

## MODELOS HIDRODINAMICOS EN CUENCAS FLUVIALES

PABLO MIGUEL JACOVKIS\*

*Estudio Gradowczyk y Asociados S.A.T.,  
Tres Sargentos 401 3° piso 1054 Buenos Aires,  
Argentina*

### RESUMEN

Los métodos implícitos de resolución numérica de las ecuaciones hiperbólicas casilineales de Saint-Venant de la hidrodinámica utilizados para analizar tramos de ríos o canales unidimensionales en régimen impermanente sobre fondo fijo pueden reducirse en cada paso de tiempo de cálculo (bajo la mayoría de los esquemas en diferencias finitas en uso) a la resolución de un sistema lineal  $Ax = b$ , donde  $A$  es una matriz banda. En este trabajo el análisis de tramos unidimensionales se generaliza a redes fluviales con estructura arborescente (tramos con afluentes, afluentes de afluentes, etc.) manteniendo la estructura de la matriz banda, con el consiguiente beneficio en tiempo y memoria de computadora.

### SUMMARY

The implicit methods for the numerical solution of the quasilinear hyperbolic equations of hydrodynamics (Saint-Venant equations) used to analyse reaches of one-dimensional rivers or channels over fixed beds (unsteady case) may be reduced, for each time step (under most finite differences schemes currently applied), to the solution of a linear system  $Ax = b$ , where  $A$  is a band matrix. In this paper is described the generalization of the analysis of one-dimensional reaches to fluvial networks with an arborescent structure (reaches with tributaries, tributaries of tributaries, etc.) maintaining the band matrix structure with the obvious benefits in computer run time and hard core.

### INTRODUCCION

El escurrimiento impermanente unidimensional de un fluido con superficie libre a lo largo de un canal o cauce fluvial no prismático de sección transversal de forma arbitraria sobre fondo fijo se describe aproximadamente mediante el sistema de ecuaciones diferenciales hiperbólicas casilineales de Saint-Venant:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{Q}{S} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{2gS^2} \right) + \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{Q|Q|}{D^2} = 0 \quad (1)$$

\* Parte de este trabajo fue realizado mientras el autor se desempeñaba en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.

Recibido: Diciembre 1986

Si el sistema diferencial (1), (2) fuera lineal, bajo ciertas condiciones bastante generales se puede asegurar la existencia de una solución del problema (1), (2), (5) de Cauchy, continuamente dependiente de la solución inicial, y la existencia de una solución del problema (1), (2), (5), (6) mixto, dando tantas condiciones de contorno en la frontera  $x = x_0$  cuantos autovalores *positivos* tenga la matriz  $A$  y tantas condiciones de contorno en la frontera  $x = x_L$  cuantos autovalores *negativos* tenga la matriz  $A$  (ver, por ejemplo, Godunov<sup>3</sup>). Dado que el sistema (1), (2) no es lineal, la existencia de una solución al problema de Cauchy o mixto no puede asegurarse a priori; la solución deberá ser una solución generalizada, con discontinuidades, valiendo también la condición sobre el signo de los autovalores (ver Rozdestvenskii y Janenko<sup>4</sup>). El hecho de que la solución tiene discontinuidades no es en general mencionado, pues normalmente los métodos numéricos más populares ignoran las discontinuidades, y éstas no son relevantes para las aproximaciones usualmente buscadas en modelización fluvial (con excepción, por supuesto, de modelizaciones de salto hidráulico y rotura brusca de presas, que usan métodos especiales).

La condición sobre el signo de los autovalores implica que si

$$\frac{Q}{S} > \sqrt{\frac{gS}{B}}$$

los dos autovalores son positivos, y es necesario dar dos condiciones de contorno "aguas arriba" en  $x = x_0$  (suponemos entonces  $Q > 0$ ); si

$$\frac{Q}{S} < \sqrt{\frac{gS}{B}}$$

será necesario dar una condición de contorno aguas arriba y otra "aguas abajo" en  $x = x_L$ . Ambos casos indican, respectivamente, un régimen del río supercrítico o subcrítico. A los efectos prácticos, es usual que  $F_i(Q, Z) \equiv Q$  o  $F_i(Q, Z) \equiv Z$ ; por otra parte, este trabajo analiza exclusivamente el caso subcrítico.

Existen diversos métodos para resolver numéricamente este problema en una región acotada  $\Omega = [x_0, x_L] \times [t_0, T]$ . Una reseña de métodos en diferencias finitas y de características aplicables a este problema puede verse en Liggett y Cunge<sup>5</sup>.

Sea ahora una grilla en la región  $\Omega_0 = [0, x_L] \times [0, T]$ , de paso espacial  $\Delta x$  y de paso temporal  $\Delta t$ , o sea la grilla incluye los puntos de discretización  $(x_i, t^n)$ , con  $x_i = i\Delta x$  y  $t^n = n\Delta t$ . Una aproximación linealizada en diferencias finitas al sistema (1), (2), (3) o (4) con dos niveles temporales (ver, por ejemplo, Richtmyer y Morton<sup>6</sup>) puede escribirse vectorialmente como

$$B_1^{n+1} w^{n+1} = B_0^n w^n + c^n$$

donde  $B_0^n = B_0^n(\Delta t, \Delta x)$  y  $B_1^{n+1} = B_1^{n+1}(\Delta t, \Delta x)$  indican operadores lineales en diferencias finitas que reemplazan a las derivadas.

$w^{n+1}$  indica el vector de valores desconocidos, por ejemplo

$$\{Z_0^{n+1}, Q_1^{n+1}, Z_1^{n+1}, \dots, Q_{L-1}^{n+1}, Z_{L-1}^{n+1}, Q_L^{n+1}\}$$

(si las condiciones de contorno son  $g_1(t) = Q(0, t)$  y  $g_2(t) = Z(x_{L,t})$ ).  $w^n$  indica el vector de valores conocidos en el tiempo anterior  $\{Z_0^n, Q_1^n, \dots, Z_{L-1}^n, Q_L^n\}$  y  $c^n$  es un vector conocido obtenido a partir de las condiciones de contorno y del término de resistencia. La solución se obtiene secuencialmente a partir de la condición inicial conocida. Si  $B_1^{n+1} = I$  (matriz unidad) para todos los intervalos de tiempo  $t^n$ , se tiene un esquema numérico explícito; de lo contrario, se tiene un esquema implícito, y en cada intervalo de tiempo es necesario resolver un sistema lineal

$$B_1^{n+1} w^{n+1} = d^n \quad (7)$$

con  $d^n$  conocido. Dado que usualmente los esquemas implícitos garantizan estabilidad numérica usando intervalos temporales  $\Delta t$  significativamente mayores que los esquemas explícitos (en relación con un mismo  $\Delta x$ ) son preferidos a éstos pese a que requieren programas computacionales más complicados.

Usualmente, cuando se analizan tramos unidimensionales de ríos, los esquemas numéricos implícitos para resolver (7) conducen a una matriz  $B_1^{n+1}$  en forma de matriz banda, donde el ancho de la banda depende del número de puntos adyacentes que se toman para la discretización numérica. Esto permite resolver el sistema (7) en cada paso de tiempo usando un algoritmo de resolución de sistemas para matrices banda, con el consiguiente ahorro en tiempo de computadora y memoria central, dado que para matrices banda tanto la memoria necesaria como el número de operaciones aumentan linealmente con el número de puntos de discretización sobre el eje  $x$  con una constante de proporcionalidad dependiente del ancho de la banda. Una descripción amplia y general de algoritmos numéricos para resolver sistemas de ecuaciones con matrices banda puede verse en Rosenberg<sup>7</sup>.

Mediante métodos numéricos que discretizan las ecuaciones de Saint-Venant usando propiedades de matrices banda se han podido modelizar matemáticamente en forma precisa y eficiente numerosos tramos de ríos y canales naturales. Es importante analizar, por consiguiente, si la estructura de matriz banda se mantiene al generalizar la modelización a redes fluviales (unidimensionales) más complejas, como ríos con afluentes, deltas, etc. En este trabajo se muestra cómo se puede mantener el esquema de matriz bidiagonal, de rápida resolución, para redes fluviales con estructura arborescente, y se indican resultados numéricos obtenidos en modelizaciones realizadas con el esquema propuesto.

## MODELO DE DESEMBOCADURA DE AFLUENTE

Para generalizar el modelo hidrodinámico descripto por las ecuaciones (1), (2), con condiciones iniciales (5) y condiciones de contorno (6), a cuencas fluviales, o sea a redes fluviales con estructura arborescente, es necesario analizar las ecuaciones que reflejan la modelización de la confluencia de dos tramos fluviales. Stoker<sup>8</sup> modelizó la confluencia de dos tramos en un punto a partir del cual continúa uno solo dividiendo dicha confluencia en tres secciones transversales: dos aguas arriba de la confluencia y una aguas abajo (ver Figura 3). Las ecuaciones de compatibilidad de Stoker son la ecuación de conservación de la masa

$$Q_i + Q_j = Q_k \quad (8)$$

y las ecuaciones que relacionan las cotas en las secciones transversales

$$Z_i = Z_j = Z_k \quad (9)$$

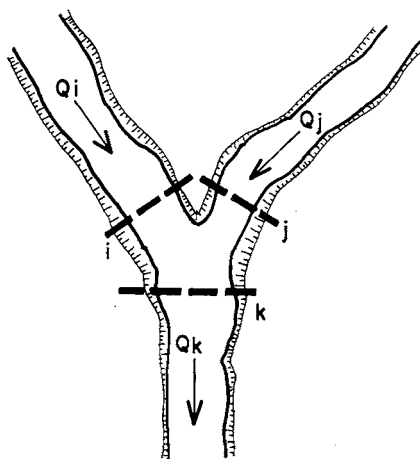


Figura 3. Confluencia de dos cauces fluviales.

Los puntos  $i$ ,  $j$  y  $k$  representan los extremos aguas abajo de los tramos que finalizan en la confluencia y el extremo aguas arriba del tramo resultante, respectivamente. El mismo análisis vale para una bifurcación, cambiando el signo de los caudales.

La condición de compatibilidad de Stoker (8) es obvia; la condición (9) es una aproximación a las condiciones más precisas

$$\begin{aligned} Z_k - Z_i &= \frac{(U_i + U_k) \cdot (U_i - U_k)}{(2g)} \\ Z_k - Z_j &= \frac{(U_j + U_k) \cdot (U_j - U_k)}{(2g)} \end{aligned} \quad (10)$$

donde  $U_k = \frac{Q_k}{S_k}$ ,  $U_i = \frac{Q_i}{S_i}$ ,  $U_j = \frac{Q_j}{S_j}$  indican las velocidades medias del escurrimiento en las secciones transversales  $k$ ,  $i$ ,  $j$ , respectivamente. Estas condiciones se deducen directamente de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (1), como puede verse en Li et al<sup>9</sup>. Usualmente los términos de la derecha en (10) son despreciables, y se obtienen así las condiciones de compatibilidad de Stoker (9).

El propio Stoker propuso en la referencia citada, un esquema explícito de resolución del modelo, que aplicó a la desembocadura del río Ohio en el Mississippi. Posteriormente, se usaron otros esquemas para modelizar, con las ecuaciones de compatibilidad de Stoker, sistemas fluviales con puntos de afluencia y efluencia, entre los cuales figuran no solamente modelos de cuenca sino también sistemas deltaicos cerrados. Así,

Quinn y Wylie<sup>10</sup> y Fread<sup>11</sup> consideraron el esquema de un río principal con un único afluente —el esquema Y simple— usando un algoritmo de Newton-Raphson para obtener iterativamente la cota  $Z$  y el caudal  $Q$  en el punto de confluencia. Gradowczyk y Jacovkis<sup>12</sup> modelizaron una red fluvial deltaica compleja (el delta del río Paraná) resolviendo el sistema lineal resultante por un método de Gauss con algunas simplificaciones. Wood, Harley y Perkins<sup>13</sup> consideraron una matriz de coeficientes externos para los bordes y las confluencias, y modelizaron el río James en Estados Unidos, el estuario de Puerto Cork, en Irlanda, y la cuenca del río Bayamón en Puerto Rico. Joliffe<sup>14</sup> propuso una adaptación del método generalizado de Newton-Raphson.

En todos los casos mencionados parte del problema numérico consiste en resolver un sistema lineal donde la matriz es rala pero no banda. Por consiguiente, resulta muy deseable, por razones no solamente de tiempo y memoria de computadora sino también de programación, poder usar un esquema directo de solución de sistemas lineales con matriz banda angosta. Se verá a continuación que esto se puede hacer para estructuras fluviales arborescentes.

### ALGORITMO DE PREPARACION DE MATRIZ BANDA

Sea un esquema en diferencias finitas implícito tal que en la capa  $t^{n+1}$  intervengan en cada ecuación en diferencias dos puntos contiguos  $x_i, x_{i+1}$  separadas por un intervalo espacial  $\Delta x_i$ , es decir, que cada par de ecuaciones discretizadas sea de la forma

$$A_{1i}Q_i + A_{2i}Z_i + A_{3i}Q_{i+1} + A_{4i}Z_{i+1} = A_{5i} \quad (11.i)$$

$$B_{1i}Q_i + B_{2i}Z_i + B_{3i}Q_{i+1} + B_{4i}Z_{i+1} = B_{5i} \quad (12.i)$$

donde (11.i) y (12.i) indican una discretización de las dos ecuaciones (1), (2), donde se ha suprimido el superíndice  $n+1$  de las incógnitas  $Q_i^{n+1}$  y  $Z_i^{n+1}$ . Los  $A_{ki}$  y  $B_{ki}$ ,  $1 \leq k \leq 5$ , son coeficientes deducidos según la discretización empleada.

Es fácil observar que para tramos unidimensionales, en que simplemente se tiene el par de ecuaciones (11.i), (12.i) para  $0 \leq i < L$  (con un término menos —pues ya es conocido— en el miembro de la izquierda para (11.0) y (12.0) y para (11. $L-1$ ) y (12. $L-1$ )) queda naturalmente planteada una matriz banda. Interesa ver si, añadiendo las ecuaciones de compatibilidad (8), (9), se puede mantener la estructura de matriz banda. Para ello se incluyen los tres puntos en que se divide cada confluencia (ver Figura 3) como puntos de discretización de la grilla. La numeración de los puntos es la siguiente: los nodos de un tramo en el cual desemboca otro tienen siempre numeración consecutiva y posterior a la del tramo afluente, como se indica en la Figura 4. Es decir, primero se numeran los afluentes, después los ríos en los cuales desembocan estos afluentes y así sucesivamente.

Tomemos ahora un intervalo genérico de discretización  $(i, i+1)$ . Si se resta (12.i) multiplicado por  $\frac{A_{4i}}{B_{4i}}$  de (11.i) se obtiene

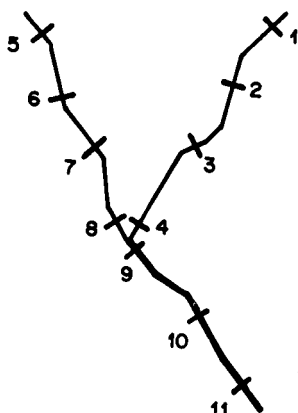


Figura 4. Numeración de nodos.

$$C_{1i}Q_i + C_{2i}Z_i + C_{3i}Q_{i+1} = C_{4i} \quad (13.i)$$

Restando (13.i) multiplicada por  $\frac{B_{1i}}{C_{1i}}$  de (12.i) queda

$$D_{1i}Z_i + D_{2i}Q_{i+1} + D_{3i}Z_{i+1} = D_{4i} \quad (14.i)$$

Sea ahora un tramo inicial  $(x_i, x_{i+1})$  donde en  $x_i$  (extremo aguas arriba) se prescribe la condición de contorno:

a) Condición de contorno dada aguas arriba del tramo:  $Q_i = \text{dato}$

En este caso, dividiendo convenientemente se obtiene:

$$Z_i - E_{1i}Q_{i+1} = E_{2i} \quad (15.i)$$

donde

$$E_{1i} = \frac{-C_{3i}}{C_{2i}}$$

$$E_{2i} = \frac{(C_{4i} - C_{1i}Q_i)}{C_{2i}}$$

Restando (15.i) mutiplicada por  $D_{1i}$  de (14.i) queda, dividiendo convenientemente

$$Q_{i+1} - F_{1i}Z_{i+1} = F_{2i} \quad (16.i)$$

Restando (16.i) multiplicada por  $C_{1,i+1}$  de (13.i + 1) queda, dividiendo convenientemente

$$Z_{i+1} - E_{1,i+1}Q_{i+2} = E_{2,i+1} \quad (15.i + 1)$$

con lo cual se forman iterativamente las ecuaciones (15.j) y (16.j)

$$Z_j - E_{1j}Q_{j+1} = E_{2j} \quad (15.j)$$

$$Q_{j+1} - F_{1j}Z_{j+1} = F_{2j} \quad (16.j)$$

esta última restando (15.j) multiplicada por  $D_{1j}$  de (14.j) y dividiendo convenientemente. Este par de ecuaciones se desarrolla para  $i \leq j < n$ , donde  $n$  indica punto de desembocadura del tramo en otro tramo o punto extremo aguas abajo del canal principal.

b) Condición de contorno dada aguas arriba del tramo:  $Z_i = \text{dato}$   
En este caso se obtiene

$$Q_i - E_{1i}Q_{i+1} = E_{2i}$$

$$Q_{i+1} - F_{1i}Z_{i+1} = F_{2i}$$

donde

$$\begin{aligned} E_{1i} &= \frac{-C_{3i}}{C_{1i}} \\ E_{2i} &= \frac{(C_{4i} - C_{2i}Z_i)}{C_{1i}} \\ F_{1i} &= \frac{-D_{3i}}{D_{2i}} \\ F_{2i} &= \frac{(D_{4i} - D_{1i}Z_i)}{D_{2i}} \end{aligned}$$

y a partir de allí se procede análogamente a como se procedió en a) para  $1 \leq j < n$ .

c) Desembocadura de afluente

Sea  $m - 1$  el punto de discretización del tramo principal "inmediatamente" aguas arriba de la desembocadura,  $m$  el punto "inmediatamente" aguas abajo y  $l$  el punto extremo correspondiente a la desembocadura del del tramo afluente.

Se tiene (ver Figura 5)

$$Q_l - F_{1,l-1}Z_l = F_{2,l-1} \quad (16.l-1)$$

$$Q_{m-1} - F_{1,m-2}Z_{m-1} = F_{2,m-2} \quad (16m-2)$$

o sea (dado que  $Z_m = Z_l = Z_{m-1}$  y  $Q_{m-1} + Q_l = Q_m$ )

$$Q_m - (F_{1,l-1} + F_{1,m-2})Z_m = F_{2,l-1} + F_{2,m-2}$$

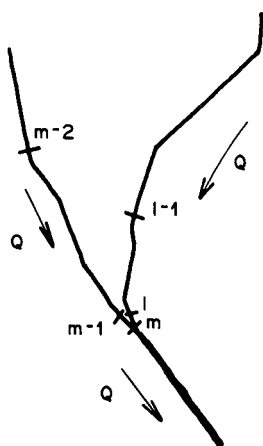


Figura 5. Nodos intervinientes en el algoritmo para una confluencia.

con lo cual queda

$$Q_m - F_{1,m-1}Z_m = F_{2,m-1}$$

siendo

$$F_{1,m-1} = F_{1,l-1} + F_{1,m-2}$$

$$F_{2,m-1} = F_{2,l-1} + F_{2,m-2}$$

que restando de (13.m) (multiplicada por  $C_{1m}$ ) da, dividiendo convenientemente

$$Z_m - E_{1m}Q_{m+1} = E_{2m} \quad (15.m)$$

y así se sigue planteando las ecuaciones. Si la numeración de los puntos de discretización de los afluentes es siempre *anterior* a la de los cauces en los cuales desembocan, se observa que si  $k$  es el punto extremo aguas abajo del esquema arborescente (o sea el último punto en la numeración adoptada), se tienen las siguientes alternativas:

d) Condición de contorno dada aguas abajo:  $Q_k = \text{dato}$

Entonces 
$$Z_k = \frac{(Q_k - F_{2,k-1})}{F_{1,k-1}}$$

e) Condición de contorno dada aguas abajo:  $Z_k = \text{dato}$

Entonces 
$$Q_k = F_{2,k-1} + F_{1,k-1}Z_k$$

El algoritmo de resolución del sistema lineal es entonces el siguiente: conocidos los valores de  $Z_k$  y  $Q_k$  en el extremo aguas abajo, se retrocede, calculando las incógnitas por medio de las ecuaciones (15), (16) hasta llegar a un punto  $m$  con desembocadura de afluente. En este caso, al tener  $Z_m$  se obtiene  $Z_{m-1} = Z_m$  y  $Q_{m-1}$  usando (16.m-2) y se sigue retrocediendo hasta llegar a alguna otra desembocadura de afluente (en cuyo caso



se procede de igual modo) o al extremo aguas arriba. Se sigue retrocediendo entonces con los afluentes, a partir de que se conoce la cota en los puntos de desembocadura, y se repite el procedimiento con los afluentes de afluentes, etc.

Obsérvese que si se trata de un tramo único sin afluentes el esquema presentado es simplemente el método del "barrido doble" para resolver una matriz previamente tridiagonalizada, bien conocido en la literatura (ver por ejemplo Gelfand y Lokutsievsky<sup>15</sup>). El algoritmo presentado adecua el método del barrido doble a la estructura arborescente.

El esquema propuesto permite considerar sin dificultades condiciones de contorno interiores, como inyecciones laterales de caudal, o condiciones de contorno dadas por relaciones funcionales entre  $Z$  y  $Q$ , como ya se ha hecho para tramos unidimensionales (ver, por ejemplo, Liggett y Cunge<sup>5</sup>). Cabe observar que las condiciones iniciales deben respetar las ecuaciones de Stoker de compatibilidad (8), (9), para evitar inconsistencias.

## REDES FLUVIALES COMPLEJAS

Cuando se tiene un río con un punto de efluencia, es decir, un cauce que se ramifica en dos (o sea el escurrimiento del agua es en sentido contrario al antes descripto) y luego se subramifica, se puede aplicar el algoritmo anterior con una numeración de los puntos de discretización en sentido contrario a la antes indicada (pues esto equivale a considerar una estructura de afluentes con caudales negativos). Pero si la red fluvial considerada tiene bifurcaciones que se cierran, o sea ramas que son efluentes de un cauce y afluente del mismo (representando, por ejemplo, islas en medio de un cauce, como indica la Figura 6) o de algún otro tramo, no se puede usar el algoritmo anterior: es necesario inevitablemente encontrar un procedimiento para plantear las ecuaciones (15) y (16) a partir de la bifurcación en las dos ramas. Pero de las ecuaciones (15. $n-2$ ), (16. $n-2$ ), (13. $n$ ), (14. $n$ ), (13. $j$ ), (14. $j$ ) no se puede obtener, para seguir la iteración, una ecuación

$$Z_n - E_{1n}Q_{n+1} = E_{2n} \quad \text{o}$$

$$Q_n - F_{1,n-1}Z_n = F_{2,n-1}$$

eliminando  $Q_j$ , y seguir así a lo largo de la rama bifurcada.

El sistema lineal discretizado (11), (12), con las ecuaciones de compatibilidad (8), (9), origina en el caso de redes fluviales complejas un sistema lineal a resolver dado por la ecuación (7), donde en este caso la matriz  $B_1^{n+1}$  es una matriz rala no banda (la ubicación de los elementos no nulos de la misma depende de la topología de la red fluvial considerada. Cuando se intenta modelizar un delta como el del río Paraná, por ejemplo, esa topología puede ser extremadamente complicada). Para matrices ralas suele sugerirse reemplazar los métodos directos de solución de los correspondientes problemas lineales por métodos iterativos, tipo Jacobi o Gauss-Seidel, que tienen la ventaja de no destruir la rareza de la matriz (los elementos no nulos son los mismos en cada iteración y su ubicación no cambia en cada paso de tiempo de cálculo) y que permiten utilizar como aproximación inicial en el instante  $t^{n+1}$  los valores obtenidos en el instante  $t^n$ . Desgraciadamente estos métodos no convergen necesariamente

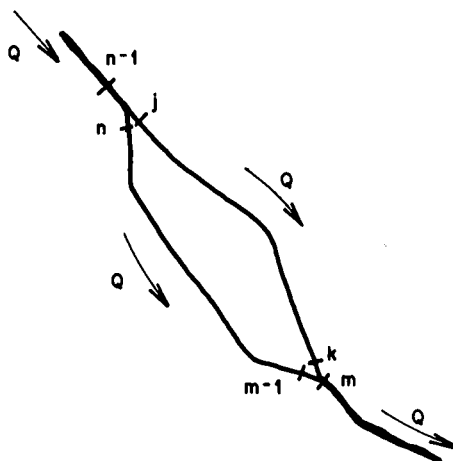


Figura 6. Red fluvial deltaica simplificada.

(experimentos realizados por este autor en 1972 para la modelización del delta del río Paraná usando el esquema de Preissmann descrito en Liggett y Cunge<sup>5</sup> fracasaron invariablemente por diverger el método iterativo). Para dicha modelización se usó en la inversión de la matriz, finalmente, un método de Gauss ad-hoc mucho más lento que los esquemas de matriz banda (ver Gradowczyk y Jacovkis<sup>12</sup>) con el que se obtuvieron resultados plenamente satisfactorios.

### COMPARACION CON RESULTADOS ANALITICOS

Antes de la implementación computacional completa del método utilizado se efectuó una validación del esquema aplicándolo a un sistema diferencial hiperbólico simplificado clásico, y comparando los resultados numéricos obtenidos con los resultados analíticos obtenidos explícitamente a partir de condiciones iniciales y de contorno dadas. El esquema simplificado utilizado es el tradicional sistema de primer orden hiperbólico lineal homogéneo con coeficientes constantes

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

con condiciones de compatibilidad

$$h_i = h_j = h_k \quad u_i + u_j = u_k \quad (18)$$

en una confluencia  $(i, j, k)$  como la de la Figura 3. Si se supone, con las simplificaciones habituales, un canal con sección transversal rectangular de ancho unitario constante,

tanto en los afluentes como a partir de la confluencia, éstas son las condiciones obtenidas a partir de las de Stoker.

Sea ahora el esquema arborescente (17), (18) correspondiente a la Figura 7, discretizado con la numeración allí indicada. La ubicación de los puntos de discretización según la coordenada espacial, o progresiva, es la dada en la Tabla I. Las condiciones iniciales son:

En los tramos 1-4 y 13-19:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 10 + \cos x \\ h(x, 0) &= 6 + \sin x \end{aligned} \quad (19)$$

En los tramos 5-8 y 9-12:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 5 + 0.5 \cos x \\ h(x, 0) &= 6 + 0.5 \sin x \end{aligned} \quad (20)$$

En el tramo 20-35:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 20 + 2 \cos x \\ h(x, 0) &= 6 + 2 \sin x \end{aligned} \quad (21)$$

Las condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned} u(x_1, t) &= 10 \\ u(x_5, t) &= 5 \\ u(x_9, t) &= 5 \\ h(x_{35}, t) &= 6 + 2(\cos t + \sin t) \end{aligned} \quad (22)$$

La solución analítica del sistema diferencial (17), (18), con condiciones iniciales (19), (20), (21) y condiciones de contorno (22) es:

En los tramos 1-4 y 13-19:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 10 + (\cos t - \sin t) \cos x \\ h(x, t) &= 6 + (\cos t + \sin t) \sin x \end{aligned}$$

En los tramos 5-8 y 9-12:

$$Au(x, t) = 5 + 0.5(\cos t - \sin t) \cos x$$

$$h(x, t) = 6 + 0.5(\cos t + \sin t) \sin x$$

En el tramo 20-35:

$$u(x, t) = 20 + 2(\cos t - \sin t) \cos x$$

$$h(x, t) = 6 + 2(\cos t + \sin t) \sin x$$

Esta solución analítica se comparó con la solución obtenida aplicando el algoritmo antes desarrollado al esquema numérico de Preissmann (ver Liggett y Cunge<sup>5</sup>, donde está explicado en forma muy detallada). En esencia la discretización de Preissmann para una función genérica  $f(x, t)$  y sus derivadas es la siguiente:

$$f \sim \frac{\theta}{2}(f_{i+1}^{n+1} + f_i^{n+1}) + \frac{(1-\theta)}{2}(f_{i+1}^n + f_i^n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \sim \frac{1}{2\Delta t}(f_{i+1}^{n+1} + f_i^{n+1} - f_{i+1}^n - f_i^n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \sim \frac{\theta}{\Delta x}(f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}) + \frac{(1-\theta)}{\Delta x}(f_{i+1}^n - f_i^n)$$

Aplicado al sistema diferencial hiperbólico (17) se prueba (Cunge<sup>16</sup>) que debe ser  $\theta \geq 1/2$  para que el método sea estable. La aproximación es de primer orden para  $\theta \geq 1/2$  y de segundo orden para  $\theta = 1/2$ , pero en este caso pueden aparecer oscilaciones parásitas. Experimentalmente se ha comprobado que  $\theta \geq 1/2$  garantiza en general la estabilidad de las ecuaciones casilineales de Saint-Venant (a veces es necesario tomar "coeficientes de implicitud"  $\theta$  mayor que  $1/2$ , por ejemplo  $2/3$  o mayor). Pese a ser de primer orden, es tal vez el esquema en diferencias finitas implícito más usado en hidráulica fluvial para escurrimientos subcríticos, entre otros motivos debido a que la precisión de las series de datos hidrométricos suele ser discutible (en particular, en países como Argentina con registros precarios y discontinuos) por lo cual en muchos casos no vale la pena el esfuerzo de implementar esquemas más sofisticados cuando los datos están ya sujetos a marcados errores de medición.

El algoritmo aquí propuesto, con el método de Preissmann, se programó en PASCAL en una computadora personal; los resultados obtenidos para distintas corridas demuestran una buena aproximación a los resultados analíticos, similar a la obtenida para tramos unidimensionales (ver, por ejemplo, Cunge<sup>16</sup>).

En las Figuras 8, 9 y 10 (comparación de  $u$  analíticos y calculados para los puntos de discretización 6, 15 y 34, respectivamente), se pueden ver los resultados obtenidos. Se usó  $\theta = 0.55$ . En particular, el método de Preissmann aplicado a tramos

Punto	Coordenada espacial
1	$3\pi/2$
2	$5\pi/3$
3	$11\pi/6$
4	$2\pi$
5	$\pi/2$
6	$2\pi/3$
7	$5\pi/6$
8	$\pi$
9	$\pi/2$
10	$2\pi/3$
11	$5\pi/6$
12	$\pi$
13	$\pi$
14	$7\pi/6$
15	$4\pi/3$
16	$9\pi/6$
17	$5\pi/3$
18	$11\pi/6$
19	$2\pi$
20	$2\pi$
21	$13\pi/6$
22	$7\pi/3$
23	$15\pi/6$
24	$8\pi/3$
25	$17\pi/6$
26	$3\pi$
27	$19\pi/6$
28	$10\pi/3$
29	$7\pi/2$
30	$11\pi/3$
31	$23\pi/6$
32	$4\pi$
33	$25\pi/6$
34	$13\pi/3$
35	$9\pi/2$

TABLA I. Coordenadas de los puntos de discretización del modelo simplificado.

unidimensionales con  $\theta = 1/2$  y  $\Delta t = \Delta x$  debe dar resultados exactamente iguales (para la precisión de la representación digital de los números reales) a los resultados analíticos, lo cual se dio también en nuestro ejemplo de la Figura 7 y discretización de la Tabla I. Se tomó  $\Delta t = \Delta x = \frac{\pi}{6}$ . En la Tabla II se indican los resultados para distintos punto de discretización, que coinciden exactamente hasta el centésimo.

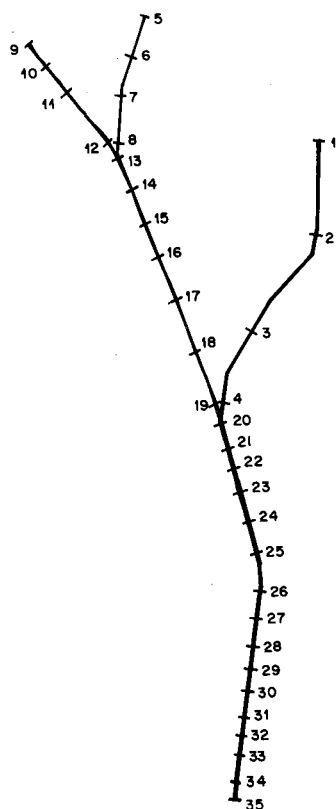


Figura 7. Red de comparación con solución teórica.

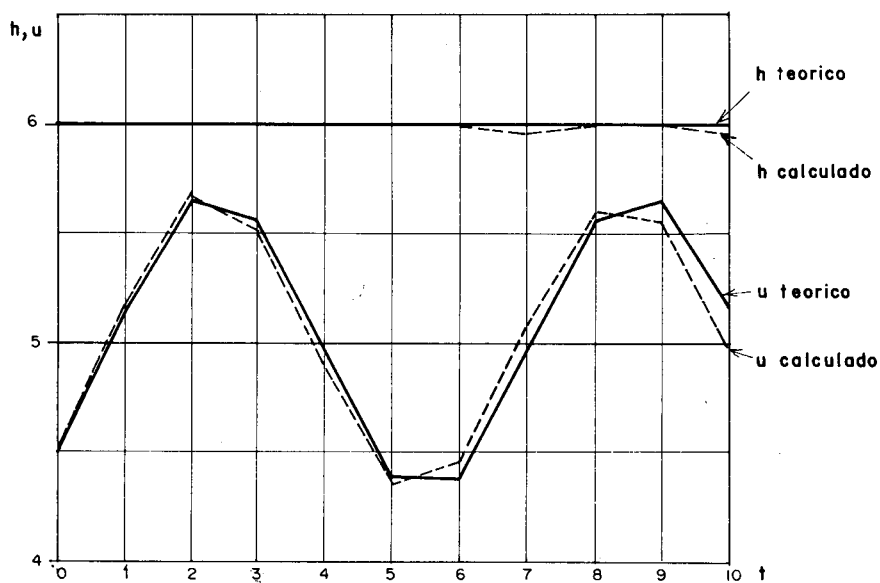


Figura 8. Comparación de  $h$  y  $u$  en el nodo 6.

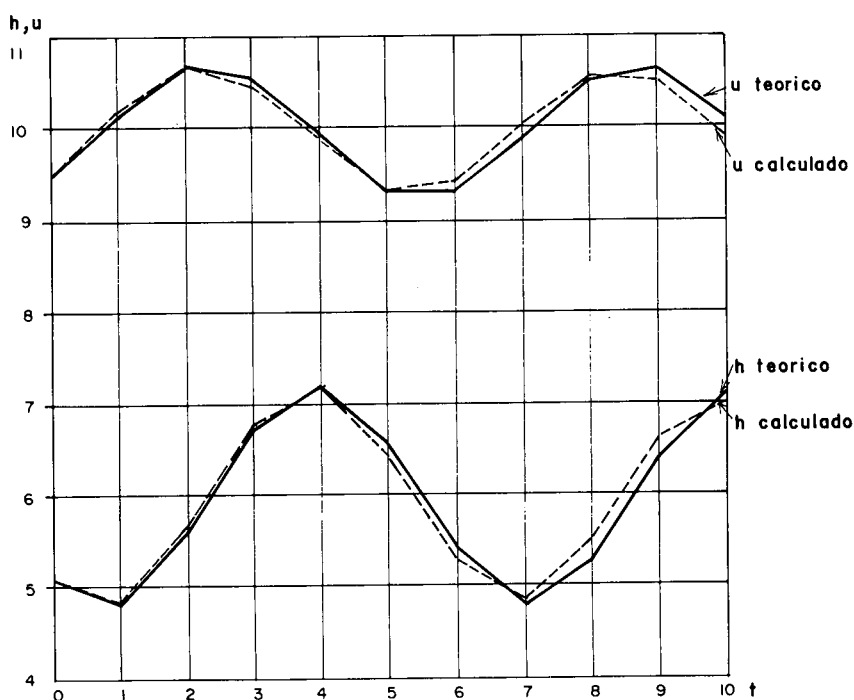


Figura 9. Comparación de  $h$  y  $u$  en el nodo 15.

## IMPLEMENTACION COMPUTACIONAL Y APLICACIONES

Sobre la base del análisis antes desarrollado se programó un modelo computacional usando el esquema numérico implícito de Preissmann para las ecuaciones de Saint-Venant completas. El modelo está implementado en dos versiones, una versión en PASCAL, para computadora personal, con la cual se hicieron pruebas numéricas, que se detallan a continuación, y una versión en FORTRAN IV, en modalidad "batch", operativo y en producción para modelizaciones complejas de casos reales, que incluye programas auxiliares para optimizar el manejo de datos (áreas mojadas, coeficientes de conducción, condiciones iniciales, de contorno, y de comparación) y el ajuste y validación con series históricas.

La versión en PASCAL se usó para validar el modelo mediante una prueba de consistencia y experimentos, algunos de los cuales se indican a continuación. El modelo usado es el de la Figura 11, con la discretización allá indicada. Los datos del modelo se indican en la Tabla III. Las secciones transversales son trapezoidales, y se indican los valores de anchos, áreas y coeficientes de conducción para la cota de fondo y para una cota de 10 m por encima de la cota de fondo. Citamos los siguientes experimentos realizados:

a) Consistencia del algoritmo: se realizaron dos corridas de computadora. Las condiciones iniciales de ambas fueron las indicadas en la Tabla IV.

En la primera corrida se tomó el caudal como condición de contorno aguas arriba y cota como condición de contorno aguas abajo. En la segunda corrida, las cotas

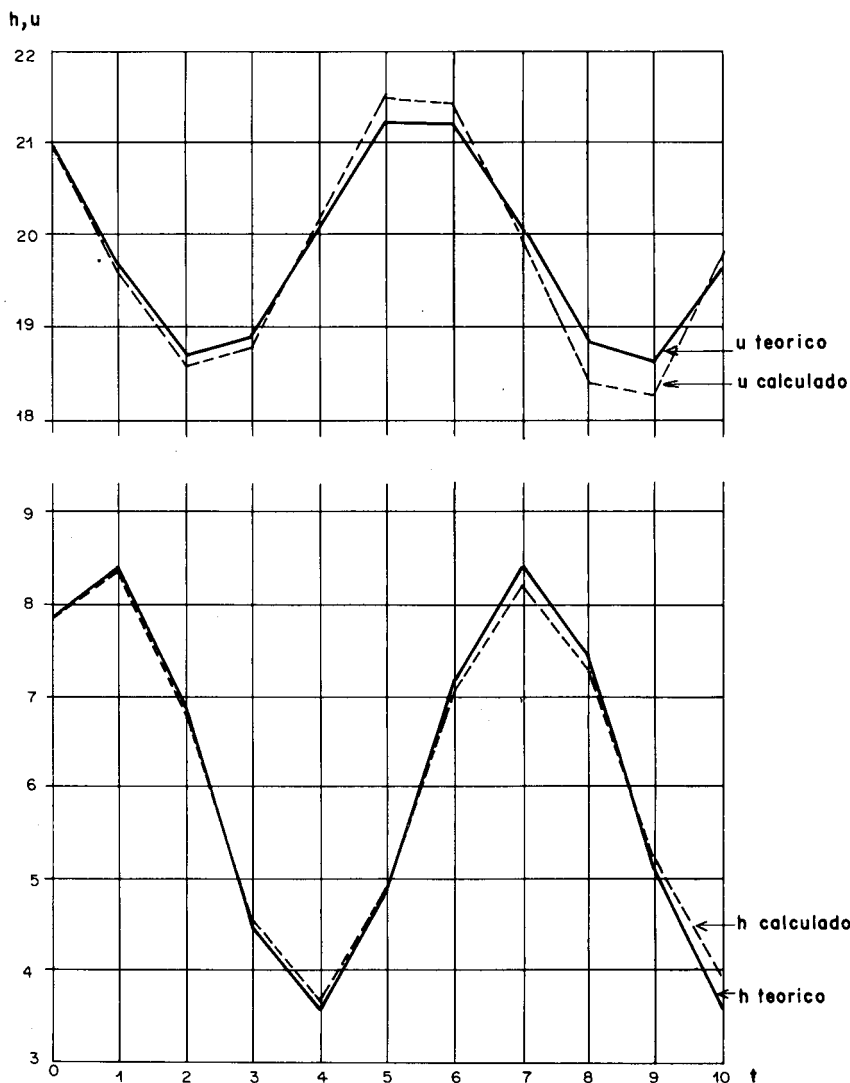


Figura 10. Comparación de  $h$  y  $u$  en el nodo 34.

obtenidas aguas arriba y los caudales obtenidos aguas abajo en la primera corrida se tomaron como condiciones de contorno. Los resultados obtenidos en las dos corridas fueron coincidentes, lo cual garantiza la consistencia de los mismos. Las condiciones de contorno corresponden a una estabilización, según lo que se indica en la Tabla V. Se usó  $\Delta t =$  dos horas,  $\theta = 0.85$ . La estabilización fue muy rápida en ambos casos.

b) Simulación de marea: para las mismas condiciones iniciales de las corridas anteriores se consideró un caudal constante aguas arriba y una marea sinusoidal aguas abajo, con  $\theta = 0.85$ . En la Tabla VI puede observarse la influencia de la marea hacia aguas arriba: se ha atenuado considerablemente en la confluencia; se puede observar también que al comenzar a subir la marea el caudal disminuye y al comenzar a bajar la marea aumenta, reproduciendo un fenómeno natural (para caudal aguas arriba



Tiempo	Punto 6		Punto 15		Punto 27		Punto 34	
	<i>h</i>	<i>u</i>	<i>h</i>	<i>u</i>	<i>h</i>	<i>u</i>	<i>h</i>	<i>u</i>
0	6.43	4.75	6.50	9.50	5.00	18.27	7.73	21.00
$\Pi/3$	6.59	5.09	4.82	10.18	4.63	20.63	8.37	19.63
$2\Pi/3$	6.16	5.34	5.68	10.68	5.63	22.37	6.63	18.63
$\Pi$	5.57	5.25	7.18	10.18	7.37	20.63	3.63	19.63

TABLA II. *h* y *u* analíticos y numéricos en distintos puntos de discretización para  $\theta = 1/2$  y  $\Delta t = \Delta x$ .

Punto	Coordenada espacial <i>x</i> (km)	Cotas (m)	Ancho (m)	Area (m <sup>2</sup> )	Coefficientes de conducción (m <sup>3</sup> /s)
1	0	99	20	0	0
		109	40	300	6186
2	1	97	20	0	0
		107	40	300	6186
3	2	95	20	0	0
		105	40	300	6186
4	3	93	20	0	0
		103	40	300	6186
5	0	98	100	0	0
		108	120	1100	16500
6	1	97	100	0	0
		107	120	1100	16500
7	2	96	100	0	0
		106	120	1100	16500
8	3	95	100	0	0
		105	120	1100	16500
9	4	94	100	0	0
		104	120	1100	16500
10	5	93	100	0	0
		103	120	1100	16500
11	5	93	120	0	0
		103	140	1300	25000
12	6	92	120	0	0
		102	140	1300	25000
13	7	91	120	0	0
		101	140	1300	25000
14	8	90	120	0	0
		100	140	1300	25000

TABLA III. Datos del modelo de prueba.

Punto	$Q(\text{m}^3/\text{s})$	$Z \text{ (m)}$
1	310	112.50
2	310	110.00
3	310	107.50
4	310	105.00
5	540	110.90
6	540	109.90
7	540	108.70
8	540	107.50
9	540	106.20
10	540	105.00
11	850	105.00
12	850	103.50
13	850	101.90
14	850	100.00

TABLA IV. Condiciones iniciales de corrida de consistencia.

Punto	Corrida 1				Corrida 2			
	$t = 24 \text{ horas}$		$t = 12 \text{ horas}$		$t = 24 \text{ horas}$		$t = 12 \text{ horas}$	
	$Q$ ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	$Z$ (m)	$Q$ ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	$Z$ (m)	$Q$ ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	$Z$ (m)	$Q$ ( $\text{m}^3/\text{s}$ )	$Z$ (m)
1	310	111.23	310	111.23	310	111.23	310	111.23
2	310	109.09	310	110.09	310	109.09	310	109.09
3	310	106.88	310	106.88	310	106.88	310	106.88
4	310	104.56	310	104.56	310	104.56	310	104.56
5	540	110.25	540	110.25	540	110.25	540	110.25
6	540	109.16	540	109.16	540	109.16	540	109.16
7	540	108.05	540	108.05	540	108.05	540	108.05
8	540	106.92	540	106.92	540	106.92	540	106.92
9	539	105.76	540	105.75	540	105.76	540	105.76
10	539	104.56	540	104.56	539	104.56	540	104.56
11	849	104.56	850	104.56	849	104.56	850	104.56
12	849	103.18	850	103.18	849	103.18	850	103.19
13	849	101.69	850	101.69	849	101.69	850	101.70
14	849	100.00	850	100.00	849	100.00	850	100.01

TABLA V. Consistencia de corridas de estabilización.

Tiempo (hs)	Punto de discretización							
	2		6		10		14	
	$Q$ (m <sup>3</sup> /s)	$Z$ (m)	$Q$ (m <sup>3</sup> /s)	$Z$ (m)	$Q$ (m <sup>3</sup> /s)	$Z$ (m)	$Q$ (m <sup>3</sup> /s)	$Z$ (m)
0	310	109.09	540	109.16	540	104.56	850	100.00
2	309	109.26	538	109.28	521	104.90	784	101.00
4	310	109.36	538	109.38	527	105.19	809	101.73
6	309	109.47	538	109.50	527	105.39	822	102.00
8	310	109.42	541	109.49	544	105.33	869	101.73
10	311	109.31	541	109.42	554	105.07	895	101.00
12	311	109.14	543	109.27	560	104.69	913	100.00
14	311	109.01	542	109.14	556	104.36	903	99.00
16	310	108.91	542	109.03	553	104.12	887	98.27
18	310	108.88	541	108.97	545	104.03	862	98.00
20	310	108.88	540	108.95	540	104.04	842	98.27
22	310	108.94	539	108.99	533	104.18	820	99.00
24	309	109.05	538	109.08	527	104.46	801	100.00
26	309	109.21	538	109.22	521	104.83	790	101.00
28	309	109.36	538	109.37	521	105.18	798	101.73
30	310	109.45	538	109.48	529	105.37	826	102.00
32	310	109.43	540	109.49	542	105.33	865	101.73
34	311	109.31	542	109.41	553	105.06	897	101.00
36	311	109.14	542	109.28	559	104.69	911	100.00
38	311	109.00	542	109.14	557	104.35	905	99.00
40	310	108.92	542	109.03	552	104.12	885	98.27
42	310	108.88	541	108.97	546	104.02	863	98.00
44	310	108.89	540	108.95	540	104.04	841	98.27
46	310	108.94	539	108.99	534	104.18	821	99.00
48	309	109.05	538	109.08	527	104.46	801	100.00

TABLA VI. Simulación de marea.

constante).

c) Operación de embalse más crecida extraordinaria: en este caso se supone una operación normal diaria de embalse en el punto de discretización 5, seguido de una crecida brusca que obliga a derivar caudal por el vertedero ubicado en el punto de discretización 1. Aguas abajo se considera una marea sinusoidal. Las condiciones de contorno y resultados en algunos puntos de discretización se exhiben en la Tabla VII. Se usó  $\theta = 0.85$  y  $\Delta t = 3$  horas. Puede observarse el efecto de remanso con cota sobre superficie libre horizontal en el afluente cuando el punto 1 está cerrado (no escurre caudal) y las oscilaciones de caudal en dicho tramo afluente según la operación del embalse, que incluye flujo en contrapendiente.

Por su parte, el modelo programado en FORTRAN IV se ha usado en modelizaciones reales. El modelo consta de alrededor de 700 instrucciones y está

Tiempo (hs)	Punto 1		Punto 4		Punto 5	
	$Q$ (m <sup>3</sup> /s)	$Z$ (m)	$Q$ (m <sup>3</sup> /s)	$Z$ (m)	$Q$ (m <sup>3</sup> /s)	$Z$ (m)
0	0	102.70	0	102.70	600	110.58
6	0	101.92	6	101.92	300	106.81
12	0	101.94	-2	101.94	600	109.58
18	0	103.51	-9	103.51	900	114.11
24	0	103.50	4	103.50	600	111.69
27	300	104.19	292	104.02	450	109.82
30	300	108.66	271	103.72	300	107.52
36	300	110.91	293	104.08	600	110.14
42	300	111.41	292	105.74	900	114.57
45	300	111.55	297	106.25	750	114.17
48	0	105.76	56	104.68	600	111.95
54	0	102.17	8	102.14	300	107.01
60	0	101.97	-2	101.97	600	109.59
66	0	103.28	-7	103.28	900	114.06
72	0	103.46	6	103.46	600	111.65

Tiempo (hs)	Punto 10		Punto 12		Punto 14	
	$Q$ (m <sup>3</sup> /s)	$Z$ (m)	$Q$ (m <sup>3</sup> /s)	$Z$ (m)	$Q$ (m <sup>3</sup> /s)	$Z$ (m)
0	600	102.70	600	101.78	600	100.00
6	393	101.92	406	101.40	409	100.50
12	522	101.94	519	101.23	523	100.00
18	793	103.54	772	102.29	764	99.50
24	678	103.50	687	102.39	686	100.00
27	503	104.02	788	102.83	776	100.35
30	388	103.72	664	102.67	666	100.50
36	519	104.08	806	102.78	806	100.00
42	797	105.74	1079	103.88	1077	99.00
45	759	106.25	1049	104.50	1028	99.65
48	725	104.68	804	103.34	824	100.00
54	415	102.14	434	101.56	441	100.50
60	526	101.97	523	101.26	528	100.00
66	800	103.28	786	101.91	790	99.00
72	685	103.46	697	102.35	699	100.00

TABLA VII. Operación de embalse y crecida extraordinaria.

implementado en una computadora IBM 4381. Usa 40 Kb de memoria interna durante su ejecución para una discretización con 60 puntos de cálculo. Para cada punto  $x_i$ , las funciones  $S(Z, x_i)$  y  $D(Z, x_i)$  —área mojada y coeficiente de conducción para una cota  $Z$ — se representan mediante aproximaciones lineales a trozos, o sea mediante tablas de

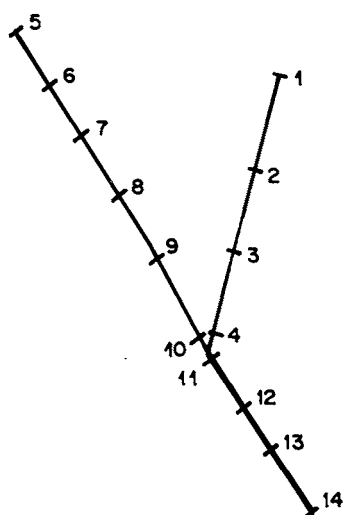


Figura 11. Modelo de red para consistencia.

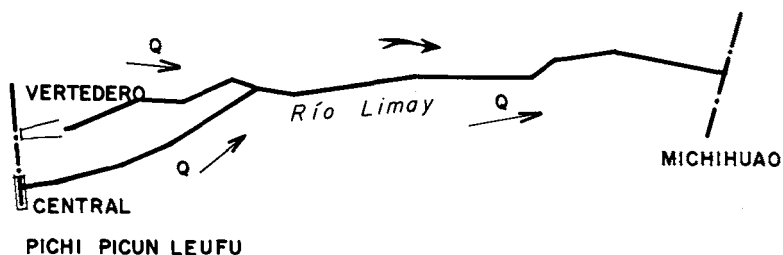


Figura 12. Esquema del modelo del río Limay.

valores de áreas y coeficientes de conducción correspondiente a distintos valores de  $Z$ . Actualmente, las tablas son de 60 pares de valores, y la memoria necesaria es para tablas de este tamaño. Aparte, es necesario considerar la memoria necesaria para el programa, archivos periféricos de parámetros de cada corrida, de descripción del modelo, de condiciones iniciales, de condiciones de contorno y comparación, y de trabajo. El tiempo de ejecución para una corrida con 120 intervalos temporales de cálculo es de 37 segundos. Teniendo en cuenta que el tiempo empleado en el armado del modelo es despreciable, esto equivale a algo menos de un tercio de segundo por intervalo de tiempo de cálculo. Este modelo, con sus programas auxiliares de preparación de datos de secciones transversales (transformación de información cartográfica, altimétrica y batimétrica en archivos de tablas de áreas para distintas cotas), de optimización de ajuste de coeficientes de conducción y de graficación de datos y resultados, se utilizó en 1981 para la modelización de un tramo del río Limay, en Argentina, entre las futuras represas proyectadas en Pichi Picún Leufú y Michihuaio por la empresa estatal argentina responsable de estas obras, que fue la que encargó la modelización. El tramo principal del modelo tiene como punto extremo aguas arriba la proyectada central hidroeléctrica

en Pichi Picún Leufú, y el afluente es el canal de restitución del vertedero proyectado, tal como se ve en la Figura 12. El punto extremo aguas abajo es la central hidroeléctrica de Michihuao. La red fluvial se discretizó en 57 puntos de cálculo, 16 correspondientes al canal y 41 al tramo considerado principal. La longitud del canal es de 5.83 km y la del tramo principal de 47.8 km.

El modelo se ajustó convenientemente en régimen natural y se realizaron posteriormente diversas experimentaciones numéricas con un año típico, con ambas centrales trabajando como centrales de pasada, maximizando el uso de la potencia y distribuyendo la operación diaria de las centrales en horas de punta, semipunta y valle, desagregando el funcionamiento semanal en operación para días hábiles y operación para días feriados, analizando influencias de una crecida extraordinaria, etc. Entre las conclusiones obtenidas cabe señalar que se observó que los niveles del embalse de Michihuao no se verán prácticamente afectados por la operación de la central de Pichi Picún Leufú.

Las condiciones de contorno aguas arriba son los caudales de operación turbinados en Pichi Picún Leufú y un caudal por vertedero (nulo o no); la condición de contorno aguas abajo es el caudal turbinado en Michihuao.

## CONCLUSIONES

Se ha descrito en este trabajo un modelo matemático, ya implementado con éxito, que permite resolver el sistema de ecuaciones hiperbólicas casilineales de Saint-Venant de la hidrodinámica para redes fluviales con estructura arborescente, mediante un método que, aplicado a esquemas implícitos de resolución de las ecuaciones diferenciales, resuelve un sistema lineal de matriz banda en cada paso de tiempo y tiene la misma eficiencia, en tiempo de cálculo y memoria computacional necesaria, que un modelo sobre un único tramo que use el mismo método implícito y tenga el mismo número de puntos de discretización.

## AGRADECIMIENTOS

El autor agradece al Estudio Gradowczyk y Asociados S.A.T. el apoyo prestado para esta investigación, a Mario H. Gradowczyk, Guillermo Marshall y a un censor anónimo sus comentarios y sugerencias y a Esteban G. Tabak las pruebas del modelo simplificado en PASCAL.

## REFERENCIAS

1. J.A. Liggett, "Basic equations of unsteady flow", en: K. Mahmood y V. Yevjevich (eds), *Unsteady flow in open channels*, Vol. I, Water Resources Publications, Fort Collins, pp. 29-62, (1975).
2. V.T. Chow, *Open channel hydraulics*, Mc Graw-Hill, Nueva York, (1959).
3. S.K. Godunov, *Ecuaciones de la física matemática*, MIR, Moscú, (1978).

4. B.L. Rozdestvenskii y N.N. Janenko, "Systems of quasilinear equations and their application to gas dynamics", *American Mathematical Society*, (Translations of Mathematical Monographs), Providence, (1980).
5. J.A. Liggett y J.A. Cunge, "Numerical methods of solutions of unsteady flow equations", en: K. Mahmood y V. Yevjevich (eds), *Unsteady flow in open channels*, Vol. I, Water Resources Publications, Fort Collins, pp. 89-178, (1975).
6. R.D. Richtmyer y K.W. Morton, "Difference methods for initial value problems", *Interscience*, Nueva York, (1967).
7. D. von Rosenberg, "Methods for the numerical solution of partial differential equations", Elsevier, Nueva York, (1963).
8. J.J. Stoker, "Water waves", *Interscience*, Nueva York, (1957).
9. Z.C. Li, L.J. Zhan y H.L. Wang, "Difference methods of flow in branch channel", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 109, pp. 424-447, (1983).
10. F. Quinn y B. Wylie, "Transient analysis of the Detroit River by the implicit method", *Water Resources Research*, Vol. 8, pp. 1461-1469, (1972).
11. D.C. Fread, "Techniques for implicit dynamic routing with tributaries", *Water Resources Research*, Vol. 9, pp. 918-926, (1973).
12. M.H. Gradowczyk y P.M. Jacovkis, "Un modelo matemático para regímenes impermanentes en redes fluviales complejas", 2<sup>as</sup> Jornadas Latinoamericanas de Computación, UTN, Buenos Aires, (1974).
13. F.F. Wood, B.M. Harley y F.G. Perkins, "Transient flow routing in channel network", *Research Report 75-1*, International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA), Laxemburg, Austria, (1975).
14. J.B. Joliffe, "Computation of dynamic waves in channel networks", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 110, pp. 1358-1370, (1984).
15. I.M. Gelfand y O.V. Lokutsievsky, "The double sweep method for solution of difference equations", en: S.K. Godunov y V.S. Riabenki, *Theory of difference schemes*, North Holland, Amsterdam, (1964).
16. J.A. Cunge, "Un schéma de différences finies pour les équations hyperboliques (une et deux dimensions spaciales)", *Tesis Doctoral*, Facultad de Ciencias, Universidad de Grenoble, Grenoble, (1966).