

Análisis no lineal de tanques criogénicos bajo cargas térmicas

J. Oliver*, E. Oñate*, J. Peraire* y R. Chueca**

*E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona

**Auxini-Dragados y Construcciones, S.A.

1. INTRODUCCION

El uso de hormigones criogénicos en estructuras que deben soportar muy bajas temperaturas se ha incrementado notablemente en los últimos años. Un ejemplo típico de dichas estructuras son los tanques para almacenamiento de gas licuado en los que el gas permanece a una temperatura media de -160°C . Por otra parte, bajo circunstancias especiales, como es el caso de accidentes, la temperatura dentro del tanque puede alcanzar valores de hasta 1.300°C en pocos segundos. Es, por tanto, evidente que el análisis de dichas estructuras debe tener en cuenta los severos gradientes de temperatura a los que la pared del tanque puede estar sometida, y que provocan desplazamientos, tensiones y deformaciones sobre la misma que deben ser evaluados con precisión.

Adicionalmente, en muchas situaciones reales dichos gradientes térmicos dan lugar a zonas de la estructura donde el comportamiento del material se aparta del elástico, originándose fisuras en las zonas traccionadas del hormigón, o bien plastificación de las barras de acero (o incluso del hormigón) en las zonas comprimidas.

En este artículo se presenta un modelo numérico para el análisis no lineal de estructuras laminares sometidas a gradientes térmicos por el método de los elementos finitos. La formulación utiliza elementos de sólido tridimensional para calcular la distribución de la temperatura en el tiempo a través del espesor de la lámina, y elementos de lámina para analizar la respuesta no lineal de la estructura a cada nivel de temperatura.

El artículo se ha estructurado en tres partes. En la primera se presenta el algoritmo numérico para evaluar la distribución de temperaturas en el tiempo dentro de la lámina. Tras ello se dan detalles sobre el modelo de análisis tensional que incorpora el comportamiento no lineal del hormigón y del acero. Finalmente, se presentan ejemplos de aplicación de la metodología desarrollada al estudio de una estructura tipo placa y al análisis completo de un depósito de hormigón criogénico para almacenamiento de gas natural licuado.

2. ESTUDIO DE LA DISTRIBUCIÓN TRANSITORIA DE TEMPERATURAS

2.1. Ecuaciones básicas del problema tridimensional

El estudio de la distribución de temperaturas en sólidos por el método de los elementos finitos es un problema clásico sobre el que puede encontrarse información en numerosas referencias [1] - [6]. No obstante, existe todavía una actividad constante en la búsqueda de algoritmos de solución de las ecuaciones en el tiempo que optimicen las propiedades de estabilidad, convergencia y precisión, y sean al mismo tiempo relativamente simples de aplicar en la gama de problemas más amplia posible.

Para este trabajo se han seguido los estudios de Damjanic y Owen [2, 3] que recientemente han presentado una interesante contribución sobre el tema. Resumiremos seguidamente los puntos fundamentales de la formulación térmica de dichos autores.

La ecuación de balance térmico (o de Fourier) en un medio no homogéneo tridimensional puede escribirse en la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial T}{\partial z}) + Q = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

donde $T(x,y,z,t)$ es la temperatura, x y z son las coordenadas cartesianas de referencia, t el tiempo, K_x , K_y y K_z las conductividades térmicas en las direcciones x , y , z respectivamente (para un material térmicamente isótropo $K_x = K_y = K_z = K$), Q el calor generado por unidad de volumen, ρ la densidad y C el calor específico.

La ecuación (1) debe resolverse juntamente con las condiciones de contorno

$$T = T_A(x,y,z,t) \quad (2)$$

en el contorno de temperatura prescrita Γ_A , y

$$K_x \frac{\partial T}{\partial x} l_x + K_y \frac{\partial T}{\partial y} l_y + K_z \frac{\partial T}{\partial z} l_z + q + \alpha_C (T - T_a) = 0 \quad (3)$$

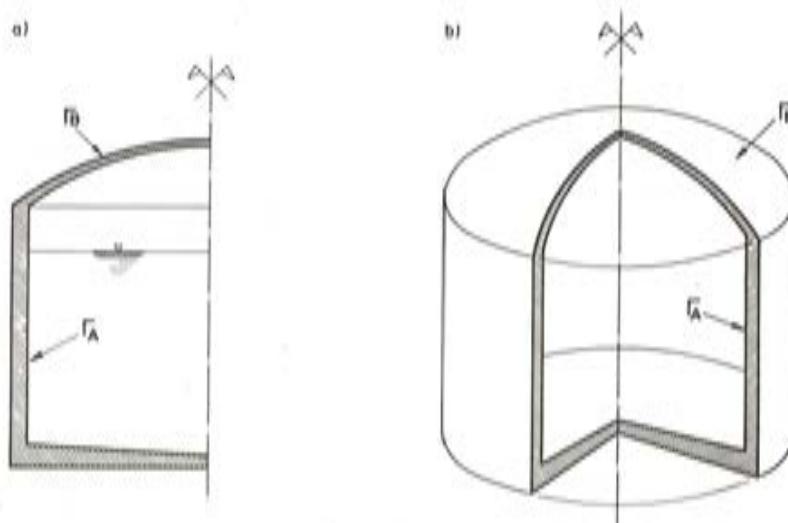


Fig. 1. Tanque de hormigón criogénico. a) Simetría de revolución, b) Análisis tridimensional.

en el contorno de radiación prescrita Γ_B . Ejemplos típicos de dichos contornos pueden verse en la Fig. 1.

En la ecuación (3) I_x, I_y, I_z son los cosenos de la normal al contorno Γ_B , q el flujo de calor por unidad de área, T_a la temperatura y α_c es el coeficiente de radiación. Para $q = \alpha_c = 0$ se tiene el caso de una superficie aislante.

Adicionalmente, la temperatura debe satisfacer en todos los puntos la siguiente condición inicial

$$T_0 = T_0^* (x_i, y_i, z_i, 0) \quad x_i, y_i, z_i \in V \quad (4)$$

donde T_0^* es la temperatura inicial prescrita para el tiempo cero, y V el volumen de la estructura.

2.2. Solución por elementos finitos

Para la discretización del campo de temperaturas seguimos el procedimiento usual de utilización de funciones de formas espaciales y variables temporales. Así pues, una vez seleccionada la malla de elementos finitos [6] se tiene

$$T(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^p N_j(x, y, z) T_j(t) = \underline{\underline{T}} \quad (5)$$

donde N_j es la función de forma del nodo j de una malla de elementos finitos de p nodos, y T_j el valor de la temperatura en dicho nodo.

La forma integral de las ecuaciones de equilibrio térmico se obtiene a partir de la expresión de residuos ponderados de las ecuaciones del problema (1) y (3). Así

$$\begin{aligned} & \int_V \bar{W} \left[\frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial T}{\partial z}) + Q - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right] dV + \\ & + \oint_{\Gamma_B} W \left[K_x \frac{\partial T}{\partial x} I_x + K_y \frac{\partial T}{\partial y} I_y + K_z \frac{\partial T}{\partial z} I_z + q + \alpha_c (T - T_a) \right] d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Integrando por partes los términos en derivadas parciales de la primera integral, haciendo $\bar{W} = -W$, sustituyendo la ec.(5), y, finalmente, escogiendo la expresión de Galerkin en que $W_j = N_j$, se encuentra el sistema final de ecuaciones en la forma

$$\underline{\underline{C}} \dot{\underline{\underline{T}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{T}} + \underline{\underline{f}} = 0 \quad (7)$$

donde:

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{V_e} \left(K_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + K_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + K_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dV + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_B^e} \alpha_c N_i N_j d\Gamma \quad (8)$$

son los coeficientes de rigidez térmica que se ensamblan para formar la matriz $\underline{\underline{K}}$ global a partir de cada uno de los elementos de la estructura y de los Γ_e elementos que pertenecen al contorno Γ_B .

Similarmente, los componentes de la matriz global de capacidad calorífica $\underline{\underline{C}}$ vienen dados por

$$C_{ij} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{V^e} \rho C N_i N_j dV \quad (9)$$

y los componentes del vector de fuerzas global son

$$f_i = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{V^e} Q N_i dV + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_B^e} (q - \alpha_c T_A) N_i d\Gamma \quad (10)$$

Más detalles sobre la obtención de las expresiones anteriores pueden encontrarse en las referencias [1] -[6].

2.2.1. Particularización para el caso de simetría de revolución

En muchas situaciones prácticas puede ser de gran interés realizar un análisis de la estructura bajo la hipótesis de simetría completa de revolución de geometría y acciones. En dichos casos el problema se simplifica pues basta con estudiar el comportamiento térmico de una sección meridional como la de la Fig. 1a. Por otra parte, las ecuaciones de comportamiento del problema (1) - (5) se simplifican debido a la simetría para dar

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r K_r \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial T}{\partial z}) + Q = \rho C \frac{\partial T}{\partial z} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} T &= T_A(r, z, t) \quad \text{en } \Gamma_A \\ K_r \frac{\partial T}{\partial r} l_r + K_z \frac{\partial T}{\partial z} l_z + q + \alpha_c (T - T_A) &= 0 \quad \text{en } \Gamma_B \end{aligned} \quad (12)$$

donde r y z son las coordenadas cartesianas de referencia en la sección meridional.

Siguiendo un proceso análogo al seguido para el caso tridimensional se obtiene un sistema final de ecuaciones idéntico al (7) donde ahora

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{A^e} (K_r \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + K_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z}) r dA + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_B^e} \alpha_c N_i N_j r d\Gamma \quad (13)$$

$$C_{ij} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{A^e} \rho C N_i N_j r dA \quad (14)$$

y

$$f_i = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{A^e} Q N_i r dA + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_B^e} (q - \alpha_c T_A) N_i r d\Gamma \quad (15)$$

Obsérvese la similitud de las expresiones anteriores con las ecs. (8)-(10) obtenidas para el caso tridimensional. Dicha similitud permite, de hecho, tratar los dos problemas de una forma unificada en un solo programa de ordenador, sin más que tener en cuenta las analogías siguientes:

Problema tridimensional

x
z
y
dV
$d\Gamma$

Problema de revolución

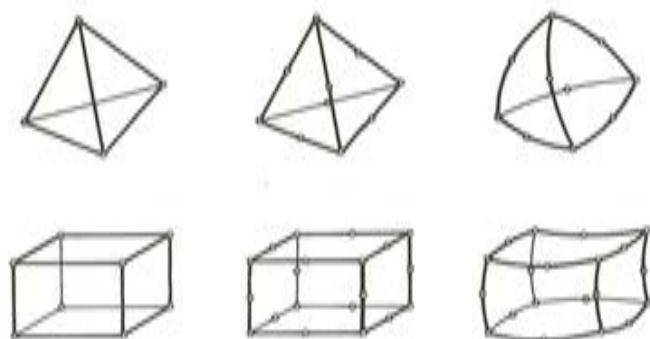
r
z
inexistente
$r dA$
$r d\Gamma$

Si se desea mayor información sobre el cálculo numérico de las expresiones integrales anteriores puede consultarse la referencia [6].

2.3. Tipos de elemento finito utilizados en el análisis

La formulación térmica presentada exige la utilización de diferentes tipos de elementos según que el análisis sea tridimensional o con simetría de revolución.

a) Elementos tridimensionales.



b) Elementos bidimensionales.

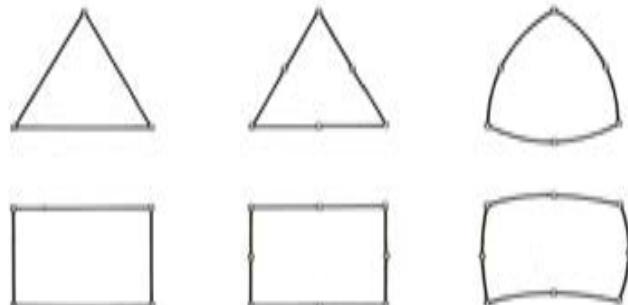


Fig. 2. Algunos elementos bi y tridimensionales para aplicación en el problema térmico.

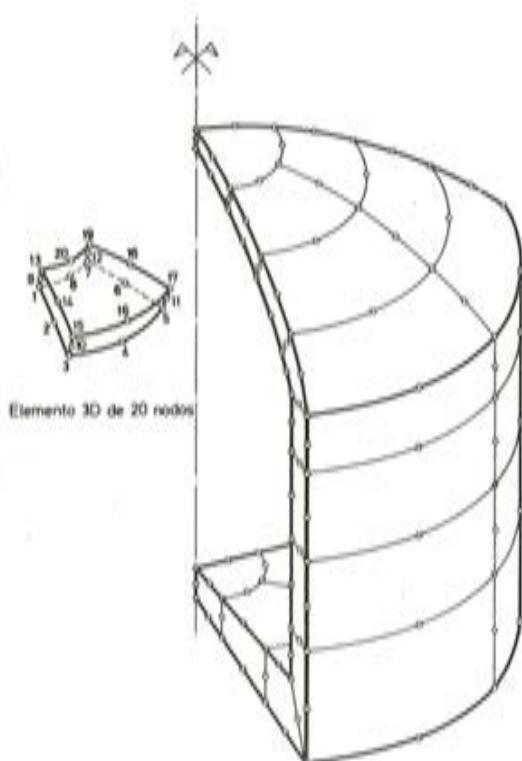


Fig. 3. Tanque de hormigón criogénico. Análisis térmico tridimensional de 1/4 de la estructura (por simetría) con elementos de 20 nodos.

Así, en el caso en tres dimensiones puede hacerse uso de cualquiera de los elementos tridimensionales clásicos (tetraedros, prismas, etc.) de lados rectos o curvos. Algunos de los más populares se han representado en la Fig. 2a. Los detalles sobre la formulación particular de cada elemento pueden encontrarse en la referencia [6]. En la Fig. 3 se muestra la discretización de un cuarto de tanque con elementos prismáticos curvos (isoparamétricos) de veinte nodos, que es un elemento bastante utilizado para este tipo de análisis.

El estudio de revolución precisa elementos bidimensionales más sencillos que en el caso general de tres dimensiones. La gama de elementos a utilizar en este caso es amplia e incluye a prácticamente todos los elementos de las familias del triángulo y cuadrilátero de lados rectos o curvos. En la Fig. 2b se han representado algunos de los elementos más usuales. Para más detalles al respecto consultar de nuevo la referencia [6]. En la Fig. 4 se presenta la discretización de la sección meridional de un tanque en elementos cuadrangulares curvos (isoparamétricos) de nueve nodos. Este elemento es, en la actualidad, uno de los más recomendables para este tipo de análisis y geometría habiéndose utilizado en este trabajo para obtener los resultados numéricos que se muestran en el ejemplo del apartado 4.2.

2.4. Solución de las ecuaciones en el tiempo

Para resolver el sistema de ecuaciones (7) en el tiempo utilizamos el procedimiento sugerido por Damjanic y Owen [3]. Así, se supone una variación lineal de las temperaturas en el intervalo de tiempo t_n a t_{n+1} de forma que

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t \quad (16)$$

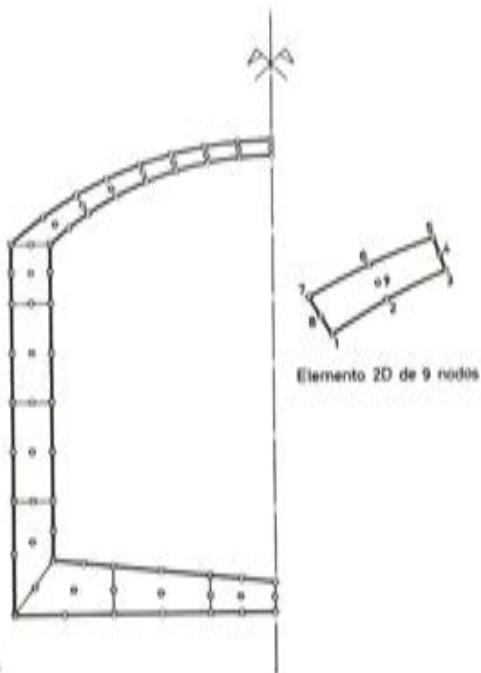


Fig. 4. Tanque de hormigón criogénico. Análisis térmico de revolución con elementos de 9 nodos.

donde Δt es el incremento de tiempo prescrito.

Por otra parte, se establece el cumplimiento de la ecuación (8) para un tiempo $t_{n+\alpha}$ perteneciente al intervalo $[t_n, t_{n+1}]$ de forma que

$$\underline{C}_{t_{n+\alpha}} \cdot \dot{\underline{T}}_{t_{n+\alpha}} + \underline{K}_{t_{n+\alpha}} \cdot \underline{T}_{t_{n+\alpha}} = t_n + \alpha \quad (17)$$

siendo:

$$t_{n+\alpha} = t_n + \alpha \Delta t$$

De la hipótesis de distribución lineal de temperaturas se deduce que

$$\underline{T}_{t_{n+\alpha}} = \frac{T_{t_{n+\alpha}} - T_{t_n}}{\alpha \Delta t} \quad (18)$$

y sustituyendo (18) en (17) se obtiene:

$$\underline{K}_{t_{n+\alpha}} \underline{T}_{t_{n+\alpha}} = \dot{\underline{T}}_{t_{n+\alpha}} \quad (19)$$

donde:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{K}}_{t_{n+\alpha}} &= \underline{K}_{t_{n+\alpha}} + \frac{1}{(\alpha \Delta t)} \underline{C}_{t_{n+\alpha}} \\ \dot{\underline{T}}_{t_{n+\alpha}} &= \underline{T}_{t_{n+\alpha}} + \frac{1}{(\alpha \Delta t)} \underline{C}_{t_{n+\alpha}} T_{t_n} \end{aligned} \quad (20)$$

La ecuación (19) se resuelve para obtener $T_{t_n+\alpha}$ como

$$T_{t_n+\alpha} = \hat{K}_{t_n+\alpha}^{-1} \hat{f}_{t_n+\alpha} \quad (21)$$

de donde puede calcularse el valor de la temperatura al final del intervalo de tiempo t_{n+1} , como

$$\underline{T}_{t_n+\alpha} = \left(\frac{1}{\alpha} \right) T_{t_n+\alpha} + \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \underline{T}_{t_n} \quad (22)$$

Está demostrado que el método anterior es incondicionalmente estable para $\alpha > 1/2$ [1]–[3]. Un valor recomendable en la práctica es el $\alpha = 2/3$ (método de Galerkin) que es el que ha sido utilizado en nuestro análisis.

3. ANALISIS TENSIONAL

3.1. Teoría de la deformación

Para modelizar la deformación del tanque se ha acudido a una teoría de láminas gruesas con geometría de revolución. Como hipótesis fundamentales establecidas en dicha teoría indicaremos las siguientes:

- "La normal a la superficie media de la lámina antes de la deformación, permanece recta durante la misma, pero no necesariamente normal a la deformada de dicha superficie media".

Esta hipótesis, establecida inicialmente para placas [7] (hipótesis de Reissner-Mindlin) y extendida posteriormente a láminas permite la inclusión de la energía de la deformación por cortante, cuya influencia en la deformación de la lámina se acreciente con el espesor de la misma. Resulta pues especialmente interesante para estructuras del tipo "lámina gruesa" como son los tanques de hormigón armado.

- "Los radios de curvatura principales de la lámina son grandes comparados con el espesor de la misma".

Esta simplificación resulta aceptable para las tipologías más usuales en tanques de hormigón en los que la relación espesor/radio de curvatura se sitúa por debajo del 2 por ciento.

- "Los desplazamientos se suponen pequeños", en el sentido de la consideración de linealidad geométrica en la deformación.

3.2. Relaciones tensión-deformación

Como es bien sabido, el comportamiento real de las estructuras de hormigón armado y pretensado es complejo y puede ser altamente no-lineal. Fenómenos como la fisuración, fluencia, retracción, plasticidad, etc. se presentan en los materiales que constituyen el hormigón armado haciendo complicados y costosos, en tiempo de ordenador, aquellos modelos numéricos que pretenden simular su comportamiento estructural. Por otra parte, la severidad de las cargas térmicas que intervienen en el diseño de tanques criogénicos hace obligatorio incluir dichos efectos no lineales en el análisis. En consecuencia, en el modelo numérico presentado en este trabajo se han considerado las que, a nuestro juicio, son las principales características no lineales del hormigón y del acero, es decir:

- El fenómeno de la fisuración en el hormigón.
- La posibilidad de plastificación tanto en las armaduras como en el hormigón.

En los últimos años han sido propuestos distintos modelos que incluyen la consideración de dichos fenómenos. El presentado aquí está basado en los desarrollados por Lin [8] y Rahaman [9] para estructuras laminares y será descrito brevemente a continuación.

Para representar los distintos materiales que componen la sección del depósito (hormigón, acero de armaduras, e incluso chapas de acero de recubrimiento interior o exterior, véase Fig. 5) se realiza una división del espesor de la lámina en capas paralelas a la superficie media de la misma (véase Fig. 6). Estas capas pueden ser de hormigón, de acero de armaduras (con un espesor equivalente al área de la armadura que representan), o de acero de chapa de recubrimiento.

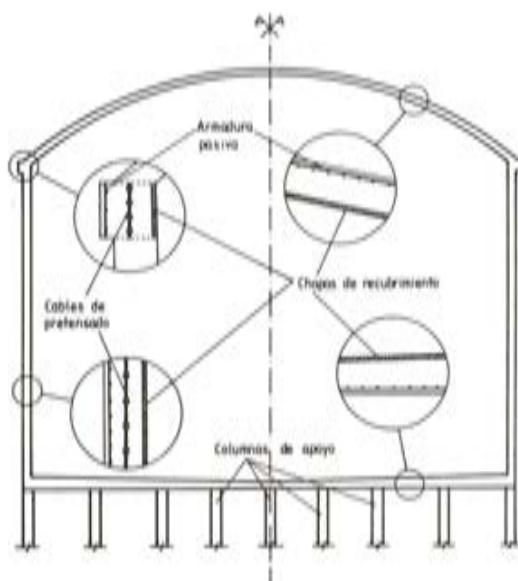


Fig. 5. Estructura resistente de un tanque para G.N.L.

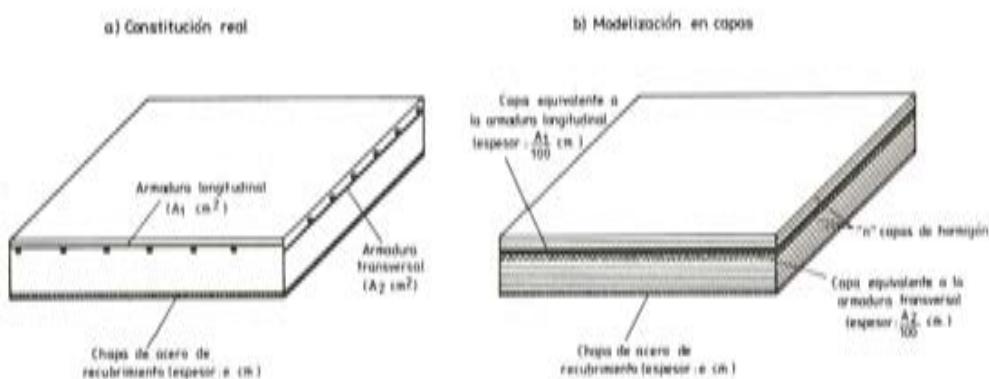


Fig. 6. Modelización de la lámina en capas de los distintos materiales.

Cada capa puede tener relaciones tensión - deformación diferentes, incluso tener comportamientos uniaxiales desacoplados en dos direcciones tal como ocurre en las capas de armaduras.

Tanto el hormigón como el acero, se caracterizan en el modelo mediante un diagrama uniaxial tensión - deformación. En el caso del hormigón este diagrama (véase Fig. 7a) considera la fisuración a tracción a partir de una tensión máxima f_t , y una relajación parabólica de la misma (hasta anularse para una deformación ϵ_u) circunstancia que permite la consideración del fenómeno de "tensión stiffening". En la zona de compresión se considera un diagrama bilineal con inclusión de la plastificación sin endurecimiento a partir del límite elástico f_c . En lo que se refiere al acero, se considera un diagrama bilineal simétrico a tracción y compresión, produciéndose la plastificación con endurecimiento H' a partir del límite elástico f_y (Véase Fig. 7b).

Consideremos ahora las cinco tensiones que actúan en un punto de una capa (véase Fig. 8). Las tensiones cortantes τ_{xz} y τ_{yz} , en la dirección del espesor, no intervienen en el comportamiento tensión-deformación no lineal adaptado y por ello serán olvidadas momentáneamente.

Las tensiones σ_x , σ_y , y τ_{xy} , contenidas en el plano de la capa y por tanto paralelas a la superficie media de la lámina, determinan un estado de tensión plana para el que es posible calcular las correspondientes direcciones y tensiones principales. A partir de este punto, las capas de hormigón, de acero y de chapa de recubrimiento reciben un tratamiento distinto:

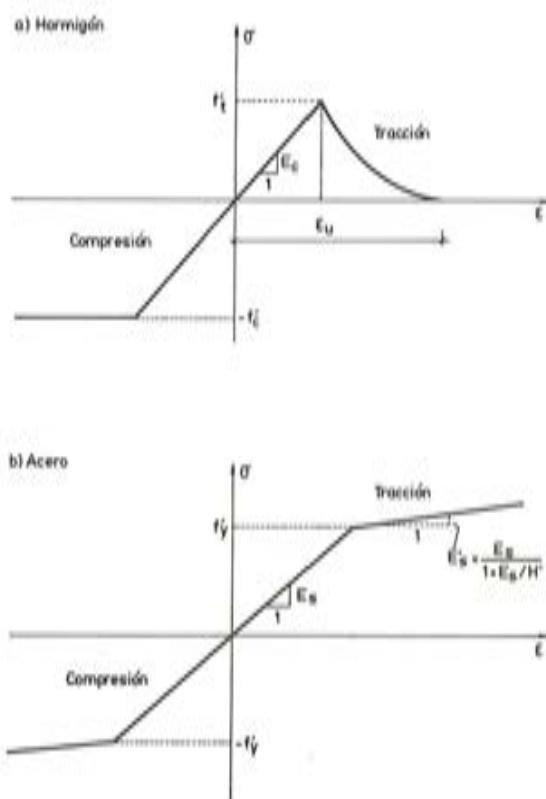


Fig. 7. Diagramas uniaxiales tensión-deformación para el hormigón y el acero.

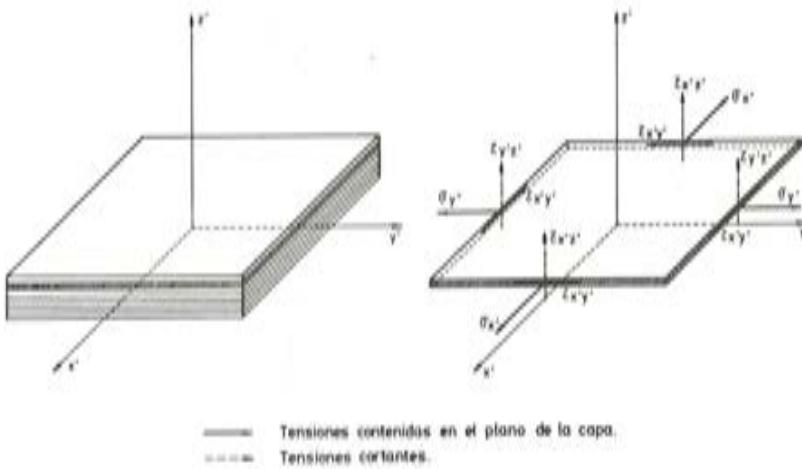


Fig. 8. Tensiones sobre una capa.

3.2.1. Capas de hormigón

En función de las tensiones principales σ_1 y σ_2 en cada punto de la capa, la zona rayada del diagrama biaxial de la Fig. 9 corresponde, en el modelo adoptado, al comportamiento elástico. En estas circunstancias es posible establecer una relación tensión-deformación de la forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{bmatrix} = \frac{E_c}{1 - \nu_c^2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \nu_c & 0 & 0 & 0 \\ \nu_c & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_c}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu_c}{2\bar{\alpha}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu_c}{2\bar{\alpha}} \end{bmatrix}}_D \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{bmatrix} \quad (23)$$

siendo E_c el módulo de elasticidad del hormigón y ν_c el coeficiente de Poisson. Para el coeficiente $\bar{\alpha}$, que ajusta la energía de deformación por cortante, se ha tomado un valor $\bar{\alpha} = 1,2$.

Cuando el estado tensional es tal que el punto (σ_1, σ_2) , en el diagrama de la Fig. 9, está sobre la frontera de la zona rayada, el comportamiento deja de ser elástico y por consiguiente pasa a ser no-lineal. Distinguiremos en principio tres zonas:

- La zona II caracterizada por un estado de compresión biaxial. Cuando se alcanza el límite de dicha zona se produce la plastificación del hormigón. El criterio de plastificación adaptado es el de Von Mises, cuya superficie de fluencia viene definida por

$$F = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} - f_c = 0 \quad (24)$$

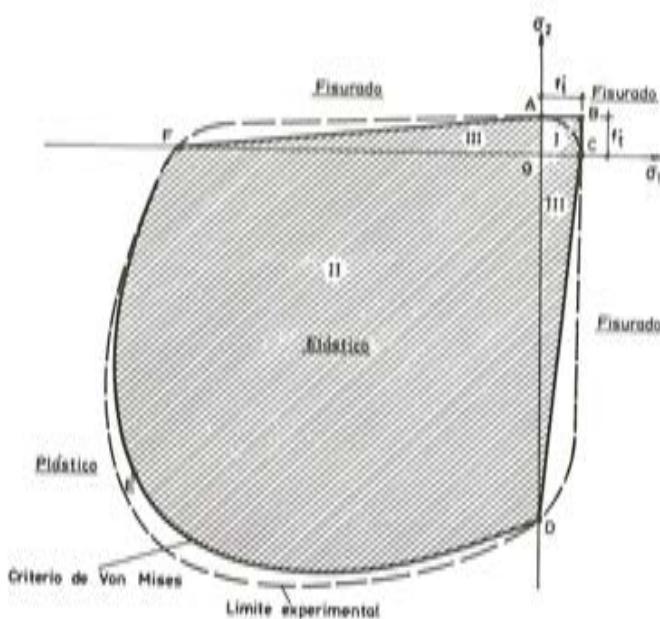


Fig. 9. Diagrama biaxial en función de las tensiones principales σ_1 y σ_2 en el plano de la capa.

en tensiones principales o bien por

$$F = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \tau_x^2} - f'_c = 0 \quad (25)$$

en tensiones locales.

- Las zonas I y III cuyo límite caracteriza la aparición de fisuras. En el caso de tracción biaxial (zona I) la fisuración se inicia cuando alguna de las dos tensiones principales alcanza el límite de tracción f'_t . En el caso de tracción-compresión (zona III) el valor de la tensión de fisuración varía con el de la tensión en la dirección comprimida desde f'_t (puntos A y C) hasta cero (puntos D y F).

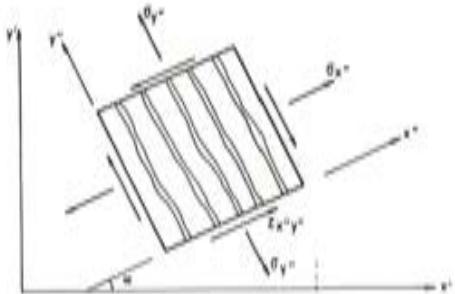
Una vez el estado tensional es tal que se ha alcanzado la frontera ABCD, se produce fisuración en una o dos direcciones según una o ambas tensiones principales alcancen el valor de fisuración. Las direcciones de fisuración son ortogonales a las tensiones principales que las producen, y el proceso operativo para determinar el estado tensional en el hormigón fisurado es como sigue:

a) Fisuración en una dirección

En el caso de que exista una fisura perpendicular a la dirección α , el proceso para hallar el estado tensional a partir de las deformaciones es el siguiente:

1. Se efectúa un cambio de coordenadas locales mediante un giro de valor α de tal forma que el eje x'' del nuevo sistema de coordenadas sea perpendicular a la fisura existente (véase Fig. 10a).

a) Fisuración en una dirección



b) Fisuración en dos direcciones

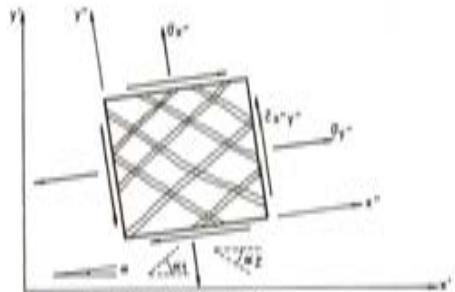


Fig. 10. Esquema de fisuración en una capa de hormigón.

La matriz de cambio es entonces la siguiente:

$$T^* = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ -2 \sin \alpha \cos \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (26)$$

y con ello:

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}'' &= T^* \cdot \underline{\varepsilon}' \\ \underline{\sigma}'' &= (T^{t*})^{-1} \cdot \underline{\sigma}' \\ \underline{\sigma}' &= T^{t*} \cdot \underline{\sigma}'' \end{aligned} \quad (27)$$

Siendo:

$$\underline{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma_x' \\ \sigma_y' \\ \tau_{x'y'} \end{bmatrix} \quad \underline{\sigma}'' = \begin{bmatrix} \sigma_{x''} \\ \sigma_{y''} \\ \tau_{x''y''} \end{bmatrix} \quad \underline{\varepsilon}' = \begin{bmatrix} \epsilon_x' \\ \epsilon_y' \\ \gamma_{x'y'} \end{bmatrix} \quad \underline{\varepsilon}'' = \begin{bmatrix} \epsilon_{x''} \\ \epsilon_{y''} \\ \gamma_{x''y''} \end{bmatrix} \quad (28)$$

2. Se halla la tensión perpendicular a la dirección de fisuración a partir de la deformación $e_x^{\prime\prime}$, y del correspondiente diagrama uniaxial (Fig. 7a) teniendo en cuenta los eventuales procesos de descarga que se describen en el apartado 3.2.5.
3. Se determinan las tensiones $\sigma_y^{\prime\prime}$ y $\tau_{x^{\prime\prime}y^{\prime\prime}}$ como:

$$\begin{aligned}\sigma_y^{\prime\prime} &= E \cdot e_y^{\prime\prime} \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \tau_{x^{\prime\prime}y^{\prime\prime}} &= 0,5 \cdot G \cdot \gamma_{x^{\prime\prime}y^{\prime\prime}}\end{aligned}\quad (29)$$

4. Con el valor de las tensiones $\sigma_x^{\prime\prime}$, $\sigma_y^{\prime\prime}$ y $\tau_{x^{\prime\prime}y^{\prime\prime}}$ se determinan las tensiones principales y se comprueba si se ha producido una nueva dirección de fisuración. Si es así, se sigue el proceso indicado en el apartado siguiente para hormigón doblemente fisurado. Para evitar el excesivo e irreal desarrollo de fisuras se ha impuesto que el ángulo mínimo que debe existir entre una fisura ya existente y una nueva sea mayor de 30° [9].
5. En el caso en que no se haya formado una nueva fisura se comprueba si se ha producido plastificación en la dirección de la tensión paralela a la misma. De ser así ($\sigma_y^{\prime\prime} > f_c'$) se adopta $\sigma_y^{\prime\prime} = f_c'$.
6. Se deshace el cambio de coordenadas y se obtienen las nuevas tensiones $\sigma_x^{\prime\prime}$, $\sigma_y^{\prime\prime}$, $\tau_{x^{\prime\prime}y^{\prime\prime}}$.

b) Fisuración en dos direcciones

En el caso de que existan dos direcciones de fisuración α_1 y α_2 (véase Fig. 10b) el proceso que se sigue para hallar el estado tensional a partir del de las deformaciones es el siguiente:

1. Se efectúa un cambio de coordenadas locales mediante un giro α que en este caso toma el valor:

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \quad (30)$$

de este modo se consigue que los ejes x'' e y'' sean bisectrices de los ángulos que forman las dos direcciones de fisuración. Con ello se pretende que la tensión tangencial calculada tenga el mismo valor en las dos direcciones fisuradas, y conseguir un modelo consistente de retención del cortante [9].

2. Se determinan las tensiones $\sigma_x^{\prime\prime}$ y $\sigma_y^{\prime\prime}$ a partir de las deformaciones $e_x^{\prime\prime}$ y $e_y^{\prime\prime}$ y del diagrama tensión-deformación uniaxial (Fig. 7a), teniendo en cuenta además los eventuales procesos de descarga.
3. Se determina la tensión $\tau_{x^{\prime\prime}y^{\prime\prime}}$ como:

$$\tau_{x^{\prime\prime}y^{\prime\prime}} = 0,5 \cdot G \cdot \gamma_{x^{\prime\prime}y^{\prime\prime}}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (31)$$

4. Se deshace el cambio y se obtienen las tensiones σ_x , σ_y , $\tau_{x'y'}$.

En lo que se refiere a las tensiones cortantes ($\tau_{x'z'}$ y $\tau_{y'z'}$) su cálculo se realiza directamente a partir de la expresión (23) salvo en los casos de rotura total en el plano $x'y'$ (caracterizada por la superación de la deformación última ϵ_u en dos direcciones) en los que el valor de dichas tensiones cortantes se anula.

3.2.2. Capas de armadura (activa o pasiva)

El material constitutivo es el acero con un típico comportamiento unidimensional. Las ecuaciones constitutivas se deducen del diagrama tensión-deformación uniaxial de la Fig. 7b. La relación tensión-deformación en régimen elástico será en este caso:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'z'} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{x'z'} \\ \gamma_{y'z'} \end{bmatrix} \quad (32)$$

con $\alpha = 1$ $\beta = 0$ para armadura en la dirección meridional
 $\alpha = 0$ $\beta = 1$ para armadura en la dirección circunferencial.

En régimen elastoplástico las correspondientes relaciones se obtienen similarmente sin más que considerar la variación del módulo de elasticidad que introduce la rama elastoplástica de la Fig. 7b.

3.2.3. Capas de chapa de recubrimiento

El material constitutivo es, como en el caso anterior, acero cuyo diagrama uniaxial tensión-deformación viene definido en la Fig. 7b. En consecuencia las relaciones (23) serán aplicables en régimen elástico mientras que en régimen elastoplástico, tanto a tracción como a compresión, se considera de nuevo la superficie de fluencia plástica de Von Mises definida por (24) y (25).

3.2.4. "Tension stiffening"

Como es bien conocido [8,9] el efecto de "tension stiffening" para las capas traccionadas de hormigón es de singular importancia en las cercanías de las armaduras, mientras que decrece sensiblemente en las capas más alejadas de las mismas. Por consiguiente en la modelización del material se han considerado dos tipos de comportamiento a tracción del hormigón:

- Tension stiffening parabólico en el que la rama descendente es una parábola de segundo grado (definida por los puntos A, B y C de la Fig. 11a) que permite simular el comportamiento del hormigón en las cercanías de las armaduras traccionadas.
- Tension stiffening lineal con una rama descendente recta. En este caso un valor suficientemente pequeño de la deformación última ϵ_u (Fig. 11b) permite simular una caída rápida de la tensión apta para las capas de hormigón más alejadas de las armaduras.

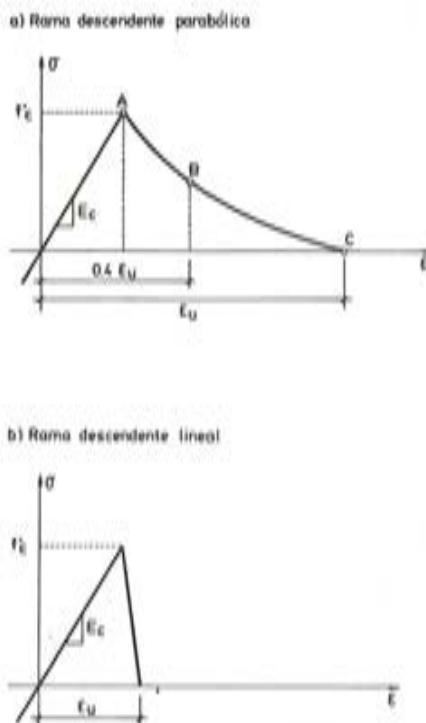


Fig. 11. Diagramas para evaluación del efecto de "tensión stiffening".

3.2.5. Descargas eventuales

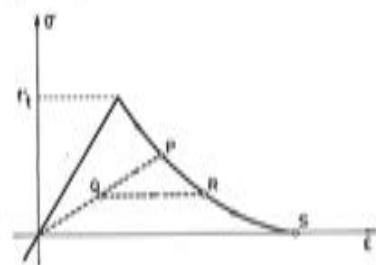
Aunque no es un objetivo de la presente formulación el contemplar descargas importantes o ciclos completos "carga-descarga", se ha considerado la posibilidad de existencia de pequeñas descargas producidas por la actuación sucesiva de acciones de distinto signo que no supongan una modificación sustancial del estado tensional de la estructura.

En las Figs. 12a y 12b se esquematizan las hipótesis establecidas en la simulación de un proceso de descarga-carga (trayectoria PQRS) en las situaciones límites de fisuración y plástificación. Se contempla por consiguiente la posibilidad de "cierre de fisuras" aunque recorriendo la mínima tensión alcanzada (punto Q en la Fig. 12a) como límite que no puede ser sobrepasado ante una eventual "nueva apertura" de la fisura.

3.3. Solución por elementos finitos

Siguiendo el procedimiento usual [6] en el análisis de láminas por el método de los ele-

a) Hormigón a tracción



b) Acero y hormigón a compresión

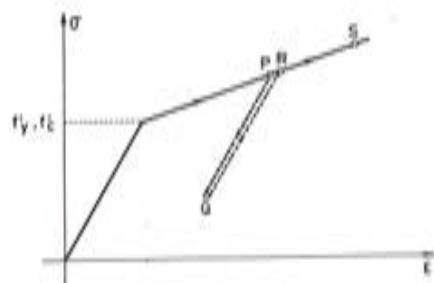


Fig. 12. Procesos carga descarga para el hormigón y el acero.

a) Análisis de revolución



b) Análisis tridimensional

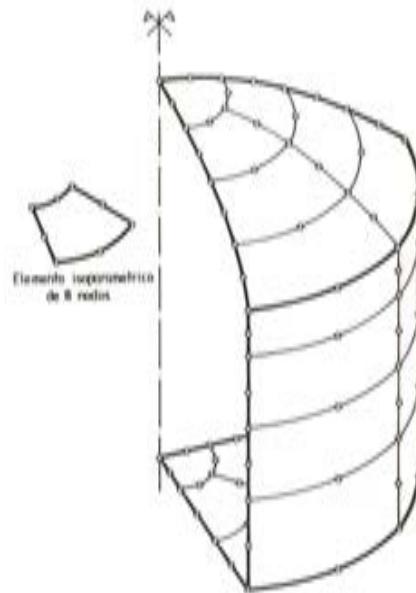


Fig. 13. Tanque de hormigón criogénico. Discretización en elementos finitos para el análisis tensional.

mentos finitos, se discretiza la superficie media del depósito en elementos finitos (véase Fig. 13). Como consecuencia de esta discretización los vectores de desplazamientos, \underline{u} , y de deformaciones, $\underline{\epsilon}$, en cada punto de un elemento pueden ponerse en función del vector de incógnitas nodales \underline{a} de la forma

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{a} \quad \underline{\epsilon} = \underline{B} \underline{a} \quad (33)$$

donde \underline{N} es la matriz de funciones de interpolación y \underline{B} la matriz de deformación de la estructura. La forma concreta de los componentes de estas matrices depende de la teoría de láminas adoptada y pueden encontrarse en la literatura específica del tema [6,10,11]. En este trabajo en particular, se han utilizado una teoría de láminas en el espacio para el estudio del caso general, y una de láminas de revolución cuando la geometría y las cargas presentan simetría de revolución alrededor de un eje.

3.3.1. Ecuación de equilibrio. Resolución del problema no-lineal

La aplicación a la estructura discretizada de un principio que manifieste el equilibrio de la misma (Principio de los Trabajos Virtuales, Minimización de la Energía Potencial, etc.), conduce a la ecuación de equilibrio del sólido discretizado:

$$\Psi(\underline{a}) = \int_V \underline{B}^T \underline{\sigma} dV - \underline{R} = \int_V \underline{B}^T \underline{\sigma} dx' dy' dz' - \underline{R} \quad (34)$$

donde

- $\Psi(\underline{a})$ es el vector de fuerzas residuales
- $\int \underline{B}^T \underline{\sigma} dV$ es la contribución de las fuerzas interiores a la formación del vector de fuerzas residuales
- \underline{R} es la contribución al vector de fuerzas residuales de las fuerzas exteriores a la estructura.

El sistema de ecuaciones no lineales (34), en las incógnitas nodales \underline{a} , ha sido resuelto iterativamente por el método de Newton-Raphson combinado con un proceso incremental de variación del vector de cargas exteriores \underline{R} . Así, para la iteración "i" del incremento "m", el sistema a resolver es:

$$\underline{K}_T(\underline{a}_{i-1}^m) \cdot \Delta \underline{a}_i^m = \Psi(\underline{a}_i^m) \quad (35)$$

siendo:

$$\Psi(\underline{a}_i^m) = \int \underline{B}^T \underline{\sigma}_i^m dx' dy' dz' - \lambda^m \underline{R} \quad (36)$$

donde la matriz tangente

$$\underline{K}_T(\underline{a}) = \frac{\partial \Psi(\underline{a})}{\partial \underline{a}}$$

se obtiene mediante el ensamblaje de las matrices correspondientes a cada elemento. Una típica submatriz, correspondiente a los nodos "i" y "j" del elemento "e", será:

$$\underline{\underline{K}}_{ij}^{(e)} = \int_{(e)} \underline{\underline{B}}_i^{T(e)} \cdot \underline{\underline{D}}^* \underline{\underline{B}}_j^{(e)} dx' dy' dz' \quad (37)$$

La matriz $\underline{\underline{D}}^*$ de la expresión (37) relaciona las variaciones de tensión y deformación

$$d\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}}^* d\underline{\underline{\epsilon}} \quad (38)$$

y puede obtenerse inmediatamente a partir de las relaciones tensión-deformación dadas en el apartado 3.2. Unicamente en el estado elastoplástico tal operación reviste un poco más de complejidad llegándose a la expresión [6]:

$$\underline{\underline{D}}_{ep}^* = \underline{\underline{D}} - \frac{\underline{\underline{D}} \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \cdot \frac{\partial F^T}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{D}}^T}{[H' + \frac{\partial F^T}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \underline{\underline{D}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}] \quad (39)}$$

siendo $\underline{\underline{D}}$ la matriz de constantes elásticas de las expresiones (23) ó (32), F la función de fluencia plástica (25) y H' el parámetro de endurecimiento. Más detalles sobre la obtención de la matriz tangente y vector de fuerzas residuales pueden encontrarse en las referencias [6,11,12].

3.3.2. Criterio de convergencia

Dentro de cada incremento de carga (definido por un cierto valor de λ^m en (36) el proceso iterativo se dice que "converge" si para una cierta iteración "i" el valor de las fuerzas residuales es igual a cero salvo una cierta tolerancia. En la práctica el criterio de convergencia utilizado establece que la "norma" del vector de fuerzas residuales se reduzca a un cierto tanto por ciento del valor que tiene en la primera iteración del incremento correspondiente:

$$\frac{[\Psi(\underline{\underline{a}}_i^m)^T \cdot \Psi(\underline{\underline{a}}_i^m)]^{1/2}}{[\Psi(\underline{\underline{a}}_0^m)^T \cdot \Psi(\underline{\underline{a}}_0^m)]^{1/2}} \times 100 < \Sigma^m \quad (40)$$

3.4. Acciones térmicas

Como ya se ha comentado anteriormente, las acciones térmicas constituyen un capítulo fundamental en el diseño de tanques de hormigón criogénico. Por otra parte, el tratamien-

to de dichas acciones en el modelo que se presenta reúne especiales características que serán presentadas brevemente a continuación.

El análisis térmico transitorio abordado en el apartado 2, proporciona información de los valores de las temperaturas nodales en cualquier instante, que a su vez pueden ser interpoladas a los demás puntos del interior del elemento.

Sea $\Delta T(x,y,z)$ el incremento de temperatura producido entre dos tiempos consecutivos del análisis. A este incremento de temperatura le corresponde una deformación térmica inicial o "libre" de valor

$$\epsilon_0(x,y,z) = \alpha \Delta T(x,y,z) \quad (41)$$

donde α es el coeficiente de dilatación térmica del material que constituye cada capa. La acción de la anterior carga térmica, se incorpora al vector de fuerzas residuales (34) mediante un desplazamiento de valor ϵ_0 , en el sentido de las deformaciones, de la curva tensión deformación uniaxial (véase Fig. 14). Este desplazamiento provoca que a las deformaciones producidas en el estado de equilibrio previo a la aplicación de la carga térmica le correspondan nuevos valores de las tensiones, lo que conduce a un desequilibrio del vector de fuerzas residuales de la expresión (34) y al consiguiente proceso iterativo hasta la consecución de un nuevo estado de equilibrio.

3.5. Elemento finito utilizado. Integración numérica

El elemento finito utilizado ha sido el isoparamétrico de ocho nodos para el análisis de lámina espacial y el isoparamétrico de tres nodos para el análisis de lámina de revolución (véase Fig. 13).

En ambos casos, las integrales que aparecen extendidas sobre el volumen de los elementos tales como los de la expresión (34) se resuelven mediante un esquema de integración numérica reducida de Gauss-Legendre [6] sobre la superficie, y mediante la regla del trapezio (aplicada sobre las distintas capas) a través del espesor.

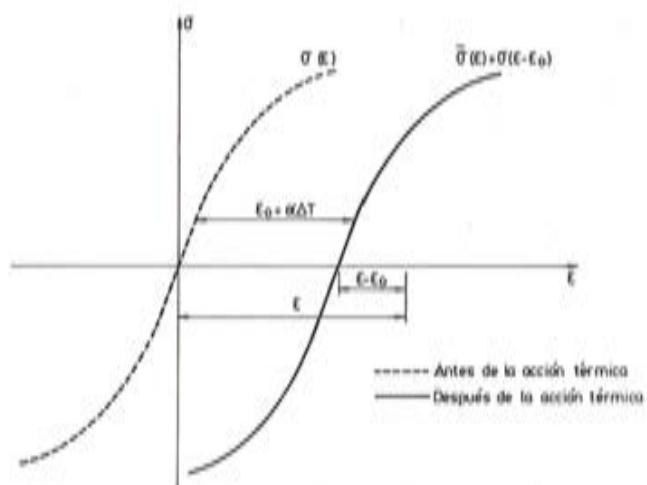


Fig. 14. Desplazamiento de la curva tensión-deformación producida por la temperatura.

4. EJEMPLOS DE APLICACION

4.1. Ejemplo de comprobación. Placa circular simplemente apoyada

En la Fig. 15 a) puede observarse la geometría, propiedades mecánicas y cuantías de armadura de una placa de hormigón armado que se halla simplemente apoyada en su contorno y sometida a la acción de un momento uniformemente distribuido en el mismo. En las Fig. 15 b), c) y d), se detallan respectivamente la subdivisión en capas, mallas de elementos finitos y curva de "tension-stiffening" adoptada para el hormigón.

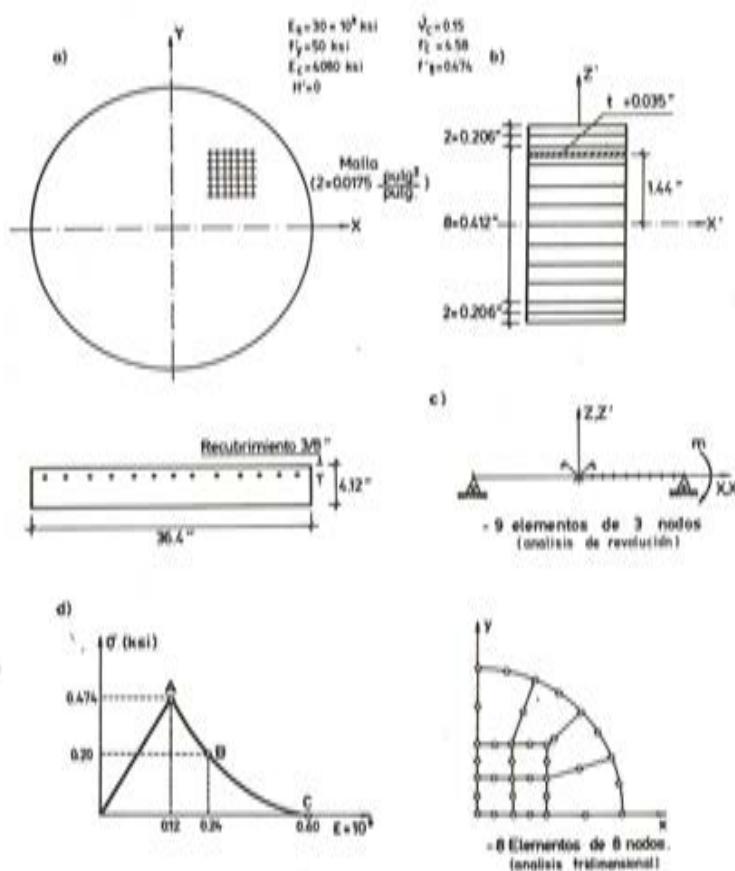


Fig. 15. Placa de revolución. Geometría, propiedades y malla.

La simetría de revolución de geometría y acciones conduce, para esta estructura, a un estado de deformación esférica en el que en todos los puntos y en todas las direcciones se produce la misma deformación, estando la cara superior traccionada y la inferior comprimida.

En la Fig. 16 se muestran los resultados obtenidos para la curvatura de la deformada frente a diversos valores del momento aplicado en el contorno. En ella puede observarse el buen acuerdo de dichos resultados (utilizando tanto el modelo de revolución como el de lámina en el espacio) con los valores experimentales y los obtenidos por Lin [8] con otro modelo numérico, pudiéndose predecir con precisión la carga de rotura de la placa.

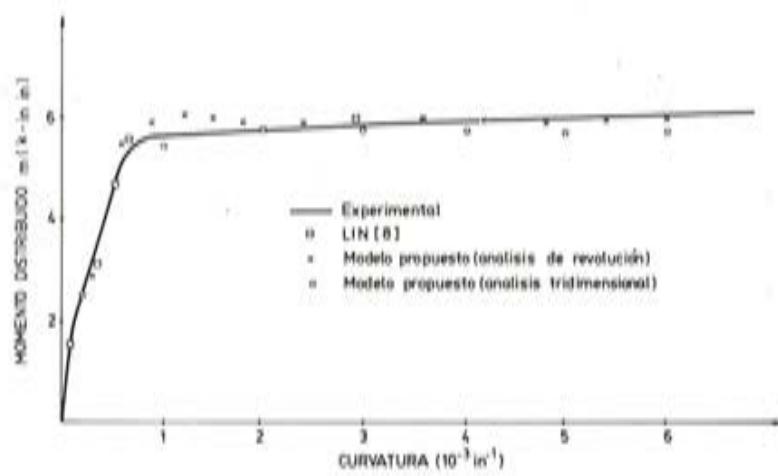


Fig. 16. Placa circular. Resultados del análisis tensional.

4.2. Tanque de hormigón criogénico para gas natural licuado bajo hipótesis de derrame interno del líquido

Se trata en este caso de la utilización del modelo numérico de revolución descrito previamente, en el diseño un tanque de hormigón criogénico para almacenamiento de gas natural licuado (G.N.L.).

Las características geométricas, armadura y leyes de pretensado en el tanque se detallan en la figura 17, mientras que las mallas de elementos finitos utilizados en el análisis pueden verse en la Fig. 18.

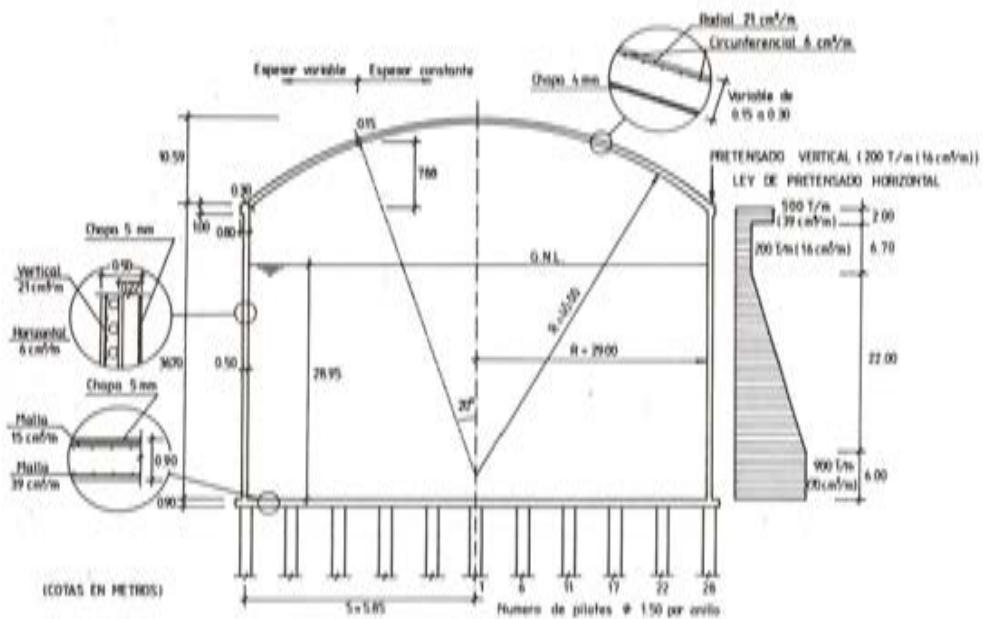


Fig. 17. Características geométricas del tanque para G.N.L.

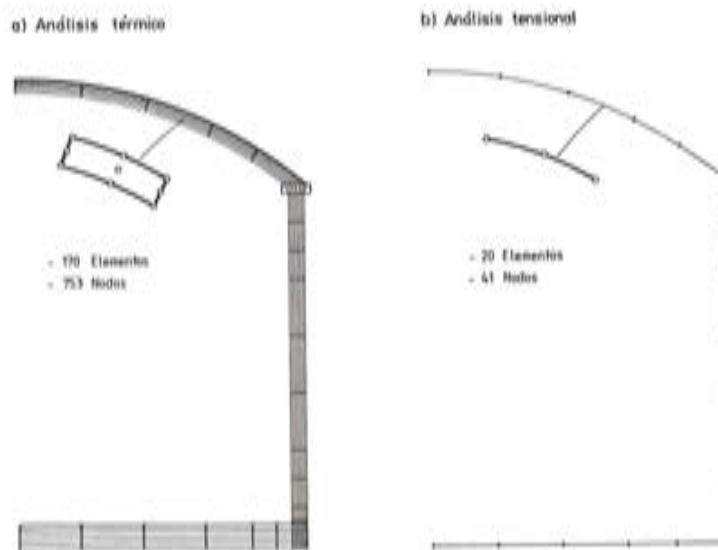


Fig. 18. Tanque de hormigón criogénico para G.N.L. Mallas utilizadas en el análisis.

Las características de los materiales que constituyen el depósito son las siguientes:

a) Hormigón

– Módulo de Elasticidad	320.000 kgs/cm ²
– Coeficiente de Poisson	0.2
– Tensión de rotura a tracción	25 kgs/cm ²
– Deformación última a tracción	0.0035
– Tensión de fluencia a compresión	350 kgs/cm ²
– Constante de dilatación térmica	0.00007 °C ⁻¹

b) Acero de armaduras pasivas

– Módulo de elasticidad	2.100.000 kgs/cm ²
– Tensión de fluencia	4.200 kgs/cm ²
– Coeficiente de dilatación térmica	0.00009 °C ⁻¹

c) Acero de armaduras activas

– Módulo de elasticidad	2.100.000 kgs/cm ²
– Tensión de fluencia	17.000 kgs/cm ²
– Coeficiente de dilatación térmica	0.00009 °C ⁻¹

d) Chapa de acero de recubrimiento

– Módulo de elasticidad	2.100.000 kgs/cm ²
– Coeficiente de Poisson	0.1
– Tensión de fluencia	2.100 kgs/cm ²
– Coeficiente de dilatación térmica	0.000009 °C ⁻¹

4.2.1. Casos de carga analizados

Se consideran los siguientes casos de carga actuando secuencialmente:

- I Peso propio y acción del pretensado.
- II Presión hidrostática del líquido interior y sobrepresión interna uniforme de 0,12 atmósferas.
- III, IV
- V, VI Derrame del líquido a través del aislamiento interior hasta entrar en contacto con la pared exterior del depósito. Se considera una temperatura del líquido de -160°C y una temperatura ambiente de 25°C . Se consideran los efectos térmicos en cuatro instantes a partir del derrame:
 $t = 11 \text{ min}, 28 \text{ min}, 78 \text{ min}, \text{ y } t = \infty$ (situación estacionaria).

Cada uno de estos estados de carga se aplica sobre el estado tensional resultado del estado de carga anterior.

4.2.2. Resultados

En la Fig. 19 se presentan las líneas isotermas obtenidas en el análisis térmico para distintos instantes después de producirse el derrame del líquido.

Finalmente en la Fig. 20, pueden observarse las deformadas de las paredes del tanque para los distintos estados de carga considerados en el análisis tensional, así como el estado de fisuración y plastificación que se produce después de finalizado todo el proceso de carga.

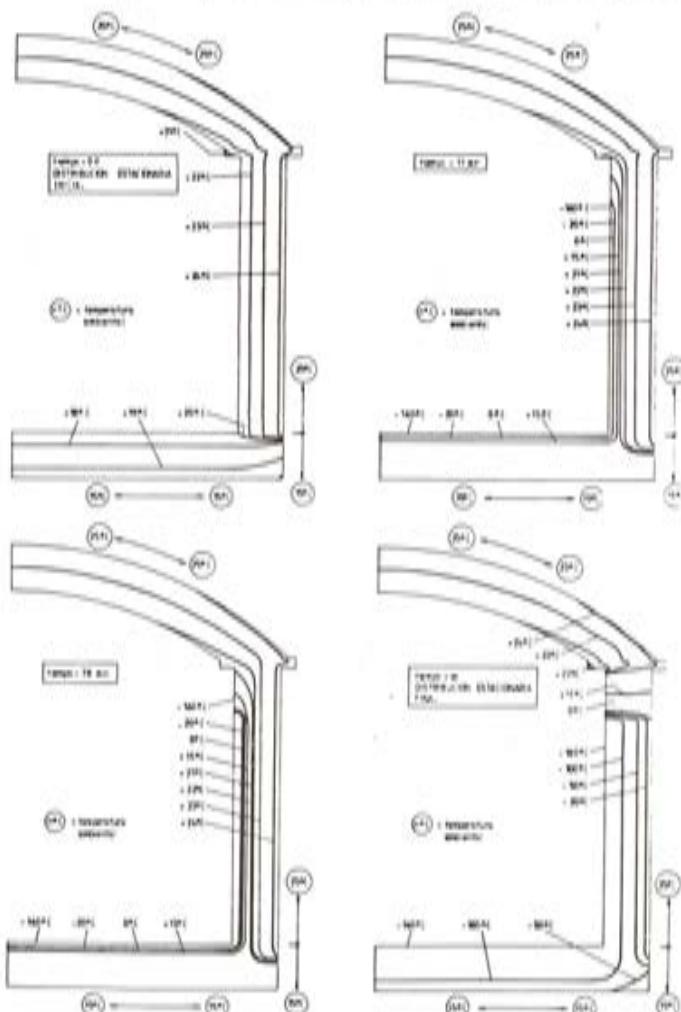


Fig. 19. Tanque de hormigón criogénico. Hipótesis de derrame interno del G.N.L. Líneas isotermas para distintos tiempos de análisis.

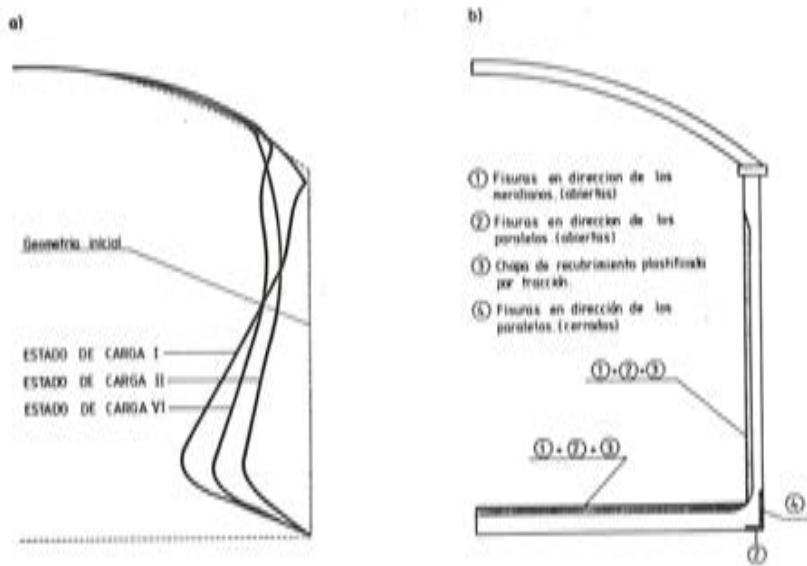


Fig. 20. a) Deformadas de la superficie media del tanque para diversos estados de carga (Desplazamientos aumentados 1.000 veces). b) Zonas fisuradas y plastificadas al final del análisis.

REFERENCIAS

1. Hughes, T.J.R. Unconditionally stable algorithms for non linear heat conduction. Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng. 10, pp. 135-139, (1977).
2. Owen, D.R.J. y Damjanic, F. The stability of numerical time integration techniques for transient thermal problems with special reference to reduced integration effects. Num. Meth. in Thermal Problems, Vol. 2, pp. 487-505, Pineridge Press, U.K. (1981).
3. Owen, D.R.J. y Damjanic, F. Practical considerations for the thermal transient finite element analysis using isoparametric elements. Nuc. Engng. and Design, n. 69, pp. 109-126 (1982).
4. Wilson, E.L. y Nickell, R.E. Application of finite element method to heat conduction analysis. Nuc. Engng. and Design, 4, pp. 1-11, (1966).
5. Wood, W.L. y Lewis, R.H. A comparison of time marching schemes for the transient heat conduction equation. Int. Jour. Num. Meth. Engng. 9, pp. 679-689 (1975).
6. Zienkiewicz, O.C. El método de los elementos finitos. Ed. Reverté, Barcelona, (1980).
7. Mindlin, R.D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates. Jour. of Appl. Mech., Vol. 18, pp. 31-38, (1951).
8. Lin, C.S. Non linear analysis of Reinforced Concrete Slabs and Shells. SE SM Report n° 73 - I, University of California, Berkeley, (Abril 1973).
9. Rahman, H.H.A. Computational models for the non linear analysis of reinforced concrete flexural slab systems. Ph. D. Thesis, Dept. Civil Engng, University College of Swansea, C/Ph/66/82, Gran Bretaña, (1982).
10. Ahmad, S., Irons, B.M. y Zienkiewicz, O.C. Analysis of thick and thin shell structures by curved elements. Int. Jour. Num. Meth. Eng. Vol. 2, pp. 419-451, (1970).
11. Bathe, K. J. Finite element procedures in engineering analysis. Prentice-Hall Inc., (1982).
12. Owen, D.R.J. y Hinton, G. Finite elements in plasticity. Pineridge Press Limited, Swansea, Gran Bretaña, (1980).