

COMENTARIOS SOBRE ALGUNAS HERRAMIENTAS UTILIZADAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS NO-LINEALES DE MECÁNICA DEL CONTINUO

EDUARDO N. DVORKIN,
MARCELA B. GOLDSCHMIT,
DANIEL PANTUSO

y
EDUARDO A. REPETTO

*Centro de Investigación Industrial, FUDETEC
Av. Córdoba 320
1054, Buenos Aires, Argentina*

RESUMEN

En este trabajo tratamos de llevar al nivel matemático simple del cálculo tensorial desarrollos provenientes del cálculo de variedades diferenciables que permiten sistematizar la resolución de problemas no-lineales de Mecánica del Continuo.

SUMMARY

In this paper we try to put in the simple mathematical level of tensor calculus developments of differential manifold analysis that allow to formulate in a systematic way the solution of nonlinear Continuum Mechanics problems.

INTRODUCCIÓN

Cuando se describe la deformación de un medio continuo utilizando una metodología Lagrangeana¹⁻⁴, se conoce una configuración de referencia que puede ser la inicial o descargada en el caso de las llamadas *formulaciones Lagrangeanas totales* o una configuración de equilibrio cualquiera que sea conocida, en el caso de las llamadas *formulaciones Lagrangeanas actualizadas*⁵ y se busca la configuración espacial correspondiente a un instante t . Llamamos instante a un valor determinado de la coordenada temporal y debemos hacer notar que utilizamos la noción de tiempo en un sentido muy general, como el de una coordenada que sirve para numerar eventos.

La configuración espacial correspondiente al instante t está definida por desplazamientos ${}^t\mathbf{u}$ que satisfacen ecuaciones del tipo:

$$\nabla \cdot {}^t\boldsymbol{\sigma}({}^t\mathbf{u}) + {}^t\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{en } {}^t\Omega \quad (1)$$

Recibido: Mayo 1993

Donde en general los tensores de segundo orden ${}^t\sigma$ son complicadas funciones no-lineales de ${}^t\mathbf{u}$ y de la historia del proceso de deformación. Una dificultad fundamental para resolver la ecuación (1) es que el dominio ${}^t\Omega$ sobre el que debe ser resuelta es parte de la solución del problema.

El problema matemático se completa con condiciones de borde en ${}^t\sigma$ y ${}^t\mathbf{u}$, y se resuelve, como es bien sabido, utilizando magnitudes definidas sobre una configuración de referencia (representaciones en cierto sentido de las magnitudes definidas en la configuración espacial) y resolviendo un problema equivalente al descrito por la ecuación (1) sobre ${}^\circ\Omega$ (donde el supraíndice ${}^\circ$ indica la configuración de referencia adoptada).

El tensor de deformaciones de Green-Lagrange y el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff son ejemplos de magnitudes definidas sobre la configuración de referencia para resolver sobre ${}^\circ\Omega$ los problemas no-lineales^{5, Cap.6}.

Marsden y Hughes⁴ describen metodologías utilizadas en el cálculo de variedades diferenciables⁶ que permiten sistematizar la tarea de encontrar representaciones sobre ${}^\circ\Omega$ de tensores definidos en ${}^t\Omega$ y sistematizar la formulación de problemas matemáticos definidos sobre ${}^\circ\Omega$, equivalentes a la ecuación (1).

Los desarrollos modernos del método de elementos finitos aplicados a problemas no-lineales de Mecánica del Sólido hacen un uso riguroso de estas técnicas⁷⁻¹¹.

Nuestro objetivo en el presente trabajo es el de desarrollar una visión geométrica de algunas técnicas de cálculo de variedades diferenciables como los “pull-back” y los “push-forward”^{4,6}, que permita su incorporación simple e intuitiva al bagaje de herramientas con las que nos manejamos los ingenieros que trabajamos en la resolución mediante elementos finitos de problemas no-lineales en Mecánica del Continuo.

A la luz de estas técnicas y de un producto de ellas como es la derivada de Lie, realizamos una rápida revisión del clásico problema de objetividad.

Finalizamos analizando la representación sobre la configuración de referencia de algunas ecuaciones típicas que se encuentran en la Mecánica de Sólidos.

REPRESENTACIONES EN LA CONFIGURACIÓN DE REFERENCIA DE TENSORES DEFINIDOS EN LA CONFIGURACIÓN ESPACIAL

Supongamos conocidas para un continuo la configuración de referencia (${}^\circ\Omega$) y la configuración espacial (${}^t\Omega$), tal como lo hemos indicado en la Figura 1.

Definimos:

- Un sistema de coordenadas arbitrario en la configuración espacial $\{x^a\}$ con vectores base covariantes ${}^t\mathbf{g}_a$ y vectores base contravariantes ${}^t\mathbf{g}^a$.
- Un sistema de coordenadas arbitrario en la configuración de referencia $\{X^A\}$ con vectores base covariantes $\mathbf{G}_A$ y vectores base contravariantes $\mathbf{G}^A$.
- Un sistema de coordenadas convectivo $\{\theta^i\}$ que en la configuración espacial tiene vectores base covariantes ${}^t\tilde{\mathbf{g}}_i$ y vectores base contravariantes ${}^t\tilde{\mathbf{g}}^i$ y en la configuración de referencia tiene vectores base covariantes $\tilde{\mathbf{G}}_i$ y vectores base contravariantes $\tilde{\mathbf{G}}^i$.

Supongamos la existencia de un mapeo biunívoco:

$${}^t x^a = {}^t \phi^a(X^A) \quad (2.a)$$

y un mapeo inverso

$$X^A = [{}^t \phi^{-1}({}^t x^a)]^A \quad (2.b)$$

es decir, asumamos que el movimiento indicado en la Figura 1 es un movimiento regular. La noción formal de movimiento regular se corresponde con nuestra noción intuitiva de movimientos en los que no ocurre interpenetración.

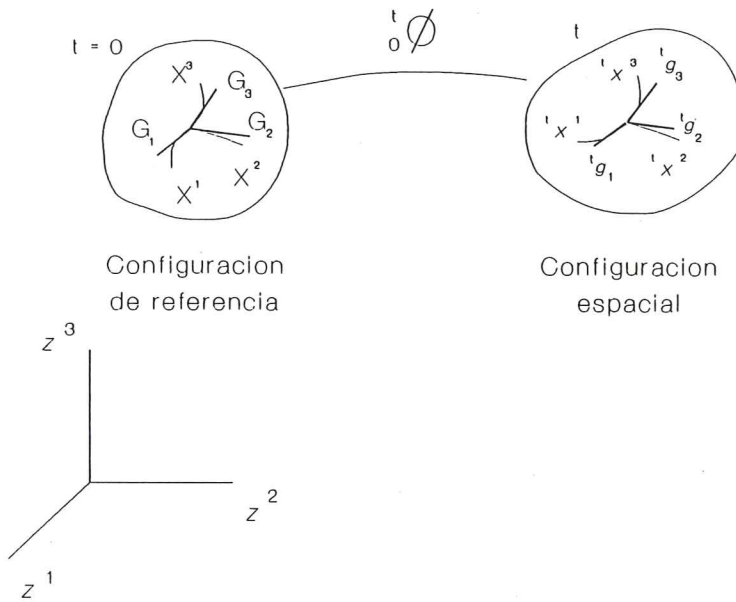


Figura 1 Movimiento de un continuo

Restringiendo nuestro problema al espacio Euclídeo podemos considerar a ${}^t \underline{\phi}$ un vector.

Se define un tensor de dos puntos⁴ denominado tensor gradiente de deformaciones:

$${}^t \underline{\underline{F}} = \frac{\partial {}^t \phi^a}{\partial X^A} {}^t \underline{g}_a \underline{G}^A \quad (3.a)$$

donde con la notación ${}^t \underline{g}_a \underline{G}^A$ indicamos el producto tensorial de dos vectores (en algunas referencias se utiliza la notación ${}^t \underline{g}_a \otimes \underline{G}^A$).

Es inmediato que,

$${}^t d\underline{x} = {}^t \underline{\underline{F}} \cdot d\underline{X} \quad (3.b)$$

siendo

$${}^t d\mathbf{x} = {}^t dx^a {}^t \underline{\mathbf{g}}_a \quad (3.c)$$

y

$$d\mathbf{X} = dX^A \underline{\mathbf{G}}_A \quad (3.d)$$

“Pull-back” de vectores

Dado en la configuración espacial (${}^t\Omega$) un vector,

$${}^t \underline{\mathbf{b}} = {}^t b^i {}^t \underline{\mathbf{g}}_i = {}^t b_i {}^t \underline{\mathbf{g}}^i = {}^t \tilde{b}^i {}^t \tilde{\underline{\mathbf{g}}}_i = {}^t \tilde{b}_i {}^t \tilde{\underline{\mathbf{g}}}^i \quad (4)$$

Definimos en la configuración de referencia (${}^\circ\Omega$) los siguientes vectores:

$${}^t \underline{\mathbf{B}}^\sharp = {}^t \tilde{b}^i \tilde{\underline{\mathbf{G}}}_i = [{}^t \underline{\mathbf{B}}^\sharp]^A \underline{\mathbf{G}}_A \quad (5.a)$$

$${}^t \underline{\mathbf{B}}^b = {}^t \tilde{b}_i \tilde{\underline{\mathbf{G}}}^i = [{}^t \underline{\mathbf{B}}^b]_A \underline{\mathbf{G}}^A \quad (5.b)$$

Operando obtenemos,

$$[{}^t \underline{\mathbf{B}}^\sharp]^A = {}^t b^j ({}^t {}^\circ F^{-1})^A_j \quad (6.a)$$

$$[{}^t \underline{\mathbf{B}}^b]_A = {}^t b_j {}^t {}^\circ F^j_A \quad (6.b)$$

Utilizando la notación de cálculo de variedades diferenciables^{4,6} definimos el “pull-back” de las componentes contravariantes de ${}^t \underline{\mathbf{b}}$ a:

$$[{}^t \phi^*({}^t b^j)]^A = [{}^t \underline{\mathbf{B}}^\sharp]^A \quad (7.a)$$

y el “pull-back” de las componentes covariantes de ${}^t \underline{\mathbf{b}}$ (one form) a:

$$[{}^t \phi^*({}^t b_j)]_A = [{}^t \underline{\mathbf{B}}^b]_A \quad (7.b)$$

Podemos escribir a partir de las ecuaciones (5) y (6):

$${}^t \underline{\mathbf{B}}^\sharp = {}^t b^j ({}^t {}^\circ F^{-1})^A_j \underline{\mathbf{G}}_A = {}^t b^j ({}^t {}^\circ F^{-1})^A_j G_{AC} \underline{\mathbf{G}}^C \quad (8.a)$$

$${}^t \underline{\mathbf{B}}^b = {}^t b_j {}^t {}^\circ F^j_A \underline{\mathbf{G}}^A = {}^t b_j {}^t {}^\circ F^j_A G^{AC} \underline{\mathbf{G}}_C \quad (8.b)$$

Dados en la configuración espacial dos vectores ${}^t \underline{\mathbf{b}}$ y ${}^t \underline{\mathbf{w}}$ se demuestra a partir de las ecuaciones (5) que,

$${}^t \underline{\mathbf{B}}^\sharp \cdot {}^t \underline{\mathbf{W}}^b = {}^t \underline{\mathbf{B}}^b \cdot {}^t \underline{\mathbf{W}}^\sharp = {}^t \underline{\mathbf{b}} \cdot {}^t \underline{\mathbf{w}} \quad (9)$$

y además, para cada uno de ellos,

$$[{}^t\mathbf{B}^b]_A = [{}^t\mathbf{B}^\sharp]^B {}^tC_{AB} \quad (10)$$

donde ${}^t\mathbf{C} = {}^t\mathbf{F}^T \cdot {}^t\mathbf{F}$ es el tensor de deformaciones de Green¹⁻⁴ (definido en la configuración de referencia).

Resulta inmediato demostrar que¹¹:

$${}^t\phi^*({}^t\tilde{\mathbf{g}}_i) = ({}^t\tilde{\mathbf{G}}_i)^\sharp = \tilde{\mathbf{G}}_i \quad (11.a)$$

$${}^t\phi^*({}^t\tilde{\mathbf{g}}^i) = ({}^t\tilde{\mathbf{G}}^i)^b = \tilde{\mathbf{G}}^i \quad (11.b)$$

De las ecuaciones anteriores se desprende, por inspección, el significado geométrico de los vectores ${}^t\mathbf{B}^\sharp$ y ${}^t\mathbf{B}^b$:

- Si ${}^t\mathbf{b}$ es tangente en la configuración espacial a una curva ${}^t\mathbf{c}(\xi)$, el vector ${}^t\mathbf{B}^\sharp$ es tangente en la configuración de referencia a la curva $\mathbf{C}(\xi) = {}^t\phi^{-1}[{}^t\mathbf{c}(\xi)]$.
- En el pasaje ${}^t\mathbf{B}^\sharp \rightarrow {}^t\mathbf{b}$, el módulo de los vectores se estira como la correspondiente fibra del material a la que es tangente.

Expresando ${}^t d\mathbf{x}$ y $d\mathbf{X}$ en convectivas resulta,

$${}^t d\mathbf{x} = d\theta^i {}^t\tilde{\mathbf{g}}_i \quad (12.a)$$

$$d\mathbf{X} = d\theta^i \tilde{\mathbf{G}}_i \quad (12.b)$$

es decir, que

$${}^t d\mathbf{X}^\sharp = d\mathbf{X} \quad (12.c)$$

- Definidos dos vectores ${}^t\mathbf{b}$ y ${}^t\mathbf{w}$ ortogonales en la configuración espacial es inmediato que,

$${}^t\mathbf{B}^\sharp \cdot {}^t\mathbf{W}^b = {}^t\mathbf{B}^b \cdot {}^t\mathbf{W}^\sharp = {}^t\mathbf{b} \cdot {}^t\mathbf{w} = 0 \quad (13)$$

- Por lo tanto la ortogonalidad de ${}^t\mathbf{b}$ y ${}^t\mathbf{w}$ implica la ortogonalidad de ${}^t\mathbf{B}^\sharp$ y ${}^t\mathbf{W}^b$ y la de ${}^t\mathbf{B}^b$ y ${}^t\mathbf{W}^\sharp$.

“Pull-back” de tensores

Dado en la configuración espacial (${}^t\Omega$) un tensor de segundo orden

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{t} &= {}^t t^{ij} {}^t\mathbf{g}_i {}^t\mathbf{g}_j = {}^t t_{ij} {}^t\mathbf{g}^i {}^t\mathbf{g}^j = {}^t t^i_j {}^t\mathbf{g}_i {}^t\mathbf{g}^j = {}^t \tilde{t}^{ij} {}^t\tilde{\mathbf{g}}_i {}^t\tilde{\mathbf{g}}_j \\ &= {}^t \tilde{t}_{ij} {}^t\tilde{\mathbf{g}}^i {}^t\tilde{\mathbf{g}}^j = {}^t \tilde{t}^i_j {}^t\tilde{\mathbf{g}}_i {}^t\tilde{\mathbf{g}}^j \end{aligned} \quad (14)$$

definimos en la configuración de referencia (${}^\circ\Omega$) los siguientes tensores:

$${}^t\mathbf{T}^\sharp = {}^t \tilde{t}^{ij} \tilde{\mathbf{G}}_i \tilde{\mathbf{G}}_j = [{}^t\mathbf{T}^\sharp]^{AB} \mathbf{G}_A \mathbf{G}_B \quad (15.a)$$

$${}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^{\natural} = {}^t\tilde{t}^i_j \tilde{\mathbf{G}}_i \tilde{\mathbf{G}}^j = [{}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^{\natural}]^A_B \mathbf{G}_A \mathbf{G}^B \quad (15.b)$$

$${}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^b = {}^t\tilde{t}_{ij} \tilde{\mathbf{G}}^i \tilde{\mathbf{G}}^j = [{}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^b]_{AB} \mathbf{G}^A \mathbf{G}^B \quad (15.c)$$

Operando obtenemos,

$$[{}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^{\natural}]^{AB} = {}^t t^{ab} ({}^t F^{-1})^A_a ({}^t F^{-1})^B_b \quad (16.a)$$

$$[{}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^{\natural}]^A_B = {}^t t^a_b ({}^t F^{-1})^A_a ({}^t F)^b_B \quad (16.b)$$

$$[{}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^b]_{AB} = {}^t t_{ab} ({}^t F)^a_A ({}^t F)^b_B \quad (16.c)$$

Utilizando la notación de cálculo de variedades diferenciables definimos el “pull-back” de las componentes contravariantes de ${}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}$ a:

$$[{}^t\phi^*({}^t t^{ij})]^{AB} = [{}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^{\natural}]^{AB} \quad (17.a)$$

el “pull-back” de las componentes mixtas de ${}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}$ a:

$$[{}^t\phi^*({}^t t^i_j)]^A_B = [{}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^{\natural}]^A_B \quad (17.b)$$

y el “pull-back” de las componentes covariantes de ${}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}$ a:

$$[{}^t\phi^*({}^t t_{ij})]_{AB} = [{}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^b]_{AB} \quad (17.c)$$

Podemos escribir a partir de las ecuaciones (16):

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^{\natural} &= {}^t t^{ab} ({}^t F^{-1})^A_a ({}^t F^{-1})^B_b \mathbf{G}_A \mathbf{G}_B \\ &= {}^t t^{ab} ({}^t F^{-1})^A_a ({}^t F^{-1})^B_b G_{AL} G_{BM} \mathbf{G}^L \mathbf{G}^M \\ &= {}^t t^{ab} ({}^t F^{-1})^A_a ({}^t F^{-1})^B_b G_{AL} \mathbf{G}^L \mathbf{G}_B \end{aligned} \quad (18.a)$$

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^{\natural} &= {}^t t^a_b ({}^t F^{-1})^A_a ({}^t F)^b_B G^{BL} \mathbf{G}_A \mathbf{G}_L = {}^t t^a_b ({}^t F^{-1})^A_a ({}^t F)^b_B G_{AL} \mathbf{G}^L \mathbf{G}^B \\ &= {}^t t^a_b ({}^t F^{-1})^A_a ({}^t F)^b_B \mathbf{G}_A \mathbf{G}^B \end{aligned} \quad (18.b)$$

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^b &= {}^t t_{ab} ({}^t F)^a_A ({}^t F)^b_B G^{AL} G^{BM} \mathbf{G}_L \mathbf{G}_M = {}^t t_{ab} ({}^t F)^a_A ({}^t F)^b_B \mathbf{G}^A \mathbf{G}^B \\ &= {}^t t_{ab} ({}^t F)^a_A ({}^t F)^b_B G^{BL} \mathbf{G}^A \mathbf{G}_L \end{aligned} \quad (18.c)$$

Dados en la configuración espacial dos tensores ${}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}$ y ${}^t\mathbf{\underline{\underline{Z}}}$ se demuestra a partir de las ecuaciones (15) que,

$${}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^b : {}^t\mathbf{\underline{\underline{Z}}}^\sharp = {}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^\sharp : {}^t\mathbf{\underline{\underline{Z}}}^b = {}^t\mathbf{\underline{\underline{t}}} : {}^t\mathbf{\underline{\underline{z}}} \quad (19)$$

y además, para cada uno de ellos, a partir de las ecuaciones (18),

$$[{}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^b]_{AB} = [{}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^\sharp]_B^P {}^tC_{PA} \quad (20.a)$$

$$[{}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^b]_{AB} = [{}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^\sharp]^{PQ} {}^tC_{PA} {}^tC_{QB} \quad (20.b)$$

Si en la configuración espacial existen dos vectores ${}^t\mathbf{\underline{\underline{b}}}$ y ${}^t\mathbf{\underline{\underline{w}}}$ relacionados con el tensor ${}^t\mathbf{\underline{\underline{t}}}$ mediante la ecuación,

$${}^t\mathbf{\underline{\underline{b}}} = {}^t\mathbf{\underline{\underline{t}}} \cdot {}^t\mathbf{\underline{\underline{w}}} \quad (21)$$

en la configuración de referencia (${}^\circ\Omega$) podemos verificar, entre otras, las siguientes relaciones,

$${}^t\mathbf{\underline{\underline{B}}}^\sharp = {}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^\sharp \cdot {}^t\mathbf{\underline{\underline{W}}}^b \quad (22.a)$$

$${}^t\mathbf{\underline{\underline{B}}}^b = {}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^b \cdot {}^t\mathbf{\underline{\underline{W}}}^\sharp \quad (22.b)$$

$${}^t\mathbf{\underline{\underline{B}}}^\sharp = {}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^\sharp \cdot {}^t\mathbf{\underline{\underline{W}}}^\sharp \quad (22.c)$$

Obtención de tensores en la configuración espacial partiendo de sus representaciones en la configuración de referencia (“push-forward”)

En Secciones anteriores hemos obtenido diferentes representaciones en la configuración de referencia de tensores definidos en la configuración espacial y llamamos a dichas representaciones “pull-back”, por ejemplo ecuaciones (7) y (17).

La operación inversa, dada la representación de un tensor en la configuración de referencia encontrar dicho tensor en la configuración espacial se llama en la literatura de cálculo de variedades diferenciables “push-forward”^{4,6} y por ejemplo, para un tensor de segundo orden escribimos, partiendo de las ecuaciones (16):

$${}^t t^{ab} = \left[{}^t\phi_*[{}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^\sharp]^{AB} \right]^{ab} = {}^tF_A^a {}^tF_B^b [{}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^\sharp]^{AB} \quad (23.a)$$

$${}^t t_{ab} = \left[{}^t\phi_*[{}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^b]_{AB} \right]_{ab} = ({}^tF^{-1})_a^A ({}^tF^{-1})_b^B [{}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^b]_{AB} \quad (23.b)$$

$${}^t t^a_b = \left[{}^t\phi_*[{}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^\sharp]_B^A \right]_b^a = {}^tF_A^a ({}^tF^{-1})_b^B [{}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^\sharp]_B^A \quad (23.c)$$

La existencia de las representaciones de “*ida y vuelta*” como “pull-back” y “push-forward” permite vislumbrar que la solución de la Ec. (1) pasará por :

- Obtener una representación de la Ec. (1) en la configuración de referencia.
- Resolver dicha representación sobre $^{\circ}\Omega$ obteniéndose así representaciones en la configuración de referencia de medidas de tensión y deformación.
- Obtener los tensores espaciales que caracterizan el estado de tensión y deformación a partir de sus representaciones en la configuración de referencia.

Medidas de deformación y tensión

Para resolver la ecuación (1) utilizando la metodología expuesta en la Sección anterior resulta necesario utilizar representaciones en la configuración de referencia de tensores espaciales que se utilicen como medidas de deformación y de tensión.

En la presente Sección analizaremos algunos ejemplos típicos.

a) Representaciones en la configuración de referencia de tensores espaciales que caracterizan el estado de deformación

Un elemento importante para caracterizar la configuración espacial es el conocimiento del *tensor métrico* correspondiente a la misma.

Para obtener el “pull-back” del tensor métrico utilizamos las ecuaciones (18) y obtenemos,

$$[{}^t\phi^*({}^tg_{ab})]_{AB} \underline{\mathbf{G}}^A \underline{\mathbf{G}}^B = {}^t\underline{\mathbf{G}}^b = {}^t\underline{\mathbf{C}} \quad (24.a)$$

$$[{}^t\phi^*({}^tg^{ab})]^{AB} \underline{\mathbf{G}}_A \underline{\mathbf{G}}_B = {}^t\underline{\mathbf{G}}^{\#} = {}^t\underline{\mathbf{C}}^{-1} \quad (24.b)$$

Otra importante medida de la deformación es el *tensor de deformaciones de Almansi*, ${}^t\underline{\mathbf{e}}$,^{1,3}, para el mismo obtenemos utilizando las ecuaciones (18),

$$[{}^t\phi^*({}^te_{ab})]_{AB} \underline{\mathbf{G}}^A \underline{\mathbf{G}}^B = {}^t\underline{\mathbf{E}}^b = {}^t\underline{\mathbf{e}} \quad (25.a)$$

donde ${}^t\underline{\mathbf{e}}$ es el *tensor de deformaciones de Green-Lagrange*¹⁻³.

Utilizando las ecuaciones (9), (12) y (22) obtenemos:

$${}^td\underline{\mathbf{x}} \cdot {}^t\underline{\mathbf{e}} \cdot {}^td\underline{\mathbf{x}} = d\underline{\mathbf{X}} \cdot {}^t\underline{\mathbf{e}} \cdot d\underline{\mathbf{X}} \quad (25.b)$$

De las descomposiciones polares izquierda y derecha¹⁻³ surgen el *tensor de estiramiento izquierdo*, ${}^t\underline{\mathbf{V}}$, definido en la configuración espacial y el *tensor de estiramiento derecho*, ${}^t\underline{\mathbf{U}}$, definido en la configuración de referencia. Utilizando la ecuación (18.b) es inmediato demostrar que,

$${}^t\underline{\underline{\mathbf{V}}}^\natural = {}^t\underline{\underline{\mathbf{U}}} \quad (26)$$

En muchos problemas relacionados con la metalurgia (por ejemplo problemas de metal-forming) es costumbre utilizar medidas logarítmicas de la deformación¹², por ejemplo, podemos definir en la configuración espacial,

$${}^t\underline{\underline{\mathbf{h}}} = \ln {}^t\underline{\underline{\mathbf{V}}} \quad (27)$$

su representación en la configuración de referencia es el conocido *tensor de deformaciones de Hencky*.

$${}^t\underline{\underline{\mathbf{H}}} = {}^t\underline{\underline{\mathbf{H}}}^\natural = \ln {}^t\underline{\underline{\mathbf{V}}}^\natural = \ln {}^t\underline{\underline{\mathbf{U}}} \quad (28)$$

La importancia práctica del tensor de deformaciones de Hencky fue establecida en la¹³ y modernas formulaciones de elementos finitos desarrollados para modelar problemas de deformaciones finitas elasto-plásticas lo utilizan, ver¹⁴⁻²¹.

Es importante destacar que también obtenemos las ecuaciones (26)-(28) cuando buscamos las representaciones de ${}^t\underline{\underline{\mathbf{V}}}$ y ${}^t\underline{\underline{\mathbf{h}}}$ no en la configuración de referencia sino en una configuración que se obtiene *desrotando* con ${}^t\underline{\underline{\mathbf{R}}}^T$ la configuración espacial.

b) Representación en la configuración de referencia de tensores espaciales que caracterizan el estado de tensión

En la configuración espacial definimos el *tensor de tensiones de Cauchy* (${}^t\underline{\underline{\sigma}}$) y el *tensor de tensiones de Kirchhoff* (${}^t\underline{\underline{\tau}}$)

$${}^t\underline{\underline{\tau}} = \frac{{}^\circ\rho}{{}^t\rho} {}^t\underline{\underline{\sigma}} \quad (29)$$

donde ${}^\circ\rho$, ${}^t\rho$ son las densidades en las configuraciones de referencia y espacial respectivamente.

Utilizando la ecuación (18.a) podemos calcular

$$[{}^t\underline{\underline{\tau}}^\natural]^{AB} = \frac{{}^\circ\rho}{{}^t\rho} {}^t\sigma^{ab} ({}^tF^{-1})^A_a ({}^tF^{-1})^B_b \quad (30)$$

que en la literatura es conocido como el *segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff*¹⁻⁵ (${}^t\underline{\underline{\mathbf{S}}}$).

Si en lugar de realizar el “pull-back” de ${}^t\underline{\underline{\tau}}$ a la configuración de referencia buscamos su representación en una configuración que se obtiene *desrotando* con ${}^t\underline{\underline{\mathbf{R}}}^T$ la configuración espacial obtenemos,

$${}^t\underline{\underline{\mathbf{T}}} = {}^tR^*({}^t\underline{\underline{\tau}}) \quad (31.a)$$

con la notación anterior indicamos un “pull-back” con el tensor de rotación. Utilizando la ecuación (18.a) obtenemos,

$${}^t\Gamma^{AB} = {}^t\tau^{ab} ({}^tR^T)_a^A ({}^tR^T)_b^B \quad (31.b)$$

En Secciones posteriores volveremos sobre el tensor ${}^t\underline{\underline{\Gamma}}^{22}$.

OBJETIVIDAD Y COVARIANCIA

La descripción de fenómenos físicos utilizando tensores objetivos o covariantes^{1-4,23} es un tema central en la Mecánica del Continuo.

Si un cuerpo permanece indeformado a través del tiempo pero va variando el sistema de coordenadas de referencia, por ejemplo, si en el tiempo t tenemos $\{x^a\}$ y en el tiempo $\hat{t}$ tenemos $\{\hat{x}^a\}$, para un tensor $\underline{\underline{t}}$ las componentes en ambos sistemas están relacionadas mediante las transformaciones usuales del cálculo tensorial¹:

$$\hat{t}^{ab} = \frac{\partial \hat{x}^a}{\partial x^l} \frac{\partial \hat{x}^b}{\partial x^m} t^{lm} \quad (32.a)$$

$$\hat{t}_{ab} = \frac{\partial x^l}{\partial \hat{x}^a} \frac{\partial x^m}{\partial \hat{x}^b} t_{lm} \quad (32.b)$$

$$\hat{t}^a_b = \frac{\partial \hat{x}^a}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial \hat{x}^b} t^l_m \quad (32.c)$$

Entre las coordenadas del cuerpo en t y $\hat{t}$ existirá un mapeo $(\hat{t}\phi)$ del tipo descrito por la ecuación (2.a) y por lo tanto, un tensor gradiente de deformaciones $\hat{t}\underline{\underline{F}}$.

Podemos reescribir las ecuaciones anteriores como:

$$t^{ab} = (\hat{t}F^{-1})^a_l (\hat{t}F^{-1})^b_m \hat{t}^{lm} = [\hat{t}\phi^*(\hat{t}\underline{\underline{t}})]^{ab} \quad (33.a)$$

$$t_{ab} = \hat{t}F^l_a \hat{t}F^m_b \hat{t}_{lm} = [\hat{t}\phi^*(\hat{t}\underline{\underline{t}})]_{ab} \quad (33.b)$$

$$t^a_b = \hat{t}F^a_l (\hat{t}F^{-1})^m_b \hat{t}^l_m = [\hat{t}\phi^*(\hat{t}\underline{\underline{t}})]^a_b \quad (33.c)$$

Generalizando lo visto arriba llamamos tensor espacial *covariante* u *objetivo* el que al pasar desde una configuración en t a otra en $\hat{t}$ (y ahora no nos restringimos a cambios de coordenadas) se “actualiza” según las ecuaciones (33)⁴.

Para un tensor de dos puntos, el criterio de objetividad o covariancia deberá aplicarse solo a las componentes correspondientes a su base espacial²³ y un tensor Lagrangiano es siempre objetivo.

Es fácil verificar que en el caso en que los cambios de configuración se reduzcan a isometrías, el criterio de covariancia expuesto se reduce al criterio de objetividad clásico frente a rotaciones^{1,2,4,23}.

Obviamente la representación de una ley física es objetiva si todos los tensores que intervienen en su definición son objetivos.

LA DERIVADA DE LIE

Para un tensor Euleriano, definimos su *derivada de Lie* relativa al flujo asociado $({}^t\phi)$ con la velocidad espacial ${}^t\mathbf{v}$ como⁸:

$$L_{t\mathbf{v}}({}^t\mathbf{t}) = {}^t\phi_* \left\{ \frac{d}{dt} [{}^t\phi^*({}^t\mathbf{t})] \right\} \quad (34)$$

Es importante notar que $L_{t\mathbf{v}}({}^t\mathbf{t})$ es un tensor Euleriano y por definición covariante u objetivo.

Tasas objetivas y derivadas de Lie

Si en el movimiento representado en la Fig. 1, en la configuración espacial definimos un tensor ${}^t\mathbf{t}$ (por ejemplo un tensor de tensiones) obtenemos

$${}^t\mathbf{T}^\# = ({}^tF^{-1})^A_a ({}^tF^{-1})^B_b {}^t t^{ab} \mathbf{G}_A \mathbf{G}_B \quad (35.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} {}^t\mathbf{T}^\# = & [-({}^tF^{-1})^A_c {}^t l^c_a ({}^tF^{-1})^B_b {}^t t^{ab} - ({}^tF^{-1})^A_a ({}^tF^{-1})^B_c {}^t l^c_b {}^t t^{ab} \\ & + ({}^tF^{-1})^A_a ({}^tF^{-1})^B_b {}^t t^{iab}] \mathbf{G}_A \mathbf{G}_B \end{aligned} \quad (35.b)$$

Finalmente,

$$L_{t\mathbf{v}}({}^t\mathbf{t}) = [{}^t t^{ab} - {}^t t^{cb} {}^t l^a_c - {}^t t^{ac} {}^t l^b_c] {}^t \mathbf{g}_a {}^t \mathbf{g}_b \quad (35.c)$$

En lo anterior ${}^t\mathbf{l}$ es el tensor Euleriano (no objetivo) gradiente de velocidades.

En el caso de tratarse del tensor de tensiones de Kirchhoff la derivada de Lie anterior es conocida como tasa de Truesdell y en el caso de tratarse del tensor de tensiones de Cauchy es conocida como tasa de Oldroyd⁴.

Podemos también considerar que si ${}^t\mathbf{t}$ es el tensor de tensiones de Kirchhoff, su tasa de Truesdell es el “push-forward” desde la configuración de referencia de la tasa del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff.

Si en lugar de realizar las operaciones de “pull-back” y “push-forward” involucradas en el cálculo de la derivada de Lie utilizando el tensor ${}^t\mathbf{F}$, lo hacemos utilizando su componente de rotación ${}^t\mathbf{R}$ obtenemos,

$$L_{{}^t\mathbf{R}}({}^t\mathbf{t}) = [{}^t t^{ab} - {}^t \Omega^a_c {}^t t^{cb} + {}^t t^{ac} {}^t \Omega^b_c] {}^t \mathbf{g}_a {}^t \mathbf{g}_b \quad (36.a)$$

donde¹²

$${}^t\dot{\mathbf{R}} = {}^t\mathbf{\Omega} \cdot {}^t\mathbf{R} \quad (36.b)$$

La derivada de Lie anterior es conocida en la literatura como tasa de Green-Naghdi²⁴⁻²⁷ y por la forma en que fue calculada es evidente que es objetiva frente a isometrías (tasa co-rotacional).

Podemos también considerar que si ${}^t\mathbf{\underline{\underline{t}}}$ es el tensor de tensiones de Kirchhoff, su tasa de Green-Naghdi es el “push-forward” a través de ${}^t\mathbf{\underline{\underline{R}}}$ de la tasa del tensor ${}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}$, definido en las ecuaciones (31).

La componente antisimétrica de ${}^t\mathbf{\underline{\underline{t}}}$ es el tensor de vorticidad Euleriano y se relaciona con ${}^t\mathbf{\underline{\underline{\Omega}}}$ mediante la ecuación^{1,12}:

$${}^t\mathbf{\underline{\underline{\omega}}} = {}^t\mathbf{\underline{\underline{\Omega}}} + \frac{1}{2} {}^t\mathbf{\underline{\underline{R}}} \cdot \left[{}^t\mathbf{\underline{\underline{\dot{U}}}} \cdot {}^t\mathbf{\underline{\underline{U}}^{-1}} - {}^t\mathbf{\underline{\underline{U}}^{-1}} \cdot {}^t\mathbf{\underline{\underline{\dot{U}}}} \right] \cdot {}^t\mathbf{\underline{\underline{R}}}^T \quad (37)$$

Claramente si como configuración de referencia se toma la actual²⁴ resulta,

$${}^t\mathbf{\underline{\underline{\omega}}} = {}^t\mathbf{\underline{\underline{\Omega}}} \quad (38)$$

y en consecuencia en la ecuación (36.a) podemos usar la vorticidad en lugar de ${}^t\mathbf{\underline{\underline{\Omega}}}$ con la que obtenemos la tasa de Jaumann¹.

En el conocido ejemplo de un material hipoeelástico sometido a corte, Dienes²⁴ demuestra, que el utilizar la tasa de Jaumann de tensiones de Cauchy en lugar de la de Green-Naghdi produce resultados aceptables sólo cuando ${}^t\mathbf{\underline{\underline{U}}} \simeq \mathbf{\underline{\underline{I}}}$, pero a medida que crecen las deformaciones, los resultados son absolutamente erróneos pues la velocidad de giro del material, que es la que hay que substraer de ${}^t\mathbf{\underline{\underline{\dot{\sigma}}}}$ para obtener una tasa objetiva, está representada por ${}^t\mathbf{\underline{\underline{\Omega}}}$ y no por ${}^t\mathbf{\underline{\underline{\omega}}}$ ²⁵.

TENSIONES Y DEFORMACIONES CONJUGADAS

La tasa de trabajo de las tensiones por unidad de volumen de la configuración de referencia puede ser calculada, utilizando tensores Eulerianos como²²

$$\dot{W}_o = {}^t\mathbf{\underline{\underline{\tau}}} : {}^t\mathbf{\underline{\underline{d}}} \quad (39.a)$$

con

$${}^t\mathbf{\underline{\underline{d}}} = \frac{1}{2} ({}^t\mathbf{\underline{\underline{1}}} + {}^t\mathbf{\underline{\underline{1}}}^T) \quad (39.b)$$

Si deseamos calcular $\dot{W}_o$ usando imágenes sobre la configuración de referencia, utilizando la ecuación (19) obtenemos:

$$\dot{W}_o = {}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^\sharp : {}^t\mathbf{\underline{\underline{D}}}^\flat \quad (40.a)$$

De la ecuación (30) surge que

$${}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}^\sharp = {}^t\mathbf{\underline{\underline{S}}} \quad (40.b)$$

y cómo además es inmediato demostrar que,

$${}^t\mathbf{\underline{\underline{D}}}^b = {}^t\mathbf{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}} \quad (40.c)$$

resulta,

$$\dot{W}_o = {}^t\mathbf{\underline{\underline{S}}} : {}^t\mathbf{\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}} \quad (40.d)$$

Si la operación de “pull-back” la realizamos con ${}^t\mathbf{\underline{\underline{R}}}$, Atluri²² demuestra que para materiales isótropos, es decir, aquellos en los que las direcciones principales de ${}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}$ siempre coinciden con las direcciones principales de ${}^t\mathbf{\underline{\underline{V}}}$,

$$\dot{W}_o = {}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}} : {}^t\mathbf{\underline{\underline{\dot{H}}}} \quad (41)$$

REPRESENTACIONES DE ECUACIONES DEL CONTINUO

Hemos comentado en las Secciones anteriores la forma de encontrar representaciones de tensores Eulerianos en la configuración de referencia y en configuraciones desrotadas de la configuración espacial. En esta Sección aplicaremos lo expuesto para obtener representaciones de algunas ecuaciones del continuo.

Ecuaciones de Equilibrio

La ecuación (1) es la ecuación de equilibrio en la configuración espacial, donde ${}^t\mathbf{\underline{\underline{b}}}$ es el vector de fuerzas por unidad de volumen de la configuración espacial.

En el sistema de coordenadas $\{t x^a\}$, la divergencia de ${}^t\mathbf{\underline{\underline{\sigma}}}$ está dada por²⁸

$$\nabla \cdot {}^t\mathbf{\underline{\underline{\sigma}}} = \left[\frac{\partial {}^t\sigma^{ab}}{\partial {}^t x^a} + {}^t\sigma^{jb} \frac{1}{2} {}^t g^{ap} \left(\frac{\partial {}^t g_{ap}}{\partial {}^t x^j} + \frac{\partial {}^t g_{jp}}{\partial {}^t x^a} - \frac{\partial {}^t g_{aj}}{\partial {}^t x^p} \right) \right] {}^t\mathbf{\underline{\underline{g}}}_b \quad (42.a)$$

Dado que $\nabla \cdot {}^t\mathbf{\underline{\underline{\sigma}}}$ es un vector podemos encontrar su representación en la configuración de referencia,

$$\left[{}^t\phi^*(\nabla \cdot {}^t\mathbf{\underline{\underline{\sigma}}}) \right]^B = ({}^tF^{-1})^B_b (\nabla \cdot {}^t\mathbf{\underline{\underline{\sigma}}})^b \quad (42.b)$$

asimismo

$$\frac{\partial {}^t\sigma^{ab}}{\partial {}^t x^a} = \frac{\partial {}^t\sigma^{ab}}{\partial X^A} ({}^tF^{-1})^A_a \quad (42.c)$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones (24) obtenemos

$$\left[{}^t\phi^*(\nabla \cdot {}^t\mathbf{\underline{\underline{\sigma}}}) \right]^B = \frac{\partial [{}^t\mathbf{\underline{\underline{\Sigma}}}]^{AB}}{\partial X^A} + ({}^t\mathbf{\underline{\underline{\Sigma}}})^{JB} \frac{1}{2} {}^tC^{AP} \left[\frac{\partial {}^tC_{AP}}{\partial X^J} + \frac{\partial {}^tC_{JP}}{\partial X^A} - \frac{\partial {}^tC_{AJ}}{\partial X^P} \right] \quad (42.d)$$

Esto se escribe como,⁴:

$$\left[{}^t\phi^*(\underline{\nabla} \cdot {}^t\underline{\sigma}) \right]^B = \text{DIV}_{\circ\underline{\underline{C}}} ({}^t\underline{\Sigma}^\sharp) \quad (42.e)$$

lo anterior indica que se trata de un cálculo de divergencia de la representación ${}^t\underline{\Sigma}^\sharp = [{}^t\phi^*({}^t\sigma^{ab})]^{AB} \underline{\mathbf{G}}_A \underline{\mathbf{G}}_B$ utilizando como métrica el tensor de deformaciones de Green.

Por lo tanto, la representación de la ecuación (1) en la configuración de referencia (${}^\circ\Omega$) es

$$\text{DIV}_{\circ\underline{\underline{C}}} ({}^t\underline{\Sigma}^\sharp) + \underline{\mathbf{B}}^\sharp = \underline{\mathbf{0}} \quad (42.f)$$

También podemos escribir,

$$\text{DIV}_{\circ\underline{\underline{C}}} ({}^t\underline{\mathbf{S}}^\sharp) + \frac{{}^\circ\rho}{{}^t\rho} \underline{\mathbf{B}}^\sharp = \underline{\mathbf{0}} \quad (42.g)$$

Relaciones Constitutivas

a) Hiperelasticidad

En un material hiperelástico definimos para un instante t la energía elástica almacenada por unidad de masa, ${}^t\psi$, y utilizando la ecuación (39.a) obtenemos

$${}^\circ\rho {}^t\dot{\psi} = {}^t\tau^{ij} {}^t d_{ij} = \frac{1}{2} {}^t\tau^{ij} [{}^t\phi_* \frac{d}{dt} ({}^t\phi^* ({}^t g_{ij}))] \quad (43.a)$$

dado que es inmediato demostrar que,

$$L_{t\underline{\mathbf{v}}}({}^t\underline{\mathbf{g}}) = 2 {}^t\underline{\mathbf{d}} \quad (43.b)$$

Si ahora analizamos un “pull-back” de la ecuación anterior a la configuración de referencia obtenemos,

$$2 {}^\circ\rho {}^t\dot{\psi} = {}^tS^{AB} {}^\circ\dot{C}_{AB} \quad (43.c)$$

y en definitiva

$${}^tS^{AB} = 2 {}^\circ\rho \frac{\partial {}^t\psi}{\partial {}^\circ C_{AB}} \quad (43.d)$$

Realizando un “push-forward” de la ecuación anterior y teniendo en cuenta que,

$$\frac{\partial {}^t g_{ab}}{\partial {}^\circ C_{AB}} = ({}^t F^{-1})^A_a ({}^\circ F^{-1})^B_b \quad (43.e)$$

resulta

$${}^t\tau^{ab} = 2 \circ \rho \frac{\partial {}^t\psi}{\partial {}^t g_{ab}} \quad (43.f)$$

La anterior es conocida como fórmula de Doyle-Ericksen^{4,10}.

Supongamos que ahora queremos expresar la relación constitutiva de un material hiperelástico utilizando una ley hipoelástica, derivando respecto del tiempo la ecuación (43.d) obtenemos,

$${}^\circ \dot{S}^{AB} = 2 \circ \rho \frac{\partial^2 {}^t\psi}{\partial {}^\circ C_{AB} \partial {}^\circ C_{LM}} {}^\circ \dot{C}_{LM} \quad (44.a)$$

definimos,

$${}^\circ \mathcal{C}^{ABLM} = 2 \circ \rho \frac{\partial^2 {}^t\psi}{\partial {}^\circ C_{AB} \partial {}^\circ C_{LM}} \quad (44.b)$$

como el tensor de elasticidad en la configuración de referencia.

Con un “push-forward” de la ecuación (44.a) obtenemos

$$L_{t\underline{\mathbf{v}}}({}^t\underline{\boldsymbol{\tau}}) = {}^t\phi_*({}^\circ \underline{\underline{\mathcal{C}}}) : L_{t\underline{\mathbf{v}}}({}^t\underline{\mathbf{g}}) \quad (44.c)$$

utilizando la ecuación (43.b) resulta

$$L_{t\underline{\mathbf{v}}}({}^t\underline{\boldsymbol{\tau}}) = 4 \circ \rho \frac{\partial^2 {}^t\psi}{\partial {}^\circ C_{AB} \partial {}^\circ C_{LM}} {}^\circ F^a_A {}^\circ F^b_B {}^\circ F^l_L {}^\circ F^m_M {}^t d_{lm} \underline{\mathbf{g}}_a \underline{\mathbf{g}}_b \quad (44.d)$$

definimos

$${}^t\mathcal{C}^{ablm} = 2 {}^\circ \mathcal{C}^{ABLM} {}^\circ F^a_A {}^\circ F^b_B {}^\circ F^l_L {}^\circ F^m_M \quad (44.e)$$

como el tensor de elasticidad en la configuración espacial.

Notar que :

- La ecuación (44.c) queda expresada en funciones de derivadas de Lie.
- Si ${}^\circ \underline{\underline{\mathcal{C}}}$ es un tensor isótropo e independiente de la deformación, ${}^t \underline{\underline{\mathcal{C}}}$ no lo es.

En la²⁶ Simo y Pister demuestran que el asumir que ${}^t \underline{\underline{\mathcal{C}}}$ es un tensor isótropo y constante viola las leyes de la elasticidad.

Teniendo en cuenta que, de acuerdo a lo visto arriba,

$${}^t \underline{\underline{\boldsymbol{\Gamma}}} = {}^t R^*({}^t \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}) = {}^t U_*({}^t \underline{\underline{\mathbf{S}}}) \quad (45.a)$$

y definiendo¹⁰,

$${}^t \underline{\underline{\mathbf{A}}} = {}^t R^*({}^t \underline{\underline{\mathbf{d}}}) \quad (45.b)$$

resulta inmediato que

$$\dot{W}_o = {}^t\tau : {}^t\mathbf{d} = {}^t\mathbf{T} : {}^t\mathbf{\Lambda} \quad (46)$$

Para obtener otra expresión hipoelástica de un material hiperelástico partimos de la ecuación (44.c) y llegamos a :

$$L_{t\circ\mathbf{U}}({}^t\mathbf{T}) = {}^tU_*(\circ\mathbf{\underline{\underline{U}}}) : L_{t\circ\mathbf{U}}({}^tR^*({}^t\mathbf{g})) \quad (47.a)$$

En la ecuación anterior,

$$L_{t\circ\mathbf{U}}(\cdot) = {}^tU_*\left\{\frac{d}{dt}[{}^tU^*(\cdot)]\right\} \quad (47.b)$$

es un tensor definido en la configuración desrotada, además :

$$L_{t\circ\mathbf{U}}({}^tR^*({}^t\mathbf{g})) = {}^t\mathbf{\Lambda} \quad (47.c)$$

Es importante tener en cuenta²⁷ que no podemos expresar la formulación hipoelástica de una relación constitutiva hiperelástica de la forma :

$${}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}} = \mathbf{\underline{\underline{C}}} : {}^t\mathbf{\underline{\underline{d}}} \quad (48)$$

donde ${}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}$ es la tasa de Green-Naghdi del tensor de tensiones de Kirchhoff.

b) Hipoelasticidad

Dado un cierto material, podemos expresar su relación constitutiva utilizando diferentes tasas de tensión y de deformación. Por ejemplo,

$$L_{t\mathbf{v}}({}^t\mathbf{\underline{\underline{\sigma}}}) = {}^t\mathbf{\underline{\underline{c}}_1} : {}^t\mathbf{\underline{\underline{d}}} \quad (49.a)$$

$$L_{t\mathbf{v}}({}^t\mathbf{\underline{\underline{\tau}}}) = {}^t\mathbf{\underline{\underline{c}}_2} : {}^t\mathbf{\underline{\underline{d}}} \quad (49.b)$$

Es inmediato demostrar que, por tratarse del mismo material en ambos casos, se debe cumplir la relación,

$${}^t\mathbf{\underline{\underline{c}}_2} = {}^tJ {}^t\mathbf{\underline{\underline{c}}_1} + {}^t\mathbf{\underline{\underline{\tau}}} {}^t\mathbf{\underline{\underline{g}}} \quad (49.c)$$

donde ${}^tJ = \frac{{}^t\rho}{\circ\rho}$

c) Plasticidad

La ley de fluencia de von Mises, expresada en función de las tensiones de Kirchhoff²⁹ es:

$${}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}_D : {}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}_D - k^2 = 0 \quad (50)$$

donde ${}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}_D$ es el tensor desviador de Kirchhoff.

Realizando un "pull-back" con el tensor de rotación resulta¹⁹⁻²¹:

$${}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}_D : {}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}_D - k^2 = 0 \quad (51)$$

donde ${}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}_D$ es el desviador de ${}^t\mathbf{\underline{\underline{T}}}$.

Para la representación en la configuración de referencia resulta,

$${}^tS_D^{AB} {}^tS_D^{CD} {}^tC_{AC} {}^tC_{BD} - k^2 = 0 \quad (52)$$

CONCLUSIONES

Hemos tratado de reunir en este trabajo desarrollos provenientes del cálculo de variedades diferenciables y *traducirlos* a un lenguaje usual para los ingenieros que trabajamos en la resolución de problemas no-lineales de la Mecánica del Continuo utilizando elementos finitos.

Creemos que los desarrollos comentados permiten sistematizar el trabajo de plantear ecuaciones en la configuración de referencia o en configuraciones desrotadas, sin otra herramienta matemática que el análisis tensorial.

Desde ya no nos pertenecen los méritos de los desarrollos expuestos y si la posible culpa de una exposición errónea.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a las empresas industriales de la Organización Techint el apoyar nuestro trabajo de investigación.

REFERENCIAS

1. . C . Truesdell y W. Noll, "*The Nonlinear Field Theories of Mechanics*", in: Handbuch der Physik, Band III/3, Springer, Berlín, (1965).
2. . C . Truesdell, "*The Elements of Continuum Mechanics*", Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg-New York, (1966).
3. . L.E. Malvern "*Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*", Englewood Cliffs, N.J., (1969).
4. . J.E. Marsden y T.J.R. Hughes, "*Mathematical Foundations of Elasticity*", Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1983).

5. . K .J. Bathe, "*Finite Element Procedures in Engineering Analysis*", Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1982).
6. . S . Lang, "*Differential Manifolds*", Addison-Wesley, MA,(1972).
7. . J .C. Simo y M. Ortiz, "A unified approach to finite deformation elastoplasticity based on the use of hyperelastic constitutive equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **51**, pp. 177-208, (1985).
8. . J .C. Simo, "A framework for finite strain elasto-plasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition, part I : Continuum formulation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **66**, pp. 199-219, (1988).
9. . J .C. Simo, "A framework for finite strain elasto-plasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition, part II : Computational Aspects", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **68**, pp. 199-219, (1988).
10. . J .C. Simo y J.E. Marsden, "On the rotated stress tensor and the material version of the Doyle-Ericksen formula", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, Vol. **86**, pp. 213-231, (1984).
11. . B . Moran, M. Ortiz y C.F. Shih, "Formulation of implicit finite element methods for multiplicative finite deformation plasticity" , *Internat. Journ. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. **29**, pp. 483-514, (1990).
12. . R . Hill, "*Aspects on invariance in solid mechanics*", Adv. in Appl. Mech., Vol. **18**, pp. 1-75, (1978).
13. . L . Anand, "On Hencky's approximate strain-energy function for moderate deformation", *J. Appl. Mech.*, Vol. **46**, pp. 78-82,(1979).
14. . W .D. Rolph III y K.J. Bathe, "On a large strain finite element formulation for elasto-plastic analysis", in: *K.J. William, ed., Constitutive equations : Macro and Computational Aspects*, Winter Annual Meeting, ASME, New York, pp. 131-147, (1984).
15. . G . Weber y L. Anand, "Finite deformation constitutive equation and a time integration procedure for isotropic, hyperelastic viscoplastic solids", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **79**, pp. 173-202, (1990).
16. . A .L. Eterovic y K.J. Bathe, "A hyperelastic based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures", *Internat. Journ. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. **30**, pp. 1099-1114, (1990).
17. . D . Pèric, D.R.J. Owen y M.E. Honnor, "A model for finite strain elasto-plasticity based on logarithmic strains : Computational issues", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **94**, pp. 35-61, (1992).
18. . J .C. Simo, "Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 99, pp.61-112, 1992.
19. . E .N. Dvorkin, D. Pantuso y E.A. Repetto, "2D Finite Strain Elasto-Plastic Analysis Using a Quadrilateral Element Based on Mixed Interpolation of Tensorial Components", en: *H. Alder et al., Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences*, Proceedings of the International Congress on Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences, Chile, pp. 144-157 (1992).
20. . E .N. Dvorkin, D. Pantuso y E.A. Repetto, "Finite Strain Elasto-Plastic Analysis Interpolating Hencky Strains and Displacements", *Proceedings of the Third Pan American Congress of Applied Mechanics, PACAM III*, Brasil, pp. 271-274,

- (1993).
21. . E .N. Dvorkin, D. Pantuso y E.A. Repetto, "A Finite Element Formulation for Finite Strain Elasto-Plastic Analysis Based on Mixed Interpolation of Tensorial Components", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (en prensa).
 22. . S .N. Atluri, "Alternate stress and conjugate strain measures, and mixed variational formulations involving rigid rotations for computational analysis of finitely deformed solids, with applications to plates and shells - Part I", *Computers and Structures*, Vol. **18**, pp. 93-116, (1984).
 23. . J . Lubliner, *Thermomechanics of deformable bodies*, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, (1985).
 24. . J .K. Dienes, "On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies", *Acta Mech.*, Vol. **32**, pp. 217-232, (1979).
 25. . Y .M. Cheng y Y. Tsui, "Limitations to the large strain theory", *Internat. Journ. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. **33**, pp. 101-114, (1990).
 26. . J .C. Simo y K.S. Pister, "Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems : Computational Aspects", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **46**, pp. 201-215, (1984).
 27. . P .M. Pinsky, M. Ortiz y K.S. Pister, "Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **40**, pp. 137-158, (1983).
 28. . J .C. Slatery, *Momentum, Energy, and Mass Transfer in Continua*, McGraw-Hill, (1972).
 29. . E .H. Lee, "Elastic-plastic deformations at finite strains", *J. Appl. Mech.*, Vol. **36**, pp. 1-6, (1969).