

# Simulación por elementos finitos de la biomecánica del corazón fetal

E. Peña, J. Ohayon, Y. Usson, A. Azancot, M. Doblaré

Recibido: Abril 2010, Aceptado: Mayo 2010  
  Universitat Polit  cnica de Catalunya, Barcelona, España 2010

**Resumen** El objetivo de este trabajo es modelar y simular la contracción del corazón fetal a lo largo del ciclo cardíaco con el objetivo de entender la biomecánica del mismo, con ello se pretende ayudar a comprender los factores mecánicos que pueden contribuir a la aparición de malformaciones congénitas durante la gestación. Para ello se ha desarrollado un modelo 3D de elementos finitos de un corazón fetal de 23 semanas a partir de imágenes tomadas de fotografías y datos experimentales de orientación de fibras de medidas *post-mortem* de un corazón fetal humano. Para el modelado de las propiedades mecánicas es necesario utilizar un modelo hiperelástico fibrado que incorpora la activación mus-

cular como un término adicionado a la función densidad de energía de deformación. A partir de la simulación numérica se obtiene la distribución de deformaciones y tensiones a lo largo de la pared del miocardio y se compara la cinemática y el volumen eyectado con resultados experimentales. Para muchos autores estas variables son algunos de los factores de los que depende el crecimiento de la pared durante la gestación y, por tanto, estos resultados pueden ayudar a una mejor comprensión del crecimiento y evolución del corazón fetal.

## FINITE ELEMENT STUDY OF THE FETAL HEART BIOMECHANICS DURING CARDIAC CYCLE

**Summary** The purpose of this research is to study the fetal heart biomechanics during cardiac cycle. A 3D FEM of the human fetal heart (FH) is built by using the geometry and the fiber orientation measurements of a post-mortem FH. An anisotropic hyperelastic constitutive law describing the mechanical properties of the active myocardium is used. Kinematics of the heart and ejection fraction predicted by the model are compared with experimental observations. Our model can quantify the transmural distribution of strains and stresses during the cardiac cycle. Several authors supported the idea that fetal growth depends on the mean wall stress averaged through the space and during the cardiac cycle. For this reason, the results obtained in this work can be relevant in order to better understand the human FH growth process.

E. Peña, M. Doblaré  
Grupo de Estructuras y Modelado de Materiales  
Instituto de Investigación en Ingeniería de Aragón (I3A)  
Universidad de Zaragoza  
María de Luna, 3. E-50018 Zaragoza, España  
Tel.: 34 976 761912; Fax: 34 976 762578  
CIBER-Bioingenier  a, Biomateriales y Nanomedicina  
e-mail: fany@unizar.es; mdoblare@unizar.es

J. Ohayon  
Laboratory TIMC-IMAG-DynaCell, CNRS-UMR 5525  
Joseph Fourier University  
BP 217, 38043 Grenoble Cedex 9, France  
Tel.: 33 456 520124; Fax: 33 456 520022  
e-mail: Jacques.Ohayon@univ-savoie.fr

Y. Usson  
Laboratory TIMC-IMAG-RFMQ, CNRS UMR 5525  
Joseph Fourier University  
BP 217, 38043 Grenoble Cedex 9, France  
Tel.: 33 456 520074; Fax: 33 456 520022  
e-mail: yves.usson@imag.fr

A. Azancot  
Perinatal Cardiology and Physiology, Robert Debré Hospital  
48 Blvd. Serurier, 75019 Paris, France  
Tel.: 33 140 032200; Fax: 33 140 034770  
e-mail: annabelle.azancot@rdb.ap-hop-paris.fr

## 1. Introducción

Las enfermedades congénitas cardíacas se presentan durante la gestación o el nacimiento y se producen por-

que el corazón no se desarrolla de manera normal. Aproximadamente 8 de cada 1.000 niños en el mundo nacen con una o más enfermedades congénitas cardíacas o circulatorias. Es también conocido que existe una componente mecánica entre los factores que producen dichas enfermedades [1]. Las tensiones afectan al flujo coronario encargado del transporte del oxígeno al corazón y en el consumo de éste por parte de dicho órgano; a su vez, dicho consumo de oxígeno se estima que está relacionado con el desarrollo de ciertas hipertrofias fetales [2]. Un paso previo al estudio de estas enfermedades sería la comprensión de la estructura, desarrollo y mecánica del corazón fetal sano durante el período de gestación.

El sistema cardiovascular fetal es fisiológicamente diferente al del adulto en numerosos aspectos. En primer lugar, en la composición del miocardio fetal hay una mayor proporción de células no-contráctiles, hasta un 60 % en el feto frente a un 30 % en el miocardio adulto. Segundo, la reproducción celular en el feto varía respecto al adulto, así como las propiedades de relajación de dichas células que forman la pared del miocardio. Por último, el patrón circulatorio fetal es completamente diferente al del adulto, fundamentalmente debido a que los ventrículos derecho e izquierdo trabajan en paralelo al producirse la oxigenación de la sangre a través de la placenta y no de los pulmones. Este fenómeno de circulación paralela hace que el ventrículo derecho bombee aproximadamente entre el 60-70 % del flujo sanguíneo, debido a que éste, al contrario que en el corazón adulto, es la cámara con mayor capacidad [3].

En la bibliografía pueden encontrarse una gran cantidad de estudios analíticos [1,2,4-6] y computacionales [7-11] desarrollados para explorar el comportamiento mecánico del corazón adulto. Sin embargo, y debido a la ausencia de datos experimentales y a la dificultad en la obtención de imágenes y parámetros geométricos, son muy pocos los estudios realizados sobre el corazón fetal [12,13,35].

El objetivo de este trabajo es presentar una metodología para modelar y simular la contracción del corazón fetal a lo largo del ciclo cardíaco, para así poder entender la biomecánica del mismo, y por tanto, ayudar a comprender los factores mecánicos que puedan afectar en la aparición de malformaciones congénitas durante la gestación.

## 2. Modelo de elementos finitos del corazón fetal

El corazón fetal humano objeto de este estudio fue obtenido y procesado habiendo obtenido previamente los requisitos y permisos legales prescritos por las leyes y comités de Ética en Francia y España. Dichos fetos

corresponden a nacimientos inviables a los cuales se les realizó una interrupción legal del embarazo siempre relacionados con problemas en la salud de la madre. Los resultados presentados en este trabajo corresponden, a modo de ejemplo, a un feto de 23 semanas de gestación.

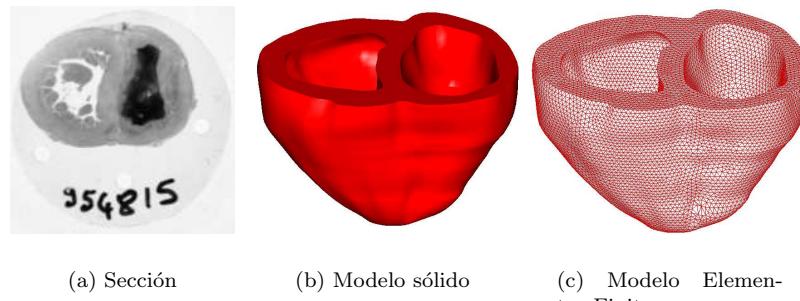
### 2.1. Reconstrucción de la geometría

Tras su obtención, el corazón fue fijado y sumergido durante un mes en una solución del 4 % de formaldeído. Posteriormente, los especímenes se prepararon diseccionando los ventrículos de las aurículas y sumergiéndolos en una resina de metacrilato de metilo (MMA) manteniendo la verticalidad de la muestra con el objetivo de no perder la referencia anatómica [14]. En cada corazón, se realizaron secciones transversales desde la base al ápex de pequeño espesor ( $750 \mu\text{m}$ ) en un microtomo rotacional a baja velocidad para evitar la deformación de la geometría [15]. La geometría del corazón se obtuvo a partir del análisis de las fotografías obtenidas para cada una de las secciones realizadas mediante segmentación manual de cada uno de los contornos (ImageJ software, NIH, Bethesda, MD, USA). Las líneas obtenidas se importaron al programa comercial I-DEAS v.9 donde se reconstruyó la geometría del sólido y el modelo de elementos finitos (25571 nodos y 116361 tetraedros lineales) (Figura 1).

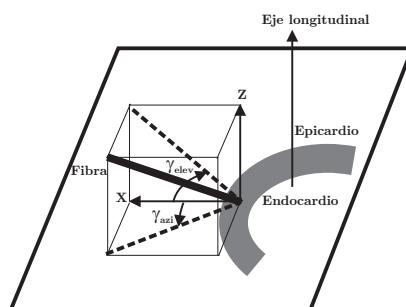
### 2.2. Orientación de las fibras del miocardio

A partir de las imágenes generadas con el microscopio de luz polarizada puede obtenerse la distribución y orientación de las fibras de miocardio, ya que éstas presentan propiedades birrefringentes cuando se encuentran embebidas en MMA [16]. La velocidad de la luz es mucho más baja cuando ésta viaja a través del eje longitudinal de la fibra (eje mayor) que a través del transversal (eje menor), por tanto la cantidad de luz transmitida por una fibra del miocardio depende de su orientación, lo cual nos permite conocer la distribución de la misma a lo largo de la pared. La orientación de las fibras se ha definido a partir de dos ángulos: el ángulo de elevación  $\gamma_{elev}$  (correspondiente a la oblicuidad de la fibra respecto del plano de la sección) y el ángulo acimutal  $\gamma_{azi}$  (el ángulo de la fibra contenido en el plano de la sección), véase la Figura 2, cuya resolución es  $\pm 1$  en  $\gamma_{azi}$  y  $\pm 1$  en  $\gamma_{elev}$  para ángulos contenidos en el rango de [10, 60] y  $\pm 5$  en el resto [14-16].

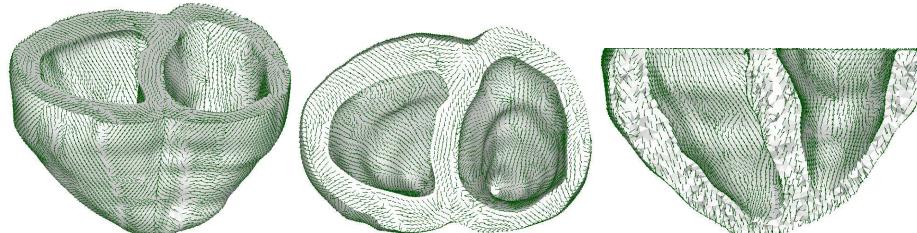
Dado de que el origen de  $\gamma_{azi}$  se toma desde el eje Este-Oeste, véase la Figura 2, el ángulo transversal  $\gamma_{tra}$  se define de forma estándar en coordenadas esféricas



**Figura 1.** Geometría y modelo de elementos finitos del corazón fetal de 23 semanas. Ventrículo derecho a la izquierda de la imagen y ventrículo izquierdo a la derecha de la misma



**Figura 2.** Definición del sistema de referencia y de los ángulos empleados para la orientación de las fibras de miocardio. Adaptado de [15]



**Figura 3.** Distribución a lo largo del miocardio en diferentes cortes longitudinales

como

$$\gamma_{tra} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{azi} \quad (1)$$

Con la metodología utilizada, el ángulo de elevación  $\gamma_{elev}$  queda limitado a 90, siendo éste su principal inconveniente. Basándonos en evidencias experimentales, se supone que el ángulo varía a lo largo de la pared cambiando su signo aproximadamente a mitad de distancia entre el epicardio y el endocardio [17-20] el método no es capaz de distinguir medidas de ángulo  $\gamma_{elev}$  positivas de las negativas  $\gamma_{elev}$  definimos un nuevo ángulo, ángulo helicoidal ( $\gamma_{hel}$ ) obtenido como:  $\gamma_{hel} = \gamma_{elev}$  desde el endocardio a la superficie media y  $\gamma_{hel} = -\gamma_{elev}$  desde la superficie media al epicardio.

La dirección de la fibra en coordenadas esféricas la podremos calcular, en este caso, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{a_f} = & \cos(\gamma_{hel}) \sin(\gamma_{tra}) \mathbf{e}_r + \cos(\gamma_{hel}) \cos(\gamma_{tra}) \mathbf{e}_{\theta} + \\ & + \sin(\gamma_{hel}) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  son os eixos de la base  $(R, \theta, Z)$ .

Por último, los puntos en el espacio que definen la distribución de fibras miocárdicas obtenida experimentalmente, no necesariamente tienen que coincidir con los nodos del modelo de elementos finitos, así que se interpola para la distribución nodal del modelo, obteniéndose finalmente la dirección de las fibras para el modelo de elementos finitos desarrollado, Figura 3.

### 3. Modelo constitutivo de la pared

El tejido muscular del corazón fetal contiene tejido conectivo, células y, en el espacio poroso, líquido extracelular que consiste principalmente en agua. Sin embargo, en el modelo aquí considerado, no se va a incluir ni la viscoelasticidad ni la poroelasticidad del tejido [7, 21, 22], tratándose el miocardio como un tejido hiperelástico cuasi-incompresible [9].

#### 3.1. Comportamiento hiperelástico pasivo de la pared del miocardio

Para reproducir el comportamiento pasivo del miocardio se ha empleado un comportamiento hiperelástico transversalmente isótropo asociado a las fibras del miocardio. La dirección de las fibras se define, en la configuración indeformada  $\Omega_0$  en el instante  $t = 0$  en el punto  $\mathbf{X} \in \Omega_0$ , mediante un vector unitario  $\mathbf{m}_0(\mathbf{X})$ ,  $|\mathbf{m}_0| = 1$  que se mueve solidario al sólido durante la deformación. La dirección de las fibras en cada instante de tiempo viene definida por otro vector unitario  $\mathbf{m}$  definido en la configuración deformada  $\Omega_t$  en el instante  $t$ . Su alargamiento  $\lambda$  definido como la relación entre la longitud de la fibra en la configuración deformada e indeformada, se expresa mediante

$$\lambda\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\mathbf{m}_0(\mathbf{X})$$

$$\lambda^2 = \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \cdot \mathbf{m}_0 = \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{C} \mathbf{m}_0 \quad (3)$$

con  $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$  y  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  el tensor de deformación de Cauchy-Green por la derecha.

Para evitar los problemas numéricos asociados a la casi-incompresibilidad del tejido es necesario aplicar la descomposición volumétrica-isocórica del gradiente deformación y desacoplar ambos efectos; de esta forma, se considera una descomposición multiplicativa de  $\mathbf{F}$  en una parte volumétrica y una parte isocórica, tal que,  $\mathbf{F} = J^{\frac{1}{3}} \bar{\mathbf{F}}$  y  $\mathbf{C} = J^{\frac{2}{3}} \bar{\mathbf{C}}$  [23].

Suponemos ahora que la función densidad de energía de deformación  $\Psi$  puede descomponerse en una parte volumétrica y una parte isocórica mediante [24]

$$\Psi(\mathbf{C}) = \Psi_{\text{vol}}(J) + \Psi_{\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0) \quad (4)$$

donde  $\Psi_{\text{vol}}(J)$  y  $\Psi_{\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0)$  son funciones escalares dependientes del jacobiano ( $J = \det \mathbf{F}$ ), el tensor Cauchy-Green modificado ( $\bar{\mathbf{C}}$ ) y  $\mathbf{m}_0$  respectivamente, que describen la respuesta volumétrica y isocórica del miocardio.

En función de los invariantes [25],  $\Psi$  puede escribirse como

$$\Psi = \Psi_{\text{vol}}(J) + \Psi_{\text{iso}}(\bar{I}_1(\bar{\mathbf{C}}), \bar{I}_2(\bar{\mathbf{C}}), \bar{I}_4(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{m}_0), \bar{I}_5(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{m}_0)) \quad (5)$$

con  $\bar{I}_1$  e  $\bar{I}_2$  invariantes del tensor Cauchy-Green modificado  $\bar{\mathbf{C}}$  (Nótese que  $I_3 \approx J$  y  $\bar{I}_3 = 1$ ), y los pseudo-invariantes  $\bar{I}_4 = \mathbf{m}_0 \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{m}_0$  e  $\bar{I}_5 = \mathbf{m}_0 \cdot \bar{\mathbf{C}}^2 \cdot \mathbf{m}_0$  que caracterizan la respuesta de las fibras [25].  $\bar{I}_4$  tiene un claro significado físico ya que se define como la longitud de las fibras al cuadrado e  $\bar{I}_5$  está asociado a la deformación transversal de las mismas. Se considera norma habitual en biomecánica omitir la dependencia de la función  $\Psi$  del invariante  $\bar{I}_5$ , como consecuencia de la fuerte correlación existente entre  $\bar{I}_5$  con  $\bar{I}_4$  [26].

Con todo lo anterior, el segundo tensor de tensiones se obtiene de forma estándar para materiales hiperelásticos como

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C}, \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0)}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{S}_{\text{vol}} + \mathbf{S}_{\text{iso}} \quad (6)$$

donde  $\mathbf{S}$  se descompone en una contribución puramente volumétrica ( $\mathbf{S}_{\text{vol}}$ ) y otra isocórica ( $\mathbf{S}_{\text{iso}}$ ) [27].

El tensor de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  es  $1/J$  el empuje de  $\mathbf{S}$  ( $\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \chi_*(\mathbf{S})$ ), es decir,  $\sigma_{ij} = J^{-1} F_{iI} F_{jJ} S_{IJ}$  [28], tal que, de (6), se obtiene

$$\boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{1} + \frac{2}{J} \text{dev}[\bar{\mathbf{F}} \frac{\partial \Psi(\mathbf{C}, \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0)}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \bar{\mathbf{F}}^T] \quad (7)$$

con  $\mathbf{1}$  el tensor identidad de segundo orden y  $\text{dev}$  es el operador desviador en la descripción espacial [29].

El segundo tensor elástico en su expresión material puede expresarse, también de forma estándar, como

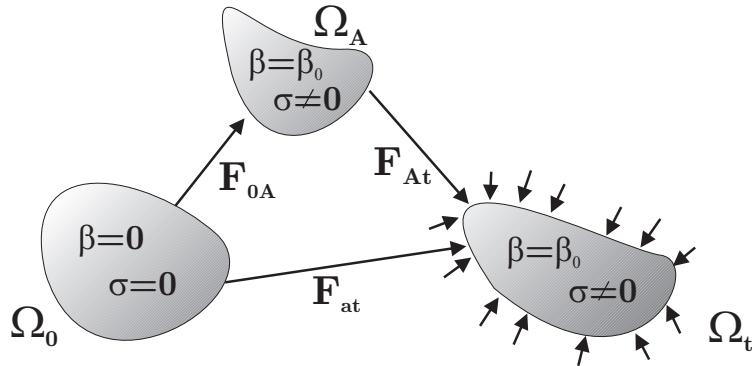
$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\text{vol}} + \mathbf{C}_{\text{iso}} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{\text{vol}}}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{\text{iso}}}{\partial \mathbf{C}} \quad (8)$$

Finalmente, el tensor elástico en descripción espacial denotado como  $\mathbf{c}$ , se define como  $1/J$  veces el empuje de  $\mathbf{C}$ , tal que

$$\mathbf{c} = J^{-1} \chi_*(\mathbf{C}) = \mathbf{c}_{\text{vol}} + \mathbf{c}_{\text{iso}} \quad (9)$$

#### 3.2. Comportamiento hiperelástico activo de la pared del miocardio

En sus estudios experimentales Lin and Yin [30] mostraron que durante el proceso de contracción del tejido miocárdico se produce un cambio en la reología del material. Desde un estado pasivo libre de tensiones  $\Omega_0$ , la activación de las fibras musculares puede modelarse a través de dos transformaciones (Figura 4). La primera, desde el estado  $\Omega_0$  al estado virtual  $\Omega_A$ , donde cambian las propiedades del material y se contrae el músculo. De esta forma, la primera transformación se describe a través del tensor gradiente  $\mathbf{F}_{0A}$  [31]. En esta transformación, cambia la reología del material a través de la función densidad de energía mediante una función de activación  $\beta(t)$  dependiente del tiempo y está causada por la tensión de activación desarrollada por las



**Figura 4.** Descripción de las transformaciones producidas durante el proceso de activación

células musculares. En la segunda transformación, las cargas exteriores, si las hubiese, se aplican desde el estado  $\Omega_A$  deformando el sólido a través de  $\mathbf{F}_{At}$  en  $\Omega_t$ . De esta manera, la transformación global desde el estado  $\Omega_0$  al estado  $\Omega_t$  es una transformación elástica de la forma  $\mathbf{F}_{0t} = \mathbf{F}_{At}\mathbf{F}_{0A}$ .

El cambio en las propiedades de material durante la activación puede describirse a través de la suposición de una función densidad de energía dependiente del tiempo como [6]

$$\Psi(\mathbf{C}, \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0, t) = \Psi_{\text{vol}}(J) + \Psi_{\text{iso}}^{\text{pas}}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0) + \beta(t)\Psi_{\text{iso}}^{\text{act}}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0) \quad (10)$$

donde  $\bar{\mathbf{C}}$  es el tensor de deformación Cauchy-Green por la derecha de un estado arbitrario cualesquiera  $\Omega$  obtenido a partir de la transformación de la configuración  $\Omega_0$  (el estado  $\Omega$  puede ser uno de los estados  $\Omega_{A*}$ ,  $\Omega_A$  o  $\Omega_t$  mostrados en la Figura 4),  $\Psi_{\text{iso}}^{\text{pas}}$  representa la contribución de la matriz extracelular y la parte pasiva de las fibras miocárdicas (nótese que la matriz extracelular únicamente presenta un comportamiento pasivo),  $\Psi_{\text{act}}^f$  representa la contribución activa de dichas fibras y  $\beta(t)$  es una función de activación reguladora del proceso y que toma un valor igual a cero cuando el tejido se encuentra en estado pasivo e igual a 1 cuando el tejido está en su máximo estado de contracción ( $0 \leq \beta \leq 1$ ). Para el caso del corazón, el estado pasivo corresponde a diástole y el de máxima activación al final de la sístole. El último término de la derecha de la ecuación (10) nos dará el cambio en las propiedades del material durante el proceso de activación.

Si consideramos el sólido como un material homogéneo e hiperelástico transversalmente isótropo a través del vector unitario  $\mathbf{m}_0$ , podemos incorporar la contracción muscular mediante una tensión de activación  $T_0$  aplicada en la dirección  $\mathbf{m}$  definida en  $\Omega_t$  a través de  $\lambda\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}_{0A}\mathbf{m}_0(\mathbf{X})$ .

El tensor de tensiones de Cauchy en  $\Omega_t$  se define como (7)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & \boldsymbol{\sigma}^{\text{pas}} + \boldsymbol{\sigma}^{\text{act}} = p\mathbf{1} + \frac{2}{J} \text{dev}[\bar{\mathbf{F}}_{0t} \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}^{\text{pas}}(\bar{\mathbf{C}}_{0t}, \mathbf{m}_0, t)}{\partial \bar{\mathbf{C}}_{0t}} \bar{\mathbf{F}}_{0t}^T] + \\ & + \frac{2}{J} \text{dev}[\bar{\mathbf{F}}_{0t} \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}^{\text{act}}(\bar{\mathbf{C}}_{0t}, \mathbf{m}_0, t)}{\partial \bar{\mathbf{C}}_{0t}} \bar{\mathbf{F}}_{0t}^T] + \beta(t)T_0(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) \end{aligned} \quad (11)$$

Nótese que se ha considerado una única familia de fibras a través del vector  $\mathbf{m}$ , pero podría considerarse el comportamiento activo asociado a dos familias de fibras, en dicho caso tendríamos dos tensiones de activación  $T_0^m$  y  $T_0^n$ . En esta formulación, la activación muscular se modela mediante la modificación de la definición estándar del tensor de tensiones para materiales hiperelásticos –adición del último término de la ecuación (11)–[4, 5].

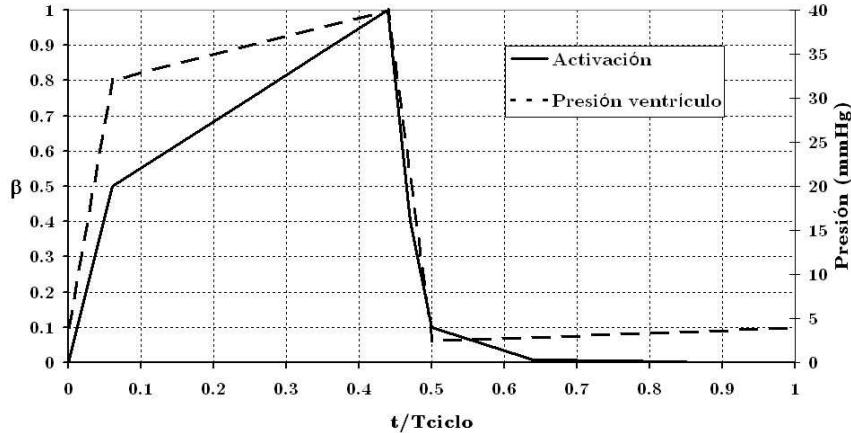
El tensor elástico se obtiene a partir de la expresión (9) y tendrá la forma siguiente

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = & \mathbf{c}^{\text{pas}} + \mathbf{c}^{\text{act}} + \beta(t)T_0\bar{I}_4[\bar{I}_4(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) + \\ & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \otimes \bar{\mathbf{b}} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \frac{1}{9}\bar{I}_4\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] \end{aligned} \quad (12)$$

con  $\mathbf{c}^{\text{pas}}$  y  $\mathbf{c}^{\text{act}}$  definidos en (9).

Es por tanto la función de activación  $\beta(t)$  la que nos define realmente el proceso de activación y deberá ser obtenida a través de datos experimentales o modelos de los procesos electrofisiológicos de estos tejidos.

Otra forma de definir el comportamiento activo, más consistente con el modelo es, utilizando la descomposición presentada en la Figura 4, emplear una función densidad de energía que incorpore de forma natural la activación muscular, de manera que al aplicar la ecuación (7) se obtenga la tensión de activación sin necesidad de modificar su definición como en (11) [31]. Para la simulación del ciclo cardíaco se emplea la siguiente



**Figura 5.** Ciclo cardíaco

función densidad de energía propuesta por Lin and Yin [30]

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{vol}} &= \frac{1}{D} \ln^2[J] \\ \Psi_{\text{iso}}^{\text{pas}} &= C_{1p}[e^{C_{2p}[I_1-3]^2 + C_{3p}[I_1-3][I_4-1] + C_{4p}[I_4-1]^2} - 1] \\ \Psi_{\text{iso}}^{\text{act}} &= C_{0a} + C_{1a}[I_1 - 3][I_4 - 1] + C_{2a}[I_1 - 3]^2 + \\ &\quad + C_{3a}[I_4 - 1]^2 + C_{4a}[I_1 - 3] + \beta(t)C_{5a}[I_4 - 1] \end{aligned} \quad (13)$$

Nótese que  $\beta(t)C_{5a} = T_0$  representa la tensión de activación en la dirección de las fibras miocárdicas y que nos permite describir la variación de la activación durante el ciclo cardíaco a través del parámetro  $\beta(t)$  dependiente del tiempo; y que la derivada del último término de  $\Psi_{\text{iso}}^{\text{act}}$  en la ecuación (13) corresponde al último término de la ecuación (12). A diferencia del adulto [30,32], no existen en bibliografía datos experimentales de propiedades mecánicas del tejido miocárdico del corazón fetal humano. Es por ello que en este trabajo se emplean las propiedades obtenidas por Peña *et al.* [35] mediante análisis inverso de parámetros, ecuación (14), para un corazón fetal de 23 semanas

$$\begin{aligned} C_{1p} &= 0,0089T_g + 0,7733 \\ T_0 &= 1,1497T_g - 2,9618 \end{aligned} \quad (14)$$

y reflejadas en la Tabla 1.

El modelo de comportamiento ha sido incorporado al código comercial de Elementos Finitos ABAQUS mediante una subrutina de usuario, empleándose una formulación estándar en desplazamientos con aproximación lineal donde la incompresibilidad es forzada mediante el parámetro de penalización  $\frac{1}{D}$ .

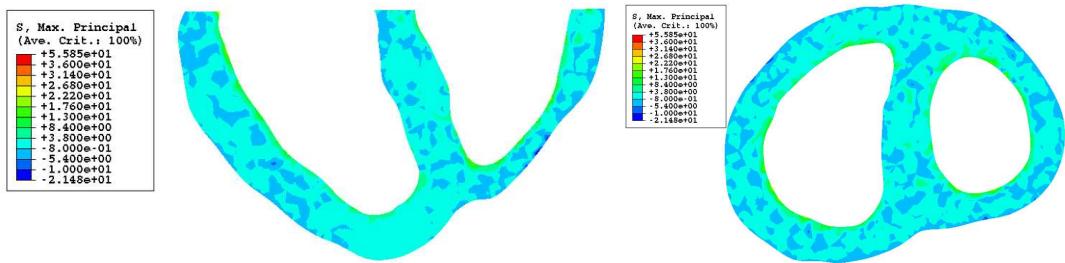
**Tabla 1.** Parámetros de material para el comportamiento pasivo y activo para un corazón de 23 semanas de gestación (KPa)

	Pasivo	$C_{1p}$	$C_{2p}$	$C_{3p}$	$C_{4p}$
		0.978	3.05	-2.24	1.92
	Activo	$C_{1a}$	$C_{2a}$	$C_{3a}$	$C_{4a}$
		-3.52	25.37	27.05	0.0011
					$T_0$
					23.4813

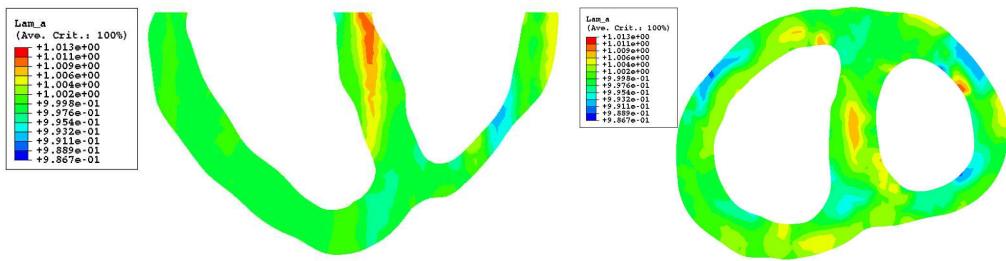
### 3.3. Condiciones de Contorno y Cargas

Las condiciones de contorno y cargas se definieron de la forma siguiente. El ciclo cardíaco se reconstruye a través de 4 puntos conocidos que corresponden a la apertura y cierre de las válvulas y que nos da la siguiente activación de las fibras:  $\beta = 0$  al final de la diástole,  $\beta = 0,5$  al principio de la eyeccción,  $\beta = 1$  al final de sístole  $\beta = 0,1$  al inicio de la fase llenado (denominadas ED, BE, ES y BF, respectivamente) [13]. Para cada uno de estos puntos se conoce la fracción del tiempo en el ciclo  $-0,5T_{\text{cycl}}, 0,06T_{\text{cycl}}, 0,38T_{\text{cycl}}$  y  $0,06T_{\text{cycl}}$  con  $T_{\text{cycl}}$ , el tiempo total del ciclo [13], la amplitud de la activación y la presión en el ventrículo izquierdo, Figura 5.

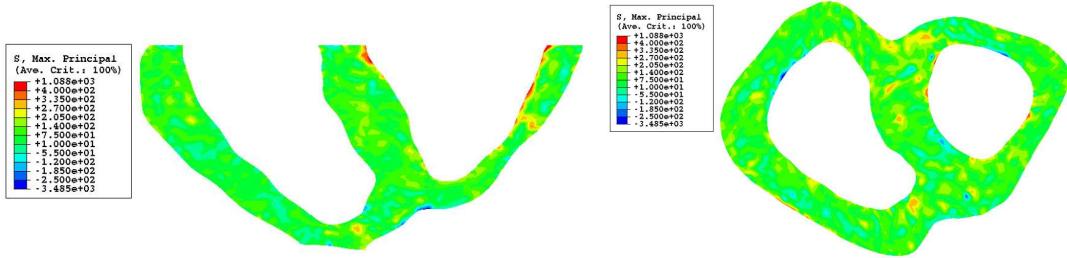
Dado que la relación entre la presión entre el ventrículo izquierdo y derecho es aproximadamente 60-70 % para el corazón fetal humano, la presión máxima aplicada correspondiente a un corazón de 23 semanas de gestación es de 40 y 60 mmHg para el ventrículo derecho e izquierdo respectivamente [13]. La activación se aplica al mismo tiempo a todas las fibras del corazón definidas en cada punto de Gauss. El desplazamiento vertical de la base, así como, todos los grados de libertad de tres



**Figura 6.** Tensión principal máxima al final de diástole



**Figura 7.** Alargamiento de las fibras al final de diástole



**Figura 8.** Tensión principal máxima al final de sístole

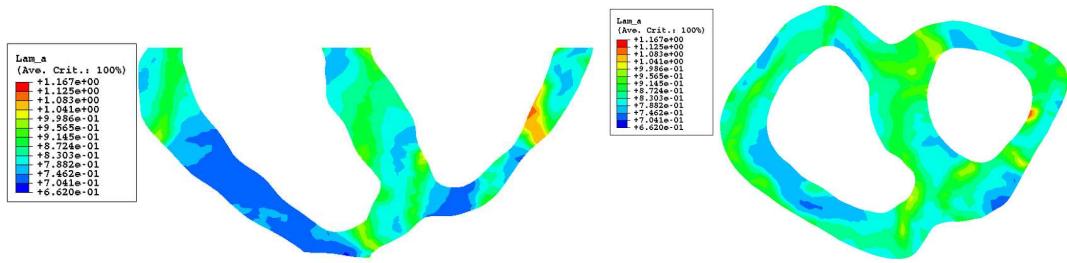
nudos de la parte central de la base se encuentran fijos simulando así la sujeción de las aurículas.

#### 4. Resultados

A falta de datos experimentales que permitan comparar y validar el modelo, se muestran los resultados de la simulación con el objetivo de mostrar las potencialidades del mismo. La distribución de tensión principal máxima y del alargamiento de las fibras a lo largo de la pared del miocardio al final de diástole se muestran en las Figuras 6 y 7 respectivamente. Únicamente se muestran, por claridad, los resultados obtenidos para la sección central del corazón en dirección frontal y en la base del corazón. Al final de la diástole, es decir, cuando las fibras del corazón se encuentran prácticamente relajadas y por tanto no hay contracción muscular, úni-

camente se tiene en cuenta el comportamiento pasivo del tejido. En este caso, y como cabía esperar, el acortamiento de las fibras a lo largo de la pared es prácticamente nulo (0.98) o incluso, como puede apreciarse en la Figura 5, existe un alargamiento de las fibras (1.03) en el septum debido a la presión interna aplicada en ambas cavidades al mismo tiempo. La tensión principal máxima (3.8 KPa) tiene lugar en las superficies del endocardio debido a la presión interna de diástole –4 mmHg– que se aplica en las dos cavidades. Ésta se produce de forma concentrada en la pared del endocardio estando el resto de la pared prácticamente relajada.

Al final de la sístole, cuando las fibras miocárdicas se encuentran al máximo de su contracción, el comportamiento del tejido se debe fundamentalmente a la parte activa. Las distribuciones de tensión principal máxima y del alargamiento de las fibras al final de la sístole aparecen en las Figuras 8 y 9 respectivamente. La tensión



**Figura 9.** Alargamiento de las fibras al final de sístole

principal máxima esta distribuida por todo el endocardio siendo mayor en la superficie del endocardio del ventrículo izquierdo (36 KPa), y el alargamiento de las fibras es de contracción con el máximo acortamiento en el miocardio del ventrículo derecho (0.66). Tal y como era de esperar, la distribución de tensiones a lo largo de la pared es homogénea excepto concentraciones altas y muy puntuales de tensión no esperados, cuyos valores están muy por encima del rango fisiológico (1083 KPa) debidas a la distorsión que se produce en numerosas ocasiones en los elementos tetraédricos, especialmente en aquellos muy pequeños sometidos a grandes deformaciones, durante la contracción muscular y cuyos valores, por tanto, no deben ser tenidos en cuenta en el análisis de los resultados.

## 5. Conclusiones

En este trabajo, se ha presentado una metodología para la reconstrucción y modelado tridimensional de la biomecánica del corazón fetal. A partir de imágenes de secciones del corazón y de los datos experimentales para distribución de fibras en el miocardio del mismo espécimen se ha construido un modelo de elementos finitos que, junto con un modelo hiperelástico fibrado que incorpora la activación muscular, nos ha permitido el estudio de la mecánica de dicho corazón fetal humano.

El modelo aquí propuesto posee algunas limitaciones que han de tenerse en cuenta a la hora de interpretar los resultados. En primer lugar, las propiedades mecánicas no son específicas del individuo, sino tomadas de la literatura [35]. Dichas propiedades corresponden a un valor promedio (aproximado) para un corazón fetal de 23 semanas obtenidos a partir de un análisis inverso de parámetros. Segundo, la contracción del músculo cardíaco ha sido activada al mismo tiempo en todos los puntos de Gauss. Es sabido, que para un corazón adulto la onda de activación recorre el corazón contrayendo al músculo en diferentes instantes de tiempo [33]. Sin embargo, dicha onda no es bien conocida para el co-

razón fetal debido a que la contracción muscular del ventrículo derecho e izquierdo es síncrona. Por último, la metodología supone que el corazón, en la configuración indeformada se encuentra libre de tensiones [34]. Por lo que los autores conocen, no existen datos experimentales sobre las tensiones residuales presentes en el corazón fetal que permitan su estimación, su inclusión no modificaría la metodología mostrada y permitiría obtener resultados más realistas, especialmente en el comportamiento pasivo de la pared.

A pesar de estas limitaciones, los resultados obtenidos mediante la simulación numérica para sístole son muy cercanos a los datos experimentales. Por ejemplo, un análisis de la cinemática obtenida nos permite compararla con los resultados presentados en otros trabajos, así los desplazamientos para los ejes longitudinal y mayor del ventrículo izquierdo medidos en su zona central –14.2 mm y 4.1 mm – son muy similares a los obtenidos en [35] – 13.6 mm y 3.8 mm respectivamente -. También, la fracción de eyección (relación entre el volumen en sístole y diástole) obtenida es del 79.5 % frente al 84.7±1.8 % obtenida por [36].

La simulación numérica permite obtenerse la distribución de deformaciones y tensiones a lo largo de la pared del miocardio. Para muchos autores éstas variables son unos de los factores de los que depende el crecimiento de la pared durante la gestación y nuestros resultados pueden ayudar a una mejor comprensión del crecimiento y evolución del corazón fetal, y por tanto, ayudar a comprender los factores mecánicos que puedan afectar en la aparición de malformaciones congénitas durante la gestación.

## 6. Agradecimientos

Los autores desean agradecer la financiación recibida al Ministerio de Ciencia e Innovación a través de los proyectos de investigación DPI2007-63254 y DPI2007-65601-C03-00 y del CIBER-ISCIII, y a la Comunidad Económica Europea a través del Sexto Programa Mar-

co mediante el proyecto FP6-2002-SME-1-513226. Por último, agradecen la financiación recibida por E. Peña durante su estancia post-doctoral por el Programa Europa de la Caja de Ahorros de la Inmaculada (CAI) y la Diputación General de Aragón.

## Referencias

1. Dumesnil J.G., Shoucri R.M. (1991) Quantitative relationships between left ventricular ejection and wall thickening and geometry. *J Appl Physiol* 70:48–54.
2. Humphrey J.D., Yin F.C.P. (1989) Constitutive relations and finite deformations of passive cardiac tissue II: Stress analysis in the left ventricle. *Circ Res* 65:805–817.
3. Rychik J. (2004) Fetal cardiovascular physiology, *Pediatr Cardiol* 25:201–209.
4. Taber L.A. (1991) On a nonlinear theory for muscle shells: Part II. Application to the beating left ventricle. *ASME J Biomech Eng.* 113:63–71.
5. Taber L.A., Yang M., Podszus W.W. (1996) Mechanics of ventricular torsion. *J. Biomech* 29:745–752.
6. Ohayon J., Chadwick R.S. (1988) Effects of collagen microstructure on the mechanics of the left ventricle. *Biophys J.* 54:1077–1088.
7. Huyghe J.M., van Campen D.H., Arts T., Reneman R.M. (1992) A two phase finite element model of the beating left ventricle. *Am J Physiol Heart Circ Physiol* 262:H1256–H1267.
8. van Campen D.H., Huyghe J.M., Bovendeerd P.H.M., Arts T. (1994) Biomechanics of the heart muscle, *Eur J. Mech A/Solids* 13:19–41.
9. Nash M.P., Hunter P.J. (2001) Computational mechanics of the heart. *J Elasticity*. 61:113–141.
10. Stevens C., Remme E., LeGrice I., Hunter P. (2003) Ventricular mechanics in diastole: material parameter sensitivity. *J. Biomech.* 36:737–748.
11. Bettendorff-Bakman D.E., Schmid P., Lukenheimer P.P., Niederer P., A finite element study relating to the rapid filling phase of the human ventricles, *J. Theor. Biol.* In press.
12. Menigault E., Vieyres P., Lepoivre B., Durand A., Pourcelot L., Berson M. (1997) Fetal heart modelling based on a pressure-volume relationship. *Med. Biol. Eng. Comput.* 35:715–721.
13. Ohayon J., Cai H., Youk P.S., Usson Y., Azancot A. (2002) A model of structural and functional development of the normal human fetal left ventricle based on a global growth law. *Comp. Meth. in Biomed. and Biomedical Eng.* 2:113–126.
14. Jouk P.S., Usson Y., Michalowicz G., Parazza F. (1995) Methods for study of the three-dimensional orientation of myocardial cells by means of polarized light microscopy. *Microsc. Res.* 30:480–490.
15. Ohayon J., Usson Y., Jouk P.S., Cai H. (1999) Fibre orientation in human fetal heart and ventricular mechanics: A small perturbation analysis. *Comp. Meth. in Biomed. and Biomedical Eng.* 2:83–105.
16. Jouk P.S., Usson Y., Michalowicz G., Grossi L. (2000) Three-dimensional cartography of the pattern of the myofibers in the second trimester fetal human heart. *Anat. Embryol.* 202:103–118.
17. LeGrice I.J., Hunter P.J., Smaill B.H. (1997) Laminar structure of the heart: a mathematical model. *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.* 41:H2466–H2476.
18. Hsu E.W., Muzikant A.L., Matulevicius S.A., Penland R.C., Henriquez C.S. (1998) Magnetic resonance myocardial fiber-orientation mapping with direct histological correlation. *Am. J. Physiol. Heart. Circ. Physiol.* 274:H1627–H1634.
19. Arts T., Costa K.D., Covell J.W., McCulloch A. D. (2001) Relating myocardial laminar architecture to shear strain and muscle fiber orientation. *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.* 280: H2222–H2229.
20. LeGrice I.J., Hunter P.J., Young A., Smaill B. H. (2001) The architecture of the heart: a data-based model. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* 359:1217–1232.
21. Yang M., Taber L.A. (1991) The possible role of poroelasticity in the apparent behaviour of passive cardiac muscle. *J. Biomech.* 24:587–597.
22. Peña E., Calvo B., Martínez M. A., Doblaré M. (2007) An anisotropic visco-hyperelastic model for ligaments at finite strains: Formulation and computational aspects. *Int. J. Solids Struct.* 44:760–778.
23. Flory P.J. (1961) Thermodynamic relations for high elastic materials. *Trans. Faraday Soc.* 57:829–838.
24. Simo J.C., Taylor R.L. (1991) Quasi-Incompressible Finite Elasticity in Principal Stretches. Continuum Basis and Numerical Algorithms. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 85:273–310.
25. Spencer A.J.M. 1954 Theory of Invariants in: *Continuum Physics*. Academic Press. New York. 239–253.
26. Weiss J.A., Maker B.N. (1996) Govindjee S., Finite element implementation of incompressible, transversely isotropic hyperelasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 135:107–128.
27. Holzapfel G.A. (2000) *Nonlinear Solid Mechanics*. Wiley. New York.
28. Marsden J.E., Hughes T.J.R. (1994) *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover. New York.
29. Simo J.C., Hughes T.J.R. (1998) *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag. New York.
30. Lin D.H.S., Yin F.C.P. (1998) A multiaxial constitutive law for mammalian left ventricular myocardium in steady-state barium contracture or tetanus. *ASME J. Biomech. Eng.* 120:504–517.
31. Bourdarias C., Gerbi S., Ohayon J. (2003) A three dimensional finite element method for biological active soft tissue formulation in cylindrical polar coordinates. *ESAIM: Mathm. Model. Nume. Anal.* 37:725–739.
32. Moulton M.J., Creswell L.L., Downing S.W., Actis R.L., Szabo B. A., Pasque M.K. (1996) Myocardial material property determination in the in vivo heart using magnetic resonance imaging. *Int. J. Card. Imaging* 12:153–167.
33. Torrent-Guasp F., Kocica M. J., Corno A. F., Kameda M., Carreras-Costa F., Flotats A., Cosin-Aguillarg J., Wenh H., (2005) Towards new understanding of

- the heart structure and function. *Eur. J. Cardiothorac. Surg.* 27:191–201.
34. Peña E., Calvo M.A.M.B., Doblaré M. (2006) On the numerical treatment of initial strains in soft biological tissues. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 68:836–860.
  35. Peña E., Ohayon J., Azancot A., Tracqui P., Doblaré M., (2010) Unraveling Changes in Myocardium Contractility during Human Fetal Growth: A Finite Element Analysis Based on in-vivo Ultrasound Measurements. *Ann. Biomed. Eng.* In press.
  36. Hsieh Y.Y., Chang F.C., Tsai H.D., Tsai C.H. (2002) Longitudinal survey of fetal ventricular ejection and shortening fraction throughout pregnancy *Ultrasound Obstet Gynecol* 16:46–48.
  37. Peña E., del Palomar A.P., Calvo B., Martínez M.A., Doblaré M., (2007) Computational modelling of diarthrodial joints. Physiological, pathological and pos-surgery simulations. *Arch Comput Method Eng* 14(1):47–91.
  38. Bonet J. , Wood R.D. (2008) *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis* Cambridge University Press, Cambridge.

## 7. Anexo

Para aplicar la metodología presentada en este trabajo, es necesario conocer la expresión completa, en función de los invariantes, del tensor de tensiones y del tensor elástico para un material hiperelástico fibrado con una familia de fibras. En este apéndice, se muestra dicha expresión completa para un tejido biológico en el que no se considera la dependencia con  $I_5$ . Para más detalle respecto de cómo se obtienen dichas expresiones véase por ejemplo [27,37].

Partiendo de la forma desacoplada de la función densidad de energía

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_{\text{vol}}(J) + \Psi_{\text{iso}}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0) = \\ &= \Psi_{\text{vol}}(J) + \Psi_{\text{iso}}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_4) \end{aligned} \quad (15)$$

El segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff se puede obtener en función de los invariantes de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} &= J p \mathbf{C}^{-1} + 2 J^{-\frac{2}{3}} \left[ \left( \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_1} + \bar{I}_1 \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_2} \right) \mathbf{1} - \right. \\ &\quad - \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_2} \mathbf{C} + \bar{I}_4 \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_4} \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0 + -\frac{1}{3} \left( \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_1} \bar{I}_1 + \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_2} \bar{I}_2 + \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_4} \bar{I}_4 \right) \bar{\mathbf{C}}^{-1} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

donde la presión hidrostática  $p$  se define como  $p = \frac{d\Psi_{\text{vol}}(J)}{dJ}$

Siguiendo (16), el tensor de tensiones de Cauchy ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) en función de los invariantes se obtiene como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = p \mathbf{1} &+ \frac{2}{J} \left[ \left( \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_1} + \bar{I}_1 \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_2} \right) \bar{\mathbf{b}} - \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_2} \bar{\mathbf{b}}^2 + \right. \\ &\quad + \bar{I}_4 \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_4} \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_1} \bar{I}_1 + 2 \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_2} \bar{I}_2 + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial \bar{I}_4} \bar{I}_4 \right) \mathbf{1} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Finalmente, podemos obtener el tensor elástico en su versión material, aplicando (8) sobre (16), y para la versión espacial aplicando  $1/J$  veces el empuje de  $\mathbf{C}$ , tal que

$$\mathbf{c} = J^{-1} \chi_*(\mathbf{C}) = \mathbf{c}_{\text{vol}} + \mathbf{c}_{\text{iso}} \quad (18)$$

donde  $\mathbf{c}_{\text{vol}}$  se define como

$$\mathbf{c}_{\text{vol}} = p(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - 2\mathbf{I}) \quad (19)$$

con  $\mathbf{I}$  el tensor de identidad de orden cuatro; y  $\mathbf{c}_{\text{iso}}$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{\text{iso}} = -\frac{2}{3} (\text{dev} \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \text{dev} \boldsymbol{\sigma}) &- \frac{4}{3J} [(\Psi_{\text{iso}}^1 + \\ &+ \Psi_{\text{iso}}^2 \bar{I}_1) \bar{I}_1 - \Psi_{\text{iso}}^2 (\bar{I}_1^2 - 2\bar{I}_2) + \Psi_{\text{iso}}^4 \bar{I}_4] (\mathbf{I} - \\ &- \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + 4[(\Psi_{\text{iso}}^{11} + 2\Psi_{\text{iso}}^{12} \bar{I}_1 + \Psi_{\text{iso}}^2 + \\ &+ \Psi_{\text{iso}}^{22} \bar{I}_1^2) \bar{\mathbf{b}} \otimes \bar{\mathbf{b}} - (\Psi_{\text{iso}}^{12} + \Psi_{\text{iso}}^{22} \bar{I}_1) (\bar{\mathbf{b}} \otimes \bar{\mathbf{b}}^2 + \\ &+ \bar{\mathbf{b}}^2 \otimes \bar{\mathbf{b}}) + \Psi_{\text{iso}}^{22} (\bar{\mathbf{b}}^2 \otimes \bar{\mathbf{b}}^2) - \Psi_{\text{iso}}^2 \mathbf{I}_{\bar{\mathbf{b}}} + \\ &+ (\Psi_{\text{iso}}^{14} + \Psi_{\text{iso}}^{24} \bar{I}_1) \bar{I}_4 (\bar{\mathbf{b}} \otimes \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \\ &+ \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \otimes \bar{\mathbf{b}}) - \Psi_{\text{iso}}^{22} \bar{I}_4 (\bar{\mathbf{b}}^2 \otimes \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \\ &+ \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \otimes \bar{\mathbf{b}}^2) + \Psi_{\text{iso}}^{44} \bar{I}_4^2 (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) - \\ &- \frac{4}{3} [(\Psi_{\text{iso}}^{11} \bar{I}_1 + \Psi_{\text{iso}}^{12} \bar{I}_1^2 + \Psi_{\text{iso}}^{12} \bar{I}_2 + \Psi_{\text{iso}}^2 \bar{I}_1 + \\ &+ 2\Psi_{\text{iso}}^{22} \bar{I}_1 \bar{I}_2 + \Psi_{\text{iso}}^{14} \bar{I}_4 + \Psi_{\text{iso}}^{24} \bar{I}_1 \bar{I}_4) \mathbf{b} - (\Psi_{\text{iso}}^{12} \bar{I}_1 + \\ &+ 2\Psi_{\text{iso}}^{22} \bar{I}_2 + \Psi_{\text{iso}}^2 + \Psi_{\text{iso}}^{24} \bar{I}_4 + \Psi_{\text{iso}}^{26} \bar{I}_6) \bar{\mathbf{b}}^2 + \\ &+ (\Psi_{\text{iso}}^{14} \bar{I}_1 + 2\Psi_{\text{iso}}^{22} \bar{I}_2 + \Psi_{\text{iso}}^{44} \bar{I}_4) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \otimes \bar{\mathbf{b}} + \\ &+ \mathbf{1} \otimes ((\Psi_{\text{iso}}^{11} \bar{I}_1 + \Psi_{\text{iso}}^{12} \bar{I}_1^2 + \Psi_{\text{iso}}^{12} \bar{I}_2 + \Psi_{\text{iso}}^2 \bar{I}_1 + \\ &+ 2\Psi_{\text{iso}}^{22} \bar{I}_1 \bar{I}_2 + \Psi_{\text{iso}}^{14} \bar{I}_4 + \Psi_{\text{iso}}^{24} \bar{I}_1 \bar{I}_4) \mathbf{b} - (\Psi_{\text{iso}}^{12} \bar{I}_1 + \\ &+ 2\Psi_{\text{iso}}^{22} \bar{I}_2 + \Psi_{\text{iso}}^2 + \Psi_{\text{iso}}^{24} \bar{I}_4) \bar{\mathbf{b}}^2 + (\Psi_{\text{iso}}^{14} \bar{I}_1 + \\ &+ 2\Psi_{\text{iso}}^{24} \bar{I}_2 + \Psi_{\text{iso}}^{44} \bar{I}_4) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m})] + \frac{4}{9} [((\Psi_{\text{iso}}^{11} - \\ &- \Psi_{\text{iso}}^{12}) \bar{I}_1^2 + 2\Psi_{\text{iso}}^2 \bar{I}_2 + 4\Psi_{\text{iso}}^{22} \bar{I}_2^2 + 4\Psi_{\text{iso}}^{12} \bar{I}_1 \bar{I}_2 + \\ &+ 2\Psi_{\text{iso}}^{14} \bar{I}_1 \bar{I}_4 + 4\Psi_{\text{iso}}^{24} \bar{I}_2 \bar{I}_4 + \Psi_{\text{iso}}^{44} \bar{I}_4^2) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] \end{aligned} \quad (20)$$

donde  $\mathbf{I}_{\bar{\mathbf{b}}} = -\mathbf{b} \odot \mathbf{b} = -\frac{1}{2}(b_{ik}b_{jl} + b_{il}^{-1}b_{jk})$  y para simplificar la geometría se ha utilizado la siguiente nomenclatura  $\Psi_{\text{iso}}^i = \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial I_i}$  y  $\Psi_{\text{iso}}^{ij} = \frac{\partial \Psi_{\text{iso}}}{\partial I_i \partial I_j}$ .

## 8. Formulación débil

La versión espacial del principio de los trabajos virtuales se expresa:

$$\delta W(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \delta W_{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \delta W_{ext}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \quad (21)$$

donde

$$\delta W_{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{e} dv \quad (22)$$

siendo  $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1})$  el tensor de deformación de Euler-Almansi.

$$\delta W_{ext}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \rho[\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}] \cdot \delta \mathbf{u} dv + \int_{\partial \Omega_{\sigma}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} ds \quad (23)$$

y  $\delta$  la linealización de cada variable en la dirección de la variación admisible  $\delta \mathbf{u}$ .

Consideramos, además, un problema cuasi-estático, tal que  $\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  y que las cargas exteriores (fuerzas volumétricas  $\mathbf{b}$  y vector tensión en el contorno  $\bar{\mathbf{t}}$ ) son “no seguidoras” (independientes de la deformación), tal que la linealización del trabajo virtual de las fuerzas exteriores es despreciable (en caso contrario véase por ejemplo [38]),  $D_{\Delta \mathbf{u}} \delta W_{ext}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ , entonces la linealización de la ecuación (21) únicamente se calcula para  $\delta W_{int}$ . La idea es primero realizar la operación de pull-back de las variables espaciales a la configuración indeformada (trabajo virtual interno en descripción material), linealizar y después realizar la operación de tirón hacia la configuración espacial de nuevo (Derivada de Lie [28]).

Comenzando por el pull-back

$$\delta W_{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \delta \mathbf{e}(\mathbf{u}) dv = \int_{\Omega_0} \mathbf{S}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) : \delta \mathbf{E}(\mathbf{u}) dV \quad (24)$$

con  $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$  el tensor de deformación de Green-Lagrange y linealizando la expresión obtenemos

$$D_{\Delta \mathbf{u}} \delta W_{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_0} [\delta \mathbf{E}(\mathbf{u}) : D_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{S}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) + \mathbf{S}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) : D_{\Delta \mathbf{u}} \delta \mathbf{E}(\mathbf{u})] dV \quad (25)$$

El primer término de (25) corresponde a la matriz de rigidez material y el segundo a la matriz de rigidez geométrica, que puede expresarse

$$D_{\Delta \mathbf{u}} \delta W_{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_0} [\delta \mathbf{E}(\mathbf{u}) : \mathbf{C}(\mathbf{u}) : D_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{E}(\mathbf{u}) + \mathbf{S}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) : D_{\Delta \mathbf{u}} \delta \mathbf{E}(\mathbf{u})] dV \quad (26)$$

Aplicando el empuje a (26) y considerando la relación  $dv = J dV$ , la linealización del trabajo virtual en la configuración espacial nos quedaría como [27]

$$\begin{aligned} & D_{\Delta \mathbf{u}} \delta W_{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \\ &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \delta u_a}{\partial x_b} \mathbf{c}_{abcd} \frac{\partial \Delta u_c}{\partial x_d} + \frac{\partial \delta u_a}{\partial x_b} \frac{\partial \Delta u_a}{\partial x_d} \sigma_{bd} \right] dv \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial \delta u_a}{\partial x_b} [\mathbf{c}_{abcd} + \delta_{ac} \sigma_{bd}] \frac{\partial \Delta u_c}{\partial x_d} dv \end{aligned} \quad (27)$$

donde  $(\mathbf{c} + \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\sigma})$  representa el tensor elástico y que incluye la parte material y geométrica de la matriz de rigidez tangente.