

Problema generalizado del k -terminal y multiterminal en análisis de fiabilidad de redes

Ricardo García

E.U. Pol  t  cnica de Almadén
Universidad de Castilla-La Mancha
Plaza Manuel Meca, 1, 13400 Almadén, Ciudad Real, España
Tel.: 34-926-26 40 07, Extensión 6049, Fax: 34-926-26 44 01
e-mail: rgarcia@pol-al.uclm.es.

Francisco Lizarralde

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Mar del Plata, Argentina
Tel.: 54-0223-481 66 00/259, Fax: 54-0223-481 00 46
e-mail: frankliz@argenet.com.ar

Doroteo Verástegui

E.U. Pol  t  cnica de Almadén
Universidad de Castilla-La Mancha
Plaza Manuel Meca, 1, 13400 Almadén, Ciudad Real, España
Tel.: 34-926-26 40 07, Extensión 6049, Fax: 34-926-26 44 01

Resumen

Los problemas en redes con *k*-terminales y con multiterminales (MNR) se han desarrollado para analizar la fiabilidad de las redes de comunicaciones. Estos problemas consideran un grafo dirigido $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$, donde \mathcal{N} es un conjunto de nodos y \mathcal{A} uno de arcos, y un conjunto especial de nodos $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_k\} \subset \mathcal{N}$ denominados *terminales* que modelizan la posibilidad de comunicación entre los elementos de \mathcal{T} bajo degradación aleatoria de la red \mathcal{G} . Los modelos desarrollados en la literatura trabajan con una función de probabilidad $p : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ para describir el estado de los arcos de la red. Para cada arco $e \in \mathcal{A}$, $p(e)$ indica la probabilidad de que el arco e est  e "estropeado". Bajo la hipótesis de que los arcos est  n "operativos" o "estropeados" de acuerdo a la función de probabilidad p y de que estos sucesos son independientes unos de otros, el problema de la fiabilidad en redes multiterminales determina la probabilidad que todos los pares de elementos del conjunto de terminales est  n conectados por caminos formados por arcos operativos, mientras que en el problema de fiabilidad en redes con *k*-terminales se calcula la probabilidad de conexión entre un terminal llamado raíz y el resto de terminales. En este trabajo se han generalizado ambos problemas para introducir la componente temporal de la degradación de la red. En la formulación generalizada se ha modelizado el instante de fallo de cada componente (arco o nodo) mediante una variable aleatoria continua. El nuevo problema consiste en calcular la fiabilidad del sistema en función del tiempo.

Las formulaciones del *k*-terminal y del multiterminal se obtienen de la formulación generalizada, cuando los modelos probabilísticos para describir el comportamiento de los arcos de la red son variables aleatorias Bernoulli y se considera que los nodos siempre est  n operativos durante la vida del sistema. Para ambos problemas se ha desarrollado un algoritmo basado en la metodología de simulación de Monte Carlo y en los métodos de optimización de flujos en redes. Este procedimiento permite generar una muestra aleatoria de la variable tiempo operativo del sistema, sobre la que se han analizado procedimientos estadísticos para calcular la función de fiabilidad, la media y los quantiles del tiempo operativo del sistema para una precisión dada. Se ha realizado una experiencia numérica que ilustra esta metodología y motiva la necesidad de este nuevo modelo.

GENERALIZED PROBLEMS OF MULTITERMINAL AND k -TERMINAL NETWORK RELIABILITY

Summary

The multiterminal and k -terminal network reliability problems (MNRP) have been developed in order to evaluate the reliability of communication networks. These problems assume a directed graph $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$, where \mathcal{N} is a set of nodes and \mathcal{A} a set of links, and a special set $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_k\} \subset \mathcal{N}$ of “terminal nodes”, the motivating issue of multiterminal network reliability is to model the possibility of communication between the elements of \mathcal{T} under random degradation of the network. The models developed in the literature work with a function $p: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ to describe the operating behavior, that is, $p(e)$ for each edge $e \in \mathcal{A}$ is the probability that the edge e is “bad”. Under the assumption that the edges are made good or bad according to independent choices governed by p , the multiterminal network reliability problem is to determine the probability that for all pairs of the elements of the set of terminals there is a path between them that consists only of good edges, on the other hand the k -terminal network reliability problem consists of computing the probability of connection between a root node and the terminal nodes. This study generalizes the multiterminal and k -terminal network reliability problems (MNRP) in order to introduce the temporal degradation of the network. In the new formulation the life time of the components (nodes and links) is taking into account by means of random variables. The new problem consists of computing the reliability of the system as a function of the time.

The classic formulation of MNRP are obtained when Bernoulli random variables are used to model the link life and the nodes do not fail.

An algorithm have been developed for generalized MNRP based on Monte Carlo simulation approach and network optimization. This procedure generates trials of the random variable “operating time” of the system. We have realized a statistical discussion about the possibility of computing the reliability function, operating time mean and p -values of its distribution for an accuracy given. We have carried out an computational experiment in order to illustrate the new model and to motivate its use.

INTRODUCCIÓN

El análisis de la fiabilidad de sistemas se basa en modelos de redes donde sus componentes fallan aleatoriamente. Esta clase de modelos matemáticos ha sido aplicada en una gran variedad de situaciones tales como: redes de comunicaciones de datos y de voz, redes de transporte, arquitectura de ordenadores, sistemas de potencia, etc.

Las redes conmutables aparecieron en la década de los años 60. Esta tecnología permitía conducir dinámicamente el tráfico, pudiendo evitar los arcos que hubieran quedado fuera de servicio. ARPANET fue la primera gran red con estas características. Los trabajos de fiabilidad de la década de los años 70 estuvieron motivados por este tipo de red, provocando que se desarrollaran medidas de fiabilidad basadas en la *conectividad* de la red. En la década de los 80 aparecieron redes comerciales como Telnet & Tymnet que eran muchísimo más densas que ARPANET y que tenían como resultado una probabilidad de desconexión casi nula. Como tenían mayores cargas de tráfico, aparecieron problemas de congestión, dando lugar a medidas de fiabilidad (medidas de rendimiento) que tenían en cuenta la capacidad de la red y congestión de la misma¹.

Las mayores redes de comunicaciones existentes hoy en día son las empleadas por los sistemas de telefonía. Un canal es dedicado a un par de usuarios durante toda su comunicación. Cuando las componentes del sistema fallan, y esto se produce cuando el nivel de utilización se acerca a la capacidad de la red, se reduce el número de canales que ésta puede soportar, apareciendo el denominado *call blocking* y produciendo la desconexión en la red. Sobre este tipo de redes las medidas de fiabilidad están basadas en medidas de conectividad sobre una adecuada definición de fallo.

Un aplicación especial aparece en el campo de arquitectura de ordenadores para los problemas de diseño de redes para procesadores y memorias en paralelo. En este tipo de sistemas aparecen múltiples componentes del mismo tipo y se desea diseñar elementos

redundantes para aumentar la fiabilidad del sistema medido sobre algún tipo de conectividad (ejemplo lo constituye el trabajo de la referencia 2).

Una de las más interesantes aplicaciones aparece en redes de transporte urbano. En este contexto, ciertos incidentes como accidentes, manifestaciones, etc. causan fallos en los nodos o en los arcos de la red. Es raro que la red de transporte urbano llegue a quedar desconectada, pues lo que se produce es un aumento de la congestión. La referencia 3 utiliza un modelo de fiabilidad donde las probabilidades de degradación de las capacidades son conocidas. Mediante un análisis de sensibilidad de un modelo de equilibrio con demanda elástica, que modeliza el comportamiento de los usuarios en la red de transporte, calcula el efecto de la reducción de la capacidad sobre la congestión.

Las técnicas empleadas para evaluar la fiabilidad de redes aleatorias pueden agruparse en analíticas, determinación de cotas y técnicas de simulación. Las primeras asumen que cada componente del sistema tiene una distribución aleatoria conocida y calculan explícitamente los parámetros de fiabilidad. Este planteamiento sólo ha sido satisfactoriamente aplicado bajo severas restricciones tanto en las distribuciones elegidas (normalmente exponenciales que origina los denominados *modelos markovianos*) y bajo simplificaciones de la topología de la red.

Muchos de los trabajos sobre fiabilidad han estado motivados por redes de comunicaciones y se han diseñado algoritmos para abordar redes con una topología general, lo que ha reducido la aplicación de técnicas analíticas. En el campo de arquitectura de ordenadores están concentrados en redes altamente estructuradas asociadas con una particular estructura de ordenador. Esto ha permitido aplicar técnicas analíticas para modelos markovianos. Ejemplos de esta situación son las referencias 4 y 5 que en el contexto de redes locales de ordenadores analizan la topología de la red tipo “calles de Manhattan” y FLBH respectivamente.

Los modelos que no asumen la hipótesis probabilística de distribuciones exponenciales se denominan *no markovianos*. El análisis de la fiabilidad con estos modelos puede ser muy complicado, de hecho han sido desarrollados pocos modelos⁶ y han tenido una limitada aplicación a situaciones reales. Los métodos que calculan cotas de la fiabilidad efectúan simplificaciones de la topología de la red y sobre ésta calculan los índices de fiabilidad⁷.

Los métodos de simulación de Monte Carlo han sido ampliamente aplicados a la evaluación de sistemas complejos⁸. Esto ha sido así por la dificultad de los métodos analíticos de integrar en un único modelo matemático el sistema de interés. Los métodos de simulación tienen gran importancia y pueden recoger aspectos muy variados del problema, proporcionando buenas aproximaciones de los índices de fiabilidad del sistema. La referencia 9 constituye una buena monografía sobre esta técnica.

MOTIVACIÓN Y ANTECEDENTES

El análisis de fiabilidad de redes incluye numerosos aspectos. En este trabajo nos concentraremos en las medidas de *conectividad* en redes. Los datos básicos para un problema de este tipo son una red que viene modelada por el grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$, donde \mathcal{N} es un conjunto de nodos y \mathcal{A} es un conjunto de arcos dirigidos, y para cada elemento e del sistema (ya sea nodo o arco) una variable aleatoria X_e que indica la “salud” de la componente e . Los problemas puede ser clasificados en:

- *Estados binarios*; cuando las variables aleatorias sólo pueden tomar los valores 1, si el elemento está operativo y 0 en caso contrario.
- *Multiestados*; en este caso X_e toma más de dos valores diferentes. En este caso la variable aleatoria X_e puede representar una longitud, una capacidad o el tiempo de duración de una componente.

En la primera categoría se encuentra la mayoría de los trabajos desarrollados en el análisis de la fiabilidad de las décadas de los 70 y 80. El problema más importante es el llamado problema del *k-terminal*. Este problema parte de un conjunto de nodos \mathcal{T} , donde $k = |\mathcal{T}|$, y un nodo origen $s \in \mathcal{T}$. La medida de la fiabilidad es la probabilidad que existan caminos operativos de s a cada nodo de \mathcal{T} . Dos importantes casos particulares de este problema son el *2-terminales* que aparece, cuando $|\mathcal{T}| = 2$, y el *todos-terminales*, cuando $\mathcal{T} = \mathcal{G}$. El nodo s también es llamado *nodo fuente* y $\mathcal{T} - \{s\}$ *nodos sumideros*.

Las más importantes medidas de fiabilidad en redes multiestado que han sido estudiadas son:

- *Problema del camino mínimo*
 - Datos: grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$, nodos s y t ;
 - Parámetros aleatorios (d_l): longitud del arco l ;
 - Parámetro de fiabilidad: longitud del camino mínimo entre s y t , calculado como el $\min_{p \in P_{st}} \sum_{l \in p} d_l$, donde P_{st} el conjunto de caminos que unen s con t .
- *Problema del flujo máximo*
 - Datos: grafo dirigido $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ con nodos s y t ;
 - Parámetros aleatorios (c_l): capacidad del arco l ;
 - Parámetro de fiabilidad: máximo flujo entre s y t .
- *PERT*
 - Datos: grafo dirigido acíclico $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ con nodo fuente s y nodo sumidero t ;
 - Parámetros aleatorios (t_l): tiempo empleado en completar la tarea asociada con l ;
 - Parámetro de fiabilidad: mínimo tiempo en completar el proyecto comenzando con el nodo s y terminando en t , no pudiendo comenzar una tareas, si sus predecesoras no están finalizadas. Equivale a calcular el camino más largo de s a t en el grafo \mathcal{G} , donde sus arcos tienen longitud t_l . Es decir, $\max_{p \in P_{st}} \sum_{l \in p} t_l$, donde P_{st} es el conjunto de caminos que une s con t .

Los problemas de flujos y caminos aleatorios aparecieron simultáneamente con los problemas de fiabilidad de estados binarios. El PERT fue el primer problema de grafos aleatorios en ser estudiado y es el más popular de estos problemas en redes aleatorias. Un excelente trabajo que recoge los algoritmos aplicados en su resolución es el de la referencia 10 y una extensiva bibliografía la proporciona la referencia 11.

Los modelos matemáticos desarrollados y el interés de las medidas de fiabilidad han estado totalmente marcados por las aplicaciones. Los modelos de la década de los 90, sobre todo en el campo de las telecomunicaciones, han estado centrados en los fallos como respuesta a la relación capacidad-congestión¹². Con el desarrollo de nuevas tecnologías, como es el uso de la fibra óptica, se ha producido un incremento extraordinario de la capacidad de transmisión. Las nuevas redes son físicamente menos densas pero lógicamente muy densas y la fiabilidad no está explícitamente considerada en el diseño de redes a gran escala. En este tipo de red cada arco tiene una gran importancia en el sistema debido a la gran cantidad de tráfico de datos que soporta. La fibra óptica tiene canales redundantes y la posibilidad de reenrutamiento. Como resultado, las medidas de conectividad vuelven a tener importancia.

Los modelos desarrollados han tenido su aplicación en la evaluación de la fiabilidad de nuevos diseños de redes. Este tipo de problemas está planteado en un contexto de planificación estratégica o táctica, donde los aspectos dinámicos no son, en general, importantes.

Esto ha conducido a modelos estáticos, donde se efectúa un corte transversal en el tiempo y se plantea, si la red está operativa o no en ese instante, evitando así el estudio de su evolución en el tiempo. Hoy en día y con los nuevos problemas tecnológicos, se requiere de modelos dinámicos que permitan evaluar políticas del nivel operacional del sistema, como políticas de mantenimiento preventivo, para las que el factor tiempo es esencial para su análisis.

El problema que aquí planteamos es un primer paso en esa dirección. Dicho problema es una generalización del problema del k -terminal, planteado en un contexto de estados binarios a un contexto multiestados. Las variables aleatorias X_e recogen la duración de los elementos $e \in \mathcal{A} \cup \mathcal{N}$. El problema del k -terminal determina la probabilidad de que la red esté desconectada en un instante determinado, en su generalización, se estudia la evolución de esta probabilidad en el tiempo. Los algoritmos que se pueden plantear para resolver el problema generalizado del k -terminal (multiterminal) son de tres tipos: exactos, heurísticos o métodos de simulación de Monte Carlo.

La primera motivación para decidirnos sobre el tipo de algoritmo a desarrollar nos la proporciona el trabajo de la referencia 13 que mostró que el problema del k -terminal es NP-completo. Si en nuestro problema consideramos que X_e , $e \in \mathcal{A} \cup \mathcal{N}$ son variables aleatorias Bernoulli, aparece la formulación clásica del problema del k -terminal y por tanto nuestro problema es NP-completo. Esto ha descartado la elaboración de algoritmos exactos que sólo han dado buenos resultados, cuando la red es pequeña o altamente estructurada. Este resultado fuerza a adaptar algoritmos heurísticos o basados en la técnica de simulación de Monte Carlo.

Las técnicas de simulación de Monte Carlo han sido ampliamente usadas en el análisis de la fiabilidad de redes. Estas técnicas constan de dos fases diferenciadas. En la primera se genera aleatoriamente una realización del problema y en la segunda se evalúa la fiabilidad del problema generado. Este procedimiento permite obtener una muestra aleatoria del comportamiento del sistema en estudio que permite estimar sus índices de fiabilidad. La mayor desventaja de esta técnica es que requiere gran cantidad de tiempo computacional. Se ha dedicado numeroso esfuerzo a estudiar el modo de generar aleatoriamente los problemas en la primera etapa, de modo que se reduzca el número de simulaciones necesarias para obtener una precisión determinada. Los resultados de la referencia 14 muestran que un algoritmo para redes moderadamente fiables proporciona buenas estimaciones en tiempos razonables. Sólo cuando las redes son altamente fiables, se requiere de estrategias para la reducción de la varianza que permitan hacer menor número de simulaciones. La referencia 15 analiza estas mejoras en los algoritmos de simulación Monte Carlo usados en el problema con estados binarios. Más recientemente¹⁶ se estudian técnicas para la reducción de la varianza de los estimadores en algoritmos generales de simulación de Monte Carlo.

El eje sobre el que se ha elaborado este trabajo es el modo de obtener la estimación de la fiabilidad de la red (segunda fase), lo que requiere de la elaboración de un algoritmo eficiente que permita reenrutamientos óptimos conforme la red se vaya degradando. Un segundo aspecto importante del problema es introducir estrategias para la reducción del número de simulaciones y por tanto del coste computacional del procedimiento. Estas mejoras afectarían al modo de generar el grafo aleatorio y a su representación (primera fase). Este aspecto se vuelve crucial para problemas de gran escala o cuando se requieran estimaciones de gran exactitud. Este no ha sido el interés de este primer trabajo y por tanto se ha aplicado un muestreo aleatorio simple para generar los problemas.

EL PROBLEMA GENERALIZADO DEL k -TERMINAL Y DEL MULTITERMINAL

El sistema bajo estudio es una red de comunicaciones que se modela mediante un grafo dirigido $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ compuesto de un conjunto de nodos \mathcal{N} y un conjunto de arcos \mathcal{A} . En este problema admitimos que los nodos y arcos tienen la posibilidad de fallar y una vez que lo hacen, ya no pueden ser reparados. Suponemos que para cada arco $l \in \mathcal{A}$ existe una variable aleatoria Ω_l que modeliza el tiempo de vida del arco y suponemos que para cada nodo $i \in \mathcal{N}$ existe una variable aleatoria Γ_i que modeliza el tiempo de vida del nodo $i \in \mathcal{N}$. La fiabilidad de cada elemento del sistema (nodo o arco) es independiente del estado de los otros elementos del sistema.

Tradicionalmente, las redes aleatorias empleadas en el análisis de fiabilidad asumen variables aleatorias Bernoulli que dan el estado 1, si el elemento del sistema está operativo con probabilidad p , y 0 en caso contrario con probabilidad $1 - p$. En este trabajo empleamos variables aleatorias generales que nos proporciona la duración de cada elemento. Esta generalización plantea el problema en su dimensión dinámica. Si consideramos un corte transversal en tiempo y observamos el estado de los elementos del sistema (sin están operativos o no), aparecerían las clásicas redes aleatorias con estados binarios.

Sobre esta red generalizada podemos considerar los clásicos problemas de evaluación de la fiabilidad. El primer problema que consideramos lo denominaremos *problema generalizado de k -terminal*. Consideramos un subconjunto de nodos $\mathcal{T} \subset \mathcal{G}$ ($k = |\mathcal{T}|$) que denominaremos *conjunto de nodos terminales* y un *nodo raíz* $s \in \mathcal{T}$. Para cada instante t definimos $Y_s(\mathcal{G}(t))$ que toma el valor 1, si en el instante t existe al menos un camino operativo del nodo raíz s a cualquier nodo en $\mathcal{T} - \{s\}$, y toma el valor 0 en caso contrario. $Y_s(\mathcal{G}(t))$ recibe el nombre de *estado del sistema en el instante t* y la medida de fiabilidad que queremos calcular es

$$R_s(t) = \Pr(Y_s(\mathcal{G}(t)) = 1)$$

que recibe el nombre de *función de fiabilidad para el nodo s* .

Una variante de este problema, que denominaremos *problema generalizado del multiterminal*, aparece cuando todos los terminales son considerados nodos raíces, en este caso la medida de fiabilidad que se quiere calcular es

$$R(t) = \Pr(\bigcap_{s \in \mathcal{T}} (Y_s(\mathcal{G}(t)) = 1))$$

donde $R(t)$ recibe el nombre de *función de fiabilidad del sistema*.

UN ALGORITMO DE SIMULACIÓN DE MONTE CARLO

Comenzaremos la discusión con el problema generalizado del k -terminal. Sea T_s la variable aleatoria “instante de fallo” del nodo s , esto es, el primer instante donde el nodo s se queda desconectado de algún otro terminal. La función de fiabilidad del nodo s se puede expresar, ya que como el suceso $Y_s(\mathcal{G}(t)) = 1$ se puede representar por $T_s > t$, empleando la variable aleatoria T_s como

$$\begin{aligned} R_s(t) &= \Pr(Y_s(\mathcal{G}(t)) = 1) = \Pr(T_s > t) \\ &= 1 - F_s(T_s \leq t) \end{aligned}$$

donde F_s es la función de distribución acumulativa de la variable aleatoria (v.a.) T_s . Esta última fórmula pone de manifiesto la importancia de la función de distribución de la v.a T_s en el cálculo de la función de fiabilidad del nodo s .

El algoritmo de simulación de Monte Carlo genera una realización del grafo aleatorio \mathcal{G} y sobre ésta calcula el valor de la v.a. T_s , que denotamos por \hat{T}_s . Más formalmente, supongamos que tengamos una realización del grafo aleatorio \mathcal{G} , esto es, para cada variable aleatoria asociada a cada elemento hemos generado una valor concreto

$$\begin{aligned}\Omega_{ij} &= \omega_{ij} \text{ para todo } (i, j) \in \mathcal{A} \\ \Gamma_i &= \tau_i \text{ para todo } i \in \mathcal{N}\end{aligned}$$

Sea P_{st} el conjunto de caminos que unen el nodo s con el nodo t . La duración de un camino $p \in P_{st}$, denotada $\ell(p)$, es el mínimo tiempo de vida de sus componentes. En el momento en el que algún elemento del camino falle, el camino deja de estar disponible. Por tanto

$$\ell(p) := \min_{e \in p} X_e = \min\{\min_{(i,j) \in p} \omega_{ij}, \min_{i \in p} \tau_i\} \quad (1)$$

donde la notación $e \in p$ representa que e es un elemento del camino p , ya sea un nodo o un arco. El instante en el que el nodo raíz s deja de estar conectado al nodo t , que denotamos por \hat{T}_{st} , es

$$\hat{T}_{st} = \max_{p \in P_{st}} \ell(p) \quad (2)$$

El valor \hat{T}_s representa el instante en el que el nodo s deja de estar conectado con algún nodo del conjunto de terminales \mathcal{T} . Esto se producirá en el momento en que no exista ningún camino operativo entre s y alguno de los nodos $t \in \mathcal{T} - \{s\}$ y por tanto \hat{T}_s se calcula

$$\hat{T}_s = \min_{t \in \mathcal{T} - \{s\}} \hat{T}_{st}$$

Para ilustrar las ideas anteriores consideramos el grafo de la Figura 1. El grafo consta de un nodo raíz s y un nodo terminal t . El problema es determinar el instante en que no se puede acceder al nodo t desde el nodo s (se quedan desconectados). Los números indi-

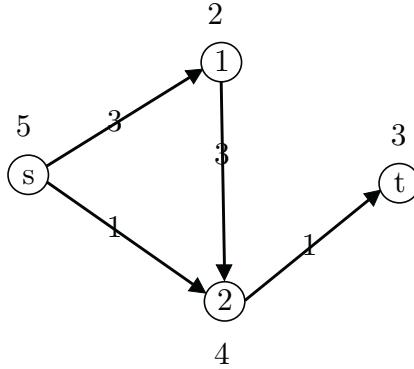


Figura 1. Grafo ilustrativo

can la duración de las componentes del grafo, ya sean nodos o arcos. Se han generado aleatoriamente la duración de los nodos de la red y se ha obtenido $\tau_s = 5$, $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 4$ y $\tau_t = 3$, para los arcos se ha obtenido $\omega_{s1} = 3$, $\omega_{s2} = 1$, $\omega_{12} = 3$ y $\omega_{2t} = 1$. Hay dos caminos

que unen s con t y estos son $p_1 := s - 1 - 2 - t$ y $p_2 := s - 2 - t$ y la duración de estos caminos es

$$\begin{aligned}\ell(p_1) &= \min\{\min\{3, 3, 1\}, \min\{5, 2, 4, 3\}\} = 1 \\ \ell(p_2) &= \min\{\min\{1, 1\}, \min\{5, 4, 3\}\} = 1\end{aligned}$$

por tanto $\hat{T}_{st} = \max\{\ell(p_1), \ell(p_2)\} = 1$ y por tanto $\hat{T}_s = \min_{t \in \mathcal{T} - \{s\}} \hat{T}_{st} = 1$.

En la Tabla I se recoge un algoritmo de simulación de Monte Carlo para el problema generalizado del k -terminal que permite obtener una realización de la variable aleatoria T_s a partir de una realización de las variables aleatorias de los elementos del grafo. Este algoritmo debe resolver el problema (2), que es un problema de caminos extremales en grafos, donde los costes de los caminos no son aditivos, esto es, no son la suma del coste de cada uno de sus componentes. Este algoritmo opera con dos tipos de etiquetas: las llamadas *etiquetas permanentes* (denotadas por g) y las llamadas *etiquetas transitorias* (denotadas por h). El valor $g(i)$ contiene la duración máxima de los caminos entre s e i y la etiqueta $h(j)$ contiene la de máxima duración entre el nodo s y j pero empleando solamente nodos etiquetados con etiquetas permanentes. En el paso 3 siempre se añade un nuevo nodo a la categoría de etiquetado permanentemente, ampliando este conjunto y redefinido, por tanto, las etiquetas transitorias. Cuando el algoritmo alcanza el paso 4, ya conoce la máxima duración entre el nodo s y el resto de terminales, por tanto el instante, en que se queda desconectado de alguno de ellos, será el mínimo de estas duraciones.

1. *(Inicialización):* $g(s) = \tau_s, U = \{s\}$.
For all $j \in \mathcal{N}$ **do**:
If $(s, j) \in \mathcal{A}$ **then** $h(j) \leftarrow \min\{\tau_s, \omega_{sj}, \tau_j\}$ **else if** $h(j) \leftarrow 0$.
2. Sea $i = \arg \max_{j \notin U} \{h(j)\}$. **If** el máximo no es único, seleccionar algún nodo i en el que se alcance dicho máximo. Tomar $U \leftarrow U \cup \{i\}$ y $g(i) \leftarrow h(i)$. **If** $U = \mathcal{T}$ **go to** paso 4.
3. **For all** $j \notin U$ **with** $(i, j) \in \mathcal{A}$ **do**: $h(j) \leftarrow \{\max\{\min\{g(i), \omega_{ij}, \tau_j\}, h(j)\}$ **go to** paso 2.
4. Calcular $\hat{T}_s = \min_{i \in \mathcal{T} - \{s\}} \{g(i)\}$.

Tabla I. Algoritmo para el problema generalizado del k -terminal (AGKT)

El algoritmo determina sólo las etiquetas $g(i)$, que contienen la duración máxima de los caminos que unen s con i . Si estuviéramos interesados en conocer uno de estos caminos, introduciríamos una nueva etiqueta, $p(j)$, que contendría (al terminar el algoritmo) el predecesor del nodo j en un $s - j$ camino de máxima duración. Habría que variar la inicialización añadiendo $p(j) \leftarrow s$ para los arcos $(s, j) \in \mathcal{A}$ y en el paso 3 fijar $p(j)$ a i si $h(j) = \{\min\{g(i), \omega_{ij}, \tau_j\}\}$.

Una vez estudiado el modo de obtener una muestra aleatoria de la v.a T_s es sencillo afrontar el problema generalizado del multiterminal. Sea T la variable aleatoria “instante de fallo del sistema”, esto es, el instante donde algún par de terminales del conjunto \mathcal{T} queda desconectado. La función de fiabilidad del sistema es

$$\begin{aligned}R(t) &= \Pr(Y(\mathcal{G}(t)) = 1) = \Pr(T > t) \\ &= 1 - F(T \leq t)\end{aligned}$$

donde F es la función de distribución acumulativa de la v.a. T . Esta última relación muestra la importancia de la variable T en el cálculo de la fiabilidad del sistema.

La relación

$$T = \min_{s \in \mathcal{T}} \{T_s\}$$

nos permite calcular realizaciones de la v.a. T a partir de realizaciones de las variables aleatorias $\{T_s\}_{s \in \mathcal{T}}$. Esto conduce a un algoritmo para el problema generalizado del multiterminal, que se muestra en la Tabla II, que permite generar una realización de la v.a. T , que denotaremos \hat{T} .

1. (*Generación del grafo*): Genera aleatoriamente las v.a. de las componentes del grafo \mathcal{G} .
2. **For all** $s \in \mathcal{T}$ aplicar el AGKT y obtener \hat{T}_s .
3. Calcular $\hat{T} = \min_{s \in \mathcal{T}} \{\hat{T}_s\}$. **Stop**

Tabla II. Algoritmo para el problema generalizado del multiterminal (AGMT)

Validación del algoritmo AGKT

El algoritmo AGKT ha sido construido sobre una extensión del principio de optimalidad de Bellman que afirma que todo camino óptimo en algún sentido (por ejemplo el camino de longitud mínima) tiene que estar compuesto por subcaminos óptimos.

En el contexto de caminos, cuyo coste viene definido por la expresión (1), este principio no es cierto, como pone de manifiesto el grafo mostrado en la Figura 1. La duración máxima del camino entre el nodo s y t es de 1 y los caminos $p_1 := s - 1 - 2 - t$ y $P_2 := s - 2 - t$ son óptimos, porque la duración máxima de ambos caminos es de 1, sin embargo el camino p_2 no está formado por subcaminos óptimos, ya que el subcamino entre s y 2 tiene una duración de 1, mientras que la duración del subcamino óptimo $s - 2$ es de 2.

La implicación contraria, si un camino está formado por subcaminos óptimos, entonces éste es óptimo, es cierta en el contexto de nuestro problema y es la base que fundamenta el algoritmo AGKT. Este algoritmo va iterativamente construyendo subcaminos óptimos y obtiene en la última iteración un camino óptimo. El siguiente teorema demuestra, mediante inducción matemática, que los subcaminos generados son óptimos y por tanto demuestra la convergencia del AGKT.

Teorema 1 *El algoritmo KGT termina en un número finito de pasos y el valor de las etiquetas $g(i)$ con $i \in \mathcal{T}$ contiene el tiempo de fallo de la conexión $s - i$.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos el teorema mediante inducción. La hipótesis de inducción es que después de haber realizado n iteraciones, $g(j)$ para $j \in U$ representa el tiempo de fallo para el par (s, j) y $h(j)$ es la duración máxima de la conexión (s, j) restringido a que los nodos intermedios están en el conjunto U . Esto es cierto inicialmente, ya que $U = \{s\}$ y $g(s) = \tau_s$.

De la hipótesis de inducción obtenemos que $h(j) \leq g(j)$ para todo $j \notin U$. Supongamos ahora que $h(i) < g(i)$, donde i está definido en el paso 2 en la iteración $n + 1$. Entonces un camino $s - i$ de máxima duración debe de contener algún nodo intermedio que no esté en U . Sea p_i uno de estos caminos óptimos y sea $l = (r, q)$ con $r \in U$ y $q \notin U$ el primero de estos arcos en el camino p_i . El camino se puede expresar como dos subcaminos $p_i = (p_{sq}, p_{qi})$.

Entonces, por hipótesis de inducción $h(q) \geq \ell(p_{sq})$

$$\begin{aligned} h(i) &< g(i) = \min\{\ell(p_{sq}), \ell(p_{qi})\} \\ &\leq \min\{h(q), \ell(p_{qi})\} \leq h(q) \\ &\leq \max_{j \notin U} \{h(j)\} = h(i) \end{aligned}$$

obteniendo una contradicción y por tanto es falsa la hipótesis de $h(i) < g(i)$ y obtenemos $h(i) = g(i)$, esto es, que en la iteración $n+1$ el algoritmo calcula el $s-i$ camino de máxima duración.

Veamos que si $j \notin U \cup \{i\}$, $h(j)$ representa ahora la duración máxima de los caminos $s-j$ con nodos intermedios en $U \cup \{i\}$. Al ampliar el conjunto U respecto a la iteración anterior añadiéndole el nodo i se pueden mejorar (no necesariamente) las etiquetas transitorias de los nodos $j \notin U \cup \{i\}$ accesibles desde i . En el paso 3 se compara el camino óptimo en la iteración anterior, $h(j)$, con la máxima duración del camino $s-i-j$. Por lo anterior, $g(i)$ es la duración máxima entre $s-i$ y por tanto la máxima duración de un camino $s-i-j$ es $\min\{g(i), \omega_{ij}, \tau_j\}$. En cualquier caso las nuevas etiquetas definidas por $h(j) \leftarrow \max\{\min\{g(i), \omega_{ij}, \tau_j\}, h(j)\}$ contendrán la duración máxima del camino a través de nodos intermedios $U \cup \{i\}$.

Sólo falta demostrar que el algoritmo consigue etiquetar permanentemente todos los nodos de \mathcal{T} . Para eso es suficiente darse cuenta que el algoritmo en cada iteración fija un nodo diferente a los anteriores a la categoría de etiqueta permanente, por lo que a lo sumo en $|\mathcal{T}|-1$ iteraciones el algoritmo debe parar. Notar que si el grafo \mathcal{G} tiene una topología en la cual un terminal está en otra componente conexa a la raíz s , su etiqueta transitoria nunca variará la inicialización y cuando el algoritmo termine, tendrá el valor 0, lo que representa que la red estará desconectada desde el primer instante.

■

Implementación y análisis de la complejidad

En este apartado analizamos la complejidad algorítmica de los algoritmos AGKT y del AGMT, así como la implementación eficiente de los mismos.

Sea $f(n)$ el máximo número de operaciones básicas (sumas y comparaciones) requeridas por el algoritmo AGKT para un grafo con n nodos. En el paso 1 el algoritmo inicializa U con s y la etiqueta $g(s)$. Veamos cuántas operaciones hace el algoritmo, cuando $|\mathcal{N} - U| \leq k \leq n-1$. El paso 3 requiere a lo sumo de $3k$ comparaciones y el paso 2 encuentra el máximo de k números, que se consigue con menos de $k-1$ comparaciones. El número de operaciones empleadas en todas las iteraciones en los pasos 1 y 2 está acotado por $c \sum_{k=1}^{n-1} k$ para cierta constante c . El paso 4 sólo se realiza una vez y requiere a lo sumo calcular el mínimo de n números. Entonces el algoritmo es polinomial $O(n^2)$.

La eficiencia del algoritmo puede ser vista, observando que cada arco del grafo es examinado solamente una vez. Notar que una pequeña modificación del paso 2 consistiría en añadir a U todos los nodos para los que se alcanzara el máximo.

El algoritmo AGMT emplea $|\mathcal{T}|$ veces el algoritmo AGKT por lo que la complejidad para un grafo con m nodos y $|\mathcal{T}|$ terminales es $O(n^2 |\mathcal{T}|)$.

El problema aquí planteado es un problema de caminos extremales en un grafo y se puede aprovechar la experiencia desarrollada en otros problemas relacionados, como el problema del camino mínimo. Sobre este problema han sido desarrollados numerosísimos algoritmos¹⁷. Unos de los más eficientes es el *L-2queue* de la referencia 18 y su eficiencia es debida fundamentalmente a la estructura de datos que emplea. Este algoritmo representa los grafos en forma de *listas de arcos* (Figura 2). Esto es, para cada nodo i se proporciona

la lista de todos los arcos que tienen como nodo inicial a i , $FS[i] = \{(i, j) \in \mathcal{A}\}$. Cuando un grafo es poco denso, como ocurre con frecuencia en las aplicaciones, esta representación es ventajosa, respecto a la tradicional matriz de “pesos”, debido a que requiere menos espacio para el almacenamiento de los datos y permite codificaciones computacionales más eficientes. Una implementación de estas listas de arcos consiste en ponerlas todas ellas consecutivamente en un par de vectores $ND[\cdot]$ y $LNGT[\cdot]$, tal y como se indica en la Figura 2. En $ND[\cdot]$ se almacenarán todos los nodos destinos de los arcos y en $LNGT[\cdot]$ la duración de los mismos. Hay un vector de punteros $A[\cdot]$ que proporciona para cada nodo i la posición en $ND[\cdot]$ del primer arco de $FS[i]$. Entonces la información relativa a $FS[i]$ está almacenada de la posición $A[i]$ a la posición $A[i + 1] - 1$ en los vectores $ND[\cdot]$ y en $LNGT[\cdot]$. De esta forma podemos reconstruir $FS[i] = \{(i, ND[s]) : A[i] \leq s \leq A[i + 1] - 1\}$. Por convenio $A[i] := A[i + 1]$ cuando $FS[i] = \{\emptyset\}$, y $A[n + 1] = m + 1$. Notar que esta representación es tremadamente útil en el paso 3 para poder revisar todos los arcos del nodo i seleccionado en el paso 2.

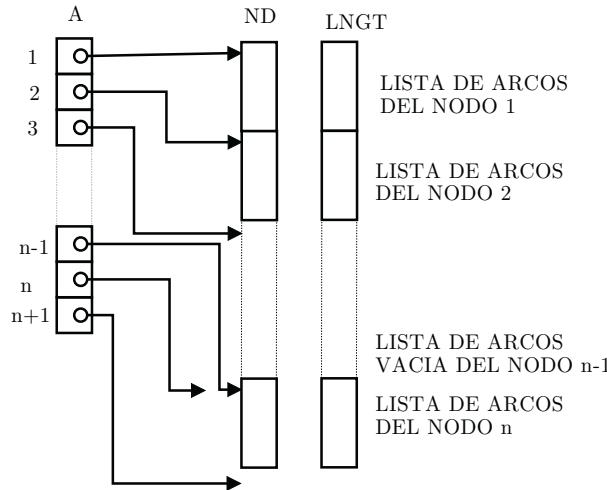


Figura 2. Almacenamiento de un grafo

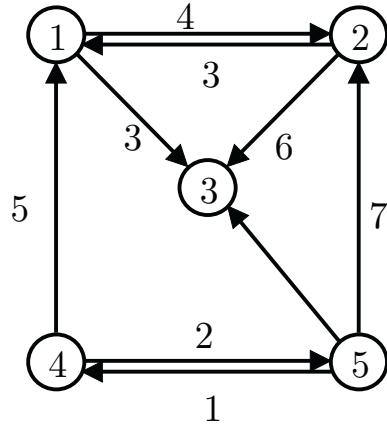


Figura 3. Grafo con 5 nodos y 9 arcos

Para aclarar esta estructura de datos consideremos el grafo mostrado en la Figura 3. La

representación del mismo empleando esta estructura de datos nos lo muestra la Tabla III.

Nodos (i)	1	2	3	4	5	6
A[i]	1	3	5	5	7	10
Arcos (l)	1	2	3	4	5	6
ND[l]	2	3	1	3	1	5
LNGT[l]	3	3	4	6	5	1
					7	2
					2	2

Tabla III. Representación del grafo con 5 nodos y 9 arcos

ANÁLISIS ESTADÍSTICO

Los algoritmos descritos nos permiten generar una muestra aleatoria de tamaño arbitrario de la v.a. tiempo de fallo del sistema T y/o tiempo de fallo para el nodo s , T_s . En esta sección analizamos, cómo se puede estimar la función de fiabilidad, la vida media del sistema y los cuantiles de la función de fiabilidad a partir de la muestra aleatoria generada. La discusión realizada en esta sección es exactamente idéntica para ambas variables aleatorias, por lo que expondrá sólo para la v.a. T .

Función de fiabilidad

Supongamos que hemos generado una muestra aleatoria $T^N := \{t^{(1)}, \dots, t^{(N)}\}$ de la variable aleatoria T , donde N es el tamaño de la muestra. La estimación de la función de fiabilidad del sistema es

$$\widehat{R(t)} = 1 - F_N(T \leq t)$$

donde F_N es la función de distribución empírica construida a partir de la muestra T^N . Supongamos que hemos ordenado crecientemente la muestra T^N y obtenemos que $t(1) \leq t(2) \leq \dots \leq t(N)$, entonces la función $\widehat{R(t)}$ tiene la expresión

$$\widehat{R_N(t)} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < t(1) \\ 1 - \frac{i}{n} & \text{si } t(i) \leq t < t(i+1) \\ 0 & \text{si } t(N) < t \end{cases}$$

Un problema que se plantea es calcular el número de simulaciones para determinar la función de fiabilidad con una precisión requerida, o más formalmente, si denotamos con δ el error prefijado queremos determinar el mínimo valor de N que satisfaga

$$\Pr \left(\max_{t \in [0, \infty)} |R(t) - \widehat{R(t)}| < \delta \right) \geq q$$

Si observamos la expresión

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, \infty)} |R(t) - \widehat{R(t)}| \\ &= \max_{t \in [0, \infty)} |1 - F(t) - 1 + F_N(t)| \\ &= \max_{t \in [0, \infty)} |F(t) - F_N(t)| \end{aligned}$$

observamos que se trata del estadístico de contraste de Kolmogorov–Smirnov¹⁹ y su distribución se encuentra estudiada. Este estadístico permite construir tablas como la dada en la Tabla IV, donde se muestran diferentes valores del error δ para algunas combinaciones de n y q . Se observa que el error es proporcional a la raíz cuadrada del tamaño muestral, este hecho hace que normalmente en las aplicaciones se tome $N = \lceil (\frac{1}{\delta^2}) \rceil$, donde $\lceil \cdot \rceil$ es la parte entera de un número.

N	q		
	0,90	0,95	0,99
10	0,368	0,410	0,490
20	0,26	0,29	0,35
30	0,22	0,24	0,29
> 40	$\frac{1,22}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,36}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,63}{\sqrt{N}}$

Tabla IV. Valores de δ en función de N y q

Vida media

Un índice ampliamente empleado en el análisis de la fiabilidad es la vida media del sistema, esto es $E(T) = \mu_T$. Su estimador usual es la media muestral de la muestra aleatoria (m.a.) \bar{T}^N

$$\bar{T}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t^{(i)}$$

El teorema central del límite nos permite obtener intervalos de confianza con un nivel de confianza de $1 - \alpha$ para el parámetro μ_T mediante la expresión

$$\left[\bar{T}_N - \frac{t_{1-\alpha/2}}{\sqrt{N}} S_T, \bar{T}_N + \frac{t_{1-\alpha/2}}{\sqrt{N}} S_T \right]$$

donde $t_{1-\alpha/2}$ es el cuantil de orden $1 - \alpha/2$ de una distribución t –Student con $N - 1$ grados de libertad y S_T es la desviación estándar muestral.

Un problema asociado a la estimación de la vida media es determinar el criterio de paro para las simulaciones de Monte Carlo, esto es, determinar el tamaño muestral de la v.a. T . Un criterio de paro nos lo proporciona el teorema central del límite y el hecho de que para tamaños muestrales $N > 30$ la estimación de σ_T mediante la desviación típica muestral es excelente. El número de simulaciones necesario para estimar μ_T , con una probabilidad superior a $1 - \alpha$ de que el error en la estimación sea inferior a δ , es tomar

$$N > \left\{ 30, t_{1-\alpha/2} \frac{S_T^{30}}{\sqrt{\delta}} \right\}$$

donde S_T^{30} denota la desviación típica de la v.a. T con una m.a. $N = 30$.

La referencia 20 emplea un criterio de paro no apriorístico para detener la simulación de Monte Carlo. Si se desea estimar la esperanza matemática de una v.a. X , la simulación se detendrá, cuando el valor

$$\frac{E(\hat{X})}{\sigma(\hat{X})}$$

tienda a estabilizarse alrededor de algún valor, siendo respectivamente $E(\hat{X})$, $\sigma(\hat{X})$ la esperanza y la desviación típica del estimador \hat{X} de X . Para el caso de la vida media del

sistema esta expresión sería $\frac{\bar{T}_N}{S_T/\sqrt{n}}$.

Estimación de cuantiles de la función de fiabilidad

En algunas aplicaciones se desea garantizar una determinada probabilidad de que la vida del sistema sea superior a cierta duración. En esas aplicaciones el uso de la vida media del sistema como índice de fiabilidad no es adecuado y hay que recurrir a estimar los cuantiles de la función de fiabilidad, esto es, estimar $T_q = R^{-1}(q)$.

Este problema se puede ver como el inverso al tratado por los problemas clásicos del k -terminal y multiterminal. En estos problemas, dado un instante, se determina la probabilidad de que el sistema esté operativo a partir de las probabilidades de las componenetas del mismo. En el problema aquí tratado, dada una probabilidad, se desea encontrar el instante en el que la probabilidad de estar operativo el sistema es dicha probabilidad dada.

Un resultado de los métodos de estimación robusta es que el estadístico $\hat{T}_q = \hat{R}_N^{-1}(q)$, donde \hat{R}_N^{-1} es la inversa generalizada de la función de fiabilidad empírica, tiene una distribución asintótica normal de media T_q . Si conociésemos la varianza del estadístico \hat{T}_q , $V(\hat{T}_q)$, podríamos encontrar intervalos de confianza para la estimación del cuantil. La dificultad que se plantea es la estimación de la varianza del estadístico. Un procedimiento para este fin consistiría en generar varias m.a. T^N y calcular la varianza muestral del estimador. Este método es computacionalmente muy costoso y no es aplicable para redes o muestras de gran tamaño. Un método para estimar la varianza de un estimador (u otra característica de su distribución) es el introducido por la referencia 21. Este procedimiento se le denomina *bootstrap* y consiste en considerar la muestra obtenida, como si se tratase de una población. Mediante el método de Monte Carlo se pueden extraer artificialmente numerosas muestras (con reemplazamiento) de esta población. De este modo podemos construir una muestra de estimaciones y sobre ella calcular la varianza muestral, que nos dará una estimación “bootstrap” de la varianza del estimador. Lo anterior se concretiza en el procedimiento de la Tabla V. Este método obtiene buenos resultados para valores de $B = 100$, sin embargo aplicado a grandes muestras aleatorias requiere un gran esfuerzo computacional.

- (a) Se parte de una muestra aleatoria T^N de tamaño muestral N . Se construye su función de distribución empírica F^N .
- (b) Mediante el método de simulación de Monte Carlo se extraen artificialmente B muestras con reemplazamiento $T^{N,b}$, $b = 1, \dots, B$ de tamaño muestral N a partir de F^N . Para cada una de estas muestras se estima el cuantil de orden q , que lo denotamos por \hat{T}_q^b , $b = 1, \dots, B$.
- (c) Calcular

$$V_*(\hat{T}_q) = \frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B [\hat{T}_q^b - \bar{T}_q]^2$$

$$\text{con } \bar{T}_q = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{T}_q^b$$

$V_*(\hat{T}_q)$ es el *estimador bootstrap* de $V(\hat{T}_q)$.

Tabla V. Método de estimación bootstrap de $V(\hat{T}_q)$

Otro método de estimación es el denominado *jackknife*, que es computacionalmente más eficiente que el “bootstrap”, pero obtiene peores resultados. Este método considera las N muestras aleatorias que se pueden obtener al eliminar una observación de la muestra T^N . Para cada una de estas submuestras calcula el cuantil (o la magnitud) deseado, que denotamos $\hat{T}_{q,i}$ $i = 1, \dots, N$. A partir de estas cantidades calculamos

$$\begin{aligned}\hat{T}^i &= N\hat{T}_q - (N-1)\hat{T}_{q,i}, \quad i = 1, \dots, N \\ \hat{T}_q^J &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{T}^i \\ V_J(\hat{T}_q) &= \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (\hat{T}^i - \hat{T}_q^J)^2\end{aligned}$$

El valor \hat{T}_q^J es la estimación jackknife del cuantil T_q y $V_J(\hat{T}_q)$ la estimación de su varianza.

EXPERIENCIA NUMÉRICA

Los objetivos de esta sección son ilustrar los procedimientos anteriormente descritos y motivar la extensión de los problemas del k -terminal y multiterminal.

Hemos elegido como red de pruebas la llamada *dodecaedro* utilizada en los trabajos^{14,22,15}. Su topología se muestra en la Figura 4. Hemos supuesto que los nodos de la red no tienen posibilidad de fallar, mientras que sí los arcos. Hemos considerado que todos los arcos son idénticos y tienen el mismo modelo probabilístico para describir su vida. Hemos considerado un modelo exponencial, uniforme y normal. Para determinar los parámetros de estas distribuciones hemos supuesto que para todas ellas el cuantil de orden 0,95 es el valor 100.

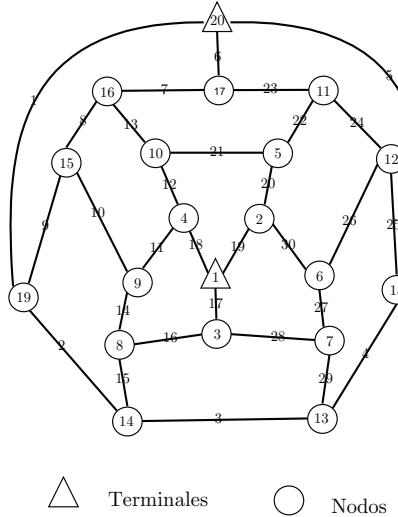


Figura 4. Dodecaedro

Es decir, que la probabilidad que un arco determinado esté funcionando después de 100 unidades de tiempo es 0,05. Esta condición determina únicamente el parámetro de la distribución exponencial, pero para la distribución normal y uniforme se debe exigir una segunda condición, debido a que estas distribuciones están parametrizadas por dos valores.

Hemos supuesto que la desviación típica de estas distribuciones es de 20. Sobre esta red nos hemos planteado el problema del multiterminal, queremos analizar la fiabilidad de la conexión entre el nodo 1 y 20 y viceversa.

Si deseasemos analizar la fiabilidad de la red en el instante 100, con la formulación clásica del problema del multiterminal, los tres modelos probabilísticos, debido a que todos los arcos tienen probabilidad 0,05 de estar operativos, conducirían al mismo comportamiento del sistema.

La aplicación de los métodos de simulación para evaluar la fiabilidad de sistemas es tal, que se ha desarrollado software específico para efectuar la simulación. Programas como TENDAL 1²³ son de carácter general o REANIPOS²⁴ son específicos para analizar la fiabilidad de sistemas de potencia. Por nuestra parte hemos elaborado el programa LIZARFIB que implementa los métodos anteriormente descritos. Además de los modelos probabilísticos recogidos en esta experiencia numérica, también se han implementado las v.a. Weibull, χ^2 y gama tanto para los arcos como para los nodos. Con este programa hemos generado una muestra aleatoria de tamaño 10,000. El coste computacional de la simulación ha sido de unos 250 segundos de CPU en un ordenador PC Pentium a 400 MHz con 384 megabytes de memoria RAM.

La gráfica de la Figura 5 muestra la estimación de las tres funciones de fiabilidad. La mayor discrepancia se observa entre la distribución exponencial y las otras dos. Esto es debido al hecho de que la varianza de la vida de los arcos es diferente entre la exponencial y las otras dos distribuciones. Se observa que para ciertos instantes, alrededor de 40, la probabilidad de que el sistema con componentes exponenciales esté operativo es casi 0, mientras que para los otros dos tipos de componentes es casi 1.

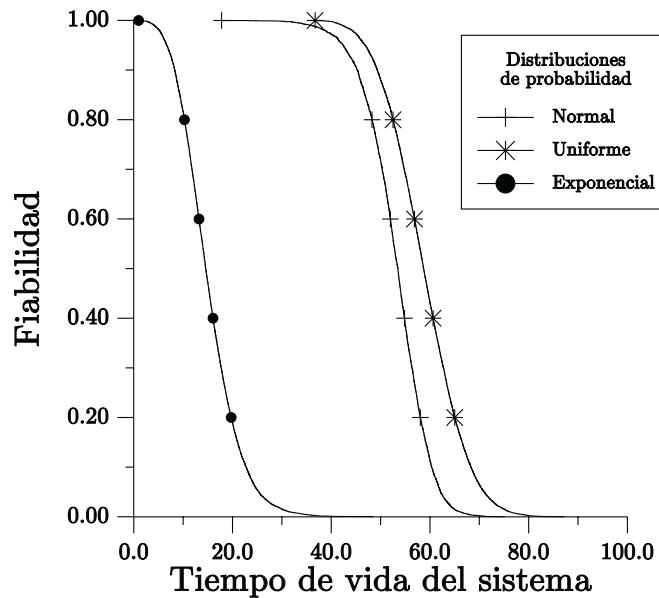


Figura 5. Estimaciones de la funciones de fiabilidad del sistema

La Figura 6 muestra la estimación de la vida media del sistema y los intervalos de confianza de un nivel de confianza del 0,99. Se observa que los sistemas tienen vidas medias diferentes. Nuevamente la vida media con componentes exponenciales es casi la mitad que para los otros dos tipos de componentes. También se ve que, con muy pocas simulaciones, la estimación del valor medio tiende a estabilizarse.

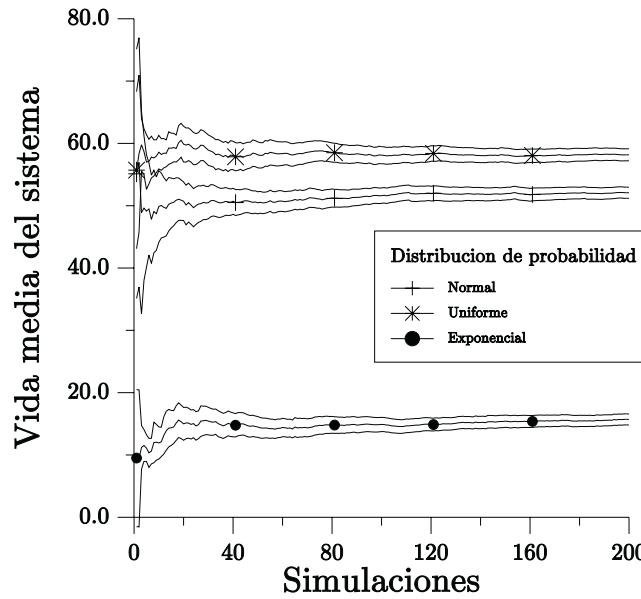


Figura 6. Evolución de la vida media del sistema

El tercer tipo de información derivada del modelo es la estimación de los cuantiles de la vida del sistema. En la Tabla VI se recoge la estimación del cuantil de orden 0,95 y la varianza *jackknife* del estimador. La topología de la red puede generar redundancias en las conexiones entre los terminales o, por contra, exigir que muchos elementos estén operativos para que lo esté el sistema. En esta red ocurre la segunda situación, donde el cuantil de orden 0,95 para cada arco es 100, mientras que el del sistema se ve reducido a la mitad.

Tipo de v.a.	Estimación de $q_{0,95}$	Varianza del estimador
Exponencial	32,02	0,701
Normal	62,18	0,002
Uniforme	54,89	0,006

Tabla VI. Estimación del quantil $q_{0,95}$ de la vida del sistema

CONCLUSIONES Y FUTURAS INVESTIGACIONES

Los problemas del k -terminal y multiterminal permiten el estudio de la degradación de las *comunicaciones* dentro de una red. En este trabajo se han generalizado estos problemas de modo que este análisis de la fiabilidad de la red se puede realizar en función del tiempo y no necesariamente para un valor fijo del mismo. Esta extensión es importante por dos aspectos: por un lado permite una modelización más precisa (mejores estimaciones) y, por otro, permite añadir nuevos aspectos dinámicos del análisis de la fiabilidad como decisiones operacionales (planificación a corto plazo), del sistema como el del mantenimiento preventivo, etc.

Se ha desarrollado un algoritmo de simulación de Monte Carlo que emplea técnicas de optimización en redes. Se ha desarrollado una implementación eficiente del mismo basado en la representación de grafos y se ha calculado su complejidad computacional.

Se ha analizado el modo y el tamaño muestral necesario para poder estimar la función de fiabilidad, vida media y los cuantiles de la duración del sistema.

Se ha desarrollado una experiencia numérica, en la que se ponen de manifiesto dos conclusiones: la primera es la gran discrepancia que puede existir en la evolución de la fiabilidad de sistemas en función de las distribuciones de probabilidad de sus elementos, pese a que en un momento dado ($T = 100$) todos los sistemas posean la misma probabilidad de vida; la segunda es que el procedimiento descrito, de simulación de Monte Carlo, es aplicable para redes de mediano y pequeño tamaño.

Un problema de gran relevancia económica es el diseño de redes fiables (síntesis de redes). Éste se formula mediante el siguiente problema de optimización estocástica

$$\begin{aligned} & \text{Min } f(y, p) \\ & \text{s.t. } \Pr((y, p) \in \Omega) \geq \hat{P} \\ & \quad y \in Y \end{aligned}$$

donde \hat{P} es una fiabilidad especificada del sistema u otro índice de fiabilidad, p son parámetros del sistema, y es el vector de variables de diseño e Y la región factible para estas variables. La solución a este problema proporciona la red más económica que sobrevive a ciertas situaciones de fallos, es decir, que satisface ciertos estándares de calidad.

Este tipo de problemas es una de las principales tareas de la industria de las telecomunicaciones. Los modelos que se han aplicado¹² incorporan en el diseño estrategias para aumentar la fiabilidad del sistema tales como exigir el enrutamiento de la demanda a través de varios caminos nodos (arcos) disjuntos. Pero no se recogen explícitamente el comportamiento aleatorio y dinámico de los fallos del sistema. Ambos aspectos pueden ser incorporados a través de los modelos que aquí planteamos.

La gran dificultad es poder resolver este tipo de problemas en las aplicaciones, ya que simplemente la evaluación del índice de fiabilidad para una red (y, p) requiere de un gran esfuerzo computacional, sin contar que el número de variables de diseño puede rondar las 1000 variables discretas y varias decenas de miles de variables continuas. Este campo, optimización de modelos estocásticos, es bastante reciente y se requiere desarrollar una metodología para abordar el problema. Pensamos que ésta pasa por adaptar técnicas clásicas de descomposición a este problema de optimización combinatoria en un ambiente aleatorio.

REFERENCIAS

- 1 B. Sanso, F. Soumis y M. Gendreau, "On evaluation of telecommunications network reliability using routing models", *IEEE Trans. Commun.*, Vol. **39**, pp. 1494–1501, (1991).
- 2 J. Duato, "A theory of fault-tolerant routing in wormhole networks", *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, Vol. **8**, pp. 790–802, (1997).
- 3 Z.P. Du y A. Nicholson, "Degradable transportation systems: sensitivity and readability analysis", *Transportation Research-B*, Vol. **3**, pp. 225–237, (1997).
- 4 Z. Cheng y T. Berger, "Reliability and availability analysis of Manhattan street networks", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. **42**, (1994).
- 5 W.E. Smith y K. S. Trivedi, "Dependability evaluation of a class multi-loop topologies for local area networks", *IBM Journal of Research and Development*, Vol. **33**, pp. 511–523, (1989).
- 6 P. Dhawan, "Effect of distributional assumption on separate component availability evaluation", Tesis de máster, College of Graduate Studies and Research, University of Saskatchewan, Saskatoon, (1984).

- 7 M. Chari, T. Feo y J.S Provan, "The delta-wye approximation procedures for two-terminal reliability", *Operations Research*, Vol. **44**, pp. 745–757, (1996).
- 8 R. Billinton y R. N. Allan, "Reliability evaluation of engineering systems: concepts and technique", Editorial Plenum Press, New York, (1983).
- 9 G. Fishman, "Monte Carlo. Concepts, algorithms and applications", Springer, New York, (1999).
- 10 S.E. Elmaghriby, "The estimation of some network parameters in the PERT model of activity networks: review and critique, en R.Slowinski y Weglarz (Eds.), "Advances in project scheduling", (1989).
- 11 V.G. Adlakha y V. G. Kulkarni, "A classified bibliography of research on PERT networks", *INFOR*, Vol. **27**, pp. 272–296, (1989).
- 12 D. Alevras, M. Grötschel y R. Wessäly, "Capacity and survivability models for telecommunication networks", *EURO/INFORMS*, Barcelona, pp. 187–200, (1997).
- 13 M. Ball, "Computational complexity of network reliability analysis: An overview", *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. **3**, pp. 230–239, (1986).
- 14 H. Cancela y M.E. Khadiri, "Recursive path conditioning Monte Carlo simulation of communication network reliability", Centre National de la Recherche Scientifique, INRIA, IRISA, Université de Rennes, Publicación N° 915, (1995).
- 15 G. Fishman, "A comparison of four Monte Carlo methods for estimating the probability of $s - t$ connectedness", *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. **35**, pp. 145–155, (1986).
- 16 A.N. Avramidis y J. Wilson, "Integrated variance reduction strategies for simulation", *Operations Research*, Vol. **44**, pp. 327–345, (1996).
- 17 N. Deo y C. Pang, "Shortest-path algorithms: taxonomy and annotation", *Networks*, Vol. **14**, pp. 275–323, (1984).
- 18 G. Gallo y S. Pallottino, "Shortest paths algorithms", *Annals of Operations Research*, Vol. **13**, pp. 3–79, (1988).
- 19 M.H. DeGroot, "Probabilidad y estadística", Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, S.A, Wilmington, Delaware, EE.UU., (1988).
- 20 R. Billinton y W. Li, "Reliability assessment of electric power system using Monte Carlo methods", Editorial Plenum Press, New York, EE.UU., (1994).
- 21 B. Efron, "Bootstrap methods: another look at Jackknife", *Ann. Stastist.*, Vol. **7**, pp. 1–26, (1979).
- 22 T. Elperin, I. Gertsbakh y M. Lomosov, "Estimation of network reliability using graph evolution models", *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. **40**, pp. 772–581, (1991).
- 23 I. García y J. Molinero, "Análisis de fiabilidad, disponibilidad y mantenibilidad de sistemas complejos", *Ingeniería Naval*, Vol. **691**, pp. 1–12, (1993).
- 24 M.H. Bollen y P. Massee, "REANIPOS: Reliability analysis of industrial power systems; background, models and use", Eindhoven University of Technology, Group of Electrical Energy Systems, Report EG/92/603, (1992).