

# **Análisis Estructural de la Mezquita Pequeña Santa Sofía de Estambul**

M. Massanas  
P. Roca  
M. Cervera

# **Análisis Estructural de la Mezquita Pequeña Santa Sofía de Estambul**

M. Massanas  
P. Roca  
M. Cervera

Monografía CIMNE N°-89, Febrero 2004

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA  
Edificio C1, Campus Norte UPC  
Gran Capitán s/n  
08034 Barcelona, España  
[www.cimne.upc.es](http://www.cimne.upc.es)

Primera edición:2004

**ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE LA MEZQUITA PEQUEÑA SANTA SOFÍA DE ESTAMBUL**  
Monografía CIMNE M89  
© Los autores

ISBN: 84-95999-50-1

Depósito legal: B-8466-2004

# ÍNDICE

<b>Capítulo 1. Introducción</b> .....	1
<b>Capítulo 2. Objetivos</b> .....	3
2.1 Objetivos generales .....	3
2.2 Objetivos parciales .....	3
<b>Capítulo 3. Estado del Conocimiento</b> .....	5
3.1 Antecedentes .....	5
3.2 Técnicas basadas en el uso de los Elementos Finitos .....	7
3.2.1 Modelos Constitutivos de Daño Continuo .....	8
<b>Capítulo 4. Modelo Constitutivo Escogido para el Estudio</b> .....	11
4.1 Introducción .....	11
4.2 Modelo Constitutivo Continuo Tracción-Compresión de Daño .....	12
4.3 Programa de cálculo COMET .....	13
4.3.1 Configuración COMET para el cálculo del Modelo Constitutivo Tracción-Compresión de Daño .....	15
4.4 Ejemplo sencillo de aplicación del Modelo Constitutivo .....	18
<b>Capítulo 5. Mezquita Pequeña Santa Sofía</b> .....	23
5.1 Historia .....	23
5.2 Descripción .....	25
5.2.1 Nomenclatura .....	27
5.2.2 Descripción de los elementos .....	28
5.3 Estado de daños de la Mezquita .....	35
5.4 Estudios realizados sobre la Mezquita .....	39
5.4.1 Estudio del comportamiento de la cúpula de la basílica mediante un modelo colgante .....	39
5.4.2 Estudio de los efectos del tráfico ferroviario sobre la basílica .....	40
5.4.3 Estudio del seguimiento de las deformaciones de la mezquita mediante fotogrametría .....	40
<b>Capítulo 6. Construcción del Modelo</b> .....	43
6.1 Construcción de la geometría del cuerpo inferior de la mezquita ..	43
6.2 Construcción de la geometría de la cúpula .....	50
6.3 Estudio de los materiales .....	55
6.3.1 Disposición de materiales .....	55
6.3.2 Características de la obra de fábrica de ladrillo .....	56
6.3.3 Características de la piedra de las columnas y los pilares .....	58
6.4 Condiciones de contorno .....	59
6.5 Mallado .....	61
6.6 Resumen de las hipótesis y simplificaciones del modelo .....	66

---

<b>Capítulo 7. Cálculos y Análisis de los resultados</b> .....	67
<b>7.1 Estudio del efecto de la sollicitación del peso propio</b> .....	68
7.1.1 Condiciones de apoyo y carga .....	68
7.1.2 Análisis de los resultados .....	69
7.1.3 Conclusiones parciales .....	73
7.1.4 Influencia de la Energía de Fractura .....	74
<b>7.2 Estudio del efecto del Asentamiento diferencial entre columnas y muros</b> .....	76
7.2.1 Condiciones de apoyo y carga .....	76
7.2.2 Análisis de los resultados .....	77
7.2.3 Comprobación de la resistencia del dintel sin columnas delanteras en la planta baja .....	78
7.2.4 Estudio del modelo sin corona interior de columnas bajo peso propio .....	80
7.2.5 Conclusiones parciales .....	83
<b>7.3 Estudio del efecto de una sollicitación sísmica</b> .....	85
7.3.1 Condiciones de contorno y carga .....	85
7.3.2 Estudio de la Sollicitación Sísmica en la dirección “-x”. Análisis de los resultados .....	88
7.3.3 Estudio de la Sollicitación Sísmica en la dirección “-y”. Análisis de los resultados .....	96
7.3.4 Estudio de la Sollicitación Sísmica en la dirección “+y”. Análisis de los resultados .....	102
7.3.5 Conclusiones parciales .....	105
<b>7.4 Estudio del efecto del terraplén de la vía férrea</b> .....	106
7.4.1 Condiciones de apoyo y carga .....	106
7.4.2 Análisis de los resultados .....	108
<b>Capítulo 8. Conclusiones</b> .....	111
<b>Capítulo 9. Perspectivas futuras</b> .....	115
<b>Capítulo 10. Bibliografía</b> .....	117

## Capítulo 1: INTRODUCCIÓN

La elevada actividad de las diferentes civilizaciones de la historia de la mediterránea ha dotado de un extenso patrimonio arquitectónico a todas las tierras bañadas por este mar. Su elevado valor artístico e histórico explica la preocupación de la sociedad actual por conservar este legado de nuestro pasado.

Es el caso del edificio objeto de estudio, la actual mezquita Pequeña Santa Sofía de Estambul. Se trata de una basílica bizantina con una de las mayores cúpulas de su época. El edificio tiene 1500 años de antigüedad, hecho que da crédito de su enorme valor histórico. A pesar de ello, la mezquita fue descuidada en el siglo pasado, provocando su progresivo deterioro, visible en la existencia de numerosas zonas fisuradas y deformadas. La apariencia exterior empeoró más cuando el 17 de agosto de 1999 el edificio sufre un importante sismo que aumenta la obertura de las fisuras en el revestimiento. Este hecho despierta la conciencia de la necesidad de frenar el deterioro de la estructura.

Sin embargo, el envejecimiento de las construcciones antiguas las ha transformado en pacientes delicados. Esta delicadeza exige antes de poder realizar cualquier actuación, un conocimiento previo, lo más exhaustivo posible, del estado actual y del comportamiento resistente de la construcción. Se trata de un análisis complejo por las características propias de las construcciones antiguas. Son de geometría complicada por estar formadas por una combinación de distintos elementos estructurales tales como muros de carga, contrafuertes, pilares, arcos, bóvedas o cúpulas. Además tenemos la presencia de numerosos materiales de características muy distintas como la obra de fábrica de ladrillo, la sillería, la madera o los metales. También complica el análisis la dificultad de considerar las acciones que afectan a largo plazo la construcción como la fluencia, el cansancio del material o los ciclos ambientales. Para poder afrontar este estudio tan complejo se requiere el empleo de herramientas sofisticadas de cálculo estructural en combinación con un buen conocimiento de los parámetros que definen la construcción, obtenidos de una medición in situ.

El análisis presente se engloba en este conjunto de estudios y responde a la voluntad por parte de los responsables de la Pequeña Santa Sofía de entender su funcionamiento estructural para, de esta forma, poder realizar una intervención que restaure los daños actuales y frene la degradación del edificio. La mezquita está construida básicamente en obra de fábrica de ladrillo, material de escasa resistencia a tracción. Por este motivo y por la complejidad de su geometría se va a utilizar como herramienta de análisis el método de los elementos finitos en combinación con un modelo constitutivo no lineal del material, concretamente un modelo tracción-compresión de daño. Esta herramienta aporta la facilidad de poder generar un modelo

geométrico tridimensional mediante elementos tetraédricos, la capacidad de diferenciar el comportamiento a tracción y a compresión del material y gran versatilidad para analizar distintas hipótesis de carga.

El estudio se concentrará en el análisis de tres hipótesis de carga distintas. En primer lugar el comportamiento bajo el efecto exclusivo del peso propio. A continuación se analizarán los efectos que produce un asentamiento diferencial de las columnas respecto los muros. Finalmente se efectuará un análisis aproximado del efecto que produce una sollicitación sísmica sobre el edificio, debido a la elevada actividad sísmica que padece la ciudad de Estambul. Con todo ello se pretende entender cuál es el comportamiento estructural del edificio y relacionar sus principales fisuras con las distintas hipótesis de carga.

## Capítulo 2: OBJETIVOS

### Objetivos generales

- Entender el comportamiento estructural de la mezquita aprovechando la herramienta de los elementos finitos en combinación con un modelo constitutivo de daño del material. Utilizar el modelo para comprobar el comportamiento de la estructura bajo diversas hipótesis.
- Identificar las causas de los principales daños (fisuras, deformaciones) de la mezquita, relacionándolos con hipótesis de carga del modelo.
- Confirmar la viabilidad del análisis de una construcción muy antigua, de obra de fábrica de ladrillo, mediante el método de análisis mencionado.

### Objetivos parciales

- Evaluar la calidad de la información experimental que se tiene del edificio y de la cual debe partir el estudio.
- Construir un modelo tridimensional que sea representativo de la geometría y los materiales del edificio y que permita simular los efectos de diferentes hipótesis de carga.
- Analizar las condiciones que debe incluir el modelo para ser utilizado en el estudio de las hipótesis de carga consideradas y en particular, en el estudio sísmico.
- Realizar un análisis estructural del modelo bajo el efecto de cuatro hipótesis de carga distintas: el peso propio, un asentamiento diferencial de las columnas respecto a los muros, una sollicitación sísmica y el efecto del apoyo de un terraplén sobre el edificio.
- Identificar los principales daños existentes y relacionarlos con el estado tensional y de daño indicado por el modelo.
- Proponer mejoras aplicables a futuros estudios del edificio, a partir del análisis de las limitaciones de la información de partida, de las hipótesis formuladas y de la metodología utilizada.





## **Capítulo 3: ESTADO DEL CONOCIMIENTO**

# **ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE GRANDES CONSTRUCCIONES ANTIGUAS MEDIANTE EL USO DE ELEMENTOS FINITOS**

### **3.1 Antecedentes:**

La primera técnica eficiente de análisis estructural es Análisis Límite Clásico. Cuolomb escribió en 1773 las bases de esta técnica. Postuló, basándose en las condiciones de equilibrio, que el fallo en un arco de fábrica se produce cuando la línea de empujes ya no se halla contenida en la sección. Esta visión del funcionamiento de una obra de fábrica reside en una serie de suposiciones que fueron planteadas en forma de tres hipótesis por Heyman: 1.la obra de fábrica no tiene resistencia a tracción; 2. la resistencia a compresión es infinita o bien las tensiones actuantes se mantienen siempre muy por debajo de la resistencia a compresión; 3. no se produce deslizamiento entre dovelas. El mismo Heyman expuso las grandes posibilidades que tiene el aplicar el cálculo clásico desarrollado por Coulomb pero partiendo de los teoremas límite de la plasticidad. Cuando se aplican estas nuevas hipótesis, cuando la línea de empujes se hace tangente con el contorno se puede afirmar que se forma una rótula plástica. Los mecanismos últimos que se visualizan son, en consecuencia, mecanismos de colapso realistas. Este hecho motivó que se transformara en el principal método para visualizar los mecanismos últimos de colapso. Sin embargo, esta técnica es escasamente aplicable en situaciones de servicio no asociadas al fallo de la estructura, ya que sus resultados no aportan ningún tipo de información relativa a la deformación de la estructura. Además su aplicabilidad resulta muy compleja cuando se trata de estructuras de cierta complejidad geométrica.

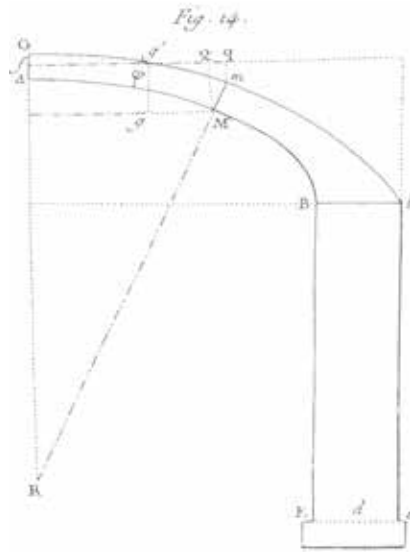


Fig.3.1 Equilibrio de una bóveda de fábrica simétrica (Coulomb, 1773)

Más adelante surgió el Cálculo Elástico Lineal, que considera la estructura como un cuerpo continuo, deformable y de un material cuyo comportamiento mecánico se puede describir mediante las ecuaciones de la elasticidad lineal (Molins-Roca, 1996b). Se empieza a utilizar en análisis fotoelásticos. Entre ellos destacan los realizados por Robert Mark en 1982, que realizó un estudio comparativo de las secciones transversales de distintas Catedrales Góticas. Actualmente esta técnica se utiliza con la ayuda de los elementos finitos y es una de las técnicas más generalizadas para el análisis de construcciones antiguas, sobretodo porque permite una fácil modelización de geometrías complicadas. A pesar de ello, es una técnica poco apropiada para el estudio de estructuras construidas en obra de fábrica por ser este inmaterial sin apenas resistencia a tracción y que experimenta desplazamientos relativos entre sus bloques en las fases avanzadas de carga.

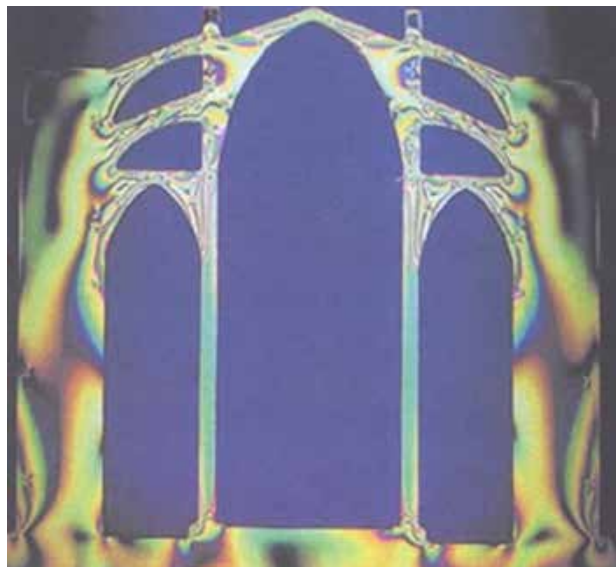


Fig.3.2 Estudio fotoelástico de la Catedral de Mallorca (Mark, 1982)

El tercer método de análisis es la Formulación Matricial Generalizada. Se trata de una extensión del cálculo matricial convencional considerando parte de los fenómenos no lineales propios de la obra de fábrica, como la incapacidad de trabajar a tracción. Está planteada en términos de flexibilidad y se basa en el equilibrio de fuerzas externas e internas a nivel de sección (Molins, 1996). El método alcanza reproducir los mecanismos inestables que, por formación de suficientes rótulas, provocan el colapso de la estructura. Es aplicable a estructuras reticulares planas o espaciales con elementos curvos o rectos, de sección constante o variable. Este aspecto lo limita ya que no es apropiado para el análisis de construcciones que no puedan reducirse a una estructura de tipo escalético. Destacan los estudios realizados sobre la Catedral de Tarazona (Lodos, 2001), sobre la Catedral de Barcelona (Torrent, 1999) y sobre la Catedral de Mallorca (Salas, 2002).

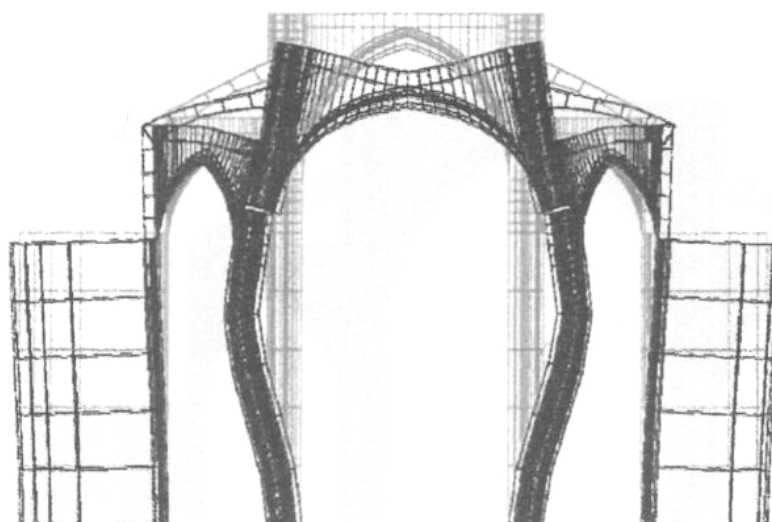


Fig.3.3 Resultados de un cálculo en FMG. Deformada del pórtico tipo de la Catedral de Barcelona con el 200% peso propio (Torrent, 1999)

### 3.2 Técnicas basadas en el uso de los Elementos Finitos

El uso de los elementos finitos en el análisis estructural de grandes construcciones antiguas presenta importantes ventajas. Destaca la capacidad de generar con facilidad modelos geométricos detallados y complicados. Incluso es posible modelar fisuras estableciendo una discontinuidad entre elementos. La segunda ventaja importante es la capacidad de simular una gran variedad de acciones, gracias a tener en cuenta la compatibilidad de movimientos.

Los elementos finitos se combinan con un modelo constitutivo que define el comportamiento del material. La adopción del modelo constitutivo adecuado, tal que refleje los principales fenómenos asociados al fallo de los materiales (fisuración, aplastamiento, ...) permite reproducir los estados más avanzados del comportamiento

del material e incluso simular formas de rotura muy próximas a los mecanismos últimos de las teorías clásicas.

Los primeros modelos constitutivos que se emplearon eran de tipo elástico lineal. Los resultados que se obtienen solamente son válidos para rangos muy moderados de tensiones y en situaciones de servicio alejadas del colapso, por los mismos motivos que cuando se realiza un análisis lineal sin medios informáticos. Sin embargo, el análisis como medio continuo elástico constituye una excelente herramienta auxiliar que es preciso utilizar, con conocimiento de sus limitaciones, como estudio previo a métodos más sofisticados.

Más adelante se desarrollaron modelos constitutivos de tipo no lineal. Entre ellos destacan los derivados de la Mecánica del Daño Continuo.

### 3.2.1 Modelos Constitutivos de Daño Continuo

Basándose en la termodinámica de los procesos irreversibles, la Mecánica del Daño Continuo ofrece un potente marco para la derivación de coherentes modelos que simulan el comportamiento de los materiales, aplicables en distintos campos ingenieriles. La teoría del daño continuo fue introducida por primera vez por Kachanov en el 1958 para el estudio de problemas de deslizamiento (Cervera, 1999). Actualmente se utiliza para modelar el comportamiento de materiales tan distintos como metales, cerámicos, rocas, hormigones u obras de fábrica y para un amplio rango de aplicaciones como son problemas de deslizamientos, fatiga o rotura. El origen de esta popularidad radica tanto en la simplicidad y versatilidad de la teoría como en su consistencia por estar basada en la teoría de la termodinámica de procesos irreversibles (Cervera, 1999). En cuanto a la aplicación en la resolución no lineal de problemas estructurales en los últimos años han aparecido diversos modelos constitutivos basados en la Mecánica del Daño Continuo, que superan los serios problemas de tipo numérico de sus antecesores. Dentro de estos se encuentran los elaborados por Cervera y otros en 1990 y por Cervera y otros en 1998.

El primero es un modelo que contiene una única variable de daño y que ha sido desarrollado para el estudio del daño en el hormigón armado. Fue utilizado satisfactoriamente para el estudio de las bóvedas de la Basílica de San Marcos de Venecia (Oñate y otros en 1997). Posteriormente se utilizó en el estudio del cimborio de la Catedral de Barcelona (Torrent, 1999), donde los resultados fueron análogos a los obtenidos con el método de la FMG.

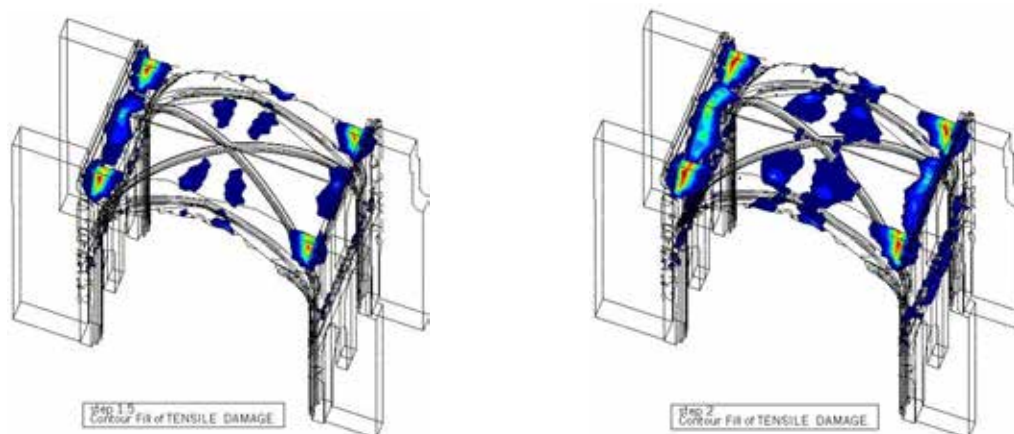
El modelo desarrollado por Cervera y otros en 1998 es el Modelo Constitutivo Continuo Tracción-Compresión de Daño. Ha sido diseñado para el estudio de grandes presas de hormigón en masa frente al efecto de cargas sísmicas. Su formulación está basada en un modelo isotrópico de daño con dos variables escalares que caracterizan el daño por compresión y por tracción. Además permite incorporar aspectos importantes a considerar en un modelo no lineal para el hormigón en masa, como es la distinción del comportamiento a tracción y compresión o la degradación de la rigidez ante efectos de tipo mecánico, como ciclos de tracción-compresión.

Su aplicabilidad en el estudio de edificios antiguos se justifica por la similitud entre el comportamiento mecánico del hormigón en masa y la obra de fábrica. A pesar de ello se debe ser consciente que se está realizando una aproximación ya que el

hormigón en masa se considera un medio continuo isótropo. Al aplicar este modelo a una obra de fábrica se está omitiendo los efectos derivados del carácter compuesto e anisótropo del material, como son respectivamente la ordenación del aparejo en hiladas de mortero y ladrillo o los efectos relacionados con el deslizamiento de bloques a lo largo de las juntas. No obstante, una vez consideradas las limitaciones del método de análisis respecto al comportamiento real del material, resulta ser una herramienta más que aceptable.

Este modelo se ha utilizado en el estudio de la Catedral de Barcelona realizado por Joel Torrent en 1999, en el estudio de los pórticos de la Catedral de Mallorca realizado por Toni Salas en el 2002 y en el estudio de la Catedral de Girona realizado por Javier Mendoza en el 2002.

El objetivo del estudio realizado sobre la Catedral de Girona por Javier Mendoza es conocer el comportamiento estructural de sus pórticos y especialmente, de su bóveda de crucería, que es la de mayor luz del gótico y siempre había causado dudas por su atrevimiento. El motivo por el cuál se empleó el modelo de daño implementado con elementos finitos es el poder tratar con mayor rigor la geometría de la construcción sin perder capacidad de representar el comportamiento del material. Se estudiaron 3 modelos geométricos del pórtico, de diferente grado de definición. Se analizó la resistencia última del pórtico y se comprobó que el presente método deducía los mismos mecanismos de colapso que los obtenidos por otros autores mediante la aplicación del Análisis límite clásico. También se comprobó la resistencia de la catedral ante asentamientos diferenciales y sollicitaciones sísmicas, que son acciones no consideradas en el diseño original del edificio.



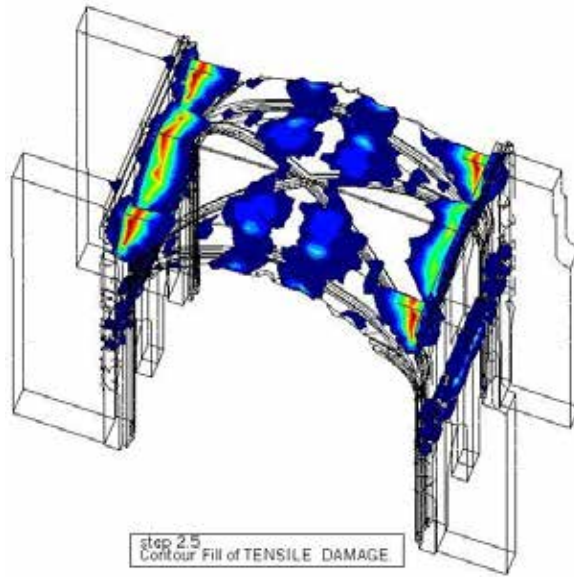


Fig.3.4 Evolución del daño a tracción para una sollicitación del peso propio de 1.5g, 2g y 2.5g en la bóveda de crucería de la Catedral de Girona. En este momento Javier Mendoza estaba deduciendo el mecanismo de colapso (Mendoza, 2002)

El estudio estructural de la Catedral de Mallorca realizado por Toni Salas también se centra en el estudio de los pórticos tipo del edificio y para ello utiliza dos formulaciones distintas. Tanto el modelo de daño implementado con elementos finitos como la FMG obtienen los mismos resultados en cuanto al análisis por peso propio. Sin embargo, sus resultados discrepan en cuanto al factor multiplicador de peso propio que provoca la estructura. A continuación el autor ha seguido analizando, a través de la FMG, la resistencia del edificio a otras sollicitaciones como un sismo y un vendaval de período de retorno de 1000 años. El modelo no ha resistido ninguno de los 2.

La variedad de tipologías de análisis realizados en los estudios mencionados da fe del potencial que tiene el uso de los elementos finitos con un modelo constitutivo de daño como herramienta de análisis de construcciones antiguas. Todos los estudios mencionados coinciden, sin embargo, que el uso de una herramienta tan potente requiere de unas hipótesis de partida adecuadas. En muchas ocasiones la falta de precisión en la información referente a la cimentación, las características de los materiales presentes y el grado de fisuración es el origen de la limitación de la validez de los resultados. Por este motivo es muy importante el obtener la mejor información de partida posible, a través de medición in situ, cuando se desea utilizar herramientas de análisis estructural tan sofisticadas.

## **Capítulo 4: MODELO CONSTITUTIVO ESCOGIDO PARA EL ESTUDIO**

### **4.1 Introducción:**

El análisis estructural que se va a realizar en el presente estudio viene caracterizado por las siguientes tres características:

- La geometría del edificio objeto de estudio es compleja e irregular.
- El análisis va dirigido a entender la formación de fisuras. En consecuencia, se estudiarán situaciones de carga que sobrepasaran los límites elásticos del material.
- Se ha previsto que se analice la estructura bajo distintas hipótesis de carga.

Estas tres características han condicionado la elección de la metodología empleada.

El análisis límite clásico es una técnica buena para el estudio de los estados últimos, pero difícil de utilizar en geometrías complejas. Este motivo ha propiciado que no procediera su utilización.

La Formulación Matricial Generalizada es un método excelente para evaluar el comportamiento estructural de una construcción. Sin embargo, su aplicación requiere esquematizar la geometría hasta obtener una estructura de tipo esquelética. Esta esquematización no es posible en el presente caso de estudio ya que la estructura es de tipo masiva formada por una combinación de numerosas bóvedas.

Los estudios en régimen elástico lineal, como se ha mencionado en el apartado 3.2, dan resultados de gran valor ingenieril pero sólo válidos para rangos moderados de tensiones y en situaciones de servicio alejadas del colapso. No es el caso del presente estudio y por tanto, se debe usar un análisis no-lineal.

Dentro de las herramientas de estudio no lineales destaca el modelo constitutivo de daño continuo desarrollado por Cervera y otros en 1998 en combinación con el uso de los elementos finitos. Como se ha mencionado en el Capítulo 3, ofrece las ventajas de reproducir de forma correcta el comportamiento de la obra de fábrica de ladrillo y de haber sido utilizado en otros estudios de forma satisfactoria. Por estos motivos va a ser la herramienta de análisis empleada.

A continuación se procede a exponer una breve descripción de las características que definen el funcionamiento de este modelo constitutivo. Posteriormente se explicará el programa de cálculo utilizado para realizar el análisis y finalmente, se mostrará un ejemplo sencillo de aplicación de esta herramienta.



## 4.2 Modelo Constitutivo Continuo Tracción-Compresión de Daño

El texto presentado a continuación sintetiza la base teórica y matemática que hay detrás del modelo constitutivo empleado. Su redacción corresponde, en gran medida, a un resumen del Capítulo 3 de *Análisis estructural de los pórticos tipo de la Catedral de Girona* de Javier Mendoza y del artículo *A strain based plastic viscous damage model for massive concrete structures* de Faria et al. (1998).

El modelo fue formulado por R.Faria, J.Oliver y M.Cervera en 1998 basándose en la Mecánica del Daño Continuo. Como se ha mencionado en el capítulo 3 el objetivo de este modelo constitutivo es modelar el comportamiento del hormigón en masa de grandes presas bajo cargas sísmicas. Este tipo de problemas requiere de un gran esfuerzo en el cálculo y en consecuencia, la principal característica que ofrece el modelo es su eficiencia en el algoritmo. Para conseguirlo se ha adoptado un formalismo basado en las deformaciones. Esta forma de realizar el cálculo es mucho más económica ya que el tensor de tensiones efectivas ya es, en si mismo, una entidad basada en las deformaciones. Además se ha modificado la formulación expresando la energía potencial como una función del tensor de tensiones efectivas elásticas. Con esta operación se consigue omitir la principal desventaja de los modelos basados en el tensor de tensiones finales de Cauchy, que requería un proceso iterativo dentro del modelo constitutivo.

El modelo se ha concebido para que reproduzca las siguientes cuatro características del comportamiento del hormigón:

- Comportamiento diferente a compresión y a tracción fruto que sus gráficos tensión-deformación describen curvas distintas.
- Recuperación de la rigidez cuando la carga es reversible (visible cuando pasamos de compresión a tracción o viceversa).
- El aumento de la resistencia del hormigón percible en los tests a compresión 2D y 3D respecto a los test a compresión en una dimensión.
- Las deformaciones inelásticas observables bajo descargas.

Para la obtención de estas predicciones el modelo trabaja con dos variables de daño, a tracción y a compresión, que están íntimamente ligadas a los mecanismos de degradación de los materiales bajo ciertas condiciones límites. El valor de las variables de daño oscila entre 0 (material en su estado virgen) y 1 (material completamente degradado). La evolución de estas variables de daño junto con la del tensor de tensiones de deformaciones plásticas han sido ensambladas dentro de los principios termodinámicos que se deben cumplir, dando origen a una ley constitutiva que se implementa en el algoritmo numérico, de forma que se validen las predicciones mencionadas por el modelo.

No es un objetivo de este estudio el considerar los parámetros viscosos que definen el material. Por tanto no se explicará en lo sucesivo cómo influyen los parámetros viscosos en el modelo, aunque es posible encontrarlo con detalle en Faria et al, (1998).

El concepto de tensión efectiva se encuentra detrás de estos parámetros. Si se considera un estado uniaxial de tracción como se muestra en la Fig.4.1, podemos distinguir una sección  $S$  que denota el área total de la sección y una sección  $S'$  que describe el área resistente efectiva, en donde están aplicadas las tensiones usuales de Cauchy  $\sigma$  y las tensiones efectivas  $\sigma'$ , respectivamente.

Las tensiones efectivas son una representación más realista que las tensiones exteriores de Cauchy  $\sigma$ , ya que las fuerzas exteriores están aplicadas sobre la superficie  $S'$  y no sobre la  $S$ . Esto hace posible la introducción de una hipótesis en el campo de deformaciones que se traduce en decir que el campo de deformaciones asociado a un estado de daño bajo la acción de las tensiones  $\sigma$  es equivalente a un campo de deformaciones asociado a un estado no dañado del material bajo la acción de las tensiones efectivas  $\sigma'$ .

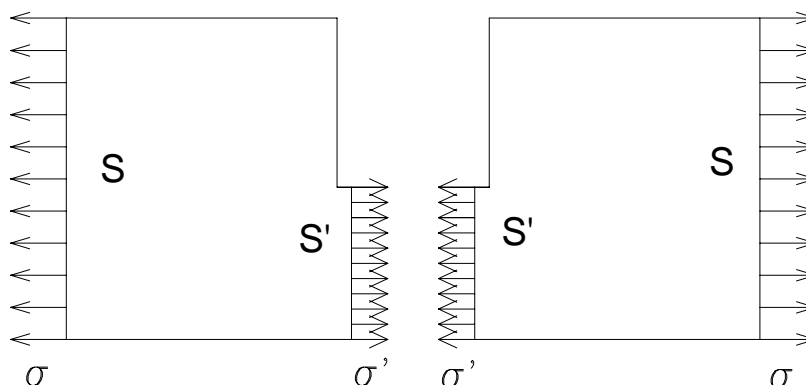


Figura.4.1 Tensiones de Cauchy vs tensiones efectivas (Mendoza, 2002)

Para poder definir la contribución de las tensiones de tracción y de compresión, se expresan por separado mediante la descomposición del tensor de tensiones efectivas  $\sigma'$  en dos componentes ( $\sigma'^+$ ,  $\sigma'^-$ ), de forma que los mecanismos de daño no lineales puedan obtenerse por separado.

La mecánica del medio continuo con daño está basada en principios termodinámicos irreversibles, por tanto es necesaria la definición de una energía libre potencial que tenga en cuenta las variables libres e internas que definen el problema

Con el fin de poder definir los conceptos de “carga”, “descarga”, o “recarga”, se debe introducir un valor escalar positivo como término de tensión de comparación, a partir de dos normas distintas para los estados de tracción y de compresión. La tensión de comparación de compresión está calibrada a partir de ensayos obtenidos en 1D y 2D.

A partir de las definiciones mostradas de las tensiones de comparación, se distinguen dos criterios de daño por separado  $g^+$  y  $g^-$  para los estados de tracción y de compresión respectivamente.  $g^+$ ,  $g^-$  representan una superficie en el espacio de tensiones.

### 4.3 Programa de cálculo COMET

Se realizará el estudio en COMET, programa de cálculo por el método de elementos finitos que incorpora el modelo constitutivo que acabamos de exponer. Este programa ha sido desarrollado por el Centro Internacional de Métodos Numéricos para la Ingeniería de Barcelona (CIMNE) y sus siglas COMET responden a COpled MEchanical and Thermal problem solver by FEM. A pesar de que sólo se usará una de sus aplicaciones se trata de un programa modular pensado para un amplio rango de problemas, tanto de ámbito industrial como de investigación. Concretamente es capaz de resolver por análisis de elementos finitos los siguientes problemas:

- Mecánicos en dos y tres dimensiones sujetos a condiciones estáticas, casi-estáticas o dinámicas transitorias,
- Térmicos en dos y tres dimensiones sujetos a condiciones transitorias o permanentes.
- Térmico-Mecánicos en dos y tres dimensiones en condiciones transitorias o permanentes

Dispone también de diferentes procedimientos para encontrar la solución a problemas no lineales:

- Resolución algorítmica mediante el uso de los métodos de initial stiffness matrix, de Newton-Raphson o de Newton-Raphson modificado
- Line Search.
- Aceleradores de convergencia : Newton-Secante (1 o 2 parámetros) y BFGS.
- Arc-length and displacement control.

Otras particularidades y opciones del COMET son:

- La integración se puede resolver según Gauss, Lobatto o Irons
- Optamos a diversas formas para resolver sistemas de ecuaciones lineales:
  - “solver” directo a partir de un esquema en Skyline.
  - “solver” iterativo mediante el Método del Gradiente Conjugado.
  - “solver” iterativo GMRES.
- La discretización del tiempo puede escogerse entre el esquema de Wilson o el de Newmark.

(Cervera et al., 2002)

La elección del tipo de “solver” es importante de cara a obtener una solución óptima en tiempo y en resultados. Dependerá del número de elementos utilizados en el análisis y de los parámetros que influyen en la confección de la matriz del sistema.

Un “solver” directo es más robusto a la hora de encontrar la solución de un sistema lineal de ecuaciones ya que no atiende a ningún criterio de convergencia, no obstante el tiempo de cálculo no es rentable a partir de los 40000-60000 elementos, ya que crece de forma exponencial. Por contra un “solver” iterativo es mucho más rápido que un “solver” directo si la matriz de rigidez del sistema está bien condicionada, además de permitir el cálculo para un número de elementos superior a 60000. Si la matriz del sistema está mal condicionada, el número de iteraciones que se necesita para conseguir cumplir un criterio de convergencia es elevado(o ocasionalmente si el criterio de convergencia es muy estricto puede no llegar a cumplirse) y por tanto el tiempo de resolución del problema será muy elevado también. Para evitar esto se debe fijar un número máximo de iteraciones en cada paso de tiempo.

COMET es capaz de calcular la solución a distintos modelos constitutivos. Para que ello sea posible tiene programado un algoritmo por cada tipo de problema, que se diferencian entre ellos mediante un número. Además, cuando seleccionamos un algoritmo de cálculo en concreto el programa nos pide automáticamente que le introduzcamos las variables de entrada que necesita y cuáles son los resultados que queremos obtener de los posibles.

Otra de sus principales virtudes es la posibilidad de usar el COMET junto al programa de pre y post-proceso GiD. Este programa, también desarrollado por el CIMNE, nos da un entorno gráfico perfecto para la realización de la geometría, elemento básico dentro de las variables de entrada de nuestro estudio. Además el GiD es

capaz de leer el archivo de resultados generado por COMET y permite visualizarlos mediante diagramas de escala cromática.

Con esta breve presentación se ha podido comprobar que se trata de un programa muy completo de cálculo por elementos finitos. A continuación se procede a exponer cómo se debe configurar el COMET para resolver los problemas que incumben a este análisis; es decir, a problemas donde el modelo constitutivo debe reproducir el comportamiento mecánico del material de la basílica.

### **4.3.1 Configuración COMET para el cálculo del Modelo Constitutivo Tracción-Compresión de Daño**

Para resolver problemas simulados bajo el Modelo Constitutivo Tracción-Compresión de Daño debemos escoger el Modelo 18 de COMET. Éste corresponde al modelo Visco-elástico de Daño para hormigón. Sin embargo, se puede transformar su comportamiento elástico a plástico mediante una simple variación de las variables de entrada del modelo de cálculo.

A continuación se procede a enumerar los parámetros de entrada que requiere el modelo constitutivo empleado. En paréntesis y en mayúsculas se escriben los nombres que reciben los parámetros en el programa COMET. Se requiere la densidad (DENSI), dos parámetros que definen la parte elástica del diagrama tensión-deformación, 4 que definen el tramo no lineal bajo compresiones y 2 parámetros más que definen el comportamiento no lineal cuando el material está traccionado. Los parámetros para el tramo elástico son el módulo elástico (YOUNG) y el coeficiente de Poisson (POISS). Los que definen el comportamiento no lineal cuando el material está comprimido son el límite a compresión (STREC), la resistencia de pico a compresión (EPSUC), la tensión máxima a compresión que define el umbral de la superficie de daño (YEIDC) y la energía de fractura a compresión (GFRAC). Finalmente los dos parámetros que definen el tramo no lineal del gráfico tensión-deformación bajo tracciones son el límite a tracción del material (STRET) y la energía de fractura a tracción (GFRAT)(Cervera et al., 2002).

Existen otros grupos de parámetros que se pueden introducir en este modelo. El primer grupo es el relacionado a los fenómenos viscosos. No se han considerado en este estudio, tal y como se ha expuesto en el apartado 4.2. En segundo lugar está el grupo de parámetros que modelan materiales que se encuentren pretensados. Es obvio que en la obra de fábrica tampoco se consideren.

Aplicando el modelo sin variación se obtiene el siguiente comportamiento del material en cada nodo:

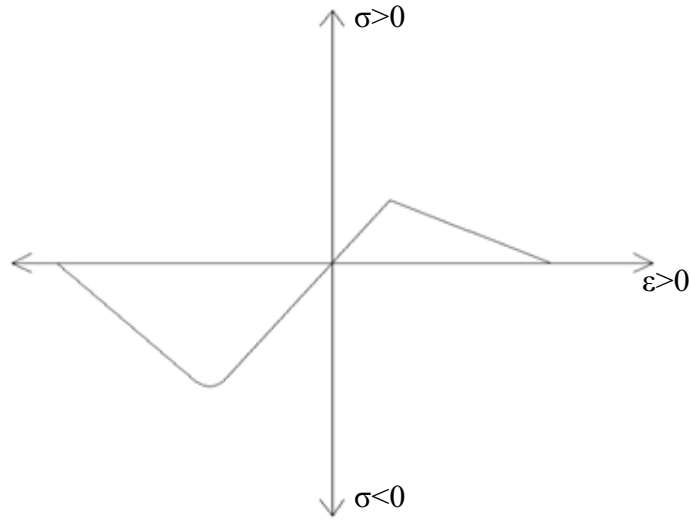


Fig.4.2 Ley constitutiva elástica para cada nodo de un elemento (elaboración propia)

La Fig.4.2 muestra una ley constitutiva de tipo elástica como la que corresponde al Modelo 18 de COMET. Esta ley constitutiva considera un softening una vez se ha alcanzado el límite resistente. Este comportamiento causa dificultades en los cálculos numéricos. Para evitarlos se sustituye el softening por un “plateau” en la ley constitutiva. A nivel práctico este cambio se consigue mediante la siguiente operación: se omite el parámetro EPSUC y se impone el valor de YEIDC = STREC. Con estas sencillas modificaciones numéricas se obtiene la ley constitutiva de la Fig.4.3.

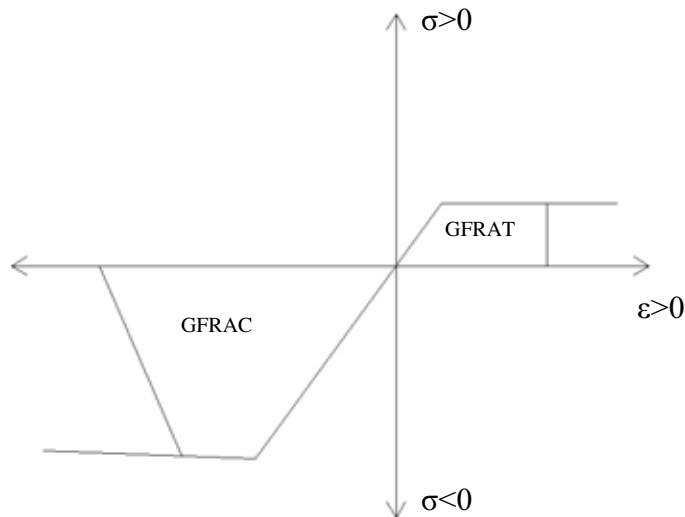


Fig.4.3 Ley constitutiva plástica utilizada en los estudios realizados (elaboración propia)

Con la nueva ley cuando un nodo alcanza el límite a tracción o a compresión, la tensión se mantiene constante y la deformación aumenta a un ritmo elevado. Es en este momento que aparece el daño y, en consecuencia, una redistribución de esfuerzos hacia elementos menos dañados o intactos. Con el daño la rigidez de la estructura disminuirá progresivamente hasta que se formen suficientes rótulas para provocar su colapso.

El valor de la energía de fractura es el área que describe la curva tensión-deformación; es decir, es el parámetro que regula el comportamiento de “softening” del

material. El tomar las energías de fractura con un valor infinito permite imponer un comportamiento sin límite por deformación y evita problemas de cara a la obtención de resultados. No obstante el valor último obtenido de la capacidad de una estructura se incrementa cuanto más grande es la energía de fractura (Molins-Roca, 2000). Por tanto nos interesará reducir al máximo su valor para no tener resultados demasiado optimistas. Estimaremos la energía de fractura a compresión a partir de la experiencia de su uso en otros estudios y deduciremos el valor de la energía de fractura a tracción a partir de la siguiente fórmula:

$$GFRAT=GFRAC*(STRET/STREC)^2 \quad [4.1]$$

En cada tetraedro de la geometría existe un punto de integración. La función se evalúa siempre en este punto y posteriormente se multiplica por el volumen del tetraedro.

Los valores de las tensiones obtenidas en cada nodo de cada elemento están sujetas a un tipo de alisamiento o “smoothing” que permite representar de forma continua los diagramas de tensiones. Si existen materiales conectados con marcadas diferencias resistentes, este tipo de alisamiento, que no es más que un tipo de ponderación entre nodos compartidos por varios elementos, puede dar lugar a resultados poco realistas. Para los análisis a realizar se empleará el de tipo Local por ser el que mejor se ajusta a las necesidades, ya que ofrece un mejor alisamiento en caso de tener discontinuidades muy grandes.

Cuando se ejecuta el cálculo se genera un archivo de resultados. Los resultados de este archivo son los correspondientes a los nodos de cada elemento. Su visualización en GiD corresponde a diagramas alisados que no reproducen los saltos de tensión que se originan entre materiales de diferentes propiedades, de forma que su interpretación debe ser realizada con prudencia.

A continuación se enumeran los parámetros más significativos que se obtienen a partir del análisis mediante el modelo constitutivo expuesto. En mayúsculas se escribe el nombre que reciben dentro del programa, ya que se podrán identificar en la visualización de los resultados del presente estudio. Son los siguientes:

- COMPRESS DAMAGE: Valor del daño a compresión. Valor entre 0 (intacto) y 1 (completamente dañado).
- COMPRESS RATIO: Valor que indica la relación entre la tensión de trabajo y el límite resistente a compresión. A partir de 1 el daño empieza a producirse.
- TENSILE DAMAGE: Valor del daño a tracción. Valor entre 0 (intacto) y 1 (completamente dañado).
- TENSILE RATIO: Valor que indica la relación entre la tensión de trabajo y el límite resistente a tracción. A partir de 1 el daño empieza a producirse.
- DISPLACEMENTS: Valor de los desplazamientos en las direcciones de los ejes globales X, Y, Z, o módulo del vector desplazamiento global, para cada nodo.
- STRESSES: Valor de las tensiones normales y tangenciales en cada nodo. Se dan los valores de las tensiones según planos paralelos a los definidos por los ejes globales ( $S_{xx}$ ,  $S_{yy}$ ,  $S_{zz}$ ,  $S_{xy}$ ,  $S_{xz}$ ,  $S_{yz}$ ), así como las tensiones principales  $S_i$  (tensión máxima de tracción),  $S_{ii}$ ,  $S_{iii}$  (tensión máxima de compresión)

(Cervera et al., 2002)

Las tensiones obtenidas en los nodos de un elemento corresponden a un valor inexacto. COMET obtiene los resultados en los puntos de integración, en donde el resultado sí es el exacto. La obtención de los valores en los nodos depende de la interpolación de los valores intermedios en los puntos de integración y del tipo de smoothing escogido previamente.

#### 4.4 Ejemplo sencillo de Aplicación del Modelo Constitutivo

Para entender mejor el funcionamiento del programa y las posibilidades que ofrece a nivel de resultados se procede a ejecutar un caso sencillo. Con el fin de comparar los resultados previamente se ha realizado un cálculo mediante otro método, concretamente un cálculo plástico por líneas de presión.

La geometría empleada es un arco circular de 4 metros de luz, 0.5 metros de espesor y 1 metro de profundidad que está recortado perpendicularmente en sus extremos por planos verticales que parten de los inicios de la fibra inferior. Los dos planos verticales que se obtienen están condicionados bajo la condición de empotramiento.

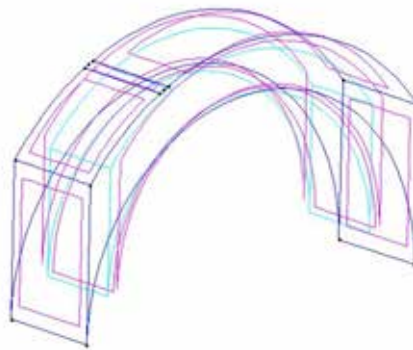


Fig.4.4 Geometría en GiD del arco circular utilizado (elaboración propia)

El arco debe resistir su peso propio más una sobrecarga lineal vertical aplicada a un metro de uno de sus extremos. Para evitar que la rotura final de la pieza no fuera por una rotura local de alguna de sus fibras, se ha repartido esta carga en una superficie de 11 centímetros de ancho. Gracias a esta corrección la rotura final del arco se ha producido por formación del mecanismo de cuatro rótulas que prevé la teoría de la plasticidad.

El material utilizado es ficticio aunque el valor de sus propiedades físicas son del todo coherentes. Estos valores se pueden observar en la tabla 4.1.



		material ej.
Densidad	[kg/m3]	2500
Módulo elástico	[N/mm2]	4500
Resistencia a compresión	[N/mm2]	4,5
Resistencia a tracción	[N/mm2]	0,045
Coefficiente de Poisson	[ - ]	0,33
Energía de fractura a compresión	[Joules]	1,00E+10
Energía de fractura a tracción	[Joules]	1,00E+08

Tabla 4.1 Valores utilizados para definir las características físicas del material del ejemplo

El cálculo se realiza mediante el Modelo 18 del programa COMET adaptado para que simule un comportamiento tracción-compresión del material con daño. Se introduce una carga vertical de  $3E+06 \text{ N/m}^2$  sobre la superficie de  $0,11 \text{ m}^2$  que da una fuerza vertical total de  $330\text{kN}$ . Esta fuerza se aplica mediante 20 pasos con un incremento constante de  $16,5\text{kN}$ . Si se impusiera algún desplazamiento como condición de contorno este también se aplicaría mediante pasos sucesivos. En el anejo A se encuentra un resumen del archivo de datos utilizado para el cálculo.

En las figuras 4.5 se aprecia la formación sucesiva de rótulas según se va incrementando la carga. Se considera que una zona de una pieza se comporta como una rótula cuando la mayor parte de la sección en esa zona ha llegado a un valor próximo a 1 del daño a tracción o compresión. La formación de la cuarta rótula, que produce el mecanismo de colapso del arco, se produce en el paso 16, cuando la carga aplicada es el peso propio más una sobrecarga de  $264\text{kN}$ .

Fig.4.5 Sucesión de imágenes que muestran la formación de las cuatro rótulas plásticas que colapsan la estructura a medida que aumentamos la carga:



Fig.4.5.1 Paso 1. Daño a tracción

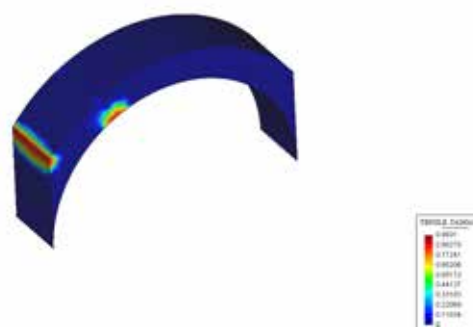


Fig.4.5.2 Paso 4. Daño a tracción



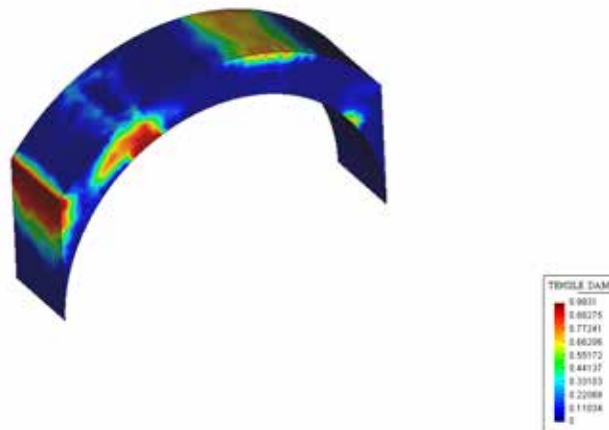


Fig.4.5.3 Paso 8. Daño a tracción

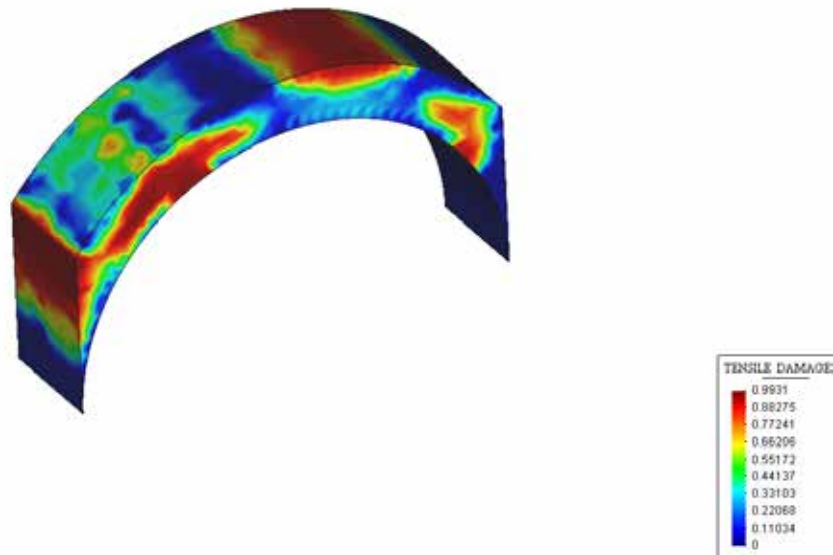


Fig.4.5.4 Paso 16. Daño a tracción. Colapsa el arco.

En el gráfico presentado a continuación (fig.4.6) se pueden ver las tensiones principales a tracción de 4 nodos del arco. Estos 4 nodos forman parte de las 4 rótulas que se forman en la pieza y nos muestran el comportamiento plástico del material. Las curvas están ordenadas por orden cronológico de formación de las rótulas. Se puede apreciar perfectamente que cuando un nodo llega a la tensión máxima a tracción ( $45000\text{N/m}^2$ ) se produce una redistribución de tensiones y la fibra en cuestión no se responsabiliza de más carga.

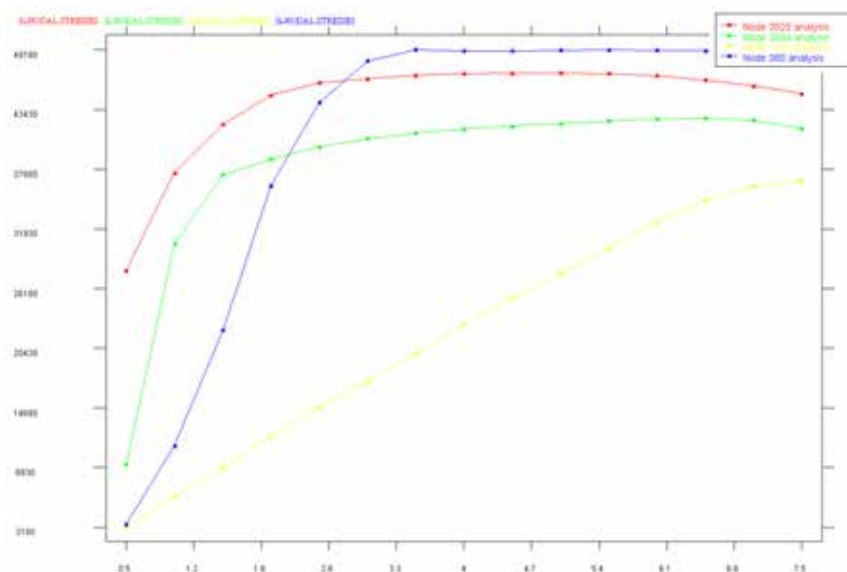


Fig.4.6 Evolución según carga aplicada (pasos) de las tensiones principales a tracción de un nodo de cada una de las 4 rótulas que se forman en el arco.

En el cálculo plástico por líneas de presión que se ha realizado de forma paralela, el valor de la sobrecarga en el momento del colapso es de 230kN. Si se compara con los 264kN obtenidos con el modelo presentado, se aprecia que la resistencia del arco en el modelo de daño es un 14% superior que en el cálculo por líneas de presión. Esta diferencia se puede justificar por varios motivos. En primer lugar en el modelo de daño hemos supuesto una resistencia a tracción del 1% de la resistencia a compresión (para evitar problemas numéricos en el cálculo) mientras que en el cálculo por líneas de presión la resistencia a compresión se ha considerado nula. Naturalmente esta diferencia ha propiciado que el presente modelo tenga una resistencia superior. En segundo lugar el hecho de repartir la carga lineal en una superficie para evitar la rotura local también nos ha ayudado a que el arco tenga una capacidad superior. En la Fig.4.7 se muestra un detalle del cálculo plástico por líneas de presión:

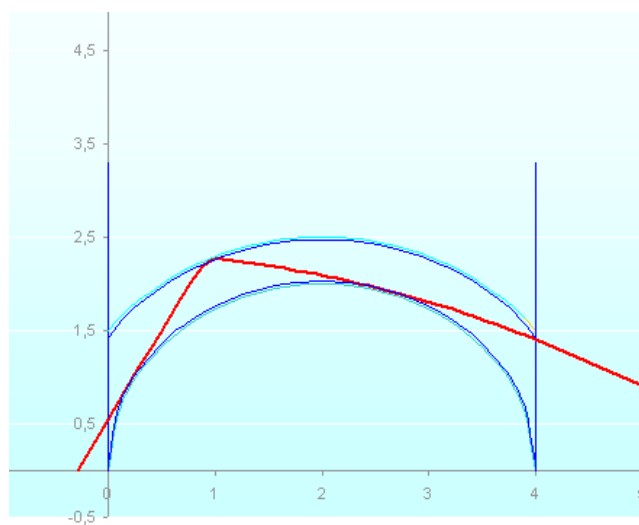


Fig.4.7 Detalle del cálculo plástico por líneas de presión realizado de forma paralela al ejemplo que se está estudiando

Además podemos visualizar otros resultados interesantes como el valor de las tensiones principales (Fig.4.8), la deformada (fig.4.9) o los parámetros de daño a compresión y tracción con sus respectivos ratios.

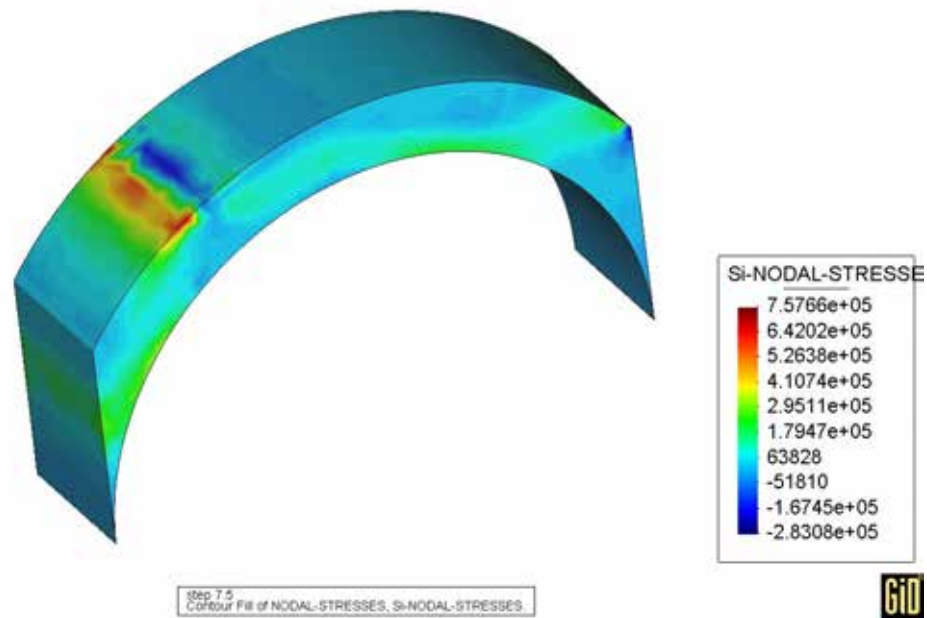


Fig.4.8 Tensiones principales de compresión en el momento de colapso del arco

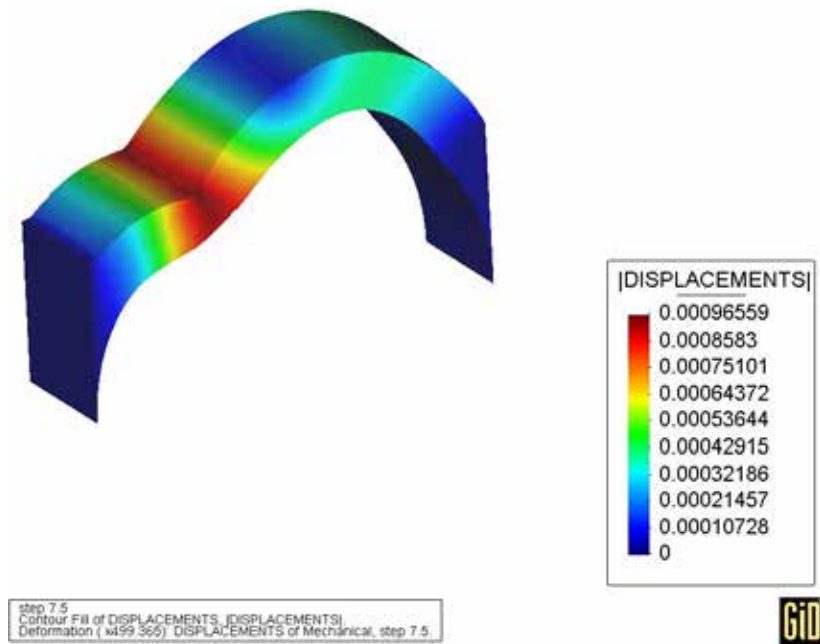


Fig.4.9 Deformada y valor absoluto de los desplazamientos en el momento del colapso

## Capítulo 5: MEZQUITA PEQUEÑA SANTA SOFÍA

### 5.1 Historia

En el año 527 ascendió Justiniano al trono de la Roma de Oriente. Era un hombre notable: autócrata, profundamente consciente de las prerrogativas y deberes de su posición cercana a Dios, diplomático sagaz y muy hábil para escoger a los mejores colaboradores. Sin embargo, fue incapaz de planificar a largo plazo. Se dedicó a ejecutar grandiosos planes propagandísticos de su propia gloria, como conquistas fáciles, comercio de mercancías de lujo, una organizada campaña publicitaria o una ambiciosa actividad constructiva. Llevó con ello al hundimiento progresivo de la economía, a la falta de seguridad en las fronteras y a la proliferación de problemas religiosos. Pero éstas son las consecuencias que nos ha mostrado la historia.



Fig.5.1 Mosaico con imagen de Justiniano, San Vitale, Rávena (web a)

Una de sus principales ambiciones políticas era arrebatarse grandes partes del Imperio a los usurpadores bárbaros y expandirlo por todo el Mediterráneo. Lo consiguió en gran medida ya que en el 554 puso el pie en los puertos del sudeste de España, después de haber recuperado el norte de África, la península italiana, Córcega y Cerdeña. Conjuntamente coexistieron varias acciones orientadas a unificar todo este territorio. Sin duda la arquitectura fue una de las más importantes, por la que la autocracia de Justiniano trató de impresionar a los pueblos de dentro y fuera del imperio. A ojos del emperador las empresas arquitectónicas tenían el mismo rango que la restitución de la ortodoxia religiosa, la revitalización de la jurisprudencia o la propia reconquista de occidente (Krautheimer, 1965). Es por esta importancia y por sus aspiraciones propagandísticas que busca en ella una arquitectura innovadora y atrevida.

La arquitectura religiosa rompe con los conceptos de la basílica paleocristiana de la Roma clásica y marca una nueva norma: planta central con bóvedas de ladrillo y culminada por una cúpula. Supone, además de una innovación, una solución al problema litúrgico que durante la celebración de la misa hubiera apenas contacto con las naves laterales. Con la planta central consiguieron enfocar todo el edificio en la zona donde se desarrollaba la acción. Esta tipología tiene su origen en la arquitectura del Bajo Imperio, donde salones palaciegos, termas o construcciones funerarias ya se había concebido según estos cánones. Determinó el carácter de la arquitectura de Oriente durante más de mil años, ya que fue utilizada tanto por arquitectos bizantinos como por persas para construir mezquitas.

Es en este contexto donde fue construida la basílica de los Stos. Sergio y Baco, que ha sido considerada generalmente como la precursora de Santa Sofía, aunque no existen pruebas que así lo justifiquen. Se calcula que empezó su construcción al empezar el mandato de Justiniano, aproximadamente en el 527, y se sabe que se terminó antes del 536. Era la basílica del palacio de Hormisdas, residencia de Justiniano en Constantinopla como heredero del trono. El edificio se apretujó en un solar de forma irregular entre el palacio y la iglesia de San Pedro y San Pablo, basílica con tribunas que se había empezado antes de 519. La adición de la basílica de los Stos. Sergio y Baco hizo de las dos iglesias una doble, con nártex, atrio y propileo comunes que se extendían delante de ambos edificios. Como comunicaba tanto con la iglesia de San Pedro y San Pablo como con el palacio a través de arcadas abiertas en ambos pisos, pasó a ser el centro de todo el conjunto (Krautheimer, 1965).

La emperatriz Teodora convirtió el edificio en monasterio para los monofistas. Este pasado monofista y por tanto, hereje, no agradó a los bizantinos que, progresivamente, fueron desatendiendo el edificio propiciando su deterioro.

Desde el año 1504 hasta este momento la basílica se ha usado como mezquita, con el nuevo nombre de Küçük Ayasofya Camii o Mezquita Pequeña Santa Sofía. Fue en este momento cuando se construyó la nueva entrada principal por el oeste, de estilo otomano, que sigue siendo la actual. Los elementos centrales, como la cúpula, pilares y nichos, principales en cuanto a comportamiento estructural del edificio, no sufrieron más que pequeños cambios decorativos.

El edificio ha sufrido un gran número de incidencias a lo largo de su vida. Cabe destacar el incendio padecido en 1758 y, sobretodo, los numerosos terremotos. Esta elevada actividad sísmica se debe a la presencia de la falla del Norte de Anatolia, que discurre en dirección este-oeste paralela al mar Negro a escasos 100Km de Estambul. Se contabilizan hasta 34 terremotos con capacidad de producir daño causados en el pasado milenio por el desplazamiento de la falla (web b). Algunos de los más graves para el edificio han sido los de 1719, 1754, 1835, 1894, 1939, 1967 y el del 17 de agosto de 1999 (web c). Debido a este elevado conjunto de incidencias sufrido por el edificio, sólo el octógono central, la mayor parte del ábside y algunos sectores de la pared norte forman parte del edificio original, siendo el resto producto de posteriores restauraciones (Stichel-Svenson, 2001).

Entre los años 1870 y 1871 se construyó a tan sólo pocos metros de la basílica la vía principal del ferrocarril que une la ciudad con Europa.

A principios del siglo XX se utiliza como refugio para refugiados de las guerras en los Balcanes. Por ese entonces el tejado que protegía la cúpula y el edificio estaban muy deteriorados. Existen fotografías donde se aprecia que estaba totalmente cubierto de vegetación. Esta situación produjo un deterioro muy importante del edificio ya que el tejado dejó de ser impermeable y la presencia de agua disminuyó las propiedades de los morteros además de incrementar la potencia de sus grietas. Esta situación duró hasta que en el año 1970 se interviene y se construye el que actualmente es el tejado de la mezquita.

En la década comprendida entre 1950 y 1960 se renueva la línea de ferrocarril que discurre al lado del edificio. El principal cambio que sufre en el tramo que nos afecta es que suben el nivel de la vía hasta 2,5 metros por encima de la cota de la planta baja de la mezquita. Este nuevo terraplén, además, se apoya, en parte, en el muro sur-oeste del edificio. Cabe la posibilidad que esta obra podría haber alterado el flujo natural de las aguas subterráneas actuando como una barrera para ellas. Hoy en día usan estas vías los trenes de cercanías, el Balkan express y algunos trenes de alto tonelaje.

Por todos estos hechos actualmente la mezquita sufre numerosos desperfectos que han aumentado considerablemente en las últimas décadas (Alkis et al., 2001). Éstos han originado un debate sobre cuál es exactamente su origen y cuál debe ser la forma de restaurarlos y prever que no vuelvan a producirse en el futuro. El presente estudio, como hemos mencionado en capítulos anteriores, se engloba dentro de esta discusión.

## 5.2 Descripción

La mezquita tiene una planta cuadrada irregular de 30 y 40 metros de lado. La diferencia de longitud entre sus lados se debe a la entrada que se construyó por el lado oeste cuando en 1504 se transformó en mezquita. El edificio está dominado por un espacio central octogonal cubierto por una cúpula de 15 metros de diámetro. La estructura octogonal interior se encuentra situada apreciablemente ladeada respecto a la estructura cuadrada exterior. El mismo octógono que define la planta central es irregular, ya que su lado oriental es mucho más ancho que el occidental, y las dos exedras orientales tienen una luz entre apoyos mayor que las occidentales.

La construcción está sostenida por ocho pilares, que se apoyan en los vértices del octógono central. Unos nichos rectangulares y semicirculares alternados unen los pilares y sobresalen hacia los espacios auxiliares envolventes de un deambulatorio y una tribuna alta, ambos abiertos frente a la entrada por un antecoro y un ábside. En la curva de los nichos, columnas pareadas sostienen un arquivolta en el piso bajo y arcadas triples al nivel de la tribuna. Sobre el espacio central se alza una cúpula gallonada de dieciséis elementos, en la que se alternan tramos rectos, que continúan las líneas de las paredes, con segmentos curvos. Los segmentos curvos descansan en los ángulos del octógono y los lados rectos arrancan de los centros de sus lados y van calados por ventanas. En el lado este del octógono se encuentra el ábside, que está formado por una bóveda cilíndrica que finaliza uniéndose a una bóveda esférica. En planta el ábside sobresale del cuadrado que define el contorno del edificio.



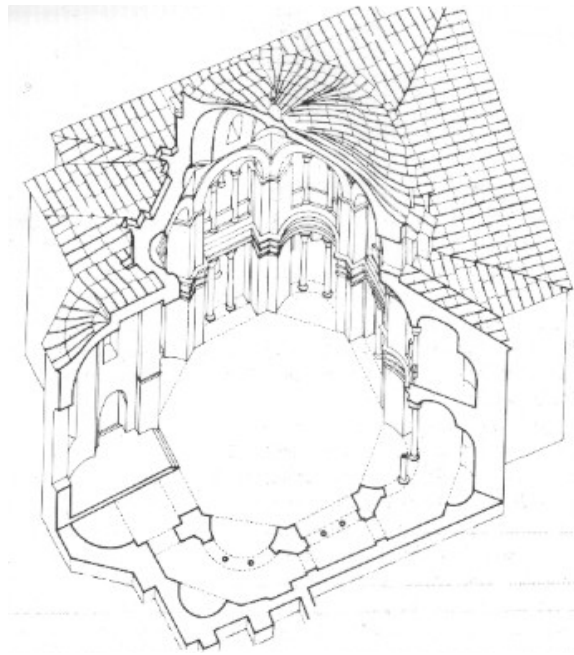


Fig.5.2 Sección volumétrica de la Mezquita Pequeña Santa Sofía (Mango, 1972)

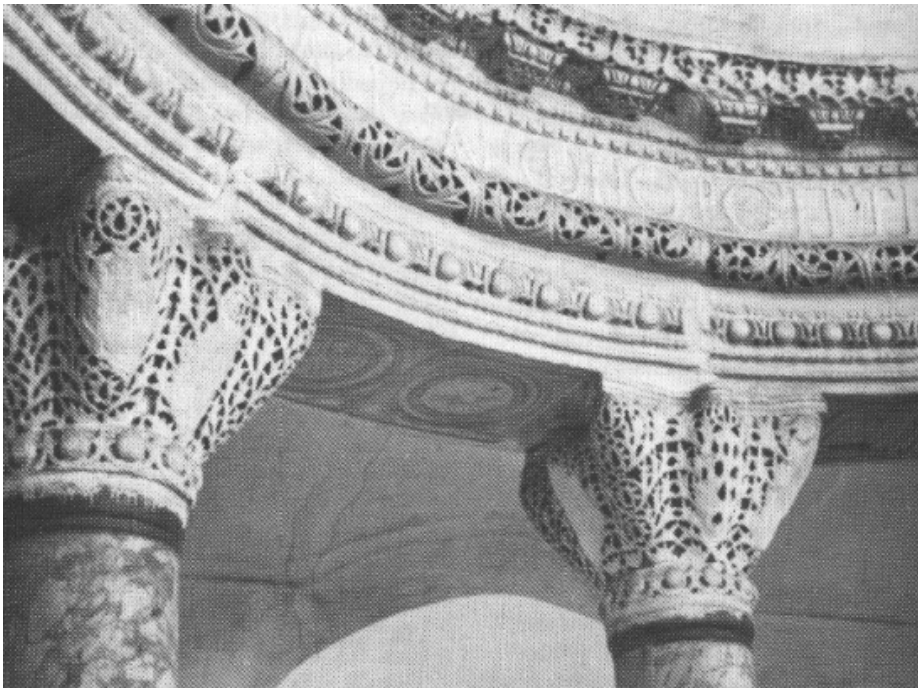


Fig.5.3 Detalle de la exquisita decoración de la Mezquita Pequeña Santa Sofía (MacDonald, 1962)

La decoración, como se aprecia en la Fig.5.3 es de soberbia finura y delicadeza y se distingue principalmente en los capiteles y entablamentos.

El inquietante contraste entre esta elegante ornamentación y la sutileza de su composición por una parte, y las forzadas proporciones y la torpe utilización del solar es difícil de explicar. Es quizá posible que se confiara un proyecto excelente a un maestro de obras incapaz de adoptarlo con habilidad en el lugar y que, además, se le proveyera de bellos capiteles y entablamentos encargados a los talleres de las canteras de Proconesia, isla cercana de Constantinopla (Krautheimer, 1965).

Se realizará una descripción más a fondo de los distintos elementos que conforman el edificio en los siguientes subapartados.

### **5.2.1 Nomenclatura**

El motivo de formular una nomenclatura es poder localizar con exactitud las diferentes explicaciones que se irán realizando durante el texto.

Por su buen funcionamiento, se va a utilizar la usada en los estudios de la Universidad Técnica de Yildiz, Estambul. Empieza por diferenciar entre los elementos de la planta baja y los del primer piso ya que en las dos plantas éstos se repiten. Se sigue por numerar los pilares. Como se aprecia en la planta de la basílica de la Fig.5.4, el primer pilar, P1, es el que se encuentra a la derecha del ábside y los números avanzan hasta el pilar P8 en sentido horario. A continuación se clasifican las columnas. Para ello se usa la inicial C con dos dígitos. El primero es el número del pilar contiguo y el segundo es el número del otro pilar del nicho en cuestión donde se encuentra la columna.

Por tanto y a nivel de ejemplo, si hablamos de la columna de la planta baja C21, sabemos que se encuentra en el nicho cerrado por los pilares P1 y P2. El pilar contiguo a la columna es el P2, a su derecha. Y la columna que se encuentra a su izquierda es la C12 de la planta baja.



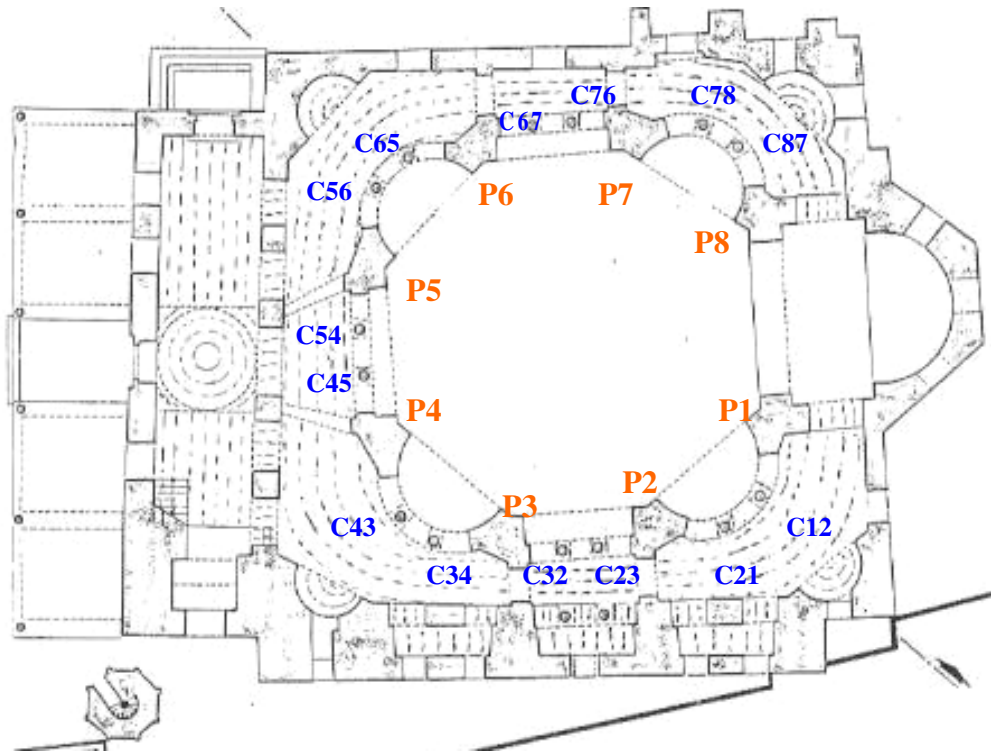


Fig.5.4 Planta con la nomenclatura utilizada (elaboración propia)

## 5.2.2 Descripción de los elementos

- **Cúpula**

Se comenzará a describir los distintos elementos de la basílica por la cúpula ya que es el elemento principal del edificio. Como se ha mencionado, se trata de una cúpula gallonada e irregular que mide 16,5m de diámetro en dirección EW y 16m en la dirección NS. Tiene 7,5 metro de altura partiendo de la cota 13,5m hasta alcanzar su punto más alto en la cota 21m (Yüzügüllü, 1997). Estas dimensiones la localizan entre las mayores que se conservan del Bizancio. Recién construida ya se trataba de una cúpula importante pero su luz siempre ha estado lejos de los 31 metros de la cúpula principal de Santa Sofía.



Fig.5.5 Vista completa del interior de la cúpula (Mango, 1972)

Está realizada de forma maciza en mampostería. No se sabe con certeza pero se supone que la obra de fábrica es del mismo tipo que la usada en el resto del edificio, es decir, alternando hiladas de igual espesor de mortero y ladrillo. La forma de disponer las hiladas es horizontal, colocando sucesivamente anillos de igual cota.

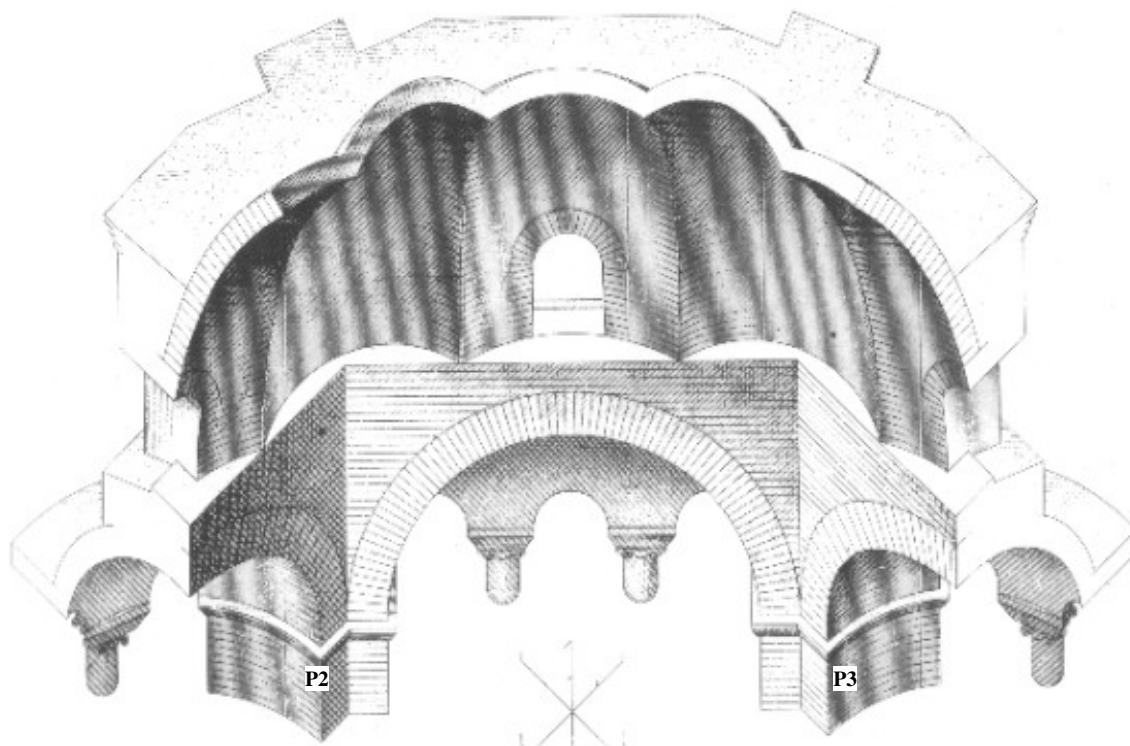


Fig.5.6 Esquema donde se visualiza el interior de un cuadrante de cúpula con las bóvedas donde se apoya. Se visualiza la curvatura de los gajos que conforman la cúpula. Es interesante fijarse en la disposición de los ladrillos que el autor propone como más probable (Choisy, 1997)

Con esta forma de disponer los ladrillos se construyó la cúpula como una cáscara sólida, continua y peraltada. Esta tipología permite distribuir los empujes por todo el perímetro que cubre. Esta característica, común en todas las cúpulas bizantinas, es la principal diferencia respecto a las cúpulas occidentales coetáneas, que descargan el peso de los paños sobre nervaduras y de allí a los pilares. Tal concentración de cargas exigía la construcción de grandes macizos con la única finalidad de contrarrestar el empuje. A los bizantinos no les gustaban estos elementos que partían el espacio, por ello, reparten las cargas por todo el perímetro y después lo distribuyen mediante una agrupación de bóvedas. En la mezquita la base de la cúpula, que realiza la función de elemento de transición y pechina, descarga sus esfuerzos sobre un conjunto de ocho bóvedas, alternando de horno y de cañón. A su vez, éstas transmiten las cargas a los pilares, columnas y muro exterior.

Para resistir más fácilmente las tensiones provocadas por el peso de la cúpula, el arquitecto se sirvió, según Choisy (1997), de dos técnicas que se seguirán usando durante todo el imperio bizantino, aunque no siempre de forma simultánea. La primera es reducir su peso. Para conseguir el aligeramiento proyecta una cúpula gallonada (Fig.5.6) donde la curvatura de los elementos o gajos realiza la misma función que los huecos de la cúpula del Panteón de Roma, ahorrar material y por tanto, peso. La segunda técnica consiste en colocar contrafuertes en los vértices de la base ortogonal (Fig.5.7). Con ellos se reducen los esfuerzos que se transmiten a las bóvedas que sustentan la cúpula.

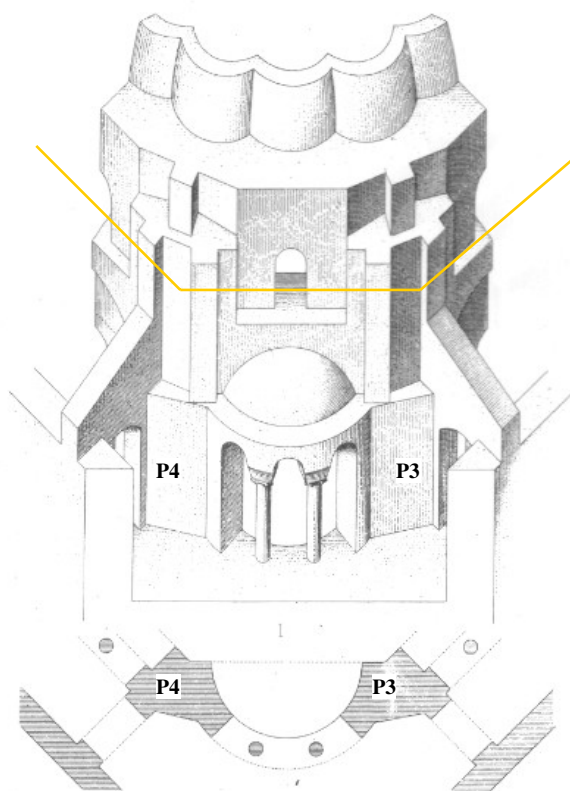


Fig.5.7 Vista traseira de los elementos interiores del edificio. Bajo el esquema tridimensional se está dibujada la planta. En la vista tridimensional se aprecia el uso de contrafuertes en los vértices del octógono donde se apoya la cúpula, marcado en naranja (Choisy, 1997)

Con la misma función de resistir las tracciones de la parte baja de la cúpula se colocaron unos tirantes (ver Fig.5.8) de hierro que todavía se pueden ver. La relajación del metal con el paso del tiempo además de la precariedad de las uniones hace suponer que actualmente estos elementos ya no colaboran en la resistencia del edificio.



Fig.5.8 Detalle de una unión de tirante de hierro en el exterior del edificio (Pere Roca)

Como se aprecia en las fotografías la cúpula dispone de ocho ventanas que se encargan de dar luz al espacio central del edificio. Están situadas en los ocho paños rectos y existen dos tipologías. La ventana situada encima del ábside es de menor tamaño (2m de altura) y el resto son de 3 metros de altura por 1 metro de anchura.



En la parte exterior la cúpula está recubierta por un tejado en láminas de cobre. Éste impermeabiliza la estructura ante la lluvia y evita la formación de vegetación como ocurrió en el pasado.

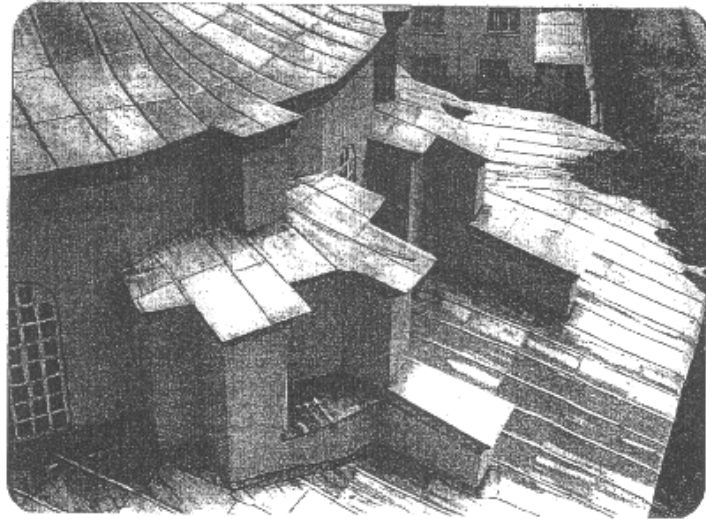


Fig.5.9 cubierta exterior del edificio (Arun, 2002)

- **Bóvedas**

Tanto en la planta baja como en el primer piso el conjunto de espacios auxiliares están cubiertos por bóvedas. Están todas ellas, como el resto del edificio, construidas con mampostería. La forma de colocar los ladrillos es en hiladas en la mitad inferior y en forma de hojas en el resto. Además se inclinaban las hojas respecto a los arcos de cabeza para aumentar su resistencia al cortante vertical. Una de las características principales de esta forma de construir la bóveda es su gran adaptabilidad (Choisy, 1997). Esta propiedad ha sido muy bien aprovechada para abovedar a pesar de las irregularidades que sufre el edificio en planta.

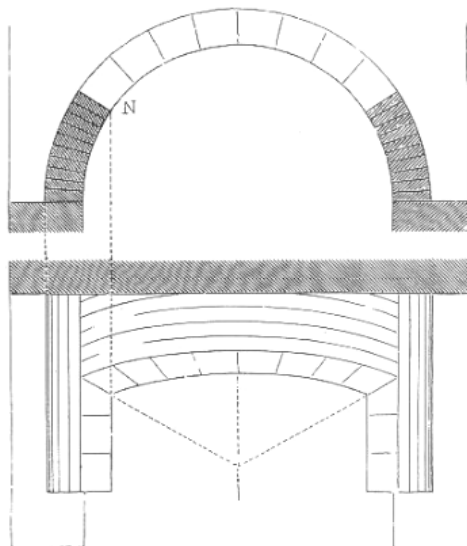


Fig.5.10 Construcción mixta de bóveda de cañón, a base de hojas e hiladas. Se aprecia la disposición inclinada de las hojas (Choisy, 1997)

- **Paredes exteriores y pilares**

El conjunto de paredes exteriores es el que más se ha modificado a lo largo de la vida de la mezquita. Además no se mantuvo ningún criterio constructivo a lo largo de las distintas reparaciones. La pared norte es un claro ejemplo de ello. La pared sur fue renovada por última vez en 1877, poco tiempo después de la puesta en servicio del ferrocarril que transcurre a pocos metros y que, probablemente, causó asentamientos con sus vibraciones. Se menciona este caso para entender que las reparaciones del muro son respuestas a las patologías que ha sufrido la basílica por terremotos, humedades, vibraciones, etc.

Así pues existen tramos construidos con obras de sillares, otros construidos con mamposterías de ladrillo y otros donde se han alternado hiladas de ladrillos con hiladas de sillares para reforzar.

Es importante destacar el continuo uso de arcos de descarga en las distintas paredes exteriores. Estos arcos fueron colocados especialmente encima de toda ventana o puerta para facilitar su resistencia.

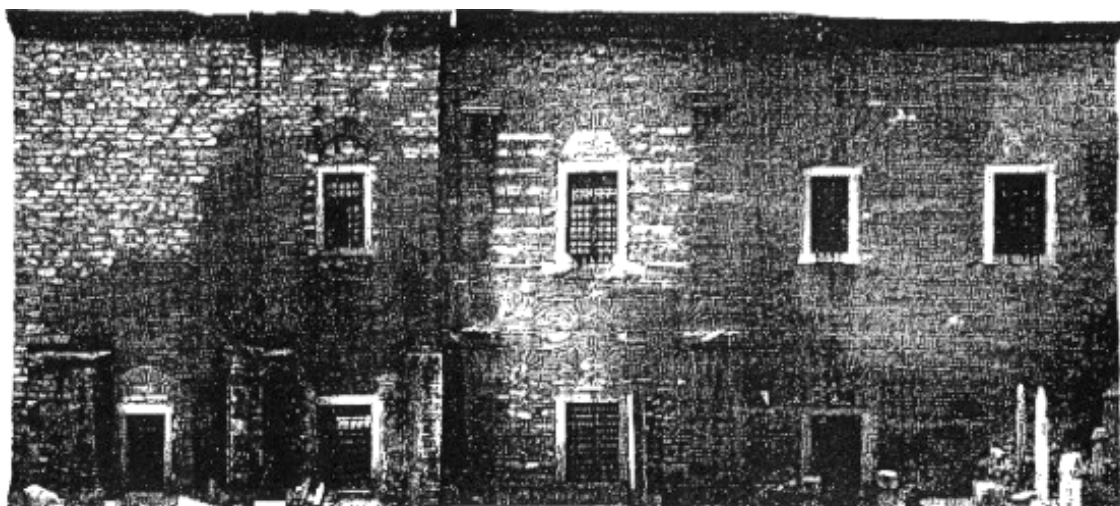


Fig.5.11 Fotomosaico de la pared norte (Alkis et al., 2001)



Fig.5.12 Pilar P3  
(Pere Roca)

Los 8 pilares interiores donde se apoya la cúpula sí que son los originales. Su tamaño es de un diámetro aproximado de 2.5m con una sección de 3m<sup>2</sup>. Están construidos de dos materiales distintos. La mitad inferior de cada pilar está realizado con sillares de piedra, concretamente de travertino. Por el contrario la parte superior con hiladas horizontales de mortero y ladrillo al igual que las paredes exteriores originales. El grosor de la hilada de mortero es igual al del ladrillo, lo cual se justifica debido a que en la época el mortero era mucho más económico que el ladrillo. Nunca se ha comprobado si los pilares son macizos pero es de suponer, haciendo una analogía con otros edificios paleocristianos, que el interior está formado por un relleno de inferior calidad y no por mampostería o piedra.

- **Columnas**

En cada una de las dos plantas de la basílica encontramos 14 columnas. Están situadas por parejas entre los pilares describiendo el contorno del centro octogonal del edificio. Las del piso superior son más delgadas que las de la planta baja ya que deben aguantar menos peso. Son monolitos de piedra de 3 metros de altura y 50cm de diámetro, culminados por capiteles en cesto delicadamente labrados. Sobre ellos se apoya un entablamiento horizontal también ricamente esculpido sobre cuyo campo se ha grabado un largo epígrafe en honor de la imperial pareja que mandó su construcción.

### 5.3 Estado de daños de la Mezquita

La mezquita Pequeña Santa Sofía se encuentra en un estado de conservación muy por debajo de lo que su valor histórico exigiría. Tal y como se explica en el apartado 5.1, ha sido un edificio olvidado por las autoridades a lo largo de toda su vida. Claros ejemplos de esta despreocupación son los años que se tardó a restaurar la impermeabilización del tejado, o el permitir que el terraplén de la vía férrea que discurre al lado se apoye sobre el muro exterior de la misma mezquita.



Fig.5.13 Detalle de fisuras en el lado norte de la basílica (Pere Roca)





Fig.5.14 Efecto de las humedades sobre el revestimiento (Pere Roca)

El resultado de este olvido ha sido la aparición de numerosas fisuras y humedades. Las grietas se encuentran en la cúpula y las bóvedas del edificio. No está identificada ninguna grieta en pilares o columnas. La mayor parte de las grietas, incluidas las de mayor obertura, se localizan en la mitad de edificio próximo al ábside. Es notable mencionar, también, la alta concentración de fisuras en las zonas bajo alguna de las ocho ventanas de la cúpula. Las humedades se aprecian por haber teñido de marrón el recubrimiento de cal. En algunos puntos incluso ha conseguido levantarlo (ver Fig.5.14).

Uno de los principales problemas que presentan las grietas a nivel de estudio es que en la mayoría de los casos no se sabe cuál es la profundidad que tienen. En la mayor parte de las grietas sólo se puede afirmar que a nivel de superficie se ha agrietado el recubrimiento de cal. Sin embargo en una grieta localizada en la cúpula en la zona del pilar P1 se ha comprobado que cruza el espesor del muro y se puede apreciar también en el exterior del edificio. Asimismo la presencia de humedades también da la sospecha que la grieta haya cruzado hacia el exterior del muro.



Fig.5.15 Revestimiento del muro exterior localizado en una zona afectada previamente por fisuras, que fue levantado por el efecto del sismo del 17 de agosto de 1999 (Pere Roca)

Las observaciones de las últimas décadas han mostrado que las grietas más importantes continúan vivas y han aumentado su obertura en los últimos años (Alkis et al., 2001). Este hecho ha propiciado que se continúen realizando estudios para caracterizar el estado de daño del edificio y analizar qué soluciones son válidas para remediar el problema

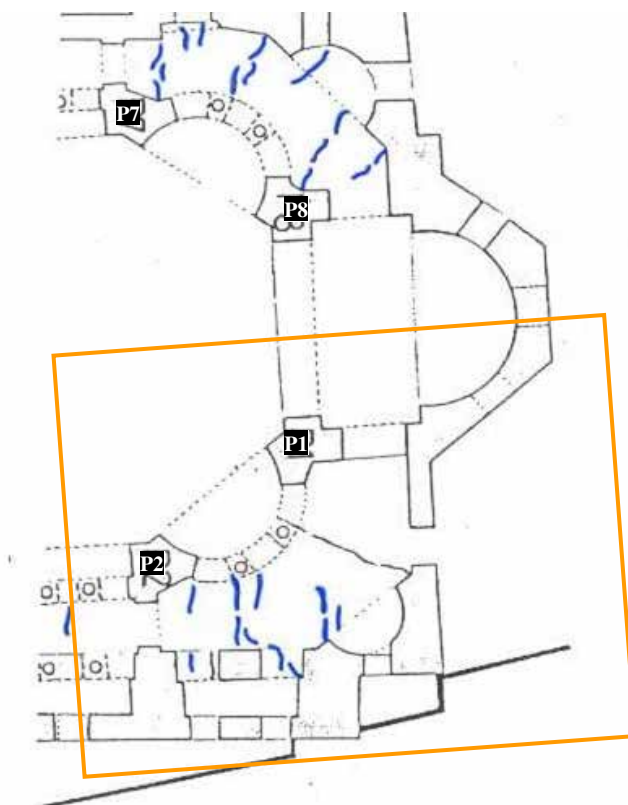


Fig.5.16 Localización en planta de grietas en la planta baja de la mezquita. El recuadro naranja indica la ¼ parte modelada, vid. Capítulo 6 (Arun, 2002)

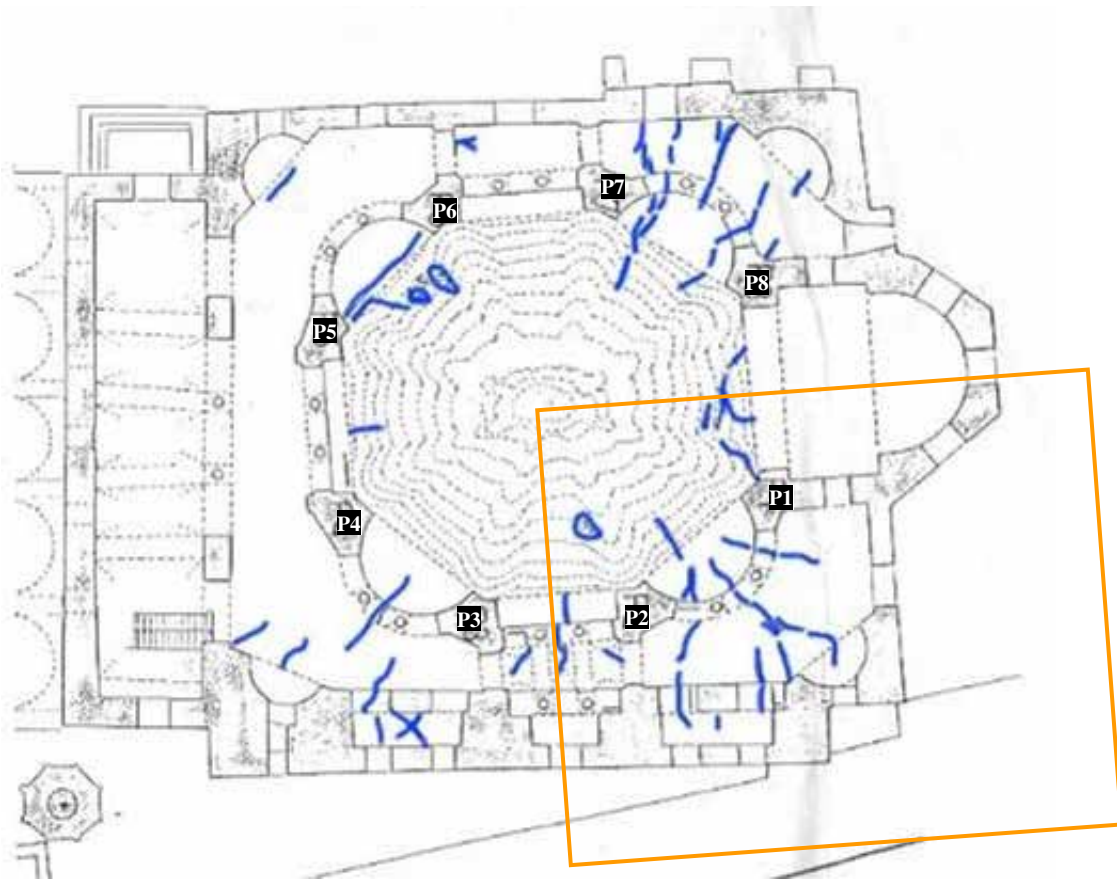


Fig.5.17 Localización en planta de grietas en el primer piso y en la cúpula de la mezquita. Se indica la  $\frac{1}{4}$  parte modelada, vid. Capítulo 6 (Arun, 2002)

La mezquita sufre, además, unos importantes desplazamientos horizontales. Estos fueron medidos por Alkis et al., 2001 y podemos apreciarlos en la Fig.5.18. Existe una importante inclinación en dirección radial de los pilares y del muro exterior del ábside.

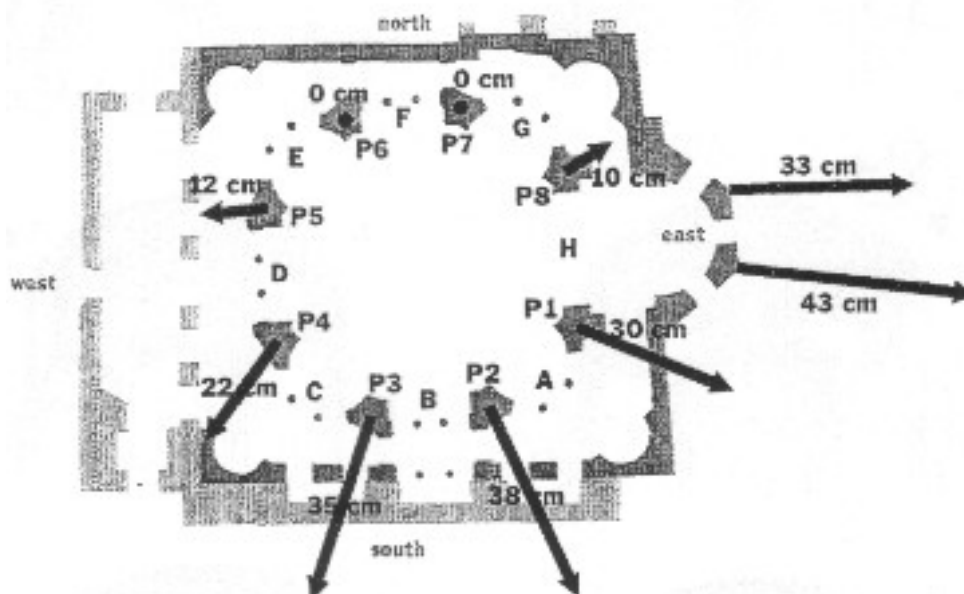


Fig.5.18 Desplazamiento horizontal de los pilares (medido a 9m) y del ábside (medido a 10m) (Alkis et al., 2001)

## 5.4 Estudios realizados sobre la Mezquita

### 5.4.1 Estudio del comportamiento de la cúpula de la basílica mediante un modelo colgante (Tomlow, 1997)

El estudio realizado por Tomlow (1997) se basa en la teoría utilizada por Giovanni Poleni en 1748. Éste razonó que si una cadena, suspendida libremente por dos extremos, se posiciona de forma que sólo tiene tracciones, entonces si invertimos la forma que describe la cadena obtenemos una estructura que solamente produce compresiones. Según este razonamiento una forma de encontrar la geometría óptima de un arco de sección constante es invirtiendo la forma que produce una cadena bajo los esfuerzos que recibe el arco.

El estudio realizado por Tomlow compara la geometría real de la cúpula de la basílica con su forma óptima, descrita por el modelo colgante. Con esta comparación consiguen visualizar donde se producen tracciones y compresiones. Debido a la complicidad de la geometría de la cúpula reducen el estudio a dos modelos colgantes reducidos. El primero es bidimensional y reproduce el arco que se obtiene de realizar una sección en el punto medio de un sector recto de la cúpula. El segundo, más elaborado, reproduce tridimensionalmente uno de los sectores curvos.

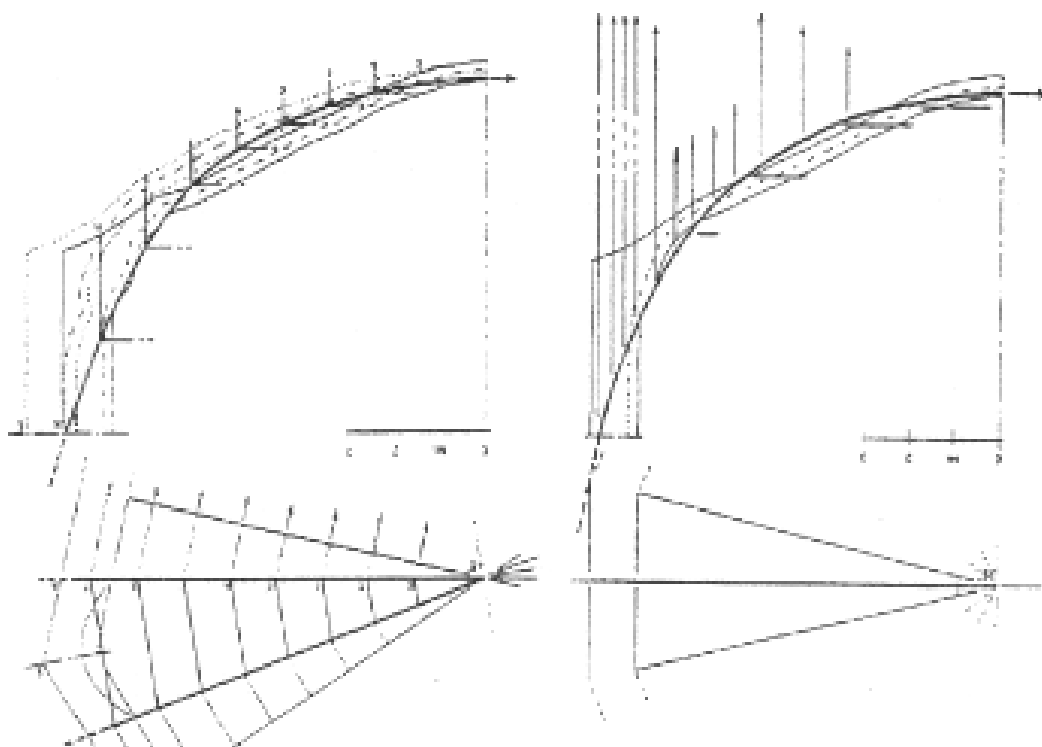


Fig.5.19 Esquemas de los modelos colgantes 3-D y 2-D de la mezquita (invertido respecto el original, Tomlow, 1997)

Después de exponer las numerosas simplificaciones usadas en el modelo, su conclusión es que la alternancia de sectores rectos y curvos en la cúpula se comporta como un sistema estructural correcto. Además concluy

e que las grietas, localizadas mayoritariamente en la subestructura, no parecen tener su origen exclusivamente en la no óptima geometría de la cúpula, puesto que la catenaria excede el perímetro de la cúpula.

#### **5.4.2 Estudio de los efectos del tráfico ferroviario sobre la basílica** (Yüzügüllü, 1997)

Tal y como se ha mencionado en el resumen histórico, entre los años 1870 y 1871 se construye, a escasos metros de la basílica, la vía ferroviaria que conecta Estambul con el resto de Europa. Debido al estado actual del edificio, con numerosas grietas, el Departamento de Ingeniería Sísmica de la Universidad de Bogaziçi procedió a estudiar el posible efecto de las vibraciones causadas por el continuo tráfico ferroviario.

Para ello realizaron en 1994 dos campañas de mediciones analógicas de aceleraciones en dos puntos de la basílica para determinar el nivel de las vibraciones en el edificio. De estas mediciones obtienen series de velocidades pico (peak particle velocity).

Las velocidades máximas obtenidas de las dos campañas son de 0.36mm/s y 0.66mm/s respectivamente. Estas se comparan con los valores ofrecidos por la DIN\_4150, que indica que la máxima velocidad pico de la partícula permitida para edificios históricos bajo excitaciones continuas es de 1.33mm/s. Se aprecia claramente que los valores experimentados se encuentran muy por debajo de la frontera con la zona de riesgo para la salud del edificio.

La conclusión del estudio es que el tráfico ferroviario no es el responsable primero del desarrollo de las grietas existentes. Sin embargo, sí es probable que este tráfico haya ayudado a amplificar las grietas su efecto de fatiga.

#### **5.4.3 Estudio del seguimiento de las deformaciones de la mezquita mediante fotogrametría** (Alkis et al., 2001)

Este trabajo realizado por la Universidad Técnica de Yildiz en colaboración con la Universidad Técnica de Darmstadt se centra en dos aspectos de los desplazamientos de la mezquita.

En primer lugar se estudió la inclinación de los ocho pilares y algunos muros mediante fotogrametría. Los resultados que se obtuvieron (apreciables en la Fig.5.18) muestran que gran parte del edificio está inclinado en dirección radial hacia fuera, llegando a tener algún pilar inclinaciones de hasta 35cm y el muro exterior del ábside de hasta 43cm. Concluyen que estas deformaciones son muy antiguas y que podrían haber aparecido en los primeros años de vida de la estructura. También hipotetiza que la inclinación de los pilares P1, P2, y P3 es la causa de la deformación de la cúpula en su lado sur.



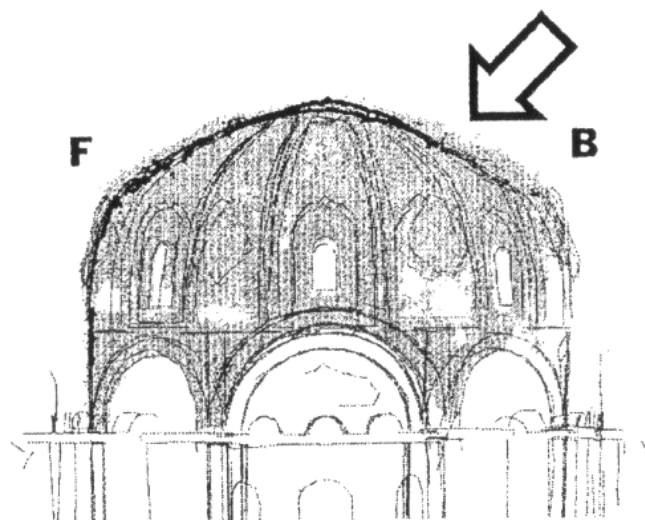


Fig.5.20 Sección esquemática (F-B definidos en Fig.5.18) de la deformación de la cúpula supuestamente provocada por la inclinación de los pilares P1, P2 y P3. (Alkis et al., 2001)

La segunda parte del estudio se centra en la observación de la evolución con el tiempo de tres de las principales grietas que encontramos en la mezquita. Las observaciones muestran como estas grietas han aumentado su abertura aproximadamente en 1 centímetro en los últimos 20 años. Concluyen que la aparición de estas grietas es más reciente y que siguen siendo activas.

La valoración final es que la mayoría de los puntos débiles del edificio son muy antiguos. Y que sucesos como terremotos, vibraciones del tráfico ferroviario o humedades solamente amplifican y ponen a la superficie visible estas zonas dañadas.

Este estudio se orienta hacia el seguimiento de la evolución del edificio en el intervalo de tiempo medido y no pretende concluir en profundidad sobre el origen de los daños.



## Capítulo 6: CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

El primer objetivo del presente estudio es construir un modelo que represente la mezquita. Para ello es necesario lograr una buena reproducción de la geometría y prepararla para el cálculo.

En la construcción del modelo han participado varias aplicaciones informáticas pero el protagonista ha sido el programa de pre y post-proceso GiD, que ya hemos introducido en el capítulo 5.

A continuación se procede a redactar de forma detallada los diferentes pasos seguidos. En cada uno de ellos se expondrá las simplificaciones consideradas, que serán recapituladas en el último apartado del capítulo.

### 6.1 Construcción de la geometría del cuerpo inferior de la mezquita

La geometría se ha obtenido de la información enviada por la Universidad Técnica de Yildiz, Estambul (Arun, 2002); consistente en un conjunto de planos y fotografías. Los planos están conformados básicamente por dos plantas y dos secciones transversales, así como por unos planos de detalle donde se localizan algunas de las grietas más importantes del edificio. A pesar de tener un detalle importante están apenas acotados y todas las distancias y ángulos se han medido a mano des de un din-A3, con la imprecisión que esto conlleva.

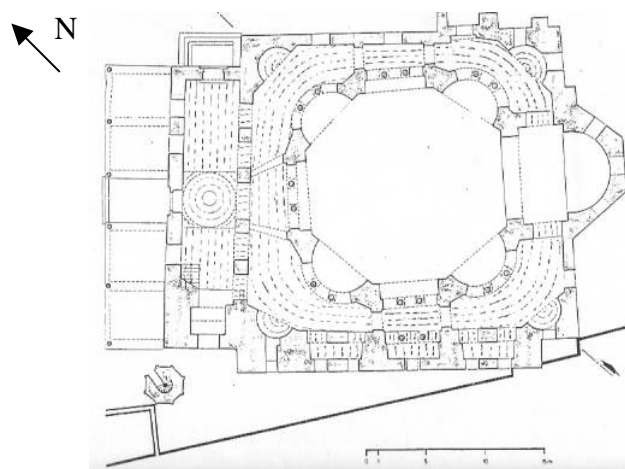


Fig.6.1 Planta baja utilizada para la construcción del modelo (Arun, 2002)

Con el fin de limitar la complejidad del modelo se optó por reducirlo a una cuarta parte de la mezquita e imponer la condición de simetría en sus cortes. Estos



cortes se han trazado como las mediatrices de dos lados del octógono que define la base principal. Se escogió el cuarto Sur por dos motivos:

1. Por ser una de las partes donde habían aparecido más grietas.
2. Por ser donde se tenía más información de cómo es exteriormente.

En este cuarto de mezquita se encuentran los pilares P1 y P2, la mitad izquierda del ábside, los dos tipos de tribunas, los dos tipos de contrafuertes, los distintos espacios auxiliares, etc. Es decir, podemos considerar que se trata de un cuarto representativo de la estructura y, por tanto, válido para obtener resultados significativos en el estudio estructural.

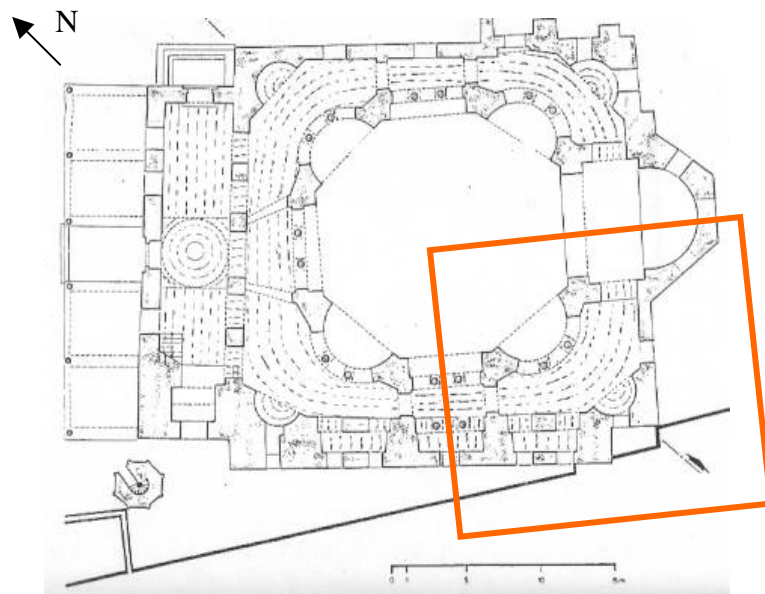


Fig.6.2 Cuarto de mezquita simulado por el modelo construido (elaboración propia)

No se ha considerado la inclinación de los pilares (Fig.5.17) en la geometría del modelo.

Es importante el remarcar que la información de la cual se ha partido no es exhaustiva. Hay lagunas en la definición de algunas bóvedas y el muro exterior. Respecto a las bóvedas, en los planos no queda claro a qué cota se encuentran algunas de ellas y se ha tenido que suponer a partir de la observación de fotografías. En cuanto al exterior del edificio, no existía información detallada sobre la cota y la tipología de algunas de las ventanas ni de los contrafuertes que tenemos en el tejado. Para dibujarlos también se ha tenido que obtener distancias a partir de fotografías. Evidentemente la precisión que se ha podido alcanzar de la observación de fotografías es muy inferior a la que se ha obtenido en la creación del resto del modelo. Esto implica que es probable que existan ciertas diferencias entre el modelo y la mezquita real en estas zonas. Sin embargo no hay que alarmarse, ya que las lagunas de información se refieren a detalles que no alteran de forma importante el comportamiento global de la estructura; sobretodo porque están localizados en la parte exterior del edificio y el posible error de pocos centímetros no interviene en la resistencia del peso de la cúpula.

Para obtener la geometría se han seguido los siguientes pasos:

1. Introducir en Autocad todos los puntos que describen las dos plantas de las cuales hemos partido. Se prefirió esta estrategia por la facilidad de introducir en Autocad puntos nuevos relativos a otros conocidos. Esto nos ahorra el tener que buscar las coordenadas de cada punto, que hubiera sido la forma más sencilla de trazar la geometría directamente en GiD. Como hemos mencionado anteriormente tenemos un cierto error de la lectura de los planos en din-A3. No obstante el error ha sido reducido por la necesidad de cerrar las superficies que forman la planta del edificio. Finalmente, se guardó el archivo en formato “.dxf”.
2. Importar desde el GiD el archivo “.dxf” creado en Autocad con las dos plantas de la basílica.
3. Comenzar a dar cota a los diferentes elementos que forman la primera planta.
4. Unir los puntos con líneas y las líneas con superficies hasta conseguir una réplica de la geometría. Debido a que este paso fue muy laborioso en GiD, se recomienda a futuros autores de este tipo de estudios obtener todos los puntos del dibujo del modelo con Autocad, puesto que les va a suponer un ahorro de tiempo.
5. A continuación se procedió a crear la geometría de la cúpula para unirla con el resto y cerrar la geometría. Este punto será expuesto con más detalle en el siguiente sub-apartado.

Las seis figuras que se muestran a continuación (de Fig.6.3 hasta Fig.6.8) visualizan la secuencia de creación del modelo geométrico del cuerpo inferior del edificio.

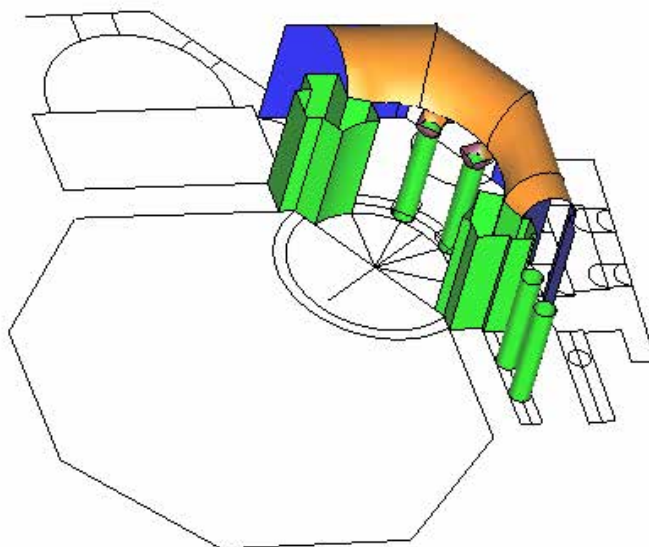


Fig.6.3 Base importada desde Autocad y primeros pasos de construcción. Los colores corresponden a las diferentes capas en que se ha dividido la geometría. Su distribución no responde a criterios estructurales sino a obtener capacidad de visualización.

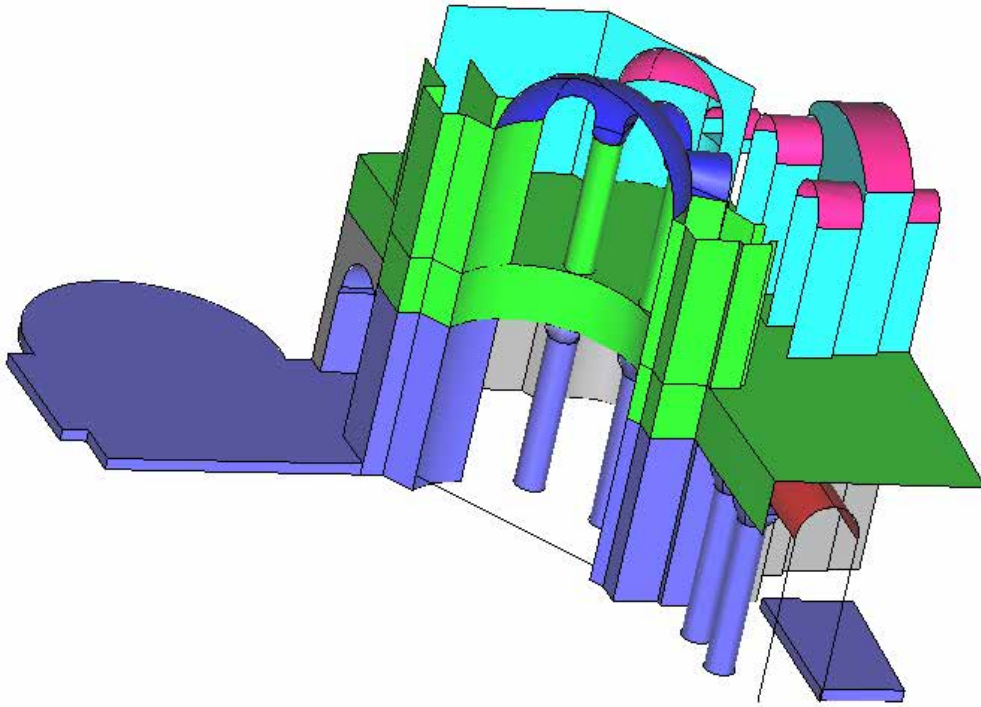


Fig.6.4 Creación geometría planta baja y primer piso (vista interior)

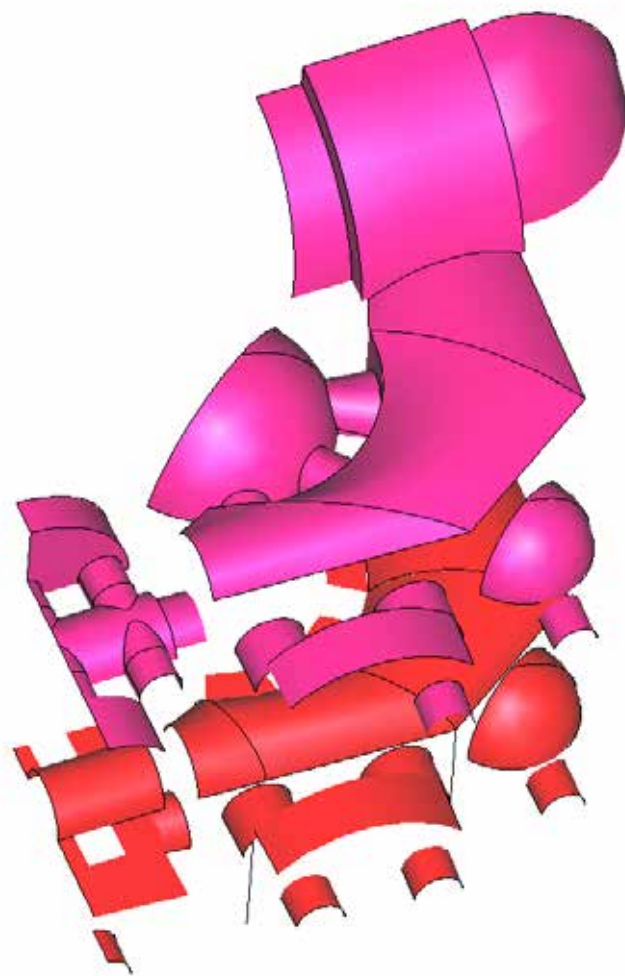


Fig.6.5 Vista superior del conjunto de bóvedas internas que se encuentran en la geometría del cuerpo inferior del edificio

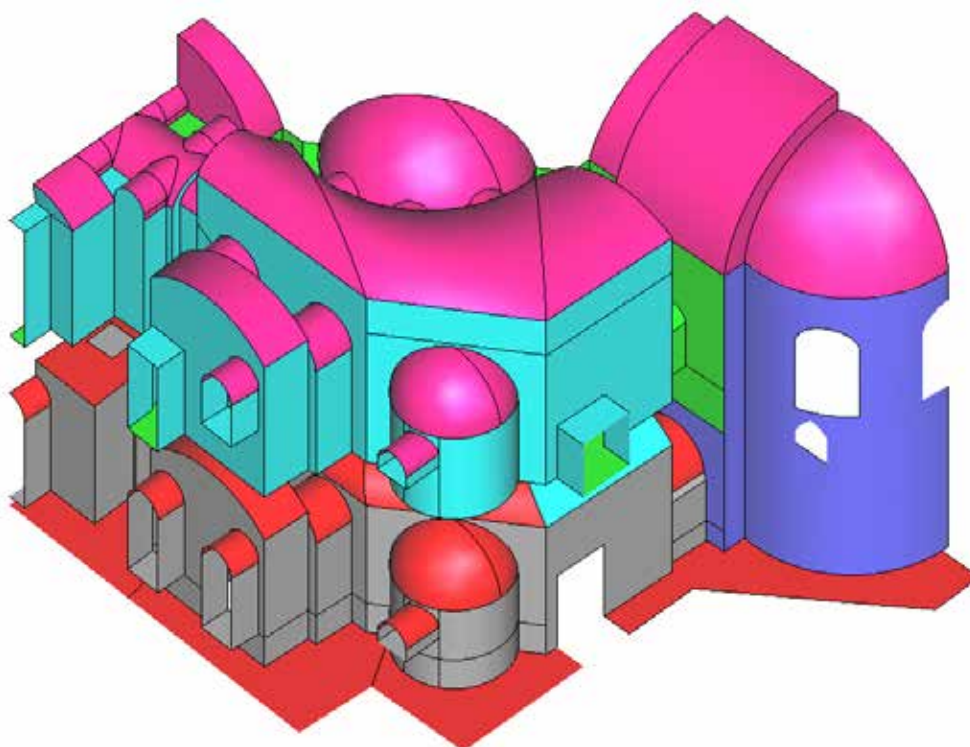


Fig.6.6 Vista exterior (sin muro) de las paredes interiores de la mezquita

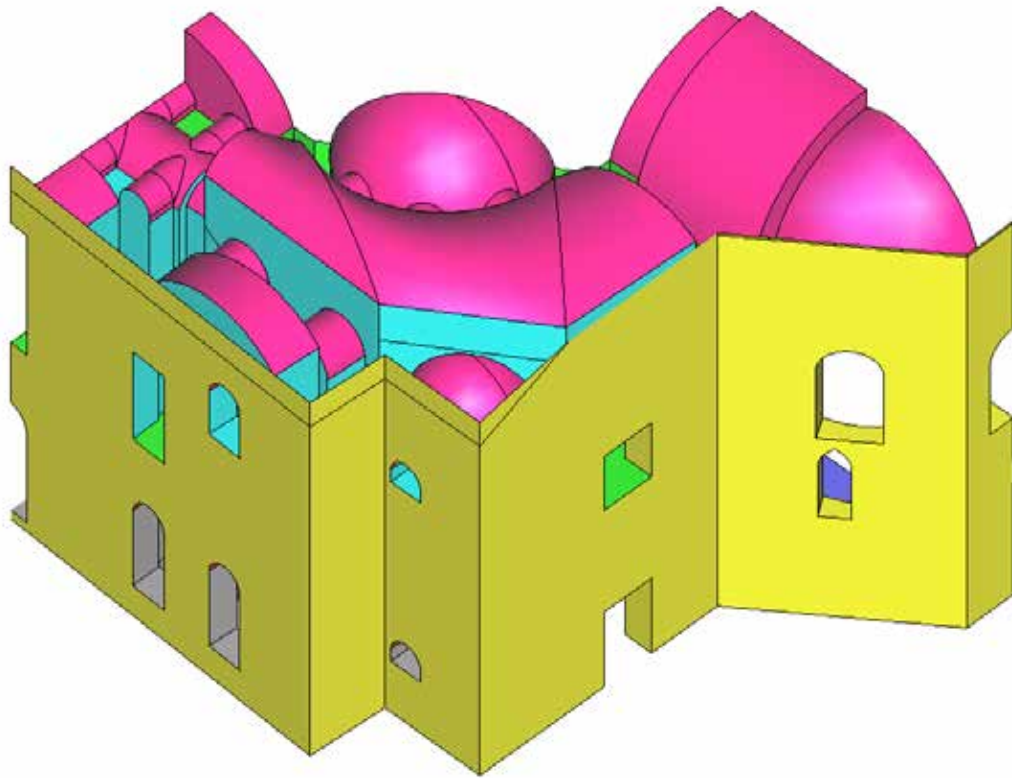


Fig.6.7 Vista exterior-superior (con muro exterior)

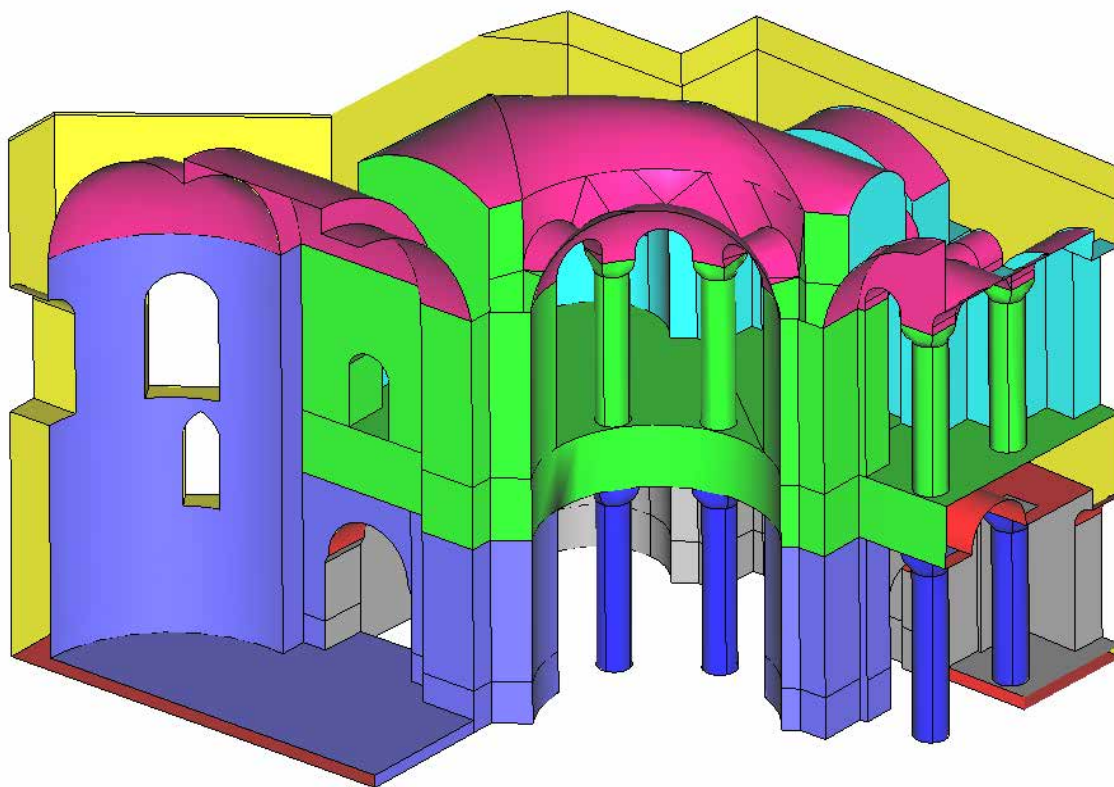


Fig.6.8 Vista interior de la planta baja y primer piso del modelo definitivo de la mezquita



## 6.2 Construcción de la geometría de la cúpula

La información de la cuál se ha partido ha sido básicamente el estudio fotogramétrico de la parte interior de la cúpula realizado por Universidad Técnica de Yildiz. Consiste de un plano donde se describe el interior de la cúpula a partir de curvas de nivel trazadas con precisión de 10 cm. Para visualizar mejor la base de la cúpula el estudio incorpora un total de 56 secciones verticales que describen las 7 directrices principales de cada uno de los ocho lados del octógono de la base. Así mismo también se han utilizado fotografías para cerrar la parte exterior de la cúpula.

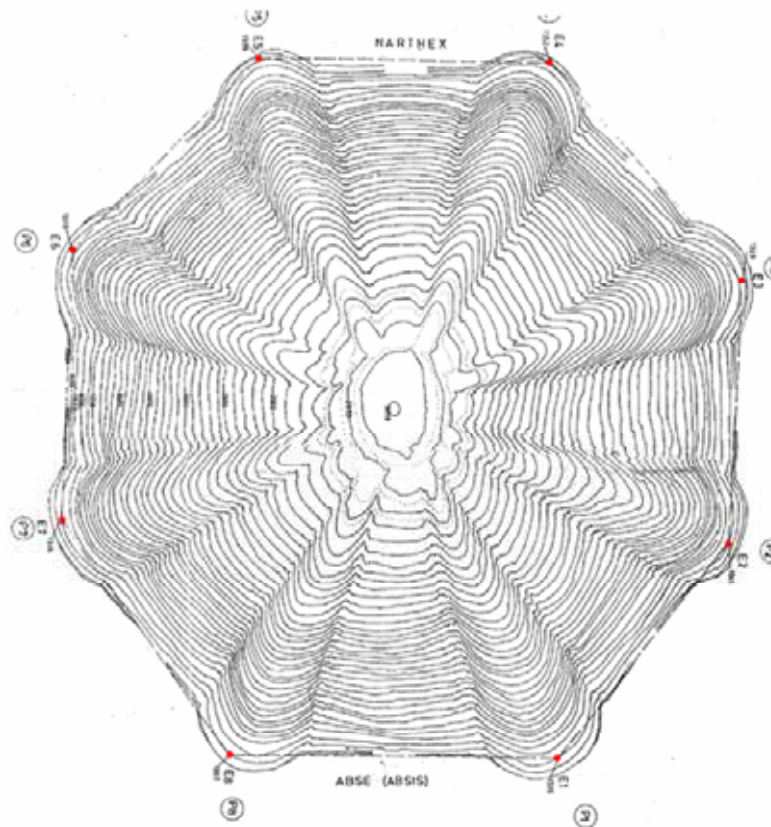


Fig.6.9 Fotogrametría del interior de la cúpula (Arun, 2002)

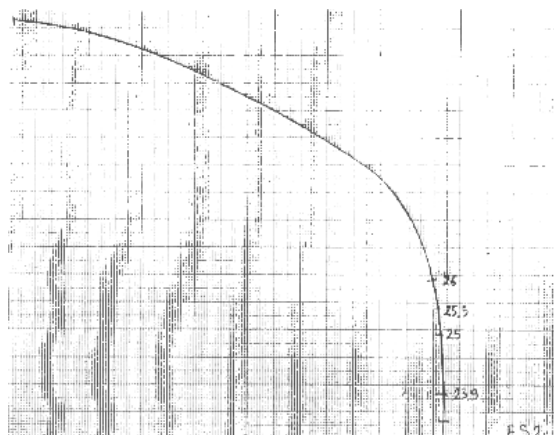


Fig.6.10 Ejemplo de sección vertical del interior de la cúpula (Arun, 2002)

En el único aspecto en que la cúpula modelada difiere de la real es en la superficie exterior. Ésta última tiene unas ondulaciones que no se han contemplado en el modelo por falta de información de su geometría. Las ondulaciones han sido sustituidas por una superficie de revolución. La directriz (ver Fig.6.12) que define la superficie de revolución se ha obtenido de las secciones verticales del edificio (Arun, 2002). Esta imprecisión no es importante ya que la simplificación se mantiene del lado de la seguridad.

En consecuencia y a diferencia del cuerpo inferior del edificio, se ha dispuesto de datos de calidad para modelar la cúpula. Además el proceso de digitalización e unión al resto de la geometría se ha hecho con rigor. En consecuencia podemos considerar que este proceso de creación de la cúpula está exento de error a tener en cuenta.

Los pasos seguidos para obtener la geometría de la cúpula han sido:

1. Digitalizar con exactitud el plano de la fotogrametría. Para ello se consideraron varias opciones pero finalmente se optó por un método laborioso pero robusto y seguro. Se colocó la fotogrametría como fondo de pantalla (“background”) de un dibujo Autocad y se marcó con puntos el contorno de las distintas curvas de nivel.
2. Importar desde el Gid el archivo “.dxf” con los puntos del interior de la cúpula.
3. Unir mediante rectas las distintas curvas de nivel formando una malla. A continuación se unieron las divisiones de esta malla mediante superficies. Este conjunto de superficies describen el contorno definitivo del interior de la cúpula.
4. Unir la geometría de la cúpula con la del resto de la basílica. Debido a que los dos dibujos no estaban en la misma escala se tuvo que adaptar la cúpula. Para definir correctamente la base de la cúpula, es decir, la zona comprendida entre la cúpula y el primer piso de la basílica, se usaron los puntos proporcionados por las secciones verticales que disponíamos.
5. Añadir a la geometría el exterior de la cúpula y dibujar las ventanas. Aquí el dibujo se basa en las secciones verticales y en los detalles que nos proporcionaron las fotografías.
6. Cortamos la geometría para quedarnos solamente con el cuarto Sur.

Las seis figuras que se muestran a continuación (de Fig.6.11 hasta Fig.6.16) visualizan la digitalización de la geometría de la cúpula y el resultado de su unión con el cuerpo inferior del edificio.



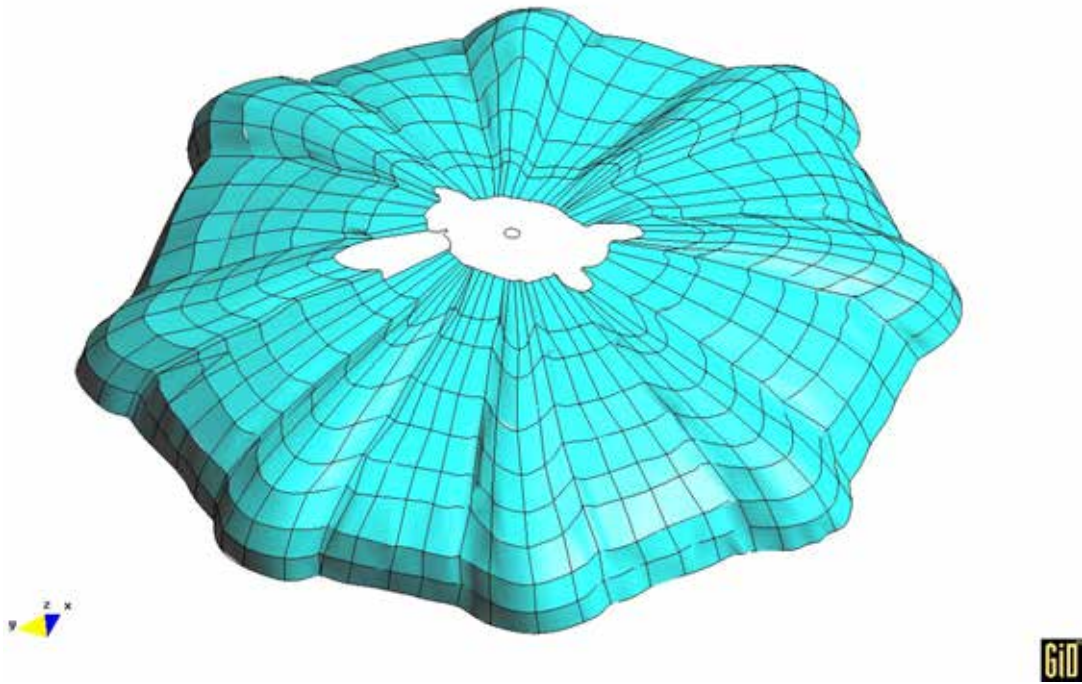


Fig.6.11 Modelo GiD del interior de la cúpula

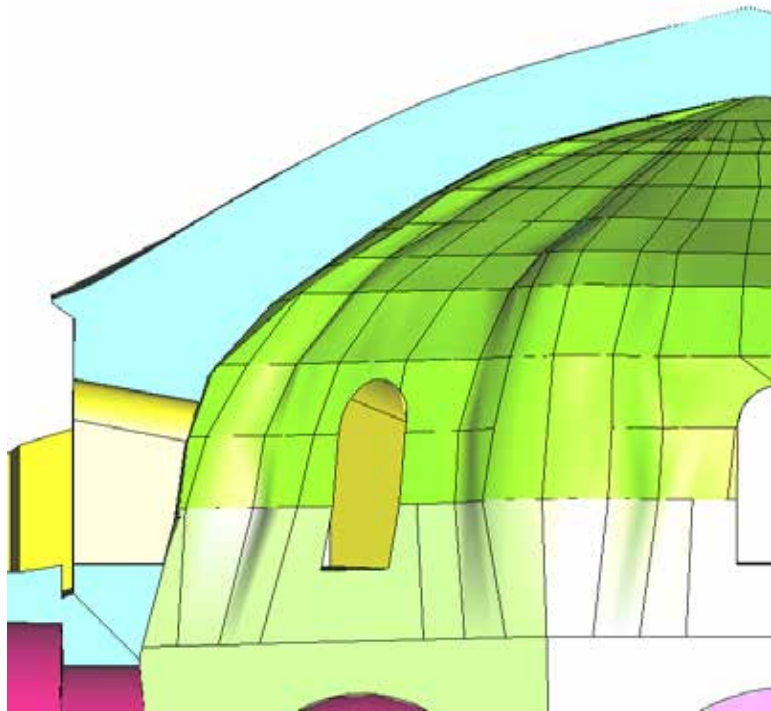


Fig.6.12 Vista en tres dimensiones de una sección vertical de la cúpula modelada. Se aprecia la directriz que define el contorno exterior de la cúpula

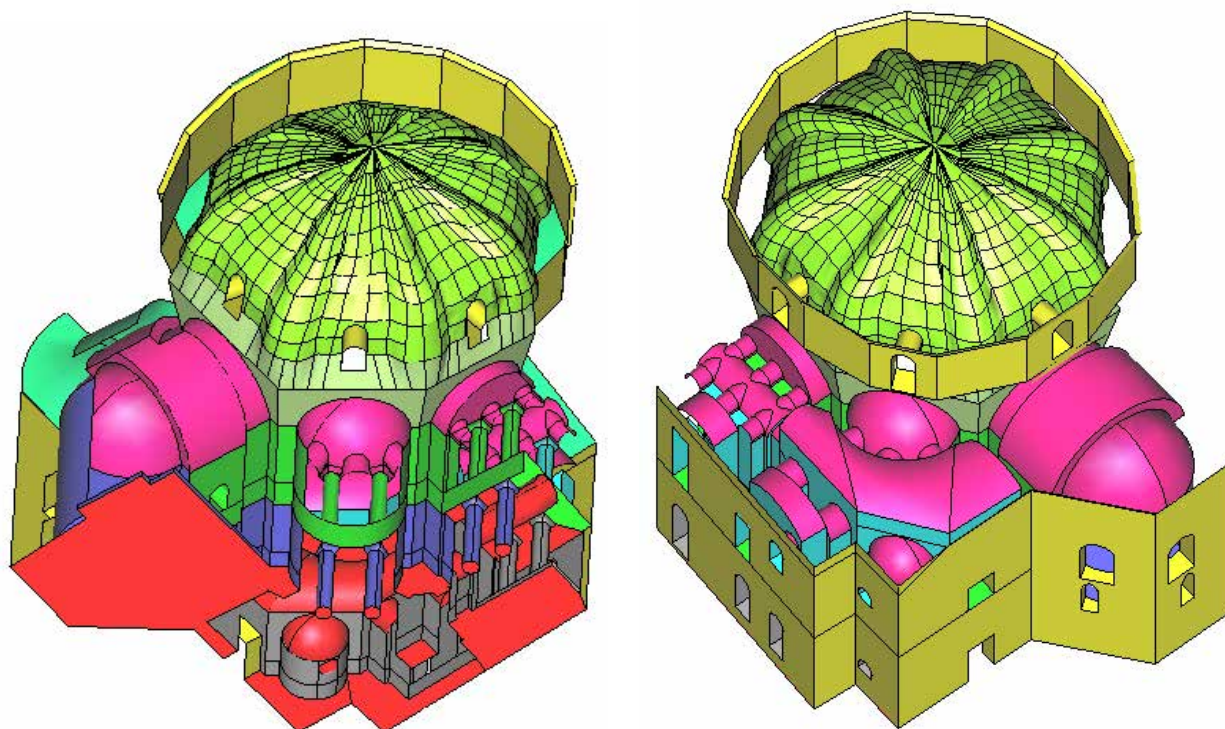


Fig. 6.13 Vista interior-inferior y exterior-cenital del modelo con cúpula pero sin tejado (a falta de recortar la cúpula a la cuarta parte del estudio)

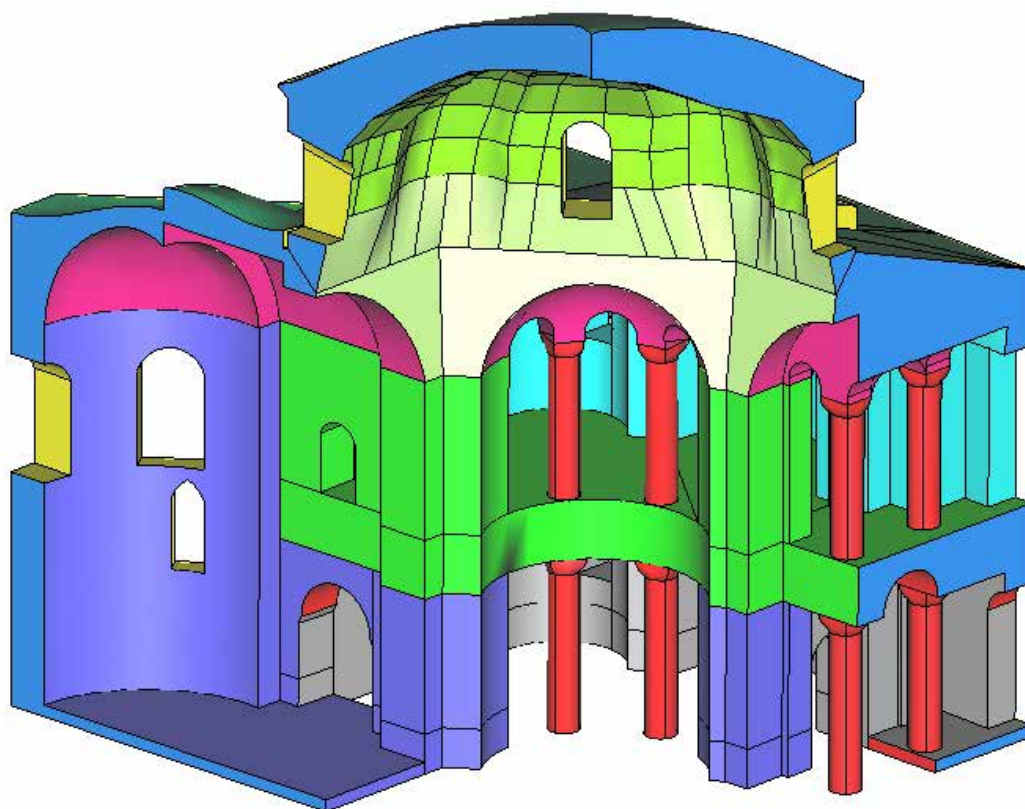


Fig.6.14 Vista interior del modelo definitivo de la mezquita

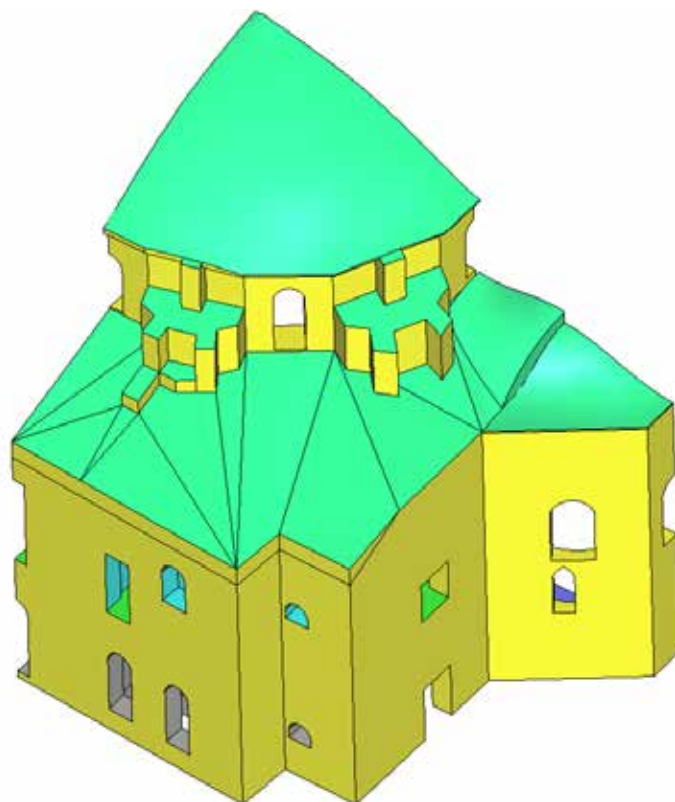


Fig.6.15 Vista exterior del modelo definitivo

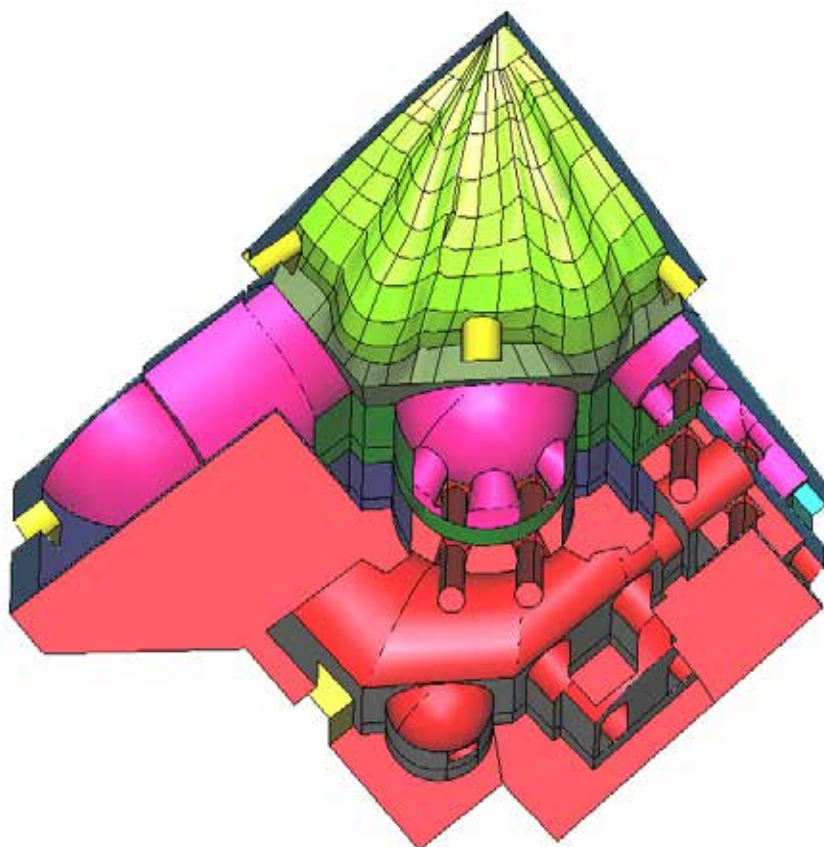


Fig.6.16 Vista inferior del modelo definitivo



## 6.3 Estudio de los materiales

### 6.3.1 Disposición de materiales

Como se ha visto en el capítulo 4 el material protagonista de la Pequeña Santa Sofía es la mampostería. A excepción de las columnas y la mitad inferior de los pilares el resto de la estructura está construida de este material. Sin embargo, existen diferencias entre las mamposterías usadas para los distintos elementos que conforman la estructura. Estas diferencias son provocadas principalmente por el tipo de aparejo y por el uso en los muros y pilares de cordones de sillería para reforzar la resistencia. Por tanto si fuéramos estrictos se debería hablar de que son varios, cuatro o cinco, las fábricas que conforman los elementos de la basílica.

A pesar de tener conocimiento de esta diferenciación, en el modelo se ha asumido la simplificación de tratar todas las mamposterías como la misma. Se debe a dos motivos: en primer lugar a que no existe el estudio de campo que permita diferenciar con precisión cuales son las propiedades de cada una de las mamposterías; en segundo lugar se supone que el no considerar esta diferenciación no producirá valores muy distintos en las resistencias.

Una de las consideraciones importantes en cuanto a la definición de los materiales del modelo es la que se ha hecho con los materiales de relleno de las bóvedas. Debido a la total inexistencia de información sobre este aspecto se ha considerado que los rellenos están realizados con la misma mampostería que el resto de la estructura. Otras posibilidades hubieran sido suponer que los rellenos están formados por materiales de peor calidad o que los rellenos están vacíos gracias a unos refuerzos estructurales. Sin embargo, nuestra opción está apoyada en la opinión de la Profesora Arun (Universidad Técnica de Yildiz) y hace mucho más factible la creación del modelo.

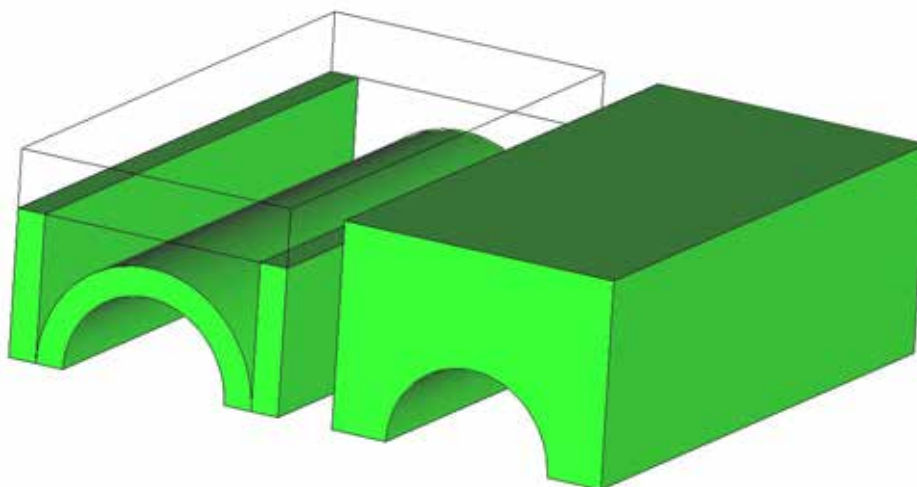


Fig.6.17 Bóveda sin relleno y bóveda con relleno (en modelo análogo al utilizado)

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores el modelo se ha simplificado hasta el uso de solamente tres materiales:

- **Piedra monolítica:** material pétreo usado en las columnas
- **Sillería de piedra:** material pétreo usado en la mitad inferior de los pilares
- **Obra de fábrica de ladrillo:** para todos los elementos excepto las columnas y la mitad inferior de los pilares

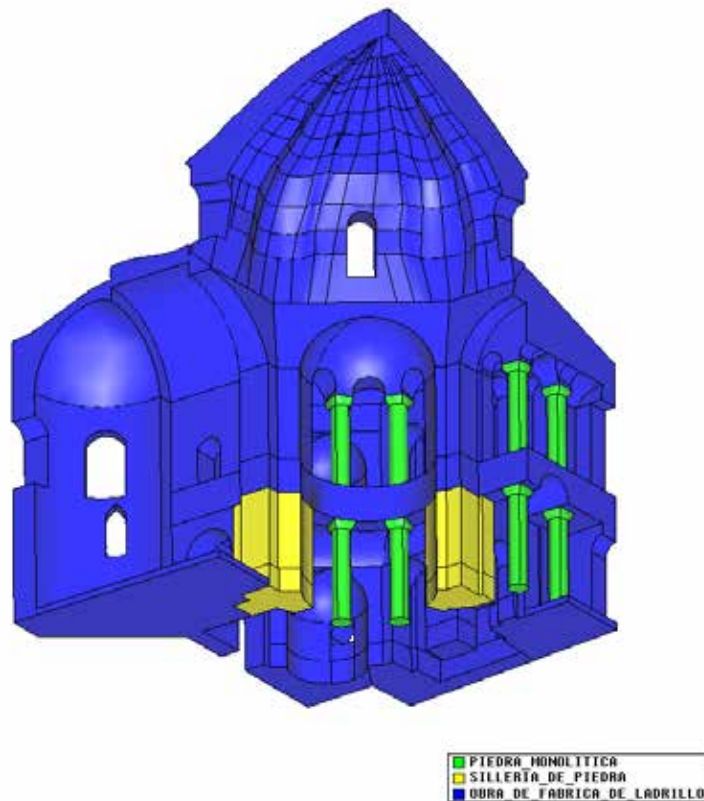


Fig.6.18 Distribución de materiales en el modelo

Después de decidir la distribución de materiales aplicada al modelo se procedió al estudio para determinar sus propiedades. Empezaremos por las propiedades de la obra de fábrica de ladrillo y seguiremos con las de la piedra de las columnas y los pilares.

### 6.3.2 Características de la Obra de fábrica de ladrillo:

La mampostería es una obra de fábrica formada por franjas de mortero y ladrillo. En el caso de las construcciones bizantinas realizadas en Constantinopla la relación de espesores de estas franjas es de 5cm de mortero por 3,5 a 5cm de ladrillo. Este valor de referencia observado por Osterhout se cumple en nuestra basílica, habiendo en ella una relación de 5cm por 5cm (Arun, 2002). Además en algunos elementos de la estructura la mampostería está reforzada por franjas de piedra. Como ya hemos mencionado

anteriormente estos refuerzos no se consideraran, dejando el modelo del lado de la seguridad.

Para determinar las propiedades del conjunto de la mampostería se usan los valores de las propiedades de sus elementos. Estos valores se combinan siguiendo las recomendaciones de la Normativa de Proyectos de Estructuras de Fábrica Eurocódigo-6. Se presentan a continuación las propiedades físicas y mecánicas de cada uno de los elementos calculados experimentalmente:

	densidad	módulo elástico		resistencia a compresión	
		invierno	verano	invierno	verano
	[kg/m3]	[N/mm2]	[N/mm2]	[N/mm2]	[N/mm2]
<b>Ladrillo</b>	2540	9029	8605	11,89	11,77
<b>Mortero</b>	-	8860	7948	5,24	5,21
<b>Piedra tipo 1</b>	2590	13727	15699	8,31	8,85
<b>Piedra tipo 2</b>	2780	55462	55332	28,44	31,15
<b>Piedra tipo 3</b>	2560	14923	17233	10,92	11,77

Tabla 6.1 Propiedades física de materiales presentes en el edificio (Arun, 2002)

La resistencia a compresión simple de la mampostería depende de la resistencia de cada uno de sus componentes además de sus relaciones geométricas, es decir, relación canto ancho de los ladrillos con el espesor de las juntas. Estas distintas variables que intervienen quedan resumidas en la fórmula 3.1 del eurocódigo-6 para fábricas con mortero ordinario:

$$f_k = K \times f_b^{0,65} \times f_m^{0,25} \quad (N/mm^2) \quad [6.1]$$

- $K = 0,6 N/mm^2$  ya que nuestras piezas son del grupo 1 por tratarse de un ladrillo macizo.
- $f_b = 11.8 N/mm^2$  es la resistencia característica a compresión de los ladrillos.
- $f_m = 5.2 N/mm^2$  es la resistencia característica a compresión especificada del mortero.

$$f_k = 4,5 N/mm^2 \text{ resistencia a compresión de la mampostería}$$

El Eurocódigo-6 aconseja escoger como valor de referencia del módulo de Young de la obra de fábrica el correspondiente a 1000 veces el valor de la resistencia a compresión. En nuestro caso se traduce en:

$$E = 1000 * f_k = 4500 N/mm^2 \text{ módulo de Young de la mampostería} \quad [6.2]$$

La densidad y el coeficiente de Poisson escogidos corresponden a valores típicos para cualquier obra de fábrica. Para la **densidad** se ha tomado **1800 kg/m<sup>3</sup>** y el **coeficiente de Poisson de 0,2**.

La resistencia a tracción de la obra de fábrica depende esencialmente de la resistencia a tracción de las superficies de contacto entre los materiales que la componen. Como el edificio objeto de estudio es muy antiguo y ha estado sometido

bajo numerosas sollicitaciones sísmicas y térmicas la resistencia a tracción se ha considerado un poco superior al 5% de la resistencia a compresión:

$$f_{tK} = 0.25 \text{ N/mm}^2 \text{ resistencia a tracción de la mampostería} \quad [6.3]$$

Para realizar el cálculo no lineal con el modelo constitutivo de daño se han definido las energías de fractura. Como se ha expuesto en el apartado 4.4.2 debemos dar un valor casi infinito a las energías de fractura para conseguir un modelo constitutivo sin límite de esfuerzo por deformación excesiva a tracción y a compresión. El único sentido de esta hipótesis reside en facilitar la convergencia numérica. En futuros estudios se sugiere tomar valores experimentales de la energía de fracturo o bien realizar el correspondiente análisis paramétrico.

$$\text{Energía de fractura a compresión } 1,0e+10 \text{ Joules} \approx \infty$$

La energía de fractura a tracción se ha obtenido según la fórmula [4.17]:

$$\text{Energía de fractura a tracción } 3,09e+07 \text{ Joules} \approx \infty$$

### 6.3.3 Características de la piedra de las columnas y los pilares

Las columnas y la mitad inferior de los pilares son los únicos elementos que no son de mampostería. Es evidente que estos dos tipos de elementos del edificio no están contruidos de igual forma ya que las columnas son macizas y los pilares de sillares de piedra. Esto dotaría, en principio, de un mayor módulo de Young a las columnas que no a los pilares.

Sin embargo no tenemos información sobre qué tipo de piedra tenemos en cada lugar. Las características físicas presentadas en la Tabla 6.1 contienen tres tipos de piedra distinta pero son piedras utilizadas para reforzar la mampostería y no las de las columnas o los sillares de los pilares. Por esta falta de información y por considerar la rigidez adicional que adquiere la sillería debido al proceso constructivo se han asignado las mismas características a los pilares y a las columnas.

Ante el dilema de tener que decidirse por unas características se ha contrastado la media de las tres piedras de la Tabla 6.1 con valores de referencia propuestos en Huerta, S. (1990). Los valores considerados son:

$$\text{Densidad} = 2500 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Coeficiente de Poisson} = 0,2$$

$$\text{Resistencia a compresión} = f_{ck} = 30 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Módulo elástico según fórmula [6.2]: } E = 1000 * f_{ck} = 30000 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Resistencia a tracción de un 7\% de la de compresión: } f_{tk} = 2 \text{ N/mm}^2$$

Los criterios seguidos para definir el valor de las energías de fractura de las piedras han sido los mismos que los considerados para definir las energías de fractura de la obra de fábrica de ladrillo.

**Energía de fractura a compresión = 1,0e+10 Joules**

**Energía de fractura a tracción = 4,44e+07 Joules**

Resumen de los valores que caracterizan los materiales usados en el modelo:

		Fábrica de ladrillo	Piedra pilares	Piedra columnas
Densidad	[kg/m <sup>3</sup> ]	1800	2500	2500
Módulo elástico	[N/mm <sup>2</sup> ]	4500	30000	30000
Resistencia a compresión	[N/mm <sup>2</sup> ]	4,5	30	30
Resistencia a tracción	[N/mm <sup>2</sup> ]	0,25	2	2
Coefficiente de Poisson	[ - ]	0,2	0,2	0,2
Energía de fractura a compresión	[Joules]	1,00 e+10	1,00 e+10	1,00 e+10
Energía de fractura a tracción	[Joules]	3,09 e+07	4,44 e+07	4,44 e+07

Tabla 6.2 Propiedades físicas asignadas a los dos materiales del modelo

## 6.4 Condiciones de Contorno

Como ya se ha comentado en el apartado anterior el modelo está formado por sólo una cuarta parte del edificio. Para que esta simplificación no altere el comportamiento de la estructura se ha impuesto la condición de simetría en los planos de corte. Esta condición implica que no se permite el desplazamiento de ningún punto de este plano en su dirección perpendicular.

Además se ha impuesto el movimiento impedido en las tres direcciones del espacio en la base de la basílica. Es decir, se ha supuesto que la cimentación es suficiente para no permitir el giro de sus elementos.

Más adelante, para profundizar en el estudio, se han realizado cálculos suponiendo que ha habido unos asentamientos diferenciales. Éstos se han modelado imponiendo un pequeño desplazamiento vertical en los puntos que asentaban.

También se han realizado cálculos que simulasen el efecto de un evento sísmico. Como la cantidad de sismos sufridos por el edificio es inmensa, se ha realizado el estudio no sólo en una dirección sino que escogiendo dos direcciones ortogonales que abarcasen todo el plano horizontal. Es evidente que cuando el esfuerzo es en una



determinada dirección todo el edificio se deforma en ese sentido. En consecuencia, se han quitado para tal caso las condiciones de simetría que lo impidiesen. El dilema ha aparecido al decidir qué condición de contorno debería sustituir la simetría. La antimetría no es correcta porque estamos realizando cálculos altamente no-lineales y la libertad de movimientos es falsa porque el cuadrante de edificio contiguo transmite sustentación al que estamos analizando. La condición de contorno exacta se encuentra entre estas dos opciones. Al final se ha considerado la libertad de movimientos a pesar de tener el conocimiento de que se está cometiendo una imprecisión importante que limita la validez de los resultados.

La tabla 6.3 incluye un cuadro resumen de las condiciones de contorno consideradas:

Problema	situación	tipo de condición	condición x	condición y	condición z
Estándar	Plano de corte perpendicular al eje x	simetría	$x = 0$	libre	libre
	Plano de corte perpendicular al eje y	simetría	libre	$y = 0$	libre
	Base	empotramiento	$x = 0$	$y = 0$	$z = 0$
asentamiento diferencial	Plano de corte perpendicular al eje x	simetría	$x = 0$	libre	libre
	Plano de corte perpendicular al eje y	simetría	libre	$y = 0$	libre
	Base	empotramiento	$x = 0$	$y = 0$	$z = 0$
		asentamiento	$x = 0$	$y = 0$	$z = \delta$
solicitud sismica en dirección x	Plano de corte perpendicular al eje x	libre	libre	libre	libre
	Plano de corte perpendicular al eje y	simetría	libre	$y = 0$	libre
	Base	empotramiento	$x = 0$	$y = 0$	$z = 0$

Tabla 6.3 Resumen de condiciones de contorno consideradas en el modelo

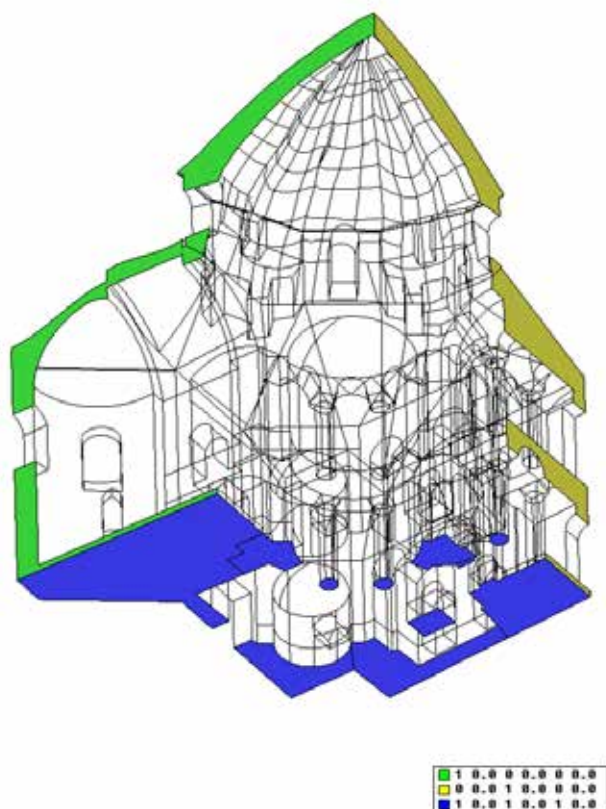


Fig.6.19 Superficies con sus respectivas condiciones de contorno en el Problema Estándar

## 6.5 Mallado

Como el modelo es en 3 dimensiones la malla que se usa es del tipo volumétrica. Dentro de este grupo se encuentran dos tipos de elementos generadores: el tetraedro y el hexaedro. A pesar de que el hexaedro es un elemento mucho más eficaz a nivel de cálculo, no existe una aplicación que genere una malla hexaédrica en una geometría complicada como la nuestra. Por contra el tetraedro, elemento clásico en la generación de mallas volumétricas, ofrece una adaptabilidad excelente en geometrías irregulares y el GiD posee generadores potentes para mallas de este tipo. El evidente ahorro de tiempo que supone poder generar la malla de forma automática es el motivo principal de que la malla escogida sea tetraédrica.

Existen dos consideraciones que determinan el tamaño de mallado que se escoge para un modelo. El equilibrio entre ellas nos dará la malla óptima para el cálculo.

El primer aspecto es que cuanto más fina es la malla mejor precisión se obtiene en los resultados. Según esta variable la malla se crearía con el tamaño más pequeño posible.

En segundo lugar y no por ello menos importante, tenemos el coste, en tiempo de cálculo, que supone tener una cierta malla. Cuanto más fina sea la malla más tiempo de cálculo será necesario para obtener la solución. En este sentido se tenderá a una malla con el menor número de elementos.

Por tanto el criterio final para escoger el tamaño del mallado consiste en buscar un equilibrio entre estas dos consideraciones; es decir, encontrar una malla que sea lo suficientemente fina para conseguir soluciones válidas y que, a la vez, no exceda el máximo número de elementos que hace el cálculo viable desde el punto de vista del

tiempo de cálculo. Para imponer este criterio en nuestro modelo se han considerado las siguientes recomendaciones:

- Para que la solución sea aceptable es necesario que todos los espesores de la geometría estén formados por un mínimo de 4 tetraedros. De esta forma se garantiza que el modelo representa adecuadamente los momentos flectores. Para cumplir esta recomendación en nuestra basílica se ha reducido el tamaño del mallado de las columnas, que son los elementos de menor espesor.
- Para que el modelo sea viable en cuanto a coste de cálculo los tetraedros de la malla no deben exceder los 300000. Siendo bueno que este valor se reduzca.

En el caso del presente modelo se partió de una malla del tipo unstructured de 50cm de lado de tetraedro. Se vio que con esta malla homogénea quedaban elementos mal definidos y se procedió a refinar en las zonas necesarias. Primero se pasó el tamaño del tetraedro a 10cm en las 8 columnas que tiene el modelo. Con esta operación se consiguió que dispusieran de un espesor adecuado de elementos. También se refinó la malla en las mitades inferiores de los pilares para simular correctamente sus probables concentraciones de tensiones. En ellos se pasó a una malla de 40cm de lado de tetraedro. Con todo ello se obtuvo una malla de 230mil elementos. Las características de la malla quedan resumidas en la tabla 6.4.

La malla resultante puede observarse en las cinco figuras comprendidas entre la Fig.6.20 y la Fig.6.24

Tipo de elemento	tetraedro	
Número de elementos	230mil	
Tamaño lado tetraedro	general	0,5 m
	refinado en columnas	0,1 m
	refinado en pilares	0,4 m

Tabla 6.4 Esquema del mallado utilizado en el modelo



Fig.6.20 Contorno de la malla generada (vista interior)

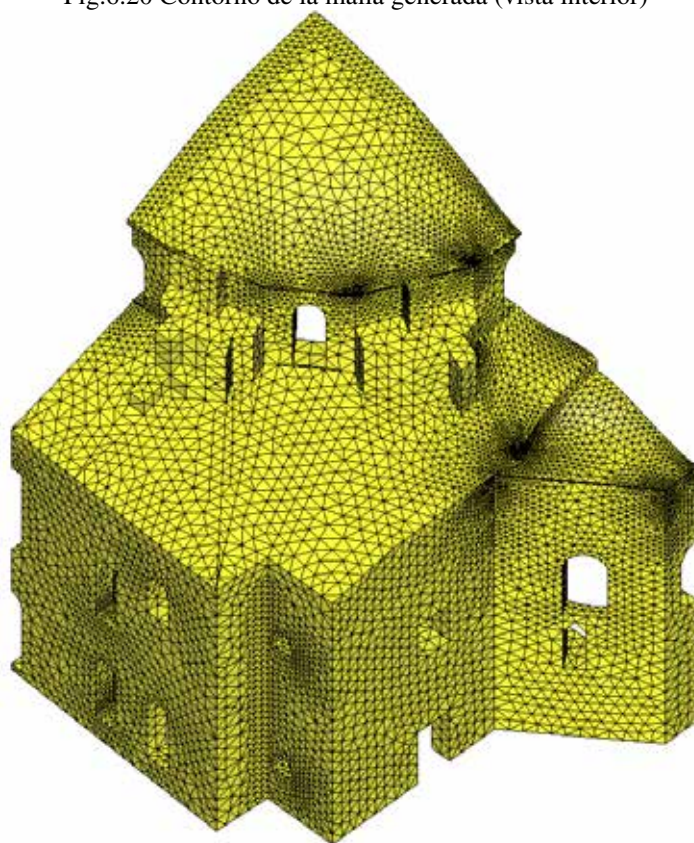


Fig.6.21 Contorno de la malla generada (vista exterior)



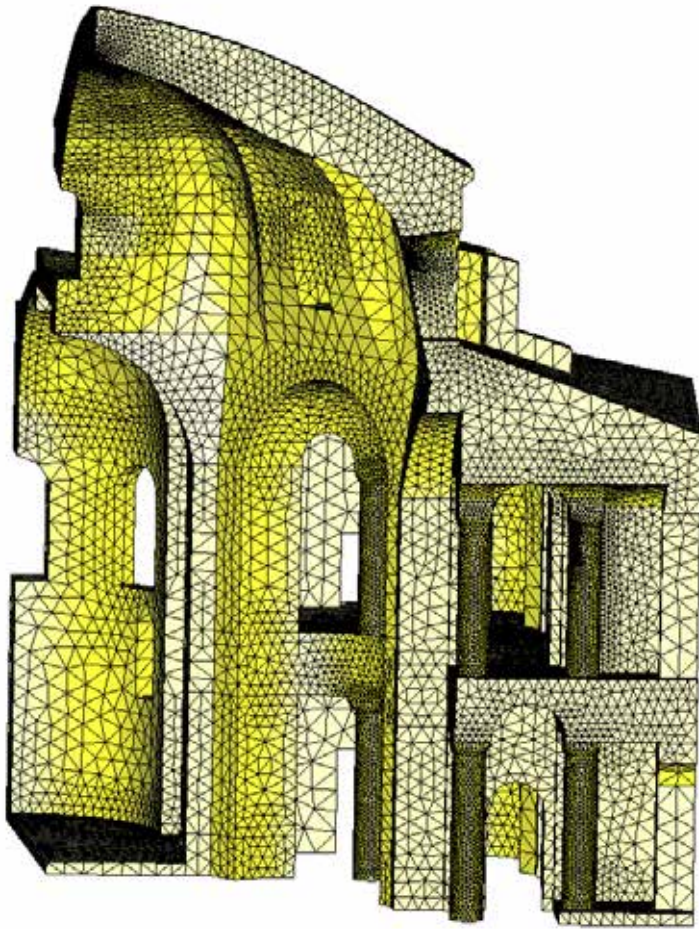


Fig.6.22 Densidad del mallado en la sección vertical que limita la geometría del modelo por el lado sud-oeste (pilar P2)

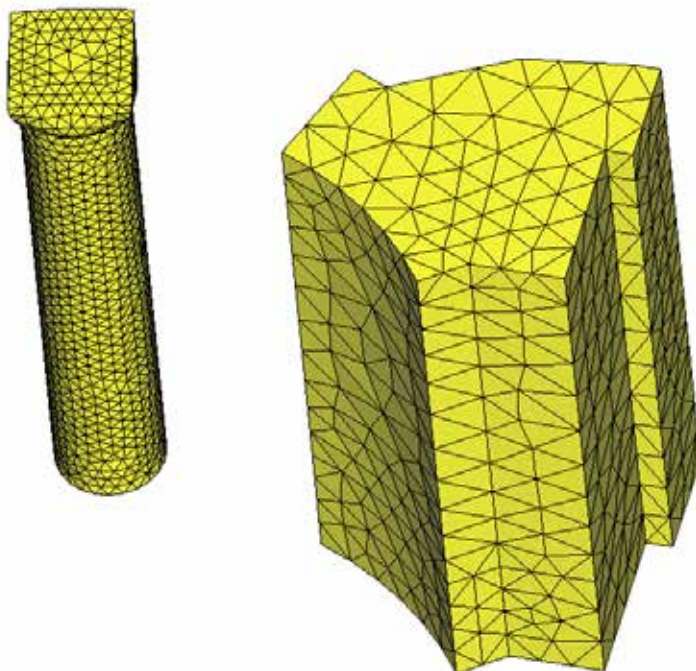


Fig.6.23 Densidad del mallado en columnas y mitad inferior de los pilares

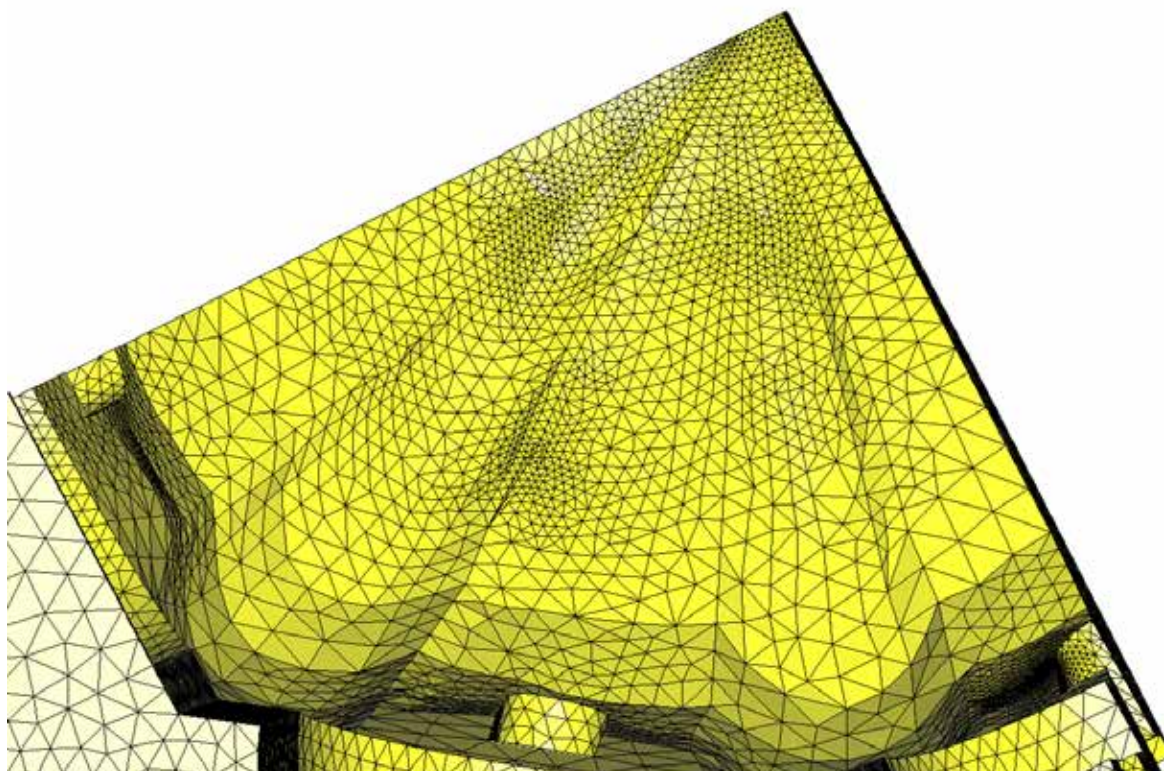


Fig.6.24 Detalle del contorno de la malla generada en el interior de la cúpula

## 6.6 Resumen de las hipótesis y simplificaciones del modelo

En este capítulo se han expuesto las hipótesis y los razonamientos utilizados para construir el modelo que se va a utilizar en los cálculos.

La lista que procede se ha realizado para facilitar la identificación de la totalidad de hipótesis consideradas.

- Se han medido a mano a partir de un plano en din-A3 las distancias para definir geometría.
- No se ha considerado la actual inclinación de los pilares, por falta de información.
- Se ha partido de una información no exhaustiva, con lagunas en la definición de las bóvedas, el muro exterior y el contorno exterior de la cúpula.
- Se ha reducido el modelo a una cuarta parte del edificio, suponiendo un comportamiento simétrico. El motivo ha sido simplificar los cálculos.
- Se han tratado todas las mamposterías de la basílica como una sola, omitiendo las diferencias que puedan existir entre las de los muros exteriores, la de los pilares y la de las bóvedas. La causa es la falta de información sobre las características de cada tipo.
- Se ha supuesto que el relleno de las bóvedas y pilares era macizo y de la misma mampostería.
- Se han calculado las propiedades físicas de la mampostería a partir de la de sus componentes.
- Se han supuesto las propiedades físicas de la piedra a partir de valores de referencia, ya que no se tenía información sobre las piedras de las columnas ni de las mitades inferiores de los pilares.
- Se ha considerado una cimentación empotrada.



## Capítulo 7: CÁLCULOS Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En este capítulo se sintetiza el análisis realizado del edificio bajo distintas solicitaciones. En todos los casos se parte del mismo modelo con la misma geometría y los mismos materiales (descrito en Capítulo 6). Las modificaciones introducidas en cada caso se describen oportunamente.

En el apartado 5.3 se ha descrito el estado de daños del edificio y se han mostrado unos esquemas en planta donde se localizaban las grietas del interior del edificio (Fig.5.15 y Fig.5.16). En el cuadrante de mezquita que se ha modelado tenemos grietas tanto en la cúpula como en las bóvedas delanteras y las bóvedas de los pasillos auxiliares. El análisis de resultados que se presenta a continuación se ha utilizado para desarrollar una interpretación del posible origen de las fisuras que se consideran más importantes. Éstas se encuentran en la cúpula y las bóvedas delanteras, dejando a nivel secundario las grietas de los pasillos auxiliares. En la Fig.7.1 se aprecia un esquema tridimensional del modelo con las grietas que son objeto de estudio.

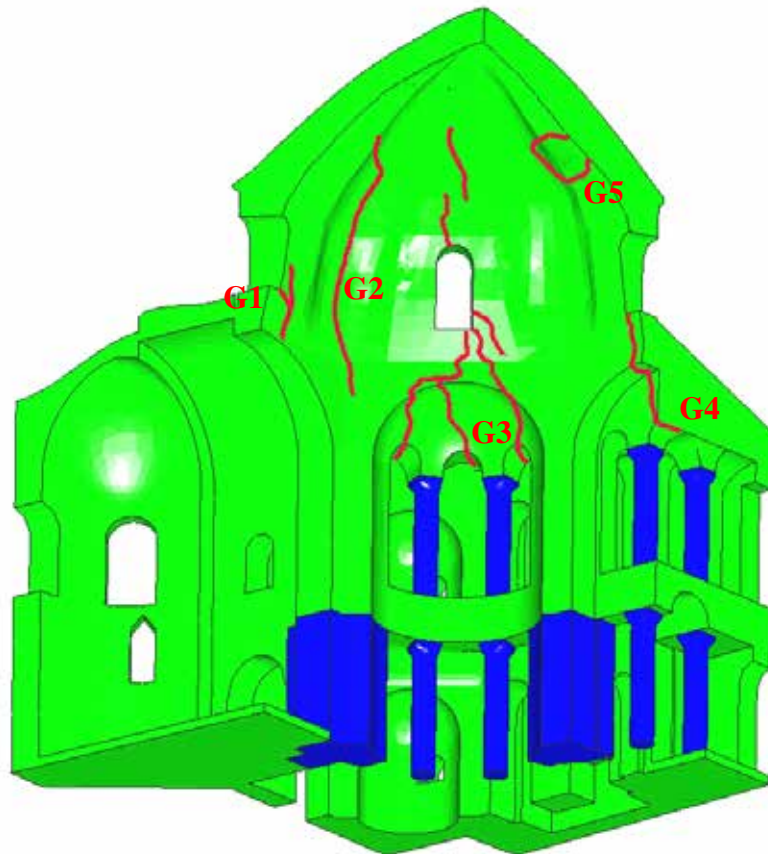


Fig.7.1 Esquema con las principales grietas existentes en el cuadrante de mezquita estudiado (elaboración propia)

## 7.1 Estudio del efecto de la solicitación del Peso Propio

Este primer caso de estudio corresponde a la situación inicial de la mezquita recién construida.

Podría suponerse que las fisuras existentes se deban al efecto del peso propio combinado con el cansancio a muy largo plazo del material. Es decir, que los distintos sucesos sufridos por el edificio a lo largo de su historia hayan amplificado los arcos de descarga que propicia la geometría. Según esta hipótesis las distintas grietas del edificio serían muy antiguas y no necesariamente tendrían que ser visibles en la superficie (al ser cubiertas por el recubrimiento). A lo largo del recorrido de las distintas grietas tendríamos vías de penetración de la humedad y planos que permitirían pequeños desplazamientos en fenómenos sísmicos, que romperían los rígidos recubrimientos de cal o mortero dando la sensación de que las grietas que se forman son nuevas.

En los resultados se han buscado los arcos de descarga que tienden a formarse en función de la propia geometría y se ha visto si las tensiones que allí se producen podrían ser el origen de la formación de las grietas.

### 7.1.1 Condiciones de apoyo y carga

Sólo se considera la solicitación del peso propio y se supone que la cimentación resiste perfectamente (es empotrada y no existen asentamientos diferenciales). En la Tabla 7.1 y en la Fig.7.2 se aprecian un resumen y el esquema de las condiciones de contorno consideradas.

<b>Nombre</b>	Estudio bajo Peso Propio	
<b>Solicitaciones</b>	Peso Propio	
<b>Condiciones de Contorno</b>	Plano de corte perpendicular al eje x	simetría
	Plano de corte perpendicular al eje y	simetría
	Base	empotramiento

Tabla 7.1 Resumen condiciones consideradas en caso de *Peso Propio*

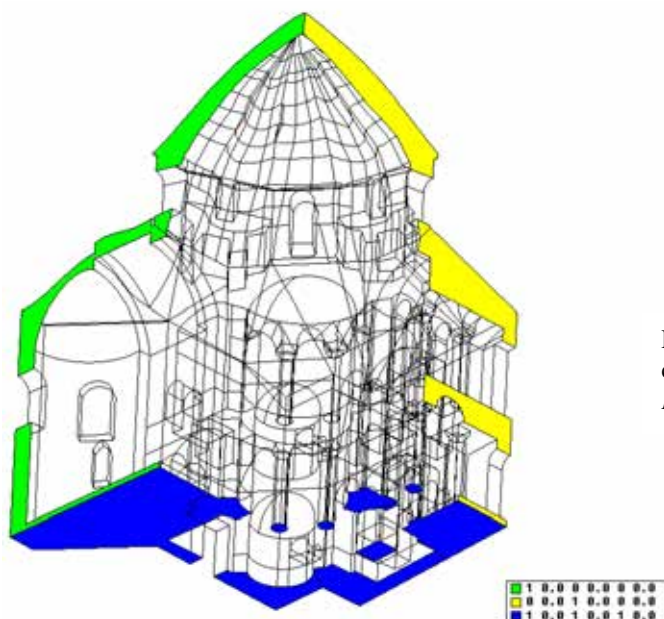


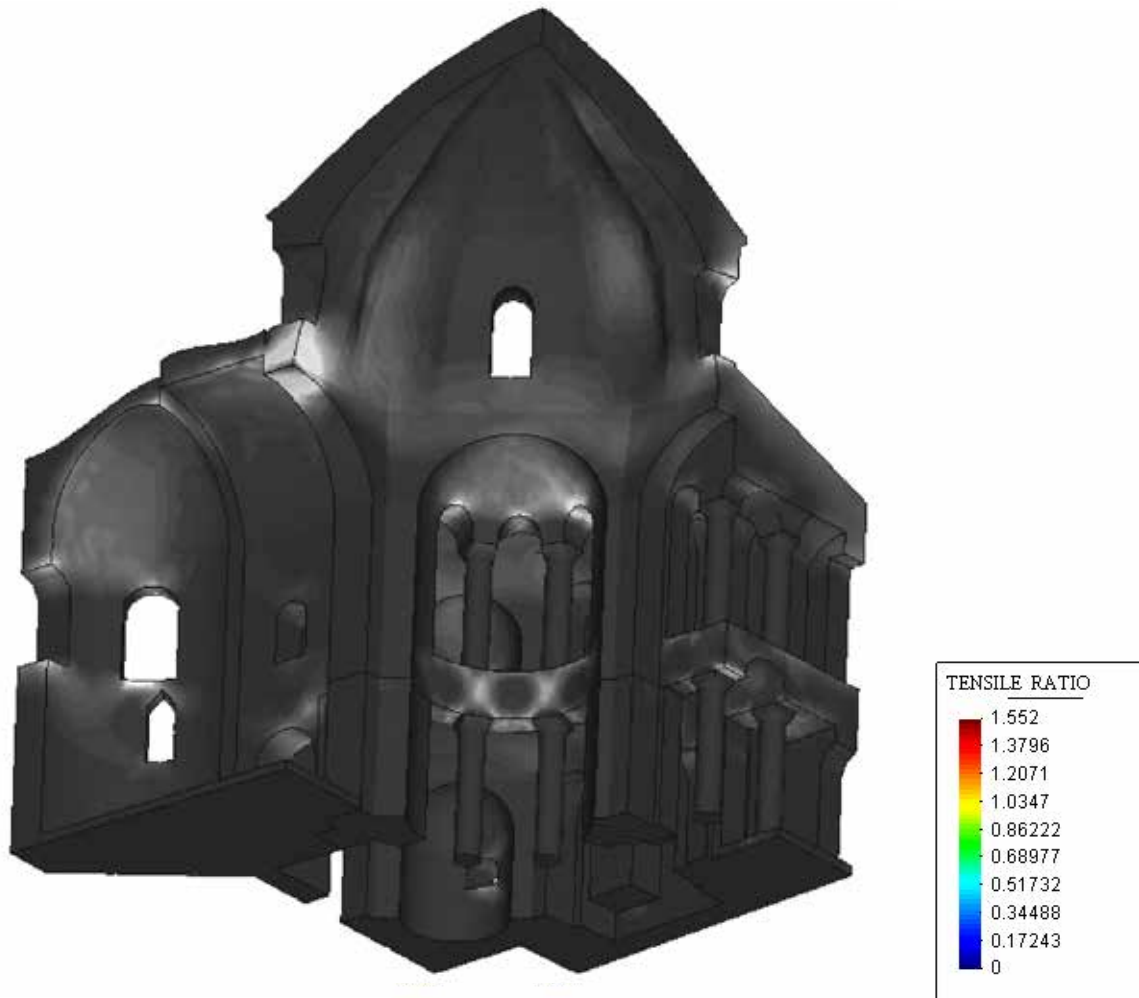
Fig.7.2 Condiciones de contorno consideradas en caso de *Peso Propio*

El cálculo se ha realizado mediante un proceso iterativo de 10 pasos. Partiendo de un peso nulo, en cada uno de los pasos se ha incrementado el peso propio en un 10%. De esta forma se han evitado posibles inestabilidades de cálculo por aplicar la incrementos excesivos de carga

## 7.1.2 Análisis de los resultados

### *Fisuración*

El primer aspecto destacable de los resultados es el Ratio a Tracción (definido en el apartado 4.3.1). En la Fig.7.3 se aprecia como solamente se supera el valor *Ratio a tracción* = 1 (zonas tintadas en rojo) en el punto medio del arco que da entrada en el ábside de la mezquita (grietas G1 en Fig.7.1). En el resto de zonas el valor del ratio es inferior a 0,6. En consecuencia solamente se produce daño (rotura de fibras) en ese punto. El caso del ratio a compresión todavía es más evidente porque el valor máximo que llega a adoptar es de 0,24. En resumen, no tenemos daño a compresión y el daño a tracción, que aparece en el punto medio del arco que da acceso al ábside, es menor que 0,26 y sólo aparece en una zona muy pequeña (Fig.7.4). Este hecho indica que, según el modelo, el edificio resiste sin apenas experimentar daño la sollicitación del peso propio. Esta afirmación ya fue alcanzada en el estudio del edificio que realizó Tomlow con un modelo colgante y que hemos mencionado en el apartado 5.4.1.



step 10  
Contour Fill of TENSILE RATIO .

Fig.7.3 Ratio a Tracción en caso de *Peso Propio* (daño a partir de 1)



Fig.7.4 Daño a Tracción en caso de *Peso Propio*

En la Fig.7.3 se aprecia como las zonas más traccionadas (en rojo, verde y azul claro) coinciden en gran medida con las grietas reales del edificio. Especialmente las zonas que se refieren a las grietas G1, G2 y G3 (ver Fig.7.1). Sin embargo, el único valor de las tracciones que puede justificar el origen de una grieta es el que aparece en la zona del arco del ábside, donde se formarían las grietas G1. Por tanto, después de analizar este caso, sólo se puede atribuir al efecto exclusivo del peso propio la formación de las grietas G1.

**Formación de arcos de descarga**

A través del análisis de las tensiones principales de compresión, se pueden distinguir los arcos de descarga que transmiten el peso de la cúpula a los cimientos. Observando la Fig.7.5 se aprecia como los elementos más comprimidos del modelo son en primer lugar las columnas y después los pilares. En cuanto a la cúpula se aprecia con facilidad que las zonas más oscuras, las menos comprimidas, son la parte superior de la cúpula y las zonas que se encuentran bajo una ventana.

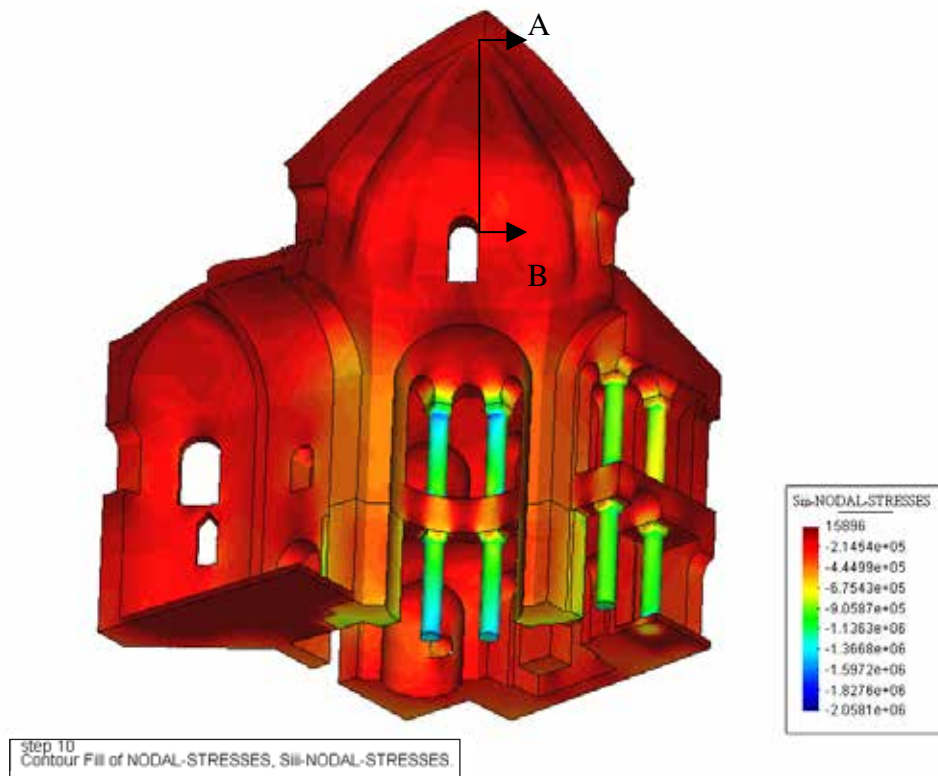


Fig.7.5 Tensiones principales de compresión  $S_{III}$  en caso de *Peso Propio*

Para entender mejor como se comporta la parte superior de la cúpula se ha realizado una sección vertical A-B (Fig.7.6). En ella se aprecian tintadas en rojo las zonas de mayor compresión. Se ve como en la parte superior de la sección la zona interior es más propensa a traccionarse y por el contrario, en la parte inferior, que corresponde al inicio de una ventana, es la parte exterior la más propensa a traccionarse. Este comportamiento es esperable en una cúpula de este piso. Así que los resultados obtenidos en esta zona son razonables.



Fig.7.6 sección vertical A-B (ver Fig.7.5). Tensiones principales a compresión  $S_{III}$



Las ventanas introducen una discontinuidad muy importante en el casquete macizo que es la cúpula. Esta discontinuidad en la geometría altera la distribución homogénea de las tensiones alrededor del perímetro de la cúpula, ya que las ventanas, como elementos vacíos, no resisten. Las ventanas generan arcos de descarga y las tensiones se concentran en los tramos entre ventanas. Estos arcos de descarga se apoyan directamente en los pilares debido a la proximidad entre la parte inferior de las ventanas y la parte alta de los pilares y los nichos del primer piso. En consecuencia, tenemos toda la zona que se encuentra dentro del arco de descarga muy poco comprimida (incluso traccionada en algún punto). Esta falta de compresión en relación a los elementos vecinos (un orden de magnitud inferior) hace mucho más vulnerables estas regiones. Para visualizar mejor estas observaciones se adjunta la Fig.7.7 donde se indica la dirección de las compresiones. Además, se ven en rosa las zonas menos comprimidas y por tanto, como se ha mencionado, más vulnerables a futuras tracciones.

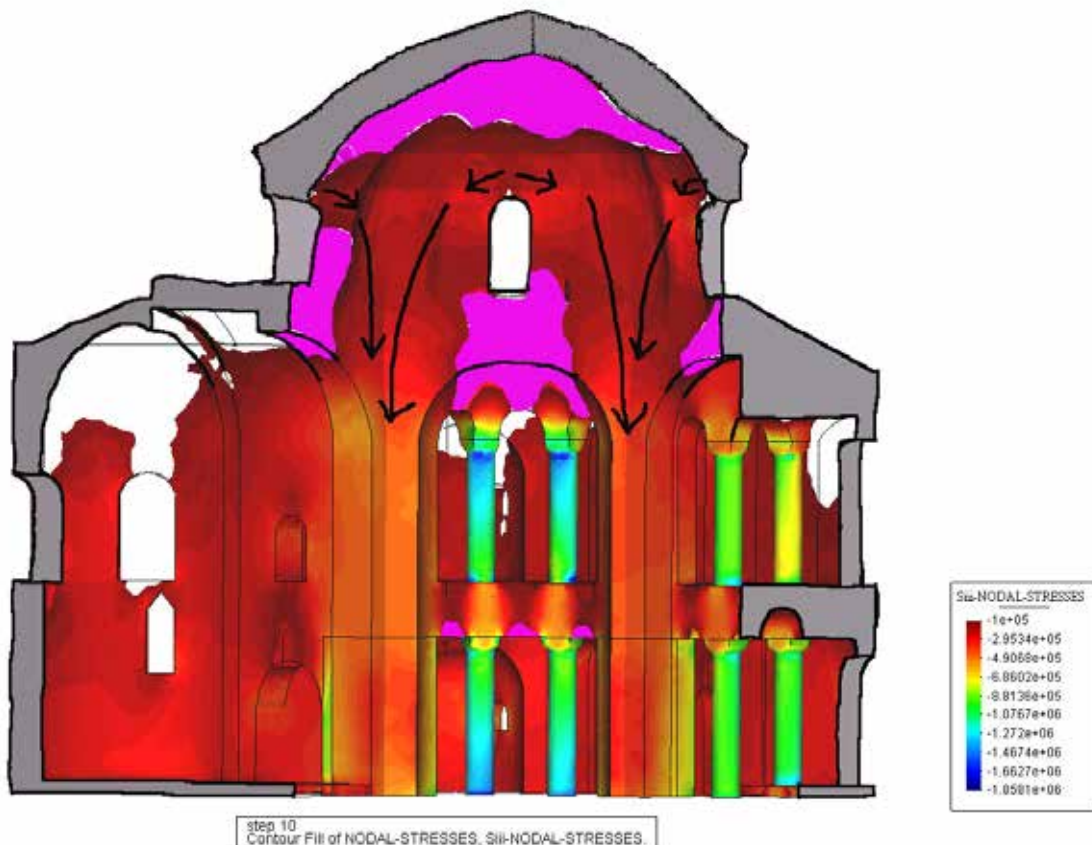


Fig.7.7 Esquema para visualizar los arcos de descarga provocados por la presencia de las ventanas (las flechas indican la dirección de las compresiones). Las zonas marcadas en rosa tienen una  $S_{III}$  inferior a 0,1MPa. El esquema se ha trazado sobre el resultado Tensiones principales de compresión  $S_{III}$  en caso de *Peso Propio* (elaboración propia)

### Deformaciones

Se ha visto en el apartado 5.3 que los pilares y los muros exteriores sufren un importante desplazamiento horizontal de hasta 43cm en el cuadrante de mezquita modelado. En el caso analizado y de acuerdo con el modelo de análisis instantáneo, los desplazamientos han sido muy inferiores: en la dirección x el máximo ha sido de 0,3mm y en la dirección y de 0,2mm. Estos valores se alejan mucho de la realidad pero tienen su explicación.



Es importante destacar que es difícil simular los desplazamientos reales mediante este tipo de análisis instantáneo. En primer lugar, el modelo está limitado a una cuarta parte del edificio y en sus planos de corte se ha impuesto la condición de simetría. Esta condición no permite el desplazamiento en la dirección perpendicular al plano. Por tanto, al modelo le es imposible reflejar desplazamientos que engloban a todo el edificio o a una parte superior a la modelada. En segundo lugar, el modelo no tiene en cuenta dos fenómenos amplificadores importantes: 1. Se ha considerado la cimentación como un empotramiento perfecto mientras que es probable que en la realidad permita un cierto giro. 2. El modelo no es capaz de predecir los efectos que pueda tener la fluencia a lo largo de 1500 años, previsiblemente muy importantes.

A pesar de ello, sí se observa coincidencia cualitativa entre las formas deformadas reales y numéricas (ver Fig.7.8).

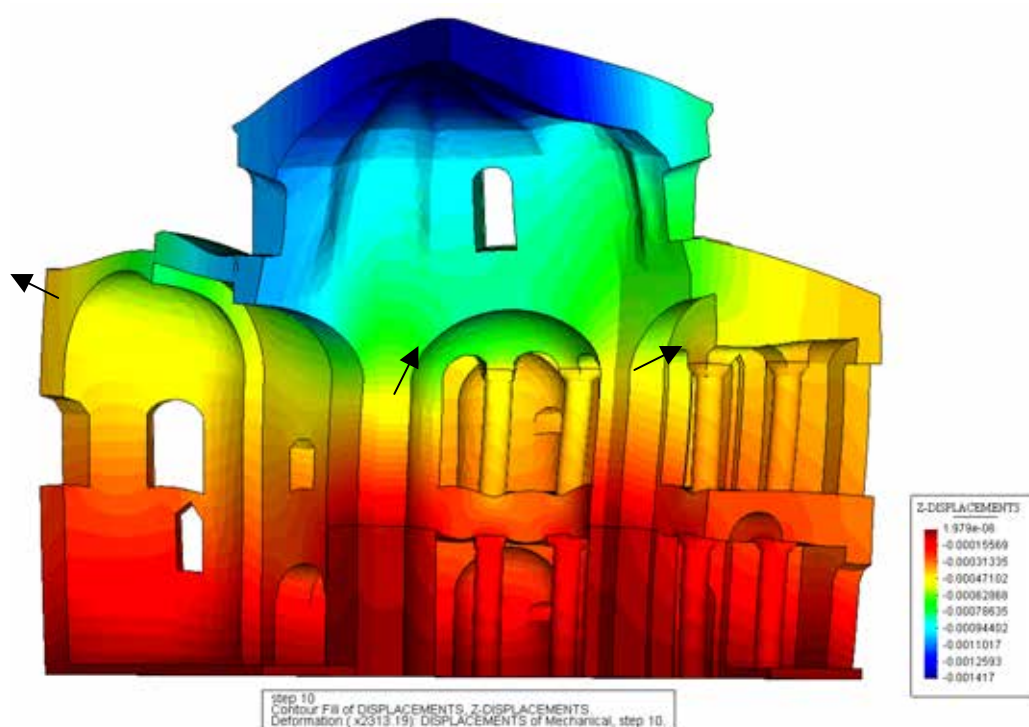


Fig.7.8 Deformaciones (x2300) + desplazamientos-z en caso de *Peso Propio*

### 7.1.3 Conclusiones parciales

En primer lugar es importante destacar que el modelo resiste sin acercarse a la situación de colapso el análisis instantáneo bajo el efecto del peso propio. Este resultado es muy lógico ya que el edificio hace 1500 años que está en pie.

El peso propio es el causante directo de las grietas G1 (ver Fig.7.1). El resto de grietas no son asociables al efecto exclusivo del peso propio.

El análisis del funcionamiento estructural de los elementos del edificio nos muestra que las ventanas situadas en la base de la cúpula rompen la homogeneidad de tensiones y provocan unos arcos de descarga que se apoyan directamente sobre los pilares. La consecuencia de este comportamiento es que todas las áreas del interior de los arcos de descarga (bóvedas bajo ventanas) se encuentran poco comprimidas y son zonas propensas a tener tracciones ante cualquier nueva sollicitación. Este resultado

también es muy razonable ya que, actualmente, en la mezquita 7 de las 8 bóvedas bajo ventanas se encuentran agrietadas.

En el estudio de los desplazamientos debidos al peso propio se ha visto que los pilares del modelo se deforman en las mismas direcciones que los del edificio. Sin embargo la magnitud de estas deformaciones es dos órdenes inferior a la real. El motivo de esta enorme diferencia es que el modelo constitutivo solamente puede simular la tendencia que tiene el edificio a deformarse. No es capaz de reproducir el efecto que tiene un factor amplificador de deformaciones como el conjunto de fenómenos que actúan a largo plazo sobre el edificio (fluencia, cansancio material,...).

### 7.1.4 Influencia de la Energía de Fractura

En el apartado 6.3 se ha expuesto que la energía de fractura definida para los materiales es casi infinita, de forma que se garantiza la convergencia numérica en el cálculo. Sin embargo, se ha comprobado mediante estudios paramétricos, que el definir una energía de fractura elevada puede afectar a los resultados aumentando la capacidad final de la estructura.

Teniendo el conocimiento de tal posible efecto, se ha considerado oportuno realizar un cálculo con una energía de fractura inferior. El objetivo de este cálculo es comprobar que en el presente estudio los resultados obtenidos son válidos a pesar de utilizar una energía de fractura casi infinita.

El modelo utilizado es idéntico al visto en el cálculo que precede este apartado. Solamente se han modificado las energías de fractura de los materiales, como puede verse en tabla 7.2.

			Materiales originales	Materiales modificados
Piedras	Energía de fractura a compresión	[Joules]	1,00E+10	10000
	Energía de fractura a tracción	[Joules]	4,44E+07	44,4
Mampostería	Energía de fractura a compresión	[Joules]	1,00E+10	10000
	Energía de fractura a tracción	[Joules]	3,09E+07	30,9

Tabla 7.2 Cambios en los valores de la Energía de fractura en el caso *Estudio del efecto de reducir la energía de fractura*

Se ha constatado que los resultados obtenidos son muy parecidos a los que resultan con la Energía de fractura original. Se han mantenido la distribución de tensiones y el valor de éstas. De la misma forma los gráficos que nos muestran los ratio y los daños también son idénticos a los vistos en los apartados anteriores. A modo de ejemplo de estas observaciones se incorpora la Fig.7.9, en la que no se aprecia ninguna diferencia respecto a la Fig. 7.3.

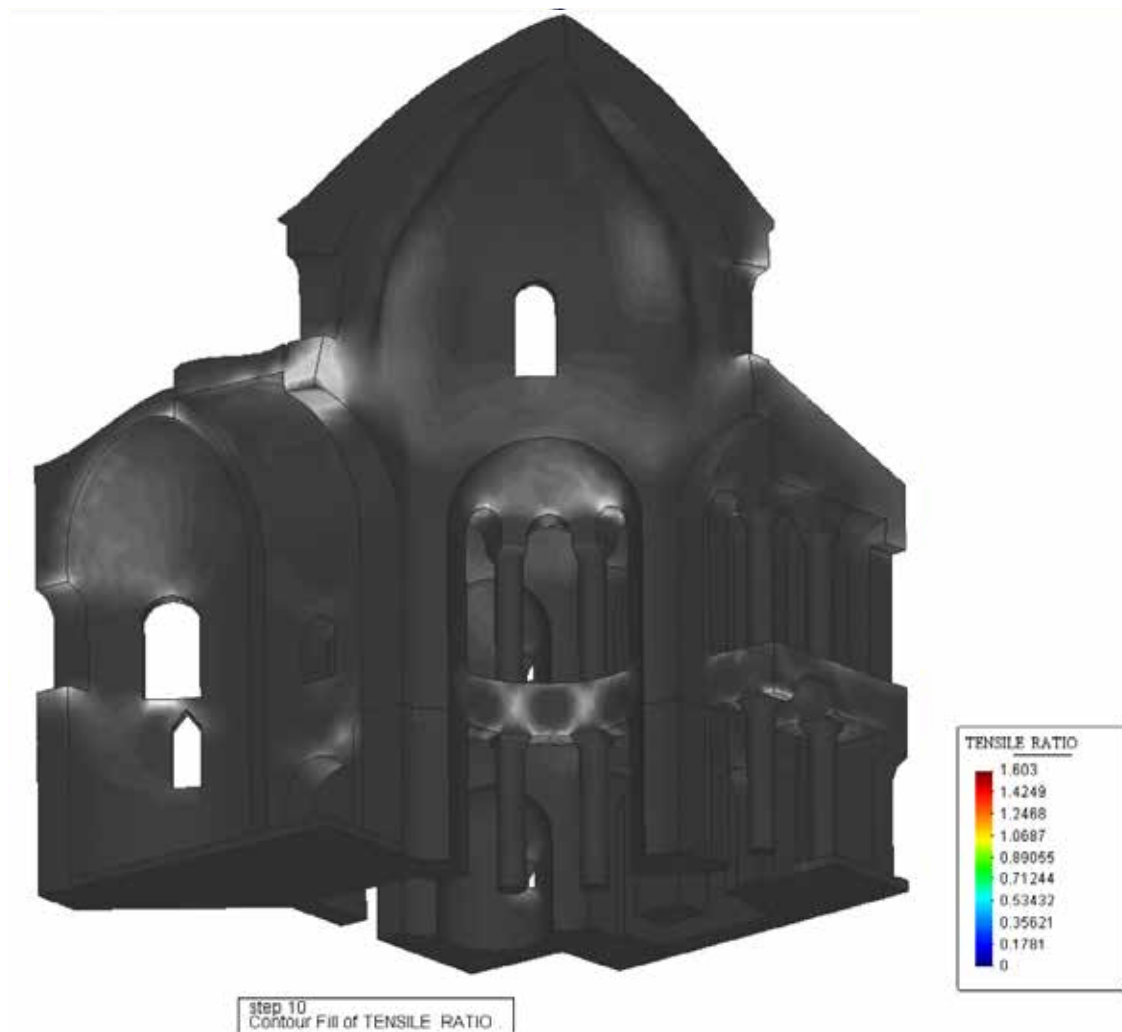


Fig.7.9 Ratio a Tracción en el caso en el que se utiliza valores pequeños de la Energía de Fractura

Estos resultados nos muestran que no influye de manera decisiva el definir una energía de fractura baja, más próxima a la real. En consecuencia, se seguirá utilizando los valores próximos a una energía casi infinita, ya que con ello se garantiza tener estabilidad en el cálculo.

La constatada poca influencia del valor de la energía de fractura era esperable ya que en los resultados la presencia de daño es muy pequeña.

En futuros estudios sería conveniente realizar un estudio paramétrico más profundo.

## 7.2 Estudio del efecto del Asentamiento diferencial entre columnas y muros

En las Fig.7.7 y Fig.7.5 se aprecia que son las tres columnas delanteras las que transmiten mayor presión a los cimientos. Su  $S_{iii}$  en la base es de 1,2MPa mientras que en los pilares es de 0,7MPa y en los muros exteriores de 0,3MPa. Además la superficie de contacto con la cimentación es muy inferior en el caso de las columnas. Esta observación sugiere que en el caso de cimentación deformable o vibraciones podría haber sucedido algún fenómeno de asentamiento diferencial de las columnas respecto al resto del edificio. Para comprobar el efecto que hubiera tenido este asentamiento se ha estudiado el presente caso.

### 7.2.1 condiciones de apoyo y carga

No se tiene ningún tipo de información sobre el tipo de cimentación de la mezquita ni sobre el tipo de suelo existente. Por este motivo se van a tratar los asentamientos como desplazamientos impuestos y no como una deformación proporcional a la carga aplicada.

Como el asentamiento se producirá siempre después del efecto del peso propio, la aplicación de las solicitaciones y condiciones se ha realizado en dos fases o intervalos. En el primero se ha aplicado el efecto de la gravedad y se ha mantenido la cimentación empotrada. En el segundo intervalo se ha impuesto unos desplazamientos a las tres columnas delanteras de la planta baja. Las condiciones se resumen en la Tabla 7.3.

Para simular los asentamientos diferenciales se han introducido en el modelo unos macizos cilíndricos bajo los elementos que deben asentar (Fig.7.9). El material impuesto para estos macizos es de resistencia muy elevada de manera que no se deforma al aplicarle la gravedad. En una segunda fase, cuando las columnas deben asentar, se ha impuesto una carga muy elevada a los macizos cilíndricos para provocar su deformación y con ello el descenso de las columnas.

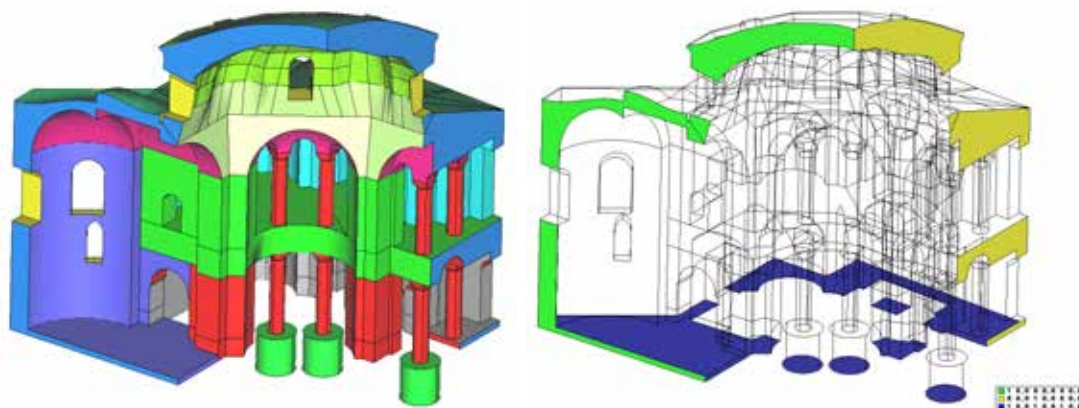


Fig.7.10 Cilindros utilizados para imponer asentamientos y condiciones de contorno en caso de *Asentamiento diferencial de las columnas*

<b>Nombre</b>	Estudio del asentamiento diferencial de las columnas		
<b>Solicitaciones</b>	Peso Propio		
<b>Condiciones de Contorno</b>	Plano de corte perpendicular al eje x	simetría	
	Plano de corte perpendicular al eje y	simetría	
	Base	fase 1	empotramiento
		fase 2	empotramiento asentamiento columnas

Tabla 7.3 Resumen condiciones impuestas en caso de *Asentamiento diferencial de las columnas*

El estudio se ha iniciado mediante un análisis lineal. En el siguiente apartado se exponen las conclusiones de este análisis lineal.

### 7.2.2 Análisis de los resultados

La Fig.7.11 corresponde a las tensiones principales de tracción  $S_i$  que sufre el modelo cuando las columnas delanteras de la planta baja han sufrido un asentamiento vertical de sólo 1,5cm. Con sólo 1,5mm se producen tracciones en las columnas de 7MPa. Estas tracciones son imposibles porque el material sólo resiste 2MPa. Lo que sucede es que en el modelo la columna está unida solidariamente con el resto del edificio y no puede desprenderse. En consecuencia, este resultado indica que ante cualquier pequeño asentamiento diferencial por parte de las columnas estas se desprenderían y dejarían de ayudar a la resistencia de la mezquita.

Debido a ello, se ha considerado innecesario en este caso desarrollar un análisis de tipo no lineal. Por el contrario, el estudio proseguirá con una adaptación de la geometría.

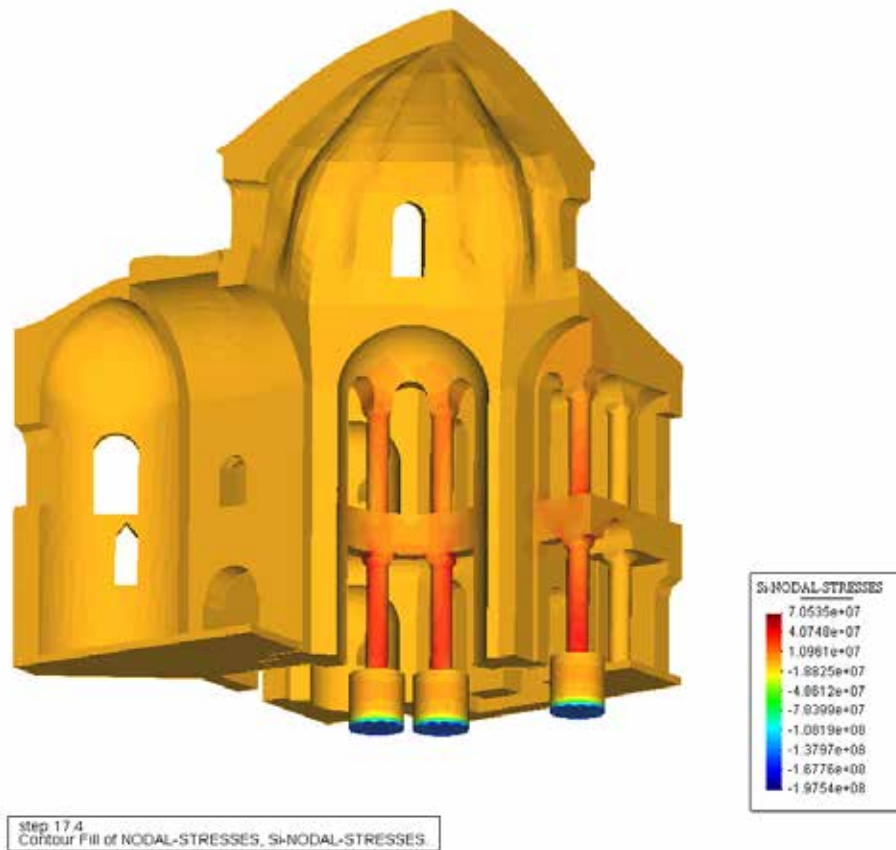


Fig.7.11 Tensiones principales de tracción  $S_1$  del caso *Estudio del asentamiento diferencial de las columnas*

### 7.2.3 Comprobación de la resistencia del dintel sin columnas delanteras en la planta baja

La pregunta que se debe responder ahora es como quedaría el edificio en tal caso: ¿resistirá el dintel la solicitación de las columnas del primer piso sin la ayuda de las columnas de la planta baja? Si así fuera, el estudio del caso con asentamiento de columnas el edificio debería incluir el efecto del dintel descargando sobre los pilares. Por el contrario, si el dintel no resiste el modelo sería el edificio sin ninguna de las columnas delanteras.

Para responder esta pregunta se ha ejecutado un nuevo caso sin la presencia de las columnas delanteras de la planta baja (C12, C21, C23). La nueva geometría es la que se aprecia en la Fig.7.12.



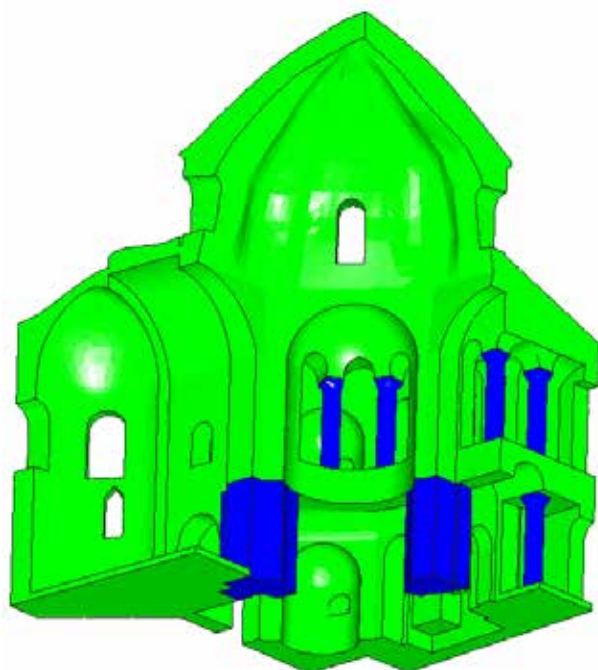


Fig.7.12 Modelo utilizado para la comprobación del aguante del dintel en el caso *Comprobación del aguante del tablero*

Los resultados obtenidos muestran (Fig.7.13) que con una flecha máxima de 0,8mm en el centro luz del dintel, tenemos tracciones suficientes en la unión tablero-pilar para separarlos (tracciones de 0,35MPa cuando el límite de la mampostería está en 0,25MPa). En consecuencia, un asentamiento de las columnas inferiores provoca la rotura del dintel en sus extremos y el desprendimiento de las columnas del primer piso.

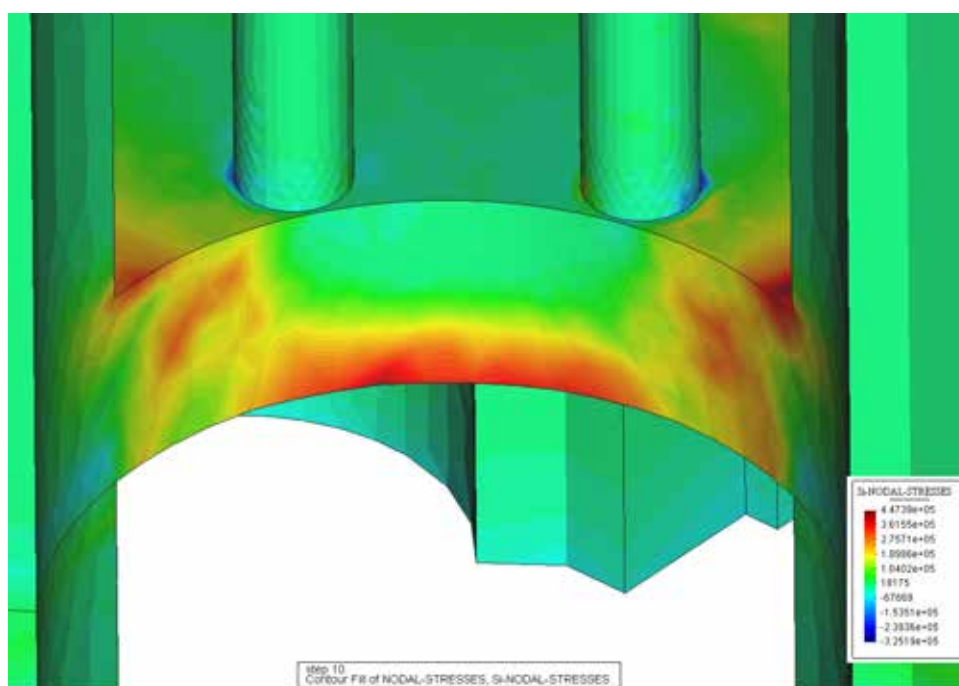


Fig.7.13 Detalle de las tensiones principales de tracción  $S_i$  en el tablero en el caso *Comprobación del aguante del tablero*. Las zonas tintadas en rojo corresponden a fibras donde las tracciones han superado el límite del material ( $2,5e+05 \text{ N/m}^2$ )

Por tanto, estos resultados juntamente con los obtenidos del asentamiento de las columnas llevan a concluir que el caso de asentamiento diferencial de las columnas equivale al cálculo bajo peso propio del edificio sin las columnas delanteras del primer piso y la planta baja, ya que, como se ha comentado, el dintel no estaría unido con el pilar y las columnas delanteras del primer piso se habrían separado. Éste es el caso que se va a estudiar a continuación.

#### 7.2.4 Estudio del modelo sin corona interior de columnas bajo peso propio

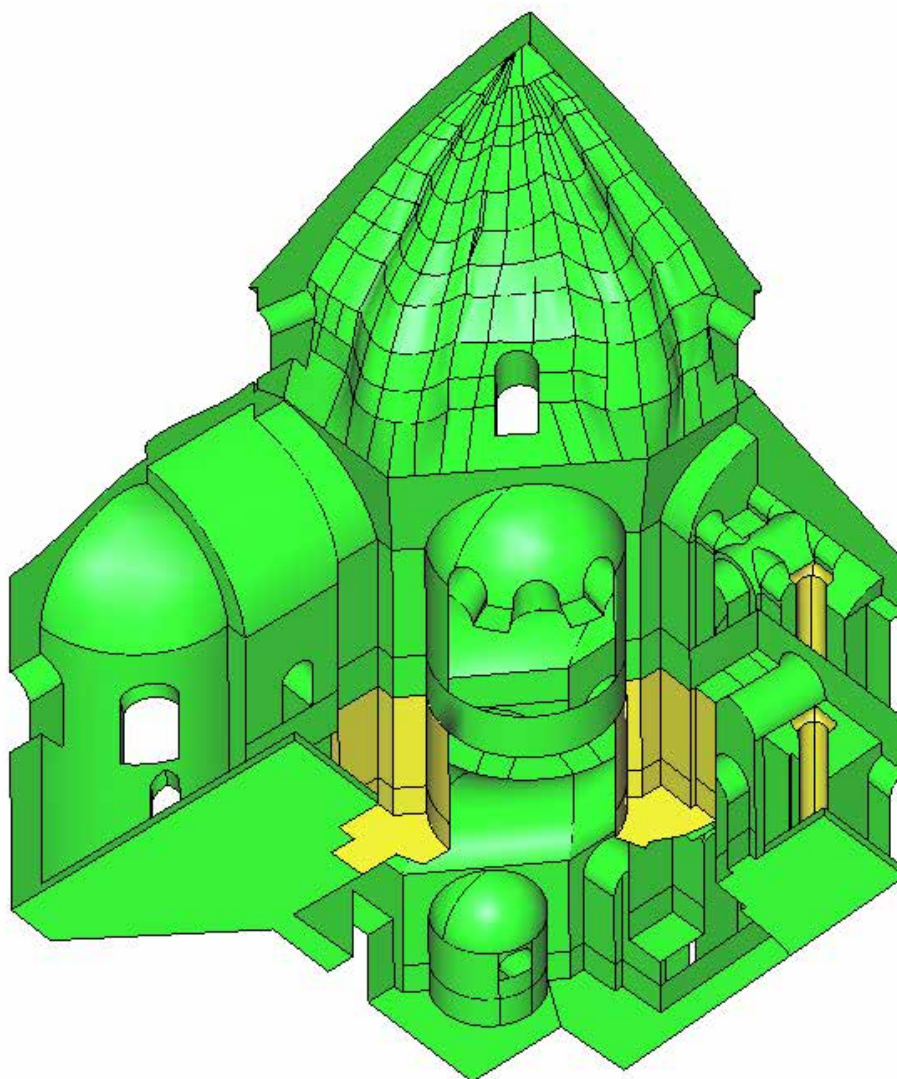


Fig.7.14 Vista interior del modelo sin corona interior de columnas bajo peso propio utilizado para el cálculo equivalente a la situación *Asentamiento diferencial de las columnas*

Como se aprecia en la Fig.7.14 el modelo del presente cálculo es la misma geometría original sin la presencia de las 6 columnas delanteras (C12, C21 y C23 de la planta baja y del primer piso). Únicamente se ha considerado los efectos de la desunión tablero-pilar; es decir, se ha eliminando el contacto entre las bóvedas superiores y las

columnas del primer piso. El dintel se ha mantenido unido al pilar pero sin ningún sobrepeso. De esta forma se ha facilitado la construcción de la nueva geometría.

<b>Nombre</b>	Estudio del modelo equivalente a la situación Asentamiento diferencial de las columnas	
<b>Geometría</b>	Geometría original sin presencia de las 6 columnas delanteras	
<b>Solicitaciones</b>	Peso Propio	
<b>Condiciones de Contorno</b>	Plano de corte perpendicular al eje x	simetría
	Plano de corte perpendicular al eje y	simetría
	Base	empotramiento

Tabla 7.4 Resumen condiciones consideradas en el caso de modelo sin corona interior de columnas bajo peso propio

El cálculo se ha realizado mediante un proceso iterativo donde se ha incrementado linealmente el efecto del peso propio en diez pasos. El modelo constitutivo empleado ha sido el Modelo visco-plástico de daño. El archivo de datos utilizado para el cálculo se encuentra resumido en el Anejo A.

Los resultados que se han obtenido muestran que un asentamiento diferencial de las columnas no es el responsable de las grietas que existen en la mezquita. Analizando el ratio a tracción (Fig.7.15) vemos que solamente supera el valor de 1 en el centro del arco de ábside (zona de grietas G1). Si se compara con lo que sucede cuando no hay un asentamiento diferencial (Fig.7.3) vemos que estas tracciones se deben al efecto del peso propio y no al asentamiento de las columnas. De la misma forma las grietas G2, G4 y G5 no quedan más traccionadas con un asentamiento diferencial de las columnas que con sólo el peso propio, ya que su ratio a tracción se mantiene en torno a 0,25. Donde sí aparecen nuevas tracciones es en la bóveda de las grietas G3. Estas tracciones aparecen por haber desaparecido el contacto con las columnas C12 y C21 del primer piso (en el modelo se han quitado las columnas para simular la falta de contacto). Estas dos columnas aguantaban la bóveda que ahora queda suspendida y en consecuencia, traccionada. Estas tracciones, sin embargo, no son capaces de fracturar el material ya que quedan por debajo del 70% de su límite a tracción (vemos que el ratio a tracción es inferior a 0,7 en la Fig.7.15).

Sorprende que las tracciones hayan aumentado sustancialmente en la zona G3 y no en la zona G4, donde, como se ha mencionado, el asentamiento de las columnas apenas ha alterado la distribución de tensiones. Probablemente se deba a la resistencia adicional que aporta la segunda hilera de columnas. Ésta solamente se encuentra en las 4 bóvedas centrales, que no son esféricas.

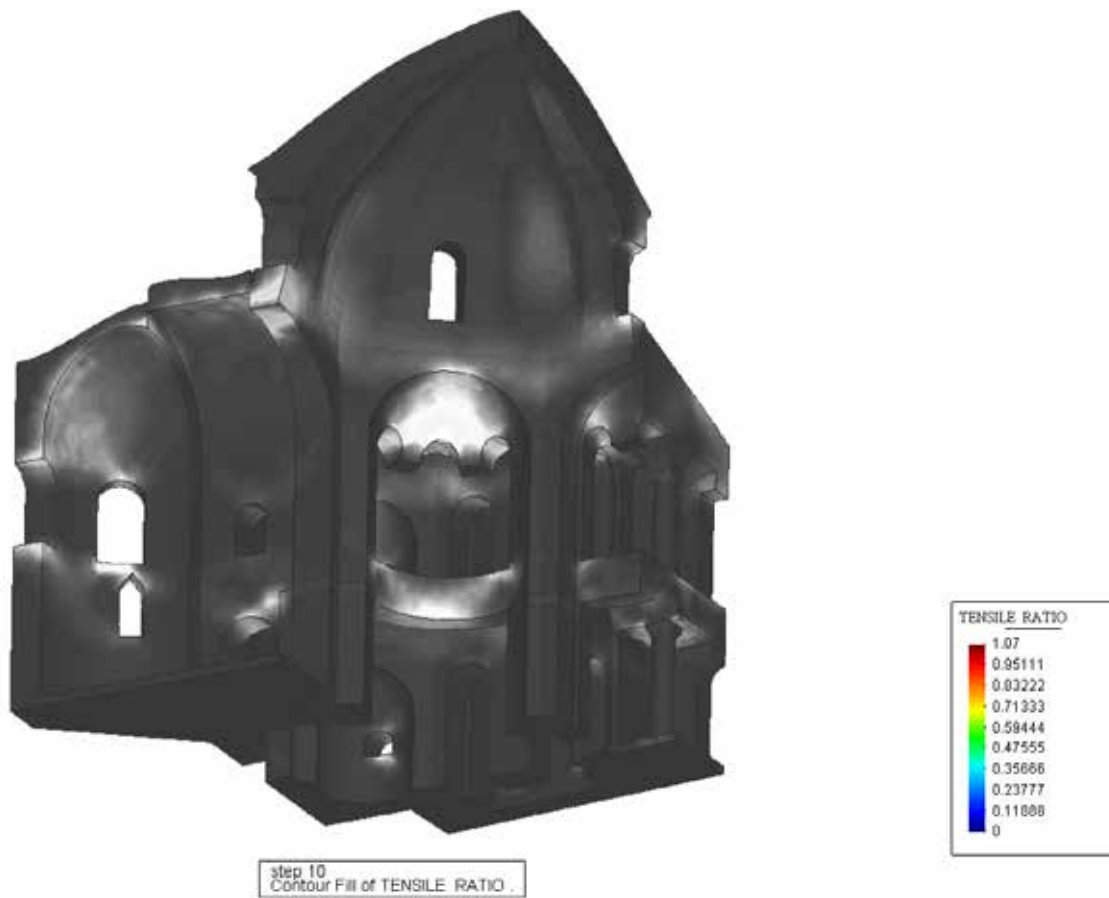


Fig.7.15 Ratio a Tracción en el caso de modelo *sin corona interior de columnas bajo peso propio* (daño a partir de 1)

La distribución de compresiones no se altera mucho respecto la situación sin asentamiento diferencial (Fig.7.16 en comparación con Fig.7.5). Los pilares absorben la carga que antes llevaban las columnas delanteras. Este aumento se puede ver en la presión que ejercen los pilares sobre la cimentación que ha aumentado en un 20%. Sin embargo, el ratio a compresión no supera en ningún punto de los pilares el valor de 0,1.

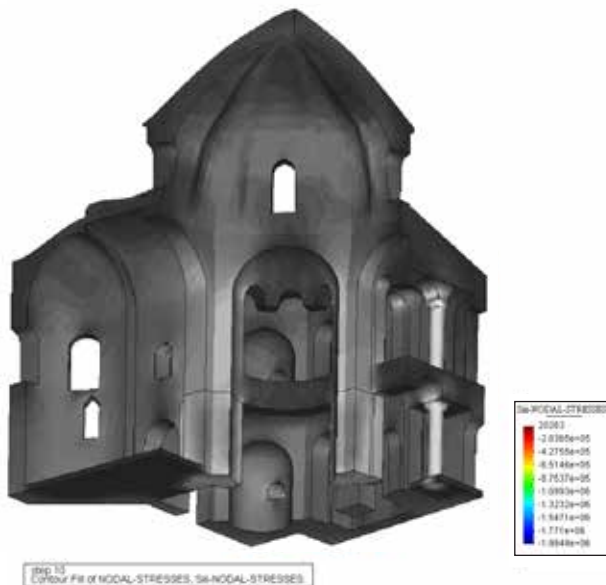


Fig.7.16 Tensiones principales a compresión  $S_{III}$  en el caso de *modelo sin corona interior de columnas bajo peso propio*

Los desplazamientos en sentido vertical (eje z) se han mantenido en la cúpula con un pequeño aumento ya que el máximo ha pasado de 1,4mm a 1,5mm (ver Fig7.17). Solamente en la bóveda entre los pilares P1 y P2 ha habido un aumento importante de desplazamiento vertical ya que casi se ha doblado el desplazamiento que había sin asentamiento por parte de las columnas. Sin embargo, este desplazamiento es de sólo 1mm. En el arco entre los pilares P2 y P3 (zona de grieta G4) el desplazamiento vertical ha pasado de 0,5mm a 0,7mm. Por tanto ha aumentado un 40%.

Si se hace una analogía entre el incremento de tensión y el incremento de desplazamiento vertical en las zonas G3 y G4 vemos que los resultados son razonables. Como en la zona G3 tenemos un aumento de desplazamiento vertical mayor también tenemos un aumento de tracciones mayor.

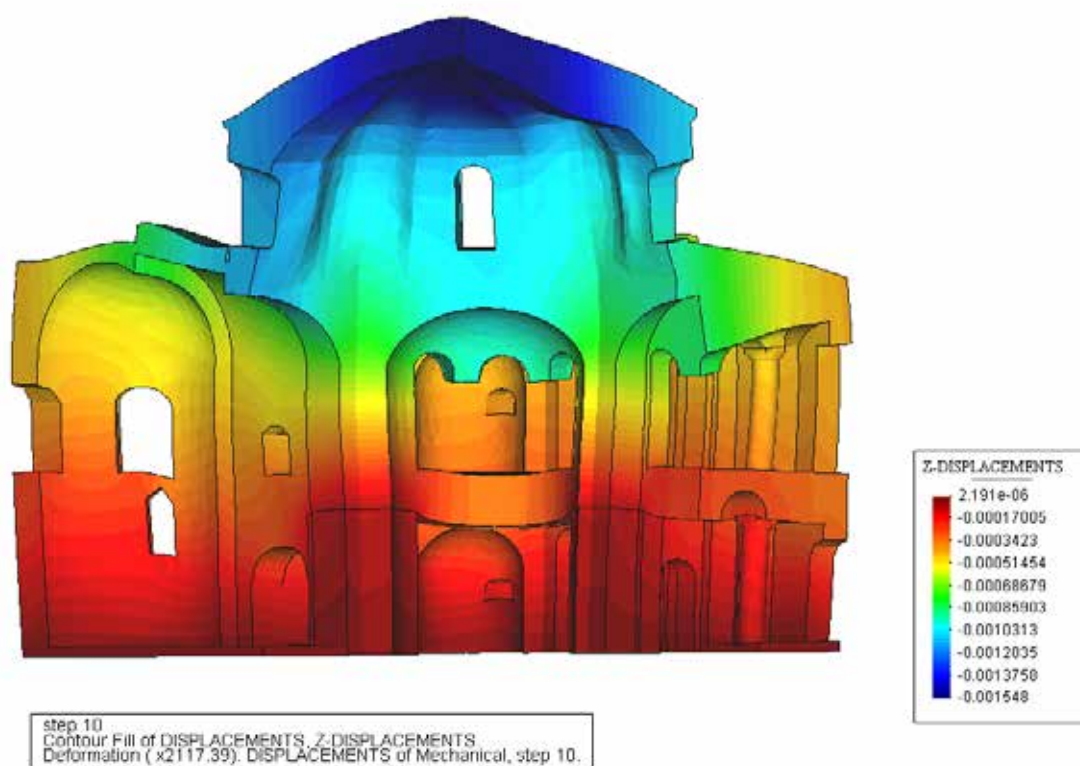


Fig.7.17 Deformaciones (x 2117) y desplazamientos verticales en el caso de *modelo sin corona interior de columnas bajo peso propio*

## 7.2.5 Conclusiones parciales

Al no tener información sobre la cimentación este estudio no se ha podido realizar de manera que el asentamiento fuese proporcional a la presión transmitida por la columna. El estudio se ha realizado suponiendo situaciones extremas para así entender que ocurriría en la peor de las situaciones.

En la peor de las situaciones el asentamiento diferencial provoca una rotura del dintel y un desprendimiento de las columnas superiores. En consecuencia, las 4



columnas delanteras entre cada par de pilares dejan de participar en la resistencia global del edificio y los pilares asumen la porción de compresiones que antes resistían las columnas. Esta situación, que es la más desfavorable, no pone en peligro la estabilidad global de la estructura. Por tanto, un asentamiento diferencial de las columnas no puede provocar el colapso del edificio.

Como el cambio en el comportamiento estructural global se da en el modelo con asentamientos diferenciales de sólo milímetros es casi seguro que en la mezquita real también ocurra. Sin embargo debe de ocurrir una situación intermedia, ya que no tiene sentido físico que las columnas hayan asentado sin las compresiones que les transmiten sus elementos vecinos. Por tanto, el probable asentamiento diferencial de las columnas es muy pequeño y provoca una descarga de éstas respecto los resultados obtenidos en el estudio del edificio bajo peso propio. La consecuencia de esta descarga es que las cuatro bóvedas esféricas que se encuentran justo encima de las columnas del primer piso (que también son las que se encuentran bajo las ventanas) pasan a estar todavía menos comprimidas que en los resultados del estudio bajo peso propio. Por tanto todavía son más susceptibles a agrietarse.



### 7.3 Estudio del efecto de una solicitación sísmica

El siguiente objetivo parcial del estudio es realizar una aproximación a los efectos que pueden haber causado sobre la mezquita los sucesos sísmicos que ha sufrido.

Se pueden clasificar los sucesos en dos tipos. En primer lugar se dan múltiples pequeños seísmos de magnitud cercana a 3 que no son capaces de dañar la estructura por sí solos pero sí generan un daño progresivo. En la tabla 7.5 se ve que estos fenómenos se dan una media de 4 veces al día en algún punto de Turquía. Teniendo en cuenta que Estambul se encuentra en una de las zonas sísmicas más activas del país es correcto suponer que la mezquita debe resistir un seísmo de estas características con una frecuencia de dos días. Esto significa que ha resistido a lo largo de sus 1500 años de vida las vibraciones de más de 250mil pequeños terremotos. El segundo grupo son los terremotos importantes con capacidad de dañar la estructura con una sola ocurrencia. En el apartado 5.1 se ha visto que se contabilizan hasta 34 seísmos de estas características en el último milenio (web b). Extrapolando a toda la vida del edificio, éstos podrían ser más de 50. Estos números tan contundentes hacen indispensable estudiar el presente caso.

RECENT EARTHQUAKES IN TURKEY SEISMOLOGICAL OBSERVATORY (QUICK EPICENTER DETERMINATION)						
Date	Time	Latit(N)	Long(E)	Depth(km)	Magnitud(Md)	Region
2003.07.01	14:33:11	40.7993	31.3145	8.4	3.3	KAYNASLI (DUZCE)
2003.06.30	23:56:37	40.5232	25.9892	5.4	3.2	AEGEAN SEA
2003.06.30	13:08:00	39.1407	40.4288	5.0	3.2	SANCAK (BINGOL)
2003.06.30	12:13:57	39.0632	40.3928	7.6	3.1	SANCAK (BINGOL)
2003.06.30	09:47:42	39.1038	40.2978	5.0	3.3	SANCAK (BINGOL)
2003.06.30	09:23:25	39.1345	31.2270	16.1	2.9	EMIRDAG (AFYON)
2003.06.30	06:55:54	39.1370	40.3722	5.0	3.6	SANCAK (BINGOL)
2003.06.30	04:01:12	39.1843	40.4862	6.1	3.8	ADAKLI (BINGOL)
2003.06.29	20:34:16	39.0438	40.5107	7.1	3.2	SANCAK (BINGOL)
2003.06.29	15:55:51	40.1020	29.3327	8.8	3.2	INEGOL (BURSA)
2003.06.29	11:15:05	38.9625	40.5422	7.4	3.7	BINGOL
2003.06.28	16:26:49	39.4170	26.0977	5.0	3.3	AEGEAN SEA
2003.06.28	16:24:36	39.5138	25.7205	12.1	3.5	AEGEAN SEA
2003.06.28	14:54:34	39.0545	40.4202	6.8	3.3	SANCAK (BINGOL)
2003.06.28	08:50:07	40.5735	28.9638	5.5	2.8	CINARCIK (YALOVA)
2003.06.27	15:59:17	41.1677	35.7428	5.6	3.0	HAVZA (SAMSUN)
2003.06.27	12:13:36	39.3665	38.3828	5.0	3.4	KEMALIYE (ERZINCAN)
2003.06.27	09:12:27	38.4297	27.4690	5.0	3.3	KEMALPASA (IZMIR)
2003.06.27	04:33:21	38.9902	40.4447	5.0	3.3	SANCAK (BINGOL)
2003.06.27	03:40:18	39.0277	40.4598	5.0	3.3	SANCAK (BINGOL)
2003.06.27	00:57:42	38.4012	27.0108	19.8	3.0	KARSIYAKA (IZMIR)
2003.06.26	16:01:08	38.1477	27.0183	10.4	3.2	URLA (IZMIR)
2003.06.26	15:17:52	35.8225	35.6605	5.0	2.9	YAYLADAGI (HATAY)
2003.06.26	11:10:52	40.7060	35.2807	5.0	3.1	GUMUSHACIKOY
2003.06.26	04:42:19	40.3285	27.5335	4.3	2.8	ERDEK (BALIKESIR)
2003.06.26	00:27:08	40.5570	28.9975	7.8	2.8	CINARCIK (YALOVA)
2003.06.26	00:17:17	40.1848	30.1260	7.5	2.9	BILECIK
...						

Tabla7.5 Extracto de la tabla con los últimos terremotos registrados en Turquía por la Universidad de Bogaziçi a día 1 de julio del 2003. Nótese que son más de 4 al día de magnitud superior a tres (web d)

### 7.3.1 Condiciones de contorno y carga

Se es consciente que, en rigor, no se puede realizar un análisis sísmico de un cuadrante del edificio. El motivo es la imposibilidad de considerar las condiciones de contorno correctas en el plano perpendicular a la dirección de aplicación de la carga. En este plano las condiciones de contorno se encuentran entre la antisimetría y la libertad de movimientos, sin ser correctas ninguna de las dos. Sin embargo, la importante actividad sísmica sufrida por el edificio exige que se realice este análisis. Por este motivo se va a efectuar un análisis sísmico, aún siendo conscientes de que se trata de un estudio aproximado por la limitación de sus hipótesis y en consecuencia, de sus resultados.

A continuación se describen los argumentos que han motivado la elección de las condiciones de contorno y carga consideradas. Se refieren a la dirección de aplicación de la carga, la magnitud de la carga y el tipo de condiciones de contorno.

Por la cantidad de sucesos sísmicos sufridos por el edificio es probable que estos hayan solicitado el edificio en un amplio rango de direcciones del plano horizontal. No es un objetivo de este trabajo el hacer un estudio exhaustivo de los efectos que puedan tener las sollicitaciones sísmicas en todas estas posibles direcciones. Por este motivo se ha reducido el estudio al análisis de dos direcciones ortogonales del plano horizontal. Como no se tiene información sobre la existencia de alguna dirección preferente de aplicación de la carga, se han escogido las direcciones “-x” y “-y” (ver Fig.7.18) porque facilitaban la imposición de las condiciones de contorno en el modelo. En ambos casos ocurre que el modelo pierde la simetría de carga en la dirección de aplicación de la carga horizontal y su plano de corte perpendicular pasa a tener un movimiento libre (antes estaba coaccionado por la condición de simetría). Finalmente también se ha realizado un estudio con la carga horizontal en la dirección “+y” para comparar los resultados con el caso de estudio en sentido contrario.

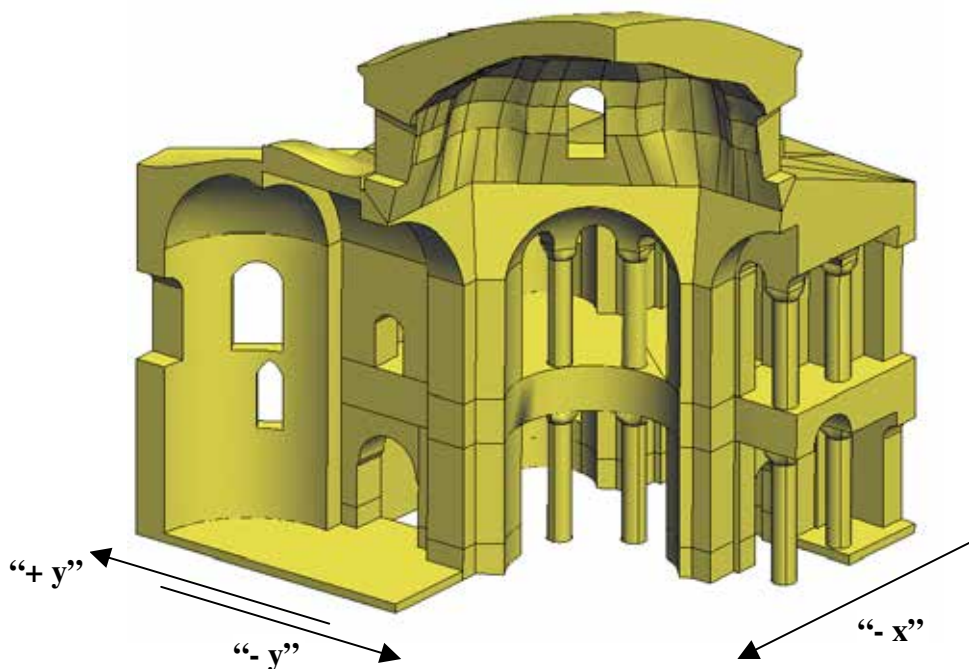


Fig.7.18 Direcciones de aplicación de la carga horizontal en el *Estudio del efecto de una sollicitación sísmica*

Los esfuerzos dinámicos se van a simular, de forma simplificada, con fuerzas estáticas equivalentes distribuidas en función de la masa. Para definir estas fuerzas estáticas necesitamos establecer el valor de su aceleración horizontal. Como Estambul es una ciudad con una elevada actividad sísmica y el edificio objeto de estudio tiene 1500 años, el valor de la aceleración debe corresponder al de seísmos de gran magnitud. Por este motivo se ha utilizado para los dos cálculos (dos direcciones) una aceleración horizontal de  $3m/s^2$ .

De la misma manera que en casos anteriores el cálculo se ha dividido en dos fases. En la primera se ha introducido el efecto de la gravedad y en la segunda, el efecto de la aceleración horizontal. Esta última sollicitación se ha introducido en incrementos lineales durante 30 pasos.

Tal y como se ha mencionado anteriormente el presente análisis tiene la dificultad añadida de no poder definir con exactitud la condición de contorno del plano perpendicular a la dirección de aplicación de la carga. La condición de contorno exacta se encuentra acotada entre la antimetría y la libertad de movimientos en las tres direcciones. A través de un estudio iterativo se podría acotar más este intervalo, pero se ha considerado que no es objeto de este estudio el realizar un análisis más complejo y que será mucho más preciso el realizar, en el futuro, un cálculo considerando toda la geometría en el modelo. Por estas razones las opciones de condición de contorno se redujeron a dos posibilidades: la antimetría o la libertad de movimientos. Se ha tomado la libertad de movimientos por el hecho de que sí se producen desplazamientos verticales de las fibras que se encuentran en el plano de aplicación de la condición de contorno.

En la Tabla 7.6 se aprecian las condiciones de contorno y carga utilizadas en los cálculos del presente caso.

Nombre	Estudio del caso Sollicitación Sísmica en la dirección -x			Estudio del caso Sollicitación Sísmica en la dirección -y		
	Sollicitaciones	fase 1	Peso propio		fase 1	Peso propio
fase 2		Esfuerzo horizontal en la dirección "-x" distribuido en función de la masa		fase 2	Esfuerzo horizontal "-y" distribuido en función de la masa	
Condiciones de Contorno	Plano de corte perpendicular al eje x	fase 1	simetría	Plano de corte perpendicular al eje x	fase 1	simetría
		fase2	libertad de movimientos		fase2	simetría
	Plano de corte perpendicular al eje y	fase1	simetría	Plano de corte perpendicular al eje y	fase1	simetría
		fase2	simetría		fase2	libertad de movimientos
	Base		empotramiento		Base	

Tabla7.6 Resumen condiciones de contorno de contorno y carga consideradas en los dos cálculos que conforman el caso *Estudio del efecto de una sollicitación sísmica*

### 7.3.2 Estudio de la Solicitación Sísmica en la dirección “-x”. Análisis de los resultados

En este caso de estudio el cálculo se ha detenido cuando la fuerza horizontal equivalente distribuida en función de la masa ha alcanzado el valor que corresponde a una aceleración de  $2,7\text{m/s}^2$ . Ello ha sido así porque se produce una rotura local. Concretamente, en el primer piso en la parte trasera de la segunda columna C23 el ratio a tracción supera el valor de 16 (ver Fig.7.19). En consecuencia, se produce un desgarro laminar de carácter local. Esta rotura no provoca el colapso de la estructura, tanto por su carácter localizado como por encontrarse en elementos secundarios en cuanto a resistencia del edificio. Además, corresponde a una de las zonas en que la geometría estaba mal definida en los planos. En consecuencia, es probable que el modelo no se corresponda con el edificio real en esta zona. Por todas estas consideraciones se puede afirmar que la mezquita resiste solicitaciones horizontales en la dirección “-x” superiores a  $2,7\text{m/s}^2$  sin llegar al colapso. No se ha seguido estudiando hasta qué valor aguanta la estructura por la dificultad de modificar la geometría para que no haya rotura local.

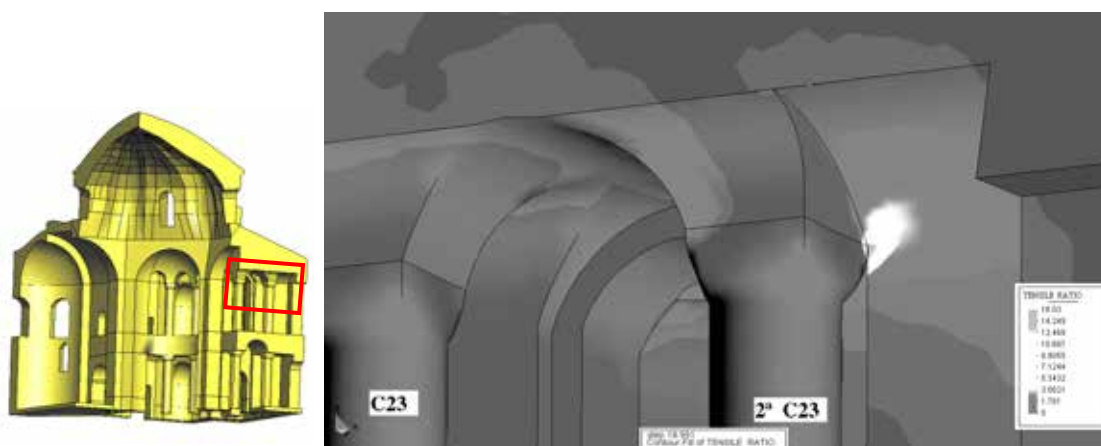


Fig.7.19 Detalle de la parte trasera de la segunda columna C23 con el ratio a tracción cuando la  $F_H = 2,7\text{m/s}^2$  en el caso *Solicitud sísmica en la dirección “-x”*. Se puede apreciar el punto donde se produce el desgarro laminar localizado que para el cálculo

A continuación, se analizarán los resultados obtenidos cuando la aceleración horizontal es de  $2,7\text{m/s}^2$ . Esta situación ya se corresponde con un seísmo de gran magnitud, así que los resultados son significativos a pesar de que no estemos en el momento de colapso.

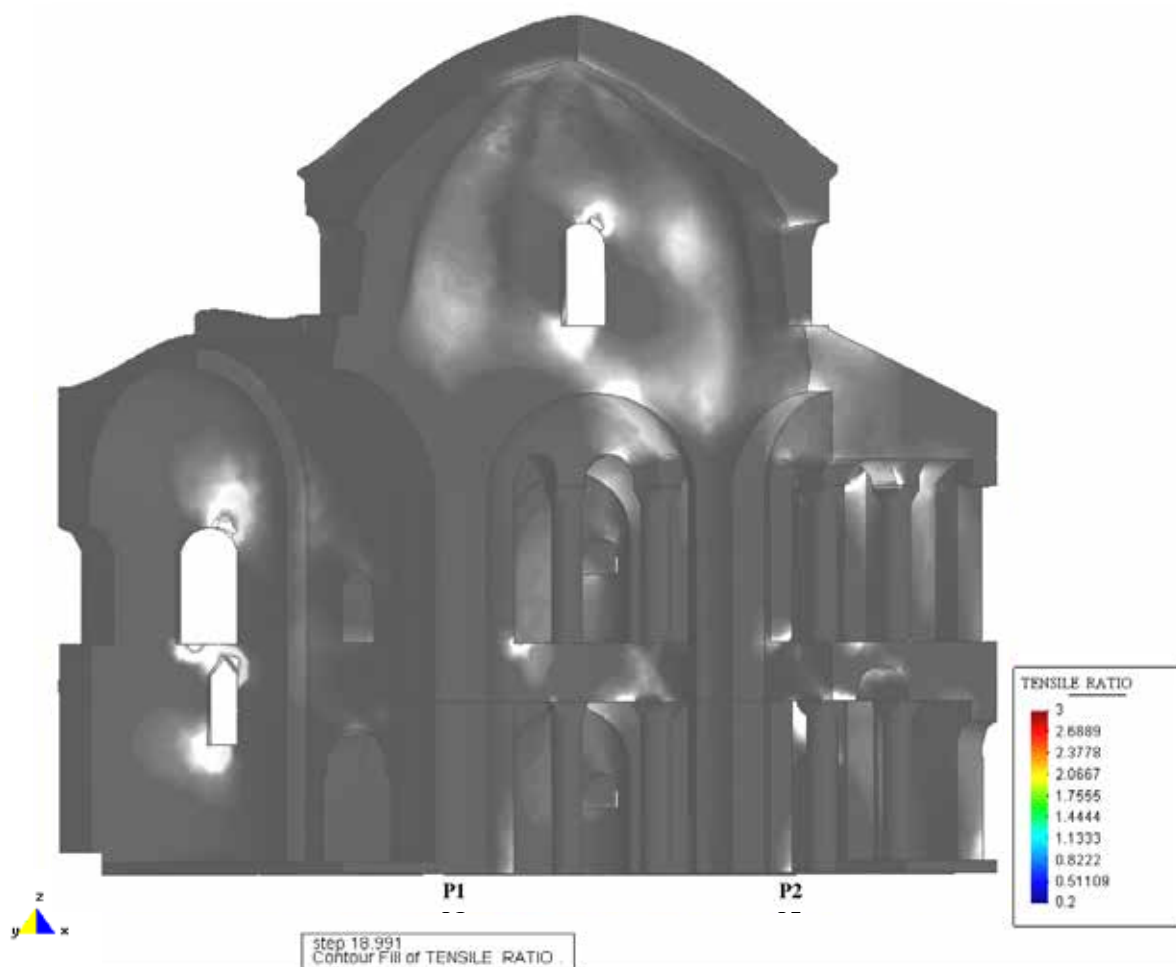


Fig.7.20 Ratio a tracción cuando la  $F_H = 2,7\text{m/s}^2$  en el caso *Solicitud sísmica en la dirección “-x”*. Rango de valores del ratio acotado entre 0,2 y 3. El máximo llega a 16,03

Mirando las tracciones que se producen en las zonas de las grietas que estamos analizando en este capítulo encontramos resultados muy esclarecedores. En la Fig.7.20 vemos que superan la resistencia a tracción, tienen un ratio a tracción mayor que 1, las grietas G4 y la mitad cercana al pilar P2 de las G3. En las grietas G5 y G2 el ratio a tracción es de 0,7 mientras que desaparecen los problemas causados por el efecto del peso propio en la grieta G1 (ahora tiene un ratio a tracción inferior a 0,2). En consecuencia, este caso de estudio predice la aparición de las grietas G4 y la mitad cercana al pilar P2 de las grietas G3. Las zonas de grietas G5 y G2 quedan mucho más solicitadas pero no se llegan a agrietar. Sin embargo, es interesante ver que existe una coincidencia, en gran medida, entre las zonas más solicitadas y las grietas importantes del edificio. Por tanto, parece que se trata de las zonas más propensas a tener problemas.

No todos los resultados coinciden con las observaciones reales. En la Fig.7.20 se puede ver como la parte de la cúpula que se encuentra encima del pilar P2 también tiene un ratio a tracción superior a 1. Esto indicaría que también allí debería formarse una grieta. Sin embargo en este punto no tenemos ninguna de las grietas importantes. Se ha comparado con fotografías y se ha apreciado que en esta zona se ha desprendido parte de las pinturas decorativas pero no se observan más que pequeñas fisuras. Además, es importante destacar que las zonas más solicitadas a tracción son los contrafuertes de la cúpula y las bóvedas de los pasillos secundarios. En los contrafuertes se supera el ratio a

tracción igual a 1,5 en áreas muy importantes (ver Fig.7.21). En esas áreas las tracciones provocan un daño de 0,5 que si aumentase podría llegar a ser peligroso. No obstante, estos resultados no son muy precisos y los efectos que produce el seísmo en estos puntos es muy inferior. El motivo es que en el plano de corte del cuadrante de mezquita modelado se ha impuesto la condición de libre desplazamiento. En consecuencia nuestro cuadrante de cúpula no percibe la sustentación lateral del cuadrante de cúpula que, en la realidad, tiene al lado. Existe una colaboración del resto del edificio porque la deformación que se produce en ambos sentidos es distinta, tal y como se verá al comparar los resultados de un mismo sismo en la misma dirección pero en sentidos contrarios (apartado 7.3.4). Esta consideración se podría tener en cuenta para todo el edificio, pero es más importante cuando más alejados se esté de los puntos de arriostamiento (el suelo). Por este motivo la consideración es despreciable en el cuerpo del edificio.

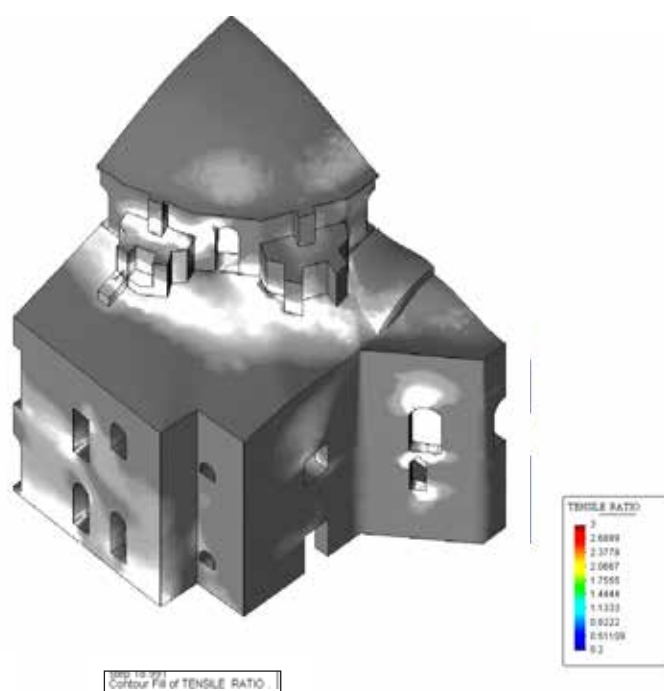


Fig.7.21 Vista del exterior del modelo con el Ratio a tracción cuando la  $F_H = 2,7m/s^2$  en el caso *Solicitud sísmica en la dirección "-x"*. Rango de valores del ratio acotado entre 0,2 y 3

La segunda zona con tracciones importantes bajo esta sollicitación son las bóvedas de los pasillos secundarios. En la Fig.7.22 se puede apreciar que en la bóveda principal del primer piso existe una extensa zona donde se supera el límite a tracción. Sin embargo esta área discurre paralela al eje de la bóveda mientras que las grietas actuales del edificio en esta zona discurren de forma perpendicular al eje de la bóveda. También podemos ver que en las ventanas del ábside aparecen zonas fuertemente traccionadas. En la realidad estas zonas no están agrietadas. El motivo por el cual estas zonas que salen dañadas en el modelo se encuentran sanas en la actualidad, podría ser que sólo provocan pequeños desprendimientos. Como este daño sólo se produce en fenómenos sísmicos de gran magnitud que ocurren cada muchos años estos desprendimientos deben de haberse reparado añadiendo nuevo material y recubriendo de nuevo. Si tenemos en cuenta estos mecanismos de mantenimiento, es esperable que haya toda una serie de



grietas y pequeños desprendimientos producidos por el efecto de pasadas vibraciones sísmicas que no están visibles en la actualidad

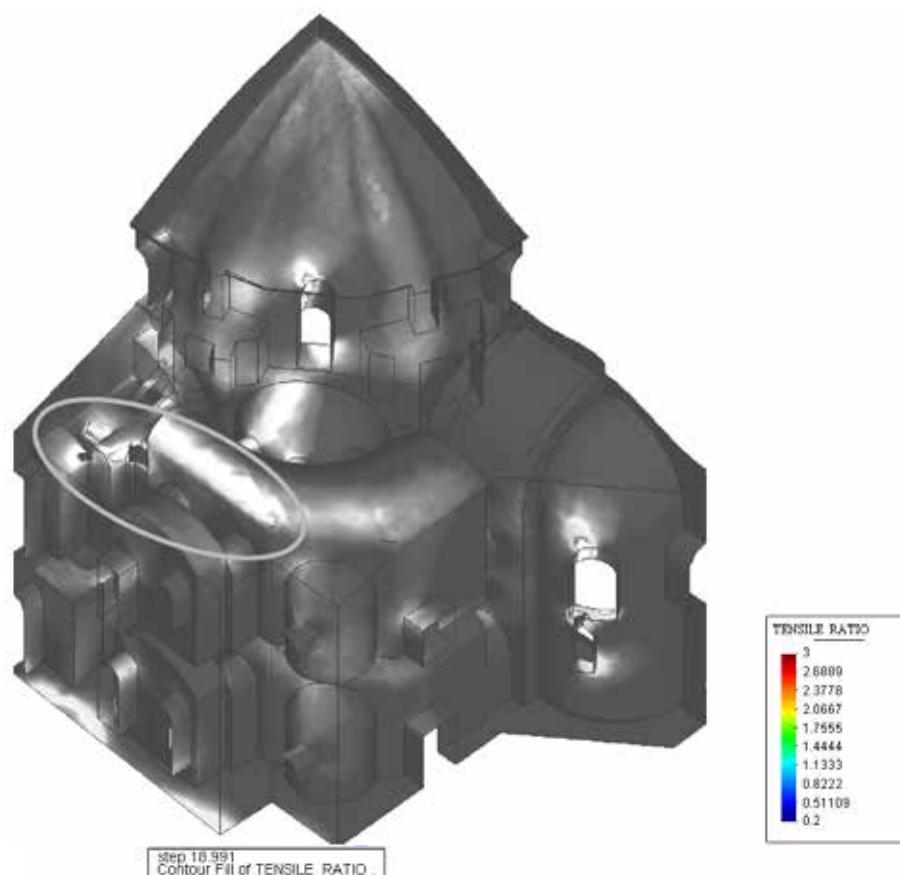


Fig.7.22 Vista de las bóvedas de los pasillos secundarios posteriores (vista des de el exterior con la pared transparente) con el Ratio a tracción cuando la  $F_H = 2,7m/s^2$  en el caso *Solicitación sísmica en la dirección "-x"*. Rango de valores del ratio acotado entre 0,2 y 3. En el óvalo rojo están marcadas loas bóvedas más solicitadas

Los resultados estudiados hasta ahora corresponden a las tensiones que tenemos en las superficies que definen los contornos de los volúmenes de la mezquita. Es interesante el comprobar la profundidad de afección de las tracciones para ver hasta qué punto las grietas que provocan pueden ser profundas o superficiales. En este sentido se presenta la Fig.7.23 donde se aprecia que el espesor del color verdoso en la grieta G3 es inferior a 20cm. Por tanto la grieta que se produce en esta zona debido a la solicitación del presente caso es poco profunda. Sí parecen profundas las tracciones que se producen a la altura de las ventanas. Éstas corresponden a las tracciones vistas anteriormente en los contrafuertes, que ya se ha mencionado que deben minorarse por la sustentación adicional que aporta el resto del edificio no contemplado en el modelo. En la Fig.7.24 se aprecia, además, como las tracciones en los pasillos secundarios sí tienen un espesor importante en algunos puntos.

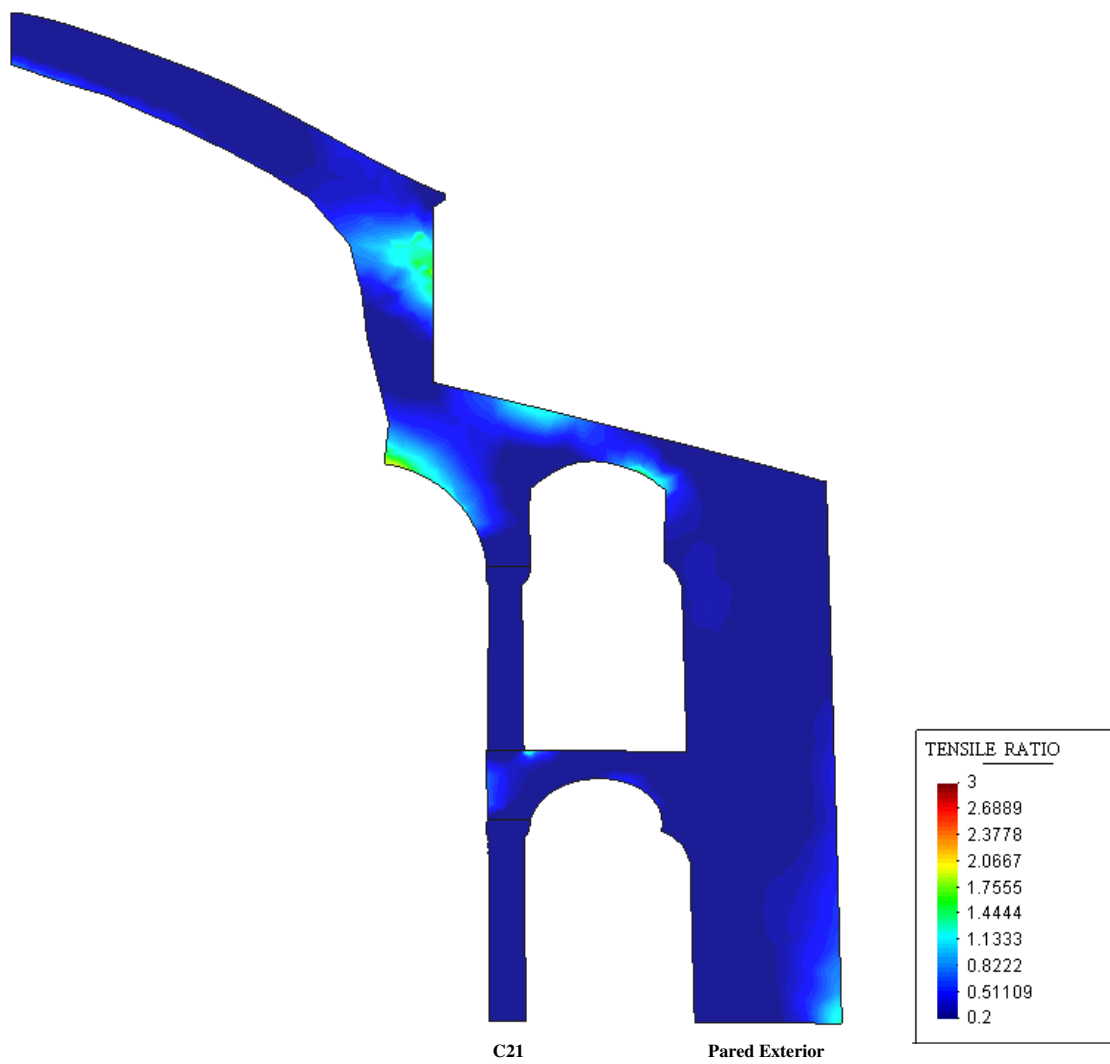


Fig.7.23 Sección vertical que pasa por el punto central de la cúpula y por las columnas C21 con los resultados Ratio a tracción cuando la  $F_H = 2,7m/s^2$  en el caso *Solicitud sísmica en la dirección "-x"*. Rango de valores del ratio acotado entre 0,2 y 3

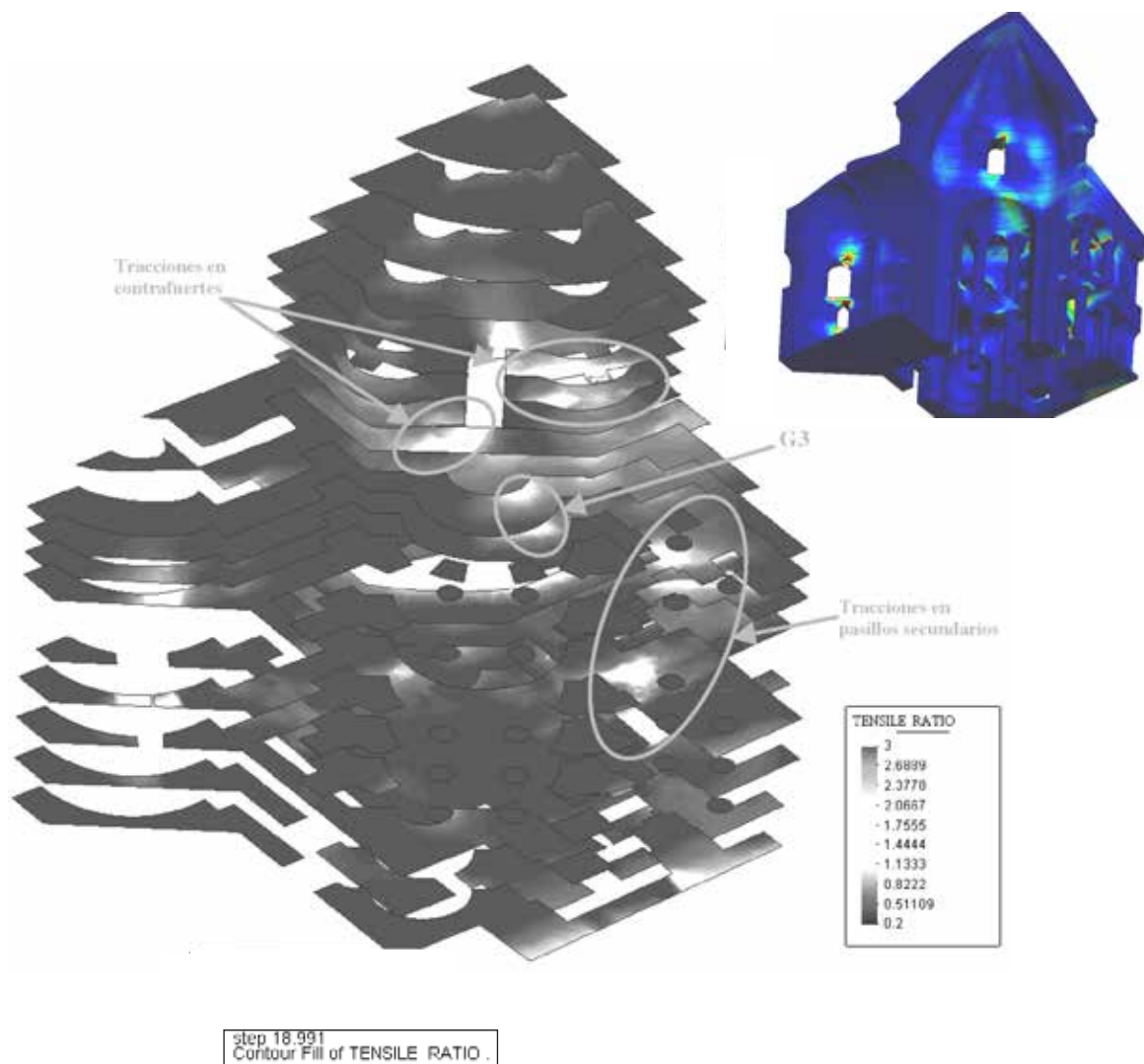


Fig.7.24 Sucesión de secciones horizontales con los resultados Ratio a tracción cuando la  $F_H = 2,7m/s^2$  en el caso *Solicitación sísmica en la dirección “-x”*. Rango de valores del ratio acotado entre 0,2 y 3. Se aprecia la profundidad de las tracciones

Las tracciones analizadas hasta este momento son debidas a un estado de sollicitación muy exigente, que corresponde a sucesos sísmicos de gran magnitud que el edificio ha sufrido en muy pocas ocasiones. Por este motivo es interesante el identificar a partir de qué sollicitación se producirían las grietas objeto de estudio. Los resultados presentados en la Fig.7.25 nos muestran las tracciones que tiene el edificio cuando la aceleración que define el seísmo es de  $1,3m/s^2$ . Esta aceleración corresponde a un terremoto mucho más suave que puede haber ocurrido muchas más veces. En esta situación ya se produciría la grieta G3. Por el contrario las grietas G4 tienen un ratio a tracción de 0,8 y este valor no llega a 1 hasta que la aceleración que define el seísmo es de  $2,4m/s^2$ . Por tanto, las grietas G4 sólo se formarían si el suceso sísmico en la dirección “-x” fuera de gran magnitud. Por el contrario las grietas G3 se pueden producir por un seísmo de intensidad media.

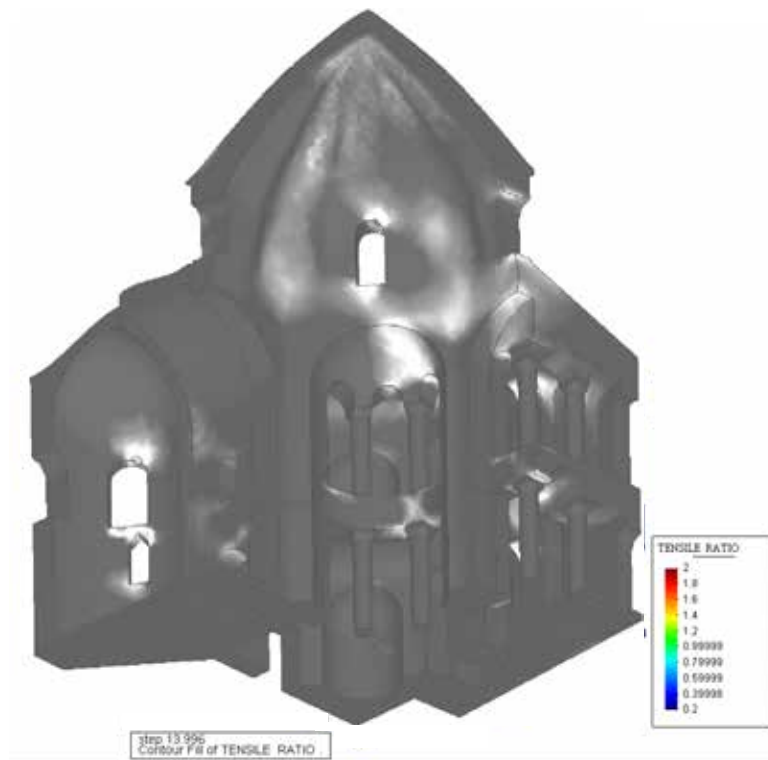


Fig.7.25 Ratio a tracción cuando la  $F_H = 1,3\text{m/s}^2$  en el caso *Solicitud sísmica en la dirección “-x”*.  
Rango de valores del ratio acotado entre 0,2 y 2

Las compresiones continúan estando, como en el resto de los casos analizados, por debajo de los límites. En la Fig.7.26 se puede apreciar como ningún punto supera 0,55 en el Ratio a compresión.

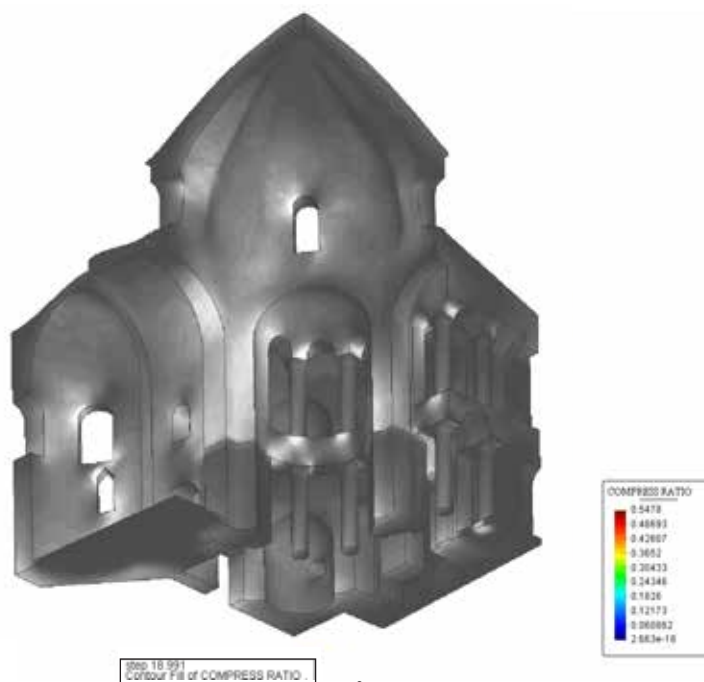


Fig.7.26 Ratio a compresión cuando la  $F_H = 2,7\text{m/s}^2$  en el caso *Solicitud sísmica en la dirección “-x”*

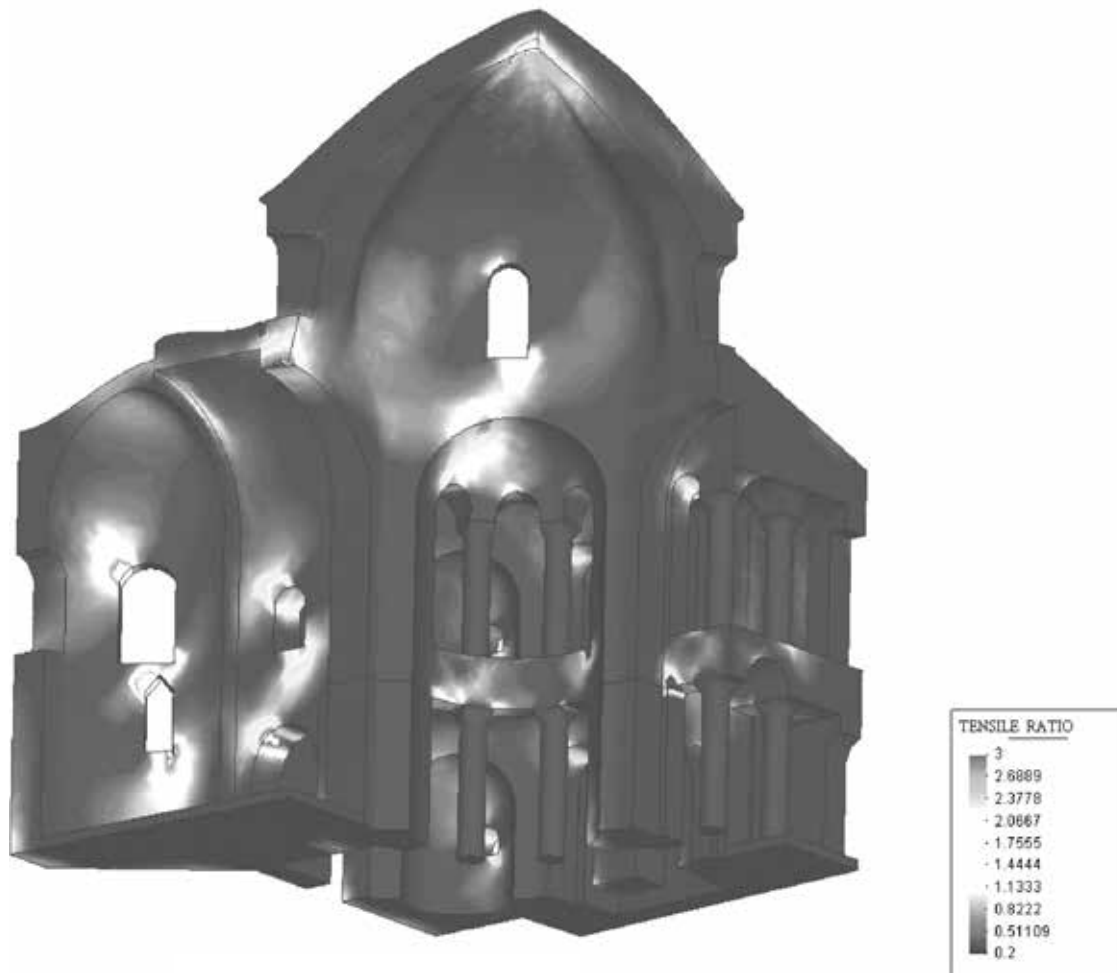


Fig.7.27 Vista en la dirección “y” de la deformada con los desplazamientos totales cuando la  $F_H = 2,7\text{m/s}^2$  en el caso *Solicitud sísmica en la dirección “-x”*

### 7.3.3 Estudio de la Solicitación Sísmica en la dirección “-y”. Análisis de los resultados

En este caso de estudio, a diferencia del anterior, no se han producido zonas locales con elevadísimas tracciones que hayan imposibilitado el cálculo. Por este motivo se han obtenido resultados hasta una aceleración horizontal de  $3\text{m/s}^2$ , tal y como se había programado. En este momento la estructura todavía no había colapsado.

En la Fig.7.28 podemos ver como se distribuyen las tracciones en el interior de la mezquita. Se aprecia que la nueva sollicitación aumenta las tracciones en las grietas G1. Éstas pasan a tener un ratio a tracción máximo de 4 cuando con el efecto exclusivo del peso propio este era de 1,55.



step 19.99  
Contour Fill of TENSILE\_RATIO .

Fig.7.28 Ratio a tracción cuando la  $F_H = 3\text{m/s}^2$  en el caso *Solicitación sísmica en la dirección “-y”*. Rango de valores del ratio acotado entre 0,2 y 3



La zona de la grieta G2 también ve aumentadas sus tracciones ya que el ratio aumenta de 0,3 a 0,7. Es significativo, a pesar de que el ratio se mantiene lejos del valor 1, que esta zona ha quedado traccionada en todas las solicitaciones que se han impuesto.

En las grietas G3 queda muy traccionada la mitad más próxima al pilar P1. Estas tracciones son superiores al límite (ratio a tracción superior a 1) y tienen capacidad de agrietar el material. Es curioso como sumando los efectos que provoca un sismo en la dirección “-x” y en la dirección “-y” obtenemos la totalidad de las grietas que conforman la zona G3. Se ha comprobado que a igual aceleración horizontal las tracciones que se producen en la zona G3 cuando la fuerza es en la dirección “-y” es muy superior que cuando es en la dirección “-x” (ratio de 2,7 respecto ratio de 1,8). Esto implica que en esta zona se comporta mejor el edificio ante una solicitación en la dirección “-x”.

Bajo el esfuerzo en la dirección “-y” la zona de grietas G4 compensa las tracciones que tiene cuando se encuentra bajo el efecto exclusivo del peso propio. Al dejar de estar traccionada resiste sin problemas.

La zona de grietas G5 tampoco sufre tracciones de importancia.

Si se analizan las tracciones en el resto del cuerpo de la mezquita vemos que son importantes en las ventanas del ábside y en varias pequeñas bóvedas (ver Fig.7.29). Todas las bóvedas con tracciones elevadas tienen en común que su directriz es perpendicular al de aplicación de la fuerza. Además, las tracciones se producen en el mismo sitio, en la parte alta del lado de donde viene la fuerza. Este fenómeno ocurría de igual manera en el caso anterior. Estas tracciones son de tipo local y podrían desprender parte del material. Sin embargo, el carácter macizo de las bóvedas de mampostería que estamos analizando evitaría que estos desprendimientos pusieran en peligro la estabilidad global de la estructura.

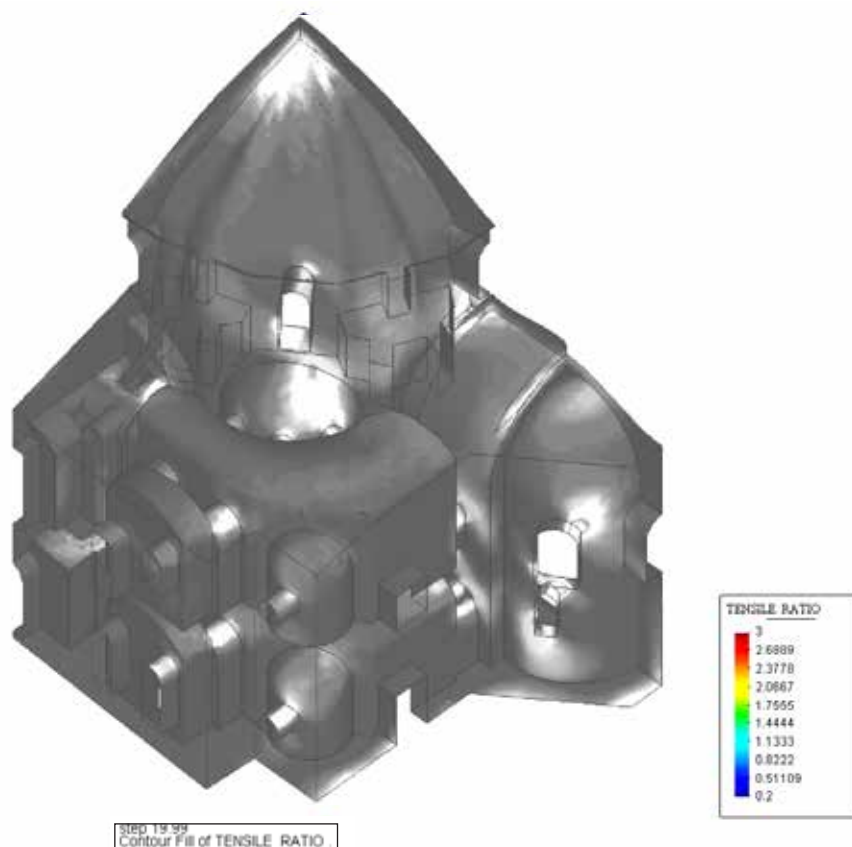


Fig.7.29 Vista de las bóvedas de los pasillos secundarios posteriores (vista desde el exterior con la pared transparente) con el Ratio a tracción cuando la  $F_H = 3m/s^2$  en el caso *Solicitación sísmica en la dirección “-y”*. Rango de valores del ratio acotado entre 0,2 y 3.

En la Fig.7.30 se aprecia como las tracciones en los contrafuertes para este caso son muy inferiores que para el caso anterior. Ahora el ratio a tracción máximo que se registra en esa zona es de 1,4 mientras que bajo sollicitación en dirección “-x” era de 3. Esta comparación indica que esta zona resiste mucho mejor cuando la fuerza es en dirección “-y”.

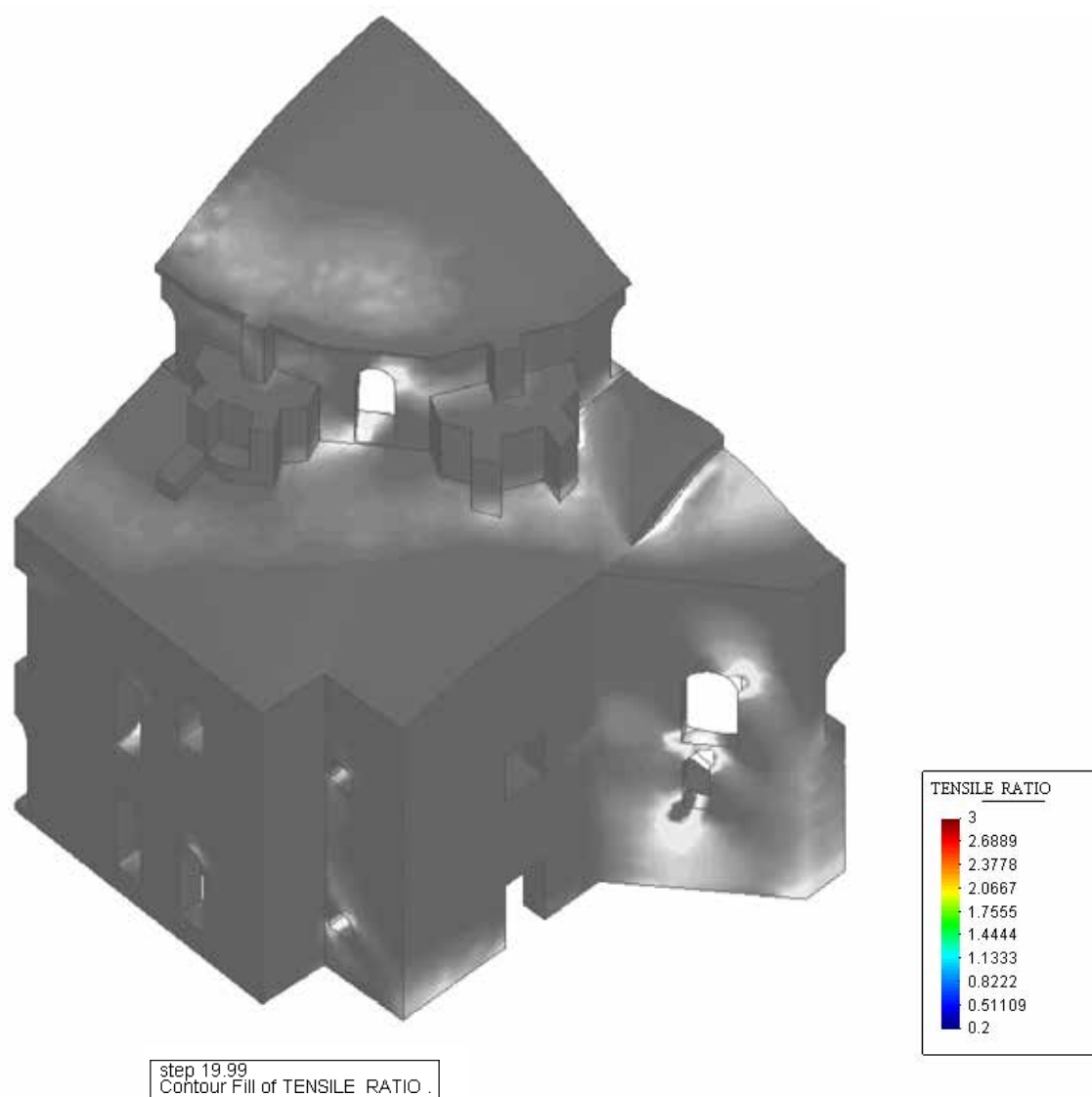


Fig.7.30 Vista del exterior del modelo con el Ratio a tracción cuando la  $F_H = 3\text{m/s}^2$  en el caso *Estudio de la sollicitación sísmica en la dirección “-y”*. Rango de valores del ratio acotado entre 0,2 y 3

Esta última reflexión viene apoyada por las observaciones realizadas en cuanto a la deformación relativa de la cúpula respecto su base (octógono a 14m de altura sobre el que está apoyada la cúpula) apreciables en las figuras Fig.7.31. En el presente caso (aceleración  $2,7\text{m/s}^2$  en dirección “-y”) el octógono tiene un desplazamiento en la dirección “y” de -2,5mm y en el punto central de la cúpula el desplazamiento es de -5,0mm. Los valores del desplazamiento en la dirección “x” para el caso anterior (aceleración  $2,7\text{m/s}^2$  en dirección “-x”) son -2,9mm en el octógono y -7,5mm en el punto central de la cúpula. Calculando tenemos que bajo la misma sollicitación, en la dirección “y” la deformación es de 2,5mm mientras que en la dirección “x” es de

4,6mm, casi el doble. Esto implica que los contrafuertes actúan y resisten mucho mejor en la dirección “y” que en la “x”.

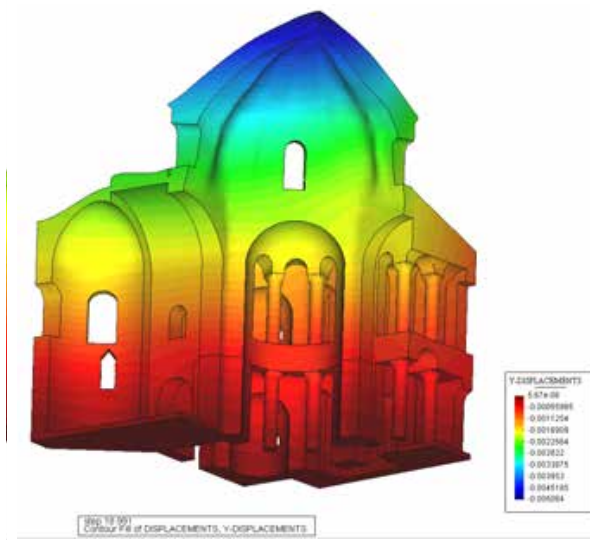


Fig.7.31 a) Desplazamientos en la dirección “y” cuando la  $F_H = 2,7m/s^2$  en el caso *Solicitud sísmica en la dirección “-y”*

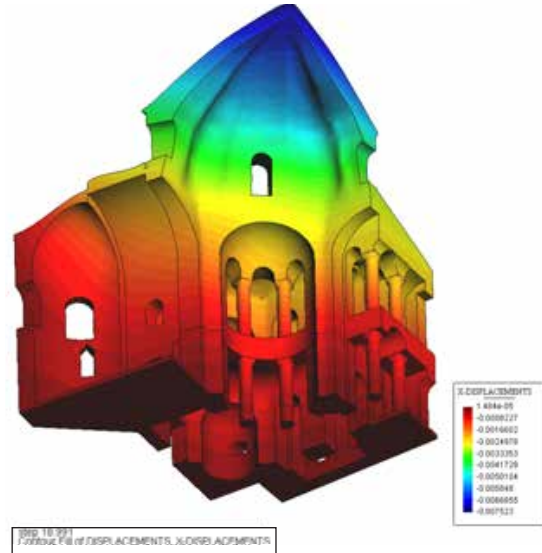


Fig.7.31 b) Desplazamientos en la dirección “x” cuando la  $F_H = 2,7m/s^2$  en el caso *Solicitud sísmica en la dirección “-x”*

Analizando el caso de un sismo de magnitud más moderada vemos que necesitamos una aceleración horizontal de  $1,5m/s^2$  para que se empiece a agrietar la zona de grietas G3 (ver Fig.7.32). La otra zona de grietas que se veía afectada por este caso es la G1. Pero ya se ha visto en el apartado 7.1.2 que estas grietas se forman por el efecto exclusivo del peso propio. Cualquier pequeña vibración en la dirección “-y” podría ayudar a crecer esta grieta ya que actúa aumentando las tracciones.

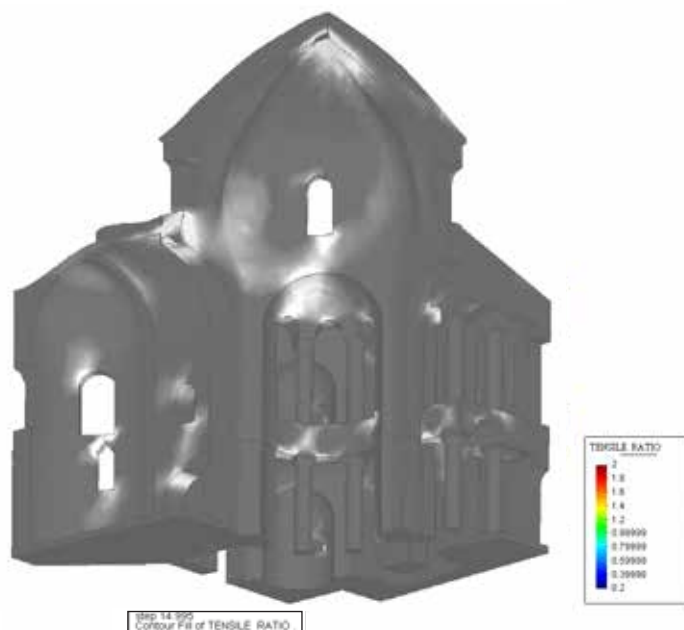


Fig.7.32 Ratio a tracción cuando la  $F_H = 1,5m/s^2$  en el caso *Solicitud sísmica en la dirección “-y”*. Rango de valores del ratio acotado entre 0,2 y 2

Para evaluar la profundidad de las grietas que se pueden formar en este caso se presenta la Fig.7.33. Corresponde a una sección vertical donde se visualiza el alcance de las grietas G3 en la zona cercana al pilar P1. La zona con tracciones capaces de agrietar está tintada en turquesa, verde y rojo. El espesor de estos colores tiene un valor máximo de 40cm. A la altura del arco de las ventanas de la cúpula podemos ver otra mancha de color verde. Corresponde a las tracciones locales que se producen en todas las bóvedas del cuerpo de la mezquita y que ya hemos visto que no son muy importantes a nivel global.

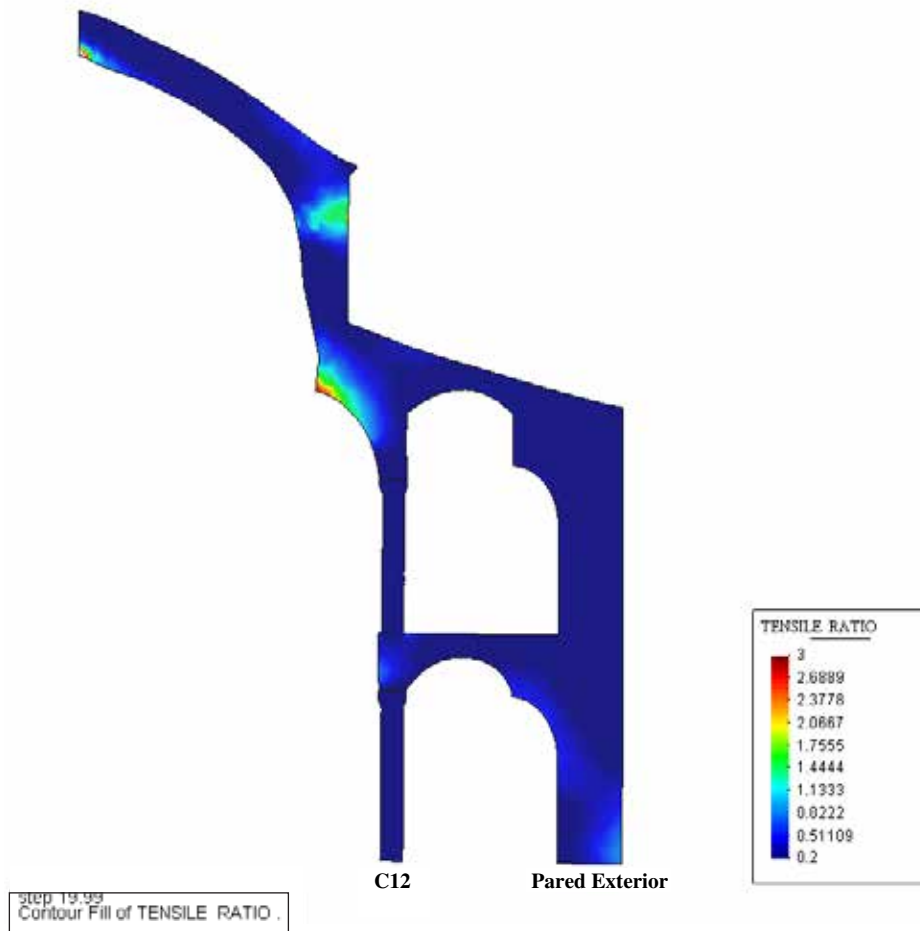


Fig.7.33 Sección vertical que pasa por el punto central de la cúpula y por las columnas C12 con los resultados Ratio a tracción cuando la  $F_H = 3m/s^2$  en el caso *Solicitación sísmica en la dirección “-y”*. Rango de valores del ratio acotado entre 0,2 y 3

Al igual que en el resto de casos estudiados las compresiones se mantienen muy por debajo de sus límites. Se puede comprobar en la Fig.7.34, donde en ningún punto tiene un ratio a compresión superior a 0,56.

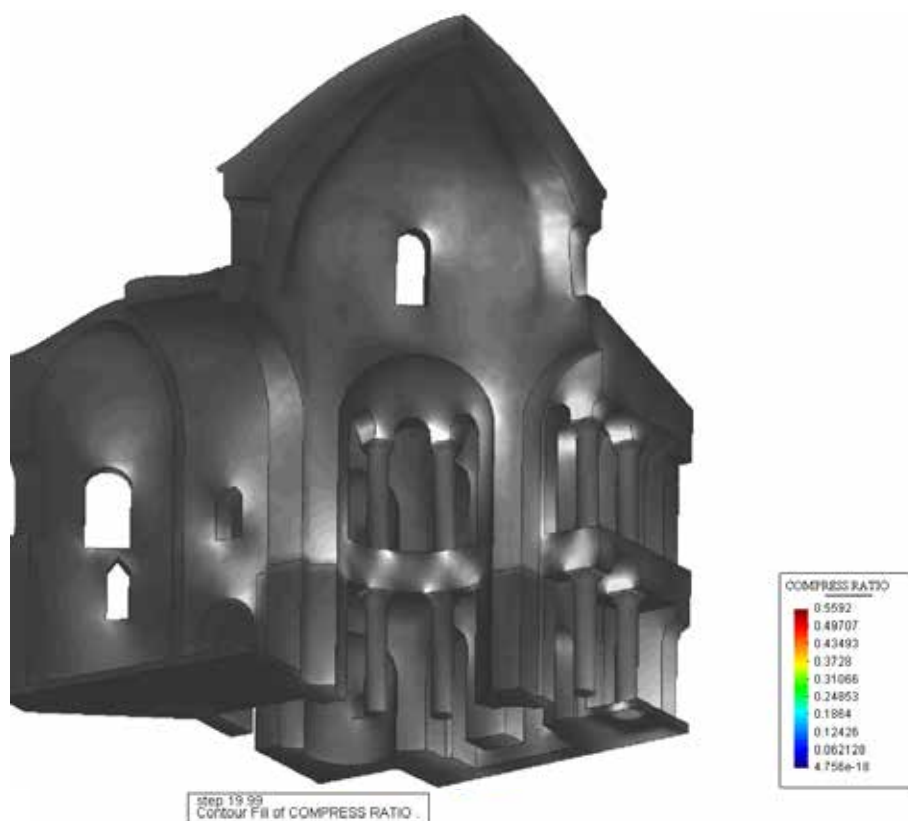


Fig.7.34 Ratio a compresión cuando la  $F_H = 3m/s^2$  en el caso *Solicitud sísmica en la dirección “-y”*

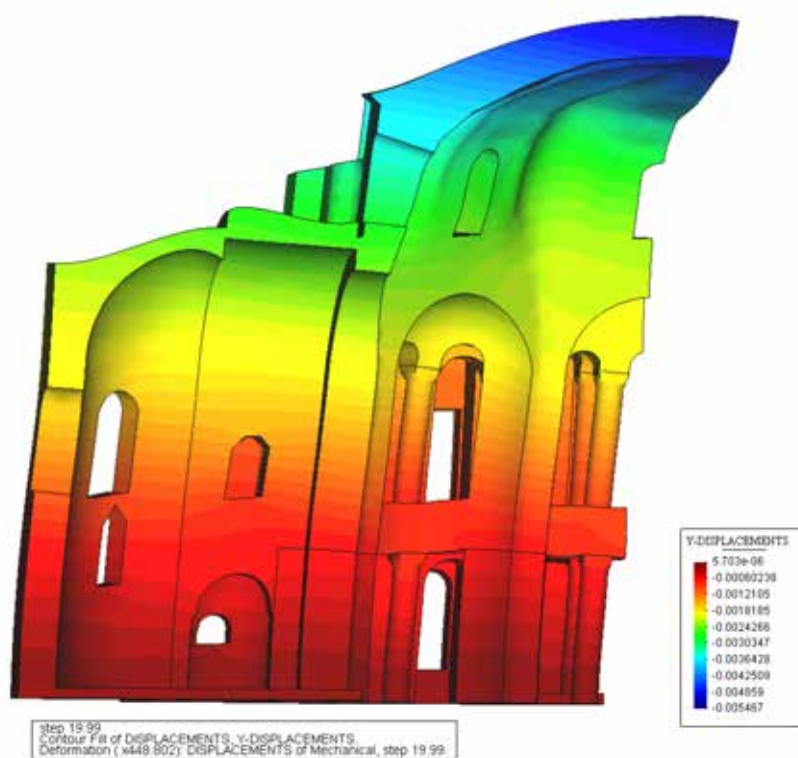


Fig.7.35 Vista en la dirección “x” de la deformada con los desplazamientos en la dirección y cuando la  $F_H = 3m/s^2$  en el caso *Solicitud sísmica en la dirección “-y”*

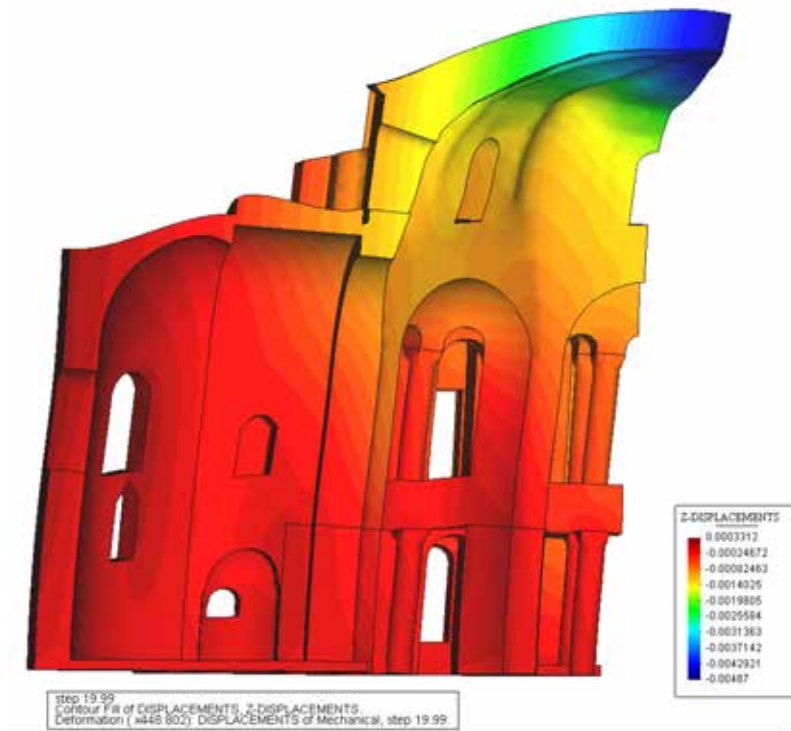


Fig.7.36 Vista en la dirección “x” de la deformada con los desplazamientos en la dirección z cuando la  $F_H = 3m/s^2$  en el caso *Solicitud sísmica en la dirección “-y”*

### 7.3.4 Estudio de la Solicitud Sísmica en la dirección “+y”. Análisis de los resultados

Este estudio se ha realizado de forma adicional para acotar la aceptabilidad de la hipótesis de libertad de movimientos impuesta en los planos perpendiculares a la dirección de aplicación de la carga horizontal. Esta hipótesis se ha elegido en detrimento de la hipótesis de antimetría, pues esta tampoco es válida dado que el análisis es no-lineal.

Las condiciones de contorno consideradas son las mismas que en el caso *Estudio de la solicitud sísmica en la dirección “-y”* pero aplicando la fuerza horizontal en dirección “+y”.

En la Fig.7.37b se pueden apreciar los desplazamientos en la dirección “z” obtenidos en el presente caso. Si se comparan con la Fig7.36, desplazamientos en la misma dirección “z” pero del caso de estudio con la fuerza horizontal en la dirección “-y”, se puede deducir que el haber impuesto la condición de antimetría hubiera sido erróneo. Cuando se aplica esta condición los desplazamientos verticales no están permitidos. El motivo es que en un lado del plano de aplicación de la condición los desplazamientos verticales son en sentido hacia arriba y en el otro lado son hacia abajo; la única forma de que exista compatibilidad en el plano de antimetría es con los desplazamientos verticales nulos. Sin embargo, este fenómeno no ocurre en los cálculos realizados. Cuando actúa la carga sísmica en dirección “-y” el desplazamiento vertical pasa de -1,4mm a - 4,8mm. Cuando la carga se aplica en sentido contrario el desplazamiento vertical también es hacia abajo y pasa de -1,4mm a -2mm. Es evidente que el segundo caso de estudio equivale al primer caso pero con la geometría del otro lado del posible plano de antimetría y viceversa. En consecuencia, tenemos que para



ambos lados del posible plano de antimetría el desplazamiento vertical es en la misma dirección. Estos resultados confirman la falta de sentido del haber aplicado la condición de antimetría.

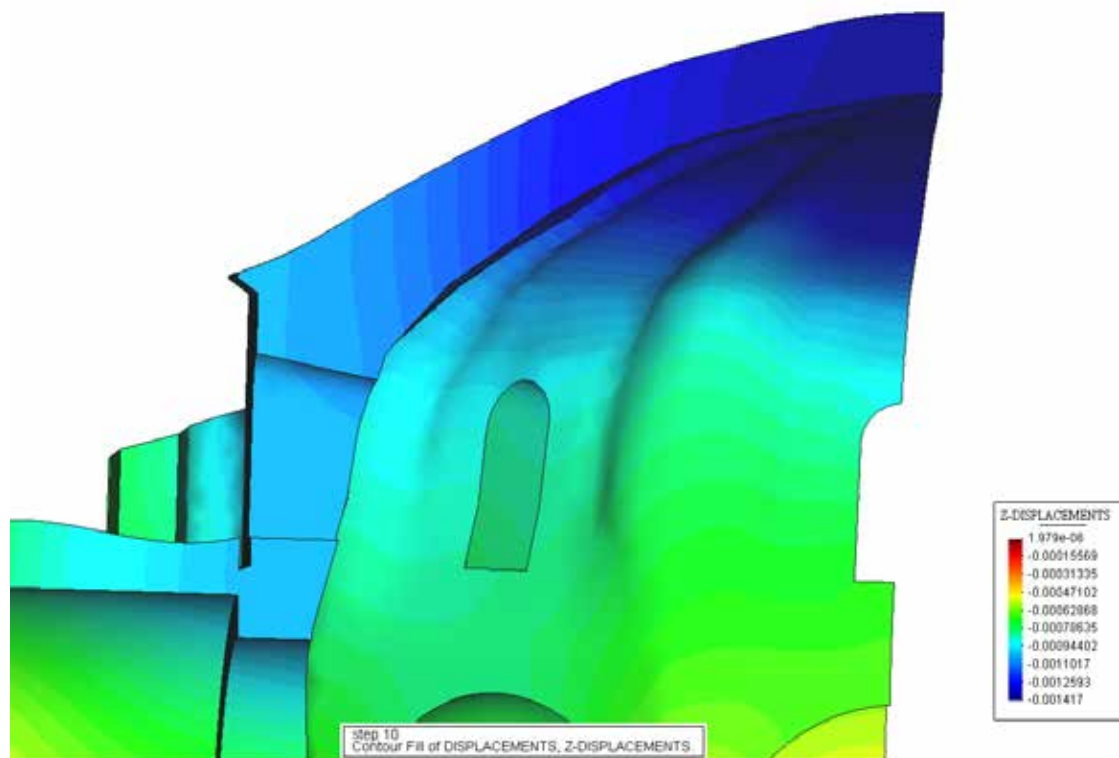


Fig.7.37a Desplazamientos en la dirección z en la cúpula cuando solamente actúa el peso propio en el caso *Estudio de la sollicitación sísmica en la dirección “+y”*

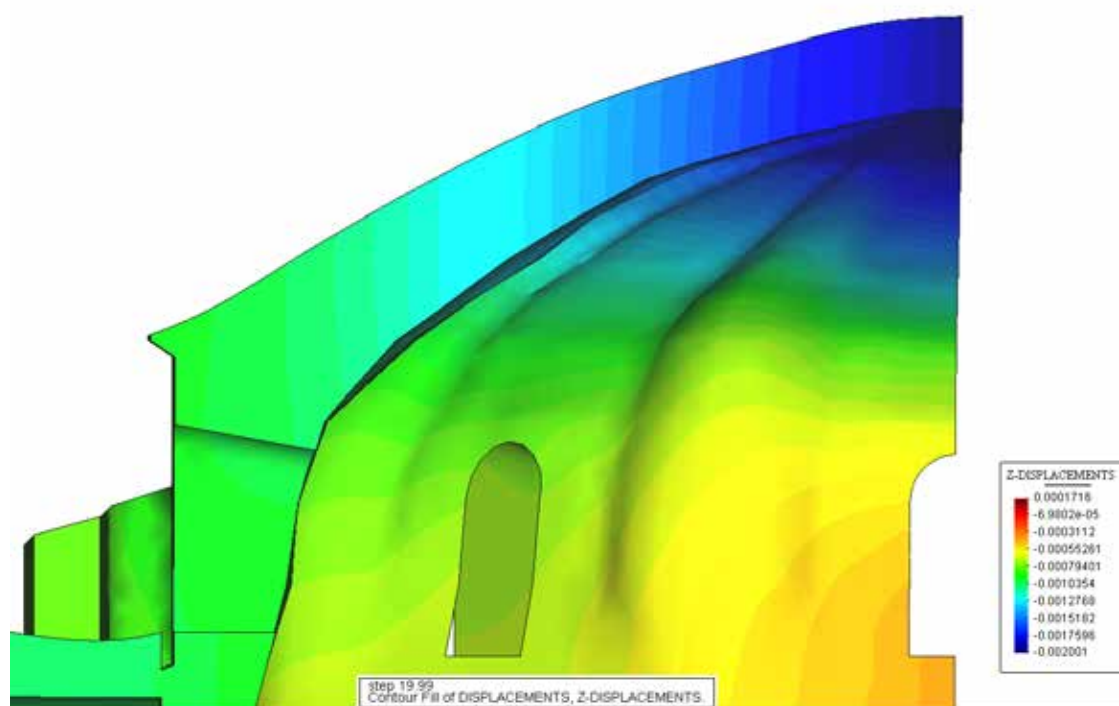


Fig.7.37b Desplazamientos en la dirección z en la cúpula cuando la  $F_H = 3m/s^2$  en el caso *Estudio de la sollicitación sísmica en la dirección “+y”*

Si se comparan los desplazamientos horizontales de los casos de aplicación de la fuerza sísmica equivalente en las direcciones “-y” y “+y” (ver Fig.7.35 y Fig.7.38 respectivamente), se puede apreciar que son muy diferentes. En el punto central de la cúpula, por ejemplo, el desplazamiento horizontal es de 5,4mm para un caso y 1,4mm para el otro. Estas diferencias tan grandes demuestran que la condición de libertad de desplazamientos en la dirección de aplicación de la carga es poco aceptable, ya que el cuadrante de edificio contiguo influye en la resistencia al tener que compatibilizar los desplazamientos.

Gracias a este estudio se puede confirmar la idea expresada en el apartado 7.3.1 de que las tracciones que salen en los contrafuertes deben minorarse por el efecto del cuadrante de edificio contiguo.

Se ha constatado que ambas condiciones, tanto la antimetría como la libertad de movimientos, no son correctas para el plano perpendicular a la dirección de aplicación de la carga. La forma de obtener una condición de contorno más exacta es buscando, mediante un proceso iterativo, qué fuerza horizontal y vertical compatibiliza los desplazamientos para el cálculo en la dirección “+y” y “-y”. Este procedimiento también tiene sus carencias ya que la condición de contorno no es constante en todo el plano. Por este motivo la mejor forma de realizar el análisis sísmico correctamente es utilizando una geometría que considere todo el edificio y no sólo un cuadrante. Este hecho deberá tenerse en cuenta en estudios que quieran profundizar en el estudio sísmico del presente edificio.

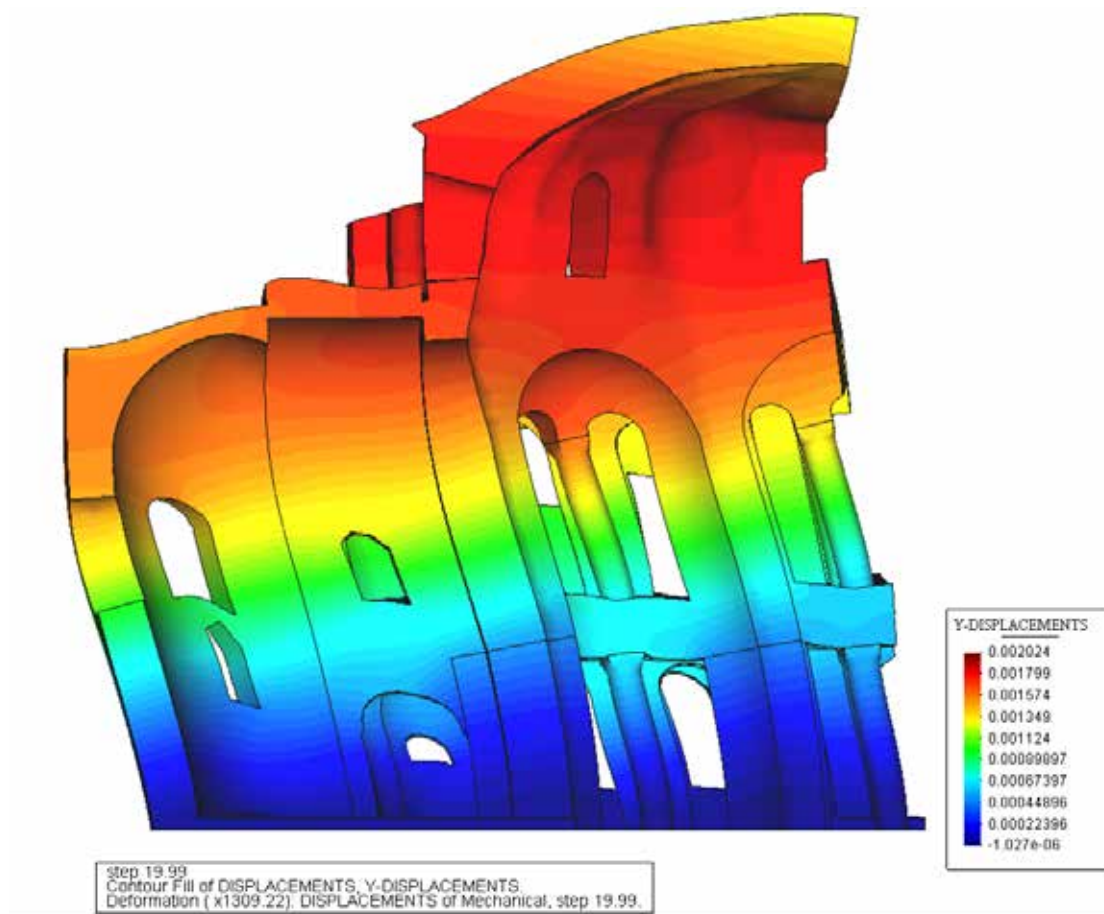


Fig.7.38 Vista en la dirección “x” de la deformada con los desplazamientos en la dirección y cuando la  $F_H = 3m/s^2$  en el caso *Estudio de la sollicitación sísmica en la dirección “+y”*

### 7.3.5 Conclusiones parciales

Se ha realizado un estudio aproximado donde se ha aplicado una fuerza estática horizontal equivalente ponderada por la masa, en dos direcciones ortogonales. La validez del estudio está limitada por utilizar solamente un cuadrante del edificio y no tener definidas con exactitud las condiciones de contorno.

En ambas direcciones de aplicación de la fuerza no se llega a una situación de fallo global de la estructura.

El modelo predice que las grietas G1, G3 y G4 pueden tener su origen en un suceso sísmico. Además la grieta G2 vio aumentada su tracción en ambas direcciones de aplicación de la carga. Como en las dos direcciones estudiadas se han obtenido daños muy distintos es probable que el estudio en nuevas direcciones justifique el origen de otros daños.

En ambos casos estudiados se han producido daños locales en las bóvedas de los pasillos secundarios. Estos daños producirían, en la realidad, pequeños desprendimientos de material que gracias al carácter macizo de la obra de fábrica no producen el colapso global de la bóveda. Estos daños que predice el modelo no son visibles en la actualidad. Probablemente se deba a que han sido reparados y la situación de carga normal del edificio no provoque que se desprendan de nuevo.

Es importante destacar que el análisis de la cúpula bajo esta situación de carga ha concluido que resiste mejor una sollicitación en la dirección “y” que en la dirección “x”.

## 7.4 Estudio del efecto del terraplén de la vía férrea

Como se ha mencionado en el capítulo 5 en la década de los 50 se renueva la línea de ferrocarril que discurre al lado del edificio. El principal cambio que sufre en el tramo del edificio es que se sube el nivel de la vía hasta 2,5 metros por encima de la cota de la planta baja de la mezquita. Además, por falta de espacio, se apoya el terraplén a la pared exterior del edificio en un tramo de dos metros, aproximadamente. Este apoyo del terraplén supone una carga adicional a resistir por el edificio.

Esta nueva carga sufrida por la mezquita desde hace 50 años podría haber influido en la progresión de fisuras. Para resolver esta incertidumbre se procedió a estudiar el presente caso.

### 7.4.1 Condiciones de apoyo y carga

La presión que ejerce el terraplén sobre la pared exterior del edificio es de tipo hidrostático. Como el GiD no permite incorporar una distribución de presiones de este tipo, se ha simplificado discretizando la altura de la zona de contacto en tres sectores (ver Fig.7.39). En cada uno de estos sectores se ha impuesto una presión constante que es igual a la media del respectivo sector. De esta forma nos ha quedado un diagrama de presiones en forma de bloques.

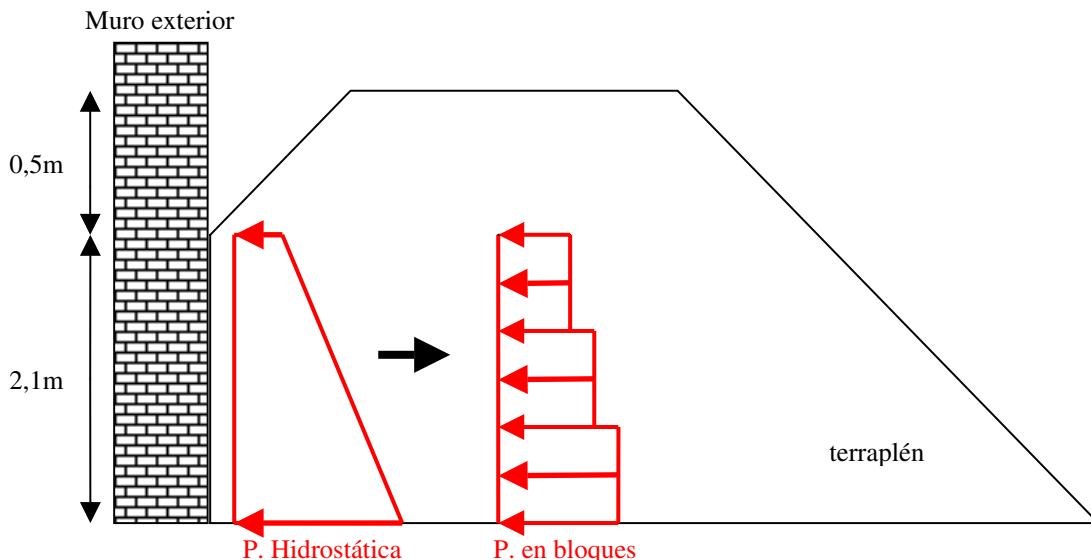


Fig.7.39 Esquema con la posición del terraplén respecto a la pared exterior. En rojo se muestra la simplificación de la distribución de presiones horizontales que efectúa el terraplén sobre la pared exterior

El cálculo de las magnitudes de las presiones a aplicar se ha hecho de forma muy aproximada y procurando estar del lado de la seguridad. Como no se tenía información sobre el material del terraplén se ha escogido una densidad estándar de  $2,5\text{g/cm}^3$ . Con este valor hemos calculado la presión vertical que tenemos para cada altura. La presión horizontal se ha considerado igual que la vertical. Se es consciente de que se está siendo muy exagerado con esta suposición, pero así se garantiza el estar del lado de la seguridad. Al final las presiones horizontales aplicadas a cada bloque son  $10500\text{ N/m}^2$  para el primero,  $31000\text{ N/m}^2$  para el segundo y  $52000\text{ N/m}^2$  para el tercero. Podemos verlas esquematizadas en la Fig.7.40.

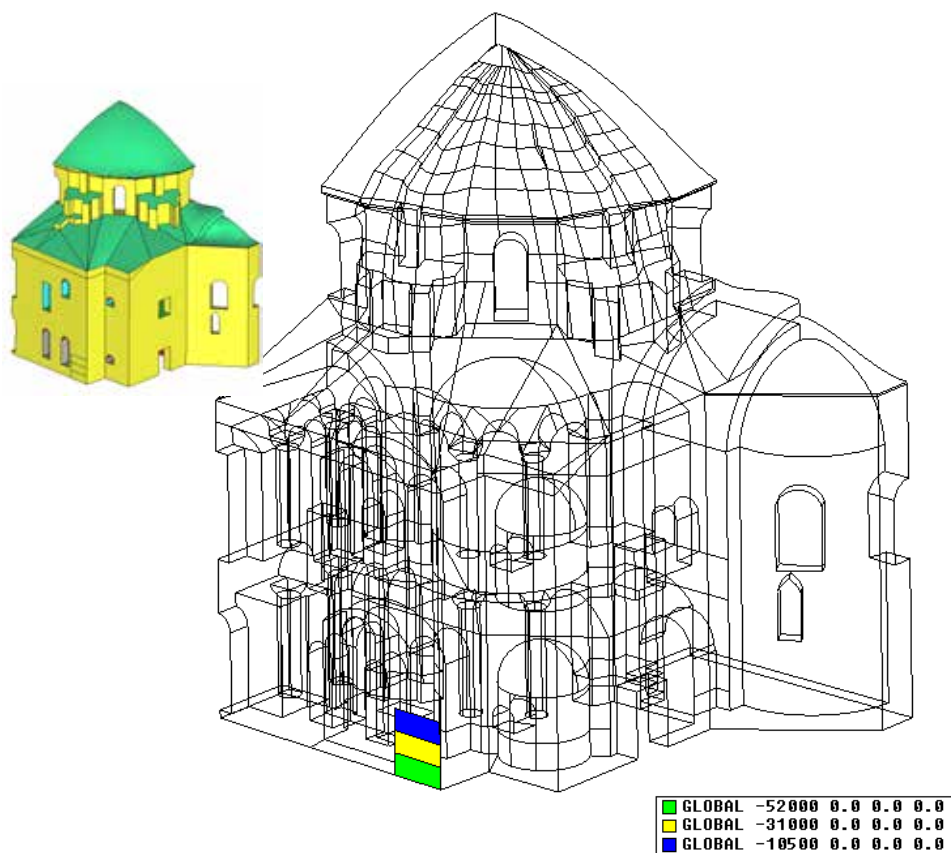


Fig.7.40 Posición y magnitud de las presiones horizontales impuestas sobre el modelo en el caso *Efecto del terraplén de la vía férrea*

Como en casos anteriores el cálculo se ha dividido en dos fases. En la primera se ha impuesto el efecto del peso propio y en la segunda el efecto de la presión horizontal del terraplén. El cálculo se ha realizado por un proceso iterativo en el que se ha incrementado de forma constante el valor de la carga aplicada a lo largo de 10 pasos.

<b>Nombre</b>	Estudio del efecto del terraplén de la vía férrea	
<b>Solicitaciones</b>	fase 1	Peso propio
	fase 2	Presión horizontal transmitida por el terraplén
<b>Condiciones de Contorno</b>	Plano de corte perpendicular al eje x	simetría
	Plano de corte perpendicular al eje y	simetría
	Base	empotramiento

Tabla 7.7 Resumen de las condiciones impuestas en el caso *Efecto del terraplén de la vía férrea*

## 7.4.2 Análisis de los resultados

A continuación se presentan los resultados obtenidos del cálculo con el modelo constitutivo elástico-lineal. No ha sido necesario volver a calcular con el modelo constitutivo con daño porque las tensiones se han mantenido por debajo de los límites.

Las cifras nos muestran que las tensiones principales y las deformaciones apenas se alteran cuando añadimos la presión del terraplén. La tensión principal a compresión, por ejemplo, se mantiene alrededor de 0,3MPa (Fig.7.41). Estos resultados permiten afirmar que el terraplén no afecta en absoluto el comportamiento estructural de la mezquita.

El único parámetro que ha sufrido un cambio importante es la tensión en la dirección x, que coincide con la dirección de aplicación de la carga. Se aprecia en las Fig.7.42a y 7.42b que esta tensión pasa de una compresión de 3000N/m<sup>2</sup> a una de 30000N/m<sup>2</sup>. Sin embargo, continúa siendo una compresión incapaz de producir daño y un orden de magnitud inferior a la existente en sentido vertical.

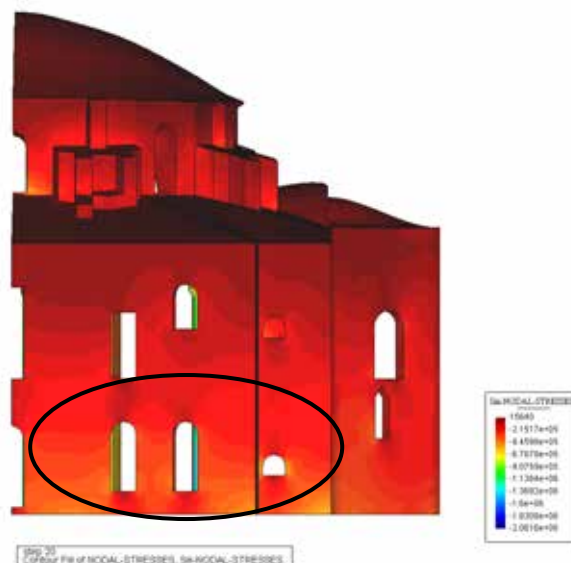


Fig.7.41 Tensiones principales de compresión  $S_{III}$  una vez aplicada toda la presión horizontal en el caso *Efecto del terraplén de la vía férrea*. En negro queda localizada la vista detallada que se muestra en las Fig.7.38a y Fig.7.38b



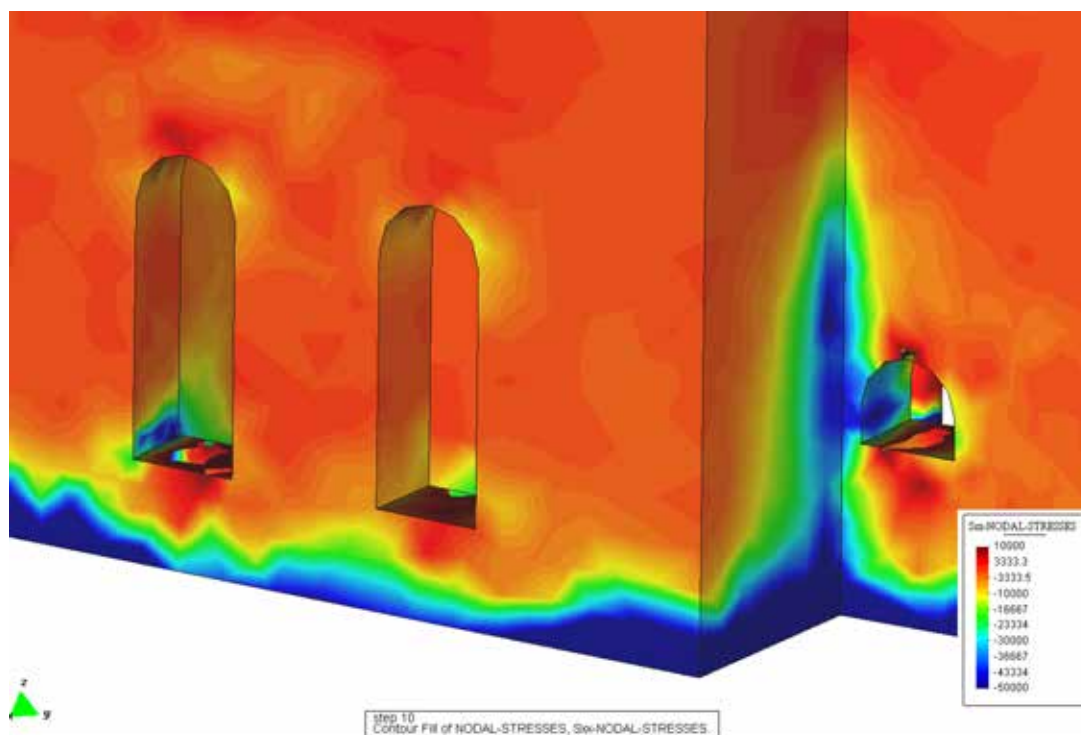


Fig.7.42a Tensiones  $S_{xx}$  con sólo el efecto del peso en el caso *Efecto del terraplén de la vía férrea*

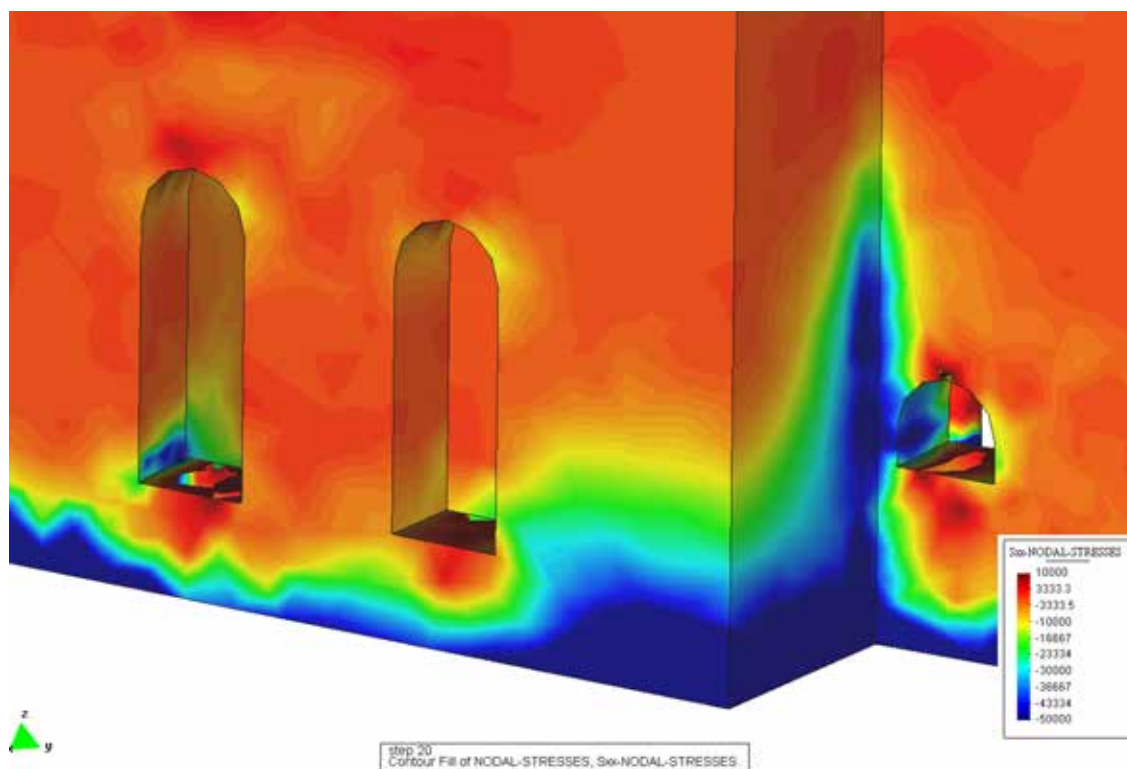


Fig.7.42b Tensiones  $S_{xx}$  una vez aplicada toda la presión horizontal (en dirección “-x”) en el caso *Efecto del terraplén de la vía férrea*



## Capítulo 8: CONCLUSIONES

### Metodología y herramientas

- La viabilidad de los análisis realizados confirma la aplicabilidad de la combinación del Modelo Constitutivo Tracción-Compresión de Daño y el Método de los Elementos Finitos como herramienta para el estudio de grandes construcciones antiguas.

- La principal limitación que tiene esta metodología de trabajo es que el modelo constitutivo utilizado sólo predice correctamente los efectos directos e instantáneos que produce una sollicitación. No es capaz de simular las deformaciones y los daños que se producen a largo plazo. Por tanto no se pueden considerar fenómenos como la fluencia, la acumulación de pequeños sismos, el cansancio del material por estar expuesto largamente bajo una carga constante, los efectos térmicos o efectos ambientales como humedades o presencia de vegetación. Como el edificio objeto de estudio tiene 1500 años de vida estos fenómenos a largo plazo, que no han podido ser considerados en el estudio, tienen un peso importantísimo en el estado actual de daños y deformaciones.

- La técnica de creación de geometrías mediante elementos tetraédricos ha permitido construir un modelo que ha reproducido la mayor parte de los estados de carga.

- La falta de información y la complejidad de la geometría han provocado que se aceptasen ciertas simplificaciones en la construcción del modelo. Algunas de ellas cuestionan la aplicabilidad del modelo para resolver ciertos problemas. En primer lugar, el hecho de englobar solamente un cuadrante del total del edificio ha limitado el modelo en situaciones de carga asimétrica ya que las condiciones de contorno consideradas dejaban de ser realistas. En segundo lugar, no se ha podido construir, por falta de información, la geometría deformada actual del edificio. Esta simplificación conlleva que no se pueda dar una respuesta precisa del comportamiento actual de la mezquita

### Estudio bajo peso propio

- El modelo resiste manteniéndose en un estado de tensiones moderado y sin que aparezcan daños importantes el análisis instantáneo bajo la sollicitación del peso propio.

- El peso propio, en condición de carga casi instantánea, es el causante directo de las grietas en el centro del arco de acceso al ábside. El resto de grietas no son asociables al efecto exclusivo del peso propio.

- Las ventanas situadas en la base de la cúpula provocan unos arcos de descarga que se apoyan directamente sobre los pilares. Las áreas del interior de los arcos de descarga (bóvedas bajo ventanas) se encuentran poco comprimidas y son zonas propensas a tener tracciones y por tanto, a fisurar ante cualquier nueva sollicitación.

- El análisis instantáneo solamente simula cualitativamente la forma deformada de los elementos del edificio. Estas direcciones son idénticas a las que se encuentran en

el edificio real. Las magnitudes de la deformación no coinciden por la incapacidad de reproducir el efecto amplificador de los fenómenos que actúan a largo plazo sobre el edificio (fluencia, cansancio del material,...).

### **Estudio del Asentamiento Diferencial de las Columnas respecto a los muros**

- Es probable que en el edificio real se haya producido un asentamiento diferencial de pocos milímetros de las columnas respecto los muros. El asentamiento provoca una deformación del dintel que, a su vez, afecta las columnas del primer piso que sufren una pérdida de compresión por disminuir su contacto con las bóvedas bajo ventanas. Esta pérdida de compresión amplifica el arco de descarga existente y aumenta la vulnerabilidad a fisurarse de las bóvedas bajo ventanas.

- Sin embargo, el asentamiento diferencial de las columnas respecto los muros no provoca el colapso del edificio.

### **Estudio de una sollicitación sísmica**

- Se ha realizado un estudio aproximado donde se ha aplicado una fuerza estática horizontal equivalente ponderada por la masa, en dos direcciones ortogonales. La validez del estudio está limitada por utilizar solamente un cuadrante del edificio y no tener definidas con exactitud las condiciones de contorno.

- En ambas direcciones de aplicación de la fuerza no se llega a una situación de fallo global de la estructura.

- El análisis sísmico predice que ciertas grietas pueden tener su origen en un suceso sísmico. Como en ambas dos direcciones estudiadas se han obtenido daños muy distintos es probable que el estudio en nuevas direcciones justifique el origen de otros daños.

- La cúpula resiste mejor una sollicitación horizontal en la dirección en que el ábside aporta sustentación que en la dirección perpendicular.

### **Estudio del efecto del terraplén de la vía férrea**

- El estudio corroboró que la presión que efectúa el terraplén de la vía férrea sobre la pared exterior sur no tiene ninguna trascendencia en el comportamiento estructural del edificio. Por tanto puede omitirse su efecto en futuros análisis.

## **Conclusiones Generales**

- El análisis instantáneo realizado predice que el edificio real resiste sin daños sensibles las cuatro condiciones de carga aplicadas: peso propio, asentamiento diferencial de las columnas, sollicitación sísmica y presión del terraplén.

- Para cada sollicitación o carga aplicada han aparecido unos daños. Estos daños, que en la realidad aparecen como fisuras o desprendimientos, son compatibles con la estabilidad global de la estructura y no provocan el colapso del edificio.

- Uno de los principales objetivos del estudio era comparar los daños que encontramos en la actualidad en el edificio con los que aparecieran en el modelo para saber con qué sollicitación están relacionados. En este sentido se ha conseguido relacionar la mayoría de las grietas y se ha visto que otras zonas que están agrietadas en el edificio real son muy propicias a ello en el modelo. Sin embargo, es necesario incluir los efectos de los fenómenos a largo plazo como la fluencia, el cansancio del material o los efectos ambientales. Es probable que si se tuvieran en cuenta el modelo también simularía las elevadas deformaciones y fisuras que el edificio padece en la actualidad.

- Este trabajo es un primer paso en una larga dirección de investigación. El estudio ha permitido alcanzar ciertos resultados pero debería profundizar en algunos aspectos de acuerdo con las indicaciones de las perspectivas futuras expuestas en el capítulo 9, para llegar a conocer con fundamento el estado actual de la mezquita.





## **Capítulo 9: PERSPECTIVAS FUTURAS**

Como se ha visto en las Conclusiones Generales el presente estudio puede servir como punto de partida de un análisis más detallado de la mezquita Pequeña Santa Sofía. En este sentido se propone a continuación una lista de aspectos que se pueden mejorar en estudios futuros:

- Considerar la geometría completa de todo el edificio.
- Conseguir mejor información sobre las características de la cimentación y los materiales que se encuentran en la mezquita.
- Simular la sollicitación sísmica mediante un estudio dinámico no lineal y en más de dos direcciones.
- Utilizar un modelo constitutivo capaz de considerar efectos a largo plazo como la fluencia, el cansancio del material o los efectos ambientales.
- Tener información sobre la actual geometría deformada del edificio. El estudio correcto sobre el estado actual del edificio debería realizarse con un modelo que partiera de esta geometría deformada.



## Capítulo 10: BIBLIOGRAFÍA

- **Arun** (2002), información no publicada cedida para la realización del presente estudio por la Profesora Gorun Arun, Universidad Técnica de Yildiz, Estambul.
- **Alkis**, A., Demirel, H., Dogan, U., Düppe, R., Gerstenecker, C., Krockner, R., Arun, G. and Snitil, B. (2001), *Deformation observations at the Church of Sergios and Bakchos by photogrammetric tools*, 2<sup>nd</sup> International Congress on Studies in Ancient Structures, editado por la Universidad Técnica de Yildiz, Estambul, p.223 – 237.
- **Cervera**, M., Oliver, J., Oller, S., Lubliner, J. (1990), *Isotropic Damage models and Smeared Crack Analysis of Concrete*, Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Proceedings of SCI-C 1990 Second International Conference, editado por la University of Wales, U.K., p.945.
- **Cervera**, M., Oliver, J., Prato, T. (1999), *Termo – Chemo – Mechanical model for concrete. Damage and creep*, Journal of engineering mechanics, nº 9, ASCE, University of Colorado, setiembre 1999, p. 1028 – 1031.
- **Cervera**, M., Agelet de Saracibar, C., Chiumenti, M. (2002), *COMET- Coupled Mechanical and Thermal Analysis Data Input Manual*, version 5.0, Technical Report nºIT 308, CIMNE, Barcelona, Julio 2002.
- **Choisy**, A. (1997), *El arte de construir en Bizancio*, Editado por CEHOPU – CEDEX – Instituto Juan Herrera, Madrid.
- **Coulomb**, C.A. (1773), *Essai sur une application des règles de Maximis et Minimis á quelques problèmes de statique, relatifs á l'architecture*, Ed. Intemac, Madrid.
- **Durukal**, E., Erdik, M., Çakmak, A.S. (1997), *Assessment of the earthquake performance of Hagia Sophia*, International conference on Studies in Ancient Structures, editado por la Universidad Técnica de Yildiz, Estambul, p.407 – 414.
- **Eurocodigo 6**, *Proyectos de Estructuras de Fábrica Parte 1-1*, UNE-ENV-1996-1-1, Ed. AENOR, Marzo 1997.
- **Faria**, R., Oliver, J., Cerver, M. (1998), *A strain based plastic viscous damage model for massive concrete structures*, Int. J. of Solids and Structures 35, nº14, p. 1533 – 1558.
- **Heyman** (1982), *The masonry arch*, Ellis Horwood series in engineering science, Chichester, England.
- **Huerta**, S. (1990), *Diseño estructural de arcos, bóvedas y cúpulas en España ca.1500 – ca.1800*, Tesis Doctoral ETSAM.
- **Krautheimer**, R. (1965), *Arquitectura Paleocristiana y Bizantina*, Ediciones Cátedra S.A., Madrid, 1984.
- **Lodos, J. C.** (2001), *Estudio estructural de los pórticos tipo de la Catedral de Tarazona*, Tesina d'especialitat de la ETSECCPB, Barcelona.
- **Mango**, C. (1972), *Arquitectura Bizantina*, Ediciones Aguilar S.A., Madrid, 1989.
- **MacDonald**, W. (1962), *L'Architecture Paleo-Chretienne et Byzantine*, Editions des Deux – Mondes, Paris.

- **Mark, R.** (1982), *Experiments in Gothic Structures*, The Massachusetts Institute of Technology Press, Massachusetts y Londres.
- **Mendoza, J.** (2002), *Análisis estructural de los pórticos tipo de la Catedral de Girona*, Tesina d'especialitat de la ETSECCPB, Barcelona.
- **Molins, C. y Roca, P.** (1996), *Un modelo para el análisis del comportamiento resistente de construcciones de obra de fábrica*, Tesis doctoral, UPC, Barcelona.
- **Molins, C. y Roca, P.** (1996b), *Elementos para el análisis resistente de construcciones antiguas*, revista OP nº 38 : Ingeniería e Historia I, Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Barcelona, p.42-49.
- **Molins, C. y Roca, P.** (2000), *Análisis de Construcciones de Obra de Fábrica mediante técnicas Computacionales*, Monografía CIMNE nº50, Ed. CIMNE, Barcelona.
- **Ousterhout, R.** (1999), *Master builders of Byzantium*, Princeton University Press, New Jersey.
- **Roca, P.** (2001), *Analysis of Gothic Structure*, 2<sup>nd</sup> International Congress on Studies in Ancient Structures, editado por la Universidad Técnica de Yildiz, Estambul, p.291 - 300.
- **Salas, A.J.** (2002), *Estudio estructural de los pórticos tipo de la Catedral de Mallorca*, Tesina d'especialitat de la ETSECCPB, Barcelona.
- **Stichel, R.H.W., Svenson, H.** (2001), *Neue Beobachtungen an der ehemalige Kirche der Heiligen Sergios und Bakchos (Küçük Ayasofya Camii) in Istanbul*, en preparación para el Istanbuler Mitteilungen, German Archaeological Institute, Estambul.
- **Tomlow, J.** (1997), *The Hanging Model – some historical applications and its use in experimental historical survey*, International Conference on Studies in Ancient Structures, editado por la Universidad Técnica de Yildiz, Estambul, p.467 – 476.
- **Torrent, J.** (1999), *Anàlisis resistent del cimbori de la Catedral de Barcelona*, Tesina d'especialitat de la ETSECCPB, UPC, Barcelona.
- **Yüzügüllü, Ö. and Durukal, E.** (1997), *The effects of the train traffic on the Küçük Ayasofya Mosque in Istanbul*, International Conference on Studies in Ancient Structures, editado por la Universidad Técnica de Yildiz, Estambul, p.429 – 437.
- **Web:**
  - a) Imagen Mosaicos San Vitale, [www.crystalinks.com/byzantine.html](http://www.crystalinks.com/byzantine.html), 05/06/03
  - b) M. Saatcioglu, N. J. Gardner, and A. Ghobarah, *The Kocaeli Earthquake of August 17, 1999 in Turkey*, [www.genie.uottawa.ca/profs/murat/KocaeliEQ.html](http://www.genie.uottawa.ca/profs/murat/KocaeliEQ.html) , 05/06/03.
  - c) Web Departamento de Sismología de la Universidad de Bogaziçi, [www.koeri.boun.edu.tr/deprenmmuh/earthquake1.htm](http://www.koeri.boun.edu.tr/deprenmmuh/earthquake1.htm), 05/06/03.
  - d) Web Departamento de Sismología de la Universidad de Bogaziçi, <http://www.koeri.boun.edu.tr/scripts/lasteq.asp>, 01/07/03.
  - e) Web Departamento de Sismología de la Universidad de Bogaziçi, <http://www.koeri.boun.edu.tr/sismo/eLarge2.htm>, 01/07/03.

