

# UN MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO PLÁSTICO PARA MATERIALES FRICCIONALES. PARTE - II: GENERALIZACIÓN PARA PROCESOS CON DEGRADACIÓN DE RIGIDEZ. EJEMPLOS.

SERGIO OLLER\*  
JAVIER OLIVER\*\*  
J. LUBLINER\*\*\*  
y  
EUGENIO OÑATE\*\*

*\*Universidad Nacional de Salta  
Facultad de Ciencias Tecnológicas  
Buenos Aires 177, (4400) Salta, Argentina.  
En la actualidad investigador en \*\**

*\*\*Universidad Politécnica de Cataluña  
E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Jordi Girona Salgado 31 - 08034 Barcelona, España.*

*\*\*\*Universidad de California  
Departamento de Ingeniería Civil  
Berkeley, California 94720, USA.*

## RESUMEN

En este artículo, se presenta una generalización del "modelo de daño plástico", cuyos fundamentos básicos se tratan en las referencias<sup>19,22,30,31</sup>, que permite simular el comportamiento multiaxial del hormigón considerando el fenómeno de degradación de rigidez producido durante procesos de carga cuasi-estáticos elásticos y plásticos. También se considera una técnica de integración de la ecuación constitutiva, basada en el método de retorno de Euler. Además, se presenta una técnica de post-proceso de resultados, que permite obtener la información necesario sobre la situación de un punto dañado (aplastamiento, fisuración). La aplicabilidad del modelo es comprobada mediante diversos ejemplos de aplicación.

## SUMMARY

A generalization of the "plastic-damage model", whose basic features were presented in the references<sup>19,22,30,31</sup> which permits the simulation of the multiaxial behaviour of concrete taking into account the phenomenon of stiffness degradation, is presented. The integration technique for the constitutive equation, based in the Euler's radial return method, are considered. A technique for post-processing of results, which allows for the obtention of necessary information on the state of damaged point (crushing and cracking) is presented too. The model reliability is verified through several application examples.

Recibido: Julio 1988

## INTRODUCCION

En la *parte - I* de este trabajo, se han descrito los fundamentos de un *nuevo modelo constitutivo de daño continuo*, basado en una generalización de la teoría de la plasticidad. Se han presentado sus variables fundamentales y las ecuaciones de evolución de las variables internas; una modificación del criterio de Mohr-Coulomb que permite obtener una correcta relación inicial entre las resistencias uniaxiales a compresión y tracción para ángulos de rozamiento comprendido dentro de los valores experimentales del hormigón; y un nuevo criterio de fluencia plástico que aproxima bastante bien la respuesta del hormigón. Se ha estudiado también una función de potencial plástico derivada de la de Mohr-Coulomb que permite modelar el fenómeno de la dilatación deforma adecuada.

Durante la investigación desarrollada, se ha observado la necesidad de introducir el concepto de *degradación de rigidez*, dentro de la formulación básica del *modelo de daño plástico*<sup>30</sup>, con el objeto de reproducir con mejor aproximación el comportamiento inelástico del hormigón. Así, en esta segunda parte, se presenta una generalización del modelo de daño plástico que permite considerar los fenómenos de degradación de rigidez que ocurren durante el proceso elástico e inelástico. Se presentan dos formas simples de tratar la degradación elástica y plástica respectivamente. Se formula la técnica de post-proceso de resultados que se utiliza para obtener la información sobre el estado de daño de un punto del sólido discreto. Se presenta en forma breve la inserción de todos estos conceptos dentro de la técnica de elementos finitos y se estudia una técnica de integración de la ecuación constitutiva, basada en el método de retorno de Euler. Por último se muestra la aplicación del modelo en dos ejemplos de comprobación.

### RESUMEN DE LOS ASPECTOS FUNDAMENTALES DEL MODELO DE DAÑO PLÁSTICO SIN DEGRADACION DE RIGIDEZ<sup>30</sup>.

El *modelo de daño plástico* surge a partir de una formulación elasto-plástica general definida en el espacio de tensiones, que puede sintetizarse a partir de las siguientes características:

- Considera como *superficie de fluencia* una función escalar homogénea de primer grado en las componentes del tensor de tensiones (ver referencias<sup>22,30</sup>):

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, c) = f(\boldsymbol{\sigma}) - c = 0 \quad (1)$$

y como *superficie de potencial plástico*, otra función del tipo de la de fluencia:  $\mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, c) = 0$ .

- Define como *variable libre* la tensión  $\boldsymbol{\sigma}$  y por transformación directa, a través del tensor de rigidez  $D_S$ , la deformación elástica  $\boldsymbol{\epsilon}^e$ :

$$\boldsymbol{\epsilon}^e = D_S^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2)$$

y considera como hipótesis el concepto de aditividad de deformaciones:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (3)$$

- Define como *variables internas* del proceso elasto-plástico, las siguientes:

$$q = \left\{ \begin{array}{c} \epsilon^p \\ q_\alpha \\ \kappa^p \\ c \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \epsilon^p \\ \kappa^p \\ c \end{array} \right\} \quad (4)$$

donde  $\epsilon^p$  es la deformación plástica;  $q_\alpha$  un vector que incluye otras dos variables internas plásticas: la variable de daño plástico  $\kappa^p$  (que toma valor cero cuando no hay daño plástico y uno cuando se alcanza el daño total en un punto), y la cohesión  $c$  que tiende a cero cuando la variable de daño plástico tiende a uno. La evolución de estas variables internas viene dada por la siguiente *regla general*:

$$\dot{q} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\epsilon}^p \\ \dot{\kappa}^p \\ \dot{c} \end{array} \right\} \equiv \dot{\lambda} H = \dot{\lambda} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \\ h_\kappa \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma} \\ h_c \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma} \end{array} \right\} \quad (5)$$

donde  $\lambda$  es el *factor de consistencia plástico*<sup>22</sup>, y  $H$  es una función vectorial que incluye la *función de estado de flujo plástico*  $\left(\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right)$ , *función de estado de daño plástico*  $(h_\kappa)$ , y la *función de estado de cohesión*  $(h_c)$  (ver referencias<sup>22,30</sup>).

- Considera como *funciones explícitas*:
  - . La *cohesión* a compresión:  $c_C(\kappa^p)$  y a tracción:  $c_T(\kappa^p)$ , cuyas expresiones vienen dadas por las curvas de resistencia uniaxial a compresión:  $\sigma_C(\kappa^p)$  y a tracción:  $\sigma_T(\kappa^p)$ , respectivamente, a través de un factor de escala  $N$  que depende de la función de fluencia que se utilice<sup>22,30</sup>. Esto es:

$$c_C(\kappa^p) = \frac{1}{N} \sigma_C(\kappa^p) \quad ; \quad c_T(\kappa^p) = \frac{1}{N} R^0 \sigma_T(\kappa^p) \quad (6)$$

donde  $R^0$  es la relación inicial entre las resistencias uniaxiales a compresión y tracción.

- . El ángulo de *rozamiento interno*, cuya expresión es del tipo 22, 30 :

$$\phi = \phi(\kappa^p) \quad (7)$$

- . El ángulo de *dilatancia*, cuya expresión es del tipo 22, 30 :

$$\psi = \psi(\kappa^p) \quad (8)$$

- Finalmente, de la *condición de consistencia plástica de Prager*, de la *función de fluencia* y de las ecuaciones de evolución de las variables internas, resulta la relación

constitutiva incremental tangente, para los problemas *sin degradación de rigidez*:

$$\dot{\sigma} = D^{ep} \cdot \dot{\epsilon} \quad (9)$$

siendo  $D^{ep}$  el tensor de rigidez tangente elasto-plástico, que viene expresado por<sup>22</sup>:

$$D_T^{ep} = D_S - \frac{\left[ D_S \cdot \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \right] \otimes \left[ D_S \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \right]}{\underbrace{\left[ h_c \left( h_{\kappa} \cdot \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right) \right]}_A + \left[ \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \cdot D_S \cdot \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \right]} \quad (10)$$

donde  $D_S$  es el tensor de rigidez elástico<sup>22</sup>. De la ecuación (10) se deduce que el tensor  $D^{ep}$  es simétrico, sólo para problemas de *plasticidad asociada*: ( $G \equiv F$ ).

### GENERALIZACION DEL MODELO DE DAÑO PLASTICO PARA PROCESOS CON DEGRADACION DE RIGIDEZ. INTRODUCCION DE LAS VARIABLES INTERNAS DE DEGRADACION ELASTICA Y PLASTICA.

Los resultados experimentales muestran que mientras el sólido se encuentra en *período elástico*, a medida que crece la deformación, se produce un cambio en la rigidez secante que se denomina *degradación elástica de la rigidez*. Este fenómeno se manifiesta también durante los *procesos plásticos*, aunque en esta situación la *degradación plástica* viene acompañada de cambios en la cohesión, rozamiento interno y dilatación Figura 1.

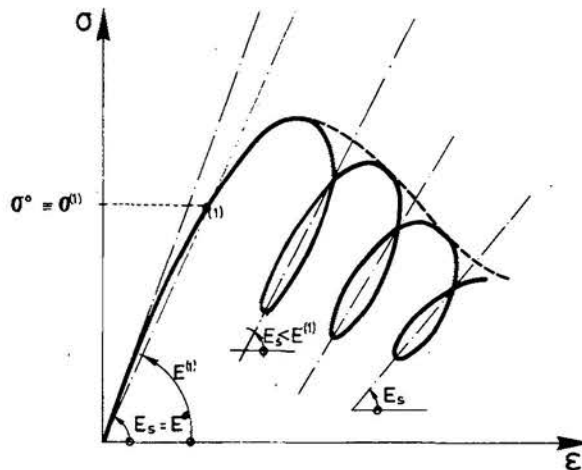


Figura 1. Esquema uniaxial de degradación de la rigidez secante.

Físicamente la degradación de la rigidez se inicia con el crecimiento y posterior conexión entre micro-fisuras<sup>24,25</sup> o entre micro-poros existentes en la masa del hormigón. Dentro del contexto de la *mecánica de los medios continuos*, se puede considerar este

fenómeno mediante una actualización del tensor de rigidez secante  $D_S$ , en función de la evolución de dos variables internas (escalares o vectoriales): 1) La *variable de degradación elástica*  $d^e$ , y 2) La *variable de degradación plástica*  $d^p$ . Estas variables tienen una forma similar a la descrita por Simo and Ju<sup>24,25</sup> y por otros investigadores<sup>14,17</sup>, pero a diferencia de éstas, en el caso que se presenta no es necesario definir una *función de degradación de rigidez* para formular su regla de evolución.

Se propone una regla de evolución de la *variable de degradación elástica* en función del incremento de deformación total, a través de la siguiente expresión:

$$\dot{d}_i^e = \Phi_i \langle \mathbf{k}_i \cdot \dot{\epsilon} \rangle \quad (11)$$

donde  $\mathbf{k}_i$  es un vector definido en el espacio de tensiones,  $\Phi_i$  es una función de estado escalar, y  $\langle \cdot \rangle$  la *función rampa*<sup>22,30</sup>.

La variable de *degradación plástica* está asociada a la deformación plástica, y tiene una regla de evolución general de la siguiente forma:

$$\dot{d}_j^p = \dot{\lambda} H_j = \dot{\lambda} \left[ \ell_j \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right] = \ell_j \cdot \dot{\epsilon}^p \quad (12)$$

donde  $\dot{\lambda}$  es el parámetro de consistencia plástica que interviene en la regla de flujo<sup>22,30</sup> y  $\ell_j$ , es un vector definido en el espacio de tensiones que indica la *dirección de degradación* plástica. Este vector, al igual que  $\mathbf{k}_i$ , puede obtenerse a través del gradiente de una función (superficie de degradación), definida en el espacio de tensiones principales. Este tipo de *superficies de degradación*, fueron introducidas inicialmente en el espacio de deformaciones principales por Dougill<sup>14,16</sup> y posteriormente fueron utilizadas en el espacio de tensiones principales, o en ambos espacios a la vez, por distintos investigadores (Bažant and Kim<sup>2,26</sup>, Han and Chen<sup>16</sup>, Simo and Ju<sup>24,25</sup>, Klisinski and Mroz<sup>17</sup>). En el modelo que se presenta, estas superficies quedan implícitamente definidas, adoptando formas muy particulares, que serán tratadas en los siguientes apartados.

### ECUACION CONSTITUTIVA Y RIGIDEZ TANGENTE PARA PROCESOS CON DEGRADACION

El fenómeno de degradación de rigidez modifica la ecuación constitutiva elasto-plástica tangente para procesos plásticos con pequeñas deformaciones ecuación (9). Esta debe ser formulada nuevamente, y para ello se partirá definiendo una *energía potencial libre* (a una temperatura dada) compuesta de una parte elástica y otra plástica<sup>20</sup>, de la forma:

$$\Psi(\epsilon^e, \mathbf{q}_\alpha, \mathbf{q}_\beta) = \Psi^e(\epsilon^e, \mathbf{q}_\beta) + \Psi^p(\mathbf{q}_\alpha) \quad (13)$$

Donde,  $\Psi^p(\mathbf{q}_\alpha)$  es una *función de potencial plástico* y  $\Psi^e(\epsilon^e, \mathbf{q}_\beta)$  una *función de energía elástica*; siendo:  $\epsilon^e = D_S^{-1} \cdot \sigma$  la *variable libre* del proceso, que representa la deformación elástica en un cierto instante  $t$  del proceso cuasi-estático;  $\mathbf{q}_\alpha$  las

*variables internas plásticas* ecuación (4), como el daño plástico  $\kappa^p$  y la cohesión  $c$ , que tienen una regla de evolución del tipo  $\dot{q}_\alpha = \dot{\lambda} H_\alpha(\sigma, q)$ ; y  $q_\beta$  otras *variables internas*, como la degradación elástica  $d^e$  y la degradación plástica  $d^p$ . Así, el modelo en su forma más general considera las siguientes variables internas:

$$q = \begin{pmatrix} \epsilon^p \\ \text{---} \\ q_\alpha \\ \text{---} \\ q_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon^p \\ \text{---} \\ \kappa^p \\ c \\ \text{---} \\ d^e \\ d^p \end{pmatrix} \quad (14)$$

A partir de los principios de la mecánica clásica, se puede escribir la disipación total de energía  $\Xi$  mediante la siguiente expresión simplificada de la desigualdad de Clausius-Duhem<sup>20</sup> (disipación reducida):

$$\Xi = \sigma \cdot \dot{\epsilon} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad (15)$$

Esta desigualdad expresa el balance de entropía para un continuo de Cauchy, y es válida para cualquier proceso de carga admisible. Calculando la derivada temporal de la energía libre ecuación (13), se tiene:

$$\dot{\Psi} = \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^e} \right\} \cdot \dot{\epsilon}^e + \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial q_\alpha} \right\} \cdot \dot{q}_\alpha + \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial q_\beta} \right\} \cdot \dot{q}_\beta$$

sustituyendo en esta última la ecuación (3), y la que resulta en la ecuación (15), se tiene la siguiente expresión para la disipación:

$$\Xi = \left[ \sigma - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^e} \right\} \right] \cdot \dot{\epsilon}^e + \sigma \cdot \dot{\epsilon}^p - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial q_\alpha} \right\} \cdot \dot{q}_\alpha - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial q_\beta} \right\} \cdot \dot{q}_\beta \geq 0 \quad (16)$$

Por ser  $\epsilon^e$  una variable libre cuya velocidad de variación  $\dot{\epsilon}^e$  puede ser tan grande como se quiera, para garantizar el cumplimiento de la desigualdad de Clausius-Duhem ecuación (16), debe ocurrir necesariamente que:

$$\left[ \sigma - \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^e} \right\} \right] = 0 \quad (17)$$

de donde se obtiene la tensión, como:

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^e} \quad (18)$$

En particular, para un sólido elasto-plástico que exhibe un comportamiento elástico lineal con degradación de rigidez, la *energía libre* ecuación (13) puede ser escrita como:

$$\Psi(\epsilon^e, q_\alpha, q_\beta) = \frac{1}{2} \underbrace{(\epsilon - \epsilon^p)}_{\epsilon^e} \cdot D_S(d^e, d^p) \cdot \underbrace{(\epsilon - \epsilon^p)}_{\epsilon^e} + \Psi^p(q_\alpha) \quad (19)$$

donde  $D_S(d^e, d^p)$  es el tensor de rigidez secante, que depende de las variables de degradación elástica y plástica.

Sustituyendo la ecuación (19) en la ecuación (18), queda expresada la ecuación constitutiva para un sólido elasto-plástico, a partir de la rigidez secante:

$$\sigma = D_S(d^e, d^p) \cdot (\epsilon - \epsilon^p) \quad (20)$$

resultando de aquí una ley constitutiva incremental, tangente, para un proceso de carga elasto-plástico degradable:

$$\dot{\sigma} = \left[ \frac{\partial D_S}{\partial d^e} \dot{d}^e + \frac{\partial D_S}{\partial d^p} \dot{d}^p \right] \cdot (\epsilon - \epsilon^p) + D_S \cdot (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \quad (21)$$

reagrupando los sumandos, se puede escribir la relación incremental tangente ecuación (21) en la siguiente forma:

$$\dot{\sigma} = C_T^e(d^e, d^p) \cdot \dot{\epsilon} - C_T^p(d^e, d^p) \cdot \dot{\epsilon}^p = \dot{\sigma}^e - \dot{\sigma}^p \quad (22)$$

siendo:

$$\dot{\sigma}^e = C_T^e \cdot \dot{\epsilon} = D_S \cdot \dot{\epsilon} + \left[ \sum_i \frac{\partial D_S}{\partial d_i^e} \dot{d}_i^e \right] \cdot D_S^{-1} \cdot \sigma \quad (23)$$

$$\dot{\sigma}^p = C_T^p \cdot \dot{\epsilon}^p = D_S \cdot \dot{\epsilon}^p - \left[ \sum_j \frac{\partial D_S}{\partial d_j^p} \dot{d}_j^p \right] \cdot D_S^{-1} \cdot \sigma \quad (24)$$

donde  $\dot{\sigma}^e$  y  $\dot{\sigma}^p$  son los *incremento de tensión elástico y plástico del sólido degradado*, respectivamente. Conviene observar, que para un proceso de carga sin degradación elástica ni plástica, los tensores de rigidez degradados, se reducen a:  $C_T^e \equiv C_T^p \equiv D_S = \text{cte.}$

Al igual que en plasticidad clásica, para formular la *ecuación constitutiva elasto-plástica tangente* para procesos con degradación de rigidez, es necesario partir de la *condición de consistencia plástica de Prager*<sup>22</sup>; de donde resulta la siguiente *ley constitutiva incremental tangente*:

$$\dot{\sigma} = C_T^{ep}(d^e, d^p) \cdot \dot{\epsilon} \quad (25)$$

siendo  $C_T^{ep}$  el *tensor de rigidez elasto-plástico tangente del material*, que contempla los fenómenos de degradación elástica y plástica a la vez.



$$C_T^{ep} = C_T^e - \frac{\left[ C_T^p \cdot \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \right] \otimes \left[ C_T^e \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \right]}{\underbrace{\left[ h_c \left( h_\kappa \cdot \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right) \right]}_A + \left[ \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \cdot C_T^p \cdot \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \right]} \quad (26)$$

La rigidez tangente ecuación (26) será simétrica, si  $C_T^e$  es simétrica y si  $C_T^p \cdot \{\partial G/\partial \sigma\}$  es proporcional a  $C_T^e \cdot \{\partial F/\partial \sigma\}$ . Se puede demostrar que esta proporcionalidad es una forma más general de definir la regla de flujo asociada para procesos con degradación elástica y plástica<sup>19,20,22</sup>.

En los siguientes apartados, se presenta una forma de definir los tensores de rigidez degradados  $C_T^e$  y  $C_T^p$ , para el caso de degradación isótropa.

#### DEGRADACION ELASTICA SIMPLE

La hipótesis más simple para considerar la degradación de rigidez que ocurre durante un proceso de carga elástico, ha sido introducida por Kachanov<sup>24</sup> en la forma:

$$D_S(d^e) = (1 - d^e) D^0 \quad (27)$$

donde  $D^0$  es el tensor de rigidez inicial,  $D_S(d^e)$  es el tensor de rigidez secante que depende de una variable escalar de degradación elástica  $d^e$  (degradación isótropa), que vale cero para un material en su estado inicial no degradado, y uno para un material totalmente degradado. Dicha variable puede interpretarse como la relación que hay entre la superficie degradada y la superficie total de una determinada zona del sólido<sup>22</sup>.

Distintos investigadores<sup>1,7,10,11,12,13,18,27</sup>, sostienen que durante un proceso de carga uniaxial, de compresión o tracción, existe un comportamiento inicial elástico-degradable con módulo de Poisson constante hasta alcanzar el 75 – 80% de la tensión pico, coincidiendo este límite con la superficie de *discontinuidad inicial* ( $\sigma_C^o \simeq 0.75 \sigma_C^{pic}$  para compresión uniaxial, y  $\sigma_T^o \simeq 0.75 \sigma_T^{pic}$  para tracción uniaxial<sup>22</sup>). La ecuación (27) permite cumplir con este requisito hipotético. Asimismo, se admite que a partir de este límite se produce un incremento del módulo de Poisson, acompañado de un proceso de micro-fisuración que colabora en producir mayor degradación. La ecuación (25), proporciona una relación tensión-deformación que permite modelar este tipo de comportamiento.

Para estudiar el caso particular de degradación elástica de Kachanov, es necesario sustituir el *tensor de rigidez secante* ecuación (27) en la ecuación (23) que da el *incremento de tensión elástico degradado* y en la que resulte de éstas, sustituir la *regla de evolución de la variable de degradación elástica* ecuación (11), obteniéndose:

$$\dot{\sigma}^e = C_T^e \cdot \dot{\epsilon} = D_S(d^e) \cdot \dot{\epsilon} - \frac{\Phi}{(1 - d^e)} \langle \mathbf{k} \cdot \dot{\epsilon} \rangle \sigma \quad (28)$$



donde  $C_T^e$  es simétrica, sí y sólo sí  $k$  es proporcional o igual a  $\sigma$ , en cuyo caso, la degradación de rigidez en un proceso elástico estará asociada al *incremento total de trabajo de deformación*.

Si se considera que  $\Phi$  se mantiene constante durante todo el proceso de carga, y además que  $k \cdot \dot{\epsilon} \equiv \sigma \cdot \dot{\epsilon}$ , se tiene de la ecuación (28) el tensor de rigidez degradado elásticamente:

$$C_T^e(d^e) = D_S(d^e) - \frac{\Phi}{(1-d^e)} \sigma \otimes \sigma \quad (29)$$

En la ecuación anterior, el *factor de reducción*  $(1-d^e)$  puede estar formulado a través de cualquier regla de evolución del tipo de la ecuación (11), que dependiendo del proceso mismo produzca la degradación deseada. Aquí se ha hecho la hipótesis de relacionar este factor con el *trabajo de deformación elástico*  $w^e$ , resultando la siguiente función de degradación:

$$(1-d^e) = (1-\Phi w^e) \quad (30)$$

donde  $\dot{w}^e = \sigma \cdot \dot{\epsilon}^e$ . Sustituyendo la ecuación (30) en la ecuación (27) y operando algebraicamente<sup>22</sup>, se puede expresar el *factor de reducción* buscado, como:

$$(1-d^e) = (1-\Phi w^e) = e^{-\Phi w^{e,0}} \quad (31)$$

siendo  $2 w^{e,0} = \epsilon^e \cdot D^0 \cdot \epsilon^e$ . Sustituyendo la ecuación (31) en la la ecuación (29), resulta el siguiente tensor de rigidez tangente, degradado elásticamente:

$$C_T^e(d^e) = D^0 \left[ 1 - \Phi \left( \epsilon^e \cdot D^0 \cdot \epsilon^e \right) \right] e^{-\Phi w^{e,0}} \quad (32)$$

En la ecuación anterior sólo queda por determinar la magnitud del escalar  $\Phi$ , que será considerado como una constante, y cuya magnitud se obtiene de ensayos experimentales uniaxiales<sup>22</sup>. Esto es:

$$\Phi = \frac{2}{E^0 (\epsilon^e)^2} \ln \frac{E_S^e}{E^0}$$

donde  $E^0$  es el módulo de elasticidad inicial,  $E_S^e$  y  $\epsilon^e$  representan el módulo de elasticidad secante y la deformación en el instante de alcanzar el límite de elasticidad respectivamente.

Algunos investigadores<sup>7,10</sup>, sostienen que la degradación propuesta por Kachanov es insuficiente para representar el comportamiento elástico del hormigón, siendo necesario recurrir a diferentes grados de degradación para el *módulo volumétrico secante*  $K_S^D$ , y el *módulo de corte secante*  $G_S^D$ . Este tipo de degradación selectiva, se debe a la diferencia que hay entre la respuesta volumétrica  $\sigma_{oct} - \epsilon_{oct}$ , y la distorsional  $\tau_{oct} - \gamma_{oct}$  del hormigón<sup>19,22</sup>. Para mas información sobre este concepto, se remite a las dos referencias citadas.

## DEGRADACION PLASTICA

En este apartado se presenta una forma simple de tratar el fenómeno de degradación de rigidez que ocurre en el hormigón por efecto de la deformación plástica. Se basa en admitir como hipótesis, que la *degradación plástica* se desarrolla a partir del momento en que se inicia el ablandamiento del material (pérdida de cohesión), situación que coincide con el inicio del período de *macro-fisuración* (límite convencional adoptado por distintos investigadores<sup>14,23</sup>). Así, se formula la rigidez secante en un punto del sólido, en función de la evolución de la cohesión en dicho punto, situación que se confirma con resultados experimentales que muestran claramente que cerca y más allá del pico de tensiones, existe una pérdida de cementación intergranular que se evidencia también como un fenómeno de degradación de la rigidez<sup>14,16</sup>. Este comportamiento se pone de manifiesto cuando se aplican cargas cíclicas Figura 1.

Con base en la hipótesis antes realizada, se puede proponer una variable escalar de degradación plástica  $d^p \equiv d^p$ , que permite formular la *rigidez secante degradada*, por efecto del fenómeno plástico, del siguiente modo:

$$D_S(d^p, \mathbf{d}^e) = (1 - d^p) D_S(\mathbf{d}^e) \quad (33)$$

donde  $D_S(d^p, \mathbf{d}^e)$  es el tensor de rigidez que resulta de un proceso de degradación elástica y plástica,  $D_S(\mathbf{d}^e)$  es el tensor de rigidez secante degradado elásticamente ecuación (27), y  $d^p$  es la variable de degradación plástica, cuya regla de evolución se define como:

$$\dot{d}^p = \frac{(1 - d^p)}{c} \langle -\dot{c} \rangle \quad (34)$$

donde  $c$  es la cohesión definida según una cierta regla de evolución para  $\dot{c}$ <sup>30</sup>. Integrando la ecuación (34) se obtiene:  $d^p = 1 - (c/k)$ , donde la constante  $k$  puede deducirse de la condición que el valor inicial de  $d^p$  es nulo y se mantiene sin cambios hasta el instante en que se inicia el proceso de ablandamiento ( $\dot{c} < 0$ ), instante en que se tiene el valor de máxima cohesión o valor de pico  $c^{pic}$ ). Resultando entonces  $k = c^{pic}$ , y la variable de degradación:

$$d^p = 1 - \frac{c}{c^{pic}} \quad (35)$$

Sustituyendo las ecuaciones de evolución del daño plástico  $\kappa^p$  y de la cohesión  $\dot{c}$  (ecuación (5))<sup>30</sup> en la ecuación (34), resulta la siguiente ecuación de evolución para la variable de degradación plástica:

$$\dot{d}^p = \frac{(1 - d^p)}{c} \langle -h_c h_\kappa \cdot \dot{\epsilon}^p \rangle \quad (36)$$

de donde se puede obtener una formulación que se identifica con la regla de evolución general que se ha propuesto para las variables de degradación plástica ecuación (12); esto es:

$$\dot{d}^p = \boldsymbol{\ell} \cdot \dot{\epsilon}^p \quad (37)$$

donde:

$$\boldsymbol{\ell} = \frac{(1 - d^p)}{c} \langle -h_c \rangle \mathbf{h}_\kappa \quad (38)$$

es un vector, que representa la dirección de *degradación plástica*. Esta forma particular de definir  $\boldsymbol{\ell}$  lleva implícita una superficie de degradación en el espacio de tensiones.

Sustituyendo la ecuación (37) y la ecuación (33) en la ecuación (24), resulta el tensor de rigidez degradado plásticamente, como:

$$\mathbf{C}_T^p = D_S(d^p, d^e) - \frac{\langle -h_c \rangle}{c} \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{h}_\kappa \quad (39)$$

En los estudios numéricos realizados con el modelo, se ha supuesto que la degradación elástica y plástica no ocurren simultáneamente, cesando la primera en el momento que se inicia el proceso de plastificación del material, e iniciándose la segunda una vez superada la cohesión máxima (valor de pico). No obstante, la formulación general del modelo, permite considerar ambos fenómenos a la vez.

### DIRECCIONALIDAD DEL DAÑO PLÁSTICO EN UN PUNTO Y SU RELACION CON EL FLUJO PLÁSTICO. POST-PROCESO DE RESULTADOS

#### Introducción

Se ha mencionado en la *parte - I*, (apart. 1. referencia<sup>30</sup>), que se puede considerar el daño en cada punto del sólido (daño local) como un fenómeno adireccional, y que la dirección macroscópica (fractura) viene definida por el lugar geométrico de los puntos dañados. A pesar de que en el espacio de tensiones cada punto del sólido exhibe un comportamiento isotrópico, en el espacio de deformaciones plásticas puede interpretarse una cierta direccionalidad del daño, relacionada con la deformación plástica. Así, se admite como hipótesis que la *dirección y magnitud* del daño local, resultan de un análisis del tensor de deformaciones plásticas  $\epsilon^p$ :

$$\epsilon^p = \int_{t=0}^t \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} dt \quad (40)$$

De esta forma, el parámetro de consistencia plástica  $\dot{\lambda}$  puede ser interpretado como la magnitud del incremento del daño en un punto, y el flujo plástico  $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$  como la orientación del daño en el espacio de tensiones principales. Debido a que el modelo que se presenta no requiere la *dirección ni la magnitud del daño* durante el proceso resolutivo, esta hipótesis no necesita formar parte del cálculo, sino que sólo se la tiene en cuenta en el post-proceso de resultados, que se realiza con el objeto de obtener una

información sobre la *magnitud y dirección* del daño, en determinados puntos de análisis del espacio discreto (puntos de integración de un análisis por el método de los elementos finitos). La interpretación de los resultados, obtenidos de esta forma, (ver ejemplos de comprobación) coinciden muy bien con los estudios experimentales y también con los obtenidos con otros modelos ortótropos, que sí necesitan determinar la dirección del daño durante el proceso de cálculo.

Se puede demostrar también que los modelos constitutivos, formulados para tratar el fenómeno de fisuración a tracción del hormigón, que utilizan funciones de falla del tipo Rankine<sup>3,4,5,8,15,21,23</sup>, evalúan el daño local (en un punto del sólido discreto) indirectamente a partir de un análisis de las deformaciones inelásticas o de daño<sup>22</sup>.

#### Obtención de la dirección del daño plástico, de su magnitud, y de la energía disipada por cada fisura.

La magnitud, dirección y demás información sobre el estado de daño local (en un punto del sólido discreto), se obtiene a posteriori del proceso de cálculo, una vez que se ha logrado la convergencia hacia un estado de equilibrio.

- **Dirección del daño plástico:** Para este modelo, se considera que la iniciación del daño en un punto del espacio discreto, ocurre cuando la variable de daño plástico se hace mayor que cero  $\kappa^p > 0$ . A partir de este instante, se entiende que hay *daño plástico* (fisuración), cuya dirección local queda definida por la componente normal a la dirección principal mayor del tensor de deformación plástica Figura 2:

$$\vartheta_\epsilon = \vartheta(\epsilon^p) \quad (41)$$

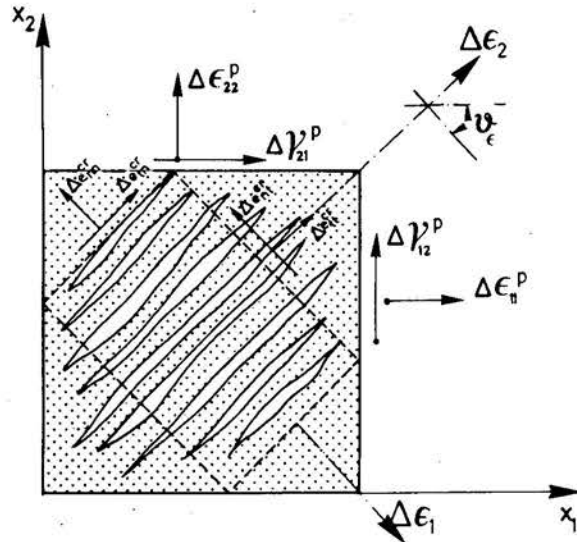
donde  $\epsilon^p$  es la deformación plástica definida según un sistema de referencias global, y  $\vartheta_\epsilon$  es el ángulo que hay entre la deformación principal mayor y el eje material  $x_1$ .

Analizando el signo de las componentes principales del tensor de deformación plástica, se tiene aplastamiento en un punto, si  $\epsilon_i^p < 0$  y fisuración si  $\epsilon_i^p > 0$ .

- **Magnitud del daño plástico:** El modelo, considera el daño como una deformación localizada en una cierta zona de dimensiones finitas a la que se ha denominado *zona de daño plástico*. En virtud de esto, se puede considerar que una fisura real es la acumulación en una zona de dimensiones infinitesimales, de todo el daño distribuido en la *zona de daño plástico*<sup>23</sup>. De esta manera, mediante el post-proceso de los resultados, se obtiene una *magnitud de daño equivalente* al de una fisura real Figura 3. Para cada punto del sólido, de dimensiones infinitesimales, se puede expresar el *desplazamiento irre recuperable*, como:

$$dl_f^{eq} = \epsilon_1^p dl_f^0 \quad (42)$$

siendo  $\epsilon_1^p$  la deformación plástica principal mayor, y  $dl_f^0$  la dimensión inicial del punto en la dirección  $\vartheta_\epsilon$ . A partir de la ecuación (42), se puede obtener la



$$\Delta \mathbf{e}^p = \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_{11}^p \\ \Delta \epsilon_{22}^p \\ \Delta \gamma_{12}^p \end{Bmatrix} ; \quad \Delta \mathbf{e}^{cr} = \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_{11}^{cr} \\ \Delta \epsilon_{22}^{cr} \\ \Delta \epsilon_{nt}^{cr} = 0 \end{Bmatrix}$$

Figura 2. Dirección local de la fisuración.

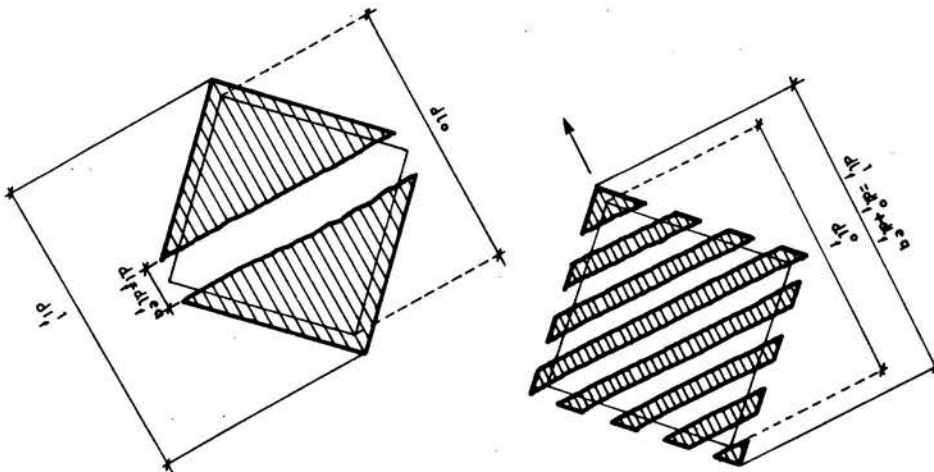


Figura 3. Fisura real, y fisura distribuida equivalente a la real.

magnitud del daño equivalente al de una fisura real, para un punto del espacio discreto, como:

$$l_f^{eq} = \int_{L_{pe}} \epsilon_1^p dl_f^0 \tag{43}$$

siendo  $L^{pe}$  la longitud característica de un elemento finito<sup>30</sup>.

- **Energía disipada por cada punto de la zona dañada:** A partir de la disipación expresada en la ecuación (16), se puede obtener la energía total disipada durante un proceso plástico degradable, como:

$$W^p = \int_V \left[ \int_{t=0}^t \Xi dt \right] dV \quad (44)$$

donde  $V$  es el volumen del sólido en análisis.

### INTEGRACION DE LA ECUACION CONSTITUTIVA

Durante un estudio numérico cuasi-estático, se aplican en el sólido incrementos de carga de magnitud finita, que conducen a incrementos de deformaciones finitos. Esta situación obliga a reformular la ecuación constitutiva ecuación (25) en forma incremental. Esto es:

$$\Delta \sigma^{(e)} = (C_T^{ep})^{(e)} \cdot \Delta \epsilon^{(e)} \quad (45)$$

La integración de esta ecuación constitutiva se realiza por medio de una variante del método de retorno radial de Euler<sup>22</sup>. Esta técnica de integración implícita, permite obtener la solución en forma rápida y eficaz para problemas con ablandamiento en la ley constitutiva. Se ha utilizado en particular, una modificación del método de integración propuesto por Zienkiewicz et al.<sup>29</sup> para visco plasticidad, y utilizada por De Borst<sup>4</sup> en plasticidad.

Designando con los superíndices <sup>0</sup> y <sup>1</sup> el inicio y fin de una iteración (dentro de un incremento de carga), respectivamente, se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma &= \sigma^1 - \sigma^0 \\ \Delta \epsilon &= \epsilon^1 - \epsilon^0 \end{aligned} \quad (46)$$

donde el incremento de tensión vale (de la ecuación (22) Figura 4):

$$\Delta \sigma = C_T^e(d^e, d^p) \cdot \Delta \epsilon - C_T^p(d^e, d^p) \cdot \Delta \epsilon^p = \Delta \sigma^e - \Delta \sigma^p \quad (47)$$

siendo  $\Delta \epsilon^p = \int_{t^0}^{t^1} \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma} dt \simeq \Delta \lambda \left. \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right|_{t^0}$ , siempre que se mantenga constante el flujo plástico, dentro del incremento de carga dado; y siendo  $\Delta \lambda$  el incremento en el factor de consistencia plástico, que puede deducirse de la condición de consistencia plástica de Prager<sup>22</sup>. A partir de un desarrollo en serie de Taylor de la condición de fluencia  $F(\sigma^1) = 0$ , truncando en el término de primer orden<sup>22</sup>, se puede modificar el numerador de la expresión del factor de consistencia plástica. Esto es:

$$\Delta\lambda = \frac{\left[ \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\} \cdot D_S \cdot \Delta \epsilon \right]}{\underbrace{\left[ h_c \left( h_\kappa \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right) \right]}_A + \left[ \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\} \cdot D_S \cdot \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right\} \right]} \approx \frac{\left[ \mathcal{F}(\sigma^0 + \Delta \sigma) \right]}{\underbrace{\left[ h_c \left( h_\kappa \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right) \right]}_A + \left[ \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma} \right\} \cdot D_S \cdot \left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma} \right\} \right]} \quad (48)$$

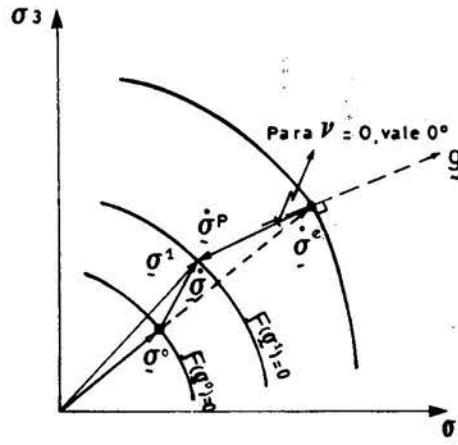


Figura 4. Esquema seguido por la técnica de retorno de Euler, para la integración de la ecuación constitutiva elasto-plástica.

El *factor de consistencia plástico* definido de este modo, tiene la ventaja, que supone que la *condición de fluencia plástica* ha sido satisfecha en el incremento de carga anterior:  $\mathcal{F}(\sigma^0) = 0$ , no siendo necesario encontrar la intersección con la superficie de fluencia durante la transición de un estado  $\sigma^0$  a otro  $\sigma^1$ .

Esta técnica ha sido considerada dentro del *modelo de daño plástico* en forma iterativa, hasta satisfacer la condición de fluencia en  $t^1$ .

### EJEMPLOS DE APLICACION

#### Introducción.

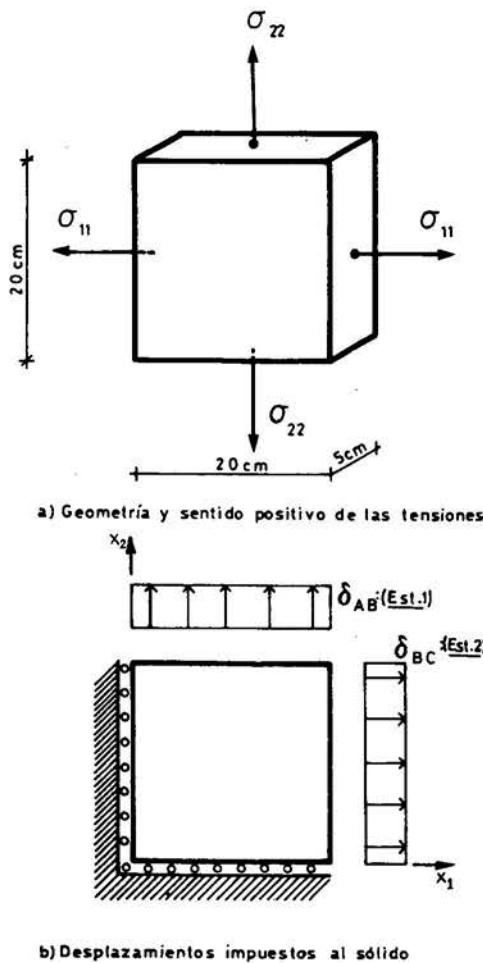
En este apartado se presentan algunos resultados numéricos obtenidos con el *modelo de daño plástico* propuesto, mediante un programa de elementos finitos, desarrollado con esta finalidad<sup>22</sup>.



**Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales – prueba de la direccionalidad global del daño.**

**Consideraciones generales sobre el ensayo.**

Se ha realizado este ensayo de tracción sobre una probeta de hormigón de  $20.0 \times 20.0 \times 5.0 \text{ cm}$ . (del tipo de la de Kupfer et al<sup>18</sup> Figura 5a, con el fin de mostrar el comportamiento *macro-direccional* que exhibe el daño en la masa del sólido, después de que un cierto número de puntos inician su comportamiento inelástico con ablandamiento.



$E_0 = 395000.00 \text{ kg/cm}^2$   
 $\nu_0 = 0.24$   
 $\sigma_C^0 = -229.00 \text{ kg/cm}^2$   
 $\sigma_C^{pic} = -328.00 \text{ kg/cm}^2$   
 $\sigma_T^0 = 22.90 \text{ kg/cm}^2$   
 $\alpha = 0.12 \rightarrow \frac{\sigma_{b0}}{\sigma_{c0}} = 1.16$   
 $\gamma = 3.0$   
 $p = 1.0$   
 $G^f = 0.16 \text{ kg/cm}$   
 $G^c = 16.00 \text{ kg/cm}$   
 $L^{pe} = \sqrt{A^e}$

Flujo asociado. Criterio de fluencia propuesto

Flujo no-asociado. { Criterio de fluencia propuesto ;  
 Func. de potencial de Mohr-Coulomb  
 con :  $\phi = \psi = 15^\circ$

$\delta^{max} = 0.02 \text{ cm}$

• Est.1 :  $\begin{cases} \delta_{AB} = \delta^{max} \\ \delta_{BC} = 0 \end{cases}$       • Est.2 :  $\begin{cases} \delta_{AB} = \delta^{max} \\ \delta_{BC} = \delta^{max} \times 0.25 \end{cases}$

Figura 5. Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales. Características geométricas mecánicas y malla de elementos finitos utilizada en el ensayo numérico.

La probeta cúbica ha sido sometida a dos estados de cargas Figura 5b: **Primero** se ha traccionado en la dirección  $x_2$  (carga  $P_{AB}$ ), hasta alcanzar el estado último (estado

en que el sólido no puede seguir resistiendo cargas); y luego se aplicó la *segunda* carga en la dirección normal a la anterior,  $x_1$  (carga  $P_{BC}$ ), hasta alcanzar nuevamente un estado de daño considerable.

Las características geométricas y mecánicas utilizadas para realizar el ensayo numérico son las que se muestran en la Figura 5. El dominio del sólido se ha discretizado con 121 elementos finitos planos de cuatro nodos, y se ha utilizado para cada elemento una integración numérica de Gauss-Legendre<sup>6</sup> de  $2 \times 2$  puntos. Se han impuesto desplazamientos en las caras: primero en la dirección  $x_2$  ( $\delta u_{AB}$ ) hasta alcanzar el estado último, y luego se ha aplicado el desplazamiento en la dirección  $x_1$  ( $\delta u_{BC}$ ).

### Análisis del ensayo.

En las Figuras 6, se pueden observar las curvas de evolución de la tensión Vs. la deformación, para distintos puntos del sólido, tanto en la dirección  $x_1$  como en la  $x_2$ . En ellas, el trazo  $AB$  describe el proceso que se desarrolla bajo la aplicación del desplazamiento  $\delta u_{AB}$ , y el trazo  $B - C$  describe el proceso que se desarrolla bajo la aplicación del desplazamiento  $\delta u_{BC}$ , mientras se mantiene constante el desplazamiento  $\delta u_{AB}$  en su valor máximo.

Durante el desarrollo del proceso  $AB$  (en la dirección  $x_2$ ), al llegar al punto  $L_{AB}$  Figuras 6 más allá del pico de tensiones, se produce una *localización de deformaciones en una banda* definida por los elementos 56 al 66 Figuras 7a y 7b, donde el comportamiento tensión-deformación, para todos los puntos contenidos en esta banda, es con ablandamiento Figura 6a. El resto de los puntos que están fuera de la banda de localización, sigue un proceso elasto-plástico con ablandamiento por un camino distinto, hasta alcanzar el límite  $L'_{AB}$  Figura 6b, a partir del cual inician una descarga elástica.

Alcanzado el valor de desplazamiento  $\delta u_{AB}^{max}$  (Punto  $B$ ), se aplica un desplazamiento  $\delta u_{BC}$  en la dirección  $x_1$ . Debido a que el daño producido en el proceso anterior se ha localizado en una faja paralela a la dirección  $x_1$  y el resto del sólido no ha agotado su resistencia, sino que la mantiene *casi* intacta, se pueden aplicar nuevas cargas en direcciones distintas a la  $x_2$  Figura 6c. El proceso  $BC$ , se inicia con un comportamiento elástico hasta alcanzar el nuevo pico de tensiones, que coincide con el valor de la tensión al límite  $L_{AB}$  (inicio de la descarga elástica en el proceso de carga anterior):  $\sigma_{BC}^{pic} \equiv \sigma_{AB}^{L_{AB}}$ . Si se sigue incrementando el desplazamiento  $\delta u_{BC}$ , se alcanza el límite  $L_{BC}$  Figuras 6, que marca el inicio de una nueva *localización de deformaciones*, en una banda transversal a la anterior, definida por los elementos: 6, 17, 28, 39, 50, 61, 72, 83, 94, 105, 116 Figuras 7b, 7c y 7d, y donde sus puntos siguen con un comportamiento tensión deformación con ablandamiento Figuras 6c. Entre los puntos restantes que no pertenecen a esta banda, están aquellos que se encuentran dentro de la faja de localización desarrollada durante el proceso anterior, para los cuales la respuesta tensión deformación se desarrolla con una rigidez nula; y están los que no pertenecen a ninguna de estas dos fajas y siguen un proceso elasto-plástico con ablandamiento por un camino distinto a los puntos dañados, hasta alcanzar el límite  $L'_{BC}$  donde se inicia un proceso elástico de descarga Figura 6d.

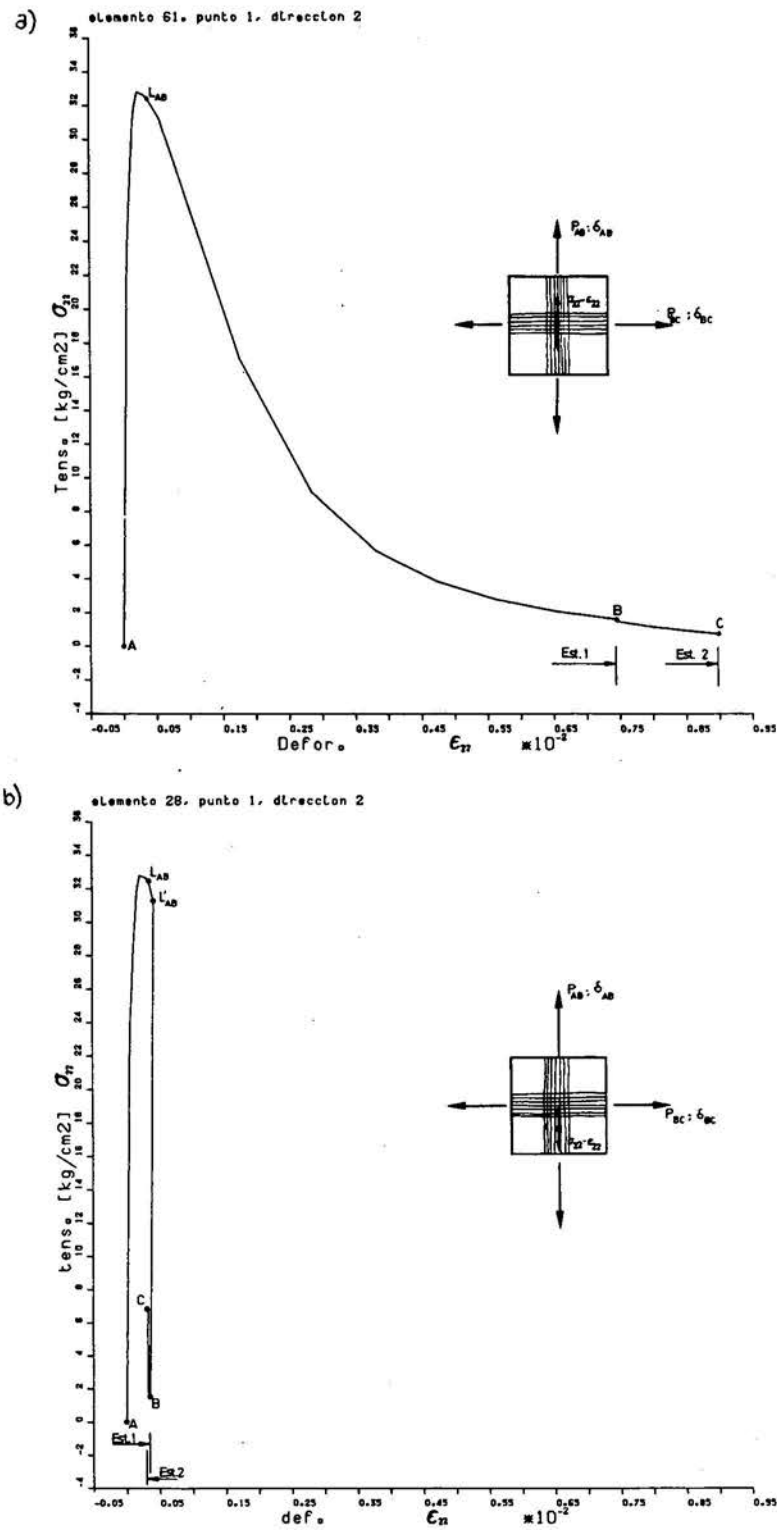


Figura 6. a) Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales. Respuesta tensión-deformación  $\sigma_{22} - \epsilon_{22}$  para un punto de integración dentro de la primera banda de localización; b) Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales. Respuesta tensión-deformación  $\sigma_{22} - \epsilon_{22}$  para un punto de integración fuera de la primera banda de localización.

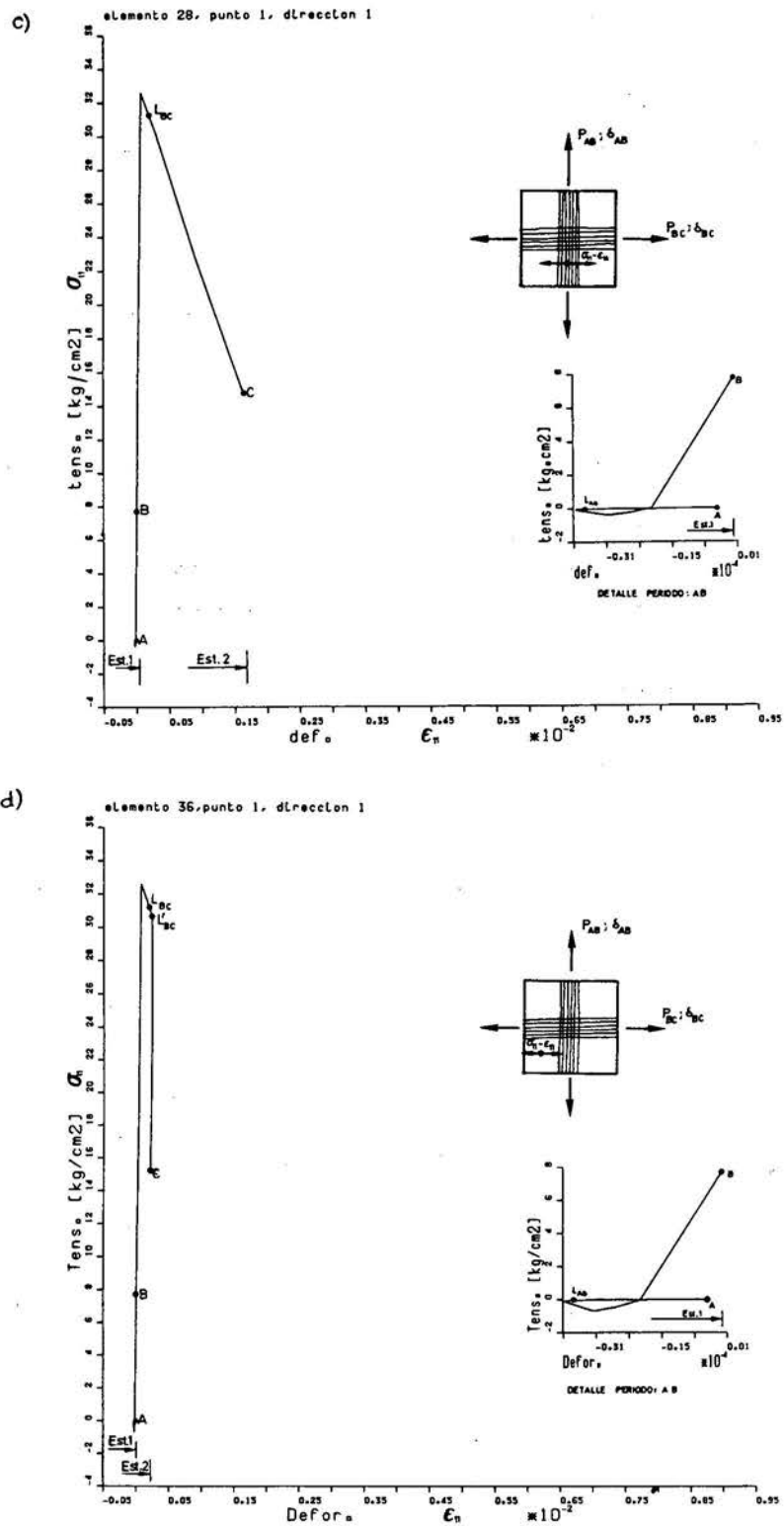


Figura 6. c) Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales. Respuesta tensión-deformación  $\sigma_{11} - \epsilon_{11}$  para un punto de integración dentro de la segunda banda de localización; d) Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales. Respuesta tensión-deformación  $\sigma_{22} - \epsilon_{22}$  para un punto de integración fuera de las dos bandas de localización.

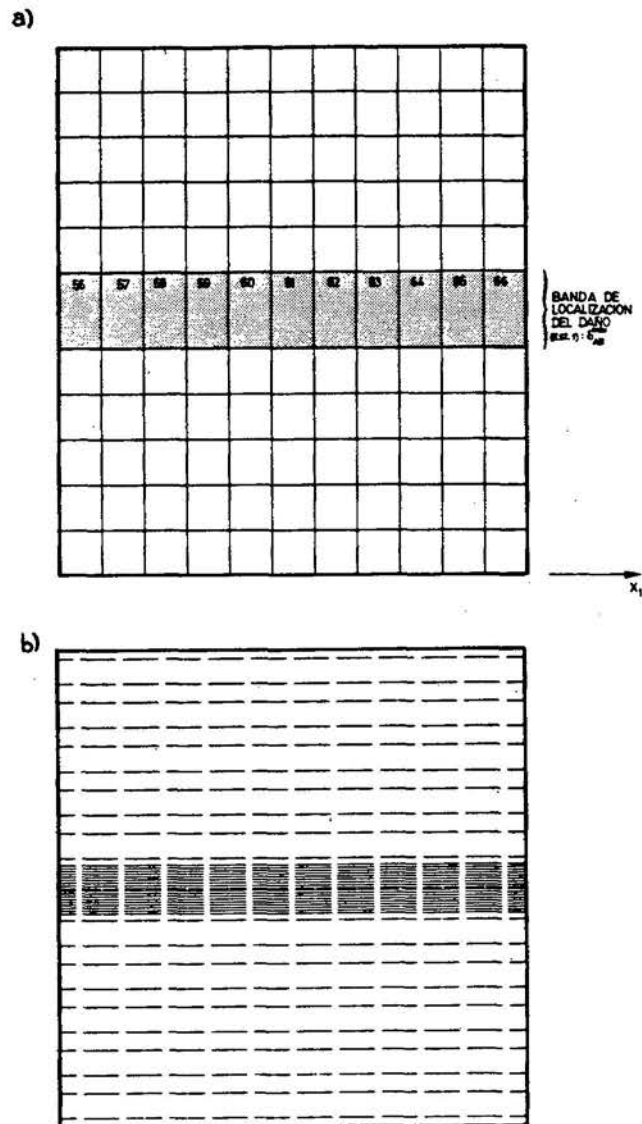


Figura 7. a) Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales. Modo de localización de las deformaciones al finalizar la aplicación del desplazamiento  $\delta u_{AB}$ ; b) Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales. Estado de fisuración al finalizar la aplicación del desplazamiento  $\delta u_{AB}$ . Representación de todas las fisuras.

Al concluir el proceso de carga  $BC$ , se puede observar en la Figura 8 que la banda de localización desarrollada durante el primer caso de carga, no ha respondido frente a la aplicación del segundo caso de carga.

En las Figuras 7b y 7d se muestra el estado de fisuración que predice el modelo en los puntos de integración de Gauss-Legendre. El análisis de dicha fisuración se ha realizado de acuerdo a la metodología explicada anteriormente; así el post-procesador

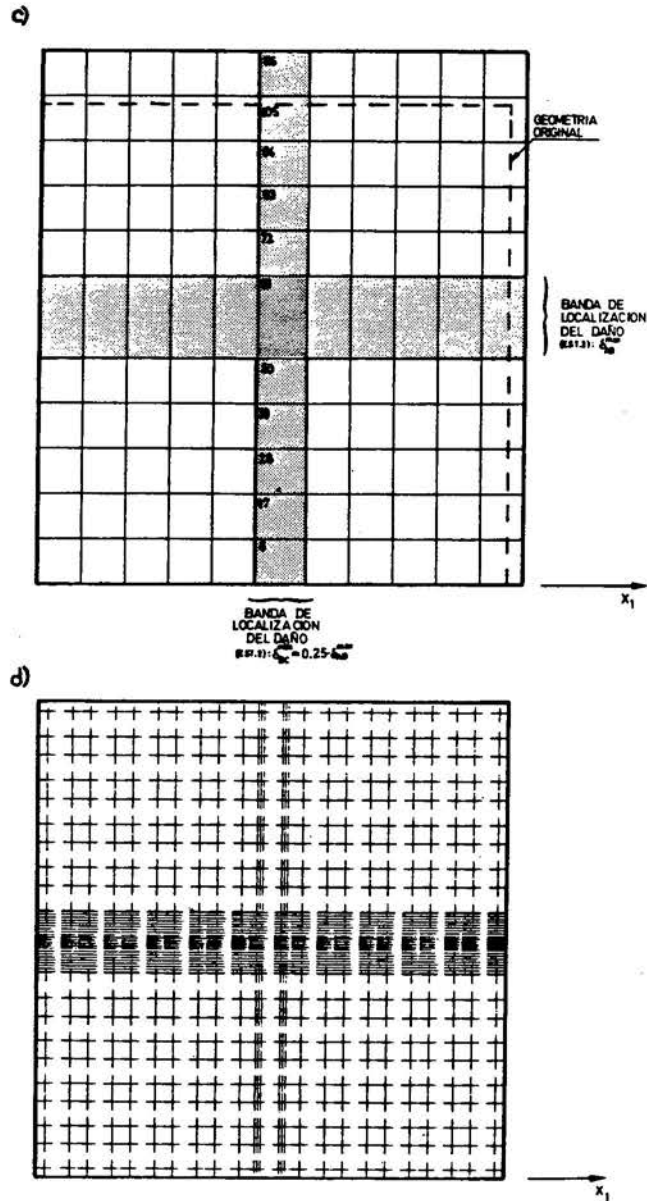


Figura 7. c) Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales. Modo de localización de las deformaciones al finalizar la aplicación del desplazamiento  $\delta u_{BC}$ ; d) Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales- Estado de fisuración al finalizar la aplicación del desplazamiento  $\delta u_{BC}$ . Representación de todas las fisuras.

del modelo interpreta que la fisuración se inicia cuando la deformación plástica en el punto tiene una componente positiva (estiramiento inelástico), la orientación de cada fisura se representa mediante un trazo ortogonal a la dirección de la correspondiente deformación plástica principal positiva y la densidad de líneas verticales paralelas da idea cualitativa de la magnitud de la *apertura* de estas fisuras. El esquema de fisuración

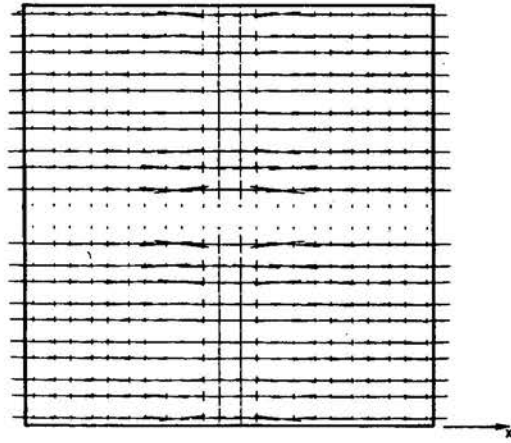


Figura 8. Ensayo de tracción en dos direcciones ortogonales. Estado de tensiones principales al finalizar la aplicación del desplazamiento  $\delta u_{BC}$ .

obtenido revela la formación de dos fajas donde se ha localizado el *daño plástico* Figuras 7a y 7c.

La energía total disipada al finalizar el proceso de carga  $AB$  ha sido de  $34.00 \text{ kgcm}$ , siendo ésta un poco superior a la que se debía disipar:  $32.00 \text{ kgcm}$ . Probablemente esta sobre-energía disipada se deba a que la localización no se produjo inmediatamente después de superar el pico de tensiones.

#### Ensayo a flexión y corte de una viga entallada. Modo mixto de fractura (Modos I y II).

##### Consideraciones generales sobre el ensayo.

Se trata de una viga de hormigón en masa, cuyas características geométricas y propiedades mecánicas se reflejan en la Figura 9. Sobre la viga se considera una entalla que profundiza, aproximadamente, sobre un tercio del canto. El ensayo fue realizado por Arrea e Ingraffea<sup>32</sup> con el fin de inducir, a partir de la entalla, un modo mixto de fractura con apertura (modo I) y deslizamiento (modo II) de los labios de la fisura. Para ello se diseñó el sistema de cargas de la Figura 9 en el que se aplica una carga  $P$  sobre una viga de acero que apoya sobre los puntos A y B de la cara superior de la probeta. Esta, a su vez se apoya isostáticamente a través de los puntos D y E de su cara inferior.

Al iniciar la aplicación de la carga en el punto  $C$  (Figura 9), se desarrolla en el punto  $A$  (Figura 9) una reacción que induce un momento flector provocando tracción en la cara superior de la viga, (tramo  $A-B$ ), conduciendo a la aparición de las primeras fisuras (Modo-I de fractura) Figura 11a). Al aumentar la carga, se desarrolla mayor crecimiento de las reacciones  $B$  y  $D$  respecto de la  $A$  (Figura 9), cesa el crecimiento de las primeras fisuras y se desarrolla una fuerte cizalladura sobre la entalla que tiende a deslizar verticalmente los labios de esta, situación que conduce a nuevas fisuras por cortante en la zona que esta por encima de la entalla (Modo-II de fractura) Figura



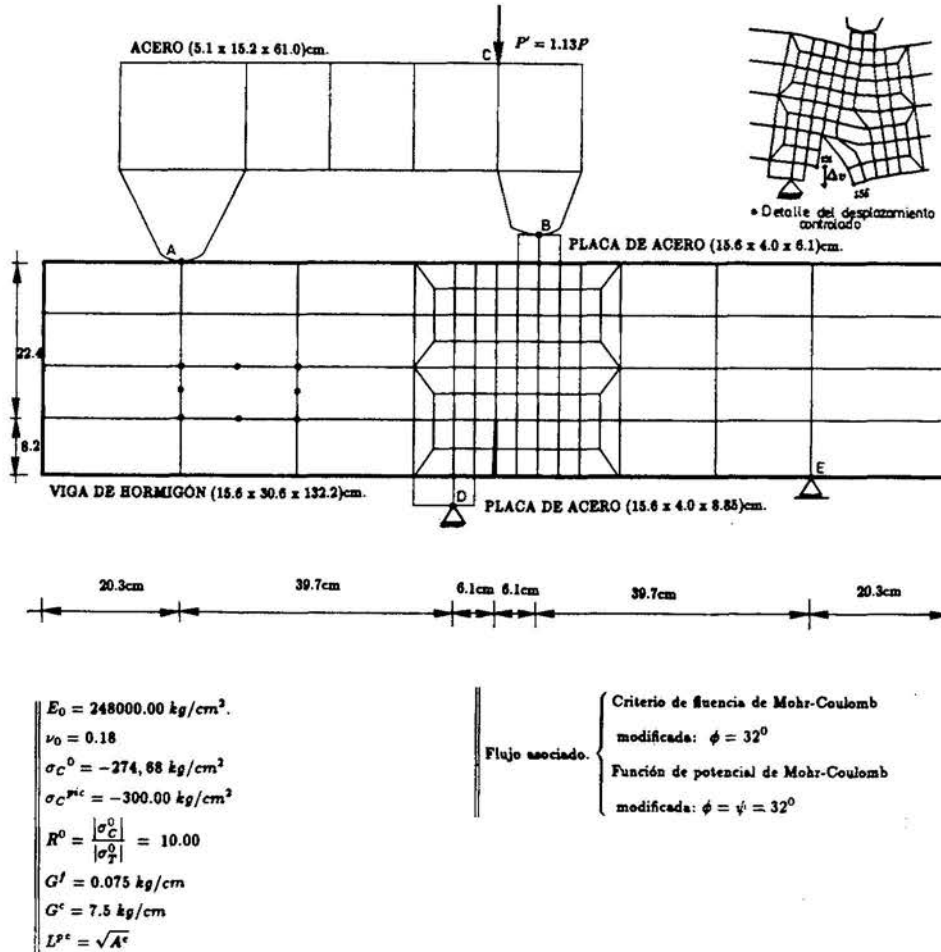


Figura 9. Ensayo de fractura en modo mixto. Características geométricas, malla de elementos finitos utilizada, y propiedades del material.

11b. Este efecto de corte, provoca una disminución de la sección transversal neta de la viga (en la zona que esta por encima de la entalla), con la consecuente pérdida de rigidez estructural, induciendo a un nuevo mecanismo de flexión en el tramo  $D - E$  de la viga (Figura 9), situación que tiende a abrir los labios de la fisura (Figura 13). El efecto combinado de este mecanismo de flexión con el de corte, da lugar a un *modo mixto de fractura* que se manifiesta con un nuevo camino de fisuración distinto a los dos primeros Figura 11b.

La simulación numérica del proceso de carga se realizó controlando el deslizamiento relativo de los labios de la entalla (C.S.D.). Con el fin de incluir en el ensayo numérico el efecto de la deformación de la viga metálica de carga, se consideró dicha viga en el análisis en la hipótesis de que se comporta como un material elástico lineal. La discretización del conjunto, en elementos isoparamétricos de ocho nodos, se presenta en la Figura 9 en la que puede observarse el mayor grado de refinamiento de la malla

en la zona donde se produce la fractura.

### Análisis del ensayo.

Los experimentos de Arrea e Ingraffea se realizaron con tres probetas de las mismas características. Los resultados carga aplicada-C.S.D., representados en la Figura 10, configuran la banda experimental. En la misma figura se presentan los resultados numéricos que muestran un muy buen grado de ajuste con los experimentales. Hay que resaltar que en ningún momento se hizo un esfuerzo para ajustar los resultados numéricos a los experimentales a base de modificar los datos del análisis que aparecen en la Figura 9. Estos se obtuvieron de los datos proporcionados por los autores de los experimentos y, en los casos en que el dato era desconocido, se estimó su valor dentro del rango de variación del mismo para hormigones de las características de los ensayados.

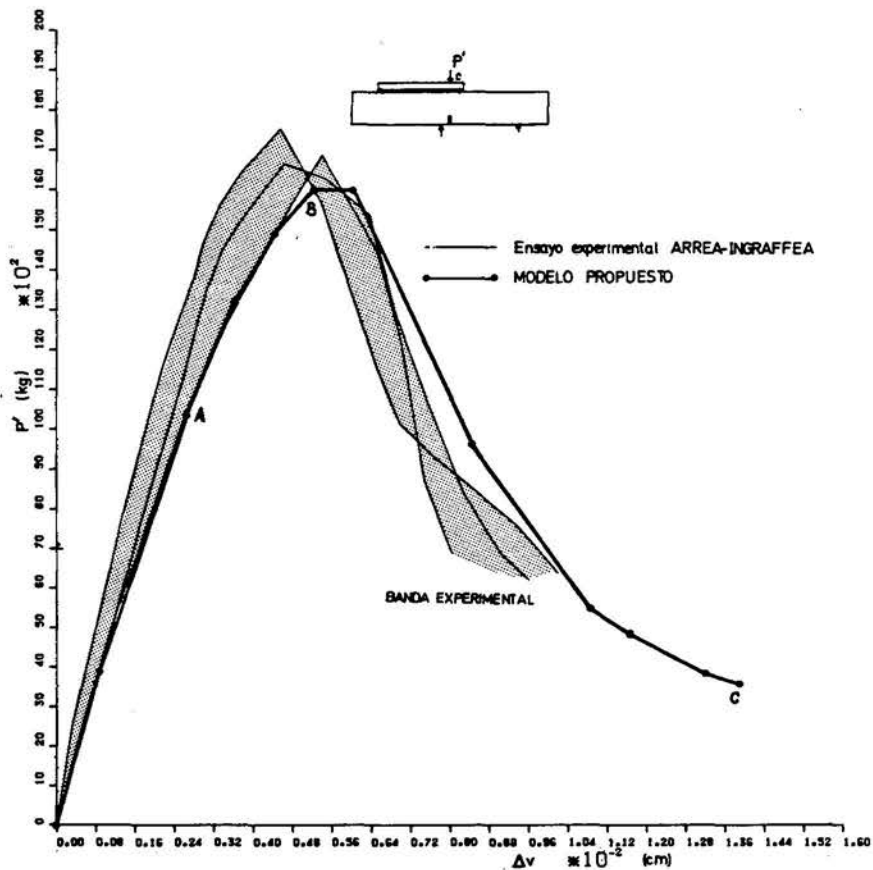


Figura 10. Ensayo de fractura en modo mixto. Carga  $P'$  Vs. desplazamiento relativo entre caras de fisuras. Comparación entre el ensayo de Arrea-Ingraffea<sup>22</sup>, y la respuesta del modelo propuesto.

En la curva presentada en la Figura 10 se caracterizan los estados de deformación A (inicio de la fisuración), B (inicio de la inestabilidad) y C (estado último analizado).

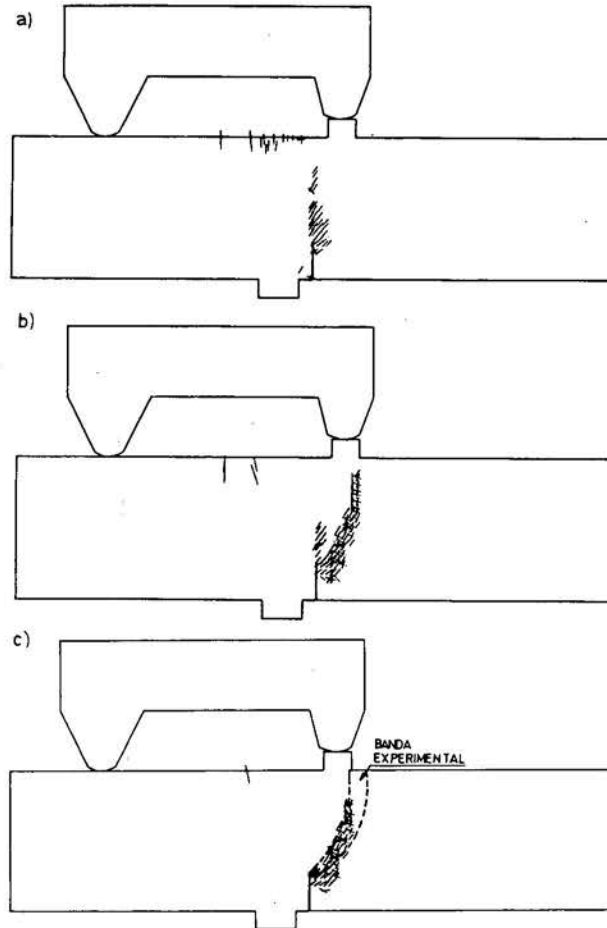


Figura 11. Ensayo de fractura en modo mixto. Estado de fisuración de la viga: a) Al pico de tensiones (punto B); b) En el límite último (punto C), para fisuras superiores al 3% de la máxima; c) En el límite último (punto C), para fisuras superiores al 5% de la máxima.

En la Figura 11a se muestra la fisuración detectada por el modelo en el estado B en el que la microfisuración está orientada a 60 grados respecto a la horizontal y tiende a progresar en dirección vertical. En esta situación aparecen también algunas fisuras en la cara superior de la viga producidas por los esfuerzos de flexión. A partir de este instante, la fisuración empieza a localizar en una banda que progresa, a partir de la entalla, con una inclinación de 60 grados para, posteriormente, tender a progresar verticalmente debido al predominio del modo I en los sucesivos estados de deformación (Figura 11b). En la Figura 11c, se compara la banda de fisuración que proporciona el modelo con la detectada experimentalmente.

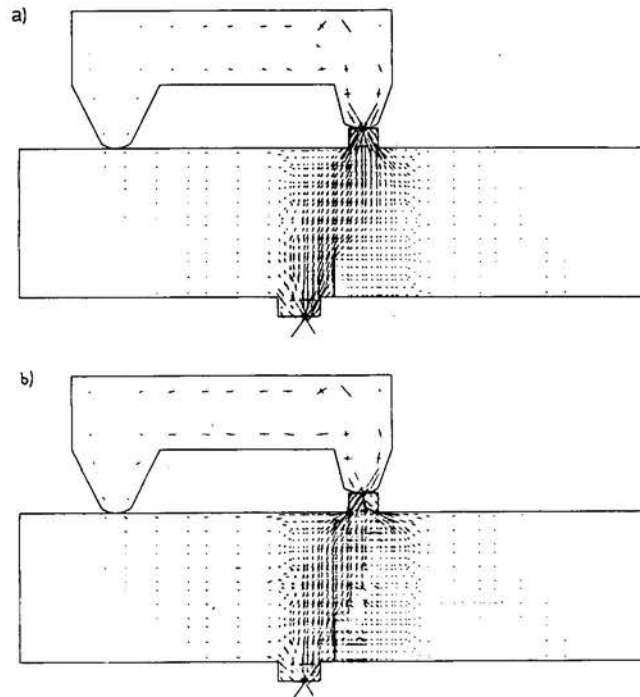


Figura 12. Ensayo de fractura en modo mixto. Tensiones principales en la viga: a) en el límite elástico (punto A); b) En el límite último (punto C).

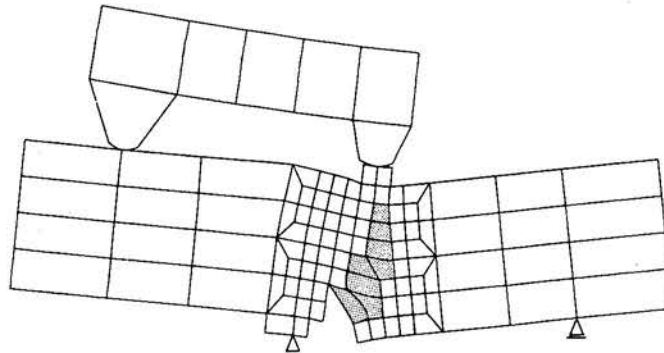


Figura 13. Ensayo de Fractura en modo mixto. Deformación de la viga y localización de deformaciones en el estado último (amplif.  $\times 300.0$ ).

En la Figura 12 se presentan las tensiones principales en el estado A de inicio de la fisuración y en el estado final analizado C. En este último caso, puede observarse la relajación de tensiones en la zona por donde discurre la fisura. Finalmente en la Figura 13 se muestra la deformada de la estructura al final del proceso de carga (amplificada 300 veces) donde puede observarse la localización de la deformación dentro de la banda de elementos que representa la fisura.

## CONCLUSIONES

En este artículo se introduce el concepto de degradación de rigidez, dentro del modelo de "daño plástico" (ver también la referencia<sup>30</sup>). Se han definido los fenómenos de degradación de rigidez elástica y plástica a través de dos variables internas y sus respectivas ecuaciones de evolución. Además se formulan dos casos simples de degradación, uno elástico y otro plástico.

La consideración del fenómeno de degradación de rigidez conduce a una formulación general del modelo constitutivo, que permite dar gran versatilidad en su utilización, y permitiendo transformarlo en distintos modelos mas simples que pueden considerarse como casos particulares de éste. Así el adecuado manejo de sus parámetros permite obtener una *formulación elástica no-lineal con degradación de rigidez*, o una *formulación elasto-plástico con endurecimiento positivo, nulo o negativo con degradación elástica y o plástica*.

En el primer ejemplo presentado, se deduce que el modelo conduce a localizar el daño en una banda de dimensiones finitas, garantizando que la zona restante se recupera elásticamente. Esto muestra la existencia del daño macro direccional, a partir de un fenómeno *local* adireccional.

En el segundo ejemplo se verifica la buena aproximación del modelo para simular el comportamiento en modo mixto de fractura, situación difícil de reproducir por aquellos modelos que utilizan leyes constitutivas acopladas.

## REFERENCIAS

1. E. Andenaes, K. Grestle y H. Ko, "Response of mortar and concrete to biaxial compression", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 103, no. EM4, pp. 515-526, (1977).
2. Z. Bažant y S. Kim, "Plastic fracturing theory for concrete", *Jour. Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 105, no. EM3, pp. 407-428, (1979).
3. Z. Bažant y B. Oh, "Crack band theory for fracture of concrete", *Mat. Construct.*, Vol. 18 (93), pp. 155-177, (1983).
4. R. De Borst, "Non linear analysis of frictional materials", *Ph. D. Thesis*, Delft, The Netherlands, (1986).
5. R. De Borst y P. Nauta, "Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model", *International Report inst. TNO for building material and building structures*, Delft, Netherlands, (1984).
6. C.A. Brebbia y J.J. Connor, "*Método de los elementos finitos en ingeniería civil*", Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, (1975).
7. L. Cedolin, R. Crutzen y S. Dei Poli, "Triaxial stress-strain relationship for concrete", *Journal of Engineering Mechanics Division*, Vol. 103, no. EM3, pp. 423-439, (1977).
8. M. Cervera y E. Hinton, "Nonlinear analysis of reinforced concrete plates and shells using a three dimensional model", *Internal Report*, Department of Civil Engineering Univ. College of Swansea, U.K., (1985).
9. M. Cervera, E. Hinton y O. Hassan, "Non linear analysis of reinforced plate and shell structures using 20-nodes isoparametric brick elements", *Computer and Structures*, Vol. 25, no. 6, pp. 845-870, (1987).

10. W.F. Chen, "*Plasticity in reinforced Concrete*", Mc Graw Hill,(1982).
11. A. Chen y W.F. Chen, "Constitutive Relations for Concrete", *Journal of The Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 101, no. EM4, pp. 465-481, ASCE, (1975).
12. A. Delibes, "Microfisuración del hormigón por compresión, ¿Estamos del lado de la seguridad?", *Informes de la Construcción*, Vol. 37, no. 379, pp. 43-47, (1986).
13. A. Ditommaso, "*Evaluation of concrete fracture - Fracture Mechanics of Concrete: Material characterization and testing*", Ed. por A. Carpinteri y A. Ingraffea, pp. 31-65, Martinus Nijhoff Publishers, (1984).
14. J.W. Duggill, "Constitutive Relations for concrete and Rock: Applications and extensions of elasticity and plasticity Theory", *Mechanics of Geomaterials*, Editado por Z. Bažant, pp. 21-46, (1985).
15. R. Glemberg, "Dynamic analysis of concrete structures", *Ph. D. Thesis*, Department of structural mechanics, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, (1984).
16. D.J. Han y W.F. Chen, "Strain space plasticity formulation for hardening-softening material with elastoplastic coupling", *Int. Jour. Solids structures*, Vol. 22, no. 8, pp. 935-950, (1986).
17. M. Klisinski y Z. Mroz, "Description of inelastic deformation and degradation of concrete", *Internal report*, Institute of fundamental technological research, Warszawa, Poland, (1987).
18. H.B. Kupfer, H. Hilsdorf y H. Rusch, "Behavior of concrete under biaxial stresses", *Journal ACI*, Vol. 66, no. 8, (1969).
19. J. Lubliner, S. Oller, J. Oliver y E. Oñate, "A plastic damage model for non linear analysis of concrete", *Internal report, Paper submitted to: "Solids and structures"*, (1988).
20. J. Lubliner, "*Thermomechanics of deformable bodies*", Editado por Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, U.S.A., (1985).
21. J. Oliver y J.R. Fernandez Roure, "Análisis no lineal de estructuras bidimensionales de hormigón por el método de los elementos finitos", *II Simposium de Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería*, Eds. E. Oñate, B. Suárez, J. Miquel Canet, Vol. 1, pp. 447-463, Barcelona, (1986).
22. S. Oller, "Un modelo de "daño continuo" para materiales friccionales", *Tesis Doctoral*, Departamento de Estructuras, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España, (1988).
23. J.G. Rots, P. Nauta, G. Kusters y J. Blaauwendraad, "Smearred crack approach and fracture localization in concrete", *Heron*, Vol. 30, Delft, Netherlands, (1985).
24. J.C. Simo y J.M. Ju, "On continuum damage - elastoplasticity at finite strains: a computational framework", *Paper submitted to: "Computational Mechanics"*, (1987).
25. J.C. Simo y J.M. Ju, "Strain and stress based continuum damage model - Part I : Formulation", *Solids and Structures*, Vol. 23, no. 7, pp. 281-841, (1987).
26. State of the art report on: "Finite Element Analysis of Reinforced concrete", ASCE, (1982).
27. E. Tasuji, F. Slate y A. Nilson, "Stress-strain response and fracture of concrete in biaxial loading", *Journal ACI*, Vol. 75, no. 7, pp. 306-312, (1978).
28. O.C. Zienkiewicz, "*El método de los elementos finitos*", Edit. Reverté, Barcelona, (1982).
29. O.C. Zienkiewicz, C. Humpheson y R.W. Lewis, "Associated and non-associated viscoplasticity and plasticity in soil mechanics", *Géotechnique*, Vol. 25, no. 4, pp. 671-689, (1974).
30. S. Oller, J. Oliver, J. Lubliner y E. Oñate, "Un modelo constitutivo de daño plástico para materiales friccionales; Parte I: Variables fundamentales, Funciones de fluencia y

- potencial", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 4, no. 4, pp. 397-431(1988).
31. J. Oliver, S. Oller y E. Oñate, "Modelos elasto-plásticos para simulación numérica de procesos de fractura", *Métodos Numéricos Aplicados a la Mecánica de Fractura*, Editores J. Oliver, M. Elices, E. Oñate, M. Astiz, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, pp. 27-60, Barcelona, (1988).
  32. M. Arrea y A.R. Ingraffea, "Mixed mode crack propagation in mortar and concrete", *Report no. 81-13*, Cornell University, Department of Structural Engineering, Ithaca, New York.