}(\boldsymbol{\xi}), \delta \mathbf{m}$, y cuyos coeficientes son integrales de los núcleos u^*, q^* , y de sus gradientes ∇u^* y ∇q^* . La magnitud vectorial de carácter auxiliar $\delta \mathbf{m}$, está relacionada con la variación del vector normal, $\delta \mathbf{n}$.

Discretización de la ecuación integral

Tal como se expone en las referencias^{16,7}, procediendo en primer lugar, a la parametrización de las magnitudes vectoriales $\delta\mathbf{y}$, $\delta\boldsymbol{\xi} = \delta\mathbf{y}(\boldsymbol{\xi})$, $\delta\mathbf{m}$, para expresarlas en función de las variables geométricas correspondientes a la evolución geométrica impuesta al contorno variable, incluidas en el vector $\delta\mathbf{v}$; y posteriormente a la discretización de los términos de la ecuación integral deducida; obtenemos un sistema lineal de ecuaciones, en el que, conocidos los valores de las variables u, q en el contorno, podemos calcular los valores de las variables δu y δq , que no sean ya conocidos como consecuencia de las condiciones de contorno del problema inverso, y de las mediciones experimentales, así como el valor de las variables incluidas en $\delta\mathbf{v}$, que nos indican la evolución geométrica necesaria para que la configuración supuesta del hueco se aproxime a la configuración real. Calculando de forma iterativa el vector $\delta\mathbf{v}$ para las sucesivas geometrías obtenidas, determinamos la posición y geometría verdadera de Γ_V .

INTEGRACIÓN DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

Los procedimientos empleados en el cálculo de las integrales elementales, obtenidas en la discretización de la ecuación integral (3), se indican en el esquema incluido en la Figura 5.

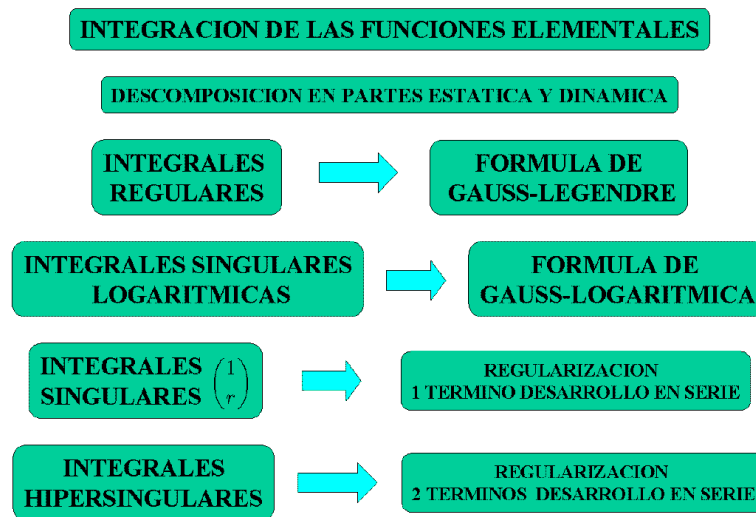


Figura 5

Con objeto de dar un tratamiento específico a la componente estática de las funciones, a la que habría que añadir una nueva componente en problemas dinámicos, hemos procedido en primer lugar a la descomposición de las funciones u^* , q^* , ∇u^* y ∇q^* , en sus partes estática y dinámica.

Cuando la función integrando presenta un comportamiento regular o singular logarítmico en el dominio de integración, se han empleado procedimientos numéricos habituales, utilizando las fórmulas de Gauss-Legendre y de Gauss-Logarítmica.

Por el contrario, cuando la función integrando presenta un comportamiento singular o hipersingular en el dominio de integración, lo que ocurre generalmente cuando el nodo de colocación, origen de las funciones radiales, está incluido en el elemento de integración, no son aplicables las fórmulas de Gauss, y hemos empleado procedimientos de regularización

utilizando uno o dos términos del desarrollo en serie de la función integrando; en el presente artículo exponemos el detalle de dichos procedimientos.

Las integrales obtenidas en la discretización de la ecuación integral (3), se resumen en los siguientes tipos

1. $\int_{\Gamma_e} q \frac{\partial u^*}{\partial y_i} \phi d\Gamma$
2. $\int_{\Gamma_e} u \frac{\partial q^*}{\partial y_i} \phi d\Gamma$

siendo ϕ cada una de las funciones de forma empleadas en la interpolación funcional en el elemento de contorno Γ_e .

Descomposición en partes estática y dinámica

Indicamos a continuación la descomposición de las funciones u^* , q^* , ∇u^* y ∇q^* , en sus partes estática y dinámica.

1. Descomposición de la función u^* :

Recordemos la expresión de la función *solución fundamental*, para la ecuación de Helmholtz

$$u^* = \frac{1}{2\pi\mu} K_0\left(\frac{iwr}{c_2}\right)$$

teniendo en cuenta el desarrollo en serie de la función de Bessel de orden 0

$$K_0(z) \simeq -\ln \frac{z}{2} - \gamma + O(z)$$

si llamamos $z = \frac{iwr}{c_2}$ obtenemos

$$\begin{aligned} u^* &= (u^*)_S + (u^*)_D \\ (u^*)_S &= \frac{1}{2\pi\mu} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \\ (u^*)_D &= \frac{1}{2\pi\mu} \left[O(z) - \gamma - \ln\left(\frac{iw}{2c_2}\right) \right] \end{aligned}$$

2. Descomposición de la función ∇u^* :

Considerando la expresión de la derivada de la función de Bessel

$$\frac{d}{dz} K_0(z) = -K_1(z)$$

derivamos la función solución fundamental u^* ,

$$\frac{\partial u^*}{\partial y_i} = \frac{-iw}{2\pi\mu c_2} K_1\left(\frac{iwr}{c_2}\right) r_{,i}$$

y teniendo en cuenta el desarrollo en serie de la función de Bessel de orden 1,

$$K_1(z) \simeq \frac{1}{z} + \frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \quad (4)$$

si llamamos, $z = \frac{iwr}{c_2}$, podemos expresar

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^*}{\partial y_i} &= \left(\frac{\partial u^*}{\partial y_i}\right)_S + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y_i}\right)_D \\ \left(\frac{\partial u^*}{\partial y_i}\right)_S &= \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} \\ \left(\frac{\partial u^*}{\partial y_i}\right)_D &= \frac{-iwr_{,i}}{2\pi\mu c_2} \left[\frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \right]\end{aligned}$$

3. Descomposición de la función q^* :

Recordemos la expresión del flujo de la solución fundamental,

$$q^* = \frac{-i w}{2\pi c_2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} K_1 \left(\frac{iwr}{c_2} \right)$$

teniendo en cuenta el desarrollo en serie de la función de Bessel de orden 1, indicada en (4) si llamamos, $z = \frac{iwr}{c_2}$, podemos expresar

$$\begin{aligned}q^* &= (q^*)_S + (q^*)_D \\ (q^*)_S &= \frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \\ (q^*)_D &= \left(-\frac{iw}{2\pi c_2} \right) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \left[\frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \right]\end{aligned}$$

4. Descomposición de la función ∇q^* :

Considerando el desarrollo en serie de $K_0(z)$ y $K_1(z)$, en la expresión de $\frac{\partial q^*}{\partial y_i}$ obtenida en el anexo A podemos concluir,

$$\begin{aligned}\frac{\partial q^*}{\partial y_i} &= \left(\frac{\partial q^*}{\partial y_i}\right)_S + \left(\frac{\partial q^*}{\partial y_i}\right)_D \\ \left(\frac{\partial q^*}{\partial y_i}\right)_S &= \frac{-1}{2\pi r^2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \\ \left(\frac{\partial q^*}{\partial y_i}\right)_D &= \frac{w^2}{4\pi c_2^2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi r} \frac{iw}{c_2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) O(z^2) - \frac{1}{2\pi} \frac{w^2}{c_2^2} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} K_0(z)\end{aligned}\tag{5}$$

Regularización de integrales singulares

Calculamos las integrales singulares de la forma $\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(\mathbf{y})}{r} d\Gamma$ tomando el *valor principal de Cauchy* si este es convergente

$$\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(\mathbf{y})}{r} d\Gamma = VPC \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(\mathbf{y})}{r} d\Gamma$$

El cálculo del *valor principal de Cauchy* lo efectuaremos regularizando la integral mediante adición y substracción al numerador de la función integrando, de los términos lineales de su desarrollo en serie.

En el entorno del nodo de colocación $\boldsymbol{\xi}$

$$f(\mathbf{y}) = f(\boldsymbol{\xi}) + O(|\mathbf{y} - \boldsymbol{\xi}|)$$

Debido al comportamiento de la función auxiliar $\frac{dr}{d\Gamma}$, analizado en el anexo B, podemos expresar

$$f(\mathbf{y}) = f(\boldsymbol{\xi}) \frac{dr}{d\Gamma} + O(|\mathbf{y} - \boldsymbol{\xi}|)$$

por lo tanto

$$f(\mathbf{y}) - f(\boldsymbol{\xi}) \frac{dr}{d\Gamma} = O(|\mathbf{y} - \boldsymbol{\xi}|) \quad (6)$$

Calculamos el valor principal de Cauchy

$$VPC \int_{\Gamma_e} \frac{f(\mathbf{y})}{r} d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \frac{f(\mathbf{y}) - f(\boldsymbol{\xi}) \frac{dr}{d\Gamma}}{r} d\Gamma + f(\boldsymbol{\xi}) \int_{\Gamma_e} \frac{dr/d\Gamma}{r} d\Gamma \quad (7)$$

En la expresión (7) aparecen las siguientes integrales

•

$$\int_{\Gamma_e} \frac{f(\mathbf{y}) - f(\boldsymbol{\xi}) \frac{dr}{d\Gamma}}{r} d\Gamma \quad (8)$$

En el entorno del punto de singularidad, $r = 0$, según la expresión (6), se verifica

$$f(\mathbf{y}) - f(\boldsymbol{\xi}) \frac{dr}{d\Gamma} = O(r)$$

por lo tanto el integrando de (8) presenta un comportamiento regular en el dominio de integración y podemos emplear procedimientos numéricos habituales para el cálculo de la integral.

•

$$\int_{\Gamma_e} \frac{dr/d\Gamma}{r} d\Gamma \quad (9)$$

El valor principal de Cauchy de (9) es convergente. Tomaremos por tanto

$$\int_{\Gamma_e} \frac{dr/d\Gamma}{r} d\Gamma = VPC \int_{\Gamma_e} \frac{dr/d\Gamma}{r} d\Gamma \quad (10)$$

En el anexo C se expone el cálculo del valor principal de Cauchy en la expresión (10). Podemos concluir por tanto

$$\int_{\Gamma_e} \frac{f(\mathbf{y})}{r} d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \frac{f(\mathbf{y}) - f(\boldsymbol{\xi}) \frac{dr}{d\Gamma}}{r} d\Gamma + f(\boldsymbol{\xi}) \ln\left(\frac{R_f}{R_i}\right)$$

Regularización de integrales hipersingulares

En el cálculo de integrales hipersingulares de la forma $\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(\mathbf{y})}{r^2} d\Gamma$, si la función $f(\mathbf{y})$ es continua y derivable cuando $r \rightarrow 0$, tomamos la parte finita de la integral

$$\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(\mathbf{y})}{r^2} d\Gamma = pf \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(\mathbf{y})}{r^2} d\Gamma \quad (11)$$

El cálculo de la parte finita indicada en la expresión (11), lo hacemos regularizando la integral mediante utilización de los dos primeros términos del desarrollo en serie de la función $f(\mathbf{y})$. Así, en el entorno del punto de hipersingularidad $\boldsymbol{\xi}$, podemos tomar

$$f(\mathbf{y}) = f(\boldsymbol{\xi}) + \left(\frac{df}{ds} \right)_{s=s_0} \Delta s + O(\Delta s^2)$$

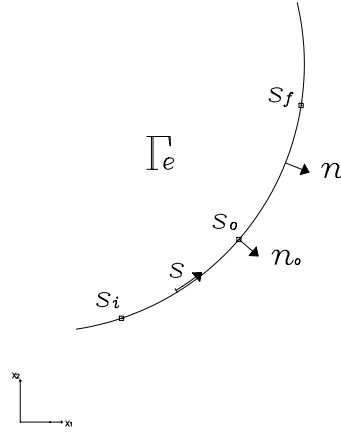


Figura 6

De la Figura 6 y teniendo en cuenta el comportamiento de la función auxiliar $dr/d\Gamma$ podemos expresar

$$\Delta s = s - s_0 \Rightarrow |\Delta s| \simeq r \Rightarrow \Delta s \simeq r \frac{dr}{d\Gamma}$$

$$f(\mathbf{y}) = f(\boldsymbol{\xi}) \left| \frac{dr}{d\Gamma} \right| + \left(\frac{df}{ds} \right)_{s=s_0} r \frac{dr}{d\Gamma} + O(\Delta s^2) \quad (12)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} pf \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(\mathbf{y})}{r^2} d\Gamma &= \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(\mathbf{y}) - f(\boldsymbol{\xi}) \left| \frac{dr}{d\Gamma} \right| - \left(\frac{df}{ds} \right)_{s=s_0} r \frac{dr}{d\Gamma}}{r^2} d\Gamma + \\ &+ f(\boldsymbol{\xi}) \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\left| \frac{dr}{d\Gamma} \right|}{r^2} d\Gamma + \left(\frac{df}{ds} \right)_{s=s_0} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{dr/d\Gamma}{r} d\Gamma \end{aligned} \quad (13)$$

En la expresión (13) obtenemos las siguientes integrales

•

$$\int_{\Gamma_e} \frac{f(\mathbf{y}) - f(\boldsymbol{\xi}) \left| \frac{dr}{d\Gamma} \right| - \left(\frac{df}{ds} \right)_{s=s^o} r \frac{dr}{d\Gamma}}{r^2} d\Gamma \quad (14)$$

Según la expresión (12), en el entorno del punto $\boldsymbol{\xi}$, el numerador de la función integrando de (14) es de orden r^2 , por lo que la expresión (14) es una integral regular que calcularemos empleando procedimientos numéricos habituales.

•

$$\int_{\Gamma_e} \frac{\left| \frac{dr}{d\Gamma} \right|}{r^2} d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \frac{dr}{r^2}$$

Integral impropia de segunda especie divergente, siendo su valor principal de Cauchy igualmente divergente, por lo que consideraremos su caracter hipersingular, sustituyéndola por su parte finita, cuyo cálculo se expone en el anexo D

$$\int_{\Gamma_e} \frac{dr}{r^2} = pf \left(\int_{\Gamma_e} \frac{dr}{r^2} \right) = - \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_f} \right)$$

•

$$\int_{\Gamma_e} \frac{dr/d\Gamma}{r} d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \frac{dr}{r}$$

Integral impropia de segunda especie divergente, siendo su valor principal de Cauchy convergente.

$$\int_{\Gamma_e} \frac{dr}{r} = VPC \int_{\Gamma_e} \frac{dr}{r} = \ln \frac{R_f}{R_i}$$

Concluimos por tanto

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} \frac{f(\mathbf{y})}{r^2} d\Gamma &= \int_{\Gamma_e} \frac{f(\mathbf{y}) - f(\boldsymbol{\xi}) \left| \frac{dr}{d\Gamma} \right| - \left(\frac{df}{ds} \right)_{s=s^o} r \frac{dr}{d\Gamma}}{r^2} d\Gamma - \\ &- f(\boldsymbol{\xi}) \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_f} \right) + \left(\frac{df}{ds} \right)_{s=s^o} \ln \frac{R_f}{R_i} \end{aligned}$$

Análisis de singularidades

Procedemos a continuación a analizar el comportamiento de las funciones integrando en las integrales elementales n° 1 y n° 2.

Integral n° 1

Descomponemos la integral en suma de la integral de las partes estática y dinámica

$$\int_{\Gamma_e} q \frac{\partial u^*}{\partial y_i} \phi d\Gamma = \int_{\Gamma_e} q \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} \phi d\Gamma + \int_{\Gamma_e} q \frac{-i\omega r_{,i}}{2\pi\mu c_2} \left[\frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \right] \phi d\Gamma$$

Integral n° 1 (parte estática)

$$\int_{\Gamma_e} q \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} \phi d\Gamma \quad (15)$$

Analizamos el comportamiento de la función $r_{,i}$, cuando el nodo de colocación está incluido en el elemento de integración.

$$r_{,i} = \frac{y_i - \xi_i}{r}$$

Algebráicamente el valor de la función $r_{,i}$, cuando nos aproximamos al nodo de colocación es indefinido

$$r \rightarrow 0 \Rightarrow r_{,i} \rightarrow \frac{0}{0}$$

Sin embargo, gráficamente podemos deducir el valor definido de la función. Según se observa en la Figura 7, cuando $r \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} r_{,1} &= \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha_t \\ r_{,2} &= \sin \alpha \rightarrow \sin \alpha_t \end{aligned}$$

siendo α_t la pendiente de la tangente a Γ en el nodo de colocación ξ .

El valor límite de $r_{,i}$ cuando $r \rightarrow 0$ es distinto por la derecha y por la izquierda.

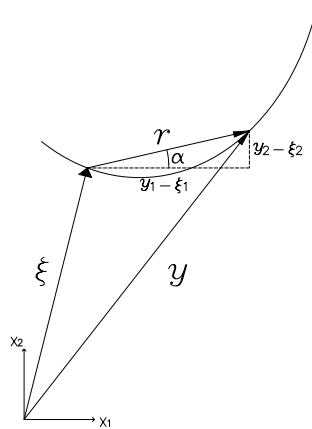


Figura 7

En efecto, de la Figura 8 podemos deducir

$$r \rightarrow 0^+ \Rightarrow \begin{cases} r_{,1} \rightarrow \cos \alpha_t = a \\ r_{,2} \rightarrow \sin \alpha_t = b \end{cases}$$

$$r \rightarrow 0^- \Rightarrow \begin{cases} r_{,1} \rightarrow \cos (180 + \alpha_t) = -a \\ r_{,2} \rightarrow \sin (180 + \alpha_t) = -b \end{cases}$$

En la Figura 9 representamos el comportamiento de la función $r_{,i}$ cuando $r \rightarrow 0$.

Como consecuencia del comportamiento de la función $r_{,i}$, concluimos que la función integrando de la expresión (15), presenta una singularidad cuando $r = 0$, haciéndose su valor infinito, pero con distinto signo si se aproxima por la derecha o por la izquierda

$$r \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{-r_{,i}}{r} \rightarrow -\infty$$

$$r \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{-r_{,i}}{r} \rightarrow +\infty$$

En la Figura 10 representamos el comportamiento de la función $\frac{-r_{,i}}{r}$ cuando $r \rightarrow 0$.

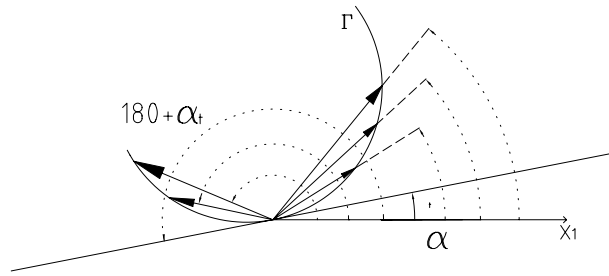


Figura 8

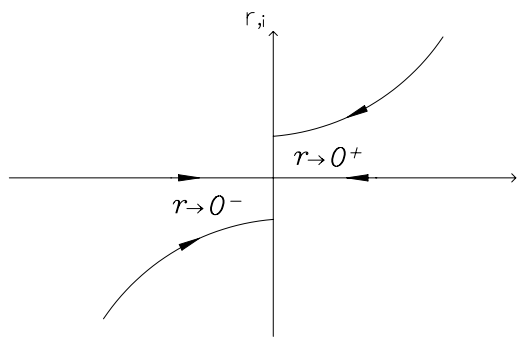


Figura 9

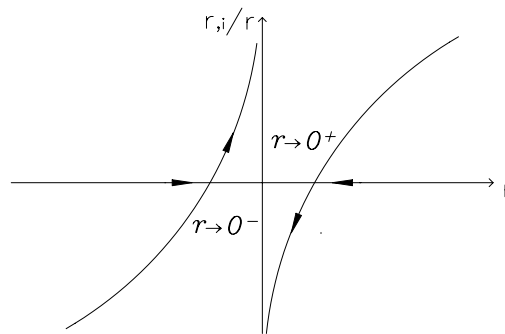


Figura 10

La función $q \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} \phi$ presenta como vemos un comportamiento análogo a la función $\frac{1}{x}$, y por lo tanto, el valor principal de Cauchy de la integral (15) es convergente. Tomaremos por tanto

$$\int_{\Gamma_\epsilon} q \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} \phi d\Gamma = VPC \int_{\Gamma_\epsilon} q \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} \phi d\Gamma$$

El cálculo del valor principal de Cauchy, lo hacemos regularizando la integral según se ha visto en el apartado Regularización de integrales singulares. Para ello, si llamamos

$$r_{,i}^{\circ} = \lim_{r \rightarrow 0^+} r_{,i}$$

y tenemos en cuenta el comportamiento de la función $\frac{dr}{d\Gamma}$, podemos expresar

$$\lim_{r \rightarrow 0} r_{,i} = r_{,i}^{\circ} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{dr}{d\Gamma}$$

Regularizamos la integral de la siguiente forma

$$VPC \int_{\Gamma_\epsilon} q \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} \phi d\Gamma = \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{q(-r_{,i})\phi + q^{\circ} \frac{dr}{d\Gamma} r_{,i}^{\circ} \phi^{\circ}}{2\pi\mu r} d\Gamma - VPC \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{q^{\circ} \frac{dr}{d\Gamma} r_{,i}^{\circ} \phi^{\circ}}{2\pi\mu r} d\Gamma \quad (16)$$

indicando el superíndice " ° " el valor de la función en el nodo de colocación.

En la expresión (16) encontramos las siguientes integrales

•

$$\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{q(-r_{,i})\phi + q^{\circ} \frac{dr}{d\Gamma} r_{,i}^{\circ} \phi^{\circ}}{2\pi\mu r} d\Gamma \quad (17)$$

El numerador de la función integrando en la expresión (17), en el entorno del nodo de colocación es de orden r , por lo tanto la integral es regular y podemos emplear para su cálculo procedimientos numéricos habituales.

•

$$VPC \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{q^{\circ} \frac{dr}{d\Gamma} r_{,i}^{\circ} \phi^{\circ}}{2\pi\mu r} d\Gamma \quad (18)$$

Según se ha visto en el subapartado Regularización de integrales hipersingulares

$$VPC \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{q^{\circ} \frac{dr}{d\Gamma} r_{,i}^{\circ} \phi^{\circ}}{2\pi\mu r} d\Gamma = \frac{q^{\circ} r_{,i}^{\circ} \phi^{\circ}}{2\pi\mu} \ln \frac{R_f}{R_i}$$

Podemos resumir por tanto el cálculo de la integral n° 1 (parte estática)

$$\int_{\Gamma_\epsilon} q \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} \phi d\Gamma = \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{q(-r_{,i})\phi + q^{\circ} \frac{dr}{d\Gamma} r_{,i}^{\circ} \phi^{\circ}}{2\pi\mu r} d\Gamma - \frac{q^{\circ} r_{,i}^{\circ} \phi^{\circ}}{2\pi\mu} \ln \frac{R_f}{R_i}$$

Integral n° 1 (parte dinámica)

$$\int_{\Gamma_\epsilon} q \frac{-i\omega r_{,i}}{2\pi\mu c_2} \left[\frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \right] \phi d\Gamma$$

El integrando presenta un comportamiento regular en el dominio de integración, por lo que, hemos calculado la integral por procedimientos numéricos habituales.

Integral nº 2

Descomponemos la integral en suma de la integral de las partes estática y dinámica

$$\int_{\Gamma_e} u \frac{\partial q^*}{\partial y_i} \phi d\Gamma = \int_{\Gamma_e} u \left\{ \frac{-1}{2\pi r^2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \right\} \phi d\Gamma +$$

$$+ \int_{\Gamma_e} u \left\{ \frac{w^2}{4\pi c_2^2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi r} \frac{iw}{c_2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) O(z^2) - \frac{1}{2\pi} \frac{w^2}{c_2^2} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} K_0(z) \right\} \phi d\Gamma$$

Integral nº 2 (parte estática)

$$\int_{\Gamma_e} u \left\{ \frac{-1}{2\pi r^2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \right\} \phi d\Gamma \tag{19}$$

Analizando la expresiones

$$r_{,i} = \frac{y_i - \xi_i}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = \nabla r \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{y_1 - \xi_1}{r}, \frac{y_2 - \xi_2}{r} \right) \cdot (n_1, n_2) = \left(\frac{y_1 - \xi_1}{r} n_1 + \frac{y_2 - \xi_2}{r} n_2 \right)$$

deducimos que la función integrando de la expresión (19) consiste en una combinación lineal de términos de la forma $\frac{1}{r^2}$ y $\frac{1}{r^4}$, por lo que nos encontramos ante una función de comportamiento hipersingular cuando el valor de $r \rightarrow 0$.

Para calcular la integral (19) mediante la consideración de su parte finita, nos aseguramos de que las funciones hipersingulares están multiplicadas por una función continua y con derivada continua.

Para garantizar la continuidad en el elemento de integración de las funciones de forma y de sus derivadas, así como de la función potencial u , obtenida por interpolación de los valores nodales, utilizaremos elementos en los que *nodos de colocación* y *nodos de interpolación* son desplazados cuando coinciden con nodos extremos del elemento, tal como se indica en la Figura 11.

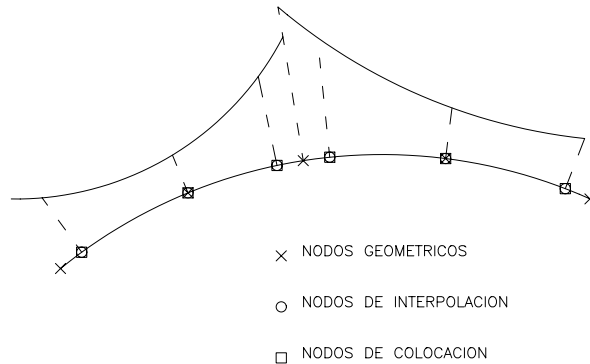


Figura 11

Procedemos a la regularización de cada una de las partes de la integral (19)

$$\int_{\Gamma_\epsilon} u \left\{ \frac{-1}{2\pi r^2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \right\} \phi d\Gamma = \frac{-1}{2\pi} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} u \frac{n_i}{r^2} \phi d\Gamma - \int_{\Gamma_\epsilon} 2u \frac{r_{,i}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \phi d\Gamma \right\}$$

1.

$$\int_{\Gamma_\epsilon} u \frac{n_i}{r^2} \phi d\Gamma \quad (20)$$

Teniendo en cuenta nuevamente el comportamiento de la función auxiliar $\frac{dr}{d\Gamma}$, expuesto en el anexo B, consideramos el siguiente desarrollo en serie

$$un_i\phi = u^\circ(n_i)^\circ\phi^\circ \left| \frac{dr}{d\Gamma} \right| + \left((un_i\phi)' \right)^\circ r \frac{dr}{d\Gamma} + O(\Delta s^2) \quad (21)$$

Consideramos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \left(\frac{dn_1}{ds} \right)_{s=s^\circ} &= \left(\frac{d}{ds} \left(\frac{dy_2}{ds} \right) \right)_{s=s^\circ} = \left(\frac{d^2 y_2}{ds^2} \right)_{s=s^\circ} \\ \left(\frac{dn_2}{ds} \right)_{s=s^\circ} &= \left(\frac{d}{ds} \left(-\frac{dy_1}{ds} \right) \right)_{s=s^\circ} = - \left(\frac{d^2 y_1}{ds^2} \right)_{s=s^\circ} \end{aligned}$$

teniendo en cuenta las expresiones de y_i y J en función de la coordenada natural ζ

$$\begin{aligned} y_i(\zeta) &= \phi_1(\zeta)y_i^{(1)} + \phi_2(\zeta)y_i^{(2)} + \phi_3(\zeta)y_i^{(3)} \\ J(\zeta) &= \frac{ds}{d\zeta} \end{aligned}$$

deducimos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_i}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{dy_i}{ds} \right) = \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{dy_i}{ds} \right) \frac{d\zeta}{ds} = \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{dy_i}{ds} \right) \frac{1}{J} \\ \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{dy_i}{ds} \right) &= \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{dy_i}{d\zeta} \frac{1}{J} \right) = \left(\frac{d^2 y_i}{d\zeta^2} J - \frac{dy_i}{d\zeta} \dot{J} \right) \frac{1}{J^2} \\ \frac{d^2 y_i}{ds^2} &= \left(\frac{d^2 y_i}{d\zeta^2} J - \frac{dy_i}{d\zeta} \dot{J} \right) \frac{1}{J^3} = \frac{\ddot{y}_i J - \dot{y}_i \dot{J}}{J^3} \end{aligned}$$

por lo tanto podemos expresar

$$\begin{aligned} \left(\frac{dn_1}{ds} \right)_{s=s^\circ} &= \left(\frac{\ddot{y}_2 J - \dot{y}_2 \dot{J}}{J^3} \right)_{s=s^\circ} \\ \left(\frac{dn_2}{ds} \right)_{s=s^\circ} &= - \left(\frac{\ddot{y}_1 J - \dot{y}_1 \dot{J}}{J^3} \right)_{s=s^\circ} \end{aligned}$$

Procedemos a la regularización de la integral (20)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{un_i\phi}{r^2} d\Gamma &= \\ &= \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{un_i\phi - u^\circ(n_i)^\circ\phi^\circ \left| \frac{dr}{d\Gamma} \right| - \left((un_i\phi)' \right)^\circ r \frac{dr}{d\Gamma}}{r^2} d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{u^\circ(n_i)^\circ\phi^\circ \left| \frac{dr}{d\Gamma} \right|}{r^2} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\left((un_i\phi)' \right)^\circ r \frac{dr}{d\Gamma}}{r^2} d\Gamma \end{aligned}$$

Calculamos las integrales obtenidas

•

$$\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{un_i\phi - u^\circ(n_i)^\circ\phi^\circ \left| \frac{dr}{d\Gamma} \right| - \left((un_i\phi)' \right)^\circ r \frac{dr}{d\Gamma}}{r^2} d\Gamma \quad (22)$$

De la expresión (21) deducimos que en el entorno del nodo de colocación

$$un_i\phi - u^\circ(n_i)^\circ\phi^\circ \left| \frac{dr}{d\Gamma} \right| - \left((un_i\phi)' \right)^\circ r \frac{dr}{d\Gamma} \simeq O(r^2)$$

y por tanto el integrando de (22) presenta un comportamiento regular. Podemos emplear para su cálculo procedimientos numéricos habituales.

- Según se ha expuesto en el apartado Regularización de integrales hipersingulares

$$\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{u^\circ(n_i)^\circ\phi^\circ \left| \frac{dr}{d\Gamma} \right|}{r^2} d\Gamma = -u^\circ(n_i)^\circ\phi^\circ \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_f} \right)$$

- Según se ha expuesto en el apartado Regularización de integrales singulares

$$\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\left((un_i\phi)' \right)^\circ \frac{dr}{d\Gamma}}{r} d\Gamma = \left((un_i\phi)' \right)^\circ \ln \left(\frac{R_f}{R_i} \right)$$

2.

$$\int_{\Gamma_\epsilon} 2u \frac{r_{,i}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \phi d\Gamma \quad (23)$$

podemos expresar

$$\int_{\Gamma_\epsilon} 2u \frac{r_{,i}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \phi d\Gamma = \int_{\Gamma_\epsilon} 2u \frac{r_{,i}}{r} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right) \phi d\Gamma$$

Consideremos el desarrollo en serie de la función $ur_{,i} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right) \phi$

$$ur_{,i} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right) \phi = u^\circ \frac{dr}{d\Gamma} r_{,i}^\circ \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^\circ \phi^\circ + TOS \quad (24)$$

Regularizamos la integral (23) utilizando el primer término del desarrollo en serie

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_e} 2u \frac{r_{,i}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \phi d\Gamma = \\ & = 2 \int_{\Gamma_e} \frac{ur_{,i} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right) \phi - u^\circ \frac{dr}{d\Gamma} r_{,i}^\circ \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^\circ \phi^\circ}{r} d\Gamma + 2 \int_{\Gamma_e} \frac{u^\circ \frac{dr}{d\Gamma} r_{,i}^\circ \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^\circ \phi^\circ}{r} d\Gamma = \\ & = 2 \int_{\Gamma_e} \frac{ur_{,i} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right) \phi - u^\circ \frac{dr}{d\Gamma} r_{,i}^\circ \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^\circ \phi^\circ}{r} d\Gamma + 2u^\circ r_{,i}^\circ \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^\circ \phi^\circ \ln \left(\frac{R_f}{R_i} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

En la expresión (25) aparece la integral

$$\int_{\Gamma_e} \frac{ur_{,i} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right) \phi - u^\circ r_{,i}^\circ \frac{dr}{d\Gamma} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^\circ \phi^\circ}{r} d\Gamma \quad (26)$$

De la expresión (24) deducimos

$$ur_{,i} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right) \phi - u^\circ r_{,i}^\circ \frac{dr}{d\Gamma} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^\circ \phi^\circ \simeq O(r)$$

La integral (26) es por tanto una integral regular y podemos emplear para su cálculo procedimientos numéricos habituales.

En el anexo E se incluye el cálculo de la expresión

$$\left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^\circ = \frac{1}{2} \left[n_1^\circ \left(\frac{dx_1^2}{ds^2} \right)^\circ + n_2^\circ \left(\frac{dx_2^2}{ds^2} \right)^\circ \right]$$

Podemos resumir el cálculo de la integral n° 2 (parte estática) como se indica

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_e} u \left\{ \frac{-1}{2\pi r^2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \right\} \phi d\Gamma = \\ & = \frac{-1}{2\pi} \int_{\Gamma_e} \frac{un_i \phi - u^\circ (n_i)^\circ \phi^\circ \left| \frac{dr}{d\Gamma} \right| - \left((un_i \phi)' \right)^\circ r \frac{dr}{d\Gamma}}{r^2} d\Gamma \\ & + \frac{u^\circ (n_i)^\circ \phi^\circ}{2\pi} \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_f} \right) - \frac{\left((un_i \phi)' \right)^\circ}{2\pi} \ln \left(\frac{R_f}{R_i} \right) \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_e} \frac{ur_{,j} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right) \phi - u^\circ r_{,j}^\circ \frac{dr}{d\Gamma} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^\circ \phi^\circ}{r} d\Gamma \\ & + \frac{u^\circ r_{,i}^\circ}{\pi} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^\circ \phi^\circ \ln \left(\frac{R_f}{R_i} \right) \end{aligned}$$

Integral n° 2 (parte dinámica)

$$\int_{\Gamma_e} u \left\{ \frac{w^2}{4\pi c_2^2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2\pi r} \frac{iw}{c_2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) O(z^2) - \frac{1}{2\pi} \frac{w^2}{c_2^2} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} K_0(z) \right\} \phi d\Gamma \quad (27)$$

El integrando presenta una singularidad logarítmica en el dominio de integración, por lo que hemos calculado la integral por procedimientos numéricos habituales.

CONCLUSIONES

El objetivo del presente artículo es la exposición de los procedimientos de integración empleados en la discretización de la *ecuación integral de las variaciones en el contorno* (δBIE). Los numerosos resultados satisfactorios de resolución del problema inverso de identificación aplicado a problemas de potencial y estados elastodinámicos antiplanos con variación armónica en el tiempo, incluidos en las referencias^{6,7,16} prueban la bondad de la ecuación integral propuesta (δBIE), así como de los procedimientos de integración empleados.

Exponemos por tanto en el presente artículo procedimientos contrastados de integración singular e hipersingular que aportan las siguientes ventajas:

- son aplicables a integrales sobre dominios curvilíneos
- son extrapolables a funciones de forma genéricas, como las funciones del tipo \sqrt{r} empleadas en mecánica de la fractura

ANEXOS

A. Gradiente del flujo de la solución fundamental

LLamando, $z = \frac{iwr}{c_2}$ podemos expresar

$$q^* = \frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} z K_1(z)$$

derivando

$$\frac{\partial q^*}{\partial y_i} = \frac{-1}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) z K_1(z) + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial}{\partial y_i} (z K_1(z)) \right] \quad (28)$$

podemos expresar

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right)_{,i} = \left(\frac{1}{r} \right)_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right)_{,i} \quad (29)$$

teniendo en cuenta

$$\left(\frac{1}{r} \right)_{,i} = \frac{-r_{,i}}{r^2}$$

por ser $n_{i,j} = 0$, tenemos

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right)_{,i} = r_{,ji} n_j \quad (30)$$

teniendo en cuenta el desarrollo

$$r_{,ij} = \frac{1}{r}(\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j})$$

sustituyendo en (30)

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}\right)_{,i} = \frac{1}{r}(\delta_{ji} - r_{,j} r_{,i})n_j = \frac{1}{r}\left(n_i - r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}\right)$$

sustituyendo en (29)

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}\right) = \frac{-r_{,i}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{r^2} \left(n_i - r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}\right) \quad (31)$$

teniendo en cuenta la expresión de la derivada de la función de Bessel de orden 1

$$\frac{d}{dz} \{z K_1(z)\} = -z K_0(z)$$

y sustituyendo (31) en (28), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial q^*}{\partial y_i} &= \frac{-1}{2\pi} \left[\left(\frac{-r_{,i}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{r^2} \left(n_i - r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \right) z K_1(z) - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} z K_0(z) \frac{i\omega}{c_2} r_{,i} \right] = \\ &= \frac{-1}{2\pi} \left[\frac{i\omega}{c_2} \frac{1}{r} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) K_1(z) + \frac{\omega^2}{c_2^2} r_{,i} K_0(z) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right] \end{aligned}$$

B. Función auxiliar

Debido a su utilización como función auxiliar, analizaremos el comportamiento de la función $\frac{dr}{d\Gamma}$ cuando $r \rightarrow 0^\pm$.

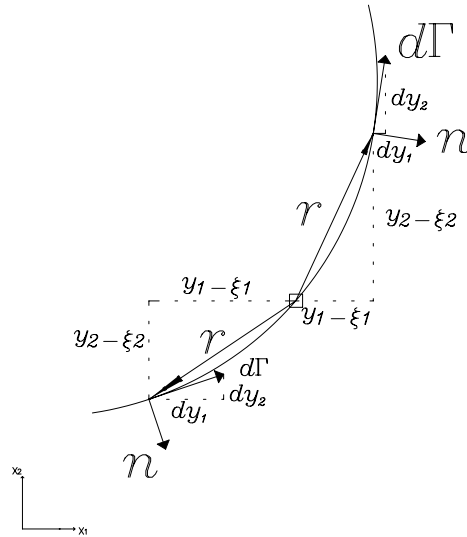


Figura 12

Como se aprecia en la Figura 12, en cada punto de Γ el vector $d\mathbf{\Gamma}$ toma la dirección de la tangente. Si llamamos \mathbf{t} al vector tangente unitario

$$d\mathbf{\Gamma} : (dy_1, dy_2) \Rightarrow \mathbf{t} : \left(\frac{dy_1}{d\Gamma}, \frac{dy_2}{d\Gamma} \right)$$

el gradiente de la función r es

$$\nabla r : (r, y_1, y_2) = \frac{1}{r}(y_1 - \xi_1, y_2 - \xi_2) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

el vector normal unitario es

$$\mathbf{n} : \left(\frac{dy_2}{d\Gamma}, -\frac{dy_1}{d\Gamma} \right)$$

aplicando la regla de la cadena

$$\frac{dr}{d\Gamma} = \frac{\partial r}{\partial y_1} \frac{dy_1}{d\Gamma} + \frac{\partial r}{\partial y_2} \frac{dy_2}{d\Gamma} = \nabla r \cdot \mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot \mathbf{t}$$

de la Figura 12 deducimos

$$r \rightarrow 0^+ : \left\{ \begin{array}{l} (y_2 - \xi_2) \rightarrow dy_2 \\ (y_1 - \xi_1) \rightarrow dy_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{r} \rightarrow d\mathbf{\Gamma} \Rightarrow \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \rightarrow \mathbf{t} \Rightarrow \frac{dr}{d\Gamma} \rightarrow 1$$

$$r \rightarrow 0^- : \left\{ \begin{array}{l} (y_2 - \xi_2) \rightarrow -dy_2 \\ (y_1 - \xi_1) \rightarrow -dy_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{r} \rightarrow -d\mathbf{\Gamma} \Rightarrow \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \rightarrow -\mathbf{t} \Rightarrow \frac{dr}{d\Gamma} \rightarrow -1$$

C. Cálculo del valor principal de Cauchy

Calcularemos el valor principal de Cauchy

$$VPC \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{dr/d\Gamma}{r} d\Gamma$$

distinguiendo los siguientes casos:

1. El nodo de colocación es un punto interior del elemento, (ver Figura 13)

$$\begin{aligned} VPC \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{dr/d\Gamma}{r} d\Gamma &= VPC \int_{S_i}^{S_f} \frac{dr/d\Gamma}{r} d\Gamma = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_i}^{S_o-\epsilon} \frac{dr/d\Gamma}{r} d\Gamma + \int_{S_o+\epsilon}^{S_f} \frac{dr/d\Gamma}{r} d\Gamma \right\} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{R_i}^\epsilon \frac{dr}{r} + \int_\epsilon^{R_f} \frac{dr}{r} \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{R_i}^\epsilon \frac{dr}{r} + \int_\epsilon^{R_f} \frac{dr}{r} \right\} = \ln \frac{R_f}{R_i} \end{aligned}$$

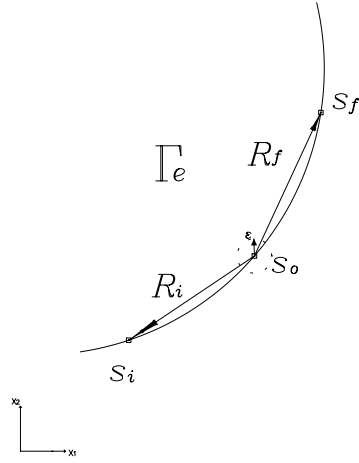


Figura 13

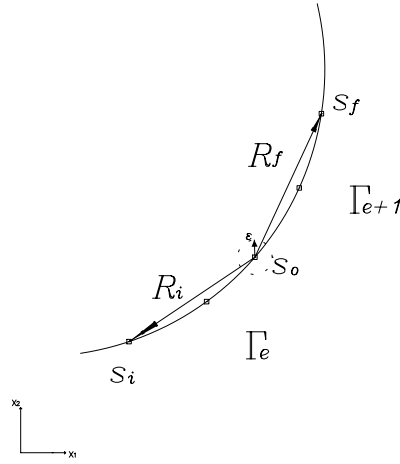


Figura 14

2. El nodo de colocación coincide con un nodo extremo del elemento (ver Figura 14); en este caso calcularemos la integral correspondiente a dos elementos de contorno consecutivos.

$$\begin{aligned}
 VPC \int_{\Gamma_e + \Gamma_{e+1}} \frac{dr/d\Gamma}{r} d\Gamma &= VPC \int_{S_i}^{S_f} \frac{dr/d\Gamma}{r} d\Gamma = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_i}^{S_o - \varepsilon} \frac{dr/d\Gamma}{r} d\Gamma \right\} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_o + \varepsilon}^{S_f} \frac{dr/d\Gamma}{r} d\Gamma \right\} = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{R_i}^{\varepsilon} \frac{dr}{r} \right\} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^{R_f} \frac{dr}{r} \right\} = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ (\ln \varepsilon - \ln R_i) + (\ln R_f - \ln \varepsilon) \} = \ln \frac{R_f}{R_i}
 \end{aligned}$$

En ambos casos obtenemos

$$VPC \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{dr/d\Gamma}{r} d\Gamma = \ln \frac{R_f}{R_i}$$

D. Cálculo de la parte finita

Considerando que el nodo de colocación es un punto interior del elemento de integración, (ver Figura 13)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{dr}{r^2} &= pf \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon - S_\epsilon + \Gamma_\epsilon} \frac{dr}{r^2} \right\} \right) = \\ &= pf \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{s_i}^{s_o - \epsilon} \frac{-dr}{r^2} + \int_{s_o + \epsilon}^{s_f} \frac{dr}{r^2} \right\} \right) = pf \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{R_i}^\epsilon \frac{-dr}{r^2} + \int_\epsilon^{R_f} \frac{dr}{r^2} \right\} \right) = \\ &= pf \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_f} + \frac{1}{\epsilon} \right\} \right) = - \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_f} \right) \end{aligned}$$

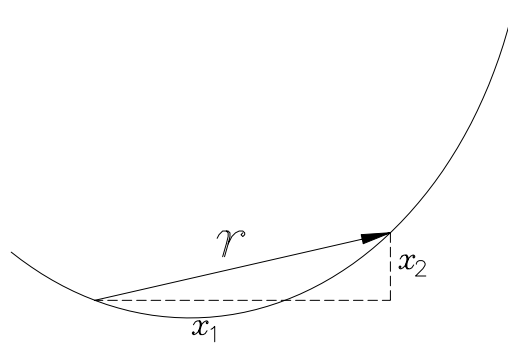


Figura 15

E. Desarrollo auxiliar

Estableciendo el origen del sistema de referencia en el nodo de colocación, podemos expresar

$$\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = \nabla r \cdot \mathbf{n} = r_{,i} n_i = \frac{x_1}{r} n_1 + \frac{x_2}{r} n_2 = \frac{x_1}{r} \frac{dx_2}{ds} - \frac{x_2}{r} \frac{dx_1}{ds} \quad (32)$$

como se aprecia en la Figura 15

$$r \rightarrow 0^+ \Rightarrow \Delta s = r$$

$$r \rightarrow 0^- \Rightarrow \Delta s = -r$$

consideramos el desarrollo en serie de las funciones $x_i(s)$

$$x_1(s) = x_1(s^o) + \left(\frac{dx_1}{ds} \right)^o \Delta s + \frac{1}{2} \left(\frac{dx_1^2}{ds^2} \right)^o \Delta s^2 + TOS$$

$$x_2(s) = x_2(s^o) + \left(\frac{dx_2}{ds} \right)^o \Delta s + \frac{1}{2} \left(\frac{dx_2^2}{ds^2} \right)^o \Delta s^2 + TOS$$

teniendo en cuenta que $x_i(s^o) = 0$, y considerando $\Delta s = r$ (se obtienen iguales conclusiones considerando $\Delta s = -r$)

$$\frac{x_1}{r} \simeq \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^o + \frac{1}{2} \left(\frac{dx_1^2}{ds^2}\right)^o r \quad (33)$$

$$\frac{x_2}{r} \simeq \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^o + \frac{1}{2} \left(\frac{dx_2^2}{ds^2}\right)^o r \quad (34)$$

consideramos el desarrollo en serie de las funciones $\frac{dx_i}{ds}(s)$

$$\frac{dx_1}{ds}(s) = \frac{dx_1}{ds}(s^o) + TOS \simeq \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^o \quad (35)$$

$$\frac{dx_2}{ds}(s) = \frac{dx_2}{ds}(s^o) + TOS \simeq \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^o \quad (36)$$

multiplicando las expresiones (33) por (36) y (34) por (35)

$$\frac{x_1}{r} \frac{dx_2}{ds} \simeq \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^o \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^o + \frac{1}{2} \left(\frac{dx_1^2}{ds^2}\right)^o \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^o r \quad (37)$$

$$\frac{x_2}{r} \frac{dx_1}{ds} \simeq \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^o \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^o + \frac{1}{2} \left(\frac{dx_2^2}{ds^2}\right)^o \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^o r \quad (38)$$

restando las expresiones (37) y (38)

$$\frac{x_1}{r} \frac{dx_2}{ds} - \frac{x_2}{r} \frac{dx_1}{ds} = \frac{1}{2} \left(\frac{dx_1^2}{ds^2}\right)^o \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^o r - \frac{1}{2} \left(\frac{dx_2^2}{ds^2}\right)^o \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^o r$$

considerando la expresión (32)

$$\left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r}\right)^o = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx_1^2}{ds^2}\right)^o \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^o - \left(\frac{dx_2^2}{ds^2}\right)^o \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^o \right]$$

teniendo en cuenta las expresiones de n_i , concluimos

$$\left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r}\right)^o = \frac{1}{2} \left[n_1^o \left(\frac{dx_1^2}{ds^2}\right)^o + n_2^o \left(\frac{dx_2^2}{ds^2}\right)^o \right]$$

REFERENCIAS

- 1 H. Bui, "An integral equation method for three dimensional elastic mechanics analysis", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol., **25**, pp. 29–39, (1997).
- 2 T.A. Cruse, "Numerical solutions in three-dimensional elastostatics", *International Journal Solids Struct.*, Vol., **5**, pp. 1259–1274, (1969).
- 3 T.A. Cruse, "An improved boundary integral equation method for three dimensional elastic stress analysis", *Comput. Struct.*, Vol., **4**, pp. 741–754, (1974).

- 4 T.A. Cruse, "Boundary integral equation method for three dimensional elastic fracture mechanics analysis", ADA-11060 AFOSR-TR-75-0813, ADA 011660, (1975).
- 5 T.A. Cruse y R. Aithal, "A new integration algorithm for nearly singular BIE kernels", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol., **36**, pp. 237–254, (1993).
- 6 R. Gallego y J. Suárez, "Solution of inverse problems by boundary integral equations without residual minimization", *International Journal of Solid and Structures*, Aceptado para publicación.
- 7 R. Gallego y J. Suárez, "Numerical solution of a new variation boundary integral equation for inverse problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Aceptado para publicación.
- 8 L.J. Gray, L.F. Martha y A.R. Ingraffea, "Hypersingular integrals in boundary element fracture analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol., **29**, pp. 1135–1158, (1990).
- 9 J.T. Guidera y R.W. Lardner, "Penny-shaped cracks", *Journal Elasticity*, Vol., **5**, pp. 59–73, (1975).
- 10 M. Guiggiani, "Hypersingular formulation for boundary stress evaluation", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. **14**, pp. 169–180, (1994).
- 11 M. Guiggiani, "The evaluation of Cauchy principal value integrals in the boundary element method - a review", *Math. Comput. Modelling*, Vol., **15**, pp. 175–184, (1991).
- 12 M. Guiggiani y P. Casalini, "Direct computation of Cauchy principal value integrals in advanced boundary elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol., **24**, pp. 1711–1720, (1987).
- 13 M. Guiggiani y A. Gigante, "A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integral in the boundary element method", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol., **57**, pp. 906–915, (1990).
- 14 K. Hayami, *A robust numerical integration method for 3-D boundary element analysis and its error analysis using complex function theory*, Proc. Conf. on Numerical Integration Recent Development, Software and Applications, Bergen, Noruega, pp. 235–248, (1991).
- 15 Q. Huang y T.A. Cruse, "Some notes on singular integral techniques in boundary element analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol., **36**, pp. 2643–2659, (1993).
- 16 J. Suárez, "Aplicación del método de los elementos de contorno a la resolución del problema inverso en elastodinámica", Tesis Doctoral, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad de Granada, (1998).
- 17 S. Kubo, *Classification of inverse problems arising in field problems and their treatments*, En *Inverse Problems in Engineering Mechanics*. IUTAM Symposium Tokyo, M. Tanake y H.D. Bui Ed. , pp. 51–60, (1992).
- 18 H.R. Kutt, "Quadrature formulae for finite-part integrals", Technical Report CSIR Special Report WISK 178, (1975).
- 19 H.R. Kutt, "The numerical evaluation of principal value integrals by finite-part integration", *Numerical Math.*, Vol., **24**, pp. 205–210, (1975).
- 20 J.G. Lachat y J.O. Watson, "Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol., **10**, pp. 991–1005, (1976).

- 21 M.H. Lean y A. Wexler, "Accurate numerical integration of singular boundary element kernels over boundaries with curvature", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol., **21**, pp. 211–228, (1985).
- 22 H.L.G. Pina y J.L.M. Fernandes, "Some numerical integration formulae over triangles and squares with $1/r$ singularity", *Appl. Math. Modelling*, Vol., **5**, pp. 209–211, (1981).
- 23 C.J. Putot, "Une nouvelle méthode d'équations intégrales pour certains problèmes de fissures plane", Ph.D. Thesis, University Pierre et Marie Curie, Paris VI, (1980).
- 24 C.J. Putot, *An integral equation method for resolution, in opening mode, of the problem of plane cracks at free surface*, Proc. 5th International Conf. on Fracture, D. Francois Ed., Vol., **1**, pp. 141–150, (1981).
- 25 J. Sladek y J. Balas, *Method of boundary integral equations for analysis of three dimensional crack problems*, En Boundary element methods, Proc. 3rd Int. Seminar, C.A. Brebbia, Springer, pp. 183–205, (1981).
- 26 P.S. Theocaris, "Numerical solution of singular integral equations: applications", *Journal Engineering Mech. Div. ASCE*, Vol., **107**, pp. 753–771, (1981).
- 27 J. Weaver, "Three dimensional crack analysis", *International Journal Solid Struct.*, Vol., **13**, pp. 321–330, (1977).