

Análise de placas laminadas compósitas através de funções de base radial e polinómios de Legendre

Antonio J.M. Ferreira

Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Rua Dr. Roberto Frias, 4200-465 Porto, Portugal
Tel.: 351-22-957 87 13; Fax: 351-22-953 73 52
e-mail: ferreira@fe.up.pt

Resumen

Neste trabalho utiliza-se uma teoria de deformação de primeira ordem baseada em expansões de Legendre para placas laminadas compósitas e uma discretização por funções de base radial. Este método sem malha combinada com esta teoria de deformação permite calcular deslocamentos e tensões com grande qualidade.

ANALYSIS OF COMPOSITE PLATES USING A FIRST-ORDER SHEAR DEFORMATION THEORY BASED ON LEGENDRE POLYNOMIALS AND A MESHLESS FORMULATION BASED ON THE MULTIQUADRIC RADIAL BASIS FUNCTION METHOD

Summary

In the present study a first-order theory for composite laminated plates based on Legendre polynomial expansion through the thickness is discretized using a meshless method based on the multiquadric radial basis function method. The method allows a very accurate prediction of the field variables.

INTRODUÇÃO

As placas de materiais compósitos são uma importante aplicação dos materiais compósitos. As camadas de materiais compósitos são empilhadas de forma orientada para construir laminados de espessura fina ou espessa. Para a análise destas placas é habitual utilizar teorias de deformação clássica, de primeira ou terceira ordem e ainda teorias com aproximação por camadas¹⁻¹³. Neste trabalho utiliza-se uma versão de primeira ordem da teoria de ordem superior de Batra e Vidoli^{14,15}, através do uso de polinómios de Legendre em z como uma função básica para o desenvolvimento duma teoria adequada.

Os métodos sem malha têm constituído uma alternativa eficiente ao método dos elementos finitos. Os métodos sem malha podem ser classificados como Smooth Particle Hydrodynamics¹⁶⁻¹⁸, Diffuse Element Method¹⁹, Element Free Galerkin²⁰⁻²², Reproducing Kernel Particle Method²³⁻²⁸ and HP Clouds²⁹.

Neste trabalho utilizam-se as funções de base radial, que foram inicialmente usadas por Hardy^{30,31} na interpolação de dados geográficos e posteriormente usadas por Kansa para a solução de problemas de derivadas parciais^{32,33}. Existe uma boa revisão das diferentes funções de base radial no livro de Liu³⁴, destacando-se as funções geradas por Powell³⁵, Coleman³⁶, Sharan *et al.*³⁷, Wendland³⁸, entre outros.

Este método foi usado em problemas de engenharia³⁹⁻⁴¹, problemas de sólidos bidimensionais⁴²⁻⁴⁴ e mais recentemente pelo autor em estruturas de materiais compósitos^{12,45,46}.

Este artigo foca pela primeira vez a utilização das funções de base radial numa teoria de primeira ordem baseada em expansões de Legendre. Utilizam-se as funções multi-

quádricas^{47,32}, embora se possam também usar outras funções com semelhante resultado final.

O artigo está organizado da seguinte forma: na secção apresenta-se em resumo a metodologia de solução por funções de base radial. Na secção apresentam-se os detalhes da formulação baseada em expansão de Legendre. Na secção apresenta-se o método de cálculo dos factores correctivos de corte. Na secção realiza-se a interpolação das equações de equilíbrio estático e das condições fronteira. A secção apresenta e discute alguns exemplos numéricos de placas de compósitos. Finalmente apresentam-se as principais conclusões do trabalho.

SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE FRONTEIRA POR FUNÇÕES DE BASE RADIAL

As funções de base radial geram-se através da distância entre os nós da rede de pontos, tendo em conta um centro \mathbf{x}_j e a função na forma $g(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|)$. Eventualmente, a função de base radial depende dum parâmetro de forma c , tomando então a função de base radial a expressão^{32,33,48,47,49,50} $g(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, c\|)$. É o caso por exemplo das funções multiquádricas ou multiquádricas inversas. Algumas das funções típicas usadas para a solução de problemas de fronteira, são as multiquádricas $g_j(\mathbf{x}) = (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$, as multiquádricas inversas $g_j(\mathbf{x}) = (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|^2 + c^2)^{-\frac{1}{2}}$, as gaussianas $g_j(\mathbf{x}) = e^{-c^2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|^2}$ e as splines poliharmónicas $g_j(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|^2 \log \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|$. Neste trabalho usamos as funções multiquádricas.

Usando o método não simétrico de colocação proposto por Kansa^{32,33} é possível resolver um problema de fronteira, com domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e um sistema de equações de derivadas parciais na forma

$$Lu(x) = s(x) \subset \mathbb{R}^n \quad (1)$$

$$Bu(x)|_{\partial\Omega} = f(x) \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

onde $\partial\Omega$ representa a fronteira do problema. Consideram-se pontos ao longo da fronteira, $(\mathbf{x}_j, j = 1, \dots, N_B)$ e no interior do domínio $(\mathbf{x}_j, j = N_B + 1, \dots, N)$. O interpolante para a solução $u(\mathbf{x})$ é agora definido como

$$s(\mathbf{x}, c) = \sum_{j=1}^N a_j g(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|, c) \quad (3)$$

Colocando os valores de fronteira e as equações de derivadas parciais nos pontos da fronteira e no interior do domínio, respectivamente, estabelecem-se as seguintes equações lineares

$$s_B(\mathbf{x}, c) \equiv \sum_{j=1}^N a_j Bg(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|, c) = \lambda(\mathbf{x}_i), i = 1, \dots, N_B \quad (4)$$

$$s_L(\mathbf{x}, c) \equiv \sum_{j=1}^N a_j Lg(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|, c) = \Phi(\mathbf{x}_i), i = N_B + 1, \dots, N \quad (5)$$

onde $\lambda(\mathbf{x}_i)$, $\Phi(\mathbf{x}_i)$ são os valores prescritos nos nós de fronteira e os valores das funções nos nós de domínio, respectivamente.

Temos então um sistema de equações com uma matriz de coeficientes não simétrica, estruturada na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} B\mathbf{g} \\ L\mathbf{g} \end{bmatrix} [\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} \lambda \\ \Phi \end{bmatrix} \quad (6)$$

Torna-se importante referir que este sistema poderá vir a tornar-se mal condicionado⁴⁷, tendo em conta a estrutura cheia da matriz.

TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM

A teoria de primeira ordem usada neste trabalho baseia-se nas mesmas suposições da teoria clássica, com a excepção de permitir a relaxação da condição de normalidade da "normal" à superfície média da placa, através da expansão dos deslocamentos (u, v, w) como funções de Legendre na direcção da coordenada da espessura. Esta teoria, na sua versão aqui apresentada é semelhante à teoria de Mindlin de primeira ordem. Assim, as normais à superfície média não permanecem normais à superfície média após a deformação da placa. As normais à superfície média permanecem inextensíveis, pelo que o deslocamento transversal w não é uma função da coordenada da espessura z .

O campo de deslocamentos correspondente é definido por

$$u(x, y, z) = L_0(z)u_0(x, y) + L_1(z)u_1(x, y) \quad (7)$$

$$v(x, y, z) = L_0(z)v_0(x, y) + L_1(z)v_1(x, y) \quad (8)$$

$$w(x, y, z) = L_0(z)w_0(x, y) \quad (9)$$

Os polinómios de Legendre são obtidos por

$$\int_{-t/2}^{t/2} L_i(z)L_j(z)dz = \delta_{ij}, i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Em particular os primeiros dois polinómios são obtidos por

$$L_0(z) = \frac{1}{\sqrt{t}}, L_1(z) = \frac{2}{t}\sqrt{\frac{3}{t}}z \quad (11)$$

As relações deformação-deslocamentos são dadas por:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + L_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ L_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + L_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \\ L_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + L_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + L_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} + L_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ L_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial L_1}{\partial z} u_1 \\ L_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial L_1}{\partial z} v_1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Então as deformações são expressas por

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \end{pmatrix} \quad (14)$$

onde as componentes de membrana, flexão e corte são obtidas, respectivamente, por

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^{(0)} \\ \epsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ L_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ L_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} + L_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^{(1)} \\ \epsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ L_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} \\ L_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + L_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial L_1}{\partial z} u_1 \\ L_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial L_1}{\partial z} v_1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Considerando um laminado de camadas ortotrópicas e desprezando a tensão σ_z em cada camada, as relações tensão-deformação no sistema coordenado local, para cada camada, podem ser expressos por

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{pmatrix} \quad (18)$$

onde os índices 1 e 2 são respectivamente as direcções das fibras e ortogonais às fibras, 3 representa a direcção normal à placa, sendo os componentes de rigidez reduzida Q_{ij} obtidos por

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & Q_{12} &= \nu_{12}Q_{22} \\ Q_{33} &= G_{12} & Q_{44} &= k_2G_{23} & Q_{55} &= k_1G_{31} \\ \nu_{21} &= \nu_{12}\frac{E_2}{E_1} \end{aligned} \tag{19}$$

onde E_1 , E_2 , ν_{12} , G_{12} , G_{23} e G_{31} são as propriedades materiais da camada. Os factores de corte k_1, k_2 são calculados com base numa metodologia explicada mais adiante.

Tendo em conta uma adequada transformação de coordenadas, as relações tensão-deformação no sistema de coordenadas global ($x - y - z$) podem ser obtidas, para cada camada, por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{20}$$

As equações de equilíbrio da primeira teoria são derivadas pelo principio dos trabalhos virtuais, onde a energia virtual de deformação (δU) e o trabalho virtual realizado pelas forças aplicadas (δV) são expressos por

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sigma_{xx} \left(\delta\epsilon_{xx}^{(0)} + z\delta\epsilon_{xx}^{(1)} \right) + \sigma_{yy} \left(\delta\epsilon_{yy}^{(0)} + z\delta\epsilon_{yy}^{(1)} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tau_{xy} \left(\delta\gamma_{xy}^{(0)} + z\delta\gamma_{xy}^{(1)} \right) + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz}^{(0)} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz}^{(0)} \right] dz \right\} dx dy \\ &= \int_{\Omega_0} \left(N_{xx}\delta\epsilon_{xx}^{(0)} + M_{xx}\delta\epsilon_{xx}^{(1)} + N_{yy}\delta\epsilon_{yy}^{(0)} + M_{yy}\delta\epsilon_{yy}^{(1)} + N_{xy}\delta\gamma_{xy}^{(0)} \right. \\ &\quad \left. + M_{xy}\delta\gamma_{xy}^{(1)} + Q_x\delta\gamma_{xz}^{(0)} + Q_y\delta\gamma_{yz}^{(0)} \right) dx dy \end{aligned} \tag{21}$$

$$\delta V = - \int_{\Omega_0} q\delta w_0 dx dy \tag{22}$$

onde Ω_0 representa o plano médio do laminado e

$$\begin{Bmatrix} N_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} dz \quad (23)$$

$$Q_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha z} dz \quad (24)$$

onde α, β tomam os símbolos x, y . Os momentos e as forças de corte são obtidas por

$$M_{xx} = \frac{2}{t} \sqrt{\frac{3}{t}} \left(D_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \quad (25)$$

$$M_{yy} = \frac{2}{t} \sqrt{\frac{3}{t}} \left(D_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \quad (26)$$

$$M_{xy} = \frac{2}{t} \sqrt{\frac{3}{t}} D_{33} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \quad (27)$$

$$Q_x = A_{55} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{2}{t} \sqrt{\frac{3}{t}} u_1 \right) \quad (28)$$

$$Q_y = A_{44} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{2}{t} \sqrt{\frac{3}{t}} v_1 \right) \quad (29)$$

Note-se que nesta abordagem de primeira ordem e considerando apenas laminados simétricos, u_0, v_0 e os correspondentes esforços resultantes podem ser retirados das equações de Euler-Lagrange. Substituindo em $\delta U, \delta V$, tendo em conta que as deformações virtuais podem ser expressos em termos dos deslocamentos generalizados, integrando por partes para libertar as derivadas dos deslocamentos generalizados e usando o lema fundamental do cálculo de variações, obtendo-se assim as equações de Euler-Lagrange¹³

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + f = 0 \rightarrow A_{55} \left(L_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{2}{t} \sqrt{\frac{3}{t}} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + A_{44} \left(L_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{2}{t} \sqrt{\frac{3}{t}} \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + f = 0 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \\ \rightarrow & \frac{2}{t} \sqrt{\frac{3}{t}} \left(D_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + D_{33} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} \right) \right) - A_{55} \left(L_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{2}{t} \sqrt{\frac{3}{t}} u_1 \right) = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y = 0 \\ \rightarrow & \frac{2}{t} \sqrt{\frac{3}{t}} \left(D_{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + D_{33} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right) \right) - A_{44} \left(L_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{2}{t} \sqrt{\frac{3}{t}} v_1 \right) = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

As componentes de rigidez são obtidas por

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{nc} \overline{Q}_{ij}^{(k)} [z_{k+1} - z_k]; i, j = 4, 5; \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{nc} \overline{Q}_{ij}^{(k)} [z_{k+1}^3 - z_k^3]; i, j = 1, 2, 3 \quad (33)$$

onde z_k e z_{k+1} são as coordenadas z da camada inferior e superior da camada k^{th} , sendo o número de camadas definido por nc .

As condições fronteira para um bordo arbitrário com condições simplesmente apoiada, encastrada ou livre são as seguintes:

a) simplesmente apoiada

- SS1, $w = 0$; $M_n = 0$; $M_{ns} = 0$
- SS2, $w = 0$; $M_n = 0$; $\theta_s = 0$

b) encastrada, $w = 0$; $\theta_n = 0$; $\theta_s = 0$

c) livre, $Q_n = 0$; $M_n = 0$; $M_{ns} = 0$

Nestas equações, os índices n e s referem-se às direcções normal e tangencial do bordo, respectivamente; M_n , M_{ns} e Q_n representam o momento flector normal, momento torsor e esforço de corte no bordo da placa; θ_n e θ_s representam as rotações segundo as coordenadas normal e tangencial do bordo da placa. Os esforços resultantes e momentos num bordo da placa cuja normal é representada por $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ podem ser expressos por

$$M_n = n_x^2 M_x + 2n_x n_y M_{xy} + n_y^2 M_y \quad (34)$$

$$M_{ns} = (n_x^2 - n_y^2) M_{xy} - n_x n_y (M_y - M_x) \quad (35)$$

$$Q_n = n_x Q_x + n_y Q_y \quad (36)$$

$$\theta_n = n_x \theta_x + n_y \theta_y \quad (37)$$

$$\theta_s = n_x \theta_y - n_y \theta_x \quad (38)$$

onde n_x and n_y são os cosenos directores dum versor num ponto da fronteira.

FACTORES DE CORRECÇÃO DE CORTE

Nas interfaces das camadas, requiere-se a continuidade das tensões de corte transversas. Tendo em conta esta deformação de primeira ordem, a deformação de corte transverso é constante através da espessura, sendo esta uma aproximação grosseira da variação real. Para secções transversais homogéneas é aceite ser uma função parabólica de z . Logo, o factor de correcção de corte k deve ser introduzido para aproximar em média a energia de deformação transversa. Assumindo uma placa heterogénea, livre de tracções tangenciais, a

equação de equilíbrio na direcção x pode ser expressa como

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (39)$$

Assumindo, por simplicidade, a situação de flexão cilíndrica, então

$$\tau_{xz} = - \int_{-h/2}^z \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dz = - \int_{-h/2}^z \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{D_1(z)}{R_1} z dz = - \frac{Q_x}{R_1} \int_{-h/2}^z D_1(z) z dz = \frac{Q_x}{R_1} g(z) \quad (40)$$

onde Q_x é a força de corte no plano xz ; $R_1 = \int_{-h/2}^{h/2} D_1(z) z^2 dz$ é a rigidez de flexão da placa na direcção x ; z é a coordenada através da espessura; $g(z) = - \int_{-h/2}^z D_1(z) z dz$ é a função de forma de corte.

A função $g(z)$ que define a forma do diagrama da tensão de corte é independente do carregamento, assumindo-se então a forma parabólica $g(z) = [D_1 h^2 / 8][1 - 4(z/h)^2]$ para o caso da secção transversal homogénea. A componente de energia de deformação é dada por

$$w_s = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\tau_{xz}^2}{G_{13}(z)} dz = \frac{Q_x^2}{R_1^2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{g^2(z)}{G_{13}(z)} dz \quad (41)$$

onde $G_{13}(z)$ é o módulo de corte do plano xz , variável através da espessura. A componente de energia de deformação, sob a suposição de deformação de corte constante, é dada por

$$\bar{w}_s = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\gamma}_{xz} G_{13}(z) \bar{\gamma}_{xz} dz = \frac{Q_x^2}{h^2 \bar{G}_1^2} h \bar{G}_1 = \frac{Q_x^2}{h \bar{G}_1} \quad (42)$$

onde

$$h \bar{G}_1 = \int_{-h/2}^{h/2} G_{13}(z) dz \quad (43)$$

e $\bar{\gamma}_{xz}$ representa o valor médio das deformações de corte. Assim, é possível calcular o factor de correcção de corte k_1 no plano xz como

$$k_1 = \frac{\bar{w}_s}{w_s} = \frac{R_1^2}{h \bar{G}_1 \int_{-h/2}^{h/2} g^2(z) / G_{13}(z) dz} \quad (44)$$

Para k_2 o cálculo efectua-se de forma semelhante. Esta metodologia pode ser aplicada a secções transversais simétricas e não-simétricas⁵¹.

As tensões de corte podem ser calculadas pelas equações de equilíbrio. No caso da tensão τ_{xz} pode usar-se

$$\tau_{xz} = - \int_{-h/2}^z \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz \quad (45)$$

Tendo em conta a implementação numérica, todos os integrais são substituídos por somatórios ao longo da espessura, o que possibilita a consideração de camadas com diferentes materiais⁵¹. No caso do método aqui apresentado, as derivadas e os integrais em (45) podem ser calculados analiticamente, tornando a formulação ainda mais simples.

INTERPOLAÇÃO POR FUNÇÕES DE BASE RADIAL

Aplicando o método anteriormente apresentado, as equações de equilíbrio são agora interpoladas, em cada nó \mathbf{i} , na forma

$$A_{55} \left(\sum_{j=1}^{NN} \phi_j^{w_0} L_0 \frac{\partial^2 g_j}{\partial x^2} + \frac{2}{t} \sqrt{\frac{3}{t}} \sum_{j=1}^{NN} \phi_j^{u_1} \frac{\partial g_j}{\partial x} \right) + A_{44} \left(\sum_{j=1}^{NN} \phi_j^{w_0} L_0 \frac{\partial^2 g_j}{\partial y^2} + \frac{2}{t} \sqrt{\frac{3}{t}} \sum_{j=1}^{NN} \phi_j^{v_1} \frac{\partial g_j}{\partial y} \right) + f = 0 \quad (46)$$

$$\frac{2}{t} \sqrt{\frac{3}{t}} \left(D_{11} \sum_{j=1}^{NN} \phi_j^{u_1} \frac{\partial^2 g_j}{\partial x^2} + D_{12} \sum_{j=1}^{NN} \phi_j^{v_1} \frac{\partial^2 g_j}{\partial x \partial y} + D_{33} \left(\sum_{j=1}^{NN} \phi_j^{u_1} \frac{\partial^2 g_j}{\partial y^2} + \sum_{j=1}^{NN} \phi_j^{v_1} \frac{\partial^2 g_j}{\partial x \partial y} \right) \right) = 0 \quad (47)$$

$$\frac{2}{t} \sqrt{\frac{3}{t}} \left(D_{12} \sum_{j=1}^{NN} \phi_j^{u_1} \frac{\partial^2 g_j}{\partial x \partial y} + D_{22} \sum_{j=1}^{NN} \phi_j^{v_1} \frac{\partial^2 g_j}{\partial x^2} + D_{33} \left(\sum_{j=1}^{NN} \phi_j^{u_1} \frac{\partial^2 g_j}{\partial y \partial x} + \sum_{j=1}^{NN} \phi_j^{v_1} \frac{\partial^2 g_j}{\partial x^2} \right) \right) = 0 \quad (48)$$

onde NN representa o número total de pontos da rede. O vector de incógnitas é agora composto dos parâmetros de interpolação ϕ_j , para w_0, u_1, v_1 , respectivamente. Assim, o vector de incógnitas $\phi_j^{w_0}, \phi_j^{u_1}, \phi_j^{v_1}$ possui dimensão $3NN$.

Para cada nó de fronteira, a interpolação por multiquádricas segue a equação (4). Como exemplo, uma condição simplesmente apoiada no eixo $x = a$ corresponde a impor duas condições de fronteira

$$w_{x=a} = 0 \quad (49)$$

$$D_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (50)$$

A interpolação por multiquádricas das equações (49) e (50) produz uma mudança no sistema de equações global. Para cada nó i onde $w = 0$, impoem-se as seguintes equações interpoladoras

$$\sum_{j=1}^{NN} \phi_j^{w_0} g_i(\mathbf{x}, c) = \sum_{j=1}^{NN} \phi_j^{w_0} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + c^2} = 0 \quad (51)$$

Para cada nó i com momento nulo, a interpolação por multiquádricas é agora obtida como

$$D_{11} \sum_{j=1}^{NN} \phi_j^{u_1} \frac{\partial g_j}{\partial x} + D_{12} \sum_{j=1}^{NN} \phi_j^{v_1} \frac{\partial g_j}{\partial y} = 0 \quad (52)$$

Para o caso encastrado, as condições fronteira no eixo $x = a$ são dadas por

$$w(x = a) = 0 \quad (53)$$

$$u_1(x = a) = 0 \quad (54)$$

A interpolação por multiquádricas (54) é agora obtida por

$$\sum_{j=1}^{NN} \phi_j^{u_1} g_j(\mathbf{x}, c) = 0 \quad (55)$$

EXEMPLOS NUMÉRICOS

Placa quadrada isotrópica em flexão, sob carga uniforme

Neste primeiro exemplo, considera-se uma placa quadrada isotrópica simplesmente apoiada ($w = 0$; $M_n = 0$, $\phi_s = 0$), sob carga transversal uniforme. A geometria da placa é apresentada na Figura 1. Apresenta-se também nesta figura a discretização com uma rede de 11 por 11 nós. Ilustram-se os nós de fronteira e os nós de domínio.

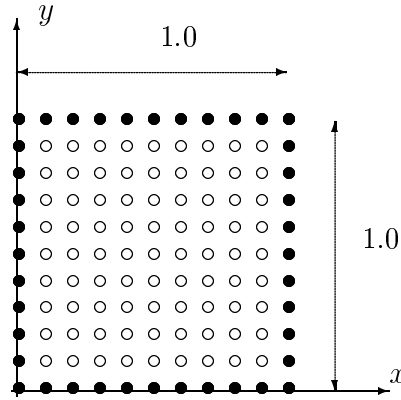


Figura 1. Rede regular com 11×11 nós para placas quadradas simplesmente apoiadas (exemplos 1 a 3); • - nós de fronteira; o - nós interiores

As propriedades materiais são

$$E_1 = E_2 = 10920; G_{12} = G_{13} = G_{23} = E_2/2,5; \nu_{12} = 0,25 \quad (56)$$

Os resultados são normalizados por

$$\bar{w} = \frac{Eh^3 10^2 w(a/2, a/2, 0)}{qa^4}$$

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x(a/2, a/2, h/2) h^2}{qa^2}$$

e são apresentados na Tabela I. Os resultados da presente formulação são comparados com uma solução exacta (analítica) de Reddy¹¹. São ainda comparados com uma solução de elementos finitos de Reddy⁵⁴, onde se usou uma malha 2×2 quadrática, com integração completa. Verifica-se que a actual solução se compara muito bem com os resultados exactos apresentados em la referência 11 e com os resultados de elementos finitos de la referência 54,

$\frac{a}{b}$	Método	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$
10	Reddy ⁵⁴	4,770	0,2899
	exacto ¹¹	4,791	0,2762
	Ferreira <i>et al.</i> ⁴⁸		
	N=11	4,7015	0,2739
	N=15	4,7634	0,2767
	N=21	4,7866	0,2777
	Formulação presente		
	N=11	4,7525	0,2747
	N=15	4,7812	0,2758
	N=21	4,8020	0,2764
20	Reddy ⁵⁴	4,570	0,2683
	exacto ¹¹	4,625	0,2762
	Ferreira <i>et al.</i> ⁴⁸		
	N=11	4,5594	0,2737
	N=15	4,5983	0,2755
	N=21	4,6132	0,2761
	Formulação presente		
	N=11	4,7320	0,2813
	N=15	4,6166	0,2759
	N=21	4,5958	0,2754
50	Reddy ⁵⁴	4,496	0,2667
	exacto ¹¹	4,579	0,2762
	Ferreira <i>et al.</i> ⁴⁸		
	N=11	4,6341	0,2787
	N=15	4,5735	0,2761
	N=21	4,5753	0,2762
	Formulação presente		
	N=11	5,4962	0,3180
	N=15	4,5812	0,2764
	N=21	4,5881	0,2774
100	Reddy ⁵⁴	4,482	0,2664
	exacto ¹¹	4,572	0,2762
	Ferreira <i>et al.</i> ⁴⁸		
	N=11	4,7525	0,2844
	N=15	4,5925	0,2772
	N=21	4,5737	0,2764
	Formulação presente		
	N=11	6,9573	0,3847
	N=15	4,5905	0,2771
	N=21	4,5647	0,2760

Tabela I. Placa isotrópica sob carga uniforme

quer em termos de deslocamento transversal, quer em termos de tensões. Na Figura 2 apresenta-se a evolução das tensões σ_x na direcção da espessura.

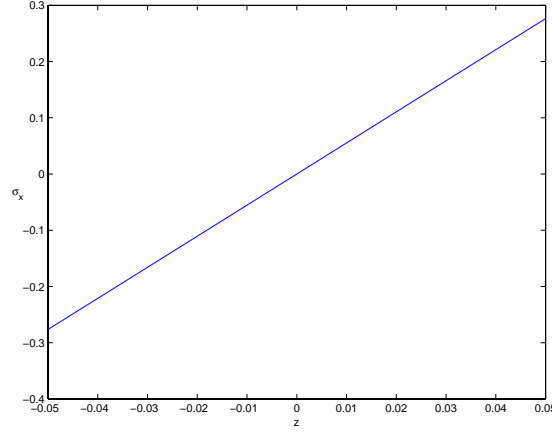


Figura 2. Variação da tensão normal σ_x normalizada com z

Placa quadrada laminada ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) sob carga sinusoidal

Considera-se uma placa laminada quadrada de lado $a = 1$ e espessura h , composta de quatro camadas de igual espessura orientadas a ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$), conforme ilustrado na Figura 1. A placa está simplesmente apoiada em todos os bordos e sujeita a uma carga sinusoidal transversal na forma

$$p_z = P \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)$$

considerando a origem das coordenadas no canto inferior esquerdo do plano médio da placa. As propriedades materiais da camada compósita orientada a 0° são as seguintes

$$E_1 = 25,0E_2 \quad G_{12} = G_{13} = 0,5E_2 \quad G_{23} = 0,2E_2 \quad \nu_{12} = 0,25$$

Os resultados numéricos estão apresentados na Tabela II, na forma normalizada de acordo com as expressões

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{10^2 w(a/2, a/2, 0) h^3 E_2}{Pa^4} & \bar{\sigma}_x &= \frac{\sigma_x(a/2, a/2, h/2) h^2}{Pa^2} & \bar{\sigma}_y &= \frac{\sigma_y(a/2, a/2, h/4) h^2}{Pa^2} \\ \bar{\tau}_{zx} &= \frac{\tau_{zx}(0, a/2, 0) h}{Pa} & \bar{\tau}_{xy} &= \frac{\tau_{xy}(a, a, h/2) h^2}{Pa^2} \end{aligned}$$

Na Tabela II a placa laminada é analisada com $N = 11 \times 11$, 15×15 and 21×21 pontos.

$\frac{a}{b}$	Método	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\sigma}_y$	$\bar{\tau}_{zx}$	$\bar{\tau}_{xy}$
4	3 strip ⁵⁷	1,8939	0,6806	0,6463	0,2109	0,0450
	HSDT ⁵⁵	1,8937	0,6651	0,6322	0,2064	0,0440
	FSDT ⁶⁰	1,7100	0,4059	0,5765	0,1398	0,0308
	elasticidade ⁵⁶	1,954	0,720	0,666	0,270	0,0467
	Ferreira <i>et al.</i> ⁴⁸ (N=11)	1,8804	0,6665	0,6292	0,1415	0,0423
	Ferreira <i>et al.</i> ⁴⁸ (N=15)	1,8846	0,6660	0,6307	0,1372	0,0429
	Ferreira <i>et al.</i> ⁴⁸ (N=21)	1,8864	0,6659	0,6313	0,1352	0,0433
	presente (N=11)	1,7126	0,4098	0,6273	0,2181	0,0326
	presente (N=15)	1,7108	0,4074	0,6249	0,2240	0,0308
presente (N=21)	1,7110	0,4075	0,6250	0,2240	0,0309	
10	3 strip ⁵⁷	0,7149	0,5589	0,3974	0,2697	0,0273
	HSDT ⁵⁵	0,7147	0,5456	0,3888	0,2640	0,0268
	FSD ⁶⁰	0,6628	0,4989	0,3615	0,1667	0,0241
	elasticidade ⁵⁶	0,743	0,559	0,403	0,301	0,0276
	Ferreira <i>et al.</i> ⁴⁸ (N=11)	0,7142	0,5464	0,4380	0,3267	0,0264
	Ferreira <i>et al.</i> ⁴⁸ (N=15)	0,7150	0,5465	0,4382	0,3305	0,0266
	Ferreira <i>et al.</i> ⁴⁸ (N=21)	0,7153	0,5466	0,4383	0,3347	0,0267
	presente (N=11)	0,6666	0,5035	0,4233	0,3223	0,0241
	presente (N=15)	0,6638	0,5001	0,4213	0,3125	0,0242
presente (N=21)	0,6639	0,5001	0,4212	0,3123	0,0242	
20	3 strip ⁵⁷	0,5061	0,5523	0,3110	0,2883	0,0233
	HSDT ⁵⁵	0,5060	0,5393	0,3043	0,2825	0,0228
	FSDT ⁶⁰	0,4912	0,5273	0,2957	0,1749	0,0221
	elasticidade ⁵⁶	0,517	0,543	0,309	0,328	0,0230
	Ferreira <i>et al.</i> ⁴⁸ (N=11)	0,5074	0,5413	0,3650	0,3744	0,0227
	Ferreira <i>et al.</i> ⁴⁸ (N=15)	0,5071	0,5407	0,3649	0,3789	0,0228
	Ferreira <i>et al.</i> ⁴⁸ (N=21)	0,5070	0,5405	0,3648	0,3818	0,0228
	presente (N=11)	0,4972	0,5342	0,3617	0,3235	0,0222
	presente (N=15)	0,4922	0,5285	0,3590	0,3628	0,0221
presente (N=21)	0,4921	0,5285	0,3590	0,3644	0,0221	
100	3 strip ⁵⁷	0,4343	0,5507	0,2769	0,2948	0,0217
	HSDT ⁵⁵	0,4343	0,5387	0,2708	0,2897	0,0213
	FSDT ⁶⁰	0,4337	0,5382	0,2705	0,1780	0,0213
	elasticidade ⁵⁶	0,4347	0,539	0,271	0,339	0,0214
	Ferreira <i>et al.</i> ⁴⁸ (N=11)	0,4535	0,5596	0,3427	0,4417	0,0229
	Ferreira <i>et al.</i> ⁴⁸ (N=15)	0,4406	0,5456	0,3376	0,4223	0,0218
	Ferreira <i>et al.</i> ⁴⁸ (N=21)	0,4365	0,5413	0,3359	0,4106	0,0215
	presente (N=11)	0,4995	0,6082	0,3642	0,2257	0,0264
	presente (N=15)	0,4361	0,5410	0,3357	0,3365	0,0215
presente (N=21)	0,4348	0,5396	0,3352	0,3745	0,0213	

Tabela II. Placa quadrada laminada (0°/90°/90°/0°) sob carga sinusoidal

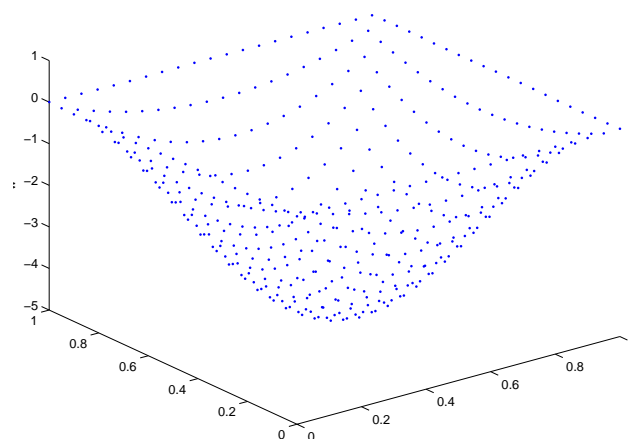


Figura 3. Deformada da placa ($N = 21$)

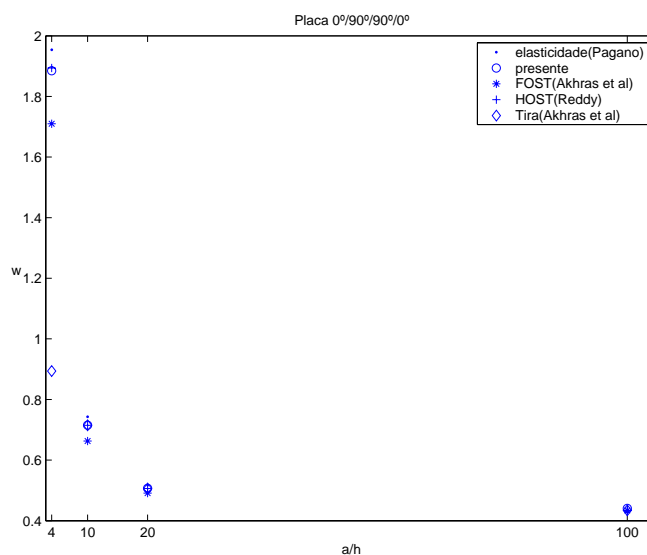


Figura 4. Variação do deslocamento transversal normalizado com a razão a/h

Os resultados da abordagem presente são comparados com os resultados de multiquádricas e teoria de terceira ordem de Ferreira *et al.*⁴⁸ e outros métodos numéricos. Compara-se em particular com as soluções analíticas de Reddy⁵⁵, Pagano⁵⁶ e com uma solução de elementos de tira de Akhras⁵⁷, que usou três tiras. Pode observar-se que a metodologia aqui apresentada tem boa qualidade para a análise de laminados compósitos. Quer o deslocamento transversal, quer as tensões normais e as transversais de corte são calculadas de forma adequada. Na Figura 3 ilustra-se a deformada da placa (rede de 21×21 nós). Na Figura 4 é apresentada a variação do deslocamento transversal normalizado com a razão a/h . Como se pode verificar a solução presente é melhor que a de Reddy ou Akhras, estando mais próxima que estas da teoria exacta de Pagano.

Note-se que as tensões de corte são calculadas pelas equações de equilíbrio.

Na Figura 5 apresenta-se o perfil de tensões normais. Na Figura 6 apresenta-se o perfil de tensões de corte transversal.

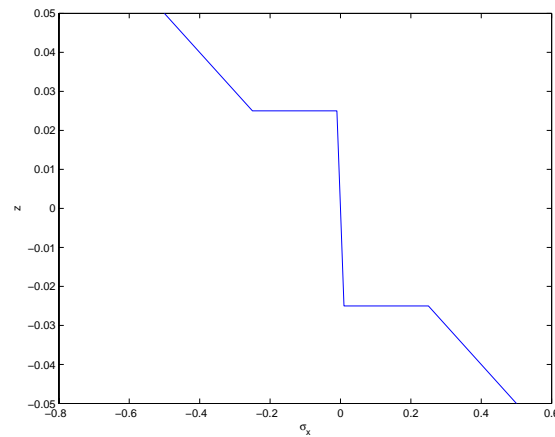


Figura 5. Variação da tensão normal σ_x normalizada com z

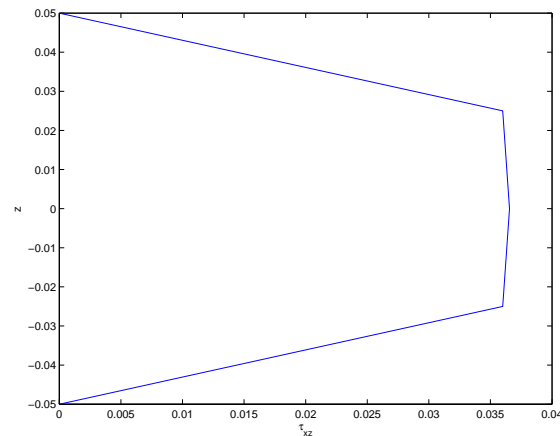


Figura 6. Variação da tensão de corte transversal τ_{xz} normalizada com z

Placa sandwich sob carga uniforme

Considera-se uma placa sandwich quadrada simplesmente apoiada em todos os bordos, com três camadas, sob pressão transversal uniforme, q , cuja geometria é idêntica à da Figura 1. As propriedades materiais do núcleo (camada central) \bar{Q}_{nucleo} são dadas por

$$\bar{Q}_{core} = \begin{bmatrix} 0,999781 & 0,231192 & 0 & 0 & 0 \\ 0,231192 & 0,524886 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,262931 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,266810 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,159914 \end{bmatrix}$$

As propriedades das peles (camadas superior e inferior da sandwich) estão relacionadas com as do núcleo através dum factor R na forma

$$\bar{Q}_{pele} = R\bar{Q}_{nucleo}$$

O deslocamento transversal e as tensões estão normalizadas através de

$$\bar{w} = w \frac{0,999781}{hq} \quad \bar{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{q} \quad \bar{\tau}_{\alpha\beta} = \frac{\tau_{\alpha\beta}}{q}$$

R	Método	\bar{w} (a/2,a/2,0)	$\bar{\sigma}_x^1$ (a/2,a/2,h/2)	$\bar{\sigma}_x^2$ (a/2,a/2,2h/5)	$\bar{\sigma}_x^3$ (a/2,a/2,2h/5)	$\bar{\sigma}_y^1$ (a/2,a/2,h/2)	$\bar{\sigma}_y^2$ (a/2,a/2,2h/5)	$\bar{\sigma}_y^3$ (a/2,a/2,2h/5)	\bar{T}_{xz}^1 (0,a/2,0)	\bar{T}_{xz}^2 (0,a/2,-2h/5)
5	HOST ⁵⁹	256,13	62,38	46,91	9,382	38,93	30,33	6,065	3,089	2,566
	FOST ⁵⁹	236,10	61,87	49,50	9,899	36,65	29,32	5,864	3,313	2,444
	CLT	216,94	61,141	48,623	9,783	36,622	29,297	5,860	4,5899	3,386
	Ferreira ¹²	258,74	59,21	45,61	9,122	37,88	29,59	5,918	3,593	3,593
	Ferreira ¹² (N=15)	257,38	58,725	46,980	9,396	37,643	27,714	4,906	3,848	2,839
	exacto ⁵⁸	258,97	60,353	46,623	9,340	38,491	30,097	6,161	4,3641	3,2675
	presente (N=11)	255,67	58,414	46,731	9,3463	37,658	30,123	6,0253	4,2091	3,1051
	presente (N=15)	258,72	59,001	47,201	9,4401	37,988	30,391	6,0781	4,3507	3,2096
	presente (N=21)	260,31	59,387	47,509	9,5019	38,127	30,502	6,1003	4,0241	2,9686

Tabela III. Placa sandwich sob carga uniforme , R=5

R	Method	\bar{w} (a/2,a/2,0)	$\bar{\sigma}_x^1$ (a/2,a/2,h/2)	$\bar{\sigma}_x^2$ (a/2,a/2,2h/5)	$\bar{\sigma}_x^3$ (a/2,a/2,2h/5)	$\bar{\sigma}_y^1$ (a/2,a/2,h/2)	$\bar{\sigma}_y^2$ (a/2,a/2,2h/5)	$\bar{\sigma}_y^3$ (a/2,a/2,2h/5)	$\bar{\tau}_{xz}^1$ (0,a/2,0)	$\bar{\tau}_{xz}^2$ (0,a/2,-2h/5)
10	HOST ⁵⁹	152,33	64,65	51,31	5,131	42,83	33,97	3,397	3,147	2,587
	FOST ⁵⁹	131,095	67,80	54,24	4,424	40,10	32,08	3,208	3,152	2,676
	CLT	118,87	65,332	48,857	5,356	40,099	32,079	3,208	4,3666	3,7075
	Ferreira ¹²	159,402	64,16	47,72	4,772	42,970	42,900	3,290	3,518	3,518
	Ferreira ¹² (N=15)	158,55	62,723	50,16	5,01	42,565	34,052	3,400	3,596	3,053
	exacto ⁵⁸	159,38	65,332	48,857	4,903	43,566	33,413	3,500	4,0959	3,5154
	presente (N=11)	157,40	62,304	49,843	4,9843	42,328	33,862	3,3862	3,9500	3,3537
	presente (N=15)	159,38	63,039	50,431	5,0431	42,748	34,198	3,4198	4,2086	3,5733
	presente (N=21)	159,72	63,323	50,658	5,0658	42,763	34,210	3,4210	3,8237	3,2465

Tabela IV. Placa sandwich sob carga uniforme, R=10

R	Method	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x^1$	$\bar{\sigma}_x^2$	$\bar{\sigma}_x^3$	$\bar{\sigma}_y^1$	$\bar{\sigma}_y^2$	$\bar{\sigma}_y^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
		$(a/2, a/2, 0)$	$(a/2, a/2, h/2)$	$(a/2, a/2, 2h/5)$	$(a/2, a/2, 2h/5)$	$(a/2, a/2, h/2)$	$(a/2, a/2, 2h/5)$	$(a/2, a/2, 2h/5)$	$(0, a/2, 0)$	$(0, a/2, -2h/5)$
15	HOST ⁵⁹	110,43	66,62	51,97	3,465	44,92	35,41	2,361	3,035	2,691
	FOST ⁵⁹	90,85	70,04	56,03	3,753	41,39	33,11	2,208	3,091	2,764
	CLT	81,768	69,135	55,308	3,687	41,410	33,128	2,209	4,2825	3,8287
	Ferreira ¹²	121,821	65,650	47,09	3,140	45,850	34,420	2,294	3,466	3,466
	Ferreira ¹² (N=15)	121,184	63,214	50,571	3,371	45,055	36,044	2,400	3,466	3,099
	exacto ⁵⁸	121,72	66,787	48,299	3,238	46,424	34,955	2,494	3,9638	3,5768
	presente (N=11)	120,32	62,776	50,220	3,348	44,791	35,833	2,3888	3,626	3,4232
	presente (N=15)	121,76	63,543	50,834	3,389	45,251	36,201	2,4134	3,8225	3,6086
	presente (N=21)	121,81	63,557	50,845	3,389	45,300	36,240	2,416	3,7198	3,3256

Tabela V. Placa sandwich sob carga uniforme, R=15

Nas Tabelas III, IV e V são apresentados os resultados da presente formulação e são comparados com outras formulações. Compara-se com a solução exacta de Srinivas⁵⁸ e com soluções de elementos finitos de primeira e terceira ordem (malha de 4×4) de Pandya e Kant⁵⁹. Compara-se também com uma solução do autor em elementos finitos de casca laminada (malha 4×4) e com uma solução por multiquádricas de ordem superior apresentada pelo autor e colegas⁴⁸. Na Figura 7 apresenta-se a evolução das tensões normais σ_x com z , para $R = 5$. Na Figura 8 apresenta-se a evolução das tensões normais τ_{xz} com z , para $R = 5$.

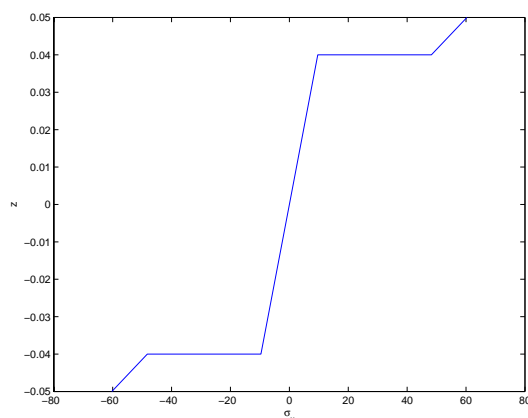


Figura 7. Variação da tensão normal σ_x normalizada com z , para $R = 5$

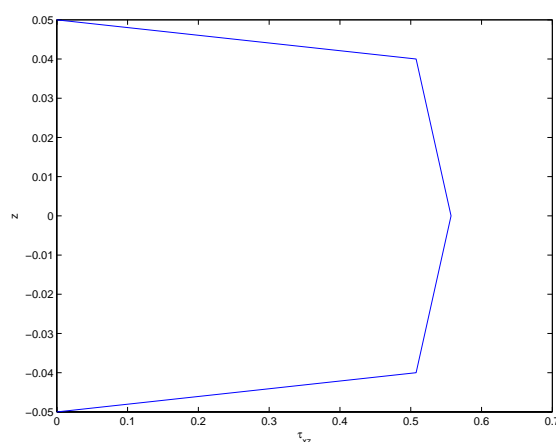


Figura 8. Variação da tensão de corte transversal τ_{xz} normalizada com z , para $R = 5$

Verifica-se uma boa qualidade da solução para todos os casos, quer para o deslocamento transversal, quer para as tensões normais e de corte transversal.

CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentou-se uma formulação baseada em expansões de Legendre através da espessura, com base numa teoria de Batra e Vidoli para placas homogéneas^{14,15}. Esta teoria é aqui interpolada com funções de base radial, em particular através de multiquádricas.

Derivam-se as equações de equilíbrio e as condições fronteira que são posteriormente interpoladas.

Estudam-se três exemplos numéricos, uma placa isotrópica uma compósita laminada e uma sandwich. Em todas elas os resultados são de grande qualidade, provando-se que este método é adequado para a solução de problemas de materiais compósitos.

AGRADECIMENTOS

Agradece-se o apoio da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no âmbito do Financiamento Plurianual à Unidade de Mecânica Experimental e Novos Materiais do INEGI e FEUP.

REFERENCIAS

- 1 E. Reissner e Y. Stavsky, “Bending and stretching of certain types of aelotropic elastic plates”, *J. Appl. Mech.*, Vol. **28**, pp. 402–408, (1961).
- 2 Y. Stavsky, “Bending and stretching of laminated aelotropic plates”, *J. Eng. Mechanics, ASCE*, Vol. **87**, N° EM6, pp. 31–56, (1961).
- 3 S.B. Dong, K.S. Pister e R.L. Taylor, “On the theory of laminated anisotropic plates and shells”, *J. Aeronautical Science*, Vol. **29**, N° 8, pp. 969–975, (1962).
- 4 P.C. Yang, C.H. Norris e Y. Stavsky, “Elastic wave propagation in heterogeneous plates”, *Int. J. Solids and Structures*, Vol. **2**, pp. 665–684, (1966).
- 5 S.A. Ambartsumyan, “*Theory of anisotropic plates (translated from Russian)*”, Technomic, SStamford, CT, (1969).
- 6 J.M. Whitney e A.W. Leissa, “Analysis of heterogeneous anisotropic plates”, *J. Appl. Mechanics*, Vol. **36**, N° 2, pp. 261–266, (1969).
- 7 J.M. Whitney, “The effect of transverse shear deformation in the bending of laminated plates”, *J. Composite Materials*, Vol. **3**, pp. 534–547, (1969).
- 8 J.M. Whitney e N.J. Pagano, “Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates”, *J. Appl. Mechanics*, Vol. **37**, N° 4, pp. 1031–1036, (1970).
- 9 E. Reissner, “A consistent treatment of transverse shear deformations in laminated anisotropic plates”, *AIAA J.*, Vol. **10**, N° 5, pp. 716–718, (1972).
- 10 E. Reissner, “The effect of transverse shear deformations on the bending of elastic plates”, *J. Appl. Mech.*, Vol. **12**, pp. A69–A77, (1945).
- 11 J.N. Reddy, “*Energy and variational methods in applied mechanics*”, John Wiley, New York, (1984).
- 12 A.J.M. Ferreira, “A formulation of the multiquadric radial basis function method for the analysis of laminated composite plates”, *Composite Structures*, Vol. **59**, pp. 385–392, (2003).
- 13 J.N. Reddy, “*Mechanics of laminated composite plates*”, CRC Press, New York, (1997).
- 14 R.C. Batra e S. Vidoli, “Higher order piezoelectric plate theory derived from a three-dimensional variational principle”, *AIAA Journal*, Vol. **40**, pp. 91–104, (2002).
- 15 R.C. Batra, S. Vidoli e F. Vestroni, “Plane wave solutions and modal analysis in higher order shear and normal deformable plate theories”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **257**, N° 1, pp. 63–88, (2002).

- 16 P.W. Randles e L.D. Libersky, “Smoothed particle hydrodynamics: some recent improvements and applications”, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, Vol. **139**, pp. 375–408, (1996).
- 17 T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming e P. Krysl, “Meshless methods: an overview and recent developments”, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, Vol. **139**, pp. 3–47, (1996).
- 18 J. Bonet e S. Kulasegaram, “Correction and stabilization of smooth particle hydrodynamics methods with applications in metal forming simulations”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **47**, pp. 1189–1214, (2000).
- 19 B. Nayroles, G. Touzot e P. Villon, “Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements”, *Comp. Mechanics*, Vol. **10**, pp. 307–318, (1992).
- 20 S.N. Atluri e T. Zhu, “A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics”, *Computational Mechanics*, Vol. **22**, pp. 117–127, (1998).
- 21 E. Oñate, S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz e R.T. Taylor, “A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **139**, pp. 315–346, (1996).
- 22 T. Belytschko, Y.Y. Lu e L. Gu, “Element free Galerkin methods”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **37**, pp. 229–256, (1994).
- 23 J.P. Ponthot e T. Belytschko, “Arbitrary lagrangian-eulerian formulation for element-free Galerkin method”, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, Vol. **152**, pp. 19–46, (1998).
- 24 B. William e S. Saigal, “A three-dimensional element-free Galerkin elastic and elastoplastic formulation”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **46**, pp. 671–693, (1999).
- 25 W.K. Liu, S. Jun e Y.F. Zhang, “Reproducing kernel particle methods”, *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, Vol. **20**, pp. 1081–1106, (1995).
- 26 W.K. Liu, S. Jun, S. Li, J. Adee e T. Belytschko, “Reproducing kernel particle methods for structural dynamics”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **38**, pp. 1655–1679, (1995).
- 27 W.K. Liu e S. Jun, “Multiple-scale reproducing kernel particle methods for large deformation problems”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **41**, pp. 1339–1362, (1998).
- 28 K. M. Liew, T.Y. Ng e Y.C. Wu, “Meshfree method for large deformation analysis- a reproducing kernel particle approach”, *Engineering Structures*, Vol. **24**, pp. 543–551, (2002).
- 29 K. M. Liew, T.Y. Ng, X. Zhao e J.N. Reddy, “Harmonic reproducing kernel particle method for free vibration of rotating cylindrical shells”, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, Vol. **191**, pp. 4141–4157, (2002).
- 30 K.M. Liew, H.Y. Wu e T.Y. Ng, “Meshless method for modeling of human proximal femur: treatment of nonconvex boundaries and stress analysis”, *Comp. Mechanics.*, Vol. **28**, pp. 4390–4400, (2002).
- 31 C.A. Duarte e J.T. Oden, “An hp adaptive method using clouds”, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, Vol. **139**, pp. 237–262, (1996).
- 32 R.L. Hardy, “Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces”, *Geophys. Res.*, Vol. **176**, pp. 1905–1915, (1971).
- 33 R.L. Hardy, “Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method: 20 years of discovery”, *Computers Math. Applic.*, Vol. **19**, N° 8/9, pp. 163–208, (1990).
- 34 E.J. Kansa, “Multiquadrics - a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics. I: Surface approximations and partial derivative estimates”, *Comput. Math. Appl.*, Vol. **19**, ° 8/9, pp. 127–145, (1990).

- 35 E. J. Kansa, "Multiquadrics - a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics. II: Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations", *Comput. Math. Appl.*, Vol. **19**, N° 8/9, pp. 147–161, (1990).
- 36 G.R. Liu, "*Mesh Free Methods*", CRC Press, Boca Raton, USA, (2003).
- 37 M.J.D. Powell, "The theory of radial basis function approximation in 1990", In F.W. Light (Ed.), *Advances in Numerical Analysis*, pp. 203–240, Oxford University Press, (1992).
- 38 C.J. Coleman, "On the use of radial basis functions in the solution of elliptic boundary value problems", *Comput. Mech.*, Vol. **17**, pp. 418–422, (1996).
- 39 M. Sharan, E.J. Kansa e S. Gupta, "Application of the multiquadric method for numerical solution of elliptic partial differential equations", *Appl. Math. Comput.*, Vol. **84**, pp. 275–302, (1997).
- 40 H. Wendland, "Error estimates for interpolation by compactly supported radial basis functions of minimal degree", *J. Approx. Theory*, Vol. **93**, pp. 258–296, (1998).
- 41 Y.C. Hon, M.W. Lu, W.M. Xue e Y.M. Zhu, "Multiquadric method for the numerical solution of byphasic mixture model", *Appl. Math Comput.*, Vol. **88**, pp. 153–175, (1997).
- 42 Y.C. Hon, K.F. Cheung, X.Z. Mao e E.J. Kansa, "A multiquadric solution for the shallow water equation", *ASCE J. Hydraulic Engineering*, Vol. **125**, N° 5, pp. 524–533, (1999).
- 43 J.G. Wang, G.R. Liu e P. Lin, "Numerical analysis of biot's consolidation process by radial point interpolation method", *Int. J. Solids and Structures*, Vol. **39**, N° 6, pp. 1557–1573, (2002).
- 44 G.R. Liu e Y.T. Gu, "A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **246**, N° 1, pp. 29–46, (2001).
- 45 G.R. Liu e J.G. Wang, "A point interpolation meshless method based on radial basis functions", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **54**, pp. 1623–1648, (2002).
- 46 J.G. Wang e G.R. Liu, "On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-d meshless methods", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, Vol. **191**, pp. 12611–2630, (2002).
- 47 A.J.M. Ferreira, "Thick composite beam analysis using a global meshless approximation based on radial basis functions", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. **10**, pp. 271–284, (2003).
- 48 A.J.M. Ferreira, C.M.C. Roque e P.A.L.S. Martins, "Analysis of composite plates using higher-order shear deformation theory and a finite point formulation based on the multiquadric radial basis function method", *Composites: Part B*, Vol. **34**, pp. 627–636, (2003).
- 49 G.E. Fasshauer, "Solving partial differential equations by collocation with radial basis functions", *Surface fitting and multiresolution methods, Vol. 2 Proceedings of the 3rd International Conference on curves and surfaces*, Vol. **2**, pp. 131–138, (1997).
- 50 E.J. Kansa e Y.C. Hon, "Circumventing the ill-conditioning problem with multiquadric radial basis functions", *Comput. Math. Appl.*, Vol. **39**, N° 7/8, pp. 123–137, (2000).
- 51 Y.C. Hon e X.Z. Mao, "On unsymmetric collocation by radial basis functions", *Appl. Math. Comput.*, Vol. **119**, N° 2/3, pp. 177–186, (2001).
- 52 R.K. Beatson, "Fast fitting of radial basis functions: Methods based on preconditioned gmres iteration", *Adv. in Comput. Math.*, Vol. **11**, pp. 253–270, (1999).
- 53 A.J.M. Ferreira, "Análise de placas e cascas laminadas compósitas e sandwich", Ph.D. Thesis, FEUP, Porto, (1997).
- 54 J.N. Reddy, "*An introduction to the finite element method*", McGraw-Hill International Editions, New York, (1993).

- 55 J.N. Reddy, “A simple higher-order theory for laminated composite plates”, *J. Appl. Mech.*, Vol. **51**, pp. 745–752, (1984).
- 56 N.J. Pagano, “Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates”, *J. Compos. Mater.*, Vol. **4**, pp. 20–34, (1970).
- 57 G. Akhras, M.S. Cheung e W. Li, “Finite strip analysis for anisotropic laminated composite plates using higher-order deformation theory”, *Computers & Structures*, Vol. **52**, N° 3, pp. 471–477, (1994).
- 58 S. Srinivas, “A refined analysis of composite laminates”, *J. Sound and Vibration*, Vol. **30**, pp. 495–507, (1973).
- 59 B.N. Pandya e T. Kant, “Higher-order shear deformable theories for flexure of sandwich plates-finite element evaluations”, *Int. J. Solids and Structures*, Vol. **24**, pp. 419–451, 1988.
- 60 G. Akhras, M.S. Cheung e W. Li, “Static and vibrations analysis of anisotropic laminated plates by finite strip method”, *Int. J. Solids Struct*, Vol. **30**, N° 22, pp. 3129–3137, (1993).