

Simulación numérica de elastómeros multi-fase en estiramientos principales

Omar Salomón

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería
Módulo C1, Campus Norte, UPC
Cran Capitán, s/n, 08034 Barcelona, España
Tel.: 34-93-401 64 73, Fax: 34-93-401 65 17
e-mail: salomon@cimne.upc.es

Sergio Oller y Alex H. Barbat

Dpto de Resistencia de Materiales y Estructuras
E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Cataluña
Módulo C1, Campus Norte, UPC
Cran Capitán, s/n, 08034 Barcelona, España
Tel.: 34-93-205 70 16, Fax: 34-93-401 65 17

Resumen

En este trabajo se propone un modelo hiperelástico generalizado para el análisis de elastómeros multi-fase. El modelo se desarrolla en grandes deformaciones en función de los estiramientos principales. Debido a la cuasi-incompresibilidad de los elastómeros, se supone un comportamiento diferente para las partes volumétrica y desviadora de la deformación. Se utiliza teoría de mezclas para incorporar las expresiones constitutivas básicas propuestas para cada material, viscoelasticidad para el caucho y elastoplasticidad para las partículas agregadas, en una formulación de sólido compuesto. La resolución numérica del modelo se implementa en una formulación lagrangeana total con elementos de presión constante. Mediante condensación estática se elimina el grado de libertad de presión del elemento. La contribución del modelo propuesto es su capacidad para capturar el comportamiento elástico fuertemente no lineal con deformaciones extremas de los cauchos naturales y de alto amortiguamiento y sus características disipativas. El comportamiento de la formulación propuesta y su aplicación numérica se ilustra por medio de resultados numéricos y su comparación con resultados experimentales.

NUMERICAL ANALYSIS OF MULTI-PHASE ELASTOMERS IN PRINCIPAL STRETCHS

Summary

A phenomenology motivated hyper-elastic model is proposed to analyze quasi-incompressible rubber-like materials (elastomers). The large strain model is formulated in terms of principal stretches. Due to the quasi-incompressibility of rubber, the approach suppose a different behaviour of the volumetric and isochoric parts of the deformation. As hysteretic damping depend on the components of rubber, different models are considered for each substance: Rubber is supposed to respond to a viscoelastic basic constitutive model and carbon black particles are supposed to be elastoplastic. The global behaviour of the multi-phase composite solid is influenced by the mechanical characteristic of each simple component according to its volume proportion. Kinematics compatibility at all times is accepted as closing equation. The material model is implemented in a total Lagrangian formulation. A single pressure point is considered for each element with the pressure assumed constant over the element. Static condensation is used to eliminate the pressure degree of freedom at element level. The novelty of the model is its capability to capture the highly nonlinear elastic behavior of natural and high damping rubber and its energy dissipation characteristics. The performance of the proposed formulation and its numerical implementation is illustrated by means of numerical simulations and comparing them with experimental results.

INTRODUCCIÓN

En este artículo se utilizan indistintamente los términos *elastómero* o *caucho* para designar el material denominado en la bibliografía anglosajona *rubber*. El término caucho, originalmente se utilizó para designar el material obtenido en zonas tropicales de América del Sur de árboles *Hevea brasiliensis*. Actualmente se hace una distinción entre caucho *crudo* y *vulcanizado*; el término *elastómero* es el preferido para designar caucho vulcanizado. Las fórmulas de cauchos industriales son raramente publicadas por los fabricantes y en general contienen, además de caucho crudo, una parte importante de agregados, aceleradores y/o activadores del proceso de vulcanizado, antioxidantes y agentes que retardan el proceso de envejecimiento, sulfuros, óxido de zinc y productos anti-llama como componentes principales. Según el monómero utilizado en la reacción química base y los distintos elementos agregados en el proceso de elaboración pueden obtenerse elastómeros de muy variadas características.

Este trabajo es una contribución al análisis numérico de los elastómeros, cauchos naturales o mezcla de naturales y sintéticos y siempre vulcanizados (*Natural Rubber*). De los agregados, el denominado *carbon black* obtenido de la combustión incompleta de gas natural o petróleo, es muy utilizado, en forma de polvo y a efectos de incrementar las propiedades disipativas del caucho (*High Damping Rubber*).

DESCRIPCIÓN DEL MODELO PROPUESTO

Los elastómeros sometidos a grandes deformaciones responden en forma principalmente elástica y cuasi-incompresible y, desde un punto de vista macroscópico, como sólido homogéneo e isótropo. Ensayos en laboratorio de dispositivos de elastómero laminado con cargas cíclicas indican una componente no elástica en su respuesta, siendo esta componente de mayor magnitud en el caso de dispositivos contruidos con elastómeros de alto amortiguamiento (*High Damping Rubber*). Como ya se mencionó, en este tipo de elastómeros una importante proporción de partículas (*carbon-black filler*) son agregadas al caucho a efectos de incrementar sus propiedades disipativas.

La mayoría de los modelos constitutivos que pueden encontrarse en la literatura adoptan un enfoque fenomenológico, considerando los elastómeros como material homogéneo e isótropo y tratan solo sus características elásticas¹⁻⁴. En algunos casos se incorporan al modelo constitutivo efectos disipativos mediante viscoelasticidad^{5,6}, plasticidad⁷ o viscoelasticidad y plasticidad^{8,9}. Excepcionalmente se ha tratado la modelización de elastómeros con una aproximación micro-mecánica, pero al resultar esta modelización inviable computacionalmente para la solución de problemas prácticos, se debe pasar de ésta formulación a una de tipo fenomenológico¹⁰. Algunos autores han desarrollado modelos constitutivos *inspirados* en la micro-mecánica pero implementados en forma macroscópica¹¹⁻¹³.

En este trabajo se propone un modelo fenomenológico, donde no se consideran aspectos micro-mecánicos. Debido a la cuasi-incompresibilidad de los elastómeros, se tratan las partes volumétrica y desviadora de la deformación de forma independiente. Y, considerando que la magnitud del amortiguamiento depende de las componentes del material, diferentes modelos son considerados para cada sustancia, viscoelasticidad para el caucho y elastoplasticidad para las partículas agregadas. Utilizando teoría de mezclas¹⁴ se incorporan las expresiones constitutivas básicas de cada componente en un sólido compuesto multi-fase. El comportamiento global del compuesto es influenciado por las características mecánicas de cada componente simple de acuerdo a su proporción en volumen. Como ecuación de restricción o cierre del modelo se admite una perfecta compatibilidad cinemática en todos los instantes de tiempo del proceso analizado. Finalmente, al no incluir la temperatura como variable de las funciones energía de deformación, el modelo propuesto está limitado a condiciones térmicamente estables.

Limitando la energía libre específica a una función dependiente solo del gradiente de deformación \mathbf{F} , quedando fuera de consideración la temperatura θ y, por el momento, las variables internas $\boldsymbol{\alpha}$, un cuerpo hiperelástico \mathcal{B} es caracterizado por la existencia de un potencial $W(\mathbf{F}, \mathbf{X})$ del cual se obtiene el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff como

$$\mathbf{P}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = \frac{\partial W(\mathbf{F}, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{F}} \quad (1)$$

donde $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ representa puntos materiales de \mathcal{B} y el tensor de segundo orden \mathbf{F} es el gradiente de deformación en estos puntos. La función W se denomina *función energía de deformación* o función *potencial*. Para simplificar la notación, de aquí en adelante se omiten los puntos materiales \mathbf{X} en la función W .

La función energía de deformación W en (1) debe expresarse como función de las nueve componentes de \mathbf{F} (\mathbf{F} puede ser asimétrico) y además cumplir con la restricción antes señalada de no ser afectada por movimientos de sólido rígido. Esto es, según el principio de objetividad material, para cualquier rotación en el espacio se debe cumplir la igualdad, $W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F})$ donde \mathbf{Q} es un tensor de rotación de cambio de base. Utilizando ahora la descomposición polar de \mathbf{F} , se puede expresar $W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U})$ donde \mathbf{R} es un tensor de rotación y \mathbf{U} el tensor de estiramiento derecho; y al ser \mathbf{Q} un tensor ortogonal cualquiera, puede ser $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$, entonces

$$W^F(\mathbf{F}) = W^U(\mathbf{U}) \quad (2)$$

Existe una correspondencia única entre las componentes del tensor de estiramiento \mathbf{U} y el tensor derecho de Cauchy-Green \mathbf{C} , $\mathbf{U} = \mathbf{C}^{1/2}$, las direcciones principales de \mathbf{C} coinciden con las de \mathbf{U} y para un tensor gradiente \mathbf{F} dado es más fácil calcular \mathbf{C} , o \mathbf{b} , que \mathbf{U} ; por lo que se puede expresar W en función de las seis componentes del tensor derecho (simétrico) de Cauchy-Green, el cual no cambia su valor con movimientos de sólido rígido

$$W^F(\mathbf{F}) = W^C(\mathbf{C}) \quad (3)$$

A partir de (1) pueden calcularse los tensores de tensiones en función de la energía de deformación W , en la forma:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W^C(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad \text{y} \quad J \boldsymbol{\sigma} = 2 \mathbf{F} \frac{\partial W^C(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T \quad (4)$$

donde \mathbf{S} es el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff y $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy.

Si el material es isótropo W^C tendría la misma forma cualquiera sea el sistema de ejes coordenados tomado como referencia, por lo que W^C es un invariante del tensor \mathbf{C} , y puede ser expresado en función de otros invariantes de \mathbf{C} , en la forma

$$W^C(\mathbf{C}) = W^I(I_1, I_2, I_3) \quad (5)$$

Si además el material es incompresible, $I_3 = 1$. Esto conduce a una simplificación en la expresión de W^I , pero genera otras dificultades. La incompresibilidad es una restricción cinemática, cuyo efecto mecánico es generar una fuerza reactiva o presión hidrostática, la cual no depende de la ecuación constitutiva y debe determinarse por medio de ecuaciones de equilibrio y condiciones de borde¹⁵. Para superar esta dificultad y desacoplar las respuestas volumétrica y desviadora, \mathbf{F} es descompuesto multiplicativamente

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{vol} \bar{\mathbf{F}}, \quad \mathbf{F}_{vol} = J^{1/3} \mathbf{1}, \quad \bar{\mathbf{F}} = J^{-1/3} \mathbf{F} \quad (6)$$

donde $J = \det[\mathbf{F}] = \det[\mathbf{F}_{vol}]$, $\det[\bar{\mathbf{F}}] = 1$. De aquí en adelante, una variable sobre-lineada $\overline{(\cdot)}$ implica que se trata de la parte desviadora de la misma.

Utilizando (6) la función energía de deformación puede ser expresada en una descomposición aditiva de sus partes desviadora y volumétrica

$$W^C = W(J) + \bar{W}(\bar{\mathbf{C}}) \quad (7)$$

siendo $\bar{\mathbf{C}}$ la parte desviadora del tensor derecho de Cauchy-Green, $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}$.

Funciones energía de deformación desacopladas conducen a relaciones tensión-deformación desacopladas. Asociada con la deformación volumétrica, existe una presión hidrostática p

$$p = \partial_J W(J) = W'(J) \rightarrow \boldsymbol{\sigma}_v = W'(J) \mathbf{1} \quad (8)$$

O, en términos del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, $\mathbf{S}_v = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_v\mathbf{F}^{-T}$, y considerando que el tensor de tensiones de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}_v$, solo tiene elementos no nulos en su diagonal, \mathbf{S}_v puede ser expresado como $\mathbf{S}_v = J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-T}\boldsymbol{\sigma}_v = J\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_v$, esto es

$$\mathbf{S}_v = JW'(J)\mathbf{C}^{-1} \quad (9)$$

Con relación a la parte desviadora del modelo, considerando (6) y (7) y de la ecuación de restricción, esto es compatibilidad cinemática en todos los instantes de tiempo, puede escribirse

$$\bar{\mathbf{F}}_{caucho} \equiv \bar{\mathbf{F}}_{particulas} \equiv \bar{\mathbf{F}} \quad (10)$$

Debe ahora considerarse que la respuesta del caucho y de las partículas agregadas no es el mismo. Para la parte elastomérica se propone un modelo constitutivo básico de tipo viscoelástico, con $\bar{W}(\bar{\mathbf{C}})$ válido para historias de deformación infinitamente lentas $\bar{W}^\infty(\bar{\mathbf{C}})$. Para deformaciones dependientes del tiempo, se incluyen en la función energía de deformación W variables internas $\boldsymbol{\alpha}$ que toman en consideración los efectos viscoelásticos

$$\bar{W}_{caucho} = \bar{W}_{ve}(\bar{\mathbf{C}}, \boldsymbol{\alpha}) \quad (11)$$

Para las partículas agregadas se propone un modelo elasto-plástico, en consecuencia, $\bar{\mathbf{F}}$ es descompuesto multiplicativamente

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}^e \bar{\mathbf{F}}^p \rightarrow \bar{\mathbf{b}}^e = \bar{\mathbf{F}}^e \bar{\mathbf{F}}^{eT}$$

siendo $\bar{\mathbf{b}}^e$ la parte elástica del tensor izquierdo de Cauchy-Green, la cual es utilizada para escribir la función energía de deformación de la componente partículas

$$\bar{W}_{particulas} = \bar{W}_{ep}(\bar{\mathbf{b}}^e, \boldsymbol{\xi}) \quad (12)$$

Utilizando teoría de mezclas, el comportamiento global del sólido compuesto puede expresarse en forma aditiva¹⁶

$$\boxed{W = W(J) + kr[\bar{W}_{ve}(\bar{\mathbf{C}}, \boldsymbol{\alpha})] + kp[\bar{W}_{ep}(\bar{\mathbf{b}}^e, \boldsymbol{\xi})]} \quad (13)$$

donde kr y kp son las proporciones en volumen de las componentes caucho y partículas agregadas. Considerando ahora esta expresión aditiva de la función energía de deformación, el tensor de tensiones resulta

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{S}_{vol} + kr\bar{\mathbf{S}}_{ve} + kp\bar{\mathbf{S}}_{ep}} \quad (14)$$

En las secciones siguientes se analiza la derivación de las componentes del modelo, comenzando con la componente elástica y la forma de obtener el tensor de tensiones y constitutivo a partir de una función energía de deformación. Posteriormente se analizan la extensión viscoelástica y la componente plástica del modelo.

COMPORTAMIENTO ELÁSTICO DE LOS ELASTÓMEROS

Partiendo de los trabajos pioneros de Mooney¹⁷ y Rivlin¹⁸, diferentes funciones energía de deformación W han sido propuestas para analizar elastómeros (*rubber-like materials*).

En el modelo **Mooney-Rivlin generalizado**¹ la función energía de deformación se expresa como

$$W^I = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} C_{rst} (I_1 - 3)^r (I_2 - 3)^s (I_3 - 1)^t \quad (15)$$

donde r, s, t son números enteros que pueden variar, teóricamente, de 0 a ∞ y C_{rst} son parámetros que representan constantes materiales. Este modelo tiene la ventaja de su forma polinómica, con lo cual, disponiendo de resultados de ensayos de laboratorio pueden obtenerse los valores de los parámetros materiales de tal manera de aproximar el modelo, tanto como se desee, a éstos resultados. Un procedimiento de mínimos cuadrados puede utilizarse para esta parametrización, limitándose los valores r, s, t a un rango “razonable”, por ejemplo de 0 a 2.

En caso de incompresibilidad total se tiene $I_3 = 1$, y tomando de (15) solo los términos lineales en I_1 e I_2 , se obtiene el denominado modelo **Mooney-Rivlin de dos parámetros**

$$W^I = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3); \quad C_1 \equiv C_{10}, \quad C_2 \equiv C_{01} \quad (16)$$

Este modelo solo cuenta con dos términos lineales. Por ello, su utilización, si bien más simple, no permite una buena aproximación a resultados experimentales, especialmente en el rango de las grandes deformaciones ($> 50\%$) de los elastómeros. Si en esta función $C_2 = 0$ el modelo Mooney-Rivlin se reduce al conocido como modelo **Neo-Hooke**

$$W^I = C_1(I_1 - 3) \quad (17)$$

Debido a que estas funciones de energía de deformación de la familia Mooney-Rivlin no son válidas (excepto en su forma generalizada) para modelar elastómeros sometidos a estados de tensiones complejos y para rangos de deformación que cubran desde posiciones cercanas a la inicial hasta aquellas próximas a la rotura, se han propuesto otras funciones en base resultados experimentales. Gadala² realiza un tratamiento unificado para distintas expresiones de energía de deformación $W^I(I_i)$ considerando además que la incompresibilidad puede no ser total y por lo tanto $I_3 \neq 0$.

Funciones energía de deformación en estiramientos principales

Como se ha señalado la función energía de deformación puede ser expresada en función del tensor de Cauchy-Green (3), o de sus invariantes (5), y los invariantes de un tensor simétrico de segundo orden pueden expresarse en función de los valores propios de este tensor

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= 1/2(I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)) = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \cdot \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2 \\ I_3 &= \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (18)$$

siendo λ_i los valores propios del tensor \mathbf{U} , $\mathbf{U} = \mathbf{C}^{1/2}$, que reciben el nombre de estiramientos principales (*principal stretches*).

Por lo tanto, una forma alternativa de expresar la función energía de deformación es utilizar los valores propios de los tensores \mathbf{U} o \mathbf{C} , en la forma

$$W^U(\mathbf{U}) = {}^\lambda (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (19)$$

A partir de una función energía de deformación expresada en términos de los estiramientos principales, los tensores de tensiones pueden obtenerse recordando (4) y aplicando la regla de la cadena. Así, para el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff se obtiene

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W^C(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \sum_{A=1}^3 \frac{1}{\lambda_A} \frac{\partial W^\lambda(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_A} \frac{\partial(\lambda_A^2)}{\partial \mathbf{C}} \quad (20)$$

Aplicando una *descomposición polar* al tensor gradiente de deformación, se obtiene

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (21)$$

donde el tensor ortogonal \mathbf{R} es el *tensor de rotación* y los tensores simétricos definidos positivos \mathbf{U} y \mathbf{V} son los *tensores de estiramiento derecho e izquierdo*, respectivamente. Los *tensores derecho e izquierdo de Cauchy-Green*, \mathbf{C} y \mathbf{b} , se definen como

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (22)$$

y teniendo en cuenta (21) y que siendo \mathbf{R} un tensor ortogonal, $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{1}$, éstos pueden expresarse en la forma

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \mathbf{V}^2 \quad (23)$$

Siendo \mathbf{U} y \mathbf{V} tensores simétricos, éstos admiten una *descomposición espectral*

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad \text{y} \quad \mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (24)$$

donde $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ son los autovalores de \mathbf{U} y de \mathbf{V} , denominados *estiramientos principales* y los vectores \mathbf{N}_i y \mathbf{n}_i son autovectores unitarios de \mathbf{U} y de \mathbf{V} , respectivamente. Los conjuntos $\{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3\}$ y $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ forman bases ortonormales que definen las *direcciones principales lagrangeana y euleriana*, respectivamente.

Utilizando las ecuaciones (23) y (24), se tiene

$$\mathbf{C} = \sum_{A=1}^3 \lambda_A^2 \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \sum_{A=1}^3 \lambda_A^2 \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \quad (25)$$

donde λ_A^2 son los valores propios de \mathbf{C} o \mathbf{b} , y \mathbf{N}_A y \mathbf{n}_A son sus respectivos autovectores unitarios, definidos por el problema de valores propios

$$\mathbf{C}\mathbf{N}_A = \lambda_A^2 \mathbf{N}_A \quad \text{y} \quad \mathbf{b}\mathbf{n}_A = \lambda_A^2 \mathbf{n}_A \quad (26)$$

De esta última ecuación puede obtenerse para $\partial_{\mathbf{C}} \lambda_A^2$ en (20), la siguiente expresión¹⁹

$$\frac{\partial(\lambda_A^2)}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A \quad (27)$$

Esto permite expresar el segundo tensor de tensiones de Piola Kirchhoff \mathbf{S} como

$$\mathbf{S} = \sum_{A=1}^3 \beta_A \mathbf{M}_A \quad \text{con} \quad \mathbf{M}_A = \lambda_A^{-2} \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A \quad (28)$$

donde β_A expresa las tensiones principales desviadoras

$$\beta_A = \lambda_A \partial W^\lambda / \partial \lambda_A \quad (29)$$

En forma análoga y recordando (4), se puede expresar el tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ en la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \sum_{A=1}^3 \beta_A \mathbf{m}_A \quad \text{con} \quad J = \det[\mathbf{F}] \quad \text{y} \quad (30)$$

$$\mathbf{m}_A = \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A = \mathbf{F} \mathbf{M}_A \mathbf{F}^T$$

Las expresiones $\mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A$ y $\mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A$ pueden expresarse, en forma explícita, a partir de los tensores \mathbf{C} y $\mathbf{b}^{20,21}$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_A \otimes \mathbf{N}_A &= \lambda_A^2 \frac{\mathbf{C} - (I_1 - \lambda_A^2) \mathbf{1} + I_3 \lambda_A^{-2} \mathbf{C}^{-1}}{D_A} \\ \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A &= \frac{\mathbf{b}^2 - (I_1 - \lambda_A^2) \mathbf{b} + I_3 \lambda_A^{-2} \mathbf{1}}{D_A} \\ D_A &= 2\lambda_A^4 - I_1 \lambda_A^2 + I_3 \lambda_A^{-2} \end{aligned} \quad (31)$$

Derivando nuevamente (20) a partir de (28), aplicando la regla de la cadena y (27), se obtiene el correspondiente tensor constitutivo en la configuración no deformada

$$\mathbb{C} = \sum_{A=1}^3 \left[\sum_{B=1}^3 \gamma_{AB} \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{M}_B \right] + \sum_{A=1}^3 2\beta_A \frac{\partial \mathbf{M}_A}{\partial \mathbf{C}} \quad (32)$$

donde β_A responde a la ecuación (29)

$$\gamma_{AB} = \gamma_{BA} = \lambda_B \frac{\partial}{\partial \lambda_B} \left(\lambda_A \frac{\partial W^\lambda}{\partial \lambda_B} \right) \quad (33)$$

y $\partial_{\mathbf{C}} \mathbf{M}_A$ se obtiene a partir de (31a), utilizando (27) y las siguientes relaciones

$$\frac{\partial \lambda_A}{\partial I_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_A^3}{\partial \lambda_A}, \quad \frac{\partial \lambda_A}{\partial I_2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_A}{\partial \lambda_A}, \quad \frac{\partial \lambda_A}{\partial I_3} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_A^{-1}}{\partial \lambda_A} \quad (34)$$

donde D_A viene dado por (31c). De esta forma se llega a obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{M}_A}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{1}{D_A} [\mathbb{I} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + I_3 \lambda_A^{-2} (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - \mathbb{I}_{\mathbf{C}^{-1}})] \\ &+ \frac{1}{D_A} [\lambda_A^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{M}_A + \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{1}) - 1/2 D'_A \lambda_A \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{M}_A] \\ &- \frac{1}{D_A} [I_3 \lambda_A^{-2} (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{M}_A + \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{C}^{-1})] \end{aligned} \quad (35)$$

siendo \mathbb{I} el tensor identidad de cuarto orden, y

$$\begin{aligned} D'_A &= 8\lambda_A^3 - 2I_1\lambda_A - 2I_3\lambda_A^{-3} \\ (I_{C^{-1}})^{ABCD} &= 1/2(C^{-1AC}C^{-1BC} + C^{-1AD}C^{-1BC}) \end{aligned} \quad (36)$$

El tensor constitutivo en la configuración espacial \mathbb{C} se obtiene mediante una operación *push-forward* de su forma material \mathbb{C} (32).

$$\mathbb{C} = \frac{1}{J} \sum_{A=1}^3 \left[\sum_{B=1}^3 \gamma_{AB} \mathbf{m}_A \otimes \mathbf{m}_B \right] + \frac{2}{J} \sum_{A=1}^3 \beta_A \frac{\partial \mathbf{m}_A}{\partial \mathbf{g}} \quad (37)$$

donde, al igual que en (32), β_A responde a (29) y γ_{AB} a (33). La expresión $\partial_{\mathbf{g}} \mathbf{m}_A = \mathbf{F} \partial_C \mathbf{M}_A \mathbf{F}^T$ tiene la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{m}_A}{\partial \mathbf{g}} &= \frac{1}{D_A} [\mathbb{I}_b - \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} + I_3 \lambda_A^{-2} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \mathbb{I})] \\ &+ \frac{1}{D_A} \left[\lambda_A^2 (\mathbf{b} \otimes \mathbf{m}_A + \mathbf{m}_A \otimes \mathbf{b}) - \frac{1}{2} D'_A \lambda_A \mathbf{m}_A \otimes \mathbf{m}_A \right] \\ &- \frac{1}{D_A} [I_3 \lambda_A^{-2} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{m}_A + \mathbf{m}_A \otimes \mathbf{1})] \end{aligned} \quad (38)$$

siendo

$$(I_b)^{abcd} = \frac{1}{2} (b^{ac} b^{bd} + b^{ad} b^{bc}) \quad (39)$$

Nótese que las ecuaciones (20) a (39) son válidas para cualquier función energía de deformación y por lo tanto constituyen un planteo general de elasticidad en grandes deformaciones formulado en términos de los estiramientos principales.

Función energía de deformación de Ogden

Ogden¹ ha utilizado los estiramientos principales λ_A o valores propios del tensor \mathbf{U} para proponer una función energía de deformación de la forma

$$W^\lambda(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad (40)$$

donde α_i ($i = 1, \dots, N$) son números reales y N es un entero positivo, tal que

$$\sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i = 2\mu \quad (41)$$

siendo μ el modulo de corte del material en la configuración de referencia.

Utilizando valores propios (L_i) de \mathbf{C} , esta función toma la forma

$$W^\lambda(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} (L_1^{\alpha_i/2} + L_2^{\alpha_i/2} + L_3^{\alpha_i/2} - 3) \quad (42)$$

En caso de incompresibilidad total, $I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = L_1 L_2 L_3 = 1$.

Al igual que lo señalado para la función de Mooney-Rivlin generalizada (15), la función energía de Ogden puede representar la respuesta de materiales reales mediante la asignación

de valores a los parámetros α_i y μ_i y cuanto mayor sea el número de términos N considerado, mayor será la aproximación a la respuesta obtenida mediante ensayos en laboratorio. Ogden ha determinado los valores de estos parámetros (para $N = 3$) de forma tal que las tensiones resultantes del modelo ajusten a curvas experimentales de ensayos previamente realizados por Treloar²² con caucho natural vulcanizado. Considerando $N = 2$ el modelo de Ogden puede representar el modelo Mooney-Rivlin de 2 parámetros y con $N = 1$ se obtiene el modelo Neo-Hooke.

La función energía de deformación de Ogden ha sido aceptada en los últimos años como la mejor alternativa para simular numéricamente el comportamiento de los elastómeros^{3,4,6}, y es la utilizada en este trabajo como base del modelo hiperelástico para modelar la componente elástica de estos materiales. En este caso, β_A y γ_{AB} en (29) y (33) vienen dados por

$$\begin{aligned}\beta_A &= \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\alpha_i} \left[\lambda_A^{\alpha_i} - \frac{1}{3} \sum_{B=1}^3 \lambda_B^{\alpha_i} \right] \\ \text{Si } A = B \rightarrow \gamma_{AB} &= \sum_{i=1}^N \mu_i \left[\frac{1}{3} \lambda_A^{\alpha_i} + \frac{1}{9} \sum_{C=1}^3 \lambda_C^{\alpha_i} \right] \\ \text{Si } A \neq B \rightarrow \gamma_{AB} &= \sum_{i=1}^N \mu_i \left[-\frac{1}{3} \lambda_A^{\alpha_i} - \frac{1}{3} \lambda_B^{\alpha_i} + \frac{1}{9} \sum_{C=1}^3 \lambda_C^{\alpha_i} \right]\end{aligned}\quad (43)$$

Deformación desviadora y volumétrica

Ensayos realizados con elastómeros¹ demuestran que para grandes deformaciones el cambio de volumen, en este material, es pequeño pero no nulo ($J - 1 \approx 10^{-4}$). Por lo que la hipótesis de incompresibilidad total debe ser sustituida por una de cuasi-incompresibilidad ($I_3 \approx 1$).

En este caso resulta conveniente descomponer el gradiente de deformación en sus partes desviadora y volumétrica (6); entonces, las funciones de energía de deformación pueden expresarse como

$$W^\lambda(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, J) \equiv W^\lambda(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (44)$$

siendo $\bar{\lambda}_i = J^{-1/3} \lambda_i$ y $J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, tal que $\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 = 1$.

Considerando estos estiramientos modificados $\bar{\lambda}_i$, el modelo de Ogden puede expresarse como

$$W^\lambda(\lambda_i) = W(J) + \bar{W}^\lambda(\bar{\lambda}_i) \quad (45)$$

donde $W(J)$ describe el cambio de energía libre debido al cambio de volumen del sólido y $\bar{W}^\lambda(\bar{\lambda}_i)$ describe el cambio de energía libre debido a deformaciones a volumen constante. El potencial en función de los estiramientos modificados, $\bar{\lambda}_i$, se escribe

$$\bar{W}^\lambda(\bar{\lambda}_i) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} [(\bar{\lambda}_i)^{\alpha_p} - 3] \quad (46)$$

o utilizando los autovalores L_i del tensor \mathbf{C} , se puede reescribir el potencial

$$\begin{aligned}W^\lambda(L_i) &= W(J) + \bar{W}^\lambda(L_i) \\ \bar{W}^\lambda(L_i) &= \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} \left[(L_1^{\alpha_p/2} + L_2^{\alpha_p/2} + L_3^{\alpha_p/2})(L_1 L_2 L_3)^{-\alpha/6} - 3 \right]\end{aligned}\quad (47)$$

Esta descomposici3n aditiva de la funci3n de energ3a libre implica una descomposici3n aditiva de sus derivadas, el tensor de tensiones y tensor constitutivo tangente.

Tal lo se1alado, asociada a la deformaci3n volum3trica se tiene una tensi3n media o presi3n p (8), con la cual se obtuvo la parte volum3trica del segundo tensor de Piola-Kirchhoff (9). Derivando (9) respecto a \mathbf{C} se obtiene la parte del tensor constitutivo en la configuraci3n material correspondiente a la deformaci3n volum3trica

$$\mathbb{C}_v = [JW'(J)]' J\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - JW'(J)\mathbb{I}_{C^{-1}} \quad (48)$$

donde $\mathbb{I}_{C^{-1}}$ viene dado por la expresi3n (36).

El correspondiente tensor constitutivo en la configuraci3n espacial, parte volum3trica \mathbb{C}_v , puede obtenerse mediante una operaci3n *push-forward* de su forma material \mathbb{C}_v ,

$$\mathbb{C}_v = [JW'(J)]'\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - 2W'(J)\mathbb{I} \quad (49)$$

Utilizando las ecuaciones (9) y (48), y recordando (28) y (32), el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} y el tensor constitutivo material \mathbb{C} , empleando estiramientos modificados $\bar{\lambda}_i$, est1n dados por

$$\mathbf{S} = JW'(J)\mathbf{C}^{-1} + \sum_{A=1}^3 \beta_A \mathbf{M}_A \quad (50)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{C} = & J^2 W''(J)\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + J W'(J)[\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - \mathbb{I}_{C^{-1}}] + \\ & + \sum_{A=1}^3 \left[\sum_{B=1}^3 \gamma_{AB} \mathbf{M}_A \otimes \mathbf{M}_B \right] + \sum_{A=1}^3 2\beta_A \partial_C \mathbf{M}_A \end{aligned} \quad (51)$$

donde β_A y γ_{AB} han sido dados en (43) para la funci3n energ3a de deformaci3n de Ogden y la derivada $\partial_C \mathbf{M}_A$ viene dada en (35-36).

En forma an1loga, utilizando (8) y (49) y recordando (30) y (37), pueden expresarse el tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ y el tensor constitutivo espacial \mathbb{C} en funci3n los estiramientos modificados $\bar{\lambda}_i$,

$$\boldsymbol{\sigma} = W'(J)\mathbf{1} + \frac{1}{J} \sum_{A=1}^3 \beta_A \mathbf{m}_A \quad (52)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{C} = & J^2 W''(J)\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + J W'(J)[\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - 2\mathbb{I}] + \\ & + \frac{1}{J} \sum_{A=1}^3 \left[\sum_{B=1}^3 \gamma_{AB} \mathbf{m}_A \otimes \mathbf{m}_B \right] + \frac{2}{J} \sum_{A=1}^3 2\beta_A \frac{\partial \mathbf{m}_A}{\partial \mathbf{g}} \end{aligned} \quad (53)$$

con β_A y γ_{AB} dados por (43) y la derivada $\partial_g \mathbf{m}_A$ dada por (38-39).

En este trabajo se propone utilizar para la parte volum3trica de la funci3n energ3a de deformaci3n, la expresi3n

$$W(J) = 1/2\kappa(J-1)^2 \quad \text{con} \quad J = I_3^{1/2} \quad \text{y} \quad I_3 = \det(\mathbf{C}) \quad (54)$$

siendo κ el modulo volumétrico del material en la configuración de referencia. De esta forma se tiene

$$W'(J) = p = \kappa(J - 1) \quad \text{y} \quad W''(J) = \kappa \quad (55)$$

COMPORTAMIENTO VISCOELÁSTICO DE LOS ELASTÓMEROS

Los elastómeros, especialmente aquellos denominados de alto amortiguamiento, cuando son sometidos a cargas cíclicas presentan en su respuesta fuerza-desplazamiento una componente no-elástica. La amplitud de esta componente no-elástica depende naturalmente del tipo de elastómero y también es función de la frecuencia de los desplazamientos impuestos²³, lo cual motiva la consideración de modelos viscoelásticos en la simulación numérica de estos materiales.

En esta sección se analiza una formulación de viscoelasticidad en grandes deformaciones de tal manera que para deformaciones infinitamente lentas la respuesta del material sea elástica, colapsando en el modelo de Ogden, mientras que para deformaciones de velocidad finita el material presente memoria^{6,24}. El modelo está formulado en la configuración material, suponiendo condiciones isotérmicas con temperatura por sobre el límite de cristalización. La función energía de deformación total tiene la estructura aditiva indicada en (13) y, considerando que los elastómeros son materiales cuasi incompresibles, se supone que los cambios dependientes del tiempo solo afectan a la componente desviadora de la deformación y que la parte volumétrica es totalmente elástica.

Modelo reológico

Considérese un mecanismo uni-dimensional tal como el indicado en la Figura 1, compuesto por una combinación de muelles lineales con constantes elásticas E_∞ y E_1 a E_α y amortiguadores con coeficientes de viscosidad η_1 a η_α .

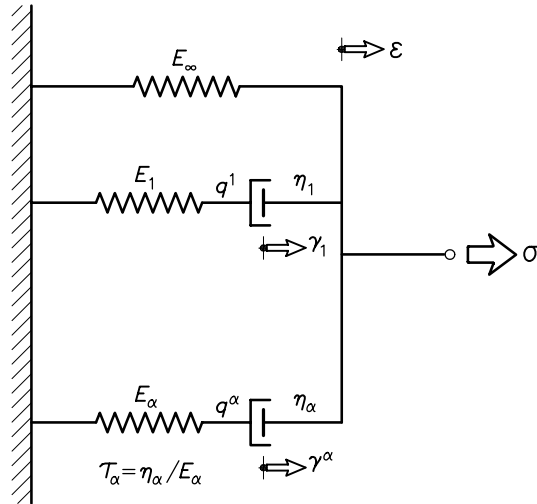


Figura 1. Modelo reológico uni-dimensional

Por condición de equilibrio se tiene una tensión total

$$\sigma = E_\infty \varepsilon + \sum_{\alpha=1}^m q^\alpha \quad (56)$$

donde ε es la deformación del mecanismo y q^α las tensiones en los α dispositivos de Maxwell incluidos en el modelo. Si se asume una relación constitutiva lineal entre la fuerza viscosa y la tasa de deformación en los amortiguadores

$$q^\alpha = E_\alpha(\varepsilon - \gamma^\alpha) = \eta_\alpha \dot{\gamma}^\alpha \quad (57)$$

donde γ^α representa las deformaciones inelásticas de los amortiguadores.

La variación respecto al tiempo de estas tensiones internas q^α representan las ecuaciones de evolución del modelo

$$\dot{q}^\alpha + \frac{q^\alpha}{\tau_\alpha} = \frac{d}{dt}(E_\alpha \varepsilon) \quad (58)$$

siendo $\tau_\alpha = \eta_\alpha / E_\alpha$ el tiempo de relajación del elemento α .

Una generalización de este modelo se logra definiendo una función energía de deformación de la forma

$$W = W^\infty(\varepsilon) + \sum_{\alpha=1}^m W^\alpha(\varepsilon, \gamma^\alpha) \quad (59)$$

donde las deformaciones inelásticas de los amortiguadores γ^α se introducen como variables internas. Si se eligen formas cuadráticas para la energía de deformación, se puede escribir

$$W = \underbrace{\frac{1}{2} E_\infty \varepsilon^2}_{W^\infty} + \sum_{\alpha=1}^m \underbrace{\frac{1}{2} E_\alpha (\varepsilon - \gamma^\alpha)^2}_{W^\alpha} \quad (60)$$

y de aquí, la tensión y disipación del modelo,

$$\sigma = \frac{dW}{d\varepsilon} = E_\infty \varepsilon + \sum_{\alpha=1}^m q^\alpha \quad \text{y} \quad \dot{q}^\alpha + \frac{q^\alpha}{\tau_\alpha} = \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{d\varepsilon} W^\alpha(\varepsilon) \right] \quad (61)$$

resultan iguales a las ecuaciones (56) y (58), respectivamente.

Para un tiempo $t = 0$, $q_0^\alpha = E_\alpha \varepsilon_0$; mientras que para un tiempo $t \rightarrow \infty$, $q_{t \rightarrow \infty}^\alpha = 0$, por lo que se recupera el modelo elástico clásico.

Modelo generalizado en grandes deformaciones

Como se mencionó, se supone que la parte volumétrica de la deformación es elástica y que los efectos dependientes del tiempo afectan a la parte desviadora de la deformación. Por analogía con el modelo reológico, se propone para la parte viscoelástica de la energía de deformación \bar{W}_{ve} en (13) la forma aditiva

$$\bar{W}_{ve}(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{\Gamma}) = \bar{W}^\infty(\bar{\mathbf{C}}) + \bar{W}^\alpha(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{\Gamma}^\alpha) \quad (62)$$

donde $\bar{W}^\infty(\bar{\mathbf{C}})$ describe la respuesta desviadora del material para un tiempo $t \rightarrow \infty$, siendo $\bar{\mathbf{C}}$ la parte desviadora del tensor derecho de Cauchy-Green, $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}}$, con $\bar{\mathbf{F}}$ dado por (6). La otra componente, $\bar{W}^\alpha(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{\Gamma}^\alpha)$, describe la parte viscosa del modelo, la cual desaparece progresivamente durante el proceso de relajación, siendo $\mathbf{\Gamma}^\alpha$ variables internas tipo tensores de deformación análogas a γ^α en (59). El comportamiento viscoso es modelado mediante α procesos de relajación con $\tau_\alpha \in (0, \infty)$ tiempos de relajación.

Una forma de la segunda ley de la termodinámica es la desigualdad de Clausius-Duhem. Esta desigualdad, para procesos isotérmicos y en su forma lagrangeana, se expresa como

$$\mathcal{D}_{int} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}}/2 - \dot{W} \geq 0 \quad (63)$$

siendo \mathcal{D}_{int} la disipación interna. Una particularización de (63) se obtiene diferenciando (62)

$$\mathcal{D}_{int} = (\mathbf{S} - 2\partial_{\bar{\mathbf{C}}} \bar{W}_{ve}) : \dot{\bar{\mathbf{C}}}/2 - (\partial_{\Gamma^\alpha} \bar{W}_{ve}) : \dot{\mathbf{\Gamma}}^\alpha \geq 0 \quad (64)$$

Considerando que esta desigualdad se debe cumplir para todo proceso termodinámico (en este caso solo mecánico) y para cualquier tasa de deformación, de aquí se obtienen el tensor de tensiones \mathbf{S} y la desigualdad de disipación interna \mathcal{D}_{int}

$$\mathbf{S} = 2\partial_{\bar{\mathbf{C}}} \bar{W}_{ve} \quad \text{y} \quad \mathcal{D}_{int} = \sum_{\alpha=1}^m [-(\partial_{\Gamma^\alpha} \bar{W}_{ve})] : \dot{\mathbf{\Gamma}}^\alpha \geq 0 \quad (65)$$

Aplicando el modelo constitutivo dado por (62) se obtiene para la parte desviadora del tensor de tensiones una forma aditiva de tensiones en equilibrio y no-equilibrio

$$\bar{\mathbf{S}}_{ve} = 2\partial_{\bar{\mathbf{C}}} \bar{W}^\infty(\bar{\mathbf{C}}) + 2\partial_{\bar{\mathbf{C}}} \bar{W}^\alpha(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{\Gamma}^\alpha) = \bar{\mathbf{S}}^\infty + \sum_{\alpha=1}^m \mathbf{Q}^\alpha \quad (66)$$

siendo \mathbf{Q}^α tensiones no equilibradas termodinámicamente.

De acuerdo con el modelo reológico, se define \mathbf{Q}^α como variables conjugadas a $\mathbf{\Gamma}^\alpha$ con una relación constitutiva $\mathbf{Q}^\alpha = -\partial_{\Gamma^\alpha} \bar{W}^\alpha(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{\Gamma}^\alpha)$. En esta forma, la producción local de entropía (65b) es dada por la relación

$$\mathcal{D}_{int} = \sum_{\alpha=1}^m \mathbf{Q}^\alpha : \dot{\mathbf{\Gamma}}^\alpha \geq 0 \quad (67)$$

Por analogía con el modelo reológico se propone para la ecuación de evolución de \mathbf{Q}^α la siguiente expresión

$$\dot{\mathbf{Q}}^\alpha + \frac{\mathbf{Q}^\alpha}{\tau_\alpha} = \frac{d}{dt} [2\partial_{\bar{\mathbf{C}}} \bar{W}^\alpha(\bar{\mathbf{C}})] \quad (68)$$

donde \bar{W}^α es una función de energía libre que corresponde a los α procesos de relajación con τ_α tiempos de relajación. La respuesta instantánea, $t = 0$, viene dada por $\mathbf{Q}_0^\alpha = 2\partial_{\bar{\mathbf{C}}} \bar{W}^\alpha(\bar{\mathbf{C}}_0)$

Una solución de la ecuación de disipación se obtiene en forma de integral de convolución

$$\mathbf{Q}^\alpha = \exp[-t/\tau_\alpha] \gamma_\infty^\alpha [2\partial_{\bar{\mathbf{C}}} \bar{W}^\infty(\bar{\mathbf{C}}_0)] + \int_0^t \gamma_\infty^\alpha \exp[-(t-s)/\tau_\alpha] \frac{d}{ds} [2\partial_{\bar{\mathbf{C}}} \bar{W}^\infty(\bar{\mathbf{C}}_s)] ds \quad (69)$$

donde se supone la relación

$$\bar{W}^\alpha(\bar{\mathbf{C}}) = \gamma_\infty^\alpha \bar{W}^\infty(\bar{\mathbf{C}}) \quad (70)$$

siendo $\gamma_\infty^\alpha \in (0, \infty)$ factores asociados con τ_α . Esta adopción viene motivada por el hecho de que el medio viscoelástico es obviamente el mismo material elastomérico que ha sido modelado previamente como elástico. Por lo que, la función energía de deformación $\bar{W}^\infty(\bar{\mathbf{C}})$ utilizada en este trabajo para modelar los elastómeros es la función energía de Ogden.

En función de las ecuaciones (69-70) la parte desviadora del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff (66), resulta

$$\bar{\mathbf{S}}_{ve} = g(t) [2\partial_{\bar{\mathbf{C}}} \bar{W}^\infty(\bar{\mathbf{C}}_0)] + \int_0^t g(t-s) \frac{d}{ds} [2\partial_{\bar{\mathbf{C}}} \bar{W}^\infty(\bar{\mathbf{C}}_s)] ds \quad (71)$$

donde

$$g(t) = 1 + \sum_{\alpha=1}^N \gamma_{\infty}^{\alpha} \exp(-t/\tau_{\alpha})$$

es una función normalizada de relajación.

En la formulación del procedimiento en pasos discretos de tiempo la evaluación de la integral de convolución en (69) puede realizarse mediante una relación recursiva. Esta integral es definida como \mathbf{H}^{α}

$$\mathbf{H}^{\alpha} = \int_0^t \exp[-(t-s)/\tau_{\alpha}] \frac{d}{ds} [2\partial_{\bar{\mathbf{C}}} W^{\infty}(\bar{\mathbf{C}}_s)] ds \quad (72)$$

De la ecuación (71) para el tensor de tensiones y (72) definiendo las variables internas \mathbf{H}^{α} , puede expresarse

$$\boxed{\bar{\mathbf{S}}_{ve} = \bar{\mathbf{S}}^{\infty} + \sum_{\alpha=1}^N \gamma^{\alpha} \mathbf{H}^{\alpha}} \quad (73)$$

COMPORTAMIENTO ELASTOPLÁSTICO DE LOS ELASTÓMEROS

En los elastómeros frecuentemente se incorporan partículas (*carbon-black filler*) a efectos de incrementar sus propiedades disipativas, dando lugar a elastómeros denominados de alto amortiguamiento (*High Damping Rubber*). Naturalmente, el comportamiento mecánico del caucho y de las partículas agregadas no es el mismo y este hecho debe considerarse al formular un modelo constitutivo que represente el compuesto, caucho de alto amortiguamiento. En este artículo se propone un modelo hiperelástico basado en teoría de mezclas¹⁴, donde la componente elastomérica es tratada mediante un modelo de viscoelasticidad en grandes deformaciones y la componente partículas es modelada mediante elastoplasticidad, también, en deformaciones finitas. La función energía de deformación W para el sólido compuesto ha sido expresada en (13), separando las componentes volumétrica y desviadora de la deformación y considerando para esta última contribuciones viscoelásticas y elastoplásticas según las proporciones en volumen de las componentes elastómero y partículas, respectivamente. En esta sección se desarrolla el tratamiento del modelo elastoplástico, considerando en primer lugar una formulación general de elastoplasticidad en deformaciones finitas y particularizando luego esta formulación para el modelo propuesto.

Modelo constitutivo elastoplástico en grandes deformaciones

Esta formulación está basada en la descomposición multiplicativa del gradiente de deformación \mathbf{F} en sus partes elástica y plástica

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (74)$$

y mantiene la estructura de los modelos clásicos de plasticidad infinitesimal, con las siguientes diferencias:

- el predictor elástico es evaluado utilizando cinemática de grandes deformaciones,
- se realiza una descomposición espectral de este predictor elástico,
- se utilizan deformaciones logarítmicas,
- el algoritmo predictor-corrector se plantea en tensiones principales.

La utilización de deformaciones logarítmicas en modelos de elastoplasticidad es relativamente reciente²⁵⁻²⁸, conduce a simplificaciones en el algoritmo de integración de tensiones y permite la aplicación del algoritmo corrector plástico de plasticidad en deformaciones infinitesimales al caso de deformaciones finitas. Además, preserva exactamente los cambios de volumen plástico en caso de criterios de fluencia insensibles a la presión.

En base a la descomposición multiplicativa del gradiente de deformación (74), se define una función energía de deformación W en la forma

$$W = W(\mathbf{b}^e, \boldsymbol{\xi}) \quad \text{con} \quad \mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{e\text{ T}} \quad (75)$$

donde \mathbf{b}^e es la parte elástica del tensor izquierdo de Cauchy-Green y $\boldsymbol{\xi}$ es un tensor de variables internas, $\mathbf{q} = -\partial_{\boldsymbol{\xi}} W$.

El dominio elástico es definido por un criterio de fluencia en el espacio de tensiones

$$\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \leq 0 \quad (76)$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de tensiones de Kirchhoff en la configuración espacial y \mathbf{q} es un tensor caracterizando el endurecimiento en la respuesta del material. La superficie de fluencia es definida por $\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) = 0$

Ecuaciones constitutivas. Desigualdad de disipación

La función de disipación local asociada con un punto material se obtiene a partir de la segunda ley de la termodinámica en su forma denominada desigualdad de Clausius-Duhem. Esta desigualdad, reducida a procesos isotérmicos se expresa como

$$\mathcal{D}_{int} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \dot{W}(\mathbf{b}^e, \boldsymbol{\xi}) \geq 0 \quad (77)$$

siendo \mathbf{d} el tensor tasa de deformación, $\mathbf{d} = \text{sim}[\mathbf{l}] = 0.5(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T)$, y \mathbf{l} el tensor gradiente de velocidad, $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$. Es decir, la disipación es definida como la diferencia entre el trabajo realizado por las tensiones en el punto y la variación en la función de energía y resulta nula ($\mathcal{D}_{int} = 0$) en caso de procesos de deformación elásticos. A partir de (74) puede expresarse

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F}\mathbf{C}^{p-1}\mathbf{F}^T \quad \text{con} \quad \mathbf{C}^p = \mathbf{F}^{p\text{ T}}\mathbf{F}^p \quad (78)$$

donde \mathbf{C}^p es el denominado tensor de deformaciones plástico de Cauchy-Green. Derivando esta ecuación se tiene

$$\dot{\mathbf{b}}^e = \mathbf{l}\mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e\mathbf{l}^T + \mathcal{L}\mathbf{b}^e \quad \text{con} \quad \mathcal{L}\mathbf{b}^e = \mathbf{F}[\dot{\mathbf{C}}^{p-1}]\mathbf{F}^T \quad (79)$$

siendo $\mathcal{L}\mathbf{b}^e$ la derivada de Lie de \mathbf{b}^e ²⁹.

Utilizando esta relación, la derivada de la función energía puede expresarse como

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \partial_{\mathbf{b}^e} W[\mathbf{l}\mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e\mathbf{l}^T + \mathcal{L}\mathbf{b}^e] + \partial_{\boldsymbol{\xi}} W \dot{\boldsymbol{\xi}} \\ &= [2\partial_{\mathbf{b}^e} W \mathbf{b}^e][\mathbf{l} + 1/2(\mathcal{L}\mathbf{b}^e)\mathbf{b}^{e-1}] + \partial_{\boldsymbol{\xi}} W \dot{\boldsymbol{\xi}} \end{aligned} \quad (80)$$

Reemplazando esta ecuación en la (77)

$$\mathcal{D}_{int} = [\boldsymbol{\tau} - 2\partial_{\mathbf{b}^e} W \mathbf{b}^e]\mathbf{d} + [2\partial_{\mathbf{b}^e} W \mathbf{b}^e][-1/2(\mathcal{L}\mathbf{b}^e)\mathbf{b}^{e-1}] - \partial_{\boldsymbol{\xi}} W \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0 \quad (81)$$

De esta ecuación, considerando que debe cumplirse para todo proceso termodinámico y para cualquier tasa de deformación, se obtienen la ecuación constitutiva para el tensor de tensiones y la forma reducida de desigualdad de disipación interna

$$\boldsymbol{\tau} = 2\partial_{\mathbf{b}^e} W \mathbf{b}^e \quad \text{y} \quad \mathcal{D}_{int} = \boldsymbol{\tau}[-1/2(\mathcal{L}\mathbf{b}^e)\mathbf{b}^{e-1}] + \mathbf{q}\dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0 \quad (82)$$

Ecuaciones de evoluci3n. Disipaci3n m3xima

De acuerdo al postulado de m3xima disipaci3n, el estado actual $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q})$ en el cuerpo pl3sticamente deformado con configuraci3n intermedia prescrita y tasas $\{\mathcal{L}\mathbf{b}^e, \dot{\boldsymbol{\xi}}\}$ prescritas es aquel que conduce a un m3ximo en la funci3n de disipaci3n \mathcal{D}_{int} . Esto es

$$[\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^*][-1/2(\mathcal{L}\mathbf{b}^e)\mathbf{b}^{e-1}] + [\mathbf{q} - \mathbf{q}^*]\dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0 \quad (83)$$

para todo $(\boldsymbol{\tau}^*, \mathbf{q}^*)$ admisible. Para que se cumpla esta desigualdad $\{[-1/2(\mathcal{L}\mathbf{b}^e)\mathbf{b}^{e-1}], \dot{\boldsymbol{\xi}}\}$ deben estar dentro del cono normal al dominio el3stico en el punto $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q})$. Por lo tanto, si el criterio de fluencia es definido por (76), las ecuaciones de evoluci3n son

$$\begin{aligned} -1/2 \mathcal{L}\mathbf{b}^e &= \gamma[\partial_{\boldsymbol{\tau}}\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q})]\mathbf{b}^e \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} &= \gamma \partial_{\mathbf{q}}\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \\ \gamma &\geq 0, \quad \phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \leq 0, \quad \gamma\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) = 0 \end{aligned} \quad (84)$$

Predictor el3stico y corrector pl3stico

El problema planteado en las ecuaciones (84) puede ser resuelto con una metodolog3a de pasos fraccionales. Para un incremento dado de desplazamientos, reemplazando (84) en (79), se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{b}}^e &= [\mathbf{l}\mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e\mathbf{l}^T] - 2\gamma[\partial_{\boldsymbol{\tau}}\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q})]\mathbf{b}^e \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} &= \gamma \partial_{\mathbf{q}}\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (85)$$

$$\text{con restricciones : } \gamma \geq 0, \quad \phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \leq 0, \quad \gamma\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) = 0$$

Este sistema de ecuaciones se divide en dos problemas:

1. Predictor el3stico

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{b}}^e)^1 &= [\mathbf{l}\mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e\mathbf{l}^T] \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} &= 0 \end{aligned} \quad (86)$$

con restricciones : Ninguna

2. Corrector pl3stico

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{b}}^e)^2 &= -2\gamma[\partial_{\boldsymbol{\tau}}\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q})]\mathbf{b}^e \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} &= \gamma \partial_{\mathbf{q}}\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (87)$$

$$\text{con restricciones : } \gamma \geq 0, \quad \phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \leq 0, \quad \gamma\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) = 0$$

Recordando que la soluci3n a una ecuaci3n del tipo $\dot{z}(t) = A z(t)$ en el intervalo de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$ viene dada por $z(t) = \exp[(t - t_n)A]z(t_n)$; una aproximaci3n a (87) puede expresarse como

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_t^e &= \exp[-2\Delta\gamma\partial_{\boldsymbol{\tau}}\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q})]\mathbf{b}_t^{tr} \\ \boldsymbol{\xi}_t &= \boldsymbol{\xi}_n + \Delta\gamma\partial_{\mathbf{q}}\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (88)$$

donde $\Delta\gamma = [t - t_n]\gamma$ y \mathbf{b}_t^{tr} es el predictor el3stico determinado en el paso I.

Algoritmo predictor-corrector en direcciones principales

Como resultado de la restricción a un comportamiento isótropo, las direcciones principales del tensor de tensiones de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$ y del tensor elástico izquierdo de Cauchy-Green \mathbf{b}^e coinciden, siendo sus formas espectrales

$$\mathbf{b}^e = \sum_{A=1}^3 (\lambda_A^e)^2 \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \quad \boldsymbol{\tau}^e = \sum_{A=1}^3 \beta_A \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \quad (89)$$

donde $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ son los estiramientos principales, autovalores del tensor de estiramiento izquierdo \mathbf{V} , $\mathbf{b} = \mathbf{V}^2$, y $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ son las direcciones principales de \mathbf{b} (25). $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ son las tensiones principales (30).

Además, esta restricción implica la existencia de una función $\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) = \hat{\phi}(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \mathbf{q})$ con descomposición espectral

$$\partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q}) = \sum_{A=1}^3 \partial_{\beta_A} \phi(\beta_A, \mathbf{q}) \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \quad (90)$$

Despejando \mathbf{b}^{tr} de (88), resulta

$$\mathbf{b}^{tr} = \exp[2\Delta\gamma\partial_{\boldsymbol{\tau}}\phi(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{q})]\mathbf{b}^e \quad (91)$$

y reemplazando (89) y (90) en esta última

$$\mathbf{b}^{tr} = \sum_{A=1}^3 [(\lambda_A^e)^2 \exp[2\Delta\gamma\partial_{\beta_A}\phi(\beta_A, \mathbf{q})]] \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \quad (92)$$

Comparando esta expresión con la descomposición espectral de \mathbf{b}^{tr}

$$\mathbf{b}^{tr} = \sum_{A=1}^3 (\lambda_A^{tr})^2 \mathbf{n}_A^{tr} \otimes \mathbf{n}_A^{tr} \quad (93)$$

por unicidad en la descomposición espectral, se obtiene

$$\mathbf{n}_A = \mathbf{n}_A^{tr} \quad (94)$$

y

$$(\lambda_A^e)^2 = \exp[-2\Delta\gamma\partial_{\beta_A}\phi(\beta_A, \mathbf{q})](\lambda_A^{tr})^2 \quad (95)$$

Esto es, las direcciones principales \mathbf{n}_A de la configuración elástica final coinciden con las direcciones principales del estado elástico predictor \mathbf{n}_A^{tr} , y en consecuencia, el algoritmo corrector plástico se produce con ejes principales fijos definidos por el estado elástico de prueba.

Operando con logaritmos a ambos lados de la igualdad (95) y denominando $\epsilon_A = \log[\lambda_A]$ y $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3]^T$, se obtiene

$$\boldsymbol{\epsilon}^e = \boldsymbol{\epsilon}^{tr} - \Delta\gamma\partial_{\boldsymbol{\beta}}\phi(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{q}) \quad (96)$$

Algoritmo predictor-corrector en tensiones principales desviadoras

El modelo propuesto en este trabajo para modelar elastómeros descompone la deformación en sus partes volumétrica y desviadora, asignando a la parte volumétrica un comportamiento totalmente elástico. La parte desviadora es considerada con modelos viscoelásticos y elastoplásticos según las proporciones de caucho y de partículas en el compuesto. Se implementa aquí la parte elastoplástica del modelo, combinando (6) con (74), esto es, considerando un gradiente de deformación de la forma $\mathbf{F} = (J^{1/3} \mathbf{I}) \bar{\mathbf{F}}^e \bar{\mathbf{F}}^p$, donde $\bar{\mathbf{F}}^e$ y $\bar{\mathbf{F}}^p$ son respectivamente las componentes elástica y plástica de la parte desviadora del gradiente de deformación.

A efectos de obtener un algoritmo predictor-corrector idéntico al utilizado en plasticidad con deformaciones infinitesimales, se procede de la siguiente forma:

En primer lugar se determina un estado elástico de prueba, para un incremento prescrito de deformaciones en el intervalo de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$. Este predictor elástico supone que las deformaciones plásticas $\bar{\mathbf{F}}^p$ quedan fijas en el tiempo t_n

$$\bar{\mathbf{d}}_{n+1}^{e\ tr} = \bar{\mathbf{F}}_{n+1}^e \bar{\mathbf{F}}_{n+1}^{e\ T} = \bar{\mathbf{F}}_{n+1} \bar{\mathbf{C}}_n^{p-1} \bar{\mathbf{F}}_{n+1}^T \quad (97)$$

Después de una descomposición espectral de $\bar{\mathbf{d}}_{n+1}^{e\ tr}$ los estiramientos logarítmicos principales elásticos son definidos como

$$\bar{\epsilon}_A^{e\ tr} = \log[\bar{\lambda}_A^{e\ tr}], \quad \text{con} \quad A = 1, 2, 3 \quad (98)$$

La función energía de deformación (75), se particulariza para la parte desviadora de la deformación (12), eligiendo una forma desacoplada cuadrática en estiramientos logarítmicos principales

$$\bar{W}_{ep}(\bar{\epsilon}_A^e, \xi) = \mu[\bar{\epsilon}^e \cdot \bar{\epsilon}^e] + K(\xi) \quad (99)$$

donde $K(\xi)$ es una función caracterizando el endurecimiento isótropo en la respuesta del material.

Las tensiones principales desviadoras $\boldsymbol{\beta}$ generadas por las deformaciones logarítmicas $\bar{\epsilon}^e$ y asociadas con el modelo cuadrático (99), $\boldsymbol{\beta} = \partial_{\epsilon} \bar{W}_{ep}(\bar{\epsilon}_A^e, \xi)$, son

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{tr} = 2\mu \bar{\epsilon}_{n+1}^{e\ tr} \quad (100)$$

Estas tensiones principales $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{tr}$ corresponden al estado de prueba. Si $\phi(\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{tr}, \mathbf{q}_n) \leq 0$, el incremento deformación-tensión es puramente elástico, por lo tanto

$$(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{tr} \quad (101)$$

En caso contrario, $\phi(\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{tr}, \mathbf{q}_n) > 0$, las tensiones $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{tr}$ son proyectadas sobre el dominio elástico definiendo las tensiones reales $\boldsymbol{\beta}_{n+1}^e$ en cada punto del material.

Multiplicando ambos lados de la igualdad (96) por 2μ se obtiene un algoritmo en tensiones principales

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^e = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{e\ tr} - \Delta\gamma 2\mu \partial_{\beta} \phi(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{q}) \quad (102)$$

Para definir el dominio elástico se utiliza el criterio de fluencia de Von Mises, que es escrito en su forma clásica

$$\phi(\boldsymbol{\tau}, \xi) = \|\text{dev}[\boldsymbol{\tau}]\| - \sqrt{\frac{2}{3}}[\sigma_Y + K'(\xi)] \leq 0 \quad (103)$$

donde σ_Y es la tensión de fluencia, ξ es la deformación plástica equivalente, $\|dev[\boldsymbol{\tau}]\|$ es la raíz cuadrada del invariante J_2 del tensor de tensiones de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$. De esta manera, las tensiones $\boldsymbol{\beta}$ en (102) se expresan como

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{tr} - 2\mu\Delta\gamma\boldsymbol{\nu}_{n+1} \quad (104)$$

siendo $\boldsymbol{\nu}$ el vector unitario normal al cilindro de Von Mises en el espacio de tensiones principales

$$\boldsymbol{\nu}_{n+1} = \boldsymbol{\beta}_{n+1} / \|\boldsymbol{\beta}_{n+1}\|, \quad \|dev[\boldsymbol{\tau}]\| = \|\boldsymbol{\beta}\| \quad (105)$$

y de (88)

$$\xi_{n+1} = \xi_n + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma, \quad \Delta\gamma \geq 0 \quad (106)$$

De la condición de consistencia, $\phi_{n+1} = 0$, se obtiene la ecuación para $\Delta\gamma \geq 0$ durante el proceso de carga plástico

$$\phi_{n+1} = \phi_{n+1}^{tr} - 2\mu\Delta\gamma - \sqrt{\frac{2}{3}}[K'(\xi_n + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma) - K'(\xi_n)] = 0 \quad (107)$$

Y la ecuación (107) se expresa como

$$\phi_{n+1}^{tr} - 2\mu\Delta\gamma[1 + \frac{H}{3\mu}] - \sqrt{\frac{2}{3}}[K'(\xi_n + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma) - K'(\xi_n)] = 0 \quad (108)$$

Resuelta (104) y utilizando (100) el estado de deformación logarítmico es conocido. El tensor elástico final \boldsymbol{b}^e , que será utilizado en el calculo del tensor de deformaciones plástico \boldsymbol{C}^p en (97), se obtiene mediante un algoritmo exponencial⁹

$$\bar{\boldsymbol{b}}^e = \sum_{A=1}^3 \bar{\lambda}_A^e \boldsymbol{n}_A \otimes \boldsymbol{n}_A, \quad \bar{\lambda}_A^e = \exp(\bar{\epsilon}_A), \quad \bar{\boldsymbol{C}}^{p-1} = \bar{\boldsymbol{F}}^{-1} \bar{\boldsymbol{b}}^e \bar{\boldsymbol{F}}^{-t} \quad (109)$$

Control de cambio de volumen

La descomposición del gradiente de deformación en sus partes desviadora y volumétrica, $\boldsymbol{F} = (J^{1/3} \boldsymbol{I}) \bar{\boldsymbol{F}}^e \bar{\boldsymbol{F}}^p$, junto con (97) condicionan un predictor elástico con preservación de los cambios de volumen, $\det[\boldsymbol{b}_t^{tr}] = 1$. Y, si en la expresión del corrector plástico (88) se opera con determinantes a ambos lados de la igualdad, se obtiene

$$\begin{aligned} \det[\boldsymbol{b}_t^e] &= \det[\exp[-2\Delta\gamma \partial_\tau \phi(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{q})]] \det[\boldsymbol{b}_t^{tr}] \\ &= \exp[-2\Delta\gamma \operatorname{tr}[\partial_\tau \phi(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{q})]] \det[\boldsymbol{b}_t^{tr}] \end{aligned} \quad (110)$$

Si en esta ecuación

$$\operatorname{tr}[\partial_\tau \phi(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{q})] = 0 \quad \rightarrow \quad \det[\boldsymbol{b}_t^e] = \det[\boldsymbol{b}_t^{tr}] \quad (111)$$

Por lo tanto, para criterios de fluencia insensibles a la presión, $\operatorname{tr}[\partial_\tau \phi(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{q})] = 0$, el esquema predictor-corrector aquí planteado preserva exactamente los cambios de volumen, independientemente de la magnitud de deformaciones.

IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL

Es conocido que la formulación tradicional del método de los elementos finitos en desplazamientos, presenta problemas de mal condicionamiento de la matriz de rigidez y bloqueo de la solución cuando se tratan materiales cuasi incompresibles^{21,30-32}. A fin de superar estos problemas han sido propuestas varias formulaciones^{21,31,33}. Todas ellas se basan en la descomposición del gradiente de deformación en sus partes desviadora y volumétrica. Estas formulaciones pueden agruparse en dos familias: Multicampos (*multifield or mixed principles*) e Integración Reducida-Selectiva (*Reduced selective Integration Penalty approach, RIP*).

En las formulaciones multicampos, el principio variacional incluye, además del campo de desplazamientos, los campos de deformación volumétrica y presión^{3,21}. En su forma más general tienen el inconveniente de incrementar el número global de incógnitas del problema, pero este inconveniente puede superarse en ciertos planteos condensando a nivel de elemento algunas de las variables.

Los métodos de integración selectiva suelen integrar el campo de desplazamientos correspondiente a la deformación desviadora en forma estándar y en forma reducida, con reglas de integración de bajo orden, la deformación volumétrica, reduciendo de esta manera el efecto de bloqueo causado por la restricción volumétrica. Este planteo puede presentar problemas al tratar con elementos sujetos a grandes deformaciones y muy distorsionados³¹.

Se han realizado estudios que demuestran la equivalencia³¹, bajo ciertas condiciones y para ciertos casos, entre ambos procedimientos (principios multicampo e integración reducida). No obstante, debido al problema señalado de los métodos de integración selectiva y a la mayor generalidad de las formulaciones multicampo, estas últimas gozan de mayor aceptación.

En este trabajo se utiliza un tratamiento en dos campos, en desplazamiento y presión, formulación \mathbf{u}/\mathbf{p} . Estos campos son considerados variables independientes, lo que permite expresar el principio de trabajos virtuales en la forma

$$\int_V \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T \bar{\mathbf{S}} dV - \int_V \epsilon_v p dV = \mathcal{R} \quad (112)$$

donde \mathcal{R} indica el trabajo virtual de las fuerzas externas, y $\bar{\mathbf{S}}$ y $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ son tensiones y deformaciones desviadoras.

En esta formulación, se realiza una interpolación usual del campo de desplazamientos \mathbf{u}

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}_u \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (113)$$

siendo \mathbf{H}_u la matriz de interpolación de desplazamientos y $\hat{\mathbf{u}}$ el vector de desplazamientos nodales, con lo cual se calculan las deformaciones

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{B}_d \hat{\mathbf{u}}, \quad \epsilon_v = \mathbf{B}_v \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (114)$$

Además, se debe interpolar por separado el campo de presión \mathbf{p}

$$\mathbf{p} = \mathbf{H}_p \cdot \hat{\mathbf{p}} \quad (115)$$

Reemplazando las ecuaciones (113) a (115) en las (112), se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{up} \\ \mathbf{K}_{pu} & \mathbf{K}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (116)$$

con

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{uu} &= \int_V \mathbf{B}_d^T : \bar{\mathbb{C}} : \mathbf{B}_d dV \\ \mathbf{K}_{up} &= - \int_V \mathbf{B}_v^T \cdot \mathbf{H}_p dV = \mathbf{K}_{pu}^T \\ \mathbf{K}_{pp} &= - \int_V \mathbf{H}_p^T \frac{1}{\kappa} \mathbf{H}_p dV\end{aligned}\quad (117)$$

siendo \mathbf{B}_d y \mathbf{B}_v las matrices de relación deformación-desplazamiento para deformaciones desviadoras y volumétricas, respectivamente, $\bar{\mathbb{C}}$ la parte desviadora del tensor constitutivo y \mathbf{R} el vector de cargas aplicadas.

A diferencia del campo de desplazamientos, que se considera continuo entre elementos, para la presión no se requiere tal continuidad y esta es considerada propia de cada elemento y por lo tanto puede ser condensada a nivel de elemento, antes de proceder con el ensamblaje de estos elementos^{30,32}.

Despejando $\hat{\mathbf{p}}$ de la segunda línea de (116), resulta

$$\hat{\mathbf{p}} = -\mathbf{K}_{pp}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{pu} \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (118)$$

y reemplazando esta en la primera línea de la (116), el sistema queda reducido a un sistema equivalente en desplazamientos

$$\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R} \quad \text{con} \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{up} \cdot \mathbf{K}_{pp}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{pu} \quad (119)$$

Considerando que en las formulaciones \mathbf{u}/\mathbf{p} se interpolan tanto los campos de desplazamientos como de presión, debe optarse por el orden de interpolación para ambos. Si el orden de interpolación del campo presión es muy bajo la presión estimada puede no ser suficientemente buena; si en cambio es muy alto, el elemento resultante se comportaría como uno basado en desplazamientos y presentaría los mismos problemas de bloqueo en la solución. En base a esto, la mejor opción consiste en optar por una interpolación de la presión un orden inferior a la elegida para interpolar el campo de desplazamientos³². En caso de utilizar elementos de cuatro nodos con variación lineal en el campo de desplazamientos, la opción natural para el campo de presión es considerar a esta constante, en este caso, en (115) $\mathbf{H}_p \equiv [1]$ y $\hat{\mathbf{p}} \equiv [p_0]$

Naturalmente, para el análisis de elastómeros esta formulación \mathbf{u}/\mathbf{p} , ecuaciones (112) a (119), debe extenderse a grandes deformaciones, en este caso utilizando una formulación lagrangeana total.

La utilización de este desarrollo en una formulación \mathbf{u}/\mathbf{p} implica la modificación de la función de potencial, basada en desplazamientos \mathbf{u} o variables derivadas de estos (invariantes de las deformaciones o estiramientos principales), a efectos de incluir en la misma la presión \mathbf{p} . Una forma posible para esta función W es la dada por Sussman y Bathe³⁰,

$$W = W_d - \frac{1}{2\kappa}(p - \tilde{p})^2 \quad (120)$$

siendo p la presión obtenida a partir del campo de desplazamientos y \tilde{p} una presión interpolada independientemente.

La implementación en un código de elementos finitos que incluya grandes deformaciones se realiza de forma similar a la expresada en las ecuaciones (116-117). A nivel de elemento se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^t & \mathbf{K}_{up}^t \\ \mathbf{K}_{pu}^t & \mathbf{K}_{pp}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{t+\Delta t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u^t \\ \mathbf{F}_p^t \end{bmatrix} \quad (121)$$

donde $\mathbf{R}^{t+\Delta t}$ son las fuerzas nodales correspondientes a las cargas externas en el tiempo $t + \Delta t$. Suprimiendo de aquí en adelante el superíndice de tiempo t a efectos de simplificar la notación

$$\mathbf{F}_u = \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{u}}} \left(\int_V W dV \right), \quad \mathbf{F}_p = \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \left(\int_V W dV \right) \quad (122)$$

$$\mathbf{K}_{uu} = \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \hat{\mathbf{u}}}, \quad \mathbf{K}_{up} = \frac{\partial \mathbf{F}_u}{\partial \hat{\mathbf{p}}} = \frac{\partial \mathbf{F}_p}{\partial \hat{\mathbf{u}}} = \mathbf{K}_{pu}, \quad \mathbf{K}_{pp} = \frac{\partial \mathbf{F}_p}{\partial \hat{\mathbf{p}}} \quad (123)$$

Efectuando estas operaciones

$$\mathbf{F}_u = \int_V \mathbf{B}_L^T \cdot \mathbf{S} dV \quad (124)$$

$$\mathbf{F}_p = \int_V -C_{pp} (p - \tilde{p}) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \hat{\mathbf{p}}} dV = \mathbf{0} \quad (125)$$

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_V \mathbf{B}_L^T : \mathbb{C}_{uu} : \mathbf{B}_L dV + \int_V \mathbf{B}_{NL}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_{NL} dV \quad (126)$$

$$\mathbf{K}_{up} = \int_V \mathbf{B}_L^T \cdot \mathbf{C}_{up} dV = \mathbf{K}_{pu}^T \quad (127)$$

$$\mathbf{K}_{pp} = \int_V C_{pp} dV \quad (128)$$

siendo \mathbf{B}_L y \mathbf{B}_{NL} las clásicas relaciones deformación-desplazamiento lineal y no lineal, respectivamente

$$C_{pp} = -\frac{1}{\kappa}, \quad \mathbf{C}_{up} = -C_{pp} \frac{\partial p}{\partial E_{kl}} \quad (129)$$

$$\mathbb{C}_{uu} = \bar{\mathbb{C}} + C_{pp} \frac{\partial p}{\partial E_{kl}} \frac{\partial p}{\partial E_{rs}} + C_{pp} (p - \tilde{p}) \frac{\partial p}{\partial E_{kl} \partial E_{rs}} \quad (130)$$

A partir de aquí, se obtiene el segundo tensor de Piola-Kirchhoff como

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}} + C_{pp} (p - \tilde{p}) \frac{\partial p}{\partial E_{kl}} \quad (131)$$

siendo $\bar{\mathbf{S}}$ y $\bar{\mathbb{C}}$ la parte desviadora del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff y del tensor constitutivo de cuarto orden en la configuración de referencia, respectivamente, ya calculados (ecuaciones (50) y (51)); κ es el modulo volumétrico del material, que para forzar una deformación a volumen cuasi constante debe tener un valor suficientemente alto, y \mathbf{E} es el tensor derecho de Green-Lagrange.

Considerando para la deformación volumétrica la función energía de deformación (54) resulta la siguiente expresión para la presión dependiente del campo de desplazamientos

$$p = \kappa (J_3 - 1) \quad (132)$$

Las derivadas de la presión respecto a \mathbf{E} vienen dadas por

$$\frac{\partial p}{\partial E_{kl}} = -\kappa J_3 \mathbf{C}^{-1} \quad \text{y} \quad \frac{\partial p}{\partial E_{kl} \partial E_{rs}} = \kappa J_3 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - \kappa J_3^{-1} 2\mathbf{Q} \quad (133)$$

donde $J_3 = I_3^{1/2}$, \mathbf{C} es el tensor derecho de Cauchy-Green y la forma matricial de \mathbf{Q} es

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} 0 & C_{33} & C_{22} & 0 & -C_{23} & 0 \\ & 0 & C_{11} & 0 & 0 & -C_{13} \\ & & 0 & -C_{12} & 0 & 0 \\ & & & -.5C_{33} & .5C_{31} & .5C_{23} \\ \text{sim.} & & & & -.5C_{11} & .5C_{12} \\ & & & & & -.5C_{22} \end{bmatrix} \quad (134)$$

La presión p , depende del cambio de volumen (J_3), producido por el campo de desplazamientos en cada punto de integración. Disponiendo de estas p , se obtiene una presión media \tilde{p} a nivel de elemento. Naturalmente, y a diferencia del campo de desplazamientos, esta presión resulta discontinua entre elementos y por lo tanto también lo serán las tensiones.

La condensación de la presión se realiza en la forma indicada por las ecuaciones (118-119), se plantean las ecuaciones de equilibrio (121) y se despeja la presión de la segunda de ellas

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{K}_{pp}^{-1} (-\mathbf{F}_p - \mathbf{K}_{up}^T \cdot \hat{\mathbf{u}}) \quad (135)$$

y luego se la reemplaza en la primera (121), quedando el siguiente sistema condensado

$$\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R} - \mathbf{F} \quad (136)$$

donde

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{up} \cdot \mathbf{K}_{pp}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{up}^T \quad (137)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_u - \mathbf{K}_{up} \cdot \mathbf{K}_{pp}^{-1} \cdot \mathbf{F}_p \quad (138)$$

De esta forma, condensada a nivel elemental la variable de presión, se tiene una formulación en desplazamientos, con matrices de rigidez y vectores de fuerzas incrementados pero sin adicionar variable alguna al sistema global.

Esta metodología se ha implementado en programa general de elementos finitos utilizando una formulación lagrangeana total.

VALIDACIÓN DEL MODELO

En esta sección se presentan algunos ejemplos a efectos de ilustrar el comportamiento del modelo constitutivo propuesto para elastómeros, cuya formulación se desarrolló en las secciones anteriores. En el primer ejemplo, tracción homogénea, se trata únicamente con la parte elástica de la formulación y se utiliza la función energía de deformación de Ogden con los parámetros dados por el autor¹ y posteriormente utilizados por Simo y Taylor²¹ y Miehe³ entre otros. La función energía de deformación de Ogden (40), puede expresarse en la forma

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = G \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i^*}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad (139)$$

donde λ_A son los estiramientos principales o valores propios del tensor de deformaciones \mathbf{U} , μ_i^* y α_i ($i = 1, \dots, N$) son números reales y N es un entero positivo, tal que $\sum_{i=1}^N \mu_i^* \alpha_i = 2$. G es el modulo de corte del material que se pretende modelar en la configuración de referencia.

Para $N = 3$, los valores de los parámetros dados por Ogden son.

$G \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	μ_1^*	μ_2^*	μ_3^*	α_1	α_2	α_3
4.225	1.491	0.003	-0.0237	1.3	5.0	-2.0

(140)

Tracción simple, deformación homogénea

Se analiza una pieza de dimensiones unitarias modelada con un único elemento de 4 nodos y 2×2 puntos de integración. El problema se trata como estado plano de deformación, imponiendo desplazamientos en dirección X , con libertad de vínculos en dirección Y .

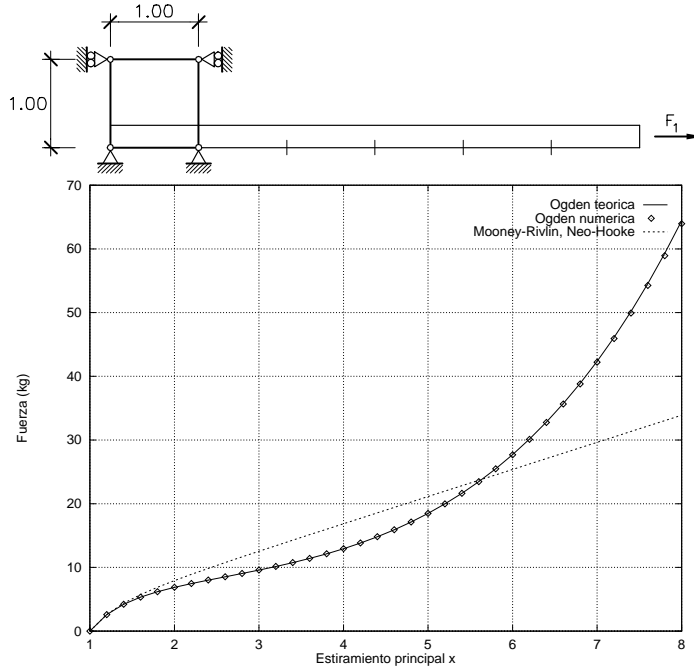


Figura 2. Respuesta $F_1 - \lambda_1$ de los modelos Ogden, Mooney-Rivlin y Neo-Hooke en tracción homogénea.

Se aplican incrementos de desplazamientos de 0.20 de la longitud total inicial, hasta alcanzar un desplazamiento igual a 7 veces el valor de la longitud original (estiramiento principal $\lambda_1 = 8$), consiguiendo convergencia en cuatro iteraciones en todos los incrementos de carga. En la Figura 2 se grafica la fuerza F_1 producida por el estiramiento principal λ_1 . Esta respuesta es coincidente con la respuesta teórica publicada por Ogden¹ para un material totalmente incompresible, $F = \sum_{i=1}^3 \mu_i (\lambda^{\alpha_i-1} - \lambda^{-\alpha_i-1})$ Ogden, pp. 498, ecuación 7.2.33. También es coincidente con las respuestas numéricas obtenidas por Simo y Taylor²¹ y Miehe³, utilizando técnicas multicampo.

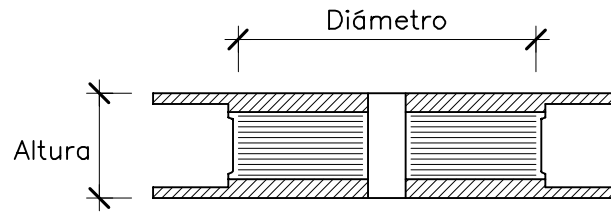
A efectos de comparar distintos modelos materiales, en la misma figura se presenta la respuesta de los modelos Neo-Hooke y Mooney-Rivlin. Se debe remarcar que la formulación presentada permite utilizar estos tres modelos (Ogden, Mooney-Rivlin y Neo-Hooke) cambiando únicamente los valores de las constantes indicadas en (140). En el modelo Mooney-Rivlin los parámetros a utilizar son $\mu_1 - \mu_2 = 1$, $\alpha_1 = -\alpha_2 = 2$ y en el modelo Neo-Hooke estos se reducen a dos constantes, $\mu_1 = 1$ y $\alpha_1 = 2$.

El excelente comportamiento del modelo numérico puede observarse en la Figura 2. Para obtener esta coincidencia con la respuesta teórica de un material totalmente incompresible

se trabaja con un módulo volumétrico κ suficientemente elevado, de manera de forzar una deformación a volumen cuasi constante. En este caso se utiliza un valor $\kappa = 10000$ con lo cual se obtiene una deformación volumétrica $0.0 \leq (J - 1) \leq 0.0172$ para $1 \leq \lambda_1 \leq 8$.

Dispositivos de apoyo

Verificado el comportamiento de la formulación numérica adoptada (parte elástica), a continuación se ensayan dispositivos de apoyo de caucho laminado a corte simple. Se ensayan dispositivos de caucho natural (*NRB* = *Natural Rubber Bearing*) y de alto amortiguamiento (*HRB* = *High Damping Rubber Bearing*). Las características de los dispositivos ensayados, que aquí se analizan numéricamente, son las indicadas en la Figura 3.



Tipo	NRB	HRB
Diámetro (mm)	1600	1420
Area, $\pi \Phi^2/4$ (m ²)	2.0106	1.5837
Altura (mm)	440	620
Espesor de las láminas de caucho (mm)	11.5	8
Número de láminas de caucho	19	31
Espesor de las láminas de acero (mm)	4.5	5.8
Número de láminas de acero	18	30
Carga vertical, P_0 (T)	500	500
Frecuencia natural horizontal, f_H (Hz)	0.5	0.5
Frecuencia natural vertical, f_V (Hz)	20	20

Figura 3. Características geométricas y mecánicas de los dispositivos ensayados. NRB = Natural Rubber Bearing. HRB = High Damping Rubber Bearing. SMiRT11 (1991).

Con el objetivo de determinar su rigidez horizontal y su amortiguamiento, al igual que confirmar similitudes entre modelos a escala real y modelos a escala reducida, estos dispositivos de apoyo fueron ensayados²³ bajo carga cíclica de baja frecuencia (0.01 Hz). Sobre los modelos a escala real se aplicaron cuatro ciclos de desplazamiento horizontal sinusoidal con carga vertical constante y amplitud variable entre un $\pm 25\%$ y un $\pm 200\%$ de deformación cortante. Estos porcentajes de deformación cortante se refieren a la altura total de la componente elastomérica de los dispositivos. Sobre los modelos a escala reducida (1/1.58 para dispositivos de caucho natural y 1/1.83 para dispositivos de alto amortiguamiento) la amplitud de los ciclos de desplazamiento horizontal se extiende hasta $\pm 400\%$.

En el análisis numérico se utiliza un elemento único con un ancho igual al diámetro del dispositivo y un espesor tal de conseguir una sección transversal equivalente. La altura del elemento que se considera en el análisis es la correspondiente a la suma de todas las láminas de caucho del dispositivo. En el análisis de los dispositivos de caucho natural (*NRB*) el modelo material aquí utilizado incluye sus partes hiperelástica y viscoelástica. La parte plástica del modelo se adiciona a las anteriores en el análisis de dispositivos de alto

amortiguamiento (*HRB*). Los parámetros utilizados en el modelo hiperelástico, comunes para ambos casos (*NRB* y *HRB*), son los siguientes:

G (kg/cm ²)	μ_1^*	μ_2^*	μ_3^*	α_1	α_2	α_3
4.5	1.03	0.002	-0.02	1.9	5.9	-1.6

Para el tiempo de relajación se utiliza un valor $\tau = 0.5$ en el análisis de los dispositivos de caucho natural y $\tau = 0.9$ en el análisis de dispositivos de alto amortiguamiento. La parte plástica del modelo, utilizada sólo en el caso de dispositivos de alto amortiguamiento, se obtiene al considerar una tensión de fluencia $\sigma_y = 3.06$ kg/cm², con endurecimientos isotrópico y cinemático nulos.

En las Figuras 4 y 5 se comparan las respuestas numéricas de este análisis con las experimentales²³. De estas se obtienen las siguientes conclusiones:

- Dispositivo de caucho natural.
 - El modelo desarrollado, con los parámetros materiales aquí utilizados, consigue reproducir correctamente la forma del diagrama fuerza-desplazamiento. Este resultado se consigue utilizando sólo las componentes elástica y viscoelástica del modelo.
 - Los picos de tensiones máximas para toda la historia de desplazamientos, con deformaciones de corte de hasta $\pm 400\%$, son capturados de forma exacta por el modelo propuesto.
 - El fenómeno de degradación, esto es la pérdida de rigidez del caucho para ciclos de deformación de amplitud superior a la alcanzada en ciclos previos, no puede ser capturado por el modelo numérico al no haberse incluido en el análisis la componente de daño del modelo material.
 - La disipación energética del modelo numérico, bucle de histéresis, es algo inferior a la observada en los resultados experimentales.
- Dispositivo de alto amortiguamiento.
 - La forma global del diagrama fuerza-desplazamiento experimental es aproximado por la simulación numérica, utilizando las componentes elástica, viscoelástica y plástica del modelo material.
 - Con los parámetros materiales utilizados, el modelo captura con exactitud los picos de tensión en la zona central del diagrama (deformaciones del orden de $\pm 200\%$ y $\pm 300\%$). Para deformaciones menores, de hasta $\pm 100\%$, el modelo numérico estima las tensiones por defecto; y para deformaciones mayores, $\pm 400\%$, la estimación es por exceso.
 - El no poder capturar con exactitud los picos de tensiones en todo el rango de deformaciones ($\pm 25\%$ a $\pm 400\%$), señalado en el punto anterior, se debe a la muy fuerte degradación de rigidez de este material (véase la figura ^{frb}, curva experimental). Esta degradación no es capturada por el modelo numérico al no haberse incluido en el análisis la componente de daño del modelo material.
 - Los resultados experimentales indican una mayor disipación energética, con relación a dispositivos de caucho natural. Esta mayor amplitud de los bucles de histéresis se consigue aproximar razonablemente bien en la simulación numérica con la incorporación de la componente plástica del modelo material, y una mayor participación de la componente viscoelástica ($\tau : 0.5 \rightarrow 0.9$).

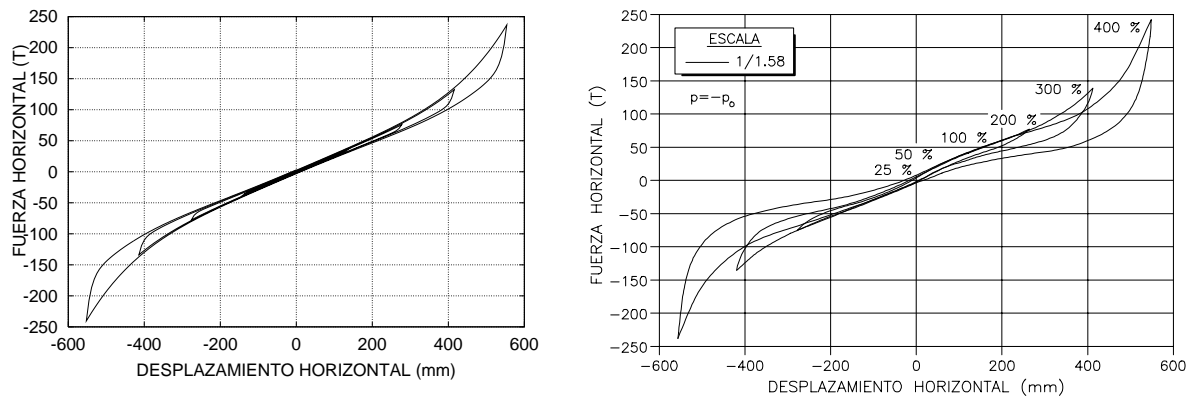


Figura 4. Dispositivo de caucho natural. Comparación de resultados numéricos (izquierda) con experimentales -SMiRT11 modelo a escala 1/1.58- (derecha).

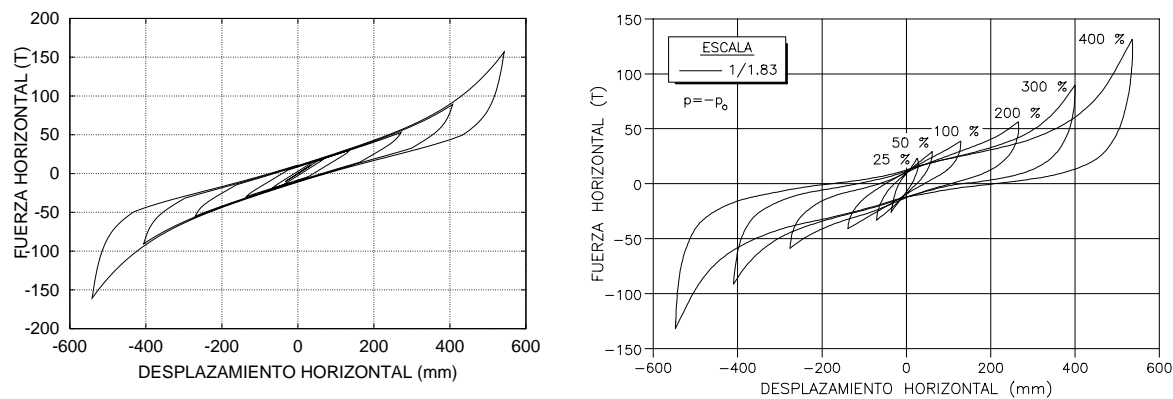


Figura 5. Dispositivo de alto amortiguamiento. Comparación de resultados numéricos (izquierda) con experimentales -SMiRT11 modelo a escala 1/1.83- (derecha).

CONCLUSIONES

Se ha propuesto un modelo fenomenológico en grandes deformaciones derivado a partir de una formulación general termodinámicamente consistente para simular el comportamiento mecánico de los elastómeros. Considerando que en los elastómeros se pueden incorporar partículas a efecto de incrementar sus propiedades disipativas, se ha propuesto utilizar diferentes modelos para cada una de las dos componentes, concretamente, viscoelasticidad para el caucho y elastoplasticidad para las partículas agregadas. El comportamiento global del compuesto es influenciado por las características mecánicas de cada componente simple de acuerdo a su proporción en volumen. Como ecuación de restricción o cierre del modelo se admitió una perfecta compatibilidad cinemática en todos los instantes de tiempo del proceso analizado.

La cuasi-incompresibilidad de los elastómeros ha sido tratada a nivel constitutivo mediante descomposición multiplicativa del gradiente de deformación en sus partes desviadora y volumétrica, lo cual ha conducido a una descomposición aditiva de la función energía de deformación y, en consecuencia, a una descomposición aditiva de los tensores de tensión y constitutivo. La implementación del modelo en un código de elementos finitos se ha realizado mediante una formulación mixta desplazamiento/presión. A diferencia del campo de desplazamientos, que se considera continuo entre elementos, para la presión no se requiere tal continuidad y esta es considerada propia de cada elemento y por lo tanto puede ser condensada a nivel de elemento, antes de proceder con el ensamblaje y resolución del sistema

de ecuaciones. Se logra la cuasi-incompresibilidad buscada, aún en casos de deformaciones extremas.

El modelo numérico desarrollado, en su parte elástica y con las constantes materiales dadas por Ogden, reproduce exactamente respuestas fuerza-desplazamiento de elastómeros publicadas previamente. En tracción simple homogénea se logra total coincidencia hasta deformaciones de siete veces el valor de la longitud original de la pieza ensayada. En la simulación numérica de ensayos de dispositivos de apoyo de elastómero laminado con desplazamientos cíclicos impuestos hasta deformaciones próximas a rotura ($\pm 400\%$), el modelo numérico, con los parámetros materiales aquí propuestos, consigue reproducir razonablemente bien la forma de los diagramas fuerza-desplazamiento.

REFERENCIAS

- 1 R.W. Ogden, “*Non-linear elastic deformations*”, Ellis Horwood Limited, Chichester, England, (1984).
- 2 M.S. Gadala, “Unified numerical treatment of hyperelastic and rubber-like constitutive laws”, *Communications in Applied Numerical Methods*, N° 7, pp. 581–587, (1991).
- 3 C. Miehe, “Aspects of the formulation and finite element implementation of large strain isotropic elasticity”, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. **37**, pp. 1981–2004, (1994).
- 4 O. Salomón, S. Oller y A. Barbat, “Un tratamiento de material tipo goma, mediante la condensación de la variable de presión”, *Mecánica Computacional, Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, Vol. **XVII**, pp. 361–372, (1996).
- 5 J.C. Simó, “On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: Formulation and computational aspects”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **60**, pp. 153–173, (1987).
- 6 G.A. Holzapfel, “On large strain viscoelasticity: Continuum formulation and finite element applications to elastomeric structures”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **39**, N° 22, pp. 3903–3926, (1996).
- 7 M. Kaliske y H. Rothert, “Internal material friction of rubber modelled by a multiplicative elasto-plastic approach”, *Proceedings of the Fourth International Conference on Computational Plasticity*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE, Barcelona, pp. 945–956, (1995).
- 8 M. Kaliske, N. Gebbeken y H. Rothert, “A generalized approach to inelastic behaviour at finite strains - Application to polymeric material”, *Proceedings of the Fifth International Conference on Computational Plasticity*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE, Barcelona, pp. 937–944, (1997).
- 9 O. Salomón, S. Oller y A. Barbat, “Modelling of laminated elastomeric passive-control bearing for seismic analysis”, *Fourth World Congress on Computational Mechanics*, Buenos Aires, Argentina, (1998).
- 10 S. Govindjee y J.C. Simó, “Transition from micro-mechanics to computationally efficient phenomenology: Carbon black filled rubbers incorporating Mullins’ effect”, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. **40**, N° 1, pp. 213–233, (1992).
- 11 E.M. Arruda y M.C. Boyce, “A three-dimensional constitutive model for the large stretch behaviour of rubber elastic materials”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. **41**, N° 2, pp. 389–412, (1993).

- 12 L. Anand, "A constitutive model for compressible elastomeric solids", *Computational Mechanics*, Vol. **18**, pp. 339–355, (1996).
- 13 J.S. Bergstrom y M.C. Boyce, "Constitutive modelling of the large strain time-dependent behaviour of elastomers", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. **46**, N° 5, pp. 931–954, (1998).
- 14 S. Oller, E. Oñate, J. Miquel y S. Botello, "A plastic damage constitutive model for composite materials", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. **33**, N° 17, pp. 2501–2518, (1996).
- 15 A.J.M. Spencer, "*Continuum Mechanics*", Longman, England, (1992).
- 16 O. Salomón, S. Oller y A. Barbat, "Finite element analysis of base isolated buildings subjected to earthquake loads", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **46**, pp. 1741–1761, (1999).
- 17 M. Mooney, "A theory of large elastic deformation", *Journal of Applied Physics*, Vol. **11**, pp. 582–592, (1940).
- 18 R.S. Rivlin, "Large elastic deformations of isotropic materials. IV further development of the general theory", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, N° 241, pp. 379–397, (1948).
- 19 J.C. Simó, "*Topics on the numerical analysis and simulation of plasticity*" Vol. **III** of *Handbook of Numerical Analysis*, Elsevier Science Publishers, North Holland, (1993).
- 20 K. Morman, "The generalized strain measure with application to non-homogeneous deformations in rubber-like solids", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. **53**, pp. 726–728, (1986).
- 21 J.C. Simó y R.L. Taylor, "Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. Continuum basis and numerical algorithms", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **85**, pp. 273–310, (1991).
- 22 L.R.G. Treloar, "*The physics of rubber elasticity*", 3rd Edition, Oxford University Press, Oxford, U.K., (1975).
- 23 SMiRT11, "*Seismic isolation and response control for nuclear and non-nuclear structures*", Structural Mechanics in Reactor Technology, Tokyo: SMiRT11, (1991).
- 24 S. Govindjee y J.C. Simó, "Mullins' effect and strain amplitude dependence of the storage modulus", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. **29**, N° 14/15, pp. 1737–1751, (1992).
- 25 G. Weber y L. Anand, "Finite deformation constitutive equations and time integration procedure for isotropic, hyperelastic-viscoplastic solids", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **79**, pp. 173–202, (1990).
- 26 A.L. Eterovic y K.J. Bathe, "A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **30**, pp. 1099–1114, (1990).
- 27 D. Peric, R.D.J. Owen y M.E. Honnor, "A model for finite strain elasto-plasticity based on logarithmic strains: Computational issues", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **94**, pp. 35–61, (1992).
- 28 J.C. Simó, "Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of infinitesimal theory", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **99**, pp. 61–112, (1992).

-
- 29 J.E. Mardsen y T.J.R. Hughes, “*Mathematical Foundations of Elasticity*”, Prentice-Hall Inc., New Jersey, (1983).
 - 30 T. Sussman y K. Bathe, “A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis”, *Computer and Structures*, Vol. **26**, N° 1/2, pp. 357–409, (1987).
 - 31 M.S. Gadala, “Alternative methods for the solution of hyperelastic problems with incompressibility”, *Computer and Structures*, Vol. **42**, N° 1, pp. 1–10, (1992).
 - 32 K.J. Bathe, “*finite Element Procedures*”, Prentice-Hall Inc., New Jersey, (1996).
 - 33 J.C. Simó, “A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part 2 Computational aspects”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **68**, pp. 1–31, (1988).