

# **Formulaciones Tangente y Secante en Análisis no Lineal de Vigas de Cosserat**

Antonio Morán Pérez  
Eugenio Oñate  
Juan Miquel

# **Formulaciones Tangente y Secante en Análisis no Lineal de Vigas de Cosserat**

Antonio Morán Pérez  
Eugenio Oñate  
Juan Miquel

Monografía CIMNE N<sup>o</sup>-103, Julio 2007

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA  
Edificio C1, Campus Norte UPC  
Gran Capitán s/n  
08034 Barcelona, España  
[www.cimne.upc.es](http://www.cimne.upc.es)

Primera edición: Julio 2007

**FORMULACIONES TANGENTE Y SECANTE EN ANÁLISIS NO LINEAL DE VIGAS COSSERAT**  
Monografía CIMNE M103  
© Los autores

ISBN: 978-84-96736-26-9

## AGRADECIMIENTOS

*Quisiera agradecer a los directores de este trabajo, profesores EUGENIO OÑATE IBÁÑEZ DE NAVARRA y JUAN MIQUEL CANET, su invitación a acometerlo, sus observaciones específicas sobre varios de los problemas que han ido apareciendo en su desarrollo, sus ánimos para que lo concluyera y, muy especialmente, su confianza en la utilidad que puede tener un estudio de estas características en el campo de la ingeniería. Este estudio, que empezó siendo una idea tan borrosa como ilusionante y proyectiva, ha fructificado gracias en gran parte a su paciente espera.*

*Estoy también agradecido a mi compañero de la Escuela Superior de la Marina Civil de Gijón, MANUEL ÁNGEL ALONSO PICA, por haberme contagiado su entusiasmo por el programa Mathematica y por haberme sacado de incontables apuros informáticos.*

*Gracias también a mi hermana MARÍA JESÚS MORÁN PÉREZ, que ha soportado estoicamente la lectura de todos los capítulos y me ha ayudado a pulir la siempre difícil expresión.*

*Gijón, diciembre de 2004*

## ÍNDICE

### CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN GENERAL

I. 1	La teoría matemática de las vigas	1
I. 2	Modelización de vigas con el método de los elementos finitos	4
I. 3	Antecedentes y objetivos generales	5
I. 4	Contenido	8
I. 5	Referencias Bibliográficas	10

### CAPÍTULO II: ROTACIONES FINITAS EN EL ESPACIO

II. 1	Introducción	13
II. 2	Características generales	14
II. 3	Rotaciones diferenciales	18
II. 4	Parametrización de las rotaciones finitas	19
II. 5	Singularidades en los sistemas de baja parametrización	22
II. 6	Composición de rotaciones en el espacio	23
II. 7	El espacio paramétrico	28
II. 8	Las rotaciones finitas en el cálculo de estructuras	36
II. 9	Composición paramétrica y semitangencial de rotaciones	40
II. 10	Derivada objetiva de las rotaciones	45
II. 11	Derivadas primeras de los tensores fundamentales	47
II. 12	Derivadas segundas de los tensores fundamentales	55
II. 13	Derivadas espacial y temporal en un campo de rotaciones	58
	1. Curvatura de flexión	59
	2. Cinemática del movimiento relativo	64
	3. Energía cinética y momento cinético en un sólido rígido	67
II. 14	Integración de rotaciones	68
II. 15	Recapitulación	75
II. 16	Referencias Bibliográficas	76

### III

#### **CAPÍTULO III: TEORÍA DE LAS VIGAS COSSERAT**

III. 1	Introducción	79
III. 2	Formulaciones Lagrangianas	80
III. 3	Esfuerzo y deformación generalizados	82
III. 4	Ecuaciones de equilibrio	86
III. 5	Ecuaciones constitutivas	90
III. 6	Sistemas lineales	93
III. 7	Principios variacionales	94
III. 8	Principios variacionales en el espacio paramétrico	99
III. 9	Campos conservativos	103
III. 10	Procesos cuasiestáticos conservativos	111
III. 11	Los sistemas hiperparamétricos	112
III. 12	Recapitulación	114
III. 13	Referencias bibliográficas	114

#### **CAPÍTULO IV: LA FORMULACIÓN TANGENTE DE VIGAS COSSERAT**

IV. 1	Introducción	117
IV. 2	Discretización por medio de elementos finitos	118
IV. 3	Energía elástica del sistema discretizado	121
IV. 4	Fuerzas nodales	123
IV. 5	La formulación Tangente	125
	1. Minimización de la energía potencial del sistema	126
	2. Método del equilibrio	129
	3. Una variante del método del equilibrio	131
IV. 6	Cálculo del vector de esfuerzos $\mathbf{P}^v$	135
IV. 7	Núcleo de rigidez tangente	136
IV. 8	La matriz de rigidez tangente en un sistema hiperparamétrico	140
IV. 9	La matriz de rigidez tangente en el método del equilibrio	145
IV. 10	Relación entre los procedimientos II.a y II.b	149

IV. 11	Formulación Lagrangiana Actualizada	153
IV. 12	Relación entre $\mathbf{K}^N$ y $\hat{\mathbf{K}}^N$	162
IV. 13	Formulaciones Lagrangiana Total y Generalizada	163
IV. 14	Interpolaciones paramétricas no lineales. Estados de deformación constante	165
IV. 15	No linealidad material	170
IV. 16	Resultados y convergencia	172
IV. 17	Estabilizadores	226
IV. 18	Recapitulación	233
IV. 19	Referencias bibliográficas	236

#### **CAPÍTULO V: LA FORMULACIÓN SECANTE DE VIGAS COSSERAT**

V. 1	Introducción	241
V. 2	Formulación Secante	242
V. 3	Desarrollo en serie de Taylor de la energía elástica	248
V. 4	Componentes homogéneas del vector deformación	255
V. 5	Cálculo de las matrices $\mathbf{N}_1$ y $\mathbf{N}_2$	257
V. 6	Teorías de segundo, tercer y cuarto órdenes	263
V. 7	Aplicaciones de los desarrollos en serie.	266
V. 8	Proyección de los desarrollos sobre un subespacio	268
V. 9	Estabilización del método de Newton–Raphson	270
V. 10	El método del desplazamiento crítico	272
V. 11	Otras aplicaciones	285
	1. Localización de puntos críticos	285
	2. Apertura de trayectorias en puntos de bifurcación	288
	3. Hacia un nuevo criterio de estabilidad	289
V. 12	Recapitulación	291
V. 13	Referencias bibliográficas	295

**CAPÍTULO VI: EPÍLOGO**

VI. 1	Conclusiones	297
VI. 2	Nuevas líneas de investigación	300

**APÉNDICES****APÉNDICE I: EL ÁLGEBRA DE LOS OPERADORES ANTISIMÉTRICOS EN  $E^3$** 

AI. 1	Características generales	301
AI. 2	El semigrupo $\mathcal{J}$	306
AI. 3	Relación entre los operadores <b>R</b> y <b>G</b> en el semigrupo $\mathcal{J}$	312
AI. 4	Referencias bibliográficas	313

**APÉNDICE II: PARAMETRIZACIÓN DE ROTACIONES 3D**

AII. 1	Introducción	315
AII. 2	Sistemas clásicos de descomposición en rotaciones elementales	316
AII. 3	Sistemas vectoriales	319
AII. 4	Sistema tetraparamétrico de Euler-Rodrigues	323
AII. 5	Sistema tetraparamétrico de Cayley-Klein	324
AII. 6	Sistema pentaparamétrico de Stuelpnagel	327
AII. 7	Obtención de los parámetros característicos de una rotación	329
AII. 8	El álgebra de los cuaternios	331
AII. 9	Suma de rotaciones en el sistema de Rodrigues	336
AII. 10	Rotaciones semitangenciales	339
AII. 11	Forma exponencial del operador rotación	341
AII. 12	Singularidades	343
AII. 13	Referencias bibliográficas	345



**APÉNDICE III: LOS TENSORES FUNDAMENTALES**

AIII. 1	Los tensores $\mathbf{G}$ y $\mathbf{G}^*$ en el sistema de vectores naturales	347
AIII. 2	Los tensores $\mathbf{G}$ y $\mathbf{G}^*$ en los sistemas no objetivos de Euler y Cardan	349
AIII. 3	Los tensores $\mathbf{G}$ y $\mathbf{G}^*$ en el sistema tetraparamétrico de Euler-Rodrigues	351
AIII. 4	Los tensores $\mathbf{S}$ , $\mathbf{T}$ , $\hat{\mathbf{S}}$ y $\hat{\mathbf{T}}$ en distintos sistemas de parametrización	354
AIII. 5	El tensor $\mathbf{A}$ en distintos sistemas de parametrización	360
AIII. 6	El tensor $\hat{\mathbf{A}}$ en distintos sistemas de parametrización	363
AIII. 7	Diferencial del tensor $\mathbf{F}$ en el sistema paramétrico de Rodrigues	364
AIII. 8	Diferencial del tensor $\mathbf{G}$ en el sistema paramétrico de Rodrigues	366

**APÉNDICE IV: DEMOSTRACIONES COMPLEMENTARIAS**

AIV. 1	Demostración general de las fórmulas (II.101) y (II.102)	369
AIV. 2	Demostración directa de las fórmulas (II.109) y (II.110)	370
AIV. 3	Nueva demostración de las relaciones (IV.52) y (IV.58)	373

**APÉNDICE V: INTERPOLACIONES NO LINEALES**

AV. 1	Campo de curvatura constante	377
AV. 2	Interpolación helicoidal	381

## NOTACIÓN

### Espacios, cuerpos, grupos, variedades y conjuntos

$\mathbb{R}$	cuerpo de los números reales.
$\mathbb{C}$	cuerpo de los números complejos.
$\mathbb{E}^3$	espacio físico tridimensional.
$\mathbf{E}^3$	espacio euclídeo tridimensional.
$\mathbf{E}^N$	espacio paramétrico.
$\mathbb{H}$	álgebra de los cuaternios.
$\mathcal{E}$	espacio de configuración (variedad $n$ -dimensional de $\mathbf{E}^N$ ).
$\mathcal{E}^u$ y $\mathcal{E}^\theta$	subvariedades de traslaciones y rotaciones de $\mathcal{E}$ .
$M_3(\mathbb{R})$	grupo de matrices reales de orden 3.
$\mathfrak{so}(3)$	grupo de operadores antimétricos.
$\mathbf{SO}(3)$	subgrupo de matrices ortogonales de $M_3(\mathbb{R})$ con determinante igual a 1.
$\mathbf{SU}(2)$	grupo de matrices unitarias y propias de orden 2 sobre $\mathbb{C}$ .
$\Sigma$	superficie de puntos singulares.
$S$	subespacio característico de direcciones.
$\mathcal{J}$	subgrupo de $\mathfrak{so}(3)$ de transformaciones lineales transversalmente isótropas. con relación a un plano de $\mathbf{E}^3$ .
$\mathfrak{R}$	conjunto de rotaciones finitas en $\mathbf{E}^3$ .

### Símbolos operacionales

$\otimes$	producto diádico.
$\oplus$	suma de rotaciones.
$\ominus$	diferencia de rotaciones.
$\oplus_F$	suma de rotaciones referidas a una base fija.
$\oplus_M$	suma de rotaciones referidas a una base móvil.
$\oplus_S$	suma semitangencial de rotaciones.
$\oplus_\Sigma$	suma ordenada de rotaciones.
Tr	traza de una matriz.

$\  \cdot \ $	norma de un vector.
$\overline{[\dots]}$	operador antisimétrico que deriva de una función vectorial.
$D[\cdot, \cdot]$	derivada direccional de Gateaux.
$\nabla$	operador <i>nabla</i> .
Det	determinante de una matriz.
Sign	signo de un escalar.
Axial[ ]	vector asociado a un operador antimétrico.
$\times$	producto vectorial.
<b>grad</b>	operador gradiente.

### Variables escalares

A	área de la sección transversal de la viga.
L	longitud de un elemento finito de viga.
s	coordenada espacial.
t	coordenada temporal.
u	desplazamiento (traslación) de un punto.
$ \mathbf{G} $	determinante del tensor métrico $\mathbf{g}$ .
$\alpha$	parámetro rotacional.
$E_c$	energía cinética.
E	módulo de elasticidad longitudinal.
G	módulo de elasticidad transversal.
I	momento de inercia.
J	módulo de torsión.
$\phi, \theta, \psi, \varphi$	giros de un triedro.
$\lambda$	autovalor.
$\mu$	densidad equivalente en un punto.
v	variable cinemática.
$\rho$	masa por unidad de longitud de viga.
x	grado de libertad de un sistema.

## IX

### funciones

$f$	función genérica.
$g$	relación de dependencia entre los parámetros de un sistema $\alpha$ .
$C^k$	clase de funciones continuas y derivables hasta un orden "k".
$\mathcal{I}$	acción Hamiltoniana.
$\mathcal{L}$	Lagrangiana del sistema.
$\Phi$	potencial total de un sistema conservativo.
$\gamma(t)$	curva parametrizada.
$U$	energía elástica interna de la viga.
$\Omega$	densidad de potencial de un sistema de fuerzas exteriores.
$W$	trabajo realizado por un sistema de cargas exteriores.
$\Psi$	densidad de energía elástica interna de la viga.
$\Psi^{(n)}$	componente homogénea de orden n de $\Psi$ .
$p_n(\Delta q)$	desarrollo de la componente n-sima del vector de cargas.

### Vectores

$\mathbf{a}$	vector de desplazamientos.
$\mathbf{e}$	vector director.
$\mathbf{f}$	fuerza resultante.
$\mathbf{m}$	momento resultante.
$\mathbf{g}$	vector de relaciones de dependencia $g_i(\alpha_j(s))$ .
$\mathbf{p}$	momento cinético o angular.
$\mathbf{q}$	vector de variables cinemáticas.
$\mathbf{q}^\vee$	vector ampliado de derivadas.
$\mathbf{M}$	momento interno en la sección.
$\mathbf{Q}$	esfuerzo interno en la sección.
$\hat{m}_{\theta_i}$	momento conjugado con un determinado giro $\theta$ .
$\hat{\mathbf{M}}$	momento generalizado.
$\mathcal{F}$ y $\mathcal{M}$	fuerza y momento residuales.
$\mathbf{r}$	vector de posición de un punto.
$\mathbf{R}$	cargas residuales.

$s$	dirección característica.
$\mathbf{t}$	tangente en un punto a la curva directriz.
$\mathbf{x}$	vector relativo de posición.
$\boldsymbol{\alpha}$	vector de parámetros de una rotación o aceleración angular.
$\boldsymbol{\gamma}$	deformación longitudinal y transversal de la viga.
$\boldsymbol{\kappa}$	curvatura de flexión.
$\boldsymbol{\pi}$	giro en torno a un eje de $\mathbb{E}^3$ .
$\boldsymbol{\varepsilon}$	vector deformación.
$\boldsymbol{\sigma}$	vector de esfuerzos.
$\boldsymbol{\tau}$	curvatura de un triedro.
$\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{Y}}$	vectores de Rodrigues.
$\boldsymbol{\omega}$	velocidad angular.

### Matrices y tensores

$\mathbf{B}$	componente homogénea de $\mathbf{K}^N$ en el desarrollo de Mallet–Marcal.
$\mathbf{C}$	matriz constitutiva lineal.
$\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_g)$	matriz constitutiva no lineal.
$\overline{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\varepsilon}_g)$	matriz auxiliar que se obtienen al derivar $\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_g)$ .
$\mathbf{C}^*(\boldsymbol{\varepsilon}_g)$	matriz constitutiva a efectos de cálculo en un material no lineal.
$\mathbf{E}^{(n)}$	derivada de la componente n-sima del vector deformación $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$ .
$\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$	tensores fundamentales en un sistema de parametrización de rotaciones suponiendo la base de referencia fija.
$\mathbf{F}^*$ y $\mathbf{G}^*$	tensores fundamentales en un sistema de parametrización de rotaciones suponiendo la base de referencia móvil.
$\mathbf{I}$	operador identidad o momento de inercia absoluto de un sólido.
$\mathbf{I}^*$	momento de inercia en una base local móvil.
$\mathbf{K}$	matriz de rigidez.
$\mathbf{K}_U$	matriz de energía.
$\mathbf{K}_S$	matriz de rigidez secante.
$\mathbf{K}_T$	matriz de rigidez tangente.
$\mathbf{K}_n$	componente homogénea n-sima de $\mathbf{K}_T$ en el desarrollo de Mallet–Marcal.
$\mathbf{K}^N$	núcleo de la matriz de rigidez.

$\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$	matrices auxiliares que permiten construir las componentes $\mathbf{B}^{(n)}$ .
$\mathbf{Q}$	operador rotación de Cayley-Klein.
$\mathbf{R}$	operador rotación.
$\mathbf{T}$	matriz central tridiagonal en una descomposición $\mathbf{LTL}^T$ .
$\mathbf{S}, \mathbf{T}$	operadores relacionados con la derivada primera de $\mathbf{G}^*$ .
$\hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{T}}$	operadores relacionados con la derivada primera de $\mathbf{G}$ .
$\mathbf{\Lambda}, \hat{\mathbf{\Lambda}}$	operadores relacionados con las derivadas segundas de $\mathbf{G}^*$ y $\mathbf{G}$ .
$\mathbf{Z}, \hat{\mathbf{Z}}$	operadores relacionados con $\mathbf{\Lambda}$ y $\hat{\mathbf{\Lambda}}$ .
$\mathcal{U}$	tensor que relaciona $d\mathbf{\Xi}$ con $d\mathbf{q}^\vee$ .
$\mathbf{X}$	Hessiano del potencial exterior de cargas.
$\mathbf{A}$	matriz auxiliar en el cálculo de $d\mathbf{\epsilon}_g$ .
$\mathbf{D}$	matriz que deriva de $d\mathbf{g}(\mathbf{q})$ .
$\mathbf{D}$	matriz amortiguadora en un método de relajación.
$\mathbf{E}$	matriz que deriva de $d\delta\mathbf{g}(\mathbf{q})$ .
$\mathbf{H}_1$	matriz auxiliar que figura en $\mathbf{K}_G^N$ .
$\mathbf{H}_2$	matriz auxiliar que figura en $\mathbf{K}_G^N$ .
$\chi$	tensor de cargas exteriores.
$\mathcal{T}$	tensor de fuerzas residuales.
$\mathbf{\Pi}$	matriz de rotaciones.
$\mathbf{\Pi}_S$	matriz de proyección externa sobre un subespacio $S$ .
$\overline{\mathbf{\Pi}}_S$	matriz de proyección interna sobre un subespacio $\overline{S}$ .
$\mathbf{\Theta}$	matriz de transformación $d\mathbf{q} \rightarrow d\mathbf{a}$ .
$\mathbf{\Xi}$	matriz de transformación $d\mathbf{q}^\vee \rightarrow d\mathbf{a}^\vee$ .
$\mathbf{\Sigma}$	matriz de interpolación lineal de las variables cinemáticas.
$\mathbf{\Sigma}'$	matriz de interpolación lineal del vector ampliado de derivadas.
$\mathbf{\Gamma}'$	matriz de interpolación no lineal.
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	matrices de interpolación de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{\alpha}$ .
$\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}$	operadores auxiliares que intervienen en una interpolación no lineal.
$\hat{\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{E}}$	ídem.
$\mathcal{G}$	matriz de transformación en un sistema actualizado.
$\mathcal{A}_n$	operador que se obtiene derivando $d\tilde{\mathbf{\Theta}}^n$ .
$\mathcal{B}_n$	operador auxiliar que interviene en $\mathcal{D}_n$ .

$\hat{\mathcal{B}}$	operador auxiliar que interviene en $\mathcal{B}_n$ .
$\mathcal{D}_n$	operador auxiliar que interviene en la expresión matricial de $\sigma^T d^2 \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$ .
$\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$	operadores auxiliares en las teorías de 2º, 3º y 4º órdenes.
$\mathcal{I}, \mathcal{L}, \mathcal{W}$	ídem.
$\mathcal{K}$	matrices auxiliares que se utilizan para representar $d\boldsymbol{\varepsilon}$ y $d^2 \boldsymbol{\varepsilon}$ .
$\varepsilon_{ijk}$	componentes covariantes del tensor de Ricci.
$g_{ij}$	tensor métrico en un espacio de Riemann.
$\delta_{ij}$	delta de Kronecker.

### Sistemas de referencia

$\{\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathbf{n}}_i\}$	sistema de referencia móvil para las rotaciones.
$\{\mathcal{O}, \mathbf{n}_i^o\}$	sistema de referencia fijo para las rotaciones.
$\{e_i\}$	base de vectores directores.
$(1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$	elementos básicos del álgebra de los cuaternios H.
$\{\mathbf{n}_i\}$	base del espacio paramétrico $\mathbf{E}^N$ .
$\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}$	base del espacio de configuración $\mathcal{E}$ .
$\{\boldsymbol{\xi}_i\}$	base de $\mathcal{E}$ formada por un haz de trayectorias.
$\{\mathbf{m}_i\}$	direcciones $x$ - $y$ - $z$ de $\mathbf{E}^3$ .

### Símbolos especiales

$(p_o, \mathbf{p})$	cuaternio.
$\underline{s}$	número de relaciones interparamétricas.
$\sim$	símbolo que denota un operador antimétrico perteneciente a $\mathfrak{so}(3)$ .
$\wedge$	símbolo que denota un operador rotación referido a una base móvil.
$[ \ ]_s$	derivada con relación a $s$ .
$\chi$	estado de deformación.
$( )^*$	valor conjugado de uno dado.
$[ ]^*$	base dual de una dada o matriz adjunta a una dada.
$[ ]^T$	traspuesta de una matriz.
$[ ]^{-1}$	inversa de una matriz.
$\delta$	símbolo de variación.

## XIII

$\Delta$	incremento.
$\Delta_i$	término genérico de la serie de Sturm de una forma cuadrática.
$e^{\tilde{\nu}}$	forma exponencial del operador rotación.

### Subíndices

o	inicial.
0	actualizado.
1/2	“en el punto central” de un elemento.
cr	crítico.
g	generalizado o girado.
t	en el instante t.
ext	exterior.
int	reactivo interno.
k	nodo “k”.
x, y, z	según los ejes x, y, z.
M	parte material.
G	parte geométrica
q	conjugado de los parámetros $\alpha$ .
$\alpha$	derivada con relación a un parámetro rotacional.
$\lambda$	derivada con relación a un parámetro de carga.
$\Pi$	proyección sobre un subespacio característico $S$ .
$\Sigma$	perteneciente a una superficie de puntos singulares.

### Superíndices a la derecha

e	exterior.
g	generalizado.
i	interno.
(n)	componente n-sima o de orden n.
I	método de minimización I.
II	método de equilibrio II.a.
III	método de equilibrio II.b.



**Superíndices a la izquierda**

- N sistema de parametrización natural.
- R sistema de parametrización de Rodrigues.

En la lista anterior se recogen los símbolos más importantes. Por brevedad, se han omitido algunos otros que sólo figuran en apartados muy concretos del trabajo y no se repiten a lo largo del mismo.

## CAPÍTULO I

### **INTRODUCCIÓN GENERAL Y OBJETIVOS**

#### **I. 1.– LA TEORÍA MATEMÁTICA DE LAS VIGAS**

Una teoría de vigas es en esencia una teoría unidimensional de sólidos que permite caracterizar el comportamiento de un cuerpo tridimensional esbelto mediante un conjunto de ecuaciones dependientes de una sola coordenada espacial  $s$  y del tiempo  $t$ . Según sea el método de reducción del número de dimensiones espaciales de tres a una,  $(X^1, X^2, X^3, t) \rightarrow (s, t)$ , las teorías de vigas se agrupan en tres grandes familias: las derivadas del *método de las proyecciones*, las obtenidas mediante *técnicas asintóticas*, y las basadas en *campos de vectores directores*. Las dos primeras familias corresponden a verdaderas teorías tridimensionales, que degeneran por integración en el plano de la sección transversal en simples teorías unidimensionales; la tercera, por el contrario, corresponde a una teoría esencialmente unidimensional [A2]. Cada teoría, a su vez, presupone un modelo particular de comportamiento físico-matemático.

Las pertenecientes a la primera familia son las más generales. Parten del supuesto de que la posición de un punto material  $X$  de la viga, en un instante  $t$ , se puede expresar mediante un funcional del tipo:  $\mathbf{r}(X, t) = \mathbf{b}(\mathbf{r}_v(s, t), \mathbf{X}, t)$ , donde  $\mathbf{X}: (X^1, X^2, s)$  son las coordenadas iniciales de la partícula en un sistema referencial dado y  $\mathbf{r}_v$  un conjunto ordenado de funciones vectoriales dependientes de  $s$  y  $t$ , que es preciso determinar. Por regla general, las funciones  $\mathbf{b}$  son relaciones lineales del tipo:  $\mathbf{b} = \mathbf{B}^k(\mathbf{X}, t) \mathbf{r}_k(s, t)$ , con  $k: 0, 1, \dots, v$ . Entre las teorías más sencillas pertenecientes a esta primera familia se encuentran los modelos de deformación de Volterra y Timoshenko. El primero de ellos, con sólo tres términos:  $\mathbf{r}(X, t) = \mathbf{r}_0(s, t) + X^2 \mathbf{r}_1(s, t) + X^3 \mathbf{r}_2(s, t)$ , es capaz de representar los estados básicos de deformación de la viga, incluyendo las extensiones y deformaciones del propio plano de la sección [V1, V2, V3]. Por su parte, el modelo de Timoshenko supone que las secciones transversales se

mantiene planas e indeformables. En este caso son suficientes dos términos para definir la posición de un punto material; concretamente, en una viga recta de directriz  $x = y = 0$ , si  $\theta(s, t)$  es el giro absoluto de las secciones transversales, se tiene:

$$\mathbf{B}^0 = \mathbf{I} \quad ; \quad \mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ z(s,t) \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{B}^1 = \begin{bmatrix} X^2 & 0 & 0 \\ -X^1 & 0 & 0 \\ 0 & X^2 & -X^1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} \theta^3(s,t) \\ \theta^1(s,t) \\ \theta^2(s,t) \end{bmatrix}$$

Añadiendo a este modelo la condición suplementaria de que las secciones sean ortogonales a la directriz o eje de la viga (*hipótesis de Navier-Bernoulli*), se obtiene el modelo más simple de Kirchhoff [A1]. Estados de deformación más complejos como la flexión simple de Saint-Venant requieren un número mayor de componentes  $\mathbf{B}$  [L1, A2]. Dado que el conjunto de funciones  $\mathbf{B}$  no está limitado en forma ni número, con esta primera familia de teorías se podría representar cualquier estado de deformación por complejo que fuera.

Las teorías pertenecientes a la segunda familia se obtienen aplicando métodos asintóticos a las ecuaciones diferenciales de equilibrio de un sólido esbelto. En este caso se modifica la escala de las coordenadas transversales  $X^1$  y  $X^2$  de la viga introduciendo un pequeño parámetro adimensional  $\varepsilon$ :  $X^i = \varepsilon \xi^i$ . Este parámetro representa el cociente entre el radio medio de las secciones transversales y la longitud de la viga. Una vez efectuado el cambio de escala, se desarrollan en serie de  $\varepsilon$  las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad. Al ser  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeño, estas ecuaciones deben verificarse término a término dentro de los desarrollos, obteniéndose así una serie de ecuaciones diferenciales muy simples, que corresponden a distintos órdenes de aproximación a la solución. De este modo se logra descomponer un complejo problema no lineal en una serie concatenada de problemas lineales, cuyas soluciones convergen asintóticamente a la solución real [H1].

En contraposición con las dos anteriores, la tercera familia de teorías de vigas, basadas en campos de vectores directores, parte de un concepto muy diferente de viga: entiende que una viga es una curva material  $c$  del espacio  $\mathbf{E}^3$  en la que cada uno de sus puntos  $c(s)$  lleva asociado un conjunto de  $n$  vectores directores independientes:  $\mathbf{e}_k(s)$  ( $k:1, 2, \dots, n$ ). Físicamente, los vectores directores se pueden considerar elementos

materiales de las secciones transversales, cuyas variaciones relativas de posición y orientación determinan los estados básicos de deformación de una viga: flexión pura, torsión pura, deformación por cortante e incluso distorsiones de las propias secciones [W1, W2].

Dentro de este último grupo de teorías, las más simples son las *teorías Cosserat*, en las que los vectores directores forman un triedro ortonormal rígido  $\mathbf{\Lambda}$ . Las deformaciones de la viga vienen determinadas, por tanto, por las propias deformaciones de la curva directriz  $c$  y por los giros relativos del triedro básico  $\mathbf{\Lambda}(s)$  asociado a cada uno de los puntos de esta curva –ver figura I.1–.

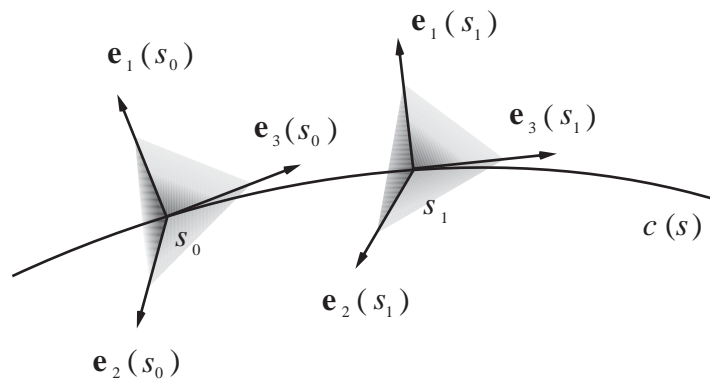


Figura I.1

*Modelo Cosserat de viga con tres vectores directores*

---

**NOTA:** Inexistente en lengua española un hiperónimo equivalente al inglés *rod*, que designe una variedad de conceptos tan amplia como: arco, barra, anillo, eje, soporte, columna o viga, en adelante emplearemos el término “viga” en un sentido amplio que englobe y comprenda todo el grupo léxico anterior.

## I. 2.– MODELIZACIÓN DE VIGAS CON EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Las teorías matemáticas puras reducen el problema de deformación de una viga a un conjunto simple de ecuaciones diferenciales no lineales. Ahora bien, la resolución efectiva de estas ecuaciones, salvo en casos muy contados –por ejemplo, cuando se trata de un problema lineal con deformaciones y desplazamientos muy pequeños–, no es posible si no se recurre a técnicas numéricas apropiadas como el método de los elementos finitos. En las dos últimas décadas y en paralelo con el desarrollo de las teorías puras, se ha dedicado un importante esfuerzo al diseño de modelos numéricos sencillos y fiables, capaces de resolver los complejos problemas no lineales que se dan en las vigas cuando éstas experimentan grandes desplazamientos y giros.

Dependiendo de la familia o grupo al que pertenezca el tipo de teoría de viga que consideremos y del orden de la misma o, lo que es equivalente, del grado de aproximación al comportamiento real de la viga, el método de los elementos finitos conducirá a un modelo numérico más o menos complejo. En correspondencia con las teorías matemáticas puras, el tratamiento numérico de una viga se puede realizar de dos formas básicas, según se parta de un modelo tridimensional (3D) o, directamente, de un modelo unidimensional (1D). En el primer caso, se integran las ecuaciones de equilibrio del sólido 3D sobre las secciones transversales de la viga para obtener las relaciones constitutivas, deformaciones y esfuerzos macroscópicos o promediados en estas secciones. Idénticos resultados se extraen del análisis de una rebanada de viga aislada. Estos son los *modelos de sólido degenerado*. Frente a ellos, las técnicas o modelos unidimensionales definen *a priori* las deformaciones y esfuerzos asociados a la curva o directriz de la viga  $c$ , así como las relaciones constitutivas que los ligan. El resultado en ambos casos es un modelo que puede discretizarse con elementos finitos unidimensionales; la única diferencia es el modo en que se han determinado los elementos esenciales que intervienen en las ecuaciones generales.

Una clase aparte la forman los modelos tridimensionales puros discretizados con elementos finitos 3D –por ejemplo, el modelo de viga de Bathe, compuesta por elementos paralelepípedicos de 16 nodos y 48 grados de libertad [B1]–. Dado que en sentido estricto éstos no son verdaderos modelos de viga, no les prestaremos atención en lo sucesivo.

Entre los modelos unidimensionales capaces de simular el comportamiento no lineal de una viga sometida a grandes movimientos –desplazamientos y rotaciones– y pequeñas deformaciones, se encuentran los corrotacionales de Oran [O5–6], Belytschko [B1] y Crisfield [C1], y los Lagrangianos puros de Simó-Vu Quoc [S1] y Cardona-Géradin [C1]. La diferencia principal entre ellos es que los primeros son modelos estructurales discretos y los segundos modelos continuos.

En los modelos corrotacionales, cada elemento-viga lleva asociado un sistema referencial propio con relación al cual se miden los giros y desplazamientos nodales del elemento. Al venir referidos a un sistema local solidario a la viga, estos giros y desplazamientos nodales son pequeños, y las ecuaciones de equilibrio nodales se pueden establecer aplicando directamente las reglas del cálculo elemental de estructuras. La condición para que los desplazamientos y giros varíen muy poco dentro de cada elemento se consigue con una fina discretización de la viga, subdividiéndola en pequeños segmentos. En esencia, los modelos corrotacionales son una aplicación de las técnicas propias del cálculo lineal de estructuras a la resolución de problemas de naturaleza no lineal.

En los modelos Lagrangianos, por el contrario, la viga se considera un sistema continuo unidimensional –por ejemplo, una viga Cosserat–, y su discretización se realiza normalmente mediante elementos finitos. Dependiendo del sistema referencial Lagrangiano elegido –Actualizado o Total–, del modo de establecer las ecuaciones de equilibrio y del papel que se asigne al sistema de parametrización de las rotaciones, nos encontraremos ante un modelo simple de viga como el de Simó-Vu Quoc o un modelo más depurado como el de Cardona-Géradin.

### I. 3.– ANTECEDENTES Y OBJETIVOS

En general, las deformaciones y desplazamientos  $\mathbf{q}$  de un sistema conservativo no lineal sometido a una carga estática  $\mathbf{P}$  se pueden obtener de tres formas diferentes: minimizando su energía potencial total  $\Psi$  del sistema, resolviendo directamente las ecuaciones finitas de equilibrio  $\mathbf{P}(\mathbf{q})$  del sistema deformado, o bien, usando el método tangente de Newton-Raphson, esto es, la matriz de rigidez  $\mathbf{K}_T$  del sistema para

resolver las ecuaciones incrementales de equilibrio. Dependiendo del procedimiento elegido, es preciso conocer las expresiones explícitas de  $\Psi(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{P}(\mathbf{q})$ , o del Hessiano  $\mathbf{K}_T(\mathbf{q})$  de  $\Psi$ . Si sólo se conoce o se puede calcular con relativa facilidad una de estas tres funciones, el procedimiento adecuado para calcular los desplazamientos del sistema será el que convenga a esta función. No obstante, en ciertos sistemas el conocimiento de una sola de estas funciones equivale a conocer las tres; además, las distintas vías o formas de resolver el problema no lineal no son excluyentes sino alternativas viables dentro de un mismo programa.

En efecto, en 1968 Mallett y Marcal probaron con ejemplos que la función de energía  $\Psi$ , el vector de cargas  $\mathbf{P}$  y la matriz de rigidez Tangente  $\mathbf{K}_T$  de una serie de sistemas no lineales discretizados con elementos finitos, utilizando una formulación Lagrangiana Total, se podían expresar en función de tan sólo tres matrices simétricas  $\mathbf{K}_0$ ,  $\mathbf{N}_1$  y  $\mathbf{N}_2$ , del siguiente modo [M1]:

$$\begin{aligned}\Psi &= \mathbf{q}^T \mathbf{K}_U \mathbf{q} & \mathbf{K}_U &= \frac{1}{2} \mathbf{K}_0 + \frac{1}{6} \mathbf{N}_1(\mathbf{q}) + \frac{1}{12} \mathbf{N}_2(\mathbf{q}; \mathbf{q}) \\ \mathbf{P}(\mathbf{q}) &= \mathbf{K}_S(\mathbf{q}) \mathbf{q} & \mathbf{K}_S &= \mathbf{K}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{N}_1(\mathbf{q}) + \frac{1}{3} \mathbf{N}_2(\mathbf{q}; \mathbf{q}) \\ \Delta \mathbf{P} &= \mathbf{K}_T(\mathbf{q}) \Delta \mathbf{q} & \mathbf{K}_T &= \mathbf{K}_0 + \mathbf{N}_1(\mathbf{q}) + \mathbf{N}_2(\mathbf{q}; \mathbf{q})\end{aligned}\quad (\text{I.1})$$

siendo  $\mathbf{q}$  el vector de desplazamientos nodales,  $\mathbf{K}_U$ ,  $\mathbf{K}_S$  y  $\mathbf{K}_T$  las matrices de energía, y de rigidez Secante y Tangente;  $\mathbf{K}_0$  una matriz constante, y  $\mathbf{N}_1$  y  $\mathbf{N}_2$  dos matrices de primer y segundo orden en el vector de desplazamientos  $\mathbf{q}$ .

Mallett y Marcal mostraron además que la descomposición (I.1) era común a un amplio grupo de sistemas estructurales entre los que se encontraban las barras, membranas y sólidos con una métrica cuadrática de las deformaciones. En estos casos, el cálculo de las matrices  $\mathbf{K}_0$ ,  $\mathbf{N}_1$  y  $\mathbf{N}_2$  equivalía a obtener las funciones  $\Psi(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{P}(\mathbf{q})$  y  $\mathbf{K}_T(\mathbf{q})$ , lo que permitía alternar los procedimientos de cálculo no lineal descritos.

Posteriormente se comprobó que la descomposición (I.1) no era única sino múltiple, y que el procedimiento seguido por Mallett y Marcal para obtener la terna  $\mathbf{K}_0$ ,  $\mathbf{N}_1$  y  $\mathbf{N}_2$  conducía en ocasiones a matrices asimétricas. Se probó que el método más

seguro de garantizar la simetría era partir directamente del Hessiano  $\mathbf{K}_T(\mathbf{q})$  de  $\Psi$ , obteniéndose así una descomposición única [M2].

Con la excepción hecha de algunos trabajos más académicos que prácticos, durante tres largas décadas apenas se extrajo partido de la descomposición (I.1). Inmersos en el estudio de la formulación Tangente de los sistemas no lineales, la formulación Secante permaneció olvidada durante largo tiempo y sus posibilidades apenas llegaron a investigarse. No obstante, una serie de trabajos recientes sobre estabilidad elástica han demostrado las posibilidades que encierra esta descomposición. Las investigaciones de Kröplin y Dinkler con láminas [K1–3], y Oñate y Matias con entramados de barras y sólidos [O1–2], han demostrado que la matriz secante  $\mathbf{K}_S$  se puede utilizar para detectar y localizar puntos críticos. Concretamente, Oñate y Matias han introducido un nuevo método para detectar el valor de la carga crítica de pandeo de un sistema estructural, el *método del desplazamiento crítico*, que proporciona unos resultados excelentes en los sistemas que admiten una descomposición (I.1). En estos sistemas la formulación Secante muestra posibilidades –hasta ahora inéditas– que exigen en el futuro un estudio detallado.

Ahora bien, cabría preguntarse si todos los sistemas conservativos admiten una descomposición de la forma (I.1), o qué ocurriría si intentáramos realizar una descomposición del tipo (I.1) en un sistema complejo como las vigas espaciales o láminas. Y supuesto que pudiera efectuarse una descomposición de tal tipo o similar, si resultaría tan efectiva en el análisis de los problemas de estabilidad como sucede con los sistemas simples de Mallett–Marcal. Éstas son las cuestiones que hemos intentado abordar en nuestro trabajo y el objetivo central del mismo: explorar las posibilidades que ofrecen los desarrollos (I.1) en sistemas estructurales de alta no linealidad como las vigas y las láminas.

La complejidad de un análisis global de este tipo de estructuras obliga a acotar el campo. Nuestro trabajo se ha centrado exclusivamente en el estudio de las vigas curvas que experimentan grandes movimientos en el espacio, renunciando, de partida, a los modelos mixtos y tridimensionales de viga, más simples pero menos prácticos que los tradicionales modelos unidimensionales. Y entre estos últimos hemos elegido el modelo Cosserat, por considerarlo el más elegante y adecuado a nuestro propósito.



#### I. 4.– CONTENIDO

En el desarrollo de este trabajo hemos estudiado en detalle el modelo clásico de viga Cosserat de la figura I.1, su formulación tangente y las teorías de alto orden que se pueden establecer en él. Como cuestión previa, hemos analizado en detalle las propiedades fundamentales de los operadores más importantes relacionados con las rotaciones finitas que intervienen en el análisis posterior –capítulo II–. Y dividido el estudio propiamente dicho en dos partes, en la primera parte –capítulos III y IV– hemos desarrollado y relacionado los métodos tangentes de Simó-Vu Quoc y Cardona-Géradin desde una formulación Lagrangiana Generalizada. Estos métodos se diferencian en el modo de establecer las ecuaciones de equilibrio –según se aplique el Principio de los Trabajos Virtuales al sistema deformado o se minimice su energía potencial– y en el tipo de matriz de rigidez a la que conducen: asimétrica o simétrica. El análisis lo hemos realizado además adoptando un punto de vista general que permite comparar la eficacia de diversos sistemas de parametrización de las rotaciones –incluyendo en el análisis los sistemas de alta parametrización– y de distintas formas de interpolación de las variables cinemáticas: lineal o no lineal. En la construcción de las matrices de rigidez del elemento-viga, hemos utilizado la noción de *núcleo congruente* desarrollada por Felippa [F1, F2]. Todo ello lo hemos justificado al final del capítulo IV con una serie de ejemplos ilustrativos.

El modelo que analizamos, pensado inicialmente para materiales Hookeanos, lo hemos extendido más adelante a materiales elásticos no lineales. Estos resultados se pueden aplicar también a vigas de sección transversal flexible, como las antenas enrollables que se utilizan en los satélites artificiales o ciertos perfiles curvos de pared delgada. En estos casos, aun siendo el material lineal, las relaciones constitutivas no lo son, debido a los efectos de segundo orden que produce la deformación de las secciones transversales por efecto de la carga. Por último, en los procesos de carga con múltiples puntos críticos a lo largo de una trayectoria, hemos propuesto un método de localización que permite aislarlos con facilidad incluso cuando se encuentran muy próximos entre sí.

En la segunda parte del trabajo –capítulo V– hemos calculado los desarrollos en serie de Taylor de la función de energía  $\Psi$  y de las matrices de rigidez Secante,  $\mathbf{K}_s$ , y Tangente,  $\mathbf{K}_T$ , del elemento-viga. Estos desarrollos dependen linealmente de un mismo grupo de matrices simétricas  $\mathbf{K}_i$ , que se extraen de la propia descomposición de la matriz Tangente  $\mathbf{K}_T$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_U &= \frac{1}{2} \mathbf{K}_0 + \frac{1}{6} \mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{q}) + \frac{1}{12} \mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{q}^2) + \dots \\ \mathbf{K}_s &= \mathbf{K}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{q}) + \frac{1}{3} \mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{q}^2) + \dots \\ \mathbf{K}_T &= \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{q}) + \mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{q}^2) + \dots\end{aligned}\tag{I.2}$$

En el caso concreto de los modelos Cosserat de viga, estos desarrollos son infinitos y no se pueden utilizar directamente. Ahora bien, truncando las series y reteniendo sólo un número finito de sus términos, se obtienen teorías aproximadas de diversos órdenes, que son la base de los denominados “métodos directos” de análisis de la estabilidad de un sistema estructural. Aprovechando los desarrollos (I.2), hemos ensayado también el *método del desplazamiento crítico* y una serie de variantes del mismo en sistemas compuestos por vigas. Por último, hemos esbozado un método para calibrar el grado de estabilidad de un sistema, que deja abiertas las puertas a futuras líneas de investigación en este campo.

Como es lógico, las aplicaciones de los desarrollos (I.1) no se limitan al campo de la estabilidad elástica. Por ejemplo, en los modelos unidimensionales de viga, ya sean Lagrangianos puros o corrotacionales, uno de los problemas más frecuentes es la pérdida de convergencia que se produce con el método iterativo de Newton–Raphson cuando los incrementos de carga son importantes. Tratando de resolver este problema, en el capítulo IV hemos indicado una serie de procedimientos ingeniosos que mejoran sustancialmente la convergencia del proceso, si bien no llegan a garantizarla por completo. En el capítulo V, sin embargo, mostramos una técnica segura que converge siempre a una solución estable. Es una adaptación de las clásicas técnicas *line-search* y consiste simplemente en minimizar la energía potencial del sistema en las sucesivas

direcciones que genera el método de Newton–Raphson. La función de energía a lo largo de estas direcciones se extrae de los desarrollos (I.2) truncados.

### I. 5.– REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- [A1] Antman, S.S., “Kirchhoff’s Problem for NonLinearly Elastic Rods”, *Quarterly of Applied Mathematics*, XXXII, 3, 221-240, (1974).
- [A2] Antman, S.S., “The Theory of Rods”, *Handbuch der Physik*, VI a/2, Springer-Verlag, 641-703 (1972).
- [B1] Belytshchko, T. & Hsien, J., “Non-Linear Transient Finite Element Analysis with Convected Co-Ordinates”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **7**, 225-271, (1973).
- [B2] Belytshchko, T., Schwer, L. & Klein, M.J., Large Displacement Transient Analysis of Spaced Frames, *Int. J. Num. Meth. Engng.* **11**, 65-84, (1977).
- [H1] Hay, G.E., The Finite Displacement of Thin Rods, *Trans. Am. Math. Soc.*, **51**, 65-102, (1942).
- [K1] Kröplin, B., Dinkler, D. & Hillmann, J., “An energy perturbation method applied to non-linear structural analysis”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **52**, 885-97, (1985).
- [K2] Kröplin, B., “Instability prediction by energy perturbation”, *Num. Meth. Appl. Sci. Engng.*, H. Alder, J. C. Heinrich, S. Lavanchy, E. Oñate and B. Suárez (eds.), CIMNE, Barcelona, (1991).
- [K3] Kröplin, B., Wilhelm M. & Herrmann M. “Unstable phenomena in sheet metal forming processes and their simulation”, *VDI Berichte*, **894**, 137–152, (1991).
- [L1] Love, A.E.H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover, (1944).
- [M1] Mallet, R. & Marcal, P., “Finite element analysis of non-linear structures”, *J. Struct. Div.*, ASCE, **14**, 2081-2105, (1968).
- [M2] Morán, A., Oñate, E. & Miquel, J., “A General Procedure for Deriving Symmetric expressions for the Secant and Tangent Stiffness Matrices in Finite Element Analysis” *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **42**, 219-236, (1998).
- [O1] Oñate, E., “Possibilities of the secant stiffness matrix for non-linear finite element analysis”, *Non Linear Engineering Computation*, N. Bicanic et al. (eds), Pineridge Press, (1991).

- [O2] Oñate, E. “On the Derivation of the Secant Stiffness Matrix for Non-Linear Finite Element Analysis”, *Computational Mechanics*, **15**, 572–93, (1995).
- [O3] Oñate, E., Matias, W.T., “A critical displacement approach for predicting structural instability”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, **134**, 135–161, (1996)
- [O4] Oñate, E., Matias, W.T., “Enhanced prediction of structural instability points using a critical displacement method”, *Advances in Finite Element Technology*, N. E. Wiberg (de) Barcelona, (1995).
- [O5] Oran, C., “Tangent Stiffness in Plane Frames”, *Journal of The Structural Division, ASCE*, **99**, ST6, 973-985, (1973).
- [O6] Oran, C., “Tangent Stiffness in Space Frames”, *Journal of The Structural Division, ASCE*, **99**, ST6, 987-1001, (1973).
- [V1] Volterra, E., “The Equations of Motion for Curved Elastic Bars deduced by the use of The Method of Internal Constraints”, *Ingenieur Archiv*, XXIII, 402-409, (1955).
- [V2] Volterra, E., “The Equations of Motion for Curved and Twisted Elastic Bars deduced by the use of The Method of Internal Constraints”, *Ingenieur Archiv*, XXIV, 392-400, (1956).
- [V3] Volterra, E., “Second Approximation of Method of Internal Constraints and its Applications”, *Int. J. Mech. Sci.*, **3**, 47-67, (1961).
- [W1] Whitmann, A.B. & DeSilva, C.N., “A Dynamic Theory of Elastic Directed Curves”, *Z. angew. Math. Phys*, **20**, 200-212, (1969).
- [W2] Whitmann, A.B. & DeSilva, C.N., “Dynamics and Stability of Elastic Cosserat Curves”, *Int. J. Solids Structures*, **6**, 411-422, (1970).



## CAPÍTULO II

### **ROTACIONES FINITAS EN EL ESPACIO**

#### **II. 1.- INTRODUCCIÓN**

La dificultad principal que presentan las teorías no lineales de barras flexibles proviene del tratamiento especial que debe darse a las rotaciones finitas.

A diferencia de las rotaciones diferenciales, que pueden considerarse elementos de un espacio vectorial, las rotaciones finitas no verifican todas las propiedades del álgebra vectorial, perdiendo, por tanto, la condición de vectores. Los axiomas de linealidad característicos de los espacios vectoriales, así como la necesaria conmutatividad de la ley de composición interna *suma* de dos vectores, dejan de cumplirse para las rotaciones finitas. En consecuencia, las operaciones algebraicas con este tipo de rotaciones, lejos de resultar intuitivas, se complican extraordinariamente, tal y como iremos mostrando a lo largo de este capítulo.

Las rotaciones finitas y sus propiedades algebraicas singulares son bien conocidas y han sido tratadas en numerosos artículos y publicaciones. Por ello, al margen de algunos comentarios generales inevitables, en este capítulo nos centraremos sólo en aquellos aspectos de las rotaciones que son de especial interés para el estudio posterior de las barras flexibles.

El orden de presentación es el siguiente: en primer lugar, se describen algunas características generales de las rotaciones y se presenta una clasificación de los tipos más importantes de parametrización; seguidamente, se estudia la suma de rotaciones y se introducen los conceptos de composición paramétrica y semitangencial, que restablecen la conmutatividad de la suma; más adelante se define el concepto de espacio paramétrico, se introducen los tensores básicos **F** y **G**, y se hallan sus derivadas paramétricas; por último, se revisa el concepto de integración, de rotaciones, y se presentan algunos desarrollos en serie y expresiones polinómicas aproximadas que son esenciales en el estudio de la matriz de rigidez secante.

## II. 2.– CARACTERÍSTICAS GENERALES

Desde un punto de vista algebraico, una rotación es una transformación lineal, propia e isométrica del espacio euclídeo tridimensional  $\mathbf{E}^3$  en sí mismo. En el conjunto  $\mathfrak{R}$ , formado por todas las rotaciones finitas, se puede definir una ley de composición interna “ $\oplus$ ”, *suma de rotaciones*, haciendo corresponder a cada pareja de rotaciones  $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$  la rotación  $\alpha \oplus \beta \in \mathfrak{R}$ , definida por la relación:  $\alpha \oplus \beta(\mathbf{x}) = \beta[\alpha(\mathbf{x})]$ , para todo  $\mathbf{x} \in \mathbf{E}^3$ . Se comprueba de inmediato que el conjunto  $\mathfrak{R}$ , con la ley de composición “ $\oplus$ ”, está dotado de una estructura algebraica de grupo no conmutativo: en general,  $\alpha \oplus \beta \neq \beta \oplus \alpha$  –dos ejemplos muy claros de esta falta de conmutatividad se muestran en la figura II.1–; y que este grupo es isomorfo al grupo  $\mathbf{SO}(3)$  de las matrices reales y ortogonales de orden 3 con determinante igual a la unidad [B2, K2]:

$$\mathbf{SO}(3) := \{ \mathbf{R} \in M_3(\mathbb{R}) \mid \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}; \text{Det} [\mathbf{R}] = 1 \} \quad (\text{II.1})$$

Considerando este isomorfismo, se pueden identificar las rotaciones  $\alpha, \beta, \alpha \oplus \beta$  y  $\beta \oplus \alpha \in \mathfrak{R}$  con sus respectivos operadores:  $\mathbf{R}_\alpha, \mathbf{R}_\beta, \mathbf{R}_\beta \mathbf{R}_\alpha$  y  $\mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\beta$  de  $\mathbf{SO}(3)$ , y en adelante así se hará. La condición impuesta en (II.1) al determinante de  $\mathbf{R}$  se explica teniendo en cuenta que toda transformación lineal e isométrica del espacio  $\mathbf{E}^3$  en sí mismo es necesariamente una rotación, una inversión, o un producto de ambas; y que las inversiones y sus potencias impares cambian la orientación del espacio y tienen un determinante negativo, igual a  $-1$  –transformaciones impropias–.

Al elemento neutro de  $\mathfrak{R}$  –rotación *nula*– le corresponde la transformación identidad en  $\mathbf{SO}(3)$ :  $\mathbf{I}$ , y a dos rotaciones iguales pero de sentidos contrarios, esto es, inversas la una de la otra en  $\mathfrak{R}$ , les corresponden dos operadores  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{R}^T$ , inversos entre sí en  $\mathbf{SO}(3)$  en virtud de (II.1).

Por definición, la *diferencia*  $\alpha \ominus \beta$  de dos rotaciones es el resultado que se obtiene al sumar la primera de ellas con la inversa de la segunda:  $\alpha \ominus \beta := \alpha \oplus (-\beta)$ . A la nueva rotación  $\alpha \ominus \beta$  le corresponde en  $\mathbf{SO}(3)$  el operador  $\mathbf{R}_\beta^T \mathbf{R}_\alpha$ . Partiendo de esta definición, se puede afirmar lo siguiente: *dos triedros que han sido previamente girados con rotaciones  $\alpha$  y  $\beta$  pueden transformarse directamente el uno en el otro mediante una única rotación:  $\beta \ominus \alpha$  o  $\alpha \ominus \beta$  (según se aplique al primero o segundo de los triedros).*

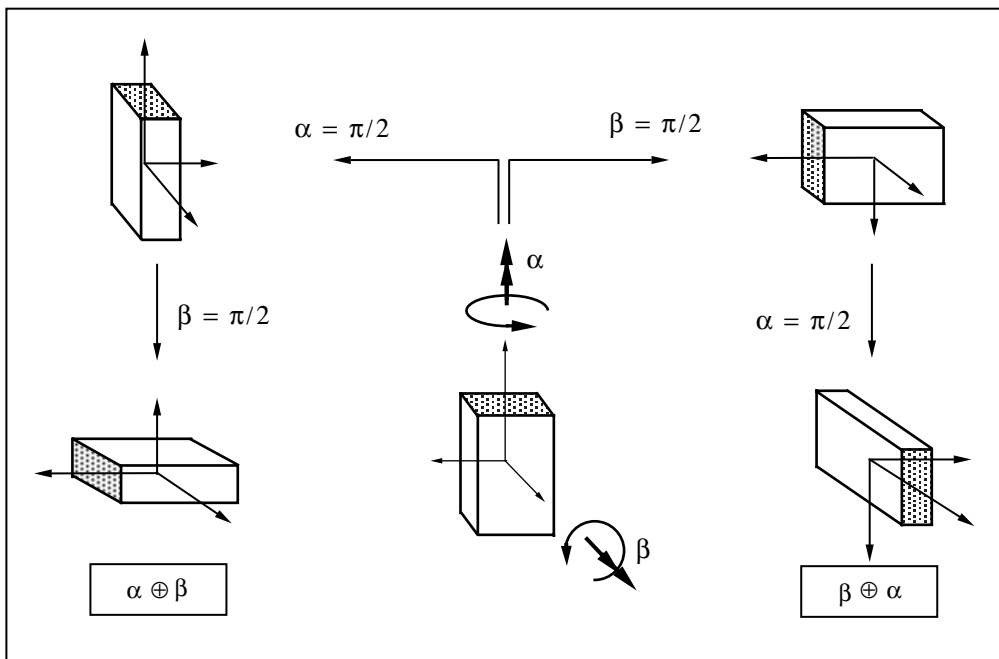
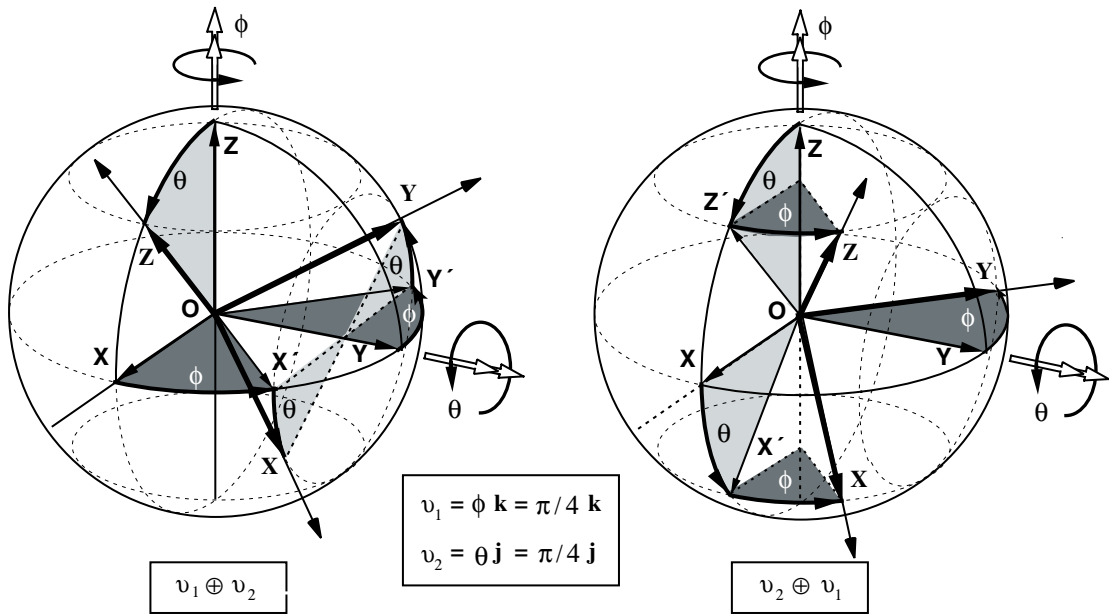


Figura II.1.

*No conmutatividad de la suma de dos rotaciones finitas*



Los valores y vectores propios de las rotaciones son fáciles de determinar. En efecto, debido a la ortogonalidad de  $\mathbf{R}$ , las tres raíces del polinomio característico tienen módulo unidad. Además, por ser éste un operador real con determinante unidad, al menos una de ellas es real e igual a +1 y las dos restantes imaginarias conjugadas, pudiéndose escribir las tres del siguiente modo:

$$\lambda_1 = 1 ; \lambda_2 = e^{i\theta} ; \lambda_3 = e^{-i\theta}$$

siendo  $\theta$  un valor real característico de cada rotación (sólo si  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ , se tiene  $\theta = 0$  y las tres raíces son reales e iguales a +1). Determinadas estas raíces, la expresión general del polinomio característico de  $\mathbf{R}$  se deduce de inmediato y vale:

$$p(\mathbf{R}) \equiv \mathbf{R}^3 - \alpha_R \mathbf{R}^2 + \alpha_R \mathbf{R} - \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (\text{II.2.a})$$

siendo  $\alpha_R$  la traza de  $\mathbf{R}$ :

$$\alpha_R := \text{Tr} \mathbf{R} = 1 + 2 \cos \theta \quad (\text{II.2.b})$$

Conviene advertir también que las variaciones en  $\mathbf{SO}(3)$  están sujetas a reglas y no pueden ser arbitrarias. Para probarlo, supongamos que la rotación  $\mathbf{R}$  sufre una variación diferencial pasando a valer  $\mathbf{R} + d\mathbf{R}$ . Como la relación de ortogonalidad  $\mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$  se cumple en todo momento, necesariamente se verificará:

$$d\mathbf{R} \mathbf{R}^T + \mathbf{R} d\mathbf{R}^T = d\mathbf{R}^T \mathbf{R} + \mathbf{R}^T d\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

deduciéndose de aquí que los productos  $d\mathbf{R} \mathbf{R}^T$  y  $\mathbf{R}^T d\mathbf{R}$  son operadores antimétricos, que denotaremos  $d\tilde{\mathbf{v}}_i$  y  $d\tilde{\mathbf{v}}_d$ , y que la diferencial  $d\mathbf{R}$  es el producto de uno de estos operadores antimétricos por la propia rotación  $\mathbf{R}$ :

$$d\mathbf{R} = d\tilde{\mathbf{v}}_i \mathbf{R} = \mathbf{R} d\tilde{\mathbf{v}}_d \quad (\text{II.3})$$

$$\text{siendo,} \quad \tilde{\mathbf{v}} := \begin{bmatrix} 0 & -v^3 & v^2 \\ v^3 & 0 & -v^1 \\ -v^2 & v^1 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad d\tilde{\mathbf{v}} := \begin{bmatrix} 0 & -dv^3 & dv^2 \\ dv^3 & 0 & -dv^1 \\ -dv^2 & dv^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

En adelante, utilizaremos el símbolo  $\tilde{\mathbf{v}}$  para designar al operador antimétrico (II.4) asociado al vector  $\mathbf{v} \in \mathbf{E}^3$ , y *Axial* [ $\tilde{\mathbf{v}}$ ] para designar al vector  $\mathbf{v}$  cuando sea necesario subrayar su relación con  $\tilde{\mathbf{v}}$ . Nótese que *Axial* [ $\tilde{\mathbf{v}}$ ] es el único vector cuyo producto mixto con dos vectores arbitrarios  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  de  $\mathbf{E}^3$  verifica:  $\mathbf{w} \cdot \text{Axial} [\tilde{\mathbf{v}}] \times \mathbf{v} = \mathbf{w}^T \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{v}$ . Se prueba en el Apéndice I que el conjunto de los operadores antimétricos reales de orden 3, con la ley producto, constituye un grupo no conmutativo, que se denota  $\mathfrak{so}(3)$ .

Existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de las rotaciones finitas de  $\mathbf{SO}(3)$  que no poseen ningún autovalor impropio,  $\lambda = -1$ , y el grupo  $\mathfrak{so}(3)$  de operadores antimétricos, como prueba la *regla de descomposición de Cayley* [B2]:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{v}})(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{v}})^{-1} \quad (\text{II.5.a})$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = (\mathbf{R} - \mathbf{I})(\mathbf{R} + \mathbf{I})^{-1} \quad (\text{II.5.b})$$

Naturalmente, para que esta regla tenga sentido deben ser invertibles  $\mathbf{R} + \mathbf{I}$  e  $\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{v}}$ . Ahora bien, exceptuando el caso singular en que  $\mathbf{R}$  posea autovalores impropios ( $\lambda_1 = \lambda_2 = -1; \lambda_3 = 1$ ), el operador  $\mathbf{R} + \mathbf{I}$  es siempre invertible; además, al ser  $\tilde{\mathbf{v}}$  antimétrico, el escalar  $\mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{z}$  se anula para todo  $\mathbf{z}$ , con lo cual  $\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{v}}$  resulta un operador definido positivo y, por tanto, invertible:  $\mathbf{z}^T (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{v}}) \mathbf{z} = |\mathbf{z}|^2$ . Por otra parte, las dos expresiones (II.5) son equivalentes entre sí: (II.5.a) se deduce directamente de (II.5.b) despejando  $\mathbf{R}$  de  $(\mathbf{R} + \mathbf{I})\tilde{\mathbf{v}} = (\mathbf{R} - \mathbf{I})$ , y del mismo modo se deduce (II.5.b) de (II.5.a). En definitiva, para probar las dos relaciones de Cayley basta verificar una de ellas, por ejemplo, basta probar que el producto (II.5.b) es realmente antisimétrico o, lo que es lo mismo, que cumple:

$$\mathbf{x}^T [\mathbf{R} - \mathbf{I}][\mathbf{R} + \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{E}^3$$

La demostración es inmediata si se sustituye  $(\mathbf{R} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{x}$  por  $\mathbf{z}$ , ya que entonces esta relación se transforma en:

$$\mathbf{z}^T [\mathbf{R} + \mathbf{I}]^T [\mathbf{R} - \mathbf{I}] \mathbf{z} = \mathbf{z}^T [\mathbf{R}^T \mathbf{R} - \mathbf{I}] \mathbf{z} \equiv 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{E}^3$$

que demuestra lo que pretendíamos.

La definición (II.1) permite extender de forma natural el concepto de rotación a un espacio  $n$ -dimensional. Las propiedades enunciadas en este apartado para el grupo  $\mathbf{SO}(3)$  se generalizan fácilmente a  $\mathbf{E}^n$  [B2]. No obstante, puesto que a lo largo de este trabajo únicamente vamos a trabajar con rotaciones de cuerpos sólidos 3D, nos limitaremos a estudiar las propiedades específicas de las rotaciones del espacio físico tridimensional  $\mathbf{E}^3$ .

### II. 3.- ROTACIONES DIFERENCIALES

Si el operador  $\mathbf{R}$  dependiera de una variable escalar  $t$  –por ejemplo, el tiempo–, al variar ésta variaría también el operador, y de acuerdo con (II.3), se tendría:

$$\mathbf{R}(t + dt) = \mathbf{R}(t) + d\mathbf{R} = (\mathbf{I} + d\tilde{\mathbf{v}}_i) \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t)(\mathbf{I} + d\tilde{\mathbf{v}}_d)$$

o bien, de forma más simple y compacta:

$$\mathbf{R}(t + dt) = \mathbf{R}_{d\mathbf{v}}^i \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t) \mathbf{R}_{d\mathbf{v}}^d \quad (\text{II.6.a})$$

con 
$$\mathbf{R}_{d\mathbf{v}}^i = \mathbf{I} + d\tilde{\mathbf{v}}_i \quad ; \quad \mathbf{R}_{d\mathbf{v}}^d = \mathbf{I} + d\tilde{\mathbf{v}}_d \quad (\text{II.6.b})$$

Como el instante inicial  $t_0$  en el que comienzan a medirse las rotaciones puede fijarse arbitrariamente y en él  $\mathbf{R}(t_0) = \mathbf{I}$ , toda rotación diferencial es del tipo (II.6.b) y se puede escribir por tanto así:  $\mathbf{I} + d\tilde{\mathbf{v}}$ , siendo  $d\mathbf{v}$  un vector orientado en la dirección del eje de giro de módulo igual al ángulo barrido por éste. Además, dado que el producto de dos operadores de  $\mathbf{SO}(3)$  equivale a una suma de rotaciones, puede afirmarse, en vista de (II.6.a), que toda variación diferencial de una rotación finita es el resultado de sumarle a ésta una rotación diferencial.

Cuando los giros son pequeños – $\|\mathbf{R}(t) - \mathbf{I}\| \cong 0$ –, el operador rotación  $\mathbf{R}(t)$  puede sustituirse por una aproximación lineal de primer orden e identificarse así, desde un punto de vista formal y operativo, con una rotación diferencial:

$$\mathbf{R} \stackrel{(1)}{=} \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{v}} \quad \|\mathbf{v}\| \ll 1 \quad (\text{II.7})$$

De este modo se recuperan las propiedades características de los espacios vectoriales, incluida la propiedad conmutativa, ya que la aproximación lineal del producto de dos rotaciones diferenciales  $\mathbf{R}_{d\alpha} = \mathbf{I} + d\tilde{\alpha}$  y  $\mathbf{R}_{d\beta} = \mathbf{I} + d\beta$  es una rotación diferencial independiente del orden de los factores:  $\mathbf{R}_{d\alpha \otimes d\beta} = \mathbf{I} + d\tilde{\alpha} + d\beta$ , y el producto de un escalar real  $k \in \mathbb{R}$  por una rotación diferencial  $d\alpha$  es otra rotación diferencial:  $\mathbf{R}_{kd\alpha} = \mathbf{I} + kd\tilde{\alpha}$ . En definitiva, las rotaciones diferenciales constituyen un espacio vectorial isomorfo al espacio  $\mathfrak{so}(3)$  de los operadores antimétricos y, a través de él, isomorfo también al espacio  $\mathbf{E}^3 : \mathbf{R}_{d\mathbf{v}} \rightarrow d\tilde{\mathbf{v}} \rightarrow d\mathbf{v}$ .

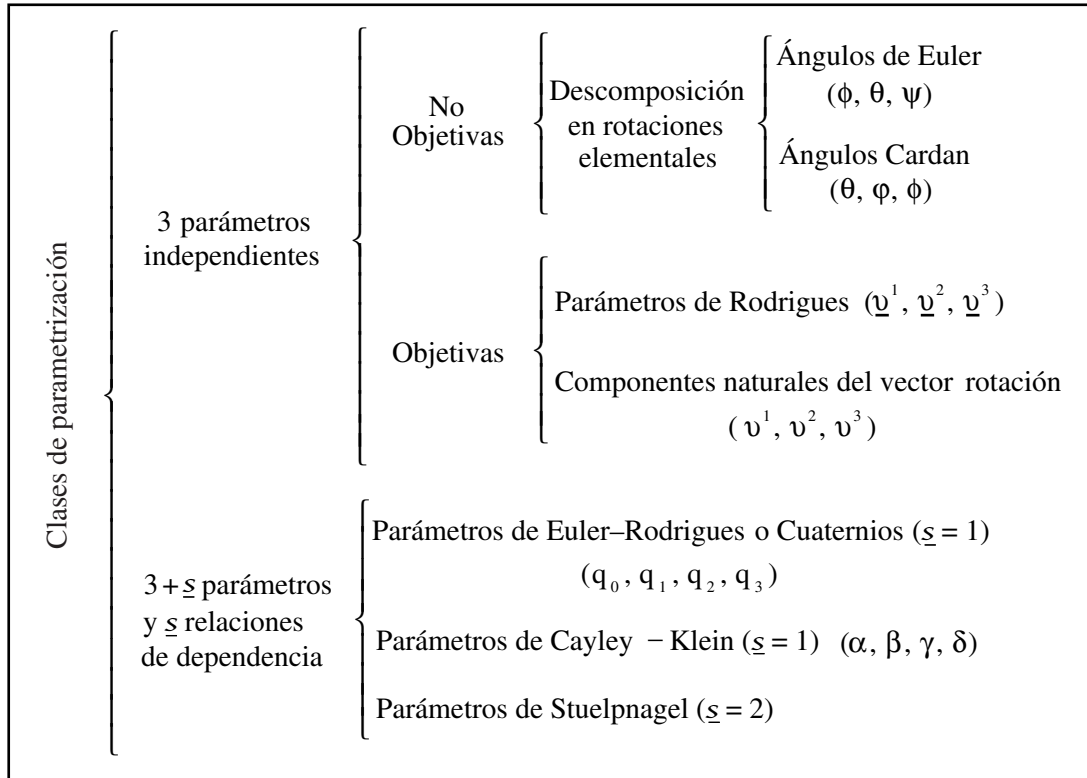
Esta notable propiedad explica las sencillas reglas algebraicas de las pequeñas rotaciones, en especial, la conmutatividad de la suma. Por desgracia, esta sencillez se pierde como veremos enseguida cuando las rotaciones son finitas y  $\|\mathbf{R}(t) - \mathbf{I}\| \neq 0$ .

#### II. 4.- PARAMETRIZACIÓN DE LAS ROTACIONES FINITAS

Una rotación queda determinada cuando se conocen las nueve componentes del operador  $\mathbf{R}$ . Estas componentes, sin embargo, no pueden ser arbitrarias: la condición de ortogonalidad impuesta a  $\mathbf{R}$  en (II.1) introduce seis relaciones distintas entre las nueve componentes de esta matriz, resultando sólo tres de ellas independientes. A la misma conclusión se llega si tenemos en cuenta la relación (II.5) entre los operadores antimétricos y las rotaciones; en este caso, el número de grados de libertad del operador  $\mathbf{R}$  es igual al número de coeficientes independientes de la matriz antimétrica  $\tilde{\mathbf{v}}$ : 3 en  $\mathbf{E}^3$  y  $n(n-1)/2$  en  $\mathbf{E}^n$ .

En general, una rotación en  $\mathbf{E}^3$  viene por tanto definida por  $s = 3 + \underline{g}$  parámetros con  $\underline{g}$  relaciones de dependencia entre ellos. Atendiendo al número y a la naturaleza de los parámetros, se pueden parametrizar las rotaciones de forma muy variada. En el cuadro II.1 se presentan clasificados los tipos de parametrización más comunes en mecánica clásica, en teoría de mecanismos y en mecánica cuántica [A1, G1, G3, S3].

La clasificación comienza distinguiendo las formas triparamétricas, con tres parámetros independientes, de las hiperparamétricas, con un número mayor de parámetros aunque no todos independientes entre sí, Dentro de los sistemas triparamétricos, el siguiente criterio de clasificación atiende al carácter objetivo o no



Cuadro II.1.

*Sistemas de parametrización de las rotaciones finitas*

del sistema de parametrización. Un sistema es objetivo cuando al girar el sistema de referencia, los parámetros  $\alpha_i$  que caracterizan las rotaciones cambian del mismo modo que las componentes de un vector, esto es:

$$\alpha(\mathbf{R}\mathbf{v}) = \mathbf{R}\alpha(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{R} \in \mathbf{SO}(3) \tag{II.8}$$

Esta propiedad es importante y simplifica muchas demostraciones y resultados, pero la cumplen muy pocos sistemas; por ejemplo, los conocidos ángulos de Euler y Cardan no son sistemas objetivos. Por otra parte, la definición anterior de sistema objetivo equivale a afirmar que la función vectorial  $\alpha(\mathbf{v})$  que relaciona los parámetros  $\alpha$  del sistema con las componentes naturales del vector rotación  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}$  es de la forma:

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v}) = f(v) \mathbf{e} \quad (\text{II.9})$$

La demostración es sencilla: si se toma una rotación  $\mathbf{R}_{\mathbf{v}}$  con el eje de giro en la dirección  $\mathbf{e}$  de  $\mathbf{v}$ , se tiene  $\mathbf{R}_{\mathbf{v}}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ , y aplicando (II.8),  $\mathbf{R}_{\mathbf{v}}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v})$ , lo que prueba que  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v})$  es un autovector de  $\mathbf{R}_{\mathbf{v}}$ . Ahora bien, puesto que la única dirección propia de una rotación es su eje de giro, esto significa que  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v}) = f(v_1; v_2; v_3) \mathbf{e}$ , siendo  $f$  una función escalar dependiente de  $\mathbf{v}$ . Esta función no puede ser arbitraria ya que (II.8) sólo se cumple si además  $f$  es invariante para todas las rotaciones  $\mathbf{R}$  del espacio y esto sólo es posible si su dependencia de  $\mathbf{v}$  se realiza a través del único invariante escalar que se da en  $\mathbf{SO}(3)$ , que es el módulo del propio vector  $\mathbf{v}$ . En definitiva, si se cumple  $f(v_1; v_2; v_3) \equiv f(v)$ , y por tanto,  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{v}) = f(v) \mathbf{e}$ , como queríamos demostrar.

Como la mayoría de los sistemas de parametrización del cuadro II.1 son de sobra conocidos, para abreviar, trasladamos su presentación al Apéndice II, donde se relacionan y resumen de forma ordenada las propiedades más importantes de todos ellos, probando además las conexiones internas que los ligan al álgebra hipercompleja de Hamilton o sistema de cuaternios.

En realidad, no existe un sistema ideal de parametrización, presentando cada uno ventajas e inconvenientes. Así, los más sencillos, que son los triparamétricos –por tener el mínimo número de parámetros y permitir, al ser tridimensionales, el doble juego que consiste en transformar los razonamientos algebraicos en demostraciones geométricas–, si son globales, esto es, si parametrizan el grupo completo  $\mathbf{SO}(3)$ , presentan algún tipo de singularidad o discontinuidad paramétrica [S3] que puede limitar su campo de aplicación. Este inconveniente se evita incrementando el número de parámetros del sistema; por ejemplo, los tetraparamétricos de Euler–Rodrigues y Cayley–Klein y los de alta parametrización, como el de Stuelpnagel, son globales y regulares –aun así, los dos primeros no son biunívocos, al poner cada rotación en correspondencia con dos grupos distintos de parámetros, y sólo el pentaparamétrico asigna a cada rotación un único grupo de parámetros–. Sin embargo, desde un punto de vista computacional, a medida que aumenta el número de parámetros y crece la complejidad del sistema, se pierde eficacia y operatividad, y éste deja de ser rentable; de hecho, los sistemas hiperparamétricos con  $\underline{g} \geq 2$ , como el de Stuelpnagel, no se utilizan prácticamente nunca, pues comportan más inconvenientes que ventajas.

## II. 5.– SINGULARIDADES EN LOS SISTEMAS DE BAJA PARAMETRIZACIÓN

Dado que los sistemas de parametrización resultan tanto más cómodos cuanto más bajo es el número de parámetros característicos y éste es necesariamente mayor que 3, los sistemas de 3 y 4 parámetros son en principio los más sencillos y prácticos. Sin embargo, como anticipamos en el apartado anterior y se prueba en el Apéndice II, tanto los sistemas triparamétricos, objetivos y no objetivos del cuadro II.1 (ángulos de Euler, ángulos Cardan, natural y de Rodrigues) como los tetraparamétricos (Euler–Rodrigues, Cayley–Klein) presentan serios problemas: los primeros no son regulares si son completos, y los segundos no son biunívocos.

Puesto que las formas de parametrización no se agotan en este reducido grupo, la pregunta inmediata que se plantea es: ¿aparte de los sistemas descritos, existe algún otro con tres o cuatro parámetros que sea global, regular y biunívoco? Si existiera, éste sería el sistema ideal de representación de las rotaciones, al reunir en sí las propiedades deseadas de regularidad, univocidad y baja parametrización, que equivale a sencillez. Por desgracia, sin embargo, la respuesta es negativa. La moderna Topología demuestra que no es posible encontrar ningún sistema con un número inferior a 5 parámetros que sea regular, global y biunívoco al mismo tiempo, o, de forma más precisa, que no existe ninguna aplicación biunívoca diferenciable  $f$ , con inversa  $f^{-1}$  también diferenciable, del grupo  $\mathbf{SO}(3)$  en algún subconjunto de  $\mathbf{E}^3$ .

La demostración, por reducción al absurdo, se basa en los siguientes argumentos topológicos [S3]: si existiera dicha aplicación  $f$ , por ser continua, la imagen del compacto  $\mathbf{SO}(3)$  sería también un compacto en  $\mathbf{E}^3$ ; y como en el espacio euclídeo  $\mathbf{E}^3$  todo subconjunto compacto es cerrado y acotado, la imagen  $f[\mathbf{SO}(3)]$  poseería también estas dos propiedades. Por otra parte,  $\mathbf{SO}(3)$  es un espacio localmente euclídeo –se trata de una variedad diferenciable de dimensión 3– y, por tanto, cada punto  $\alpha$  de  $\mathbf{SO}(3)$  posee un entorno  $U_\alpha$  en este espacio homeomorfo a un abierto  $V_\alpha$  en  $\mathbf{E}^3$ . Si se diera la aplicación  $f$ , la imagen del entorno  $f[U_\alpha]$  sería necesariamente homeomorfa al abierto  $V_\alpha$ . Ahora bien, uno de los teoremas de Brouwer afirma que «si dos subconjuntos de un espacio euclídeo  $\mathbf{E}^n$  son homeomorfos y uno de ellos es abierto entonces los dos subconjuntos son abiertos». Aplicando este teorema a nuestro caso particular, el hecho de ser  $V_\alpha$  un abierto en  $\mathbf{E}^3$  implicaría que también lo fuera

$f[U_\alpha]$ . Como la imagen por  $f$  de  $\mathbf{SO}(3)$  coincide con la unión de las imágenes de todos los entornos de sus puntos  $U_\alpha$  y éstos son abiertos,  $f[\mathbf{SO}(3)] = \bigcup f[U_\alpha]$  también sería un abierto. Luego,  $f[\mathbf{SO}(3)]$  debe ser al mismo tiempo compacto –cerrado y acotado– y abierto en  $\mathbf{E}^3$ , lo cual es absurdo, ya que el único conjunto no nulo abierto y cerrado en  $\mathbf{E}^3$  es el propio espacio  $\mathbf{E}^3$ , que no está acotado. En definitiva, no existe ningún sistema triparamétrico homeomorfo a  $\mathbf{SO}(3)$  y por tanto la singularidad es esencial a estos sistemas de parametrización.

Puede afirmarse, por tanto, que todos los sistemas triparamétricos presentan discontinuidades, y que operaciones fundamentales como la derivación de un vector u operador que esté relacionado con las rotaciones no pueden realizarse en todo el espacio  $\mathbf{E}^3$ . En contraste con estos sistemas, los tetraparamétricos como el de Euler–Rodrigues son continuos pero no biunívocos –en el apartado AII.12 del Apéndice II, se prueban, caso por caso, las singularidades que se presentan en los distintos sistemas triparamétricos y tetraparamétricos que se indican en el cuadro II.1–.

Estas discontinuidades deben tenerse en cuenta al formular una teoría general de vigas o estructuras flexibles, ya que los resultados que allí se obtengan estarán en la práctica condicionados por ellas, y habrá que restringir el campo de validez de aquéllos, o sortear éstas con algún artificio ingenioso. Sobre estos aspectos insistiremos más adelante cuando se hayan definido los tensores característicos  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$  de un sistema paramétrico general.

## II. 6.– COMPOSICIÓN DE ROTACIONES EN EL ESPACIO

En general, las rotaciones se definen mediante operadores o vectores –el Apéndice II recoge una lista amplia de ellos en distintos sistemas de parametrización–. En el primer caso, dependiendo del tipo de operador elegido, la transformación lineal que permite girar un vector  $\mathbf{r}$  del espacio  $\mathbf{E}^3$  adopta una forma particular, que puede ser la simple:  $\mathbf{r}_g = \mathbf{R} \mathbf{r}$  (sistemas de Rodrigues y natural, ángulos Cardan y de Euler...), o bien la más compleja de Cayley-Klein:  $\mathbf{P}'(\mathbf{r}_g) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(\mathbf{r})\mathbf{Q}^*$ . En cualquiera de las dos situaciones, las componentes de estos operadores dependen de la base de referencia adoptada en  $\mathbf{E}^3$ . Esta base no tiene por qué ser única; cada rotación puede tener la suya propia. Es más, cuando se componen dos rotaciones  $\alpha$  y  $\beta$  para obtener la rotación



suma  $\alpha \oplus \beta$ , puede suceder que la primera rotación  $\alpha$  gire la propia base de referencia de la segunda rotación  $\beta$ . En este supuesto, al sumar varias rotaciones, las respectivas bases de referencia variarán constantemente; cada rotación aislada representará sólo un giro relativo y el resultado de cualquiera de ellas dependerá de los giros previos efectuados. Diremos en tal caso que el sistema de referencia es *móvil*, denotándolo  $\{\hat{O}, \hat{\mathbf{n}}_i\}$  para distinguirlo del sistema de referencia absoluto o *fijo*  $\{O, \mathbf{n}_i^o\}$  del propio espacio. En las vigas Cosserat, las bases móviles vienen determinadas por los propios triedros asociados a cada punto de la directriz.

Pues bien, en este apartado se deducen las reglas de composición de dos rotaciones  $\alpha$  y  $\beta$  según vengán referidas a un sistema fijo o móvil, obteniendo en ambos casos los vectores y operadores asociados a la rotación suma  $\alpha \oplus \beta$ .

Supongamos, para empezar, que la base de referencia es fija  $\{O, \mathbf{n}_i^o\}$ . En tal caso, si  $\mathbf{R}_1$  y  $\mathbf{R}_2$  son los operadores correspondientes a dos rotaciones  $\alpha$  y  $\beta$ , el operador asociado a la suma  $\alpha \oplus \beta$  será el producto:  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1$  –los subíndices 1 y 2 indican el orden de aplicación de las rotaciones–. Esta misma regla se aplica también a los operadores complejos  $\mathbf{Q}$  de Cayley–Klein. Para probarlo basta observar cómo se transforman las matrices hermíticas  $\mathbf{P}$ , isomorfas de  $\mathbf{E}^3$ , al aplicar dos rotaciones  $\mathbf{Q}_1$  y  $\mathbf{Q}_2$  –consultar el apartado AII.5 del Apéndice II–:

$$\mathbf{P}'_1 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{P} \mathbf{Q}_1^* \quad \therefore \quad \mathbf{P}'_2 = \mathbf{Q}_2 \mathbf{P}'_1 \mathbf{Q}_2^* = (\mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1) \mathbf{P} (\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2)^* \quad (\text{II.10})$$

deduciendo así que el operador  $\mathbf{Q}$  de la rotación suma vale:  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1$ .

Del mismo modo, si en vez de dos, se sumaran “n” rotaciones, se obtendría:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_n \dots \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \quad \therefore \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_n \dots \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \quad (\text{II.11})$$

En definitiva, en un sistema referencial fijo, la suma de rotaciones se traduce en el producto de sus operadores  $\mathbf{R}$  ó  $\mathbf{Q}$ , y el orden en el que se multiplican es justamente el inverso del que se sigue al componer las correspondientes rotaciones. Esta situación se invierte por completo cuando las rotaciones y operadores están referidos a una base móvil  $\{\hat{O}, \hat{\mathbf{n}}_i\}$ . En efecto, sean  $\mathbf{R}_2$  y  $\hat{\mathbf{R}}_2$  los respectivos operadores de la segunda rotación  $\beta$  en las bases fija y móvil, y  $z^i$  y  $\hat{z}^i$  las componentes contravariantes de un

vector cualquiera  $\mathbf{z}$  de  $\mathbf{E}^3$  en estas mismas bases. Admitamos además que inicialmente las dos bases coinciden. En estas condiciones, al aplicar la primera rotación  $\mathbf{R}_1$ , las componentes de  $\mathbf{z}$  en las bases fija,  $\mathbf{n}_i^o$ , y móvil,  $\hat{\mathbf{n}}_i = \mathbf{R}_1[\mathbf{n}_i^o]$  –resultado de girar  $\mathbf{n}_i^o$  con  $\mathbf{R}_1$ –, verificarán las siguientes reglas de transformación:

$$\hat{z}^j = [\mathbf{R}_1^T]_k^j z^k \quad \therefore \quad z^j = [\mathbf{R}_1]_k^j \hat{z}^k \quad (\text{II.12})$$

Por otra parte, si aplicamos la segunda rotación  $\hat{\mathbf{R}}_2$  al propio vector  $\mathbf{z}$ , éste se transformará en un nuevo vector, cuyas componentes en la base móvil  $\hat{\mathbf{n}}_i$  serán:

$$\hat{z}_2^i = [\hat{\mathbf{R}}_2]_j^i \hat{z}_1^j \quad (\text{II.13})$$

y en la base fija  $\mathbf{n}_i^o$  –llevando (II.12) a (II.13)–:

$$z_2^h = [\mathbf{R}_1]_i^h [\hat{\mathbf{R}}_2]_j^i [\mathbf{R}_1^T]_k^j z_1^k \quad (\text{II.14})$$

Ahora bien, por definición de  $\mathbf{R}_2$ , se tiene:  $z_2^i = [\mathbf{R}_2]_j^i z_1^j$ ; luego, se cumple:

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{R}}_2 \mathbf{R}_1^T \quad (\text{II.15})$$

Sustituyendo esta última relación en (II.11) con  $n = 2$ , se llega finalmente a la siguiente expresión para la suma de dos rotaciones cuyos operadores están referidos a la base móvil –téngase en cuenta que inicialmente coinciden las bases móvil y fija–:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{R}}_2 \mathbf{R}_1^T] \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{R}}_2 \quad (\text{II.16})$$

Idénticos resultados se obtienen para los operadores  $\mathbf{Q}$ .

Extendiendo por inducción esta regla al caso de  $n$  rotaciones, se obtiene para las bases móviles la relación correlativa de (II.11):

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{R}}_2 \dots \hat{\mathbf{R}}_N \quad \therefore \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 \hat{\mathbf{Q}}_2 \dots \hat{\mathbf{Q}}_N \quad (\text{II.17})$$

La diferencia esencial entre (II.11) y (II.17) es el orden en el que se multiplican los operadores rotación. Este orden coincide con la secuencia de composición de las rotaciones cuando las bases de referencia son móviles, y se invierte cuando son fijas.

Al mismo resultado se llega por puras consideraciones geométricas; las figuras II.2 muestran el resultado de aplicar dos rotaciones  $\phi$  y  $\theta$  con relación a los ejes  $X$  y  $Z$ , respectivamente. En la figura II.2.a. los ejes de giro son fijos y la secuencia de rotación es  $\theta \rightarrow \phi$ : primero se efectúa el giro  $\theta$  con relación al eje  $Z$  y después el  $\phi$  con relación al  $X$ . Por el contrario, en la figura II.2.b. las rotaciones tienen lugar en orden inverso  $\phi \rightarrow \theta$ : primero se efectúa el giro  $\phi$  con relación al eje  $X$  y después se aplica el giro  $\theta$  al eje  $Z'$  que resulta de girar el  $Z$  con  $\phi$ . El resultado, como se aprecia, es el mismo en ambos casos, viniendo a confirmar la regla (II.17). En conclusión: *componer dos o más rotaciones en un sistema de referencia móvil equivale a componerlas en un sistema de referencia fijo, invirtiendo el orden de composición.*

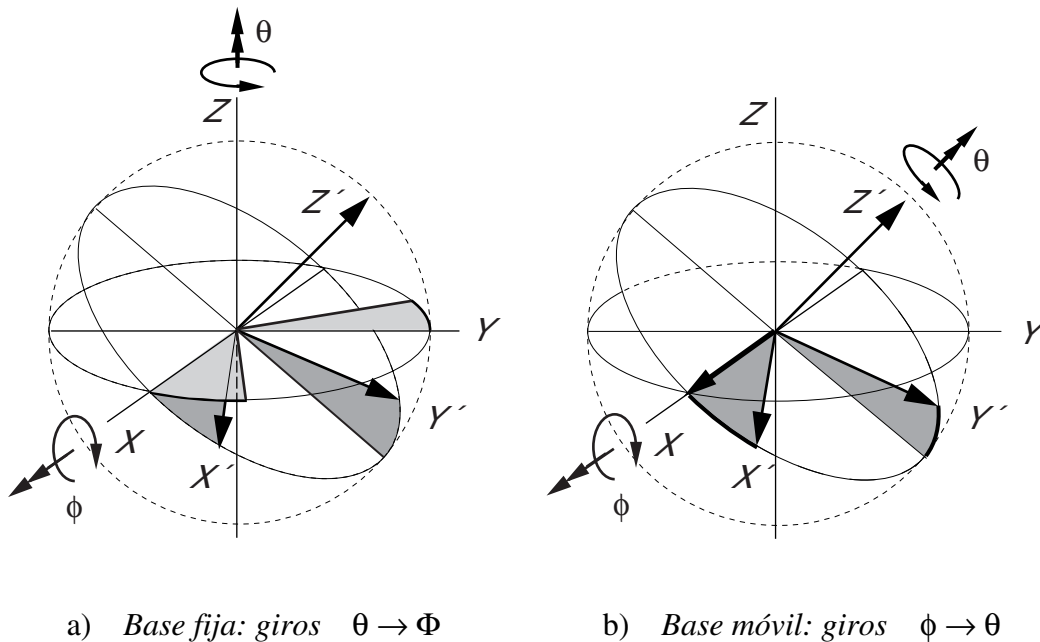


Figura II.2.

*Composición de dos rotaciones en las bases fija y móvil*

Conocido  $\mathbf{R}(\alpha \oplus \beta)$  y aplicando los resultados recogidos en el apartado AII.7 del Apéndice II, se pueden calcular los parámetros característicos de la rotación suma  $\alpha \oplus \beta$  en cualquier sistema de parametrización. En el de Rodrigues, esta suma admite una expresión vectorial muy simple, como se prueba en el mismo Apéndice II. En efecto, si el sistema de referencia es fijo y convenimos en denotar  $\underline{\mathbf{v}}_1$ ,  $\underline{\mathbf{v}}_2$  e  $\underline{\mathbf{Y}}$  a los vectores de Rodrigues de las rotaciones  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\alpha \oplus \beta$ , se tiene:

$$\underline{\mathbf{Y}} = \frac{1}{1 - \underline{\mathbf{v}}_1^T \underline{\mathbf{v}}_2} \left[ \underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2 - \tilde{\underline{\mathbf{v}}}_1 \underline{\mathbf{v}}_2 \right] \quad (\text{II.18})$$

Por otra parte, si invertimos el orden de composición de las rotaciones, se obtiene el vector de Rodrigues cuando la base es móvil:

$$\underline{\mathbf{Y}}^* = \frac{1}{1 - \underline{\mathbf{v}}_1^T \underline{\mathbf{v}}_2} \left[ \underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2 + \tilde{\underline{\mathbf{v}}}_1 \underline{\mathbf{v}}_2 \right] \quad (\text{II.19})$$

Estas dos últimas expresiones se diferencian en el signo del producto vectorial  $\tilde{\underline{\mathbf{v}}}_1 \underline{\mathbf{v}}_2$ , que refleja la no conmutatividad de la suma.

Si las rotaciones son diferenciales:  $\underline{\mathbf{v}}_1 = \underline{\mathbf{v}}_\delta \delta t$  y  $\underline{\mathbf{v}}_2 = \underline{\mathbf{v}}_d dt$ , la diferencia de componerlas en uno u otro orden es un término de segundo orden, despreciable sólo en las teorías lineales:

$$\tilde{\underline{\mathbf{v}}}_\delta \underline{\mathbf{v}}_d \delta t dt \quad (\text{II.20})$$

En el sistema Euler-Rodrigues, también resulta sencillo expresar  $\underline{\mathbf{Y}}$  e  $\underline{\mathbf{Y}}^*$  en función de los cuaternios  $(p_o, \mathbf{p})$  y  $(q_o, \mathbf{q})$  de  $\alpha$  y  $\beta$ . En efecto, de las definiciones (AII.6) y (AII.18) del Apéndice II, se deduce que:  $\underline{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{p} / p_o$  y  $\underline{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{q} / q_o$ , y por tanto:

$$\underline{\mathbf{Y}} = \frac{1}{p_o q_o - \mathbf{p}^T \mathbf{q}} \left[ p_o \mathbf{q} + q_o \mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}} \mathbf{q} \right] \quad (\text{II.21})$$

$$\underline{\mathbf{Y}}^* = \frac{1}{p_o q_o - \mathbf{p}^T \mathbf{q}} \left[ p_o \mathbf{q} + q_o \mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}} \mathbf{q} \right] \quad (\text{II.22})$$

## II. 7.– EL ESPACIO PARAMÉTRICO

En la Mecánica Lagrangiana se define la geometría de los sistemas deformables por medio de un conjunto de variables cinemáticas  $v_j$ . En los sistemas discretos, estas variables se identifican con los desplazamientos y rotaciones de ciertos puntos del sistema, que denominamos *nodales*. Si las rotaciones están parametrizadas con  $s$  parámetros  $\alpha_\ell$  y suponemos que el número total de puntos nodales del sistema es  $h$ , se tiene:  $\{v_j\} \equiv \{u_m^k; \alpha_\ell^k\}$ , con  $k: 1, 2, \dots, h$ ;  $m: 1, 2, 3$ ;  $\ell: 1, \dots, s$  ( $s \geq 3$ ) y  $j: 1, \dots, N$ , donde  $N = (3 + s)h$  es el número total de variables cinemáticas. Estas variables  $v_j$  no tienen por qué ser independientes entre sí; en general dependerán de  $n$  grados de libertad,  $x_i$ , del sistema. Evidentemente, el número  $n$  de grados de libertad no puede exceder de  $6h$ . Por medio de las relaciones  $v_j(x_i)$ , este conjunto de grados de libertad  $x_i$  establece una correspondencia unívoca entre los estados de deformación  $\chi$  del sistema y cierto dominio o variedad  $n$ -dimensional  $\mathcal{E}$  de  $\mathbf{E}^N$ , que puede llenar el propio espacio si  $N = n$ . Estando las rotaciones parametrizadas, denominaremos a la variedad  $\mathcal{E}$  *espacio de configuración* y al espacio euclídeo  $N$ -dimensional  $\mathbf{E}^N$  en el que se encuentra inmersa *espacio paramétrico*.

La variedad  $\mathcal{E}$  es un espacio de Riemann y las  $6h$  variables independientes  $x_i$  un sistema de coordenadas curvilíneas de este espacio (la métrica riemanniana “ $g$ ” viene inducida por la propia métrica euclídea de  $\mathbf{E}^N$ ). Denotando  $\{\mathbf{n}_i\}$  a la base del espacio euclídeo  $\mathbf{E}^N$ , la base natural en un punto  $P$  de la variedad  $\mathcal{E}$  estará formada por los vectores  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i = \partial v_j / \partial x_i \mathbf{n}_j \in \mathbf{E}^N\}$ , y la métrica riemanniana “ $g$ ” vendrá definida por el tensor métrico  $g_{ij} = \boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j$ , donde “ $\cdot$ ” representa el producto escalar en  $\mathbf{E}^N$ . Establecida la inyección  $\mathcal{F}: \chi \rightarrow P(\chi)$  en  $\mathbf{E}^N$ , un cambio del sistema de parametrización de las rotaciones, o de la configuración de referencia  $\chi^{(0)}$  –esto es, del estado con relación al cual se establecen los giros–, equivaldrá a un cambio del sistema de coordenadas curvilíneas  $x_i$  en  $\mathcal{E}$ .

Agrupando ahora las variables cinemáticas ligadas a un mismo nodo del sistema, y separando entre ellas las traslacionales de las rotacionales, el conjunto  $\{v_j\}$  queda descompuesto en  $2h$  grupos independientes. Este reagrupamiento induce una descomposición del espacio paramétrico  $\mathbf{E}^N$  en un producto de  $2h$  subespacios de dimensiones 3 y  $s$ :  $\mathbf{E}^N \equiv (\mathbf{E}^3 \times \mathbf{E}^s)_1 \times \dots \times (\mathbf{E}^3 \times \mathbf{E}^s)_h$ . Así, a cada nodo le corresponden

dos subespacios,  $\mathbf{E}_k^3$  y  $\mathbf{E}_k^s$ , y un cambio de base en  $\mathbf{E}^N$  equivale a un cambio múltiple en los espacios elementales de traslaciones y rotaciones:  $\mathbf{E}^3$  y  $\mathbf{E}^s$ . La proyección de  $\mathcal{E}$  sobre estos subespacios genera a su vez dos subvariedades tridimensionales  $\mathcal{E}_k^u$  y  $\mathcal{E}_k^\theta$ . En consecuencia, la base euclídea  $\mathbf{n}_i$  de  $\mathbf{E}^N$  y la natural  $\boldsymbol{\epsilon}_i$  del sistema de coordenadas curvilíneas  $x^i$  quedan descompuestas cada una de ellas en  $2h$  subbases más simples. Conviniendo en denotar  $\underline{\mathbf{n}}_i^k$  y  $\mathbf{n}_j^k$  a las bases euclídeas de  $\mathbf{E}^3$  y  $\mathbf{E}^s$ , y  $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}_i^k$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}_j^k$  a las naturales de  $\mathcal{E}_k^u$  y  $\mathcal{E}_k^\theta$ , se tendrá:  $\{\mathbf{n}_i\} \equiv \{(\underline{\mathbf{n}}_i^1, \mathbf{n}_j^1) \times (\underline{\mathbf{n}}_i^2, \mathbf{n}_j^2) \times \dots \times (\underline{\mathbf{n}}_i^h, \mathbf{n}_j^h)\}$  con  $(i: 1, 2, 3; j: 1, 2, \dots, s)$  y  $\{\boldsymbol{\epsilon}_i\} \equiv \{(\underline{\boldsymbol{\epsilon}}_i^1, \boldsymbol{\epsilon}_j^1) \times (\underline{\boldsymbol{\epsilon}}_i^2, \boldsymbol{\epsilon}_j^2) \times \dots \times (\underline{\boldsymbol{\epsilon}}_i^h, \boldsymbol{\epsilon}_j^h)\}$  con  $(i, j: 1, 2, 3)$ .

Todo proceso continuo de deformación del sistema desde un estado inicial  $\chi(t_0)$  hasta otro estado final  $\chi^*(t)$  viene representado en  $\mathcal{E}$  por una curva continua  $\gamma(t)$  con origen en un punto  $P(\chi)$  y extremo final en otro  $P(\chi^*)$ . Recíprocamente, a cada curva continua  $\gamma(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) de  $\mathcal{E}$  que une dos puntos  $P(\chi) \equiv \gamma(0)$  y  $P(\chi^*) \equiv \gamma(1)$  le corresponde un proceso de deformación  $\chi(t)$  entre dos estados  $\chi$  y  $\chi^*$ . Si se parte de un estado arbitrario  $\chi$  y se deforma el sistema introduciendo en uno de los nodos un desplazamiento o una rotación en una de las tres direcciones básicas  $x$ - $y$ - $z$  del espacio  $\mathbb{E}^3$ , se genera una determinada curva en  $\mathbf{E}^N$  con origen en  $P(\chi)$ . Si se procede del mismo modo en todos los nodos, aplicando por separado desplazamientos o rotaciones en las tres direcciones señaladas, el resultado es un haz  $n$  de trayectorias  $\gamma_i$ . En los puntos regulares del sistema de parametrización de rotaciones, los vectores tangentes a

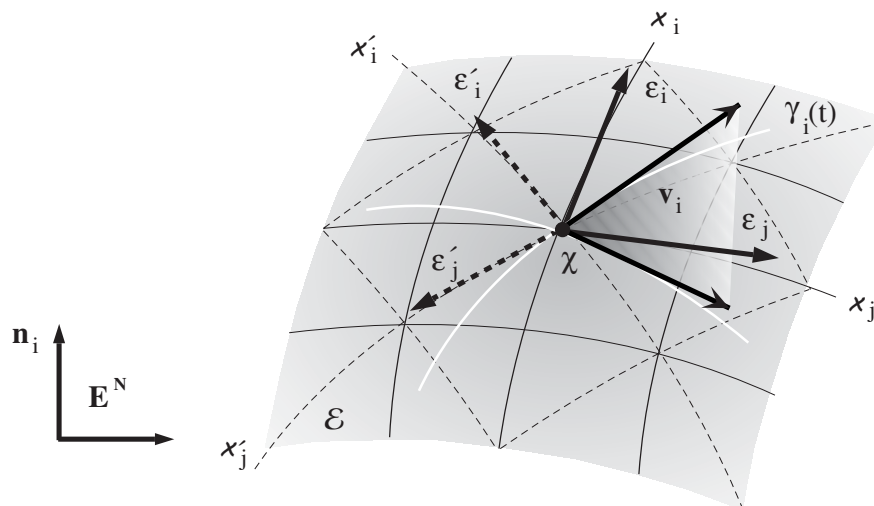


Figura II.3.

Bases locales  $\mathbf{v}_i$  en el espacio de configuración  $\mathcal{E}$

estas curvas,  $\mathbf{v}_i = d\gamma_i / dt$ , son independientes entre sí y constituyen una base  $n$ -dimensional del hiperplano  $\pi_\chi$  de  $\mathbb{E}^N$  tangente en  $P(\chi)$  a  $\mathcal{E}$  (nótese que esta base es independiente de los cambios sucesivos del sistema de coordenadas curvilíneas  $x^i$ ). La proyección de estas  $n$  trayectorias sobre el espacio paramétrico producto  $\prod (\mathbb{E}_k^3 \times \mathbb{E}_k^S)$  origina, por tanto, haces de 3 y  $s$  trayectorias en cada uno de los espacios  $\mathbb{E}_k^3$  y  $\mathbb{E}_k^S$ .

Así como los desplazamientos  $u_x^k, u_y^k, u_z^k$  del nodo  $k$  constituyen un sistema de coordenadas curvilíneas en  $\mathbb{E}_k^3$ , no ocurre lo mismo con los giros en  $\mathbb{E}_k^3$ . Si se introducen en los nodos giros  $\theta_x^k, \theta_y^k, \theta_z^k$ , esto es, rotaciones en las 3 direcciones básicas  $\mathbf{m}_i$  de  $\mathbb{E}^3$ , las trayectorias en  $\mathbb{E}_k^S$  son curvas de  $\mathcal{E}_k^\theta$  con vectores tangentes  $\xi_i^k$ , no ortogonales, distintos para cada punto de  $\mathcal{E}_k^\theta$ . Estas bases  $\xi_i^k$  no son tangentes a ningún sistema de coordenadas curvilíneas  $x_i$  que pueda establecerse sobre  $\mathcal{E}$ , y en consecuencia no se pueden identificar con ningún sistema básico natural  $\epsilon_i$ .

En definitiva, cada punto de  $\mathcal{E}_k^\theta$  tiene asociadas dos bases locales: la natural del sistema de coordenadas curvilíneas  $\epsilon_i^k$  y la generada por el sistema de rotaciones elementales del espacio físico:  $\xi_i^k$ . La base completa  $\mathbf{v}_i$  de  $\mathcal{E}$  queda así descompuesta en un producto de subbases:  $\{(\underline{\mathbf{n}}_1^i, \xi_1^i) \times (\underline{\mathbf{n}}_2^i, \xi_2^i) \times \dots \times (\underline{\mathbf{n}}_h^i, \xi_h^i)\}$  ( $i: 1, 2, 3$ ). De los cambios que experimentan estas subbases  $\xi_i^k$  en  $\mathcal{E}_k^\theta$  nos ocupamos a continuación.

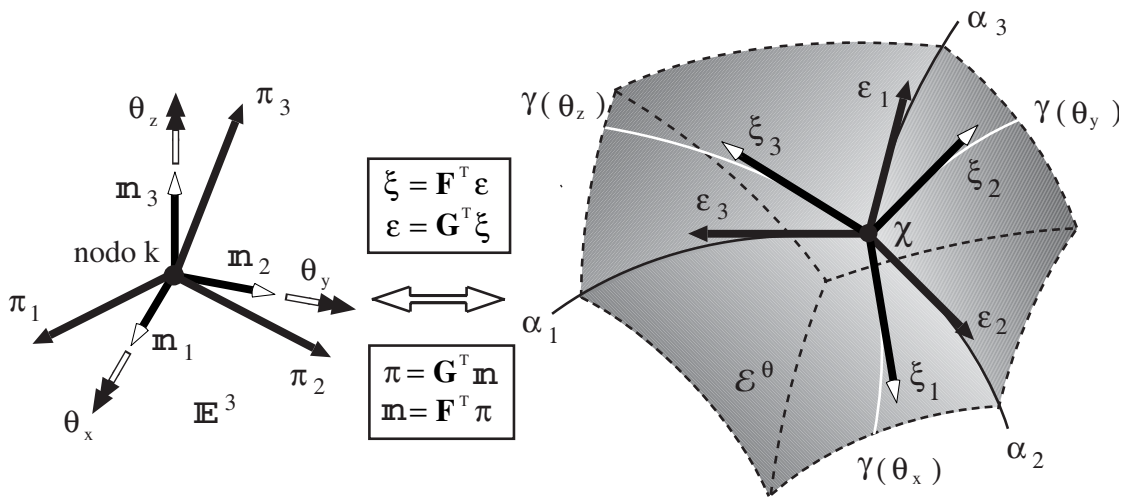


Figura II.4.

Formación de las subbases locales  $\xi_i$  en el espacio de configuración  $\mathcal{E}$

La figura II.4 muestra la generación de la base  $\xi_i$  en un nodo arbitrario “ $k$ ” de un sistema triparamétrico –para no complicar la notación, en adelante se eliminará el índice  $k$ , que hace referencia explícita al nodo, escribiendo simplemente  $\xi_i$  y  $\mathcal{E}^\theta$  en vez de  $\xi_i^k$  y  $\mathcal{E}_k^\theta$ , quedando el nodo sobrentendido–.

Las componentes contravariantes de los vectores  $\xi_j$  en la base natural  $\epsilon_i$  son:  $F_j^i = \partial\alpha_i / \partial\theta_j$  (a diferencia de lo que ocurre en las componentes  $F_j^i$ , en  $\alpha_i$  y  $\theta_j$  los subíndices “ $i$ ” y “ $j$ ” no tienen un significado propiamente tensorial, sino sólo indicial; además, por brevedad, se utiliza la notación  $\theta_j$  para designar los giros  $\{\theta_x, \theta_y, \theta_z\}$  del nodo  $k$  en las tres direcciones básicas  $\mathbf{m}_i$  de  $\mathbb{E}^3$ ). Como estas componentes  $F_j^i$  son el producto escalar en  $\mathbb{E}^S$  de los vectores locales  $\xi_j$  y los vectores  $\epsilon^i$  que componen la base dual de la natural  $\epsilon_i$  en  $\mathcal{E}^\theta$ , dependen del sistema de parametrización adoptado (nótese, sin embargo, que las direcciones  $\xi_j$  son independientes de este sistema). Por otra parte, los índices covariantes y contravariantes del tensor  $F_j^i$  están referidos a las bases canónicas respectivas de los espacios  $\mathbb{E}^3$  y  $\mathbb{E}^S$ , de modo que  $\mathbf{F}$  tiene una naturaleza tensorial híbrida y se trata, en realidad, de un tensor «two–point».

En un sistema triparamétrico  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ , igual importancia que  $\mathbf{F}$  tiene el recíproco  $\mathbf{G}$ , de componentes  $G_j^i = \partial\theta_i / \partial\alpha_j$ , esto es, la matriz que forman las componentes contravariantes de los vectores  $\epsilon_j$  en la base  $\xi^i$ . Las columnas de esta matriz  $\mathbf{G}$  representan las componentes de los giros físicos  $\pi_i$  que habría que aplicarle al nodo  $k$  en  $\mathbb{E}^3$  para que el sistema se deformara siguiendo trayectorias tangentes a las curvas coordenadas  $\alpha_j$  de  $\mathcal{E}^\theta$  –figura II.4–. En definitiva, siendo  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$  las matrices de componentes  $F[i, j] = \partial\alpha_i / \partial\theta_j$  y  $G[i, j] = \partial\theta_i / \partial\alpha_j$  de un sistema triparamétrico, las bases  $\xi: \{\xi_j\}$  y  $\epsilon: \{\epsilon_i\}$ , sus duales  $\xi^*: \{\xi^j\}$  y  $\epsilon^*: \{\epsilon^i\}$ , y el tensor métrico  $\mathbf{g}$  de  $\mathcal{E}^\theta$  están relacionados entre sí del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \xi &= \mathbf{F}^T \epsilon & \therefore & \xi^* = \mathbf{G} \epsilon^* & \therefore & \epsilon = \mathbf{g} \epsilon^* \\ \epsilon &= \mathbf{G}^T \xi & \therefore & \epsilon^* = \mathbf{F} \xi^* & \therefore & \xi = \mathbf{F}^T \mathbf{g} \mathbf{F} \xi^* \end{aligned} \quad (\text{II.23.a})$$

y los sistemas  $\mathbf{m}: \{\mathbf{m}_i\}$  y  $\boldsymbol{\pi}: \{\boldsymbol{\pi}_i\}$  y  $\boldsymbol{\pi}^*: \{\boldsymbol{\pi}^i\}$  de  $\mathbb{E}^3$ , de esta otra forma:

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{G}^T \mathbf{m} \quad \therefore \quad \mathbf{m} = \mathbf{F}^T \boldsymbol{\pi} \quad \therefore \quad \boldsymbol{\pi}^* = \mathbf{F} \mathbf{m} \quad \therefore \quad \mathbf{m} = \mathbf{G} \boldsymbol{\pi}^* \quad (\text{II.23.b})$$



La forma y propiedades concretas de los tensores  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$  dependen del sistema de parametrización que se adopte en cada caso. Sin embargo, algunas de ellas son generales y se pueden establecer y demostrar sin necesidad de particularizar el sistema. El conocimiento de estas propiedades –especialmente las relacionadas con las variaciones de  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$  en  $\mathcal{E}^0$ – es fundamental en el análisis no lineal de estructuras sometidas a grandes rotaciones, ya que juegan un papel esencial en la construcción de la matriz de rigidez del sistema, como comprobaremos más adelante.

El cálculo de  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$ , en principio, es sencillo, pues se reduce a resolver las ecuaciones:

$$d\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\theta} \quad \therefore \quad d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\alpha} \quad (\text{II.24})$$

donde  $d\boldsymbol{\alpha} = \{d\alpha_1, d\alpha_2, \dots, d\alpha_l\}$  son las variaciones del vector de parámetros  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $d\boldsymbol{\theta} = \{d\theta_x, d\theta_y, d\theta_z\}$  las componentes de un giro diferencial en la base  $\mathbf{m}_i$  de  $\mathbb{E}^3$ .

Esto es, situados en un nodo de orientación  $\boldsymbol{\alpha}$ , el tensor  $\mathbf{F}$  se determina hallando la variación paramétrica  $d\boldsymbol{\alpha}$  que se produce cuando se aplica al nodo un giro diferencial  $d\boldsymbol{\theta}$ . Y recíprocamente, si tomo como variables independientes las componentes del vector  $d\boldsymbol{\alpha}$  y determino  $d\boldsymbol{\theta}$ , obtengo  $\mathbf{G}$ . Todo ello en el supuesto de que las rotaciones  $d\boldsymbol{\theta}$  estén referidas a una base fija. Si estuvieran referidas a una base móvil, el procedimiento general no variaría pero los resultados lógicamente sí cambiarían, teniéndose entonces:

$$d\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^*(\boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\theta}^* \quad \therefore \quad d\boldsymbol{\theta}^* = \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\alpha} \quad (\text{II.25})$$

–los asteriscos indican que las rotaciones están referidas a una base móvil en  $\mathbb{E}^3$ –

Considerando (II.3), se tiene en este caso:  $\mathbf{R}_\alpha d\boldsymbol{\alpha} = d\tilde{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{R} = \mathbf{R} d\tilde{\boldsymbol{\theta}}^*$ , y por tanto:

$$\mathbf{G} = \left[ \dots, \text{Axial} \left[ \begin{array}{c} | \\ \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}^T \\ | \end{array} \right], \dots \right] \quad \therefore \quad \mathbf{G}^* = \left[ \dots, \text{Axial} \left[ \begin{array}{c} | \\ \mathbf{R}^T \mathbf{R}_\alpha \\ | \end{array} \right], \dots \right] \quad (\text{II.26})$$

Estos operadores son de orden  $3 \times s$ , mientras sus recíprocos  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}^*$  son de orden  $s \times 3$ . Evidentemente, en los sistemas triparamétricos  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^*$  son inversos de  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}^*$ .

Conviene advertir que si  $s > 3$ , al no ser independientes todas las componentes de  $d\alpha$ , los tensores  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^*$  no son únicos, existiendo infinitas soluciones a las ecuaciones (II.24) y (II.25); sin embargo, los tensores  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}^*$  siempre tienen sentido y son únicos.

En los sistemas de baja parametrización, la expresión de los tensores básicos:  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}^*$  y  $\mathbf{F}^*$  es muy sencilla; por ejemplo, en los sistemas objetivos, estos tensores pertenecen a un semigrupo  $\mathcal{J}$ , como se probó en el Apéndice I, y presentan por tanto la forma elemental (AI.21). En estos casos el procedimiento directo (II.25) para obtener  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^*$  resulta laborioso e inadecuado, ya que con ellos no se obtiene una expresión del tipo (AI.21) –característica de los elementos de  $\mathcal{J}$ –, siendo preferible recurrir a procedimientos específicos de cálculo, adaptados a cada sistema.

Así en el sistema triparamétrico de Rodrigues, el método más simple de hallar  $\mathbf{F}$  consiste en diferenciar la expresión (II.18) del pseudovector de Rodrigues  $\underline{\mathbf{Y}}$  con relación al vector  $\underline{\mathbf{v}}_2$ . Como  $d\underline{\mathbf{v}}_2 = d\mathbf{v}_2 / 2$ , dividiendo el resultado anterior por 2, se obtiene la diferencial total de  $\underline{\mathbf{Y}}$  con relación a  $\underline{\mathbf{v}}_2$ , que justamente define  $\mathbf{F}$  –en este caso  $d\underline{\mathbf{v}}_2$  equivale a  $d\theta$ –. El resultado final, escribiendo  $\underline{\mathbf{v}}$  en vez de  $\underline{\mathbf{v}}_1$ , es el siguiente:

$$\mathbf{F}(\underline{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} [ \mathbf{I} - \underline{\tilde{\mathbf{v}}} + \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{v}} ] \quad (\text{II.27.a})$$

Diferenciando del mismo modo (II.19) –ahora  $d\underline{\mathbf{v}}_2$  sustituye a  $d\theta$ –, se obtiene la expresión dual, cuando las rotaciones están referidas a una base móvil:

$$\mathbf{F}^*(\underline{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} [ \mathbf{I} + \underline{\tilde{\mathbf{v}}} + \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{v}} ] \quad (\text{II.27.b})$$

Invirtiendo estas relaciones –Apéndice I– se deducen los operadores  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^*$ :

$$\mathbf{G}(\underline{\mathbf{v}}) = \frac{2}{1 + \underline{\mathbf{v}}^2} [ \mathbf{I} + \underline{\tilde{\mathbf{v}}} ] \quad (\text{II.28.a})$$

$$\mathbf{G}^*(\underline{\mathbf{v}}) = \frac{2}{1 + \underline{\mathbf{v}}^2} [ \mathbf{I} - \underline{\tilde{\mathbf{v}}} ] \quad (\text{II.28.b})$$

En otros sistemas de parametrización, estos operadores  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$  se hallan de forma

análoga. En el Apéndice III se deducen  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^*$  en el sistema triparamétrico natural, en los no objetivos de Euler y Cardan y en el tetraparamétrico de Euler–Rodrigues. En este último caso, la solución no es única, como se ha indicado.

Una de las ventajas del sistema de parametrización de Rodrigues es que en él los operadores  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{G}^*$ ,  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}^*$  cumplen una serie de reglas muy sencillas, como son:

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}^{-1} \quad \therefore \quad \mathbf{G}^* = \mathbf{F}^{*-1} \quad (\text{II.29.a})$$

$$\mathbf{G}(\underline{\mathbf{v}}) = \mathbf{G}^*(-\underline{\mathbf{v}}) \quad \therefore \quad \mathbf{F}(\underline{\mathbf{v}}) = \mathbf{F}^*(-\underline{\mathbf{v}}) \quad (\text{II.29.b})$$

$$\mathbf{G}(\underline{\mathbf{v}}) = \mathbf{G}^T(-\underline{\mathbf{v}}) \quad \therefore \quad \mathbf{F}(\underline{\mathbf{v}}) = \mathbf{F}^T(-\underline{\mathbf{v}}) \quad (\text{II.29.c})$$

$$\mathbf{G}^* = \mathbf{G}^T \quad \therefore \quad \mathbf{F}^* = \mathbf{F}^T \quad (\text{II.29.d})$$

Estas reglas no se cumplen en todos los sistemas de parametrización; así, por ejemplo, la primera de ellas sólo la verifican los triparamétricos en el dominio de regularidad; en otros sistemas sólo se puede afirmar que:  $\mathbf{GF} = \mathbf{G}^*\mathbf{F}^* = \mathbf{I}$ . Y la segunda sólo la cumplen, los sistemas que al invertir una rotación cambian el signo de los parámetros asociados. Denominaremos *centrales* a estos sistemas:

$$\mathbf{R} \rightarrow \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{R}^T \rightarrow -\alpha \quad (\text{II.30})$$

La demostración del segundo aserto es sencilla: si se cumple (II.30), al sumar dos rotaciones arbitrarias  $\boldsymbol{\theta}$  y  $d\boldsymbol{\theta}$  en una base fija, y sus opuestas en una móvil, los parámetros correspondientes a estas sumas serán:

$$\boldsymbol{\theta} \underset{\text{F}}{\oplus} d\boldsymbol{\theta} \rightarrow \alpha + d\alpha \quad \therefore \quad -\boldsymbol{\theta} \underset{\text{M}}{\oplus} -d\boldsymbol{\theta} \rightarrow -\alpha - d\alpha$$

(las abreviaturas “F” y “M” bajo el símbolo  $\oplus$  indican el tipo de base de referencia, fija o móvil); y teniendo en cuenta las definiciones de los tensores básicos, se tendrá:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta} = d\alpha \quad \text{y} \quad \mathbf{F}^*(-\boldsymbol{\theta})(-d\boldsymbol{\theta}) = -d\alpha \quad \forall d\boldsymbol{\theta}$$

$$\mathbf{G}(\alpha)d\alpha = d\boldsymbol{\theta} \quad \text{y} \quad \mathbf{G}^*(-\alpha)(-d\alpha) = -d\boldsymbol{\theta} \quad \forall d\boldsymbol{\theta}$$

de donde se desprenden las dos relaciones (II.29.b).

Adviértase que la propiedad (II.30) que caracteriza a los sistemas centrales, aunque parece trivial, la incumplen muchos sistemas de parametrización, entre ellos los no objetivos de Euler y Cardan o el sistema de Euler-Rodrigues, restándoles operatividad.

Que el tercer grupo de relaciones (II.29.c) se satisface en todos los sistemas objetivos, se desprende de las propiedades del semigrupo  $\mathcal{T}$ , como se prueba en el apartado AI.2 del Apéndice I –expresión (AI.26)–. Por último, (II.29.d) se extrae directamente de (II.29.b) y (II.29.c).

En conclusión, podemos afirmar que de todos los sistemas de parametrización posibles, sólo los sistemas objetivos y centrales –que denominaremos *vectoriales*–, como el de Rodrigues y el natural, cumplen simultáneamente las tres relaciones o propiedades (II.29). Como éstas simplifican mucho los cálculos y resultados, los sistemas vectoriales resultan generalmente los más sencillos y prácticos.

Existen, no obstante, otras relaciones que cumplen necesariamente todos los sistemas de parametrización y son por ello más interesantes. Una muy importante que relaciona los operadores  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}^*$  es la siguiente:

$$\mathbf{F} \mathbf{R} = \mathbf{F}^* \quad \therefore \quad \mathbf{F}^* \mathbf{R}^T = \mathbf{F} \quad (\text{II.31})$$

Se prueba del siguiente modo: sean  $\alpha$  y  $d\beta$  dos rotaciones arbitrarias, la segunda diferencial; suponiéndolas referidas a una base móvil y sumándolas, el resultado será:

$$\alpha \oplus_M d\beta := \alpha \oplus_F \mathbf{R}(\alpha)[d\beta]$$

Denotando ahora  $d\theta_\beta$  a la rotación diferencial que produce el cambio paramétrico  $d\beta$ , en virtud de las definiciones (II.24) y (II.25) de  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}^*$ , se tendrá:

$$\mathbf{F}^* d\theta_\beta = \mathbf{F} \mathbf{R} d\theta_\beta$$

y como el vector diferencial  $d\theta_\beta$  es arbitrario, la primera relación (II.31) queda probada. Multiplicando ésta por  $\mathbf{R}^T$  y despejando  $\mathbf{F}$ , se obtiene la segunda.

Con un razonamiento análogo se demuestran las relaciones inversas de (II.31):  $\mathbf{R}^T \mathbf{G} = \mathbf{G}^*$  y  $\mathbf{R} \mathbf{G}^* = \mathbf{G}$ . Post-multiplicándolas por  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}^*$ , se deducen también éstas otras:  $\mathbf{G} \mathbf{F}^* = \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{G}^* \mathbf{F} = \mathbf{R}^T$ .

Estos resultados se agrupan y ordenan en la tabla (II.32). Su importancia deriva del hecho de ser válidos para cualquier sistema de parametrización, sea éste tri- o hiperparamétrico ( $s > 3$ ), objetivo o no.

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \mathbf{F} = \mathbf{I}_3 \quad \therefore \quad \mathbf{F}^* \mathbf{R}^T = \mathbf{F} \quad \therefore \quad \mathbf{R}^T \mathbf{G} = \mathbf{G}^* \quad \therefore \quad \mathbf{G} \mathbf{F}^* = \mathbf{R} \\ \mathbf{G}^* \mathbf{F}^* = \mathbf{I}_3 \quad \therefore \quad \mathbf{F} \mathbf{R} = \mathbf{F}^* \quad \therefore \quad \mathbf{R} \mathbf{G}^* = \mathbf{G} \quad \therefore \quad \mathbf{G}^* \mathbf{F} = \mathbf{R}^T \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

Si además el sistema fuera vectorial, esto es, objetivo y central, los operadores que figuran en la tabla anterior pertenecerían todos a un semigrupo conmutativo, como se demuestra en el Apéndice I, pudiendo entonces intercambiarse e invertirse; en este supuesto, se cumplirían también las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \mathbf{G} = \mathbf{I}_3 \quad \therefore \quad \mathbf{R}^T \mathbf{F}^* = \mathbf{F} \quad \therefore \quad \mathbf{G} \mathbf{R}^T = \mathbf{G}^* \quad \therefore \quad \mathbf{F}^* \mathbf{G} = \mathbf{R} \\ \mathbf{F}^* \mathbf{G}^* = \mathbf{I}_3 \quad \therefore \quad \mathbf{R} \mathbf{F} = \mathbf{F}^* \quad \therefore \quad \mathbf{G}^* \mathbf{R} = \mathbf{G} \quad \therefore \quad \mathbf{F} \mathbf{G}^* = \mathbf{R}^T \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

Nótese que si el sistema no es triparamétrico, las dimensiones de  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ , etc. no se ajustan a las reglas de la multiplicación matricial y estos productos no tienen sentido.

## II. 8.— LAS ROTACIONES FINITAS EN EL CÁLCULO DE ESTRUCTURAS

En el análisis no lineal de estructuras, cualquier teoría general que contemple las rotaciones finitas debe basarse sólo en las propiedades intrínsecas de éstas, comunes a todos los sistemas de parametrización, como las sencillas relaciones (II.32). Propiedades como las recogidas en la tabla (II.33) no deben considerarse nunca, si no se desea obtener resultados limitados, válidos sólo en condiciones muy restringidas.

Una característica general de los sistemas estructurales con rotaciones finitas es que sus matrices de rigidez no son simétricas, aun cuando éstos sean conservativos. La explicación de este curioso fenómeno, que parece contradecir los principios básicos del análisis estructural, guarda estrecha relación con la no conmutatividad de la suma de rotaciones, y ésta con la forma en que varía la base  $\xi$  sobre  $\mathcal{E}$ . Veamos.

La base local  $\xi$  cambia de un punto a otro en  $\mathcal{E}^0$  y este cambio es independiente del registrado por la base  $\epsilon$  del sistema de coordenadas curvilíneas. Al girar un nodo de una estructura varían los parámetros rotacionales  $\alpha_j$  de su estado de deformación  $\chi$ , y esta variación, si es continua, se traduce en el espacio paramétrico en un desplazamiento sobre  $\mathcal{E}$  a lo largo de una curva con origen en  $\chi$ . Si se aplican dos rotaciones consecutivas al mismo nodo, se producen dos variaciones de los parámetros  $\alpha_j$ , lo que equivale a trazar sobre  $\mathcal{E}$  dos segmentos curvos, uno a continuación del otro. En el límite, cuando las rotaciones son muy pequeñas, estas trayectorias se confunden con las propias direcciones de los vectores locales  $\xi_j$ , como muestra la figura II.5. Si se invierte el orden en que se aplican estas dos rotaciones, obtenemos otras dos trayectorias, que juntamente con las anteriores forman un cuadrilátero curvilíneo. Ahora bien, este cuadrilátero no se cierra porque los extremos finales de ambas trayectorias no coinciden. La razón es simple: las derivadas de dos vectores cualquiera  $\xi_i, \xi_j$  de la base  $\xi$  al desplazarnos sobre  $\mathcal{E}^0$  en las direcciones cruzadas  $\xi_j, \xi_i$ , no verifican la regla de Schwarz, sino que difieren, en virtud de (II.20), en:

$$D\xi_i \cdot \xi_j - D\xi_j \cdot \xi_i = \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}_i \times \boldsymbol{\theta}_j) = e_{(i j m)} \xi_m \quad (\text{II.34})$$

En consecuencia las trayectorias en  $\mathcal{E}$  dependen del orden de composición de las rotaciones –en la figura II.5 los extremos finales de estas trayectorias son los puntos  $\chi^3$  y  $\chi^4$ –. Esta propiedad marca una diferencia importante entre las bases  $\xi$  y  $\epsilon$ , ya que ésta última por definición siempre cumple la regla de Schwarz:

$$D\epsilon_i \cdot \epsilon_j - D\epsilon_j \cdot \epsilon_i = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha_j \partial \alpha_i} - \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \equiv \mathbf{0} \quad (\text{II.35})$$

( $D\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  representa la derivada direccional de Gateaux del vector  $\mathbf{a}$  al desplazarnos en la dirección  $\mathbf{b}$ , esto es, el límite del cociente  $[\mathbf{a}(\chi + t\mathbf{b}) - \mathbf{a}(\chi)]/t$  cuando  $t \rightarrow 0$  [K2]).

Las implicaciones de este hecho en la matriz de rigidez del sistema estructural son importantes. Suponiendo que el sistema sea hiperelástico, la energía interna de éste  $U$  será una función real, uniforme y regular de su estado de deformación:  $U(\chi) : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ , esto es, una función  $U(u_i, \alpha_j)$  definida sobre el espacio de configuración de clase  $C^k$

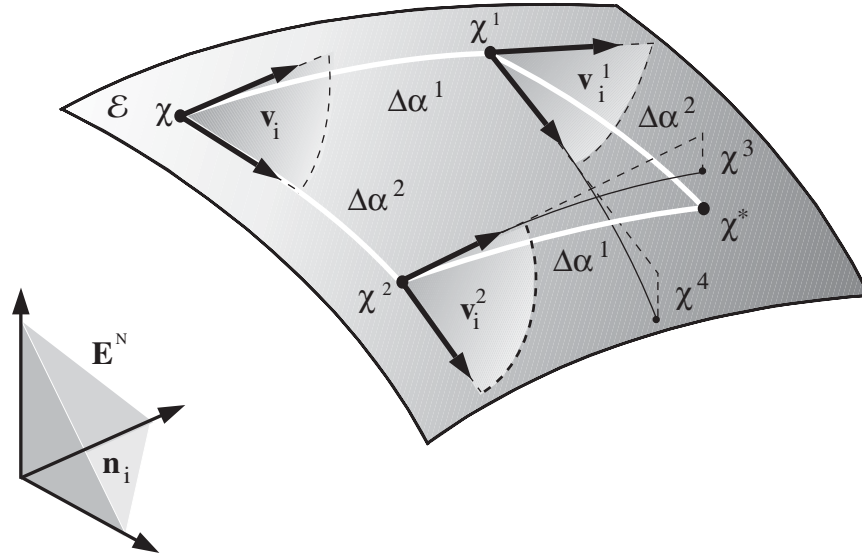


Figura II.5.

*Variación de las bases locales  $\mathbf{v}_i$  en el espacio de configuración  $\mathcal{E}$  y efecto que produce en la composición convencional de rotaciones.*

( $k \geq 2$ ). Sus derivadas de primer orden con relación a las variables  $x_i(u_i, \alpha_i)$  constituirán el conjunto de fuerzas generalizadas conjugadas con estas variables, y las derivadas de segundo orden proporcionarán la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  del sistema. Al ser  $U(u_i, \alpha_i)$  una función uniforme, la matriz  $\mathbf{K}$  resulta simétrica por ser iguales las derivadas cruzadas  $\partial^2 U / \partial \alpha_i \partial \alpha_j$  y  $\partial^2 U / \partial \alpha_j \partial \alpha_i$ . Sin embargo, si las rotaciones no están parametrizadas, esto es, si se sustituyen las verdaderas variables independientes  $\alpha_i$  por rotaciones  $\theta_i$  en el espacio físico  $\mathbb{E}^3$ , las derivadas segundas dependerán del orden en que se apliquen las rotaciones y la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  resultará asimétrica. Este resultado no contradice el teorema de igualdad de las derivadas cruzadas de Schwarz, ya que  $U$  no es función uniforme de los giros  $\theta_i$  sino sólo de los parámetros  $\alpha_i$ . Para comprenderlo mejor, vamos a ayudarnos de la figura II.5. Si se sustituyen en esta figura los incrementos finitos  $\Delta \alpha^1$  y  $\Delta \alpha^2$  por incrementos diferenciales  $d$  y  $\delta$ , la

energía elástica  $U$  de un punto  $\chi$  de  $\mathcal{E}$  sufrirá variaciones  $dU$ ,  $\delta U$ ,  $(dU+\delta U+\delta dU)$  y  $(dU+\delta U+d\delta U)$  al pasar por los estados de deformación  $\chi^1$ ,  $\chi^2$ ,  $\chi^3$  y  $\chi^4$ , próximos a  $\chi$ . A estos estados se llega introduciendo un conjunto de rotaciones diferenciales  $\mathbf{d}$ ,  $\delta$ ,  $\mathbf{d}+\delta$  y  $\delta+\mathbf{d}$ . Ahora bien, como los caminos  $\mathbf{d}+\delta$  y  $\delta+\mathbf{d}$  no convergen en  $\mathcal{E}$ , la energía en los extremos finales de ambos recorridos será distinta:  $U(\chi^3) \neq U(\chi^4)$ , y también serán distintas las diferenciales  $d\delta U$  y  $\delta dU$ . En consecuencia, la matriz de rigidez del sistema  $\mathbf{K}$  es asimétrica, como habíamos anticipado; esto es:

$$K_{ij} := [DU \cdot \boldsymbol{\theta}_i, \boldsymbol{\theta}_j] \neq [DU \cdot \boldsymbol{\theta}_j, \boldsymbol{\theta}_i] := K_{ji} \quad (\text{II.36})$$

En general, para lograr que la diferencial de la energía elástica interna  $U$  esté unívocamente definida y la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  sea simétrica, pueden seguirse tres caminos distintos [A4, G1, S2], que ordenados cronológicamente, por orden de aparición, son:

- I.– Modificar el sentido de composición de dos rotaciones. (Argyris)
- II.– Parametrizar las rotaciones:  $\boldsymbol{\theta}(\alpha_i)$ . (Géradin)
- III.– Introducir una derivación objetiva para las rotaciones. (Simó)

De estas tres vías, en síntesis, las dos primeras cambian el sentido otorgado a la “composición de rotaciones”, sustituyendo, en el primer caso, la tradicional suma “ $\oplus$ ” por la suma semitangencial u otra similar, y en el segundo, la composición en sí por la variación paramétrica. La tercera, sin embargo, modifica el concepto mismo de derivada, sustituyendo las derivadas convencionales de Gateaux  $[DU \cdot \boldsymbol{\theta}_i, \boldsymbol{\theta}_j]$  por derivadas intrínsecas, independientes de la variación de las bases locales  $\{\mathbf{v}_i\}$  en  $\mathcal{E}$ . Estos cambios igualan las derivadas cruzadas (II.36) y simetrizan la matriz de rigidez.

De los tres métodos, el segundo, que consiste en parametrizar las rotaciones, es el más importante, como tendremos ocasión de comprobar. Esbozado por Géradin, no llegó sin embargo a ser desarrollado en profundidad; la complejidad de los primeros resultados desviaron de inmediato la atención al estudio de casos particulares simples. Directamente relacionado con él, se encuentra el método de Argyris, que goza del privilegio de haber sido el primero en explicar las aparentes contradicciones que



derivan de la no conmutatividad de la suma de rotaciones y, resueltas éstas, devolver la simetría a la matriz de rigidez. Comparado con el de Gérardin, resulta sin embargo mucho más artificioso y complejo, aparte de que se propuso desde un principio en una versión reducida, conocida como método de las rotaciones semitangenciales, que oculta el verdadero alcance del método. De estos dos métodos generales de componer rotaciones y de la relación que se da entre ellos nos ocupamos en el próximo apartado.

## II. 9.– COMPOSICIÓN PARAMÉTRICA Y SEMITANGENCIAL DE ROTACIONES

Para evitar los problemas derivados de la no conmutatividad, Argyris [A2, A3] modificó el modo tradicional de componer dos o más rotaciones, introduciendo las *rotaciones semitangenciales*, que se definen en el apartado AII.10 del Apéndice II. El término “semitangencial” alude, por un lado, al sentido geométrico implícito en su definición, y, por otro, al hecho de que estas rotaciones sean energéticamente conjugadas de los momentos conservativos semitangenciales de Ziegler [Z1].

En concreto, Argyris definió la suma semitangencial “ $\overset{s}{\oplus}$ ” de dos rotaciones  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  del siguiente modo –consultar el Apéndice II–:

$$\mathbf{v}_1 \overset{s}{\oplus} \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \oplus \mathbf{v}_2^s \quad (\text{II.37})$$

tomando para  $\mathbf{v}_2^s$  la rotación cuyo vector de Rodrigues viene dado en función de los vectores de Rodrigues de  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$ , por la expresión:

$$\underline{\mathbf{v}}_2^s := \frac{1}{2} [ \underline{\mathbf{v}}_2 + \mathbf{R}_1 [ \underline{\mathbf{v}}_2 ] ] \quad (\text{II.38})$$

La suma (II.37) no depende del orden de composición de las rotaciones, pues el resultado es una expresión simétrica en  $\underline{\mathbf{v}}_1$  y  $\underline{\mathbf{v}}_2$ :

$$\underline{\mathbf{v}}_1 \overset{s}{\oplus} \underline{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{1 - \underline{\mathbf{v}}_1^T \underline{\mathbf{v}}_2} [ \underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2 ] \quad (\text{II.39})$$

De este modo, Argyris garantizó la conmutatividad de la suma y recuperó la simetría de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  al calcular sus componentes así:

$$\mathbf{K}_{ij} := [ \mathbf{DU} \cdot \underline{\mathbf{v}}_i, \underline{\mathbf{v}}_j^s ] = [ \mathbf{DU} \cdot \underline{\mathbf{v}}_j, \underline{\mathbf{v}}_i^s ] := \mathbf{K}_{ji} \quad (\text{II.40})$$

Naturalmente, existen otras muchas leyes de composición conmutativas, aparte de la suma semitangencial, y con ellas el método de Argyris se puede extender más allá del caso particular aludido. Así, basta tomar una función  $f$  cualquiera simétrica en  $\underline{\mathbf{v}}_1$  y  $\underline{\mathbf{v}}_2$ , como la (II.39), para definir de forma implícita una suma conmutativa:

$$\underline{\mathbf{v}}_1 \oplus^s \underline{\mathbf{v}}_2 := f(\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2) \quad (\text{II.41})$$

Ésta, a su vez, equivale a la suma convencional de dos rotaciones  $\underline{\mathbf{v}}_1$  y  $\underline{\mathbf{v}}_2^s$ , como se indica en (II.37), viniendo  $\underline{\mathbf{v}}_2^s$  dada por:

$$\underline{\mathbf{v}}_2^s := -\underline{\mathbf{v}}_1 \oplus f \quad (\text{II.42})$$

En el caso particular en que  $f$  coincida con (II.39), la regla (II.42) conduce a (II.38); ahora bien, si se toma una función distinta, el resultado varía y ya nada tiene que ver con el concepto original de rotación semitangencial de Argyris. Por ejemplo, si se toma:  $f = \underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2$ , el vector de Rodrigues de la rotación (II.42) es igual a:

$$\underline{\mathbf{v}}_2^s := \frac{1}{1 + \underline{\mathbf{v}}_1^2 - \underline{\mathbf{v}}_1^t \underline{\mathbf{v}}_2} [ \underline{\mathbf{v}}_2 + \tilde{\underline{\mathbf{v}}}_1 \underline{\mathbf{v}}_2 ] \quad (\text{II.43})$$

Recorriendo este camino en sentido inverso, podemos ahora definir una nueva suma conmutativa combinando (II.37) y (II.43). Éste es en síntesis el procedimiento que utilizó Argyris para definir la suma semitangencial, sólo que en este caso hubo de sustituir el vector (II.43) por el (II.38).

Volviendo a (II.41), observamos que las componentes de  $f$  son en realidad los parámetros de Rodrigues de la rotación compuesta (II.37), y teniendo esto en cuenta, si  $f = \underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2$ , la suma de  $\underline{\mathbf{v}}_1$  y  $\underline{\mathbf{v}}_2$  equivaldrá a dos desplazamientos consecutivos en

el espacio paramétrico. Así, trabajando directamente sobre el espacio paramétrico, interpretando la aplicación de una rotación como una variación paramétrica de estado de deformación  $\chi$  del sistema, se resuelve de forma natural el problema de hallar una suma de rotaciones conmutativa. La figura II.5 muestra las trayectorias que se describen en  $\mathcal{E}$  cuando se componen dos rotaciones de este modo –curvas de trazo blanco–. Al confluir las dos trayectorias en un mismo punto  $\chi^*$  queda patente que el resultado de sumar dos rotaciones no depende del orden de composición de éstas:

$$\begin{aligned} \chi(\alpha) &\xrightarrow{\mathbf{v}_1} \chi^1(\alpha + \Delta\alpha^1) \xrightarrow{\mathbf{v}_1 \oplus \mathbf{v}_2^S} \chi^*(\alpha + \Delta\alpha^1 + \Delta\alpha^2) \\ \chi(\alpha) &\xrightarrow{\mathbf{v}_2} \chi^2(\alpha + \Delta\alpha^2) \xrightarrow{\mathbf{v}_2 \oplus \mathbf{v}_1^S} \chi^*(\alpha + \Delta\alpha^1 + \Delta\alpha^2) \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

Compárense estas trayectorias con las que se obtienen cuando se suman las rotaciones de forma convencional, en cuyo caso, en vez de converger en un mismo punto  $\chi^*$ , divergen y presentan extremos finales  $\chi^3$  y  $\chi^4$  distintos.

En suma, las dos variaciones paramétricas (II.44) equivalen a la suma de dos rotaciones en el sentido convencional:  $\mathbf{v}_1 \oplus \mathbf{v}_2^S$  y  $\mathbf{v}_2 \oplus \mathbf{v}_1^S$ , viniendo dadas  $\mathbf{v}_1^S$  y  $\mathbf{v}_2^S$  por (II.43). Esta forma de sumar rotaciones la denominaremos composición paramétrica. De acuerdo con esta definición, sumar paraméricamente dos rotaciones en el sistema de Rodrigues equivale a hallar la rotación cuyo vector de Rodrigues es igual a la suma de los vectores de Rodrigues de las rotaciones que se componen.

De lo expuesto hasta ahora queda claro que toda composición paramétrica se puede considerar un caso particular de composición en el sentido de Argyris, aquél en que  $f$  es justamente:  $f = \alpha_1 + \alpha_2$ , supuesto que  $\alpha$  sea un sistema de parametrización.

La inversa, sin embargo, no es cierta. La composición semitangencial de Argyris es conmutativa pero no distributiva:

$$(\mathbf{v}_1 \oplus \mathbf{v}_2^S) \oplus \mathbf{v}_2^S \neq \mathbf{v}_1 \oplus (\mathbf{v}_2 \oplus \mathbf{v}_2^S)^S$$

ya que, para serlo,  $f$  debe ser también distributiva y (II.39) no goza de esta propiedad.

Por el contrario, la suma paramétrica siempre es distributiva. Este simple hecho pone de manifiesto que no toda composición de rotaciones en el sentido de Argyris equivale a una composición paramétrica. Por equivalente entendemos que exista un sistema de parametrización  $\alpha$  tal que para toda pareja de rotaciones  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  se tenga:

$$\mathbf{v}_1 \rightarrow \alpha_1 \quad \therefore \quad \mathbf{v}_2 \rightarrow \alpha_2 \quad \therefore \quad \mathbf{v}_1 \overset{S}{\oplus} \mathbf{v}_2 \rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 \quad (\text{II.45})$$

Por tanto, para que las composiciones de Argyris y paramétrica sean equivalentes la función  $f$  tiene necesariamente que ser distributiva. La duda que se plantea ahora es si esto es suficiente. Vamos a probar que sí, que la composición de Argyris equivale a una composición paramétrica si y sólo si  $f$  es conmutativa y distributiva.

Sean para ello  $\Delta\mathbf{v}_1$ ,  $\Delta\mathbf{v}_2$  y  $\Delta\mathbf{v}_3$  tres rotaciones con giros muy pequeños de valor  $\Delta t$ , en las tres direcciones  $\mathbf{m}_i$  del espacio  $\mathbb{E}^3$ :  $\Delta\mathbf{v}_i := \Delta t \mathbf{m}_i$ . Compongamos ahora en el sentido de Argyris  $n$  rotaciones  $\Delta\mathbf{v}_1$  con  $m$   $\Delta\mathbf{v}_2$  y con  $l$   $\Delta\mathbf{v}_3$ . Como el orden de la suma no afecta al resultado –por ser  $f$  conmutativa y distributiva–, podemos asociar a éste la tríada  $(n \Delta t, m \Delta t, l \Delta t)$ . Si hacemos esto, habremos establecido una correspondencia entre el conjunto de rotaciones que resultan de sumar las  $\Delta\mathbf{v}_i$  un número entero y finito de veces y los puntos de la malla con ancho  $\Delta t$  que cubre el primer cuadrante del espacio  $\mathbb{E}^3$ . Si se admite además que la inversa de una rotación cualquiera  $\mathbf{v}$  para la ley  $\overset{S}{\oplus}$  es su opuesta en el sentido convencional,  $-\mathbf{v}$ , y añadimos a las tres básicas  $\Delta\mathbf{v}_1$ ,  $\Delta\mathbf{v}_2$  y  $\Delta\mathbf{v}_3$  sus inversas  $-\Delta\mathbf{v}_1$ ,  $-\Delta\mathbf{v}_2$  y  $-\Delta\mathbf{v}_3$ , la correspondencia con la malla de ancho  $\Delta t$  se extenderá a todo el espacio  $\mathbb{E}^3$ . Es evidente que cualquier rotación se puede aproximar tanto como se quiera por una suma de rotaciones  $\Delta\mathbf{v}_i$  si  $\Delta t$  se hace suficientemente pequeño; y también, que la distancia de cualquier punto de  $\mathbb{E}^3$  a un nodo de la malla es siempre menor de  $2\Delta t$ . Obligando, por tanto, a que  $\Delta t \rightarrow 0$ , se establece por continuidad una correspondencia entre  $\mathbb{E}^3$  y  $\mathbf{SO}(3)$ , que equivale a encontrar un nuevo sistema triparamétrico para las rotaciones. Esta correspondencia es multiforme, como se vio en el apartado II.5, pero continua en cada rama y, por construcción, cumple (II.45). Queda así probado que la ley de composición de Argyris, cuando la función  $f$  es conmutativa y distributiva, genera un sistema paramétrico que cumple (II.45), y por tanto que en estos casos la composición de rotaciones en el sentido de Argyris equivale a una composición paramétrica.

Evidentemente, si se cumple (II.45), las derivadas direccionales (II.40) pasan a ser derivadas parciales en el espacio paramétrico y verifican la regla de Schwarz, como se comentó en el apartado anterior, generando una matriz de rigidez simétrica:

$$K_{ij} := \frac{\partial U}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial U}{\partial \alpha_j \partial \alpha_i} := K_{ji} \quad (\text{II.46})$$

Además en este caso conmutan también todas las derivadas de orden superior. Por contraste, en la composición semitangencial y, en general, en aquéllas en que  $f$  no sea distributiva, sólo conmutan las derivadas de segundo orden –suponiendo que  $f$  sea conmutativa–. Si se tiene esto en cuenta y también que la composición paramétrica es conceptualmente más clara que la semitangencial y, desde un punto de vista operativo, más simple, se entiende por qué ha prevalecido, haciendo prácticamente desaparecer la última. Comparada, por otra parte, con la derivada objetiva de Simó –que es el tercer método de simetrizar la matriz de rigidez y que exponemos en el siguiente apartado–, ésta aparece como una técnica artificial de forzar lo que en el espacio paramétrico se obtiene de forma natural. Podemos, pues, afirmar, que la composición paramétrica es hoy en día la técnica más adecuada de resolver los problemas que presenta un análisis general no lineal de estructuras con grandes rotaciones.

Conviene advertir, para terminar, que en los sistemas hiperparamétricos al estar ligados los parámetros por relaciones no lineales, los desplazamientos en  $\mathbf{E}^N$  no son libres y la composición paramétrica se puede complicar mucho. Por ejemplo, en el sistema de Euler–Rodrigues, la composición conmutativa se puede definir así:

$$p_1 \hat{q}_2 = q_2 \hat{p}_1 := \lambda (p_1 + q_2) \quad \therefore \quad \lambda = |p_1 + q_2|^{-1} \quad (\text{II.47})$$

siendo preciso introducir el escalar  $\lambda$  para que el resultado de la composición sea un cuaternio de módulo unidad y represente una rotación. Ahora bien, este factor  $\lambda$  transforma la composición paramétrica en una composición de Argyris, haciendo inviable la primera. En estos casos, lo más práctico es ampliar el funcional  $U$  usando la técnica de los multiplicadores de Lagrange; con ello, las variaciones en el espacio paramétrico vuelven a ser independientes y adquiere de nuevo sentido la composición paramétrica.

## II. 10.– DERIVADA OBJETIVA DE LAS ROTACIONES

Si lo que más deseamos no es tanto encontrar una ley de composición conmutativa como lograr que la matriz de rigidez sea simétrica, un método posible para conseguir esto último es sustituir las derivadas convencionales (II.36) de Gateaux por derivadas intrínsecas, independientes de las bases locales  $\{\mathbf{v}_i\}$  en  $\mathcal{E}$ . Esta idea, desarrollada por Simó, es la base del método para simetrizar  $\mathbf{K}$  que se expone a continuación.

Las derivadas parciales de primer orden de la energía  $U$  con relación a los giros  $\theta_i$  son derivadas direccionales que pueden escribirse explícitamente así:

$$\mathbf{DU} \cdot \theta_i = \mathbf{grad} U \cdot \xi_i \quad (\text{II.48})$$

Suponiendo que las rotaciones están parametrizadas por medio de un conjunto de funciones  $\theta_i(\alpha_j)$ , la derivada segunda de  $U$  con relación a los giros  $\theta_i$  valdrá:

$$\begin{aligned} [\mathbf{DU} \cdot \theta_i, \theta_j] &:= \frac{\partial [\mathbf{grad} U \cdot \xi_i]}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta_j} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [\mathbf{grad} U] \cdot \xi_i \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta_j} + \mathbf{grad} U \cdot [D\xi_i \cdot \mathbf{n}_j^o] \quad (\text{II.49}) \\ &= [\mathbf{DU} \cdot \alpha_k, \alpha_1] \frac{\partial \alpha_k}{\partial \theta_i} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta_j} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \mathbf{grad} U \cdot \xi_k \end{aligned}$$

A diferencia de las derivadas con relación a los parámetros  $\alpha_r$ , que son objetivas y cumplen  $\mathbf{DU} \cdot \alpha_k, \alpha_1 = \mathbf{DU} \cdot \alpha_1, \alpha_k$ , las derivadas con relación a los giros no lo son:

$$[\mathbf{DU} \cdot \theta_i, \theta_j] - [\mathbf{DU} \cdot \theta_j, \theta_i] := \varepsilon_{ijk} \mathbf{grad} U \cdot \xi_k = \varepsilon_{ijk} [\mathbf{DU} \cdot \theta_k] \quad (\text{II.50})$$

Escribiendo ahora (II.50) en la forma,

$$[\mathbf{DU} \cdot \alpha_k, \alpha_1] \frac{\partial \alpha_k}{\partial \theta_i} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta_j} = [\mathbf{DU} \cdot \theta_i, \theta_j] - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} [\mathbf{DU} \cdot \theta_k] \quad (\text{II.51})$$

se aprecia que el término situado a la izquierda de la igualdad es simétrico en (i, j) y, por tanto, también lo es el derecho. Aprovechando esta propiedad, definimos ahora una nueva derivada segunda con relación a los giros  $\theta_i$ , que denotamos “ $\nabla$ ”:

$$\begin{aligned}\nabla U [\theta_i; \theta_j] &:= [DU \cdot \theta_i, \theta_j] - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} [DU \cdot \theta_k] = \\ &= [DU \cdot \theta_i, \theta_j] - \frac{1}{2} [DU \cdot \theta_i \times \theta_j]\end{aligned}\quad (\text{II.52})$$

La característica principal de esta derivada es su simetría:

$$\nabla U [\theta_i; \theta_j] = \nabla U [\theta_j; \theta_i] \quad (\text{II.53})$$

Teniendo en cuenta que las derivadas  $DU \cdot \theta_i$  son los momentos conjugados de los giros,  $\mathfrak{M}_{\theta_i}$ , el Hessiano  $\nabla U[\theta_i; \theta_j]$  puede escribirse también en la forma alternativa:

$$\nabla U [\theta_i; \theta_j] := [DU \cdot \theta_i, \theta_j] - \frac{1}{2} \mathfrak{M}_{\theta_i \times \theta_j} = [DU \cdot \theta_i, \theta_j] + \frac{1}{2} \tilde{\mathfrak{M}}_{ij} \quad (\text{II.54})$$

Denominaremos a  $\nabla U [\theta_i; \theta_j]$  *derivada segunda objetiva* por ser independiente de la variación de los vectores  $\xi_i$ . En efecto, las componentes del Hessiano  $\nabla U [\theta_i; \theta_j]$  son las componentes covariantes de un tensor euclídeo de segundo orden en  $\mathbf{E}^3$ , invariantes, sin embargo, con relación a los cambios de coordenadas  $x_i$  en  $\mathcal{E}$ .

A los mismos resultados llega Simó haciendo uso de la teoría de las variedades diferenciables [S2]. En la teoría de variedades, al grupo  $SO(3)$  de las rotaciones finitas se le dota de una métrica bi-invariante que lo convierte en una variedad Riemanniana, y se define en él una *conexión de Levi-Civita* “ $\nabla$ ” o derivada covariante [L1, M1, W1]. A partir de aquí se puede redefinir el concepto de Hessiano de una función escalar y lograr que éste sea simétrico. El resultado final de este proceso es formalmente idéntico al anterior; sin embargo, el procedimiento es mucho más complejo, aparte de exigir una herramienta matemática demasiado abstracta para el propósito que se persigue. El método expuesto en este apartado y desarrollado a lo largo de este trabajo prueba que en el campo de las estructuras con rotaciones finitas no es necesario situarse en un plano de abstracción tan elevado para obtener los resultados apetecidos.

## II. 11.– DERIVADAS PRIMERAS DE LOS TENSORES FUNDAMENTALES.

Al desplazarnos sobre  $\mathcal{E}^0$  cambian las bases locales  $\xi$  y  $\varepsilon$  y con ellas los tensores  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$ . Las derivadas de estos tensores verifican una serie de propiedades notables, muy importantes en la teoría de vigas, que vamos a exponer y deducir en este apartado. Todas ellas, directa o indirectamente, se desprenden o son consecuencia de la relación (II.34). Dada la importancia que tienen en futuros desarrollos, conviene escribirlas de una forma más simple y manejable; para ello, vamos a deducirlas de nuevo desde otro punto de vista. Veamos.

Dado que a cada punto de la subvariedad  $\mathcal{E}^0$  le corresponde una rotación  $\mathbf{R}$  del nodo  $k$  del sistema, supongamos que nos movemos en  $\mathcal{E}^0$  entre dos puntos próximos  $\chi$  y  $\chi^*$  siguiendo dos caminos diferentes, como muestra la figura II.5; sean, además,  $\alpha$  y  $\beta$  las direcciones de giro que corresponden en la figura a las variaciones  $\Delta\alpha^1$  y  $\Delta\alpha^2$ . En estas condiciones, el operador rotación  $\mathbf{R}$  variará al desplazarnos sobre  $\mathcal{E}^0$  y sus derivadas de primer y segundo orden en las direcciones  $\alpha$  y  $\beta$  serán:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\alpha} &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha} \mathbf{R} & \therefore & \mathbf{R}_{\beta} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\beta} \mathbf{R} \\ \mathbf{R}_{\alpha\beta} &= \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha, \beta} \mathbf{R} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\beta} \mathbf{R} & \therefore & \mathbf{R}_{\beta\alpha} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\beta, \alpha} \mathbf{R} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha} \mathbf{R} \end{aligned} \quad (\text{II.55})$$

Como la aplicación  $\mathbf{R} \leftrightarrow \chi$  es uniforme, al menos de clase  $C^2$  en ausencia de singularidades, las derivadas cruzadas de  $\mathbf{R}$  con relación a  $\alpha$  y  $\beta$  serán iguales en virtud del teorema de Schwarz:  $\mathbf{R}_{\alpha\beta} = \mathbf{R}_{\beta\alpha}$ , y se tendrá:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha, \beta} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\beta, \alpha} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\beta} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\beta} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha} \quad (\text{II.56})$$

(la última igualdad se desprende de la propiedad AI.8 del Apéndice I). Ahora bien, esta igualdad de operadores antimétricos equivale a la sencilla relación vectorial:

$$\boldsymbol{\theta}_{\alpha, \beta} - \boldsymbol{\theta}_{\beta, \alpha} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\beta} \boldsymbol{\theta}_{\alpha} \quad (\text{II.57})$$

cuyo significado es el siguiente: para que al sumar dos rotaciones  $\alpha$  y  $\beta$  el giro final



sea independiente del orden en que se suman, es preciso efectuar en las segundas rotaciones la corrección de segundo orden implícita en la relación (II.57). Se llega así de nuevo al resultado (II.20), que marca la desviación de segundo orden que se produce al componer dos rotaciones diferenciales en distinto orden. En el fondo las relaciones (II.20) y (II.57) son dos expresiones equivalentes que reflejan una misma propiedad de las rotaciones finitas: su carácter no conmutativo.

Hemos supuesto que la base de referencia de las rotaciones era fija. Con idéntico razonamiento, si se considera el sistema de referencia móvil, se obtiene:

$$\boldsymbol{\theta}_{\alpha, \beta}^* - \boldsymbol{\theta}_{\beta, \alpha}^* = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{\alpha}^* \boldsymbol{\theta}_{\beta}^* \quad (\text{II.58})$$

Centrándonos ahora en las derivadas de los operadores  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$ , vamos a probar en primer lugar que las derivadas de  $\mathbf{F}$  verifican una relación equivalente a la (II.34).

La demostración es simple ya que, por definición,  $\boldsymbol{\xi}_i = F_i^k \boldsymbol{\epsilon}_k$ , y en consecuencia:

$$[D\boldsymbol{\xi}_i \cdot \boldsymbol{\xi}_j] = [DF_i^k \cdot \boldsymbol{\xi}_j] \boldsymbol{\epsilon}_k + F_i^k [D\boldsymbol{\epsilon}_k \cdot \boldsymbol{\xi}_j] \quad (\text{II.59})$$

de donde,

$$\begin{aligned} [DF_i^k \cdot \boldsymbol{\xi}_j - DF_j^k \cdot \boldsymbol{\xi}_i] \boldsymbol{\epsilon}_k &= \\ &= [D\boldsymbol{\xi}_i \cdot \boldsymbol{\xi}_j - D\boldsymbol{\xi}_j \cdot \boldsymbol{\xi}_i] - F_i^k [D\boldsymbol{\epsilon}_k \cdot \boldsymbol{\xi}_j] + F_j^k [D\boldsymbol{\epsilon}_k \cdot \boldsymbol{\xi}_i] \end{aligned}$$

Ahora bien, la suma de los dos últimos términos del miembro derecho de esta igualdad es nula ya que, en virtud de (II.35), se tiene:

$$F_i^k [D\boldsymbol{\epsilon}_k \cdot \boldsymbol{\xi}_j] = F_i^k F_j^r [D\boldsymbol{\epsilon}_k \cdot \boldsymbol{\epsilon}_r] = F_i^k F_j^r [D\boldsymbol{\epsilon}_r \cdot \boldsymbol{\epsilon}_k] = F_j^r [D\boldsymbol{\epsilon}_r \cdot \boldsymbol{\xi}_i]$$

con lo que:  $DF_i^k \cdot \boldsymbol{\xi}_j - DF_j^k \cdot \boldsymbol{\xi}_i = [D\boldsymbol{\xi}_i \cdot \boldsymbol{\xi}_j - D\boldsymbol{\xi}_j \cdot \boldsymbol{\xi}_i] \boldsymbol{\epsilon}^k = e(i j m) \boldsymbol{\xi}_m \boldsymbol{\epsilon}^k$

y como además  $\boldsymbol{\xi}_m \boldsymbol{\epsilon}^k = F_m^k$ , se llega finalmente a la siguiente relación:

$$DF_i^k \cdot \boldsymbol{\xi}_j - DF_j^k \cdot \boldsymbol{\xi}_i = e(i j m) F_m^k \quad (\text{II.60})$$

Resultado que puede escribirse también en la forma compacta:

$$[DF \cdot \xi_j] \mathbf{n}_i - [DF \cdot \xi_i] \mathbf{n}_j = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{n}}_i \mathbf{n}_j \quad (\text{II.61})$$

o, si se prefiere,

$$\begin{aligned} DF_1^k \cdot \xi_2 - DF_2^k \cdot \xi_1 &= F_3^k \\ DF_2^k \cdot \xi_3 - DF_3^k \cdot \xi_2 &= F_1^k \\ DF_3^k \cdot \xi_1 - DF_1^k \cdot \xi_3 &= F_2^k \end{aligned} \quad (\text{II.62})$$

Procediendo del mismo modo con la relación inversa  $\boldsymbol{\varepsilon}_i = G_i^k \xi_k$ , sustituyendo las derivadas de la base  $\xi$  por las derivadas de la base  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , se obtiene una relación análoga para la matriz  $\mathbf{G}$ . En efecto, partiendo de

$$D\boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j = [DG_i^k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j] \xi_k + G_i^k [D\xi_k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j] \quad (\text{II.63})$$

y teniendo en cuenta (II.34) y (II.35), se deduce,

$$\begin{aligned} [DG_i^k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j - DG_j^k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i] \xi_k &= G_j^k D\xi_k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i - G_i^k D\xi_k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j = \\ &= G_j^n G_i^r [D\xi_n \cdot \xi_r - D\xi_r \cdot \xi_n] = G_j^n G_i^r e^{(n r k)} \xi_k \end{aligned}$$

y por tanto,

$$DG_i^k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j - DG_j^k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i = G_j^n G_i^r e^{(n r k)}$$

esto es,

$$[DG \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j] \boldsymbol{\varepsilon}_i - [DG \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i] \boldsymbol{\varepsilon}_j = \tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\varepsilon}_j \mathbf{G} \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (\text{II.64})$$

(una comprobación directa de (II.61) y (II.64) en el sistema de Rodrigues se recoge en los apartados AIII.7 y AIII.8 del Apéndice III). Ambos resultados se han obtenido suponiendo las rotaciones referidas a una base fija; cuando vienen referidas a una base móvil, se obtienen relaciones análogas para  $\mathbf{F}^*$  y  $\mathbf{G}^*$ :

$$[DF^* \cdot \xi_j] \mathbf{n}_i - [DF^* \cdot \xi_i] \mathbf{n}_j = \mathbf{F}^* \tilde{\mathbf{n}}_j \mathbf{n}_i \quad (\text{II.65})$$

$$[DG^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_j] \boldsymbol{\epsilon}_i - [DG^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}_i] \boldsymbol{\epsilon}_j = \tilde{\mathbf{G}}^* \boldsymbol{\epsilon}_i \mathbf{G}^* \boldsymbol{\epsilon}_j \quad (\text{II.66})$$

Estas propiedades son generales y no dependen del sistema de parametrización; su importancia se verá más adelante.

También es importante conocer las derivadas de los tensores  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^*$ ; sin embargo, éstas sí dependen del sistema de parametrización y es preciso calcularlas por separado en cada caso concreto. Este cálculo por regla general no es difícil, pero presenta un problema, y es que las derivadas de estos tensores son de orden 3 y no se pueden expresar matricialmente. La mejor forma de solventar esta dificultad es calcular, no las derivadas de los tensores en sí, sino las derivadas de su producto contraído por un vector fijo  $\mathbf{v}$ ; como este producto es un vector, su derivada será un tensor de segundo orden y éste sí se puede expresar matricialmente.

Dependiendo de que el vector  $\mathbf{v}$  pre-multiplique o post-multiplique a  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^*$ , se pueden definir cuatro tensores  $\mathbf{S}$ ,  $\hat{\mathbf{T}}$ ,  $\mathbf{T}$  y  $\hat{\mathbf{S}}$  del siguiente modo:

$$\mathbf{v}^T d\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) := d\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{S}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) \quad \therefore \quad S_{ij} := [DG^*_j \cdot \boldsymbol{\epsilon}_i] v_1 \quad (\text{II.67.a})$$

$$d\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{v} := \mathbf{T}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} \quad \therefore \quad T_{ij} := [DG^*_i \cdot \boldsymbol{\epsilon}_j] v_1 \quad (\text{II.67.b})$$

$$\mathbf{v}^T d\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) := d\boldsymbol{\alpha}^T \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) \quad \therefore \quad \hat{S}_{ij} := [DG^*_j \cdot \boldsymbol{\epsilon}_i] v_1 \quad (\text{II.67.c})$$

$$d\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{v} := \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} \quad \therefore \quad \hat{T}_{ij} := [DG^*_i \cdot \boldsymbol{\epsilon}_j] v_1 \quad (\text{II.67.d})$$

Como es lógico, estos cuatro tensores, que aparecerán constantemente al estudiar la teoría de vigas, no son independientes, sino que están relacionados entre sí a través de un conjunto de relaciones simples, que para un sistema  $s$ -paramétrico son:

$$\mathbf{S}^T(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) := \begin{bmatrix} -\mathbf{v}^T \mathbf{T}(\mathbf{e}_1; \boldsymbol{\alpha}) - \\ \dots \dots \dots - \\ -\mathbf{v}^T \mathbf{T}(\mathbf{e}_s; \boldsymbol{\alpha}) - \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) := \begin{bmatrix} -\mathbf{v}^T \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{e}_1; \boldsymbol{\alpha}) - \\ \dots \dots \dots - \\ -\mathbf{v}^T \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{e}_s; \boldsymbol{\alpha}) - \end{bmatrix} \quad (\text{II.68})$$

y sus recíprocas –nótese que  $\mathbf{S}$  y  $\hat{\mathbf{S}}$  son de orden  $s \times 3$  y  $\mathbf{T}$  y  $\hat{\mathbf{T}}$  de orden  $3 \times s$ –,

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) := \begin{bmatrix} -\mathbf{v}^T \mathbf{S}^T(\mathbf{e}_1; \boldsymbol{\alpha}) - \\ -\mathbf{v}^T \mathbf{S}^T(\mathbf{e}_2; \boldsymbol{\alpha}) - \\ -\mathbf{v}^T \mathbf{S}^T(\mathbf{e}_3; \boldsymbol{\alpha}) - \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) := \begin{bmatrix} -\mathbf{v}^T \hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{e}_1; \boldsymbol{\alpha}) - \\ -\mathbf{v}^T \hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{e}_2; \boldsymbol{\alpha}) - \\ -\mathbf{v}^T \hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{e}_3; \boldsymbol{\alpha}) - \end{bmatrix} \quad (\text{II.69})$$

En un sistema *vectorial*, estas relaciones son todavía más simples:

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) = -\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}, -\boldsymbol{\alpha}) = \hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) = -\mathbf{S}^T(\mathbf{v}, -\boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{II.70})$$

Pues bien, volviendo a (II.64) y (II.66), si se multiplican éstas por un vector constante  $\mathbf{v}$ , se obtiene para los sistemas triparamétricos ( $s = 3$ ):

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) - \hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) = -\mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{G} \quad \therefore \quad \mathbf{S}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{S}^T(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{G}^{*T} \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{G}^* \quad (\text{II.71.a})$$

y, en general, para cualquier sistema de parametrización:

$$\mathbf{F}^T [\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) - \hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha})] \mathbf{F} = -\tilde{\mathbf{v}} \quad \therefore \quad \mathbf{F}^{*T} [\mathbf{S}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{S}^T(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha})] \mathbf{F}^* = \tilde{\mathbf{v}} \quad (\text{II.71.b})$$

Estas ecuaciones matriciales representan una forma más elaborada y práctica de expresar las relaciones (II.57) y (II.58).

Si se actualiza el sistema referencial adoptando como configuración de referencia  $\chi^{(0)}$  la correspondiente al estado actual de deformación del sistema, entonces  $\alpha_i = 0$  y los resultados anteriores se simplifican bastante. Por ejemplo, en el sistema de Rodrigues se reducen simplemente a:

$$\mathbf{F}^{(0)} = \frac{1}{2} \mathbf{I} \quad \therefore \quad \mathbf{G}^{(0)} = 2 \mathbf{I} \quad (\text{II.72.a})$$

$$\boldsymbol{\xi}^{(0)} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^{(0)} \quad (\text{II.72.b})$$

$$2D\boldsymbol{\xi}_i^{(0)} \cdot \boldsymbol{\xi}_j^{(0)} = e_{(i j k)} \boldsymbol{\xi}_k^{(0)} \quad (\text{II.72.c})$$

$$D\boldsymbol{\xi}_i^{(0)} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_j - D\boldsymbol{\xi}_j^{(0)} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_i = e_{(i j m)} \boldsymbol{\epsilon}_m \quad (\text{II.72.d})$$

Nótese que (II.34) y (II.72.d) se implican mutuamente, en virtud de (II.72.b).

En el sistema de Rodrigues, la simplificación es aún mayor si, aparte de actualizar la configuración de referencia, tomamos  $\chi$  como origen de coordenadas  $\chi_0$  del espacio paramétrico, ya que entonces  $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{n}$  y se tiene:

$$\boldsymbol{\xi}_0 = \frac{1}{2} \mathbf{n} \quad (\text{II.73.a})$$

$$2D\boldsymbol{\xi}_{0i} \cdot \mathbf{n}_j = e(ijk) \mathbf{n}_k \quad (\text{II.73.b})$$

$$D\boldsymbol{\xi}_{0i} \cdot \mathbf{n}_j - D\boldsymbol{\xi}_{0j} \cdot \mathbf{n}_i = e(ijm) \mathbf{n}_m \quad (\text{II.73.c})$$

$$DF_i^k \cdot \mathbf{n}_j - DF_j^k \cdot \mathbf{n}_i = e(ijk) \quad (\text{II.73.d})$$

$$DG_i^k \cdot \mathbf{n}_j - DG_j^k \cdot \mathbf{n}_i = 4 e(ijk) \quad (\text{II.73.e})$$

Esto es, las bases  $\boldsymbol{\xi}_0$  y  $\mathbf{n}$  está orientadas del mismo modo y se diferencian sólo en el módulo de sus vectores básicos:  $\|\boldsymbol{\xi}_{0i}\| = 1/2$  y  $\|\mathbf{n}_i\| = 1$  ( $i: 1, 2, 3$ ). La variación de la base  $\boldsymbol{\xi}_0$  al alejarnos de  $\chi_0$  en las tres direcciones ortogonales  $\mathbf{n}_i$  viene dada por la sencilla regla (II.73.b) y se representa gráficamente en la figura II.6.

Por otra parte, los operadores  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{T}$  verifican una curiosa propiedad que los relaciona de un modo distinto al indicado en (II.71), y que es consecuencia directa de la identidad  $\mathbf{G} \equiv \mathbf{R}\mathbf{G}^*$ . En efecto, derivando ésta con relación a  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , se obtiene:

$$D\mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{R}[D\mathbf{G}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i] + [D\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i] \mathbf{G}^*$$

y teniendo en cuenta que:  $D\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{R}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^* = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{G}}_i^* \boldsymbol{\varepsilon}_i$  (II.74)

se deduce,  $D\mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{R}[D\mathbf{G}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i + \tilde{\mathbf{G}}_i^* \boldsymbol{\varepsilon}_i \mathbf{G}^*]$  (II.75)

Multiplicando ahora escalarmente (II.75) por  $\boldsymbol{\varepsilon}_j$  y considerando (II.66), se llega a la siguiente relación:

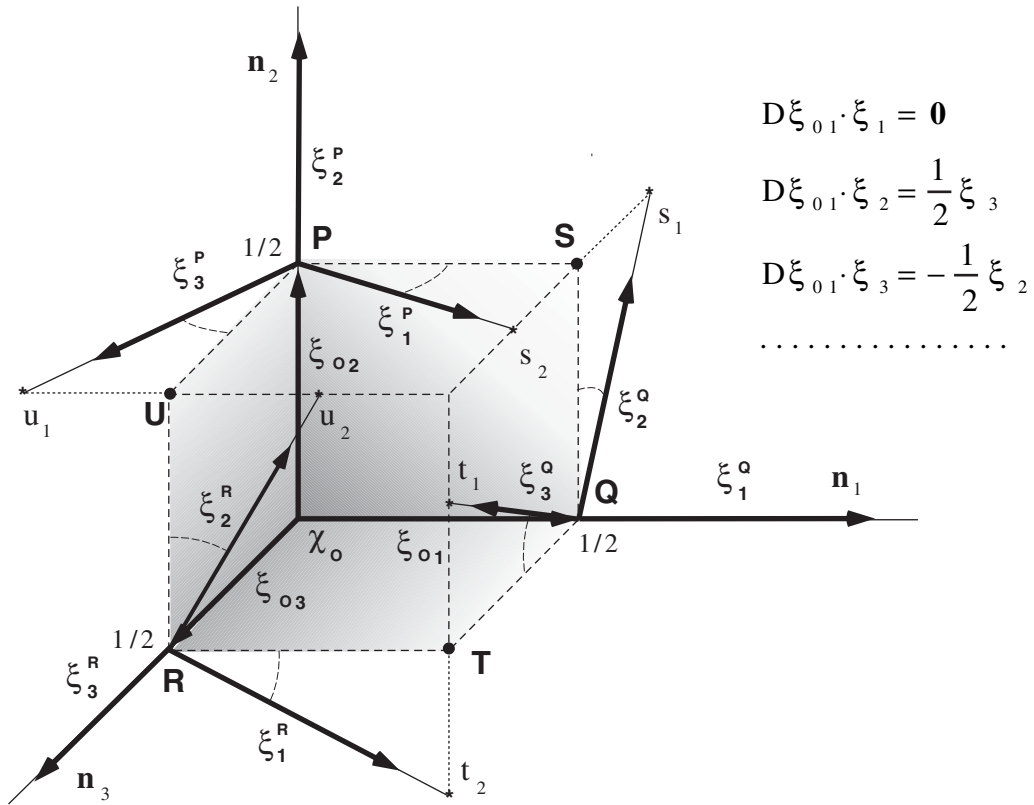


Figura II.6.

Variación de la base  $\xi$  sobre  $\mathcal{E}$  en un entorno de  $\chi_0$

$$[DG \cdot \epsilon_i] \epsilon_j = \mathbf{R} [DG^* \cdot \epsilon_j] \epsilon_i$$

Claro está que si se cumple esta relación para toda pareja de vectores  $(\epsilon_i, \epsilon_j)$ , se cumple también para dos direcciones arbitrarias  $d\alpha$  y  $\delta\alpha$  de  $\mathcal{E}^\theta$ . En consecuencia,

$$\delta G d\alpha = \mathbf{R} dG^* \delta\alpha \tag{II.76}$$

y pre-multiplicando éstas por el vector  $[\mathbf{R}\mathbf{v}]^T$ , teniendo en cuenta (II.67.a) y (II.67.c),

$$\delta\alpha^T \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{R}\mathbf{v}; \alpha) d\alpha = d\alpha^T \mathbf{S}(\mathbf{v}; \alpha) \delta\alpha$$

o lo que es equivalente: puesto que  $d\boldsymbol{\alpha}$  y  $\delta\boldsymbol{\alpha}$  son variaciones arbitrarias únicamente sujetas a las relaciones de ligadura propias del sistema de parametrización, se tiene en un sistema triparamétrico:

$$\mathbf{S}(\mathbf{v}; \boldsymbol{\alpha}) = \hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{R}\mathbf{v}; \boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{II.77.a})$$

$$\text{y, en general,} \quad \mathbf{F}^T(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{S}(\mathbf{v}; \boldsymbol{\alpha})\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{F}^T(\boldsymbol{\alpha})\hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{R}\mathbf{v}; \boldsymbol{\alpha})\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{II.77.b})$$

que es la propiedad que deseábamos probar.

Al mismo resultado se llega derivando  $\mathbf{F}\mathbf{R} \equiv \mathbf{F}^*$  en la dirección  $\boldsymbol{\xi}_i$ . En efecto, en este caso, como  $D\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\xi}_i = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{n}}_i$ , se tiene:

$$[D\mathbf{F}^* \cdot \boldsymbol{\xi}_i] \mathbf{n}_j = [D\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\xi}_i] \mathbf{R}\mathbf{n}_j + \mathbf{F}^* \tilde{\mathbf{n}}_i \mathbf{n}_j$$

$$\text{y sumándole (II.65):} \quad [D\mathbf{F}^* \cdot \boldsymbol{\xi}_j] \mathbf{n}_i = [D\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\xi}_i] \mathbf{R}\mathbf{n}_j$$

esto es,

$$\delta\mathbf{F}^* \cdot d\boldsymbol{\theta} = d\mathbf{F} \cdot \mathbf{R}\delta\boldsymbol{\theta}$$

Ahora bien, la equivalencia entre esta expresión y (II.77) es inmediata si se tiene en cuenta la doble identidad  $\mathbf{G}\mathbf{F} \equiv \mathbf{G}^*\mathbf{F}^* \equiv \mathbf{I}$ . Por tanto, las cuatro relaciones (II.61), (II.64), (II.65) y (II.66) conducen al mismo resultado (II.77), y en consecuencia entre  $\mathbf{T}$  y  $\hat{\mathbf{T}}$  no se da una relación equivalente a (II.77).

Por otra parte, de (II.76) se deducen expresiones muy simples para las derivadas direccionales de los operadores  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{G}^*$ ,  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}^*$ . Así, suponiendo en (II.76) que una de las diferenciales “d” o “δ” tiene lugar en una dirección determinada “s”, se cumple:

$$\delta\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha}_{,s} = \mathbf{R}\mathbf{G}^*_{,s}\delta\boldsymbol{\alpha} \quad \text{y} \quad \mathbf{G}_{,s}d\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}d\mathbf{G}^*\boldsymbol{\alpha}_{,s} \quad (\text{II.78})$$

y por tanto, en un sistema triparamétrico se tiene –considerando (II.67.b) y (II.67.d)–:

$$\mathbf{G}^*_{,s} = \mathbf{R}^T \hat{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\alpha}_{,s}; \boldsymbol{\alpha}) \quad \therefore \quad \mathbf{G}_{,s} = \mathbf{R}\mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}_{,s}; \boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{II.79.a})$$

y, en general, en un sistema cualquiera:

$$\mathbf{G}^*,_s \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{R}^T \hat{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\alpha},_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \quad \therefore \quad \mathbf{G},_s \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{R} \mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha},_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{II.79.b})$$

Derivando ahora las identidades  $\mathbf{G}^* \mathbf{F}^* \equiv \mathbf{I}$  y  $\mathbf{G} \mathbf{F} \equiv \mathbf{I}$ , se extraen las derivadas de  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}^*$  en los sistemas triparamétricos:

$$\mathbf{F}^*,_s = -\mathbf{F} \hat{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\alpha},_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{F}^* \quad \therefore \quad \mathbf{F},_s = -\mathbf{F}^* \mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha},_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{F} \quad (\text{II.80.a})$$

Y se deducen para un sistema cualquiera, sea o no triparamétrico, estas otras propiedades que utilizaremos más adelante:

$$\mathbf{G} \mathbf{F}^*,_s = -\hat{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\alpha},_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{F}^* \quad \therefore \quad \mathbf{G}^* \mathbf{F},_s = -\mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha},_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{F} \quad (\text{II.80.b})$$

$$\mathbf{G}^* \mathbf{F}^*,_s = -\mathbf{R}^T \hat{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\alpha},_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{F}^* \quad \therefore \quad \mathbf{G} \mathbf{F},_s = -\mathbf{R} \mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha},_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{F} \quad (\text{II.80.c})$$

## II. 12.– DERIVADAS SEGUNDAS DE LOS TENSORES FUNDAMENTALES.

Las derivadas segundas de los tensores fundamentales  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^*$  –los únicos que interesan en la teoría que desarrollamos en próximos capítulos– son tensores de cuarto orden, con una expresión muy compleja si se refleja la multilinealidad de los mismos. Sin embargo, su producto contraído con dos vectores constantes y arbitrarios,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{z}$ , son dos simples tensores de segundo orden  $\boldsymbol{\Lambda}$  y  $\hat{\boldsymbol{\Lambda}}$ . Estos dos tensores, cuya obtención equivale al cálculo de las derivadas de  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^*$ , se definen a través de las siguientes relaciones diferenciales:

$$\mathbf{v}^T d\delta \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{z} = d\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \boldsymbol{\alpha}) \delta \boldsymbol{\alpha} \quad (\text{II.81})$$

$$\mathbf{v}^T d\delta \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{z} = d\boldsymbol{\alpha}^T \hat{\boldsymbol{\Lambda}}(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \boldsymbol{\alpha}) \delta \boldsymbol{\alpha} \quad (\text{II.82})$$

o bien, en función de los operadores introducidos en (II.67), por medio de estas otras

$$\mathbf{v}^T d\mathbf{T}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\alpha}) = d\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{II.83.a})$$

$$d\mathbf{S}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{z} = \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} \quad (\text{II.83.b})$$

$$\hat{d}\mathbf{S}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{z} = \hat{\boldsymbol{\Lambda}}(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} \quad (\text{II.84.a})$$

$$\mathbf{v}^T d\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\alpha}) = d\boldsymbol{\alpha}^T \hat{\boldsymbol{\Lambda}}(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{II.84.b})$$



Evidentemente, estos tensores son simétricos al permutar las diferenciales  $d$  y  $\delta$ :

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{\Lambda}^T(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \boldsymbol{\alpha}) \quad \therefore \quad \hat{\mathbf{\Lambda}}(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \boldsymbol{\alpha}) = \hat{\mathbf{\Lambda}}^T(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{II.85})$$

Como en los sistemas vectoriales se cumple además:  $\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{G}(-\boldsymbol{\alpha})$  –(II.29.b)–, en ellos  $\hat{\mathbf{\Lambda}}$  y  $\mathbf{\Lambda}$  están relacionados del siguiente modo:

$$\hat{\mathbf{\Lambda}}(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{v}; \mathbf{z}; -\boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{II.86})$$

Esta propiedad, repito, es exclusiva de los sistemas vectoriales; en los demás no se da. El cálculo efectivo de  $\hat{\mathbf{\Lambda}}$  y  $\mathbf{\Lambda}$  en los sistemas de parametrización comunes se recoge en el Apéndice III. Estos tensores se necesitarán en el capítulo IV para calcular la matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$  del elemento–viga. Otro tensor que aparecerá al calcular  $\mathbf{K}$  es el siguiente:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{c}; \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} := d_{\boldsymbol{\alpha}} [\mathbf{G}^T_s(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{c}] \quad (\text{II.87})$$

Las diferenciales segundas de  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^*$  son funciones bilineales –cuadráticas– de las dos direcciones de diferenciación  $d$  y  $\delta$ ; este carácter bilineal se expresa a través de los tensores  $\hat{\mathbf{\Lambda}}$  y  $\mathbf{\Lambda}$ . A diferencia de éstos,  $\mathbf{Z}$  sólo refleja explícitamente el carácter lineal que tienen las diferenciales con relación a una de las direcciones. La ventaja en este caso es que el producto contraído que se diferencia depende de un solo vector. Entre los tres tensores se dan sencillas relaciones; por ejemplo, entre  $\mathbf{Z}$  y  $\hat{\mathbf{\Lambda}}$  se tiene:

$$\mathbf{z}^T \delta \mathbf{G}^T_s \mathbf{c} = \frac{1}{ds} \mathbf{z}^T \delta d_s \mathbf{G}^T \mathbf{c} = \boldsymbol{\alpha}_s^T \hat{\mathbf{\Lambda}}(\mathbf{c}; \mathbf{z}; \boldsymbol{\alpha}) \delta \boldsymbol{\alpha} \quad (\text{II.88})$$

y sustituyendo en ella  $\mathbf{z}$  por cada uno de los vectores básicos  $\mathbf{e}_i$  de  $\mathbf{E}^S$ , se llega a:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{c}; \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_s^T \hat{\mathbf{\Lambda}}(\mathbf{c}; \mathbf{e}_1; \boldsymbol{\alpha}) \\ \dots\dots\dots \\ \boldsymbol{\alpha}_s^T \hat{\mathbf{\Lambda}}(\mathbf{c}; \mathbf{e}_s; \boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \quad (\text{II.89})$$

En los sistemas triparamétricos se dan otras relaciones interesantes entre  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{\Lambda}$ . Éstas se deducen de la ecuación (II.79.a) entre  $\mathbf{G}_s$ ,  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{T}$ . Veamos:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(\mathbf{c}; \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} &= d_{\boldsymbol{\alpha}} [\mathbf{G}^T_s(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{c}] = d_{\boldsymbol{\alpha}} [\mathbf{T}^T(\boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{R}^T \mathbf{c}] = \\ &= d_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{R}^T \mathbf{c} + \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) d_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{R}^T \mathbf{c} \end{aligned} \quad (\text{II.90})$$

Ahora bien, el primer término de la última igualdad se puede escribir así :

$$d_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{R}^T \mathbf{c} = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{R}^T \mathbf{c}; \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha}$$

debido a que  $\mathbf{\Lambda}$  es simétrico; por otra parte, se tiene:  $d_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{R}^T = -\overline{\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha})} d\boldsymbol{\alpha} \mathbf{R}^T$ , y así:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{c}; \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{R}^T \mathbf{c}; \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) \overline{\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha})} d\boldsymbol{\alpha} \mathbf{R}^T \mathbf{c}$$

que es la relación antes aludida. Ésta se puede escribir de otras dos formas cambiando el orden del producto vectorial en el último término y aplicando la propiedad (AI.17):

$$\mathbf{Z}(\mathbf{c}; \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{R}^T \mathbf{c}; \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{R}^T \mathbf{c} \tilde{\mathbf{G}}^*(\boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{II.91})$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{c}; \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{R}^T \mathbf{c}; \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{c}} \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{II.92})$$

Del mismo modo que se definió  $\mathbf{Z}$  a partir de  $\mathbf{G}$ , se puede definir otro tensor  $\hat{\mathbf{Z}}$  partir de  $\mathbf{G}^*$ :

$$\hat{\mathbf{Z}}(\mathbf{c}; \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} := d_{\boldsymbol{\alpha}} [\mathbf{G}^{*T}_s(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{c}] \quad (\text{II.93})$$

Teniendo en cuenta de nuevo (II.79.a) y procediendo como antes, se obtiene:

$$d_{\boldsymbol{\alpha}} [\mathbf{c}^T \mathbf{G}^*_s(\boldsymbol{\alpha})] = d\boldsymbol{\alpha}^T [\mathbf{G}^{*T}(\boldsymbol{\alpha}) \tilde{\mathbf{c}} \mathbf{R}^T \hat{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) + \hat{\mathbf{\Lambda}}(\mathbf{R}\mathbf{c}; \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha})]$$

$$\text{y, por tanto: } \hat{\mathbf{Z}}(\mathbf{c}; \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) = \hat{\mathbf{\Lambda}}(\mathbf{R}\mathbf{c}; \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) - \hat{\mathbf{T}}^T(\boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{R} \tilde{\mathbf{c}} \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{II.94})$$

### II. 13.– DERIVADAS ESPACIAL Y TEMPORAL EN UN CAMPO DE ROTACIONES

Sea  $\mathbf{R}(t, s)$  un campo de rotaciones de  $\mathbf{E}^3$  dependiente del tiempo  $t$  y de una coordenada espacial  $s$  y  $\mathbf{R}_0$  el valor de este campo en  $(t_0, s)$ . Supongamos conocidos, para cada valor de  $s$ , los giros relativos  $\alpha(t, s)$  entre  $t_0$  y un tiempo variable  $t > t_0$ . Sean  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{e} = \mathbf{R}(\mathbf{n})$  dos sistemas de referencia: el primero, absoluto o fijo en  $\mathbf{E}^3$ , y el segundo móvil girando con  $\mathbf{R}$ . En estas condiciones, vamos a estudiar los cambios que experimenta el triedro móvil  $\mathbf{e}$  al variar  $t$  y  $s$ , determinando las velocidades angulares  $\boldsymbol{\omega} = \text{axial} [\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T]$  y curvaturas  $\boldsymbol{\tau} = \text{axial} [\mathbf{R},_s \mathbf{R}^T]$  del campo  $\mathbf{R}$  –figura II.7–.

Los parámetros rotacionales, las velocidades angulares y las curvaturas absolutas –referidas al sistema global– se denotarán  $\alpha$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\boldsymbol{\tau}$ , y los parámetros, velocidades y curvaturas relativas en la base móvil  $\alpha^*$ ,  $\boldsymbol{\omega}^*$  y  $\boldsymbol{\tau}^*$ .

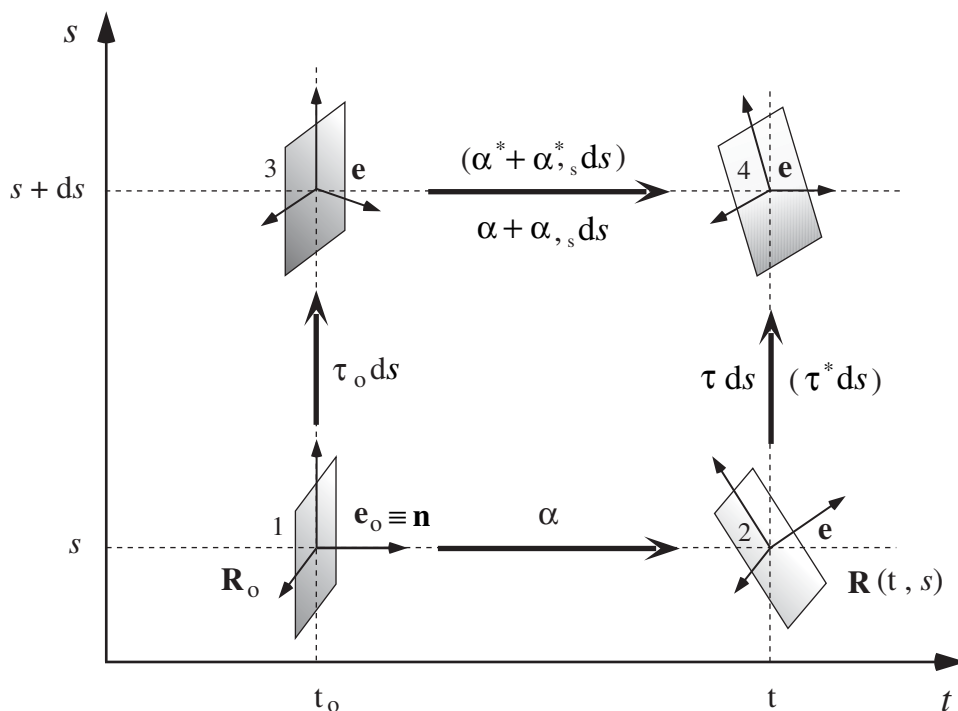


Figura II.7.

Curvatura en un campo de rotaciones  $\mathbf{R}(t, s)$

### II. 13. 1. –Curvatura de flexotorsión

En la figura II.7, la orientación del triedro  $\mathbf{e}$  en la posición 4 depende de los giros relativos 1–3 y 3–4. Variando la coordenada espacial  $s$  una cantidad diferencial  $ds$ , los dos giros anteriores valdrán:  $\boldsymbol{\tau}_0 ds$  y  $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\alpha}) + d\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\alpha})$ , supuesto  $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\alpha})$  el giro entre las posiciones 1 y 2. Componiéndolos se obtiene el giro relativo diferencial  $\boldsymbol{\tau} ds$  entre las posiciones 2 y 4, y por tanto la curvatura  $\boldsymbol{\tau}$  en el instante  $t$ . Dado que  $\boldsymbol{\tau} ds$  es función de  $\boldsymbol{\alpha}(s)$ ,  $\boldsymbol{\tau}_0 ds$  y  $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}_{,s} ds$ , la curvatura  $\boldsymbol{\tau}$  se podrá expresar del siguiente modo en función de estas cantidades:

$$\boldsymbol{\tau} = g(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\tau}_0 + h(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\alpha}_{,s} \quad (\text{II.95})$$

De igual forma,  $\boldsymbol{\tau}^*$ ,  $\boldsymbol{\tau}_0^*$ ,  $\boldsymbol{\alpha}^*$  y  $\boldsymbol{\alpha}_{,s}^*$  estarán relacionadas por una expresión análoga –en este caso, es importante que  $\boldsymbol{\tau}^*$ ,  $\boldsymbol{\tau}_0^*$ ,  $\boldsymbol{\alpha}^*$  y  $\boldsymbol{\alpha}_{,s}^*$  estén referidas a sus bases locales para que la relación funcional sea independiente de la orientación  $\mathbf{R}_0$  del sistema local inicial  $\mathbf{e}_0$ –; esta expresión es del tipo:

$$\boldsymbol{\tau}^* = g'(\boldsymbol{\alpha}^*) \boldsymbol{\tau}_0^* + h'(\boldsymbol{\alpha}^*) \boldsymbol{\alpha}_{,s}^* \quad (\text{II.96})$$

Como, además,  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{R}_0 \boldsymbol{\tau}^* = \mathbf{R}_0 \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}^*) \boldsymbol{\tau}^*$ , se tiene:

$$\boldsymbol{\tau}^* = \mathbf{R}_0^T [g''(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\tau}_0 + h''(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\alpha}_{,s}] \quad (\text{II.97})$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}_0 [g'''(\boldsymbol{\alpha}^*) \boldsymbol{\tau}_0^* + h'''(\boldsymbol{\alpha}^*) \boldsymbol{\alpha}_{,s}^*] \quad (\text{II.98})$$

obteniéndose así la forma concreta de dependencia entre los vectores curvatura y la orientación  $\mathbf{R}_0$  del sistema referencial (obsérvese que la relación funcional entre  $\boldsymbol{\tau}^*$ ,  $\boldsymbol{\tau}_0$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\boldsymbol{\alpha}_{,s}$  sí depende explícitamente de  $\mathbf{R}_0$ ).

Conocidas estas relaciones, el cálculo de la curvatura puede independizarse de  $\mathbf{R}_0$  y simplificarse tomando  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{I}$ , esto es, haciendo coincidir los sistemas de referencia local  $\mathbf{e}_0$  y global  $\mathbf{n}$  en  $(t_0, s)$ , como se indica en la figura II.7 –una demostración más general que no presupone  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{I}$ , se presenta en el Apéndice IV–.

La figura II.7 muestra las dos vías o secuencias de giros por medio de las cuales se puede pasar de la orientación inicial  $\mathbf{R}_0$  en  $(t_0, s)$  a la final  $\mathbf{R}$  en  $(t, s+ds)$ . Dado que el resultado final es independiente del camino elegido y del sistema de referencia, fijo o móvil, adoptado para las rotaciones, debe cumplirse:

$$\mathbf{R}(t, s+ds) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha} + d\boldsymbol{\alpha})\mathbf{R}(\boldsymbol{\tau}_0 ds) \quad (\text{II.99.a})$$

$$\mathbf{R}(t, s+ds) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\tau}_0 ds)\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}^* + d\boldsymbol{\alpha}^*) \quad (\text{II.99.b})$$

$$\mathbf{R}(t, s+ds) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{R}(\boldsymbol{\tau}^* ds) \quad (\text{II.99.c})$$

$$\mathbf{R}(t, s+ds) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\tau} ds)\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{II.99.d})$$

Ahora bien, por una parte se tiene:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\tau}_0 ds) = \mathbf{I} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_0 ds$$

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\tau}^* ds) = \mathbf{I} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* ds$$

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\tau} ds) = \mathbf{I} + \tilde{\boldsymbol{\tau}} ds$$

y por otra:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha} + d\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha})[\mathbf{I} + d\tilde{\boldsymbol{\theta}}^*] = \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha})[\mathbf{I} + \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\alpha}]$$

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}^* + d\boldsymbol{\alpha}^*) = [\mathbf{I} + d\tilde{\boldsymbol{\theta}}]\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}^*)d\boldsymbol{\alpha}^*]\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha})$$

Llevando estos resultados a (II.99), e igualando por un lado (II.99.a) con (II.99.c), y por otro (II.99.b) con (II.99.d), se obtienen estas dos relaciones:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha})\tilde{\boldsymbol{\tau}}_0 ds + \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha})\tilde{\boldsymbol{\tau}}^* ds$$

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_0 ds \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}^*)d\boldsymbol{\alpha}^* \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) = \tilde{\boldsymbol{\tau}} ds \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha})$$

que, simplificadas, se reducen a:

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_0 ds + \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\alpha} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* ds \quad (\text{II.100.a})$$

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_0 ds + \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}^*)d\boldsymbol{\alpha}^* = \tilde{\boldsymbol{\tau}} ds \quad (\text{II.100.b})$$

El incremento de curvatura referido a la base local  $\Delta\boldsymbol{\tau}^* = \boldsymbol{\tau}^* - \boldsymbol{\tau}_0^*$  –o *curvatura por flexotorsión*– es esencial en la teoría de vigas; en lo sucesivo, lo denotaremos  $\boldsymbol{\kappa}$ . Se obtiene dividiendo (II.100.a) por  $ds$  y teniendo en cuenta que al haber supuesto  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{I}$ ,  $\boldsymbol{\tau}_0 = \boldsymbol{\tau}_0^*$ . Procediendo de este modo, las ecuaciones (II.100) conducen a dos relaciones muy importantes, que son:

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{R}_0^T \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\alpha}_{,s} \quad (\text{II.101})$$

$$\Delta\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}_0 \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}^*) \boldsymbol{\alpha}^*_{,s} \quad (\text{II.102})$$

Determinados los incrementos  $\Delta\boldsymbol{\tau}$  y  $\boldsymbol{\kappa}$ , las curvaturas totales en el instante  $t$  valen:  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 + \Delta\boldsymbol{\tau}$  y  $\boldsymbol{\tau}^* = \boldsymbol{\tau}_0^* + \boldsymbol{\kappa}$ .

Obsérvese en las dos últimas relaciones que el incremento de curvatura  $\boldsymbol{\kappa}$  viene expresado en función de  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\boldsymbol{\alpha}_{,s}$ , mientras que  $\Delta\boldsymbol{\tau}$  viene expresado en función de  $\boldsymbol{\alpha}^*$  y  $\boldsymbol{\alpha}^*_{,s}$ . Si se desea, se puede expresar también  $\boldsymbol{\kappa}$  en función de  $\boldsymbol{\alpha}^*$  y  $\boldsymbol{\alpha}^*_{,s}$  y  $\Delta\boldsymbol{\tau}$  en función de  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\boldsymbol{\alpha}_{,s}$ . Para ello, basta tener en cuenta que:

$$\boldsymbol{\tau}_0 = \mathbf{R}_0(t_0, s) \boldsymbol{\tau}_0^* \quad \therefore \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}_0(t_0, s) \boldsymbol{\alpha}^* \quad (\text{II.103})$$

En efecto, derivando la segunda ecuación con relación a  $s$  y teniendo en cuenta que  $\mathbf{R}_{0,s} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_0 \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0 \tilde{\boldsymbol{\tau}}_0^*$ , se deduce:

$$\boldsymbol{\alpha}_{,s} = \mathbf{R}_0 [ \boldsymbol{\alpha}^*_{,s} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_0^* \boldsymbol{\alpha}^* ] \quad (\text{II.104})$$

$$\boldsymbol{\alpha}^*_{,s} = \mathbf{R}_0^T [ \boldsymbol{\alpha}_{,s} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_0 \boldsymbol{\alpha} ] \quad (\text{II.105})$$

y llevando estos resultados a (II.101) y (II.102), se obtiene:

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{R}_0^T \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{R}_0 [ \boldsymbol{\alpha}^*_{,s} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_0^* \boldsymbol{\alpha}^* ]$$

$$\Delta\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}_0 \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}^*) \mathbf{R}_0^T [ \boldsymbol{\alpha}_{,s} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_0 \boldsymbol{\alpha} ]$$

En los sistemas objetivos, como el de Rodrigues, estas relaciones se simplifican aún más al verificar los tensores  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^*$  la propiedad (AI.24) del Apéndice I, de la que se desprenden las siguientes transformaciones:

$$\mathbf{R}_o^T \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{R}_o = \mathbf{G}^*(\mathbf{R}_o^T \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}^*) \quad (\text{II.106.a})$$

$$\mathbf{R}_o \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}^*) \mathbf{R}_o^T = \mathbf{G}(\mathbf{R}_o \boldsymbol{\alpha}^*) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{II.106.b})$$

y por tanto,

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}^*) [\boldsymbol{\alpha}^*,_s + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_o^* \boldsymbol{\alpha}^*] \quad (\text{II.107})$$

$$\Delta \boldsymbol{\tau} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) [\boldsymbol{\alpha},_s - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_o \boldsymbol{\alpha}] \quad (\text{II.108})$$

En definitiva, en los sistemas objetivos las expresiones generales (II.101–102) y (II.107–108) son cuatro formas distintas de calcular el incremento de curvatura de un campo de rotaciones. Concretamente, en el sistema de Rodrigues, teniendo en cuenta (II.28.a) y (II.28.b), estas expresiones adoptan la forma siguiente –una demostración directa de las mismas se recoge en el Apéndice IV– :

$$\Delta \boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}_o \frac{2}{1 + \underline{\nu}^{*2}} [\mathbf{I} + \underline{\tilde{\mathbf{v}}}^*] \underline{\mathbf{v}}^*,_s \quad (\text{II.109.a})$$

$$\Delta \boldsymbol{\tau} = \frac{2}{1 + \underline{\nu}^2} [\mathbf{I} + \underline{\tilde{\mathbf{v}}}] [\underline{\mathbf{v}},_s - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_o \underline{\mathbf{v}}] \quad (\text{II.109.b})$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{R}_o^T \frac{2}{1 + \underline{\nu}^2} [\mathbf{I} - \underline{\tilde{\mathbf{v}}}] \underline{\mathbf{v}},_s \quad (\text{II.110.a})$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{2}{1 + \underline{\nu}^{*2}} [\mathbf{I} - \underline{\tilde{\mathbf{v}}}^*] [\underline{\mathbf{v}}^*,_s + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_o^* \underline{\mathbf{v}}^*] \quad (\text{II.110.b})$$

(nótese que  $\underline{\nu}^{*2} = \underline{\nu}^2$ ). De las dos expresiones de la curvatura de flexotorsión  $\boldsymbol{\kappa}$ , la más sencilla y práctica es la primera (II.110.a), que deriva de (II.101). El cálculo de la curvatura  $\boldsymbol{\kappa}$  en otros sistemas de parametrización no entraña mayores dificultades.

Sistema de Parametrización	Operador Rotación $\mathbf{R}$	Curvatura $\kappa$ ( $\kappa = \mathbf{R}^T \mathbf{R}_s$ )
General	$\mathbf{R}(\alpha) \in \mathbf{SO}(3)$	$\mathbf{R}_0^T \mathbf{G}^*(\alpha) \alpha_{,s}$
Vectores de Rodrigues	$\mathbf{I} + \frac{2}{1+\tilde{v}^2} [\tilde{v} + \tilde{v}^2]$	$\mathbf{R}_0^T \frac{2}{1+\tilde{v}^2} [\mathbf{I} - \tilde{v}] \underline{v}_{,s}$
Vectores Naturales	$\mathbf{I} + \frac{\text{sen } v}{v} \tilde{v} + \frac{1}{2} \left( \frac{\text{sen } v/2}{v/2} \right)^2 \tilde{v}^2$	$\mathbf{R}_0^T \left[ \mathbf{I} - \frac{1-\cos v}{v^2} \tilde{v} + \frac{1}{v^2} \left( 1 - \frac{\text{sen } v}{v} \right) \tilde{v}^2 \right] \underline{v}_{,s}$
Parámetros de Euler–Rodrigues	$\mathbf{I} + 2q_0 \tilde{q} + 2\tilde{q}^2$	$2\mathbf{R}_0^T [(q_0 \mathbf{I} - \tilde{q}) \mathbf{q}_{,s} - q_{0,s} \mathbf{q}]$

Tabla II.1



La Tabla II.1 muestra el valor de  $\kappa$  en distintos sistemas de parametrización [B1, C1, S1, P1], incluido el tetraparamétrico de Euler-Rodrigues [G2, N1].

Actualizando la configuración de referencia, esto es, haciendo  $\mathbf{v}=\mathbf{0}$  en (II.110), y sustituyendo  $\kappa$  por  $d\kappa$  y  $\underline{\mathbf{v}}$  por  $d\boldsymbol{\theta} / 2$ , se obtiene la *diferencial material*  $d\kappa$  de la curvatura en función de los giros diferenciales  $d\boldsymbol{\theta}$  que se producen en un entorno del punto  $(t_0, s_0)$ .

$$d\kappa = d\boldsymbol{\theta}^*_{,s} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^*_{,s} d\boldsymbol{\theta}^* \quad (\text{II.111})$$

$$d\kappa = \mathbf{R}_0^T d\boldsymbol{\theta}_{,s} \quad (\text{II.112})$$

Nótese que los términos que figuran en estas dos sencillas relaciones no son vectores de Rodrigues sino naturales. Por supuesto, podían haberse establecido directamente sin necesidad de recurrir a las expresiones generales (II.110).

### II. 13. 2. –Cinemática del movimiento relativo

En el apartado anterior se hallaron los giros relativos de un triedro  $\mathbf{e}$  al variar la coordenada espacial  $s$ , manteniendo el tiempo  $t$  constante. A continuación, fijadas dos coordenadas  $s_0$  y  $s$ , esto es, dos triedros  $\mathbf{e}_0$  y  $\mathbf{e}$ , y suponiendo conocidos los movimientos relativos entre ellos así como el movimiento absoluto del primero  $\mathbf{e}_0$ , se estudian las variaciones del segundo triedro  $\mathbf{e}$  a lo largo del tiempo y se calculan la velocidad y aceleración absolutas de un punto fijo arbitrario de este triedro.

Con tal fin, sean:  $\mathbf{r}_0(t)$ ,  $\mathbf{R}_0(t)$  y  $\boldsymbol{\omega}_0(t)$  el desplazamiento, rotación y velocidad angular del triedro  $\mathbf{e}_0$ ;  $\mathbf{r}_1(t)$ ,  $\mathbf{R}_1(t)$  y  $\boldsymbol{\omega}_1(t)$  los del triedro  $\mathbf{e}$ ;  $\mathbf{u}(t)$  y  $\mathbf{R}[\boldsymbol{\alpha}(t)]$  el desplazamiento y giro relativos de  $\mathbf{e}$  con relación a  $\mathbf{e}_0$ ; y, finalmente,  $\mathbf{x}$  el vector de posición de un punto dado P del triedro  $\mathbf{e}$ . Estos vectores pueden referirse al sistema fijo o absoluto,  $\mathbf{n}$ , o al móvil que acompaña al propio triedro –al igual que antes, distinguiremos las componentes de un vector en el sistema móvil marcándolas con un asterisco–. Pues bien, denotando  $\mathbf{u}^*$  y  $\boldsymbol{\omega}_0^*$  al desplazamiento relativo y velocidad angular del triedro  $\mathbf{e}_0$  en la base móvil, y  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_0$  a los mismos vectores en el sistema absoluto, entre ellos se tiene:

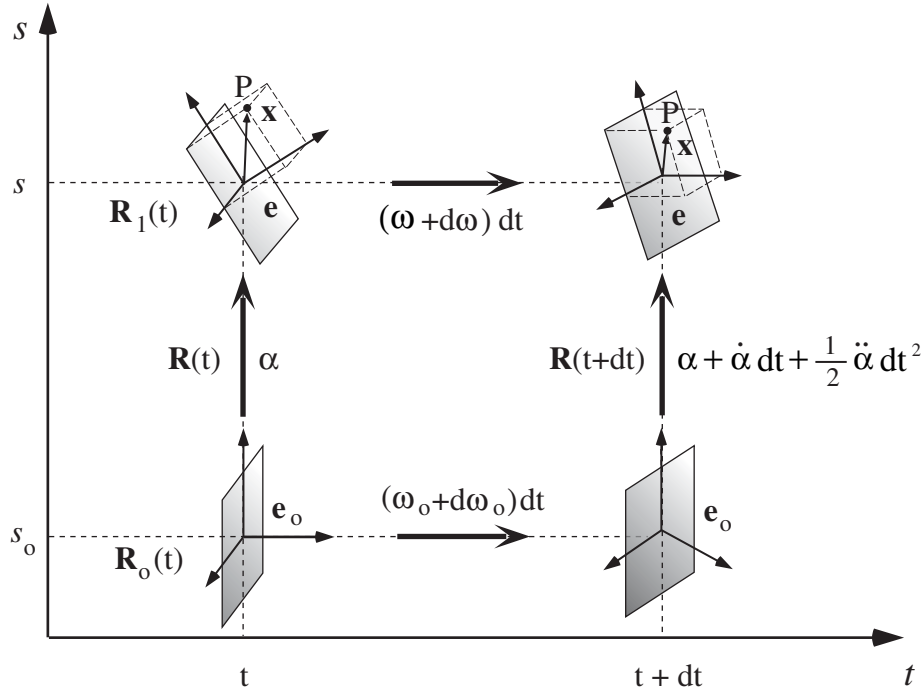


Figura II.8.

*Velocidades angulares en un campo de rotaciones  $R(t, s)$*

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{R}_0 \boldsymbol{\omega}_0^* \quad \therefore \quad \mathbf{u} = \mathbf{R}_0 \mathbf{u}^* \quad (\text{II.113})$$

Por otra parte, entre las componentes en las bases fija y móvil,  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}^*$ , del vector de posición del punto P del triedro  $\mathbf{e}$ , se tiene:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}_1 \mathbf{x}^* = \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{R}_0 \mathbf{x}^* = \mathbf{R}_0 \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}^*) \mathbf{x}^* \quad (\text{II.114})$$

Como el desplazamiento absoluto del punto P es  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u} + \mathbf{x}$ , siendo  $\mathbf{x}$  el vector de posición de P relativo al triedro móvil  $\mathbf{e}$ , la velocidad y aceleración absolutas de P valdrán –supuesta  $\boldsymbol{\omega}$  la con velocidad angular de  $\mathbf{e}$  –:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{u}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{x} \quad (\text{II.115.a})$$

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \ddot{\mathbf{u}} + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \mathbf{x} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{x} \quad (\text{II.115.b})$$

Los vectores que intervienen en (II.115) están todos referidos a la base absoluta  $\mathbf{n}$ . No obstante, el desplazamiento relativo  $\mathbf{u}$  y la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}_o$  pueden referirse también a la base móvil instalada en  $\mathbf{e}_o$  –lo que puede interesar, por ejemplo, al analizar las vibraciones de un eje que gira a gran velocidad–, en cuyo caso, se tiene:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_o [ \dot{\mathbf{u}}_o^* + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_o^* \mathbf{u}^* ] \quad (\text{II.116.a})$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_o [ \ddot{\mathbf{u}}_o^* + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_o^* \mathbf{u}^* + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_o^* \tilde{\boldsymbol{\omega}}_o^* \mathbf{u}^* + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_o^* \dot{\mathbf{u}}_o^* ] \quad (\text{II.116.b})$$

Obsérvese que los dos últimos términos son las clásicas aceleraciones de arrastre y Coriolis del punto P [G3]. Además, la velocidad y aceleración angulares absolutas del triedro  $\mathbf{e}$  valen, de acuerdo con (II.102) [A5, K1, S1]:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}_o \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}^*) \dot{\boldsymbol{\alpha}}^* + \boldsymbol{\omega}_o \quad (\text{II.117.a})$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\mathbf{R}}_o \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}^*) \dot{\boldsymbol{\alpha}}^* + \mathbf{R}_o \dot{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\alpha}^*) \dot{\boldsymbol{\alpha}}^* + \mathbf{R}_o \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}^*) \ddot{\boldsymbol{\alpha}}^* + \dot{\boldsymbol{\omega}}_o \quad (\text{II.117.b})$$

Ahora bien, como  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_o = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_o \boldsymbol{\omega}_o + \mathbf{R}_o \dot{\boldsymbol{\omega}}_o^* = \mathbf{R}_o \dot{\boldsymbol{\omega}}_o^*$ , por un lado;  $\dot{\mathbf{R}}_o = \mathbf{R}_o \tilde{\boldsymbol{\omega}}_o^*$ , por otro, y además  $\dot{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\alpha}^*) \dot{\boldsymbol{\alpha}}^* = \hat{\mathbf{T}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) \dot{\boldsymbol{\alpha}}^*$ , la velocidad y aceleración angulares dadas por (II.117) se pueden expresar en función exclusivamente de vectores referidos a la base móvil:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}_o [ \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}^*) \dot{\boldsymbol{\alpha}}^* + \boldsymbol{\omega}_o^* ] \quad (\text{II.118.a})$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{R}_o [ \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}^*) \ddot{\boldsymbol{\alpha}}^* + [ \hat{\mathbf{T}}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_o^* \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}^*) ] \dot{\boldsymbol{\alpha}}^* + \dot{\boldsymbol{\omega}}_o^* ] \quad (\text{II.118.b})$$

Escribiendo, para simplificar, los resultados (II.116)–(II.118) del siguiente modo:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_o \nu(\dot{\mathbf{u}}^*; \mathbf{u}^*; \tilde{\boldsymbol{\omega}}_o^*) \quad \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_o a(\ddot{\mathbf{u}}^*; \dot{\mathbf{u}}^*; \mathbf{u}^*; \dot{\boldsymbol{\omega}}_o^*; \tilde{\boldsymbol{\omega}}_o^*)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}_o \mathbf{w}(\boldsymbol{\alpha}^*; \dot{\boldsymbol{\alpha}}^*; \boldsymbol{\omega}_o^*) \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{R}_o \phi(\boldsymbol{\alpha}^*; \dot{\boldsymbol{\alpha}}^*; \ddot{\boldsymbol{\alpha}}^*; \dot{\boldsymbol{\omega}}_o^*)$$

y llevándolos a (II.115), se obtienen finalmente la velocidad y aceleración lineales y absolutas del punto P en función de las velocidades y aceleraciones relativas –lineales y angulares– medidas por un observador instalado en el triedro móvil  $\mathbf{e}_o$ :

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_o + \mathbf{R}_o [\mathbf{v} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}^*) \mathbf{x}^*] \quad (\text{II.119.a})$$

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}_o + \mathbf{R}_o [\mathbf{a} + [\tilde{\boldsymbol{\phi}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}] \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}^*) \mathbf{x}^*] \quad (\text{II.119.b})$$

### II. 13. 3. –Energía cinética y momento cinético de un sólido rígido

Como es bien sabido, la energía cinética de un sólido rígido y su momento cinético con relación a un punto O se descomponen en dos partes: los debidos al movimiento de traslación de su centro de masa G y los debidos al movimiento de rotación del sólido alrededor de G. En este apartado calcularemos estos últimos por ser los únicos en que intervienen los giros del sólido. Para ello, supondremos que el centro de masa G es un punto fijo del espacio y que el sólido gira en torno a él. De este modo, la energía cinética  $E_c$  y el momento cinético del sólido  $\mathbf{p}$  valdrán:

$$E_c = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad \therefore \quad \mathbf{p} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (\text{II.120})$$

suponiendo  $\mathbf{I}$  el tensor de inercia del sólido y  $\boldsymbol{\omega}$  su velocidad angular en la base absoluta  $\mathbf{n}$  del espacio. Si pasamos del sistema de referencia absoluto al móvil, las nuevas componentes del tensor  $\mathbf{I}^*$ , de la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}^*$  y del momento cinético  $\mathbf{p}^*$  verificarán las siguientes relaciones:

$$\mathbf{I} = \mathbf{R} \mathbf{R}_o \mathbf{I}^* \mathbf{R}_o^T \mathbf{R}^T \quad \therefore \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{R} \mathbf{R}_o \boldsymbol{\omega}^* \quad \therefore \quad \mathbf{p} = \mathbf{R} \mathbf{R}_o \mathbf{p}^* ,$$

que llevadas a (II.120), conducen a:

$$E_c = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^{*T} \mathbf{I}^* \boldsymbol{\omega}^* \quad \therefore \quad \mathbf{p}^* = \mathbf{I}^* \boldsymbol{\omega}^* \quad (\text{II.121})$$

Suponiendo las rotaciones parametrizadas, el incremento de velocidad angular  $\Delta\boldsymbol{\omega}^* = \boldsymbol{\omega}^* - \boldsymbol{\omega}_0^*$  vendrá dado por la misma expresión (II.101) de la curvatura de flexotorsión, intercambiando en ella el papel de las variables  $s$  y  $t$ , esto es, sustituyendo la derivada espacial del vector  $\boldsymbol{\alpha}$  por su derivada temporal:

$$\Delta\boldsymbol{\omega}^* = \boldsymbol{\omega}^* - \boldsymbol{\omega}_0^* = \mathbf{R}_0^T \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (\text{II.122})$$

Llevando ahora (II.122) a (II.121) se obtienen dos nuevas expresiones de la energía cinética y del momento angular:

$$\mathbf{p} = \mathbf{R} [\hat{\mathbf{p}} + \mathbf{I}_0 \boldsymbol{\omega}_0] \quad \therefore \quad \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{I}_0 \mathbf{G}^* \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (\text{II.123})$$

$$E_c = E_{c_0} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\alpha}}^T [\mathbf{G}^{*T} \mathbf{I}_0 \mathbf{G}^*] \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\omega}_0^T \hat{\mathbf{p}} \quad (\text{II.124})$$

donde  $\mathbf{I}_0 = \mathbf{R}_0 \mathbf{I}^* \mathbf{R}_0^T$  es el tensor de inercia en la posición  $(s_0, t)$ , y  $E_{c_0} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_0^T \mathbf{I}_0 \boldsymbol{\omega}_0$ .

## II. 14.- INTEGRACIÓN DE ROTACIONES.

Supongamos que un sólido rígido está girando en el espacio con velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}(t)$  y queremos conocer el giro total  $\Phi$  que experimenta entre dos instantes  $t_0$  y  $t_1$ . Si dividimos el intervalo  $t_0 \leq t \leq t_1$  en  $N$  segmentos iguales de amplitud  $\Delta t$  y calculamos en un punto interior  $t_i$  a cada uno de ellos la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}(t_i)$ , la suma ordenada de las  $N$  rotaciones elementales  $\boldsymbol{\omega}_i \Delta t$  nos dará un valor aproximado  $\Phi_N$  de  $\Phi$ . Lógicamente, cuanto mayor sea el número  $N$  de intervalos, mayor será la precisión del resultado, y en el límite, cuando  $N \rightarrow \infty$ ,  $\Phi_N$  tenderá al giro total  $\Phi$ . Los valores  $\Phi_N$  se calculan del mismo modo que las sumas de Darboux en una integral de Riemann y sugieren la posibilidad de integrar un sistema de rotaciones  $\boldsymbol{\omega}(t)$  del mismo modo que se integran las funciones escalares y vectoriales de una sola variable. La principal diferencia estriba en que aquí la suma de los giros elementales  $\boldsymbol{\omega}_i \Delta t$  no es una suma vectorial ordinaria sino una composición de rotaciones, y como tal no conmutativa.

Esto no significa, sin embargo, que las rotaciones no se puedan integrar, sino que al integrarlas hay que sumarlas de forma ordenada, lo que implica introducir algunas cambios en el concepto clásico de integral; veamos cuáles.

En términos matemáticos precisos, podemos definir la integral de las velocidades angulares  $\boldsymbol{\omega}(t)$  en el intervalo  $t_0 \leq t \leq t_1$  de la siguiente forma:

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\omega}(t) dt := \lim_{N \rightarrow \infty} [ \boldsymbol{\omega}_1 \Delta t \oplus \boldsymbol{\omega}_2 \Delta t \oplus \dots \oplus \boldsymbol{\omega}_N \Delta t ] \quad (\text{II.125})$$

con  $\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}(t_i)$ ,  $(i-1)\Delta t \leq t_i \leq i\Delta t$ , y  $\Delta t = \frac{t_1 - t_0}{N}$

Este límite existe y no depende de la elección de los puntos  $t_i$  en cada subintervalo siempre y cuando la función  $\boldsymbol{\omega}(t)$  cumple unas condiciones mínimas de regularidad, por ejemplo, que sea continua. La demostración es sencilla si se tiene en cuenta que por ser  $\boldsymbol{\omega}(t)$  continua en un intervalo cerrado y acotado es uniformemente continua en él –teorema de Heine–, y en consecuencia:

$$\boldsymbol{\omega}(t_b) = \boldsymbol{\omega}(t_a) + \Delta \boldsymbol{\omega} \quad \text{con} \quad \|\Delta \boldsymbol{\omega}\| < \delta, \quad \text{si: } |t_b - t_a| < \varepsilon \quad (\text{II.126.a})$$

y, además, que la suma de rotaciones “ $\oplus$ ” cumple:

$$\boldsymbol{\omega}_1 \oplus (\boldsymbol{\omega}_2 + \Delta \boldsymbol{\omega}) \Delta t \oplus \boldsymbol{\omega}_3 = \boldsymbol{\omega}_1 \oplus \boldsymbol{\omega}_2 \Delta t \oplus \boldsymbol{\omega}_3 + \mathbf{O}(\Delta \boldsymbol{\omega}) \Delta t \quad (\text{II.126.b})$$

con  $\|\mathbf{O}(\Delta \boldsymbol{\omega})\| < A \|\Delta \boldsymbol{\omega}\|$ ,

estando A acotado si lo está la suma  $\|\boldsymbol{\omega}_1\| + \|\boldsymbol{\omega}_2\| + \|\boldsymbol{\omega}_3\|$ .

En efecto, para probar que el límite (II.125) no depende de la elección de los puntos en cada subintervalo, tomemos dos series  $t_i$  y  $t'_i$ , y supongamos que  $\boldsymbol{\omega}_i$  y  $\boldsymbol{\omega}'_i$  son los valores de la función  $\boldsymbol{\omega}(t)$  en estos puntos; en estas condiciones, se tendrá:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}_k \Delta t &= \sum_{k=1}^N [ \boldsymbol{\omega}'_k \Delta t + \Delta \boldsymbol{\omega}_k \Delta t ] = \\ &= \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\omega}'_k \Delta t + \sum_{k=1}^N \mathbf{O}(\Delta \boldsymbol{\omega}_k) \Delta t \end{aligned}$$

y así, 
$$\left\| \sum_{k=1}^{\oplus N} \boldsymbol{\omega}_k \Delta t - \sum_{k=1}^{\oplus N} \boldsymbol{\omega}'_k \Delta t \right\| < A \|\Delta \boldsymbol{\omega}_k\| N \Delta t < A(t_1 - t_0) \delta, \text{ si } \Delta t < \varepsilon.$$

Luego el resultado (II.125) no depende del tipo de partición del intervalo  $[t_0, t_1]$ . Un razonamiento análogo prueba que la sumas finitas (II.125), al variar  $N$  de 1 a  $\infty$ , forman una sucesión de Cauchy en  $\mathbf{E}^3$  y por tanto convergen; esto es, que el límite (II.125) existe en realidad y tiene pleno sentido la definición de integral dada.

Si las rotaciones están parametrizadas, resolver (II.125) equivale a integrar el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en  $\boldsymbol{\alpha}^*$ :

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}_0 \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}^*) \dot{\boldsymbol{\alpha}}^* + \boldsymbol{\omega}_0 \quad (\text{II.127.a})$$

Si las velocidades angulares no fueran absolutas  $\boldsymbol{\omega}(t)$  sino relativas  $\boldsymbol{\omega}^*(t)$ , para integrarlas debería invertirse el orden de la suma (II.125), lo que equivale a integrar la función  $\boldsymbol{\omega}^*(-t)$  entre  $-t_1 \leq t \leq -t_0$ . En este caso, el sistema de ecuaciones diferenciales que se integra es éste otro en  $\boldsymbol{\alpha}$ .

$$\boldsymbol{\omega}^* = \mathbf{R}_0^T \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\omega}_0^* \quad (\text{II.127.b})$$

Debido al carácter ordenado de la suma de un campo de rotaciones, la integral (II.125) no es lineal ni, en general, aditiva en el intervalo de integración:

$$\int_{t_0}^{t_2} \sum_{k=1}^{\oplus} k_i d\boldsymbol{\omega}_i \neq \sum_{k=1}^{\oplus} k_i \int_{t_0}^{t_2} d\boldsymbol{\omega}_i \quad \therefore \int_{t_0}^{t_2} d\boldsymbol{\omega} = \int_{t_0}^{t_1} d\boldsymbol{\omega} \oplus \int_{t_1}^{t_2} d\boldsymbol{\omega} \neq \int_{t_1}^{t_2} d\boldsymbol{\omega} \oplus \int_{t_0}^{t_1} d\boldsymbol{\omega} \quad (\text{II.128})$$

Por desgracia, aun cuando la velocidad  $\boldsymbol{\omega}(t)$  venga dada por una función simple, la complejidad del sistema de ecuaciones diferenciales (II.127) impide la mayoría de las veces obtener una solución analítica exacta. No obstante, en algunos casos, eligiendo adecuadamente el sistema de parametrización, las ecuaciones anteriores sí se pueden integrar. Por ejemplo, si la dirección del vector  $\boldsymbol{\omega}$  es constante  $-\boldsymbol{\omega} = \lambda(t) \mathbf{e}-$  y se adopta el sistema natural, la integral (II.125) es inmediata y vale:

$$\underline{\Phi} = \int_{t_0}^{t_1} \lambda(t) dt$$

sin embargo, si intentamos resolver el mismo problema en el sistema de Rodrigues, haciendo  $\underline{\Phi} = \gamma(t) \mathbf{e}$ , (II.127.a) se transforma en esta otra ecuación diferencial en  $\gamma(t)$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2} \lambda(t) (1 + \gamma^2),$$

que ya no es inmediata, aunque su solución puede calcularse y vale:

$$\gamma(t) = \text{tg} \left[ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \lambda(t) dt \right]$$

En definitiva, salvo en casos simples como el anterior, la integración de las ecuaciones (II.127), o el cálculo de (II.125), que viene a ser lo mismo, no se pueden realizar analíticamente, sino numéricamente y de forma aproximada.

Vistos los problemas que entraña la integración de un conjunto de rotaciones  $\boldsymbol{\omega}(t)$  dependiente de una sola variable, veamos ahora qué ocurre cuando se trata de integrar un campo de rotaciones que depende de dos o más variables.

En el apartado anterior hemos comprobado que la derivación de un campo de rotaciones dependiente de dos variables no entraña ninguna dificultad insalvable. No sucede lo mismo con el problema inverso, que consiste en integrar un campo de giros diferenciales  $d\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}(t, s)dt + \boldsymbol{\tau}(t, s)ds$  dependiente de las variables  $t$  y  $s$ , esto es, en hallar el campo de rotaciones  $\mathbf{R}$  cuyas curvaturas  $\boldsymbol{\tau}$  y velocidades angulares  $\boldsymbol{\omega}$  se conocen. En este caso, si las funciones  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\boldsymbol{\tau}$  no cumplen ciertas condiciones, el problema no tiene solución. Concretamente, debe garantizarse que la integral entre dos puntos cualquiera  $(t_0, s_0)$  y  $(t, s)$  no dependa del camino seguido  $t(s)$  para ir de uno a otro, lo que implica que las funciones  $\boldsymbol{\omega}(t, s)$  y  $\boldsymbol{\tau}(t, s)$  no pueden ser arbitrarias.

A continuación vamos a determinar las relaciones precisas que deben cumplir  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\boldsymbol{\tau}$  para que la integral sea independiente del camino y el problema sea soluble.

De acuerdo con (II.58), si existe tal campo de rotaciones, deberá cumplirse:

$$\boldsymbol{\omega}_{,s} - \boldsymbol{\tau}_{,t} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\tau} \tag{II.129}$$

Por tanto, ésta es una condición necesaria para que se puedan integrar los giros  $d\boldsymbol{\theta}$ . Esta condición además es suficiente. Para probarlo, basta observar que si se cumple



esta condición, se anulan los términos de primero y segundo órdenes en  $ds$  de la integral a lo largo del cuadrilátero diferencial ABCD mostrado en la figura II.9.a:

$$\boldsymbol{\omega} dt \oplus (\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_{,t} dt) ds \oplus (-\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{,s} ds) dt \oplus -\boldsymbol{\tau} ds = \mathbf{o}(ds^3) \quad (\text{II.130})$$

y por tanto se anula también la integral sobre cualquier circuito cerrado simplemente conexo:

$$\oint \boldsymbol{\omega} dt + \boldsymbol{\tau} ds = \mathbf{0} \quad (\text{II.131})$$

Para demostrar que (II.130) implica (II.131), basta cubrir el recinto que encierra el circuito cerrado con una fina malla de cuadriláteros de lados  $\Delta t - \Delta s$ , como se indica en la figura II.9.b, y calcular sobre la poligonal quebrada que cubre el contorno exterior del recinto el valor límite de la suma (II.125) al tender a cero  $\Delta t$  y  $\Delta s$ . Al calcular este límite es preciso hacer dos consideraciones. La primera, que la suma (II.130), limitada a cada cuadrilátero finito de esta malla, es un término de tercer orden en  $\Delta t$  y  $\Delta s$ , como consta en (II.130), y extendida a todos los cuadriláteros del recinto, un término de primer orden que tiende a cero con  $\Delta t$  y  $\Delta s$ ; esto es, que la integral sobre el contorno cerrado quebrado de lados paralelos a los ejes es nula. La segunda consideración es que en un triángulo vectorial de lados  $\boldsymbol{\omega}_1 \Delta t$  y  $\boldsymbol{\omega}_2 \Delta s$  los giros que producen las rotaciones  $\boldsymbol{\omega}_1 \Delta t + \boldsymbol{\omega}_2 \Delta s$  y  $\boldsymbol{\omega}_1 \Delta t \oplus \boldsymbol{\omega}_2 \Delta s$  se diferencian en una cantidad de segundo orden en  $\Delta t$  y  $\Delta s$ , y por tanto las integrales sobre el contorno poligonal quebrado y el curvilíneo se diferencian en un término de primer orden, que tiende a cero con  $\Delta t$  y  $\Delta s$ . Ambas consideraciones implican (II.131), con lo cual la integral  $\mathbf{I}(P_o, P_1)$  entre dos puntos  $P_o(t_o, s_o)$  y  $P_1(t_1, s_1)$  no depende del camino recorrido para ir de uno a otro, y se tiene:

$$\mathbf{I}(P_o, P_1) := \int_{(t_o; s_o)}^{(t_1; s_1)} \boldsymbol{\tau}(t_o, s) ds \oplus \int_{(t_o; s_1)}^{(t_1; s_1)} \boldsymbol{\omega}(t, s_1) dt \quad (\text{II.132})$$

suponiendo las rotaciones referidas a una base fija; y si lo estuvieran a una móvil:

$$\mathbf{I}(P_o, P_1) = \int_{(t_o; s_o)}^{(t_1; s_o)} \boldsymbol{\omega}^*(t, s_o) dt \oplus \int_{(t_1; s_o)}^{(t_1; s_1)} \boldsymbol{\tau}^*(t_1, s) ds \quad (\text{II.133})$$

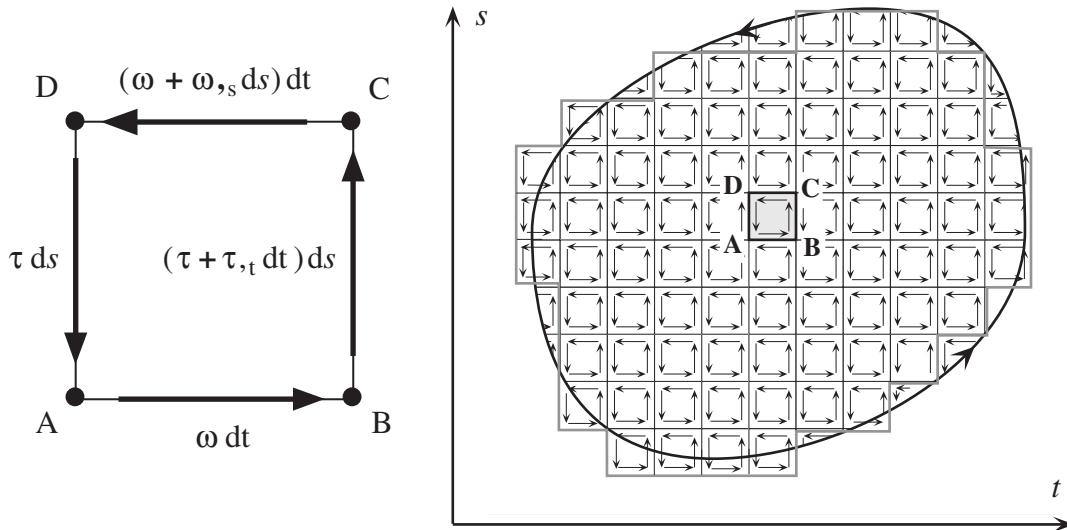


Figura II.9.a.

Figura II.9.b

*Integración de rotaciones en el contorno de un recinto plano simplemente conexo.*

Escritas de este modo, se observa de inmediato que las derivadas parciales de  $\mathbf{I}$  con relación a  $s$  y  $t$  son precisamente  $\boldsymbol{\tau}$  y  $\boldsymbol{\omega}$ , y por tanto se trata de la solución buscada.

Los resultados se pueden extender a 3 dimensiones. En efecto, siendo  $d\boldsymbol{\theta}$  un campo de giros diferenciales dependiente de 3 variables  $x_1, x_2$  y  $x_3$ ,

$$d\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\kappa}_1(x_1, x_2, x_3)dx_1 + \boldsymbol{\kappa}_2(x_1, x_2, x_3)dx_2 + \boldsymbol{\kappa}_3(x_1, x_2, x_3)dx_3, \quad (\text{II.134})$$

la condición necesaria y suficiente para poderlo integrar, de acuerdo con (II.58), es que se cumpla la condición:

$$\boldsymbol{\kappa}_{i,j} - \boldsymbol{\kappa}_{j,i} = \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_i \boldsymbol{\kappa}_j \quad (\text{II.135})$$

Ahora bien, como las componentes del tensor  $\mathbf{G}$  en el campo de rotaciones  $d\boldsymbol{\theta}$  son  $G[i, j] = (\boldsymbol{\kappa}_j)_i$ , de acuerdo con la definición (II.24), esta condición de integrabilidad equivale a establecer de nuevo la relación (II.64) del apartado II.11:

$$[DG \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j] \boldsymbol{\varepsilon}_i - [DG \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i] \boldsymbol{\varepsilon}_j = \tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\varepsilon}_j \mathbf{G} \boldsymbol{\varepsilon}_i$$

El sentido e importancia de esta relación quedan ahora patentes al comprobar que de ella depende la integrabilidad de un campo de rotaciones diferenciales.

Las variables  $x_i$  constituyen en sí mismas un nuevo sistema de parametrización de las rotaciones con la particularidad de que en él la integración del campo (II.134) es directa. Visto desde este nuevo enfoque, el problema consiste en averiguar qué campo de rotaciones admite como sistema de parametrización el  $\{x_i\}$ , o, si se prefiere, hallar el operador rotación  $\mathbf{R}$  cuyo tensor  $\mathbf{G}$  viene definido en (II.134).

La operación inversa, la obtención de  $\mathbf{G}$  a partir de  $\mathbf{R}$ , en teoría no entraña ninguna dificultad, pues se reduce a resolver la ecuación:

$$d\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \overline{\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\alpha}} \quad (\text{II.136})$$

aunque esta operación puede resultar laboriosa y no siempre es aconsejable. En el apéndice II, por ejemplo, se obtienen los tensores fundamentales recurriendo a técnicas más directas, específicas de cada sistema de parametrización. En cualquier caso, la obtención de  $\mathbf{G}$  partiendo de  $\mathbf{R}$  resulta una tarea relativamente simple si se compara con la operación inversa, que consiste en obtener  $\mathbf{R}$  a partir de  $\mathbf{G}$ . En este caso hay que recurrir a la integración del campo  $d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\alpha}$  y esta operación es bastante más compleja. No obstante, en ciertos casos en que se conocen las características del sistema de parametrización resultante, esta integración puede resultar muy simple. El ejemplo más sencillo lo ofrecen los sistemas triparamétricos objetivos. En ellos se da una relación directa entre  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{G}$  del tipo –Apéndice I–:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{I} + \tilde{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{II.137.a})$$

que representa de hecho la integral general de un campo diferencial de rotaciones de naturaleza *vectorial*. Una relación análoga se obtiene en estos mismos sistemas para el traspuesto de  $\mathbf{R}$ , figurando ahora en ella  $\mathbf{G}^*$  en vez de  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{R}^T(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{I} - \tilde{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{II.137.b})$$

## II. 15.– RECAPITULACIÓN

Este capítulo consta de dos partes bien diferenciadas: una primera en la que se presentan algunos resultados básicos de la teoría clásica de rotaciones y se analiza en detalle el concepto clásico de suma de rotaciones y sus implicaciones en el análisis estructural; y una segunda, original y más amplia, en la que partiendo del concepto de espacio paramétrico, se precisan una serie de ideas vagamente formuladas en otros textos y artículos, al tiempo que se demuestra un conjunto de propiedades nuevas.

Entre los conceptos fundamentales que se definen con claridad en este trabajo, cabe citar, en primer lugar, las nociones de espacio paramétrico  $E^N$  y de configuración  $\mathcal{E}$ , juntamente con los tensores  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$ , que se han denominado tensores fundamentales del espacio  $\mathcal{E}$ ; también el concepto de composición paramétrica y su relación con la composición semitangencial de Argyris, que se ha generalizado, y la derivada objetiva de Simó, fácil de entender desde la noción de espacio paramétrico.

Se han calculado además las derivadas de primero y segundo orden de los tensores fundamentales y deducido una serie de propiedades nuevas que se utilizan más adelante al formular la teoría general de las vigas Cosserat; estos resultados se han aplicado al cálculo de la curvatura, velocidad y aceleración de un campo de rotaciones. Finalmente, se ha revisado el concepto de integración y deducido las condiciones que garantizan la integrabilidad de un campo de rotaciones en el plano y en el espacio.

Este enfoque nuevo de algunos aspectos importantes de la teoría de las rotaciones finitas ha mostrado con claridad que ésta sigue siendo una fuente inagotable de resultados de gran valor teórico-práctico, si bien, como hemos podido comprobar, los conceptos y herramientas que requiere un análisis de este tipo no son sencillos y su manejo diestro entraña con frecuencia no pocas dificultades. En un intento desesperado de obviar la complejidad inherente a las rotaciones finitas, de vez en cuando se proponen métodos prácticos para trabajar con ellas, sin excesivas complicaciones teóricas [S4, F1]; el resultado es un conjunto de artificios ingeniosos de corto alcance, que sólo son aplicables a un grupo restringido de casos particulares y no siempre alivian la tarea de cálculo.

**II. 16.– REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:**

- [A1] Altmann, S.L., *Rotations, Quaternions and Double Groups*, Clarendon Press, Oxford, U.K., (1986).
- [A2] Argyris, J.H., Dunne, P.C. & Scharpf, D.W., “On Large Displacement–Small Strain Analysis of Structures with Rotational Degrees of Freedom”, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, **14**, 401–451, (1978).
- [A3] Argyris, J.H., Dunne, P.C., Malejannakis, G. & Scharpf, D.W., “On Large Displacement–Small Strain Analysis of Structures with Rotational Degrees of Freedom”, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, **15**, 99–135, (1979).
- [A4] Argyris, J.H., “An Excursion into Large Rotations”, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, **32**, 85–155, (1982).
- [A5] Atluri, S.N. & Cazzani, A., “Rotations in Computational Solid Mechanics”, *Archives of Computational Methods in Engineering*, **2**, 49–138, (1995).
- [B1] Besseling, J.F., “Large Rotations in Problems of Structural Mechanics”, *Finite Element Methods for Nonlinear Problems*, ed. Bergan, Bathe & Wunderlich, Springer–Verlag, Berlin, (1986).
- [B2] Bottema, O. & Roth, B., *Theoretical Kinematics*, North–Holland, Amsterdam (1979). Reeditado por Dover, New York, (1990).
- [C1] Crisfield, M.A., *Non–Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Vol. 2, John Wiley & Sons, Chichester, (1997).
- [F1] Friberg, O., “A set of Parameters for Finite Rotations and Translation”. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, **66**, 163–171, (1988).
- [G1] Gérardin, M., Park K.C. & Cardona, A., *On the Representation of Finite Rotations in Spatial Kinematics*, Report No. VA–51, Dept. of Mech. Engrg., Univ. of Colorado, Boulder, Colorado, (1988).
- [G2] Gérardin, M. Robert G. & Buchet, P., “Kinematic and Dynamic Analysis of Mechanisms. A Finite Element Approach Based on Euler Parameters”, *Finite Element Methods for Nonlinear Problems*, ed. Bergan, Bathe & Wunderlich, Springer–Verlag, Berlin, (1986).
- [G3] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Addison–Wesley, Reading, MA. 2nd. ed., (1980). Traducido al español y publicado por Ed. Reverté, Barcelona, (1988).

- [K1] Kane, T.R., Likins, P.W. & Levinson, D.A., *Spacecraft Dynamics*, MacGraw–Hill, New–York, (1983).
- [K2] Kolmogórov, A.N. & Fomín, S.V., *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. Ed. Mir, Moscú, (1975).
- [L1] Levi–Civita, T., *The Absolute Differential Calculus*, Dover, New–York, (1977).
- [M1] Marsden, J.E. & Abraham, R., *Mathematical Foundations of Elasticity*, (Preliminaires) 2nd ed., Addison Wesley, (1987).
- [N1] Nikravesh, P.E. & Chung, I.S., “Application of Euler Parameters to the Dynamical Analysis of Mechanisms with Elastic Components”, ASME, *J. Mech. Design*, **104**, 785–791, (1982).
- [P1] Pars, L.A., *A Treatise on Analytical Dynamics*, Ch.7: The Theory of Rotations, Heinemann, London, 90–107, (1965).
- [S1] Shabana, A.A., *Dynamics of Multibody Systems*, John Wiley & Sons, New York, (1989).
- [S2] Simó, J.C., “The Symmetric Hessian for Geometrically Nonlinear Models in Solid Mechanics: Intrinsic Definition and Geometric Interpretation”. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, **96**, 189–200, (1992).
- [S3] Stuelpnagel, J., “On the Parametrization of the Three–Dimensional Rotation Group”. *SIAM Review*, **6**, nº 4, 422–430, (1964).
- [S4] Surana, K.S. & Sorem, R.M., “Geometrically Non–Linear Formulation for Three Dimensional Curved Beam Elements with Large Rotations”, *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, **28**, 43–73, (1989).
- [W1] Westenholz, C. von, *Differential Forms in Mathematical Physics*, 2<sup>nd</sup> ed., North–Holland. Amsterdam, (1986).
- [Z1] Ziegler, H., *Principles of Structural Stability*, 2nd ed., Birkhäuser Verlag, Basel, (1977).



## CAPÍTULO III

### **TEORÍA DE LAS VIGAS COSSERAT**

#### **III. 1.– INTRODUCCIÓN**

En este capítulo se desarrolla la teoría general de las vigas Cosserat de directriz curva y material Hookiano que experimentan grandes desplazamientos y giros en el espacio, analizando en detalle estos tres aspectos fundamentales: los conceptos de tensión y deformación, las relaciones constitutivas y las ecuaciones de equilibrio. Todo este estudio se lleva a cabo adoptando una formulación Lagrangiana Generalizada para referir los movimientos y calcular las deformaciones de la viga.

Aunque la teoría que se presenta a continuación sigue las líneas generales marcadas por Simó [S2, S3], presenta ciertas novedades que deseo subrayar. En primer lugar, generaliza los clásicos conceptos de esfuerzo y deformación adecuándolos al espacio paramétrico, y se formulan de nuevo las ecuaciones de equilibrio de una viga en este nuevo espacio. La importancia que esto tiene es vital si se desea desarrollar una teoría consistente de vigas en que la matriz de rigidez sea simétrica y no dé lugar a la serie de problemas y aparentes contradicciones de los modelos clásicos. Especial atención se dedica al planteamiento variacional del problema, deduciendo las ecuaciones de equilibrio estático y dinámico de la viga del principio de mínima acción de Hamilton; aunque esto no es novedad, sí lo es el plantear el problema en el espacio de configuración, como corresponde a un planteamiento analítico puro, y no en el espacio físico. También se establecen las condiciones necesarias y suficientes para que un campo de cargas exteriores sea conservativo, probando cómo la clásica condición de irrotacionalidad de las fuerzas no vale para los momentos convencionales, que deben cumplir condiciones especiales.

Por último, partiendo de la variación segunda del potencial se extrae la ecuación fundamental en que se apoya la formulación Tangente de vigas 3D, y se trata el caso singular de los sistemas hiperparamétricos.



### III. 2.– FORMULACIONES LAGRANGIANAS

En un sistema Lagrangiano los desplazamientos y deformaciones de un cuerpo se establecen con relación a una determinada configuración de referencia  $C_0$ . Variando el tipo de configuración se obtienen distintas formulaciones Lagrangianas, siendo las más importantes las formulaciones Lagrangianas Total (FLT), Actualizada (FLA) y Generalizada (FLG) [M1, C2]. En la formulación Lagrangiana Generalizada (FLG), la configuración de referencia es uno cualquiera de los estados geométricos que potencialmente se pueden alcanzar por deformación continua del sistema, sin importar si este estado es real o no. Por el contrario, en las formulaciones Lagrangianas Total y Actualizada las configuraciones de referencia corresponden a estados reales de deformación del sistema: en el primer caso se adopta como configuración de referencia  $C_0$  el estado de deformación en un instante dado  $t^0$ , que se toma como origen de tiempos y no tiene por qué coincidir con el instante  $t_0$  en el que se inicia la deformación de la viga –estado atensional del sistema–; mientras que en el segundo caso (FLA) el sistema referencial en cada instante  $t$  coincide con el estado de deformación en ese preciso momento, cambiando constantemente. Como es lógico, la formulación Generalizada incluye como casos particulares la Total y la Actualizada.

Aceptando la primera hipótesis de Navier–Bernoulli, esto es, que al deformarse una viga sus secciones transversales se mantienen planas, libres de alabeos y distorsiones, la geometría de la viga queda completamente determinada por la orientación de sus secciones transversales y la posición de su línea de baricentros o directriz  $C$  –recuérdese que éste es el principio geométrico que identifica una viga Cosserat–; en definitiva, si las rotaciones están parametrizadas, conociendo para cada punto  $Q$  de  $C$  las componentes de su vector de posición  $\mathbf{r}_Q$  y los  $s$  parámetros que definen el giro de su sección transversal u orientación de  $Q$  [S2]:

$$\{\mathbf{r}; \boldsymbol{\alpha}\}_Q = \{r_x, r_y, r_z; \alpha_1 \dots \alpha_s\}_Q \quad (\text{III.1})$$

Si se asigna a cada punto de la directriz  $C$  la distancia  $s$  medida sobre ella a uno de sus extremos, queda establecida una correspondencia biunívoca entre el segmento real  $[0, L]$  y los puntos de esta curva  $C$ . Adoptando una formulación Lagrangiana para

describir el movimiento de la viga, la posición  $\mathbf{r}_t(s)$  y el giro  $\mathbf{R}_t(s)$  de los puntos de  $C$  en un instante  $t$  vendrán determinados por los desplazamientos y rotaciones que se produzcan con relación a la configuración de referencia  $C_0: \{\mathbf{r}_0(s); \mathbf{R}_0(s)\}$ ; si éstos son  $\mathbf{u}(s)$  y  $\boldsymbol{\alpha}(s)$ , se tendrá, como muestra la figura III.1,

$$\{\mathbf{r}_t; \mathbf{R}_t\}(s) = \{\mathbf{r}_0 + \mathbf{u}; \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{R}_0\}(s) \quad (\text{III.2})$$

Como hemos señalado, la configuración de referencia  $C_0$ , puede ser real y corresponder a un verdadero estado de deformación de la viga –formulaciones (FLA) y (FLT)– o ideal. En cualquier caso, supondremos en lo sucesivo que  $\mathbf{u}(s)$  y  $\boldsymbol{\alpha}(s)$  son regulares, al menos de clase  $C^2$ .

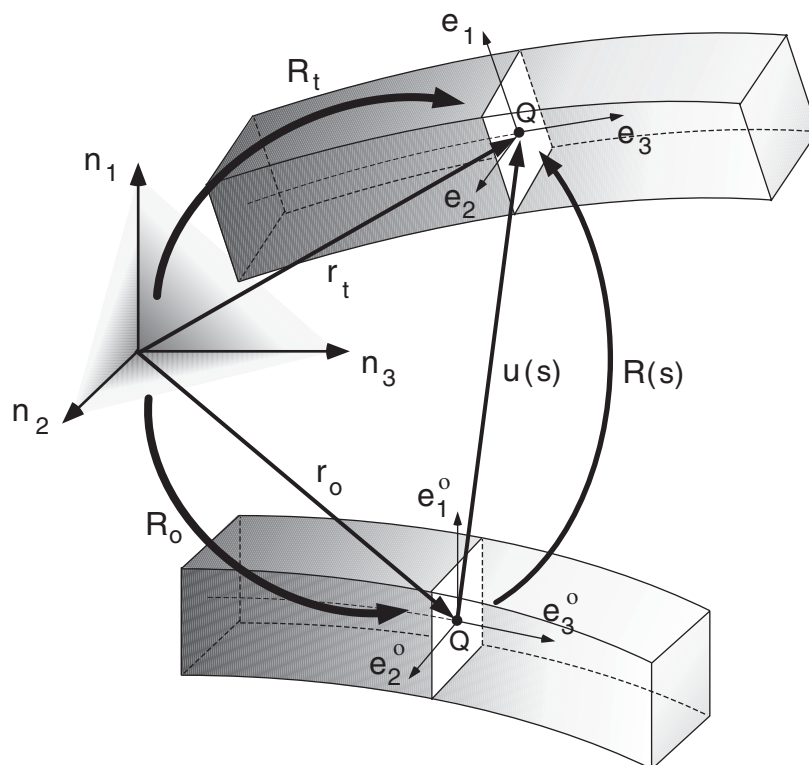


Figura III.1.

*Descripción Lagrangiana del movimiento espacial de una viga*

Por otra parte, los desplazamientos relativos  $\mathbf{u}$  y giros  $\boldsymbol{\alpha}$  hay que referirlos a alguna base de referencia. Tratándose de vigas Cosserat, ésta puede ser una base única y absoluta  $\mathbf{n}$  del espacio, o bien el conjunto de triedros móviles  $\mathbf{e}(s)$  asociados a cada punto de la directriz  $C$ . Además, admitiremos en cada punto  $Q$  de  $C$  que el triedro correspondiente  $\mathbf{e}(s_Q)$  tiene dos de sus vectores  $-\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$  orientados en las direcciones principales de la sección transversal que pasa por  $Q$ , y, por tanto, que gira con esta sección de forma solidaria. En definitiva el sistema referencial completo de una viga Cosserat lo componen la configuración de referencia  $C_0$  y el conjunto de bases asociadas  $\mathbf{e}(s)$  –móviles o locales– y  $\mathbf{n}$  –fija o global–.

Dependiendo de la formulación Lagrangiana que se adopte, el alcance de una teoría estructural será más o menos amplio, y su complejidad matemática mayor o menor. Como es natural, la formulación más sencilla y práctica es la Actualizada, y la más compleja pero también la más rica en posibilidades, la Generalizada. Importa, no obstante, advertir que cuando intervienen rotaciones finitas, las singularidades inherentes a los sistemas de baja parametrización limitan la amplitud de los giros en las formulaciones Generalizada y Total, y restringen su campo de aplicación si no se actualizan de vez en cuando.

Buscando la máxima generalidad y alcance, en lo sucesivo se adoptará una formulación Lagrangiana Generalizada para definir la geometría y los movimientos del sistema, y dos tipos de bases, una local  $\mathbf{e}$  y otra global  $\mathbf{n}$ , para referirlos.

### III. 3.– ESFUERZO Y DEFORMACIÓN GENERALIZADOS

En una viga Cosserat, la deformación viene definida por los desplazamientos y giros relativos ( $\boldsymbol{\gamma}$ ,  $\boldsymbol{\kappa}$ ) de los puntos de su directriz  $C$ . Éstos dependen a su vez de los movimientos de la propia curva  $C$ , esto es, de los desplazamientos y giros absolutos de sus puntos:  $\mathbf{q}(s) = \{\mathbf{u}(s), \boldsymbol{\alpha}(s)\}$ . En el capítulo II dedujimos los giros relativos de los triedros  $\mathbf{e}(s_Q)$  a lo largo de la directriz –curvaturas  $\boldsymbol{\kappa}$ –. Para calcular ahora el desplazamiento relativo  $\boldsymbol{\gamma}$ , bastará hallar las tangentes a  $C$  y referirlas a los propios triedros  $\mathbf{e}(s_Q)$ . Procediendo de este modo y suponiendo que en el sistema referencial el vector  $\mathbf{e}_3^0$  del triedro es tangente a  $C_0$  ( $\mathbf{e}_3^0 = \mathbf{r}_{0,s}$ ) o, dicho de forma más gráfica, que las secciones transversales son normales a  $C_0$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  valdrá [S2, I1]:

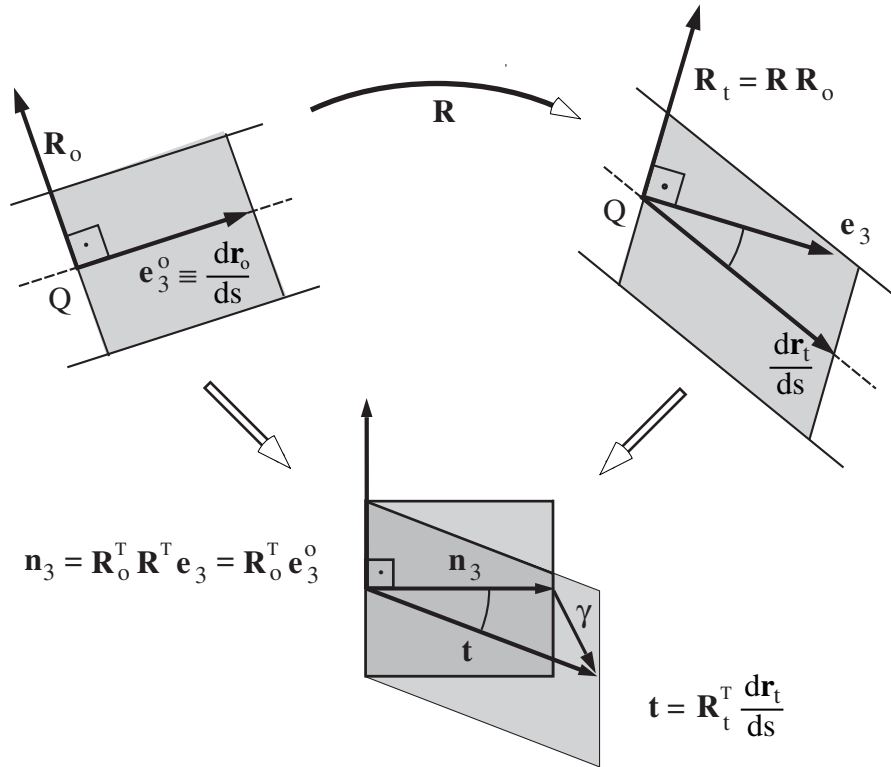


Figura III.2.

*Deformaciones longitudinal y transversal de un elemento de viga*

$$\boldsymbol{\gamma} := \mathbf{R}_t^T \mathbf{r}_{t,s} - \mathbf{R}_0^T \mathbf{e}_3^0 = \mathbf{t} - \mathbf{n}_3 \quad (\text{III.3})$$

y representa la variación *convectiva* o *corrotacional* del vector director  $\mathbf{r}_{t,s}$  tangente a la directriz de la viga –figura III.2–.

Teniendo en cuenta ahora que  $\mathbf{r}_t = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}$  y  $\mathbf{R}_t = \mathbf{R} \mathbf{R}_0$ , el vector tangente en Q a C, referido a la base local del propio punto Q, se puede escribir así:

$$\mathbf{t} = \mathbf{R}_0^T \mathbf{R}^T (\mathbf{e}_3^0 + \mathbf{u},_s) \quad (\text{III.4})$$

Llevando (III.4) a (III.3) y sustituyendo  $\mathbf{R}$  por las expresiones de la Tabla II.2, se obtienen las formas concretas del vector  $\boldsymbol{\gamma}$  en distintos sistemas de parametrización.

En definitiva, el vector de deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}_g$  viene definido por la siguiente pareja de vectores  $(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\gamma})$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_g := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{q}^\nabla) \\ \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{q}^\nabla) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_o^T [\mathbf{R}^T(\mathbf{e}_3^o + \mathbf{u}_{,s}) - \mathbf{e}_3^o] \\ \mathbf{R}_o^T \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\alpha}_{,s} \end{bmatrix} \quad (\text{III.5})$$

Estas componentes  $\boldsymbol{\gamma}$  y  $\boldsymbol{\kappa}$  dependen de los desplazamientos  $\mathbf{q}(s)$  de la viga a través de un *vector ampliado de derivadas*  $\mathbf{q}^\nabla(s)$ , que engloba las siguientes variables:

$$\mathbf{q} := \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \mathbf{q}^\nabla := \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{,s} \\ \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}_{,s} \end{bmatrix} \quad (\text{III.6})$$

Como, por otra parte, las diferenciales de  $\boldsymbol{\gamma}$  y  $\boldsymbol{\kappa}$  son:

$$d\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R}_t^T [d\mathbf{u}_{,s} + \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha}] \quad (\text{III.7.a})$$

$$d\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{R}_o^T [d\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\alpha}_{,s} + \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha}_{,s}] \quad (\text{III.7.b})$$

la diferencial del vector de deformación  $d\boldsymbol{\varepsilon}_g$  se puede expresar del siguiente modo en función de la diferencial del vector ampliado de derivadas  $d\mathbf{q}^\nabla(s)$ :

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_g = \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\gamma} \\ d\boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Pi}_o^T \mathbf{A}^T d\mathbf{q}^\nabla \quad \therefore \quad d\mathbf{q}^\nabla := \begin{bmatrix} d\mathbf{u}_{,s} \\ d\boldsymbol{\alpha} \\ d\boldsymbol{\alpha}_{,s} \end{bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

siendo:

$$\boldsymbol{\Pi}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_o & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_o \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G}^T(\boldsymbol{\alpha}) \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{R} & \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\alpha}_{,s}; \boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^{*T}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Denotando a los momentos flectores en las direcciones  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$  y al momento torsor:  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$ , respectivamente; y al esfuerzo axial y cortantes en las direcciones  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$ :  $N$ ,  $Q_1$  y  $Q_2$ , el momento y fuerza actuantes en una sección transversal, se

podrán escribir así:  $\mathbf{M}(s) = M_1 \mathbf{e}_1 + M_2 \mathbf{e}_2 + M_3 \mathbf{e}_3$  y  $\mathbf{Q}(s) = Q_1 \mathbf{e}_1 + Q_2 \mathbf{e}_2 + N \mathbf{e}_3$ ; y el trabajo diferencial que realizan al deformarse la viga valdrá:

$$\int_S \mathbf{Q}^T d\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{M}^T d\boldsymbol{\kappa} ds \quad (\text{III.10})$$

Normalmente,  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{M}$  se calculan integrando las tensiones repartidas sobre las secciones transversales. En una viga Cosserat, sin embargo, se admite la existencia a priori de un potencial elástico  $U$  en la viga y se definen  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{M}$  como cantidades energéticamente conjugadas de las componentes del vector de deformación. En este caso, agrupando los esfuerzos internos en un solo vector  $\boldsymbol{\sigma}_g^T(s) = \{\mathbf{Q}, \mathbf{M}\}$ , se tendrá:

$$dU = \int_S \boldsymbol{\sigma}_g^T(s) d\boldsymbol{\varepsilon}_g(s) ds \quad (\text{III.11})$$

Los vectores generalizados de tensión y deformación  $\boldsymbol{\sigma}_g$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}_g$  se pueden referir a las bases locales  $\mathbf{e}$  de cada sección o bien a la base absoluta  $\mathbf{n}$  del espacio; en el primer caso, se denotan  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , y en el segundo  $\boldsymbol{\sigma}_t$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ . Si giramos las bases locales  $\mathbf{e}$  juntamente con los vectores  $\boldsymbol{\sigma}_g$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}_g$  hasta hacer coincidir aquéllas con las bases  $\mathbf{e}^0$  de la configuración de referencia, las componentes absolutas de los vectores  $\boldsymbol{\sigma}_g$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}_g$ , transformados mediante esta operación *pull-back* [M2], se denotarán  $\boldsymbol{\sigma}_0$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ , dándose las siguientes relaciones entre los tres :

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\Pi}_0 \boldsymbol{\sigma} \quad \therefore \quad \boldsymbol{\sigma}_t = \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\sigma}_0 \quad \therefore \quad \boldsymbol{\sigma}_t = \boldsymbol{\Pi}_t \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{III.12})$$

con

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \boldsymbol{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{M}_0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \boldsymbol{\sigma}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_t \\ \mathbf{M}_t \end{bmatrix}$$

y

$$\boldsymbol{\Pi}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \\ & \mathbf{R}_0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \boldsymbol{\Pi} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \\ & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \boldsymbol{\Pi}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_t & \\ & \mathbf{R}_t \end{bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

Naturalmente, como  $\mathbf{R}_t = \mathbf{R}\mathbf{R}_0$ , se tiene también  $\boldsymbol{\Pi}_t = \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\Pi}_0$ .

Las mismas relaciones se dan entre las componentes  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  de los vectores de deformación; concretamente,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  viene dado por (III.5) y  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T(\mathbf{e}_3^o + \mathbf{u}_{, s}) - \mathbf{e}_3^o \\ \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}_{, s} \end{bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

Llevando ahora (III.8) a (III.11), el trabajo diferencial de deformación de la viga se podrá escribir así:

$$\int_S \boldsymbol{\sigma}_o^T(s) \mathbf{A}^T(s) d\mathbf{q}^\vee ds \quad (\text{III.15})$$

comprobando que, al igual que  $\boldsymbol{\sigma}_g$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}_g$  son dos vectores energéticamente conjugados en el espacio físico, los vectores  $\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}_o$  y  $\mathbf{q}^\vee$  lo son en el espacio paramétrico, y en un sentido mecánico amplio pueden considerarse una nueva pareja de deformaciones y esfuerzos generalizados.

### III. 4.– ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Aislando una rebanada de la viga, esto es, la parte comprendida entre dos planos o secciones transversales distanciadas una cantidad  $ds$ , la resultante de las fuerzas y momentos que actúan en las caras dorsal y frontal de esta rebanada valdrá:

$$d\mathbf{f}_{\text{int}} = \mathbf{Q}_t(s + ds) - \mathbf{Q}_t(s) \quad (\text{III.16.a})$$

$$d\mathbf{m}_{\text{int}} = \mathbf{M}_t(s + ds) - \mathbf{M}_t(s) + \tilde{\mathbf{r}}_{t, s}(s) ds \mathbf{Q}_t(s + ds) \quad (\text{III.16.b})$$

y los esfuerzos resultantes por unidad de longitud  $\mathbf{f}_{\text{int}}$  y  $\mathbf{m}_{\text{int}}$ :

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \mathbf{Q}_{t, s}(s) \quad (\text{III.17.a})$$

$$\mathbf{m}_{\text{int}} = \mathbf{M}_{t, s}(s) + \tilde{\mathbf{r}}_{t, s}(s) \mathbf{Q}_t(s) \quad (\text{III.17.b})$$

En (III.16) y (III.17) los esfuerzos y momentos están referidos a la base absoluta del espacio  $\mathbf{n}$ ; si vinieran referidos a las bases locales  $\mathbf{e}$ , las expresiones (III.16) habría que sustituirlas por otras, que se desprenden directamente de la figura III.3 –para facilitar la comprensión la viga se ha representado como un sólido– y son:

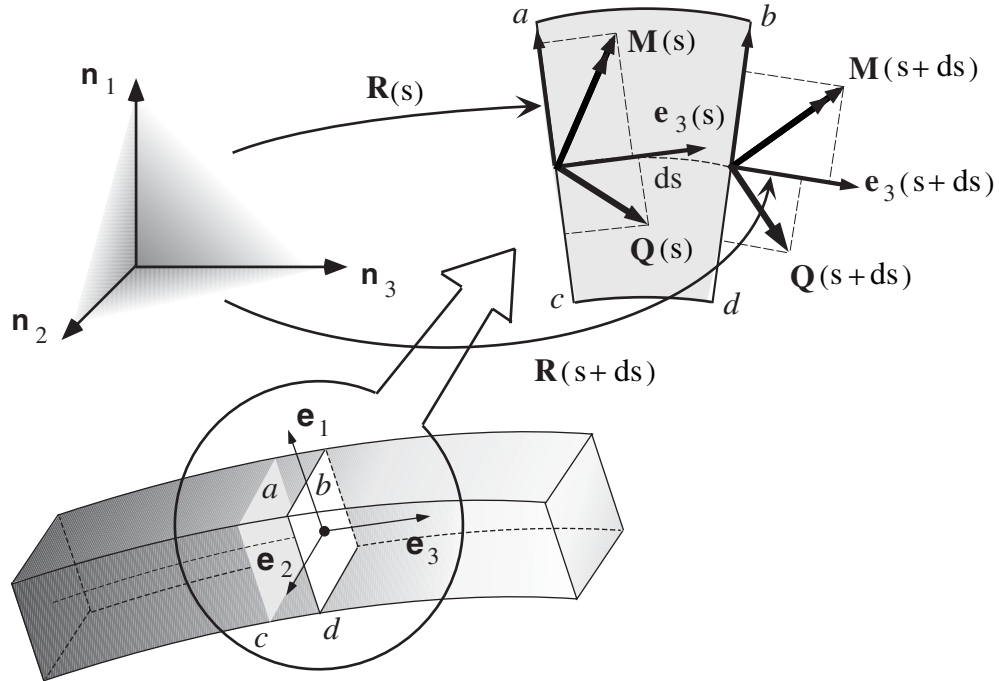


Figura III.3.

*Esfuerzos internos en las caras dorsal y frontal de un elemento diferencial de viga*

$$\mathbf{f}_{\text{int}} ds = \mathbf{R}_t(s+ds)\mathbf{Q}(s+ds) - \mathbf{R}_t(s)\mathbf{Q}(s) \quad (\text{III.18.a})$$

$$\mathbf{m}_{\text{int}} ds = \mathbf{R}_t(s+ds)\mathbf{M}(s+ds) - \mathbf{R}_t(s)\mathbf{M}(s) + \tilde{\mathbf{r}}_{t,s}(s)\mathbf{R}_t(s)\mathbf{Q}(s+ds) \quad (\text{III.18.b})$$

Como además se tiene:  $\mathbf{R}_t^T(s)\mathbf{R}_t(s+ds) = \mathbf{I} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* ds$  –apartado II.13.1–, y también  $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{R}_t^T \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{R}_t$ , los esfuerzos por unidad de longitud  $\mathbf{f}_{\text{int}}$  y  $\mathbf{m}_{\text{int}}$  quedan:

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \mathbf{R}_t(s)[\mathbf{Q}_{,s}(s) + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* \mathbf{Q}(s)] \quad (\text{III.19.a})$$

$$\mathbf{m}_{\text{int}} = \mathbf{R}_t(s)[\mathbf{M}_{,s}(s) + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^*(s)\mathbf{M}(s) + \tilde{\mathbf{t}}(s)\mathbf{Q}(s)] \quad (\text{III.19.b})$$



Estas mismas ecuaciones se puede expresar también en función de la curvatura  $\boldsymbol{\tau}_o^*$  del sistema referencial y las componentes  $\boldsymbol{\kappa}$  y  $\boldsymbol{\gamma}$  del vector deformación. En efecto, sustituyendo  $\boldsymbol{\tau}^*$  y  $\mathbf{t}$  por  $\boldsymbol{\tau}_o^* + \boldsymbol{\kappa}$  y  $\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{n}_3$ , los esfuerzos  $\mathbf{f}_{int}$  y  $\mathbf{m}_{int}$  se transforman en [S2, I1]:

$$\mathbf{f}_{int} = \mathbf{R}_t [ \mathbf{Q} ,_s + \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \mathbf{Q} + \mathbf{f}_o ] \quad (\text{III.20.a})$$

$$\mathbf{m}_{int} = \mathbf{R}_t [ \mathbf{M} ,_s + \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \mathbf{M} + (\tilde{\mathbf{n}}_3 + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}) \mathbf{Q} + \mathbf{m}_o ] \quad (\text{III.20.b})$$

con 
$$\mathbf{f}_o(s) = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_o^*(s) \mathbf{Q}(s) \quad \therefore \quad \mathbf{m}_o(s) = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_o^*(s) \mathbf{M}(s) \quad (\text{III.21})$$

Por último, considerando, de acuerdo con (III.15), que los esfuerzos internos  $\mathbf{f}_{int}$  y  $\mathbf{m}_{int}$  son cantidades conjugadas de los desplazamientos  $d\mathbf{u}$  y giros físicos  $d\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F} d\mathbf{q}$ , se podrán expresar también del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{int} \\ \mathbf{m}_{int} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_o \quad (\text{III.22})$$

La equivalencia entre ambas expresiones se prueba de inmediato. En efecto, en un sistema triparamétrico, al cumplirse (II.79.a) se verifica también:

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \mathbf{Q}_o \\ \mathbf{T}^T \mathbf{M}_o - \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{R} \mathbf{Q}_o \\ \mathbf{G}^{*T} \mathbf{M}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_t \\ \mathbf{G}^T ,_s \mathbf{M}_t - \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{Q}_t \\ \mathbf{G}^T \mathbf{M}_t \end{bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

y aplicando el operador (III.22) a (III.23) se recupera de inmediato (III.17). El mismo resultado se obtiene en un sistema hiperparamétrico partiendo de (II.79.b).

Determinada así la resultante de los esfuerzos internos  $\mathbf{f}_{int}$  y  $\mathbf{m}_{int}$ , y conocidos la fuerza y el momento exteriores por unidad de longitud,  $\mathbf{f}_{ext}$  y  $\mathbf{m}_{ext}$ , que soporta la viga, las ecuaciones de equilibrio estático y dinámico se obtienen inmediatamente.

En efecto, siendo  $\mu$  la masa por unidad de área y de longitud  $s$  medida sobre la directriz  $C_o$  de un punto de la sección transversal  $A$  –densidad equivalente del punto–, la masa y el tensor de inercia de la viga por unidad de longitud  $s$  valdrán:

$$\rho = \int_A \mu \, dA \quad \therefore \quad \mathbf{I} = - \int_A \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}} \mu \, dA \quad (\text{III.24})$$

y aplicando el Principio de D'Alembert a una rebanada diferencial genérica del elemento, las ecuaciones generales del movimiento serán [S4, I2] :

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} - \mathbf{f}_{\text{int}} = \mathbf{0} \quad (\text{III.25.a})$$

$$\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{m}_{\text{ext}} - \mathbf{m}_{\text{int}} = \mathbf{0} \quad (\text{III.25.b})$$

donde  $\mathbf{p} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ . Nótese que  $\rho$  e  $\mathbf{I}$  no se han definido por unidad de longitud real de la viga, sino por unidad de longitud en el sistema referencial  $C_0$ ; de este modo, al deformarse la viga, aun cuando su densidad varíe, la cantidad  $\mu$  se mantiene constante al igual que las componentes del tensor de inercia  $\mathbf{I}$  en la base local  $\mathbf{e}$ . Denotando  $\mathbf{x}^*$  a las coordenadas locales del punto genérico  $\mathbf{x}$  de la sección A, estas componentes valen :

$$\mathbf{I}^* = - \int_A \tilde{\mathbf{x}}^* \tilde{\mathbf{x}}^* \mu \, dA \quad (\text{III.26})$$

El primer término en (III.25.b) es la derivada del momento angular, dado por (II.120), (II.121) o (II.123), dependiendo del sistema de referencia que se adopte (las bases de referencia de los momentos angulares  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}^*$  y  $\hat{\mathbf{p}}$  son las mismas que las de  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_0$  y  $\boldsymbol{\sigma}_t$ ):

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}_t \mathbf{p}^* = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \quad \therefore \quad \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{R}^T \mathbf{p} = \mathbf{I}_0 \mathbf{R}_0 \boldsymbol{\omega}^* \quad \therefore \quad \mathbf{p}^* = \mathbf{R}_t^T \mathbf{p} = \mathbf{I}^* \boldsymbol{\omega}^* \quad (\text{III.27})$$

Como además los tensores de inercia  $\mathbf{I}^*$  e  $\mathbf{I}_0 = \mathbf{R}_0 \mathbf{I}^* \mathbf{R}_0^T$  no dependen del tiempo, la derivada del momento angular  $\mathbf{p}$  vale:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}_t [ \mathbf{I}^* \dot{\boldsymbol{\omega}}^* + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^* \mathbf{I}^* \boldsymbol{\omega}^* ] \quad (\text{III.28})$$

o, si se prefiere,

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R} [ \dot{\hat{\mathbf{p}}} + \tilde{\mathbf{R}}_0 \boldsymbol{\omega}^* \hat{\mathbf{p}} ] \quad (\text{III.29})$$

Ahora bien, anulando la velocidad angular del sistema referencial  $\boldsymbol{\omega}_o^*$  en (II.122) se obtiene la velocidad angular local  $\boldsymbol{\omega}^*$  –nótese que la expresión (II.122) se habían deducido para el movimiento relativo suponiendo  $\boldsymbol{\omega}_o^* \neq \mathbf{0}$ –:

$$\boldsymbol{\omega}^* = \mathbf{R}_o^T \mathbf{G}^* \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (\text{III.30})$$

Cumpléndose por tanto:  $\mathbf{R}_o \boldsymbol{\omega}^* = \mathbf{G}^* \dot{\boldsymbol{\alpha}}$ , la derivada del momento angular queda:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R} \left[ \mathbf{I}_o \mathbf{G}^* \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{I}_o \mathbf{T}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \tilde{\mathbf{p}} \mathbf{G}^* \dot{\boldsymbol{\alpha}} \right] \quad (\text{III.31})$$

Llevando por último este resultado a (III.25.b), juntamente con (III.20) ó (III.22), y sustituyendo allí  $\boldsymbol{\kappa}$  y  $\boldsymbol{\gamma}$  por (III.5), se obtienen las ecuaciones paramétricas del movimiento de la viga en forma desarrollada.

### III. 5.– ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Halladas las relaciones de compatibilidad (III.5) y deducidas las ecuaciones de equilibrio dinámico (III.25), sólo resta determinar las ecuaciones constitutivas  $\boldsymbol{\sigma}_g(\boldsymbol{\varepsilon}_g)$  que relacionan las deformaciones y los esfuerzos internos de la viga para que ésta, mecánicamente, quede completamente definida, y dado un campo de cargas exteriores  $\mathbf{P}$ , puedan calcularse los movimientos o desplazamientos  $\mathbf{q}(t)$  que experimenta bajo la acción de dichas cargas.

En general, el funcional  $\boldsymbol{\sigma}_g(\boldsymbol{\varepsilon}_g)$  depende del comportamiento mecánico particular del material que compone la viga: elástico, plástico, viscoelástico... etc., teniéndose:

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{M}, \mathbf{Q}) \quad \therefore \quad \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{M}, \mathbf{Q}) \quad (\text{III.32})$$

En el caso particular de las vigas Cosserat, se supone que el material es hiperelástico, esto es, que existe una *función de densidad de energía elástica*  $\Psi$  por medio de la cual las tensiones y deformaciones generalizadas,  $\boldsymbol{\sigma}_g$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}_g$ , vienen relacionadas entre sí del siguiente modo:

$$\boldsymbol{\sigma}_g = \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}_g)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_g} \quad (\text{III.33})$$

La integral de esta función  $\Psi$ , extendida a toda la pieza, proporciona el potencial elástico interno  $U$  de la viga:

$$U := \int_s \Psi \, ds \quad (\text{III.34})$$

En una viga Cosserat en equilibrio estático bajo la acción de un conjunto de cargas exteriores  $\mathbf{P}$  –fuerzas o momentos–, el Principio de los Trabajos Virtuales adopta la forma general siguiente:

$$\delta U = \int_s \boldsymbol{\sigma}_g^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}_g \, ds = \int_s \mathbf{P}^T \delta \mathbf{a} \, ds = -\delta W \quad (\text{III.35})$$

siendo  $-\delta W$  la variación del trabajo exterior y  $\delta \mathbf{a}$  el vector de desplazamientos virtuales conjugado con el vector de cargas exteriores  $\mathbf{P}$ . Lógicamente, este vector depende de las variaciones  $\delta \mathbf{q}$  impuestas a las variables cinemáticas (III.1), estando ambos vectores relacionados por medio de una transformación puntual  $\Theta$ :

$$\delta \mathbf{a} = \Theta[\mathbf{q}] \delta \mathbf{q} \quad (\text{III.36})$$

En el análisis lineal de estructuras  $\delta \mathbf{a}$  se identifica generalmente con  $\delta \mathbf{q}$ , y  $\Theta$  coincide con la matriz unidad  $\mathbf{I}$ ; sin embargo, en el análisis no lineal, especialmente cuando juegan un papel importante las rotaciones finitas, esto no es así; en este caso, la matriz  $\Theta$  depende del propio vector  $\mathbf{q}$ , como se prueba más adelante. En cualquier caso, considerando conjuntamente (III.5–6), (III.33) y (III.35–36), siempre se tiene:

$$\int_s \delta \mathbf{q}^{\nu T} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}^\nu} \, ds = \int_s \delta \mathbf{q}^T \Theta^T \mathbf{P} \, ds \quad (\text{III.37})$$

En principio, el sistema de cargas  $\mathbf{P}$  no está condicionado por nada, sin embargo, en la práctica, los dos tipos de carga más interesantes son los siguientes:

1°) cargas que se aplican lenta y gradualmente –procesos cuasiestáticos–, del tipo:

$$\mathbf{P} = \lambda \bar{\mathbf{P}} \quad (\text{III.38})$$

siendo  $\lambda$  un parámetro de carga comprendido entre 0 y 1.

2°) cargas que derivan de un potencial –campos conservativos–.

En este último caso, si convenimos en denotar  $\Omega$  a la función de densidad de energía potencial del campo y  $W$  a la energía potencial total de éste, el trabajo de las fuerzas exteriores será:

$$\int_S \delta \mathbf{q}^T \boldsymbol{\Theta}^T \mathbf{P} \, ds = - \int_S \delta \Omega \, ds = - \delta W \quad (\text{III.39})$$

y definiendo la *Energía Potencial Total*  $\Phi$  del sistema como la suma de las energías elástica interna del sistema y potencial del campo de cargas exteriores, se tiene

$$\Phi = U + W = \int_S (\Psi + \Omega) \, ds \quad (\text{III.40})$$

con lo cual, el Principio de los Trabajos Virtuales (III.35) se transforma en:

$$\delta \Phi = 0 \quad (\text{III.41})$$

y el problema mecánico de hallar la posición de equilibrio –estable o inestable– del sistema se convierte así en un problema matemático: la búsqueda en el espacio de configuración  $\mathcal{E}$  de los puntos que hacen estacionario el funcional  $\Phi$ .

En los problemas dinámicos, además de la energía de deformación hay que considerar también la energía cinética  $E_c$  de la pieza, calculada en el apartado II.13.3. En este caso, la Lagrangiana del sistema es  $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = E_c - \Phi$  y el Principio de Mínima Acción restituye de nuevo las ecuaciones de equilibrio dinámico del sistema. Las ventajas de establecer las ecuaciones de equilibrio estático y dinámico utilizando técnicas variacionales son bien conocidas en análisis de estructuras [W1, R1, L1, C3]; sobre esta cuestión volveremos en los apartados III.7 y III.8, en los que deduciremos de nuevo las ecuaciones de equilibrio de la viga y desarrollaremos las expresiones (III.35) y (III.41) escribiéndolas de un modo más conveniente.

### III. 6.– SISTEMAS LINEALES

Un caso particular de ecuaciones constitutivas que merece un estudio aparte son las relaciones lineales; en ellas las tensiones y deformaciones generalizadas están ligadas por medio de una matriz constitutiva constante  $\mathbf{C}$  del siguiente modo:

$$\boldsymbol{\sigma}_g = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_g \quad \therefore \quad \boldsymbol{\varepsilon}_g = \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_g \quad (\text{III.42})$$

Concretamente, tratándose de una viga Cosserat, estas relaciones son:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (\text{III.43})$$

siendo  $\mathbf{C}_{ij}$  cuatro matrices cuadradas constantes de orden 3.

Como el material de la pieza además es hiperelástico, esto es, admite potencial, la matriz constitutiva  $\mathbf{C}$  es definida positiva y simétrica, y la función de densidad de energía elástica  $\Psi$  es una simple función cuadrática de las tensiones o deformaciones:

$$\Psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_g^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_g = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_g^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_g \quad (\text{III.44})$$

Al ser  $\mathbf{C}$  simétrica, la función  $\Psi$ , desarrollada, vale:

$$\Psi = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C}_{11} \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{C}_{22} \boldsymbol{\kappa} + 2 \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C}_{12} \boldsymbol{\kappa}] \quad (\text{III.45})$$

Si la pieza es prismática, haciendo coincidir la directriz de la viga con la línea de centros de esfuerzos cortantes, se consigue anular  $\mathbf{C}_{12}$ , y con ello simplificar aún más tanto las relaciones constitutivas como las expresiones de la función de densidad de energía  $\Psi(\mathbf{q}^\vee(\mathbf{q}))$  y de la energía elástica total de la viga  $U(\mathbf{q}^\vee(\mathbf{q}))$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} \quad (\text{III.46})$$

$$\Psi = \frac{1}{2} [ \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C}_{11} \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{C}_{22} \boldsymbol{\kappa} ] \quad (\text{III.47})$$

$$\begin{aligned} U(\mathbf{q}^\nabla(\mathbf{q})) &= \frac{1}{2} \int_s \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{u}, s)^T \mathbf{C}_{11} \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{u}, s) ds + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_s \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\alpha}, s)^T \mathbf{C}_{22} \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\alpha}, s) ds \end{aligned} \quad (\text{III.48})$$

Además, si la sección transversal es simétrica, con un cambio adecuado de ejes en la sección, se puede transformar  $\mathbf{C}$  en una matriz diagonal –si la sección no es simétrica, las direcciones principales de  $\mathbf{C}_{11}$  y  $\mathbf{C}_{22}$  no tienen por qué coincidir [R2, S1, S6] y la diagonalización sólo es posible si se introducen dos sistemas distintos de ejes coordenados, uno para los esfuerzos y otro para los momentos–.

De momento, supondremos que el material es lineal y que la función de densidad de energía elástica  $\Psi$  viene dada por (III.45); de este modo los resultados que se obtengan servirán para cualquier tipo de sección, sea o no simétrica. Más adelante, en el capítulo IV, se considerará la no linealidad del material y se harán las oportunas correcciones a la matriz de rigidez.

### III. 7.– PRINCIPIOS VARIACIONALES

Las ecuaciones de equilibrio estático y dinámico de un sistema deformable se pueden establecer directamente o deducir del Principio de los Trabajos Virtuales y del Principio de Mínima Acción. En este apartado, las vamos a deducir de esta segunda forma, siguiendo un esquema tradicional en Mecánica no lineal [N1, L1].

El trabajo virtual de deformación de una viga Cosserat viene dado por (III.10) y coincide con la variación de su energía elástica interna  $\delta U$ ; esto es

$$\delta U = \int_s \mathbf{Q}^T d\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{M}^T d\boldsymbol{\kappa} ds \quad (\text{III.49})$$

Ahora bien, la variación de la curvatura de flexotorsión  $\delta \boldsymbol{\kappa}$  viene dada a su vez por (II.111), y si se toma como configuración de referencia la deformada actual, por:

$$\delta \boldsymbol{\kappa} = \delta \boldsymbol{\theta}^*_{,s} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* \delta \boldsymbol{\theta}^* \quad (\text{III.50})$$

siendo  $\boldsymbol{\tau}^*$  la curvatura total de la viga, tal y como se definió en el apartado II.13.

Por otra parte, la expresión general de  $\delta \boldsymbol{\gamma}$ —no su forma paramétrica, que viene dada por (III.7.a)— se extrae directamente de (III.5)

$$\delta \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R}_0^T [ \delta \mathbf{R}^T (\mathbf{e}_3^0 + \mathbf{u}_{,s}) + \mathbf{R}^T \delta \mathbf{u}_{,s} ] \quad (\text{III.51})$$

y como,

$$\delta \mathbf{R}_t^T = \mathbf{R}_0^T \delta \mathbf{R}^T = -\mathbf{R}_t^T \delta \tilde{\boldsymbol{\theta}} = -\delta \tilde{\boldsymbol{\theta}}^* \mathbf{R}_t^T \quad (\text{III.52})$$

queda así:

$$\delta \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R}_t^T \delta \mathbf{u}_{,s} + \tilde{\boldsymbol{\tau}} \delta \boldsymbol{\theta}^* \quad (\text{III.53})$$

o, si se prefiere,

$$\delta \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R}_t^T [ \delta \mathbf{u}_{,s} + \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \delta \boldsymbol{\theta} ] \quad (\text{III.54})$$

De este modo, descomponiendo la variación de la energía elástica de deformación  $U$  en dos partes, una en la que sólo intervienen los momentos y otra en la que sólo intervienen los cortantes y el axil, se obtiene:

$$\delta U = \delta U_M + \delta U_Q \quad (\text{III.55})$$

$$\delta U_M = \int_s \mathbf{M}^T \delta \boldsymbol{\kappa} ds = \int_s \mathbf{M}^T [ \delta \boldsymbol{\theta}^*_{,s} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* \delta \boldsymbol{\theta}^* ] ds$$

$$\delta U_Q = \int_s \mathbf{Q}^T \delta \boldsymbol{\gamma} ds = \int_s \mathbf{Q}^T [ \mathbf{R}_t^T \delta \mathbf{u}_{,s} + \tilde{\boldsymbol{\tau}} \delta \boldsymbol{\theta}^* ] ds$$

Resolviendo por partes estas dos últimas integrales, se tiene:

$$\begin{aligned} \delta U_M &= [\mathbf{M}^T \delta \boldsymbol{\theta}^*]_0^L - \int_s [\mathbf{M}_{,s} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* \mathbf{M}]^T \delta \boldsymbol{\theta}^* ds = \\ &= [\mathbf{M}^T \delta \boldsymbol{\theta}^*]_0^L - \int_s [\mathbf{M}_{,s} + (\tilde{\boldsymbol{\tau}}_0^* + \tilde{\boldsymbol{\kappa}}) \mathbf{M}]^T \delta \boldsymbol{\theta}^* ds \end{aligned} \quad (\text{III.56})$$



$$y \quad \delta U_Q = [\mathbf{Q}^T \mathbf{R}_t^T \delta \mathbf{u}]_0^L - \int_S [\mathbf{R}_t \mathbf{Q}]^T, s \delta \mathbf{u} + [\tilde{\mathbf{t}} \mathbf{Q}]^T \delta \boldsymbol{\theta}^* ds \quad (\text{III.57})$$

(recuérdese que  $\boldsymbol{\tau}_0^*$  es la curvatura inicial de la viga en el sistema referencial y  $\boldsymbol{\kappa}$  el incremento de curvatura o curvatura de flexotorsión).

Y sumando ahora  $\delta U_M$  y  $\delta U_Q$ , se obtiene la variación total de U,

$$\begin{aligned} \delta U = & [\mathbf{M}^T \delta \boldsymbol{\theta}^* + \mathbf{Q}^T \mathbf{R}_t^T \delta \mathbf{u}]_0^L - \\ & - \int_S [\mathbf{R}_t \mathbf{Q}]^T, s \delta \mathbf{u} + [\mathbf{M}, s + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* \mathbf{M} + \tilde{\mathbf{t}} \mathbf{Q}]^T \delta \boldsymbol{\theta}^* ds \end{aligned} \quad (\text{III.58})$$

o bien, refiriendo las rotaciones al sistema absoluto:

$$\begin{aligned} \delta U = & [(\mathbf{R}_t \mathbf{M})^T \delta \boldsymbol{\theta} + \mathbf{Q}^T \mathbf{R}_t^T \delta \mathbf{u}]_0^L - \\ & - \int_S [\mathbf{R}_t \mathbf{Q}]^T, s \delta \mathbf{u} + [\mathbf{R}_t (\mathbf{M}, s + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* \mathbf{M} + \tilde{\mathbf{t}} \mathbf{Q})]^T \delta \boldsymbol{\theta} ds \end{aligned} \quad (\text{III.59})$$

Por otra parte, el trabajo de las cargas exteriores al introducir los desplazamientos virtuales  $\delta \mathbf{u}$  y  $\delta \boldsymbol{\theta}$  vale:

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{P}^T \delta \mathbf{v} ds = & [\mathbf{M}_{\text{ext}}^T \delta \boldsymbol{\theta} + \mathbf{F}_{\text{ext}}^T \delta \mathbf{u}]_0^L - \\ & - \int_S [\mathbf{m}_{\text{ext}}^T \delta \boldsymbol{\theta} + \mathbf{f}_{\text{ext}}^T \delta \mathbf{u}] ds \end{aligned} \quad (\text{III.60})$$

(nótese que tanto los desplazamientos virtuales, como los momentos aplicados en los extremos de la viga  $\mathbf{M}_{\text{ext}}$  y los repartidos a lo largo de ella  $\mathbf{m}_{\text{ext}}$ , están todos ellos referidos al sistema absoluto del espacio  $\mathbf{n}$ ).

Llevando finalmente (III.59) y (III.60) a (III.41), se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 = & [[\mathbf{R}_t \mathbf{M} - \mathbf{M}_{\text{ext}}]^T \delta \boldsymbol{\theta} + [\mathbf{R}_t \mathbf{Q} - \mathbf{F}_{\text{ext}}]^T \delta \mathbf{u}]_0^L - \\ & - \int_S [[\mathbf{R}_t \mathbf{Q}], s + \mathbf{f}_{\text{ext}}]^T \delta \mathbf{u} ds + \\ & - \int_S [\mathbf{R}_t [\mathbf{M}, s + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* \mathbf{M} + \tilde{\mathbf{t}} \mathbf{Q}] + \mathbf{m}_{\text{ext}}]^T \delta \boldsymbol{\theta} ds \end{aligned} \quad (\text{III.61})$$

Para que esta ecuación se verifique con independencia de  $\delta \mathbf{u}$  y  $\delta \boldsymbol{\theta}^*$ , tienen que cumplirse necesariamente las siguientes condiciones en el dominio interior de la viga  $S$  ( $0 < s < L$ ): y en los extremos ( $s = 0$  y  $s = L$ ):

$$\delta \mathbf{u}: \begin{cases} \mathcal{F} := [\mathbf{R}_t \mathbf{Q}]_{,s} + \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0} & \text{en } S \\ \mathbf{R}_t \mathbf{Q} = \mathbf{F}_{\text{ext}} & \text{en } s = 0 \text{ y } s = L \end{cases} \quad (\text{III.62.a})$$

$$\delta \boldsymbol{\theta}: \begin{cases} \mathcal{M} := \mathbf{R}_t [\mathbf{M}_{,s} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* \mathbf{M} + \tilde{\mathbf{t}} \mathbf{Q}] + \mathbf{m}_{\text{ext}} = \mathbf{0} & \text{en } S \\ \mathbf{R}_t \mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{ext}} & \text{en } s = 0 \text{ y } s = L \end{cases} \quad (\text{III.62.b})$$

( $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{M}$  son la fuerza y momento residuales conjugados de  $\delta \mathbf{u}$  y  $\delta \boldsymbol{\theta}$ ).

Éstas son las *ecuaciones de Euler–Lagrange* del problema variacional estático (III.41) y son válidas cuando el sistema es conservativo [C1, C4, L2]. Coinciden con las ecuaciones de equilibrio estático (III.20) y (III.25) en el dominio interior  $S$  de la viga, y segregan en las secciones extremas las *condiciones naturales* que relacionan la carga exterior con los esfuerzos internos.

En los problemas dinámicos, las ecuaciones de equilibrio de la viga se deducen del principio de mínima acción de Hamilton [L1, L2]. En este caso, supuesta  $\mathcal{L} = E_c - \Phi$  la Lagrangiana del sistema, la integral de la acción es:

$$\mathcal{I} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} \, dt \quad (\text{III.63})$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que la energía cinética de la viga vale –se supone que la directriz coincide con la línea de centros de masa–:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_s \rho \dot{\mathbf{u}}^2 \, ds + \frac{1}{2} \int_s \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \, ds \quad (\text{III.64})$$

la variación de  $\mathcal{I}$  será:

$$\delta \mathcal{I} = \int_{t_0}^{t_1} \int_S \delta \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} + \mathcal{M} \delta \boldsymbol{\theta} + \delta \dot{\mathbf{u}}^T \rho \dot{\mathbf{u}} + \mathcal{F} \delta \mathbf{u} \, ds \, dt$$

y las correspondientes *ecuaciones de Euler-Lagrange* devuelven las ecuaciones generales del movimiento (III.25):

$$\frac{d}{dt} [\rho \dot{\mathbf{u}}] - \mathcal{F} = \mathbf{0} \quad \therefore \quad \frac{d}{dt} [\mathbf{I} \boldsymbol{\omega}] - \mathcal{M} = \mathbf{0}$$

Si además se tiene en cuenta que  $\frac{d}{dt} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \dot{\mathbf{I}} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}}$ , y que al ser  $\dot{\mathbf{I}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I} - \mathbf{I} \tilde{\boldsymbol{\omega}}$ , se cumple:

$$\dot{\mathbf{I}} \boldsymbol{\omega} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad (\text{III.65})$$

las ecuaciones de equilibrio (III.65) se pueden escribir de esta otra forma, más práctica, en el sistema de referencia absoluto [S4, S5]:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - \mathcal{F} = \mathbf{0} \quad (\text{III.66.a})$$

$$\mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} - \mathcal{M} = \mathbf{0} \quad (\text{III.66.b})$$

Si la pieza es rígida,  $\mathcal{M} = \mathbf{m}_{\text{ext}}$  y estas ecuaciones se transforman en las clásicas *ecuaciones de Euler* del movimiento de un sólido rígido [G2, L3].

Se pueden escribir también en el sistema de referencia móvil. En este caso, teniendo en cuenta que la derivada del momento angular  $\mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{R} \mathbf{I}_o^* \boldsymbol{\omega}^*$  vale  $\mathbf{R} [\tilde{\boldsymbol{\omega}}^* \mathbf{I}_o^* \boldsymbol{\omega}^* + \mathbf{I}_o^* \dot{\boldsymbol{\omega}}^*]$ , la segunda ecuación (III.66.b) queda así [S4, S5]:

$$\mathbf{I}_o^* \dot{\boldsymbol{\omega}}^* + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^* \mathbf{I}_o^* \boldsymbol{\omega}^* - \mathcal{M}^* = \mathbf{0} \quad (\text{III.67})$$

con  $\mathcal{M}^* = \mathbf{R}^T \mathcal{M}$ .

En un sistema conservativo, el potencial  $\Phi$  en una posición de equilibrio  $\mathbf{q}$  es estacionario:  $\delta \Phi = 0$ , y al pasar el sistema a una nueva posición de equilibrio  $\mathbf{q} + d\mathbf{q}$ , que cumple la condición  $\delta(\Phi + d\Phi) = 0$ , necesariamente se tiene  $\delta d\Phi = 0$ . En los sistemas discretos esta variación segunda puede escribirse así:  $\delta \mathbf{q}^T [d\mathbf{P} - \mathbf{K}_T d\mathbf{q}] = 0$ , siendo  $\mathbf{K}_T$  la matriz de rigidez tangente del sistema. Trabajando con vigas y rotaciones

finitas en el espacio físico, esta matriz de rigidez resulta asimétrica. Sin embargo, recupera su característica forma simétrica estableciendo el principio variacional sobre el espacio paramétrico, que es la tarea que abordamos seguidamente.

### III. 8.– PRINCIPIOS VARIACIONALES EN EL ESPACIO PARAMÉTRICO

Las ecuaciones de equilibrio estático y dinámico en forma paramétrica se pueden derivar de los mismos principios variacionales (III.35) y (III.41), sustituyendo las variaciones independientes  $d\theta$  de los giros por variaciones de los parámetros  $d\alpha$ ; dicho de otra forma, abandonando el espacio físico y trabajando directamente sobre el espacio paramétrico [C1, C4, C5, C6].

En efecto, recordando que la energía cinética de rotación en forma paramétrica viene dada por (II.124), anulando  $\omega_o$ , la Lagrangiana  $\mathcal{L} = E_c - \Phi$  vale:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_s \rho \dot{\mathbf{u}}^2 ds + \frac{1}{2} \int_s \dot{\alpha}^T [\mathbf{G}^{*T} \mathbf{I}_o \mathbf{G}^*] \dot{\alpha} ds - \int_s \Psi(\mathbf{q}^\vee) ds - W \quad (\text{III.68})$$

y por tanto,

$$\delta \mathcal{L} = \int_s \rho \dot{\mathbf{u}}^T \delta \dot{\mathbf{u}} ds + \int_s \dot{\alpha}^T [\mathbf{G}^{*T} \mathbf{I}_o \mathbf{G}^*] \delta \dot{\alpha} ds + \int_s \dot{\alpha}^T [\mathbf{G}^{*T} \mathbf{I}_o \delta \mathbf{G}^*] \dot{\alpha} ds - \int_s \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}^\vee} \delta \mathbf{q}^\vee ds - \delta W$$

Ahora bien, de acuerdo con (III.33) y (III.15),

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}^\vee} = \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_o \quad (\text{III.69})$$

Por otra parte, la primera integral en (III.68) se puede descomponer así:

$$\int_s \rho \dot{\mathbf{u}}^T \delta \dot{\mathbf{u}} ds = \frac{d}{dt} \left[ \int_s \rho \dot{\mathbf{u}}^T \delta \mathbf{u} ds \right] - \int_s \rho \ddot{\mathbf{u}}^T \delta \mathbf{u} ds$$

y la segunda y tercera integrales en (III.68), agrupadas, de este otro modo:

$$\int_s \dot{\boldsymbol{\alpha}}^T \mathbf{G}^{*T} \mathbf{I}_o [\delta \mathbf{G}^* \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{G}^* \delta \dot{\boldsymbol{\alpha}}] ds =$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_s \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{G}^* \delta \boldsymbol{\alpha} ds \right] + \int_s \hat{\mathbf{p}}^T \delta \mathbf{G}^* \dot{\boldsymbol{\alpha}} - (\dot{\hat{\mathbf{p}}}^T \mathbf{G}^* + \hat{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{G}}^*) \delta \boldsymbol{\alpha} ds$$

o mejor aún, introduciendo el operador  $\mathbf{S}$  que se definió en (II.67)

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_s \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{G}^* \delta \boldsymbol{\alpha} ds \right] + \int_s [\dot{\boldsymbol{\alpha}}^T \mathbf{S}^T(\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\alpha}) - \dot{\hat{\mathbf{p}}}^T \mathbf{G}^* - \dot{\boldsymbol{\alpha}}^T \mathbf{S}(\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\alpha})] \delta \boldsymbol{\alpha} ds \quad (\text{III.70})$$

La última integral se puede simplificar aún más con la ayuda de (III.28), ya que entonces  $\dot{\hat{\mathbf{p}}}^T \mathbf{G}^* = \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{R} \mathbf{G}^* - \dot{\boldsymbol{\alpha}}^T \mathbf{G}^{*T} \tilde{\mathbf{p}} \mathbf{G}^*$ , y en virtud de (II.32) y (II.71) se tiene

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}^T \mathbf{G}^* = \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{G} - \dot{\boldsymbol{\alpha}}^T [\mathbf{S}(\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{S}^T(\hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\alpha})]$$

con lo que (III.70) se reduce finalmente a:

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_s \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{G}^* \delta \boldsymbol{\alpha} ds \right] - \int_s \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{G} \delta \boldsymbol{\alpha} ds$$

En definitiva, la variación de la lagrangiana queda así:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{d}{dt} \left[ \int_s \rho \dot{\mathbf{u}}^T \delta \mathbf{u} ds \right] + \frac{d}{dt} \left[ \int_s \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{G}^* \delta \boldsymbol{\alpha} ds \right] -$$

$$- \int_s \rho \ddot{\mathbf{u}}^T \delta \mathbf{u} ds - \int_s \mathbf{p}^T \mathbf{G} \delta \boldsymbol{\alpha} ds - \int_s \boldsymbol{\sigma}_o^T \mathbf{A}^T \delta \mathbf{q}^v ds - \delta W \quad (\text{III.71})$$

La última integral corresponde a la variación de la energía elástica interna y se puede integrar por partes; en efecto, siendo  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{D}^-$  y  $\mathbf{J}$  los operadores siguientes:

$$\mathbf{D} := \begin{bmatrix} d/ds & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & d/ds \end{bmatrix} \quad \therefore \mathbf{D}^- := \begin{bmatrix} d/ds & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & d/ds \end{bmatrix} \quad \therefore \mathbf{J} := \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{III.72})$$

se tiene  $\delta \mathbf{q}^\vee = \mathbf{D} \delta \mathbf{q}$ , e integrando por partes esta integral, resulta

$$\int_S \boldsymbol{\sigma}_o^T \mathbf{A}^T \mathbf{D} \delta \mathbf{q} ds = \int_S \frac{d}{ds} [\boldsymbol{\sigma}_o^T \mathbf{A}^T \mathbf{J} \delta \mathbf{q}^T] ds - \int_S \delta \mathbf{q}^T \mathbf{D}^- [\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_o] ds \quad (\text{III.73})$$

Como, por otro lado,  $\boldsymbol{\sigma}_o^T \mathbf{A}^T \mathbf{J} \delta \mathbf{q}^T = \mathbf{Q}_t^T \delta \mathbf{u} + \mathbf{M}_t^T \mathbf{G} \delta \boldsymbol{\alpha}$ ,

$$-\delta W = [\mathbf{F}_{\text{ext}} \delta \mathbf{u} + \mathbf{M}_{\text{ext}} \mathbf{G} \delta \boldsymbol{\alpha}]_0^L + \int_S \mathbf{f}_{\text{ext}} \delta \mathbf{u} + \mathbf{m}_{\text{ext}} \mathbf{G} \delta \boldsymbol{\alpha} ds \quad (\text{III.74.a})$$

y también –(III.23)–,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^T \end{bmatrix} \mathbf{D}^- \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{int}} \\ \mathbf{m}_{\text{int}} \end{bmatrix} \quad (\text{III.74.b})$$

resulta:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \frac{d}{dt} \left[ \int_S \rho \dot{\mathbf{u}}^T \delta \mathbf{u} ds \right] + \frac{d}{dt} \left[ \int_S \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{G}^* \delta \boldsymbol{\alpha} ds \right] - \\ & - \left[ (\mathbf{Q}_t^T - \mathbf{F}_{\text{ext}}) \delta \mathbf{u} + (\mathbf{M}_t^T - \mathbf{M}_{\text{ext}}) \mathbf{G} \delta \boldsymbol{\alpha} \right]_0^L - \\ & - \int_S (\rho \ddot{\mathbf{u}}^T - \mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}}) \delta \mathbf{u} ds - \\ & - \int_S (\dot{\mathbf{p}}^T - \mathbf{m}_{\text{int}} - \mathbf{m}_{\text{ext}}) \mathbf{G} \delta \boldsymbol{\alpha} ds \end{aligned} \quad (\text{III.75})$$

Ahora bien, de acuerdo con el Principio de Hamilton, la integral (III.63) es mínima con relación a cualquier variación regular de las variables cinemáticas  $d\mathbf{q}$  que mantenga la configuración de la viga en los instantes  $t_0$  y  $t_1$ , y por tanto:

$$\begin{aligned} -\delta \mathcal{I} = & \int_{t_0}^{t_1} \left[ (\mathbf{Q}_t^T - \mathbf{F}_{\text{ext}}) \delta \mathbf{u} + (\mathbf{M}_t^T - \mathbf{M}_{\text{ext}}) \mathbf{G} \delta \boldsymbol{\alpha} \right]_0^L dt + \\ & \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \left[ (\rho \ddot{\mathbf{u}}^T - \mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}}) \delta \mathbf{u} + (\dot{\mathbf{p}}^T - \mathbf{m}_{\text{int}} - \mathbf{m}_{\text{ext}}) \mathbf{G} \delta \boldsymbol{\alpha} \right] ds = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.76})$$

Al ser  $d\mathbf{q}$  arbitrario, la condición anterior exige que se anulen por separado los cuatro paréntesis de las dos últimas integrales, cumpliéndose así las ecuaciones de

equilibrio (III.25) en el contorno y en el dominio interior de la viga. Queda, pues, probado que las ecuaciones dinámicas del movimiento de la viga se pueden obtener minimizando el funcional (III.63) en el espacio paramétrico con relación a las variables cinemáticas  $\mathbf{q}(s, t)$ , y también que estas ecuaciones dinámicas equivalen a la siguiente relación variacional, que debe cumplirse en todo instante:

$$\int_S \rho \ddot{\mathbf{u}}^T \delta \mathbf{u} ds + \int_S \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{G} \delta \boldsymbol{\alpha} ds + \int_S \boldsymbol{\sigma}_o^T \mathbf{A}^T \delta \mathbf{q}^\vee ds - \int_S (\mathbf{f}_{\text{ext}} \delta \mathbf{u} + \mathbf{m}_{\text{ext}} \mathbf{G} \delta \boldsymbol{\alpha}) ds - [\mathbf{F}_{\text{ext}} \delta \mathbf{u} + \mathbf{M}_{\text{ext}} \mathbf{G} \delta \boldsymbol{\alpha}]_0^L = 0 \quad (\text{III.77})$$

Dos situaciones particulares merecen especial atención: el estado estático puro y el dinámico en ausencia de cargas exteriores. En este último caso, (III.77) se reduce a

$$\int_S \rho \ddot{\mathbf{u}}^T \delta \mathbf{u} ds + \int_S \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{G} \delta \boldsymbol{\alpha} ds + \int_S \boldsymbol{\sigma}_o^T \mathbf{A}^T \delta \mathbf{q}^\vee ds = 0 \quad (\text{III.78})$$

e introduciendo las matrices de “masa” y “amortiguamiento” siguientes:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\alpha}) := \begin{bmatrix} \rho \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^{*T} \mathbf{I}_o \mathbf{G}^* \end{bmatrix} \quad (\text{III.79.a})$$

$$\mathbf{C}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\alpha}) := \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^{*T} \mathbf{I}_o \mathbf{T}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{G}^{*T} \tilde{\mathbf{p}} \mathbf{G}^* \end{bmatrix} \quad (\text{III.79.b})$$

y trasponiendo la ecuación (III.78), (III.77) se transforma en

$$\int_S \delta \mathbf{q}^T [\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}] + \delta \mathbf{q}^{\vee T} \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_o ds = 0 \quad (\text{III.80})$$

Por otro lado, en el caso estático puro se tiene simplemente:

$$\delta U + \delta W = \int_S \boldsymbol{\sigma}_o^T \mathbf{A}^T \delta \mathbf{q}^\vee ds - \int_S (\mathbf{f}_{\text{ext}} \delta \mathbf{u} + \mathbf{m}_{\text{ext}} \mathbf{G} \delta \boldsymbol{\alpha}) ds - [\mathbf{F}_{\text{ext}} \delta \mathbf{u} + \mathbf{M}_{\text{ext}} \mathbf{G} \delta \boldsymbol{\alpha}]_0^L = 0 \quad (\text{III.81})$$

### III. 9.– CAMPOS CONSERVATIVOS

En una viga, el trabajo virtual  $\delta W$  que realizan las cargas exteriores  $\mathbf{P}$  al aplicar unos desplazamientos virtuales dados  $\delta \mathbf{a}$ , depende de la posición que ocupe ésta en  $\mathcal{E}$ ; concretamente, al pasar el sistema de una posición  $\mathbf{q}$  a otra  $\mathbf{q} + d\mathbf{q}$ , este trabajo varía del siguiente modo:

$$-d\delta W = \int_S d\mathbf{P}_{\text{ext}}^T \delta \mathbf{a} ds = \int_S d\mathbf{F}_{\text{ext}}^T \delta \mathbf{u} + d\mathbf{M}_{\text{ext}}^T \delta \boldsymbol{\theta} ds \quad (\text{III.82})$$

y esta variación representa la diferencial segunda de un funcional o potencial  $W$  si y sólo si el campo de fuerzas  $\mathbf{P}$  es conservativo. En cualquier caso, sea o no conservativo  $\mathbf{P}$ , la integral (III.82) siempre tiene sentido, y si las cargas son funciones explícitas de  $\mathbf{q}$  del tipo  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q})$ , escribiendo  $d\mathbf{P} = \mathbf{X} d\mathbf{q}$ , se puede expresar  $d\delta W$  del siguiente modo:

$$d\delta W = - \int_S \delta \mathbf{q}^T \mathbf{X} d\mathbf{q} ds \quad (\text{III.83})$$

Seguidamente vamos a determinar qué condiciones debe cumplir un campo de cargas  $\mathbf{P}(\mathbf{q})$  para ser conservativo y qué forma presenta en tal caso la matriz  $\mathbf{X}$ .

La relación entre los desplazamientos  $d\mathbf{a} : \{d\mathbf{u}, d\boldsymbol{\theta}\}$  en el espacio físico y los desplazamientos  $d\mathbf{q} : \{d\mathbf{u}, d\boldsymbol{\alpha}\}$  en el espacio paramétrico viene dada por (III.36) ( $d\mathbf{a} = \boldsymbol{\Theta}[\mathbf{q}] d\mathbf{q}$ ); y en el caso concreto de una viga o elemento lineal toma la forma:

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ d\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ d\boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \quad (\text{III.84})$$

esto es, 
$$\mathbf{P}_{\text{ext}}^T d\mathbf{a} = \mathbf{P}_{\text{ext}}^T \boldsymbol{\Theta}[\mathbf{q}] d\mathbf{q} = \mathbf{F}_{\text{ext}}^T d\mathbf{u} + \mathbf{M}_{\text{ext}}^T \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} \quad (\text{III.85})$$

Diferenciando de nuevo esta relación, se obtiene  $\mathbf{X}$ :

$$- \delta dW = \delta \left[ \mathbf{P}_{\text{ext}}^T \boldsymbol{\Theta}[\mathbf{q}] \right] d\mathbf{q} = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{X}(\mathbf{P}_{\text{ext}}; \mathbf{q}) d\mathbf{q} \quad (\text{III.86})$$

Pues bien, la condición necesaria y suficiente para que el campo de cargas  $\mathbf{P}$  sea



conservativo es que la matriz  $\mathbf{X}$  sea simétrica:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^T \quad (\text{III.87})$$

Que esta condición es necesaria es evidente; que es suficiente se demuestra del siguiente modo: si se cumple (III.87), se cumple también esta otra igualdad:

$$d\delta W = \delta dW \quad (\text{III.88})$$

de modo que el trabajo del campo  $\mathbf{P}$  entre dos puntos cualesquiera no depende del camino recorrido, y tiene sentido, por ser uniforme, la siguiente función:

$$W(\mathbf{q}) = W(0) + \int_0^{\mathbf{q}} dW = W(0) - \int_0^{\mathbf{q}} \left[ \int_S \mathbf{P}_{\text{ext}}^T \boldsymbol{\Theta}[\mathbf{q}] ds \right] d\mathbf{q} \quad (\text{III.89})$$

Esta función representa el potencial del campo  $\mathbf{P}$  ya que  $\nabla_{\mathbf{q}} W = \mathbf{P}_{\text{ext}}^T \boldsymbol{\Theta}[\mathbf{q}]$ ; por otra parte, se tiene  $\mathbf{X} = \nabla_{\mathbf{q}} W \nabla_{\mathbf{q}}$ , que es la expresión de  $\mathbf{X}$  que deseábamos encontrar.

Por comodidad, en adelante se utilizará el operador diferencial *nabla* “ $\nabla$ ”, conviniendo en que sus productos a derecha e izquierda por un vector valgan [M1]:  $[\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{x}}][i, j] := \partial v^i / \partial x_j$  y  $[\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}][i, j] := \partial v^j / \partial x_i$ , y así, por ejemplo, se tenga,

$$\mathbf{v} \nabla_{\alpha} := \begin{bmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial v^1}{\partial \alpha_s} \\ \frac{\partial v^2}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial v^2}{\partial \alpha_s} \\ \frac{\partial v^3}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial v^3}{\partial \alpha_s} \\ \frac{\partial v^3}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial v^3}{\partial \alpha_s} \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \nabla_{\alpha} \mathbf{v} := \begin{bmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial v^2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial v^3}{\partial \alpha_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial v^1}{\partial \alpha_s} & \frac{\partial v^2}{\partial \alpha_s} & \frac{\partial v^3}{\partial \alpha_s} \\ \frac{\partial v^1}{\partial \alpha_s} & \frac{\partial v^2}{\partial \alpha_s} & \frac{\partial v^3}{\partial \alpha_s} \end{bmatrix}$$

Pues bien, como

$$\delta \mathbf{F}_{\text{ext}}^T = \delta \mathbf{u}^T \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{F}_{\text{ext}} + \delta \boldsymbol{\alpha}^T \nabla_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{F}_{\text{ext}}$$

$$\delta \mathbf{M}_{\text{ext}}^T = \delta \mathbf{u}^T \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{M}_{\text{ext}} + \delta \boldsymbol{\alpha}^T \nabla_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{M}_{\text{ext}}$$

y, por otra parte,

$$\delta dW = \delta \mathbf{F}_{\text{ext}}^T d\mathbf{u} + \delta [\mathbf{M}_{\text{ext}}^T \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})] d\boldsymbol{\alpha}$$

con

$$\delta [\mathbf{M}_{\text{ext}}^T \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})] = \delta \mathbf{M}_{\text{ext}}^T \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) + \delta \boldsymbol{\alpha}^T \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{M}_{\text{ext}}, \boldsymbol{\alpha})$$

la variación segunda  $\delta dW$  del trabajo exterior por unidad de longitud en la viga se puede escribir del siguiente modo:

$$\delta \mathbf{q}^T \mathbf{X} d\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \nabla_u \mathbf{F}_{\text{ext}} & \nabla_u \mathbf{M}_{\text{ext}} \mathbf{G} \\ \nabla_\alpha \mathbf{F}_{\text{ext}} & \nabla_\alpha \mathbf{M}_{\text{ext}} \mathbf{G} + \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{M}_{\text{ext}}, \boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ d\boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}$$

extrayéndose de aquí el valor de  $\mathbf{X}$ . Esta matriz es simétrica si y sólo si las fuerzas  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  y momentos  $\mathbf{M}_{\text{ext}}$  verifican simultáneamente las tres condiciones siguientes:

$$\text{I) } \quad \nabla_u \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{ext}} \nabla_u = \mathbf{0} \quad (\text{III.90})$$

$$\text{II) } \quad \nabla_\alpha \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{G}^T \mathbf{M}_{\text{ext}} \nabla_u \quad (\text{III.91})$$

$$\text{III) } \quad \nabla_\alpha \mathbf{M}_{\text{ext}} \mathbf{G} - \mathbf{G}^T \mathbf{M}_{\text{ext}} \nabla_\alpha = \hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{M}_{\text{ext}}, \boldsymbol{\alpha}) - \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{M}_{\text{ext}}, \boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{III.92})$$

Teniendo ahora en cuenta que  $d\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F} d\boldsymbol{\theta}$ , se puede definir en  $\mathcal{E}$  una nueva derivada, que denotaremos  $\nabla_\theta$ , del siguiente modo:

$$d\mathbf{M}_{\text{ext}}^T = d\boldsymbol{\alpha}^T \nabla_\alpha \mathbf{M}_{\text{ext}} = d\boldsymbol{\theta}^T \nabla_\theta \mathbf{M}_{\text{ext}}$$

esto es,

$$\nabla_\theta \mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{F}^T \nabla_\alpha \mathbf{M}_{\text{ext}}$$

Con esta derivada las dos condiciones (III.91) y (III.92) se pueden escribir así:

$$\text{II}_1) \quad \nabla_\theta \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{M}_{\text{ext}} \nabla_u \quad (\text{III.93})$$

$$\nabla_\theta \mathbf{M}_{\text{ext}} - \mathbf{M}_{\text{ext}} \nabla_\theta = \mathbf{F}^T [\hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{M}_{\text{ext}}, \boldsymbol{\alpha}) - \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{M}_{\text{ext}}, \boldsymbol{\alpha})] \mathbf{F}$$

y teniendo en cuenta que, por aplicación directa de (II.71.b), el segundo miembro de esta última relación es igual a  $\tilde{\mathbf{M}}_{\text{ext}}$ ,

$$\text{III}_1 ) \quad \nabla_{\theta} \mathbf{M}_{\text{ext}} - \mathbf{M}_{\text{ext}} \nabla_{\theta} = \tilde{\mathbf{M}}_{\text{ext}} \quad \therefore \quad \frac{\partial M_j}{\partial \theta_i} - \frac{\partial M_i}{\partial \theta_j} = \varepsilon_{ijk} M_k \quad (\text{III.94})$$

Esta última condición se ha establecido suponiendo que los momentos exteriores están referidos a la base fija del espacio  $\mathbf{n}$ . Si vinieran referidos a las bases locales  $\mathbf{e}$  y fueran éstos  $\mathbf{M}_{\text{ext}}^*$ , tendríamos  $\mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{R} \mathbf{M}_{\text{ext}}^*$ , con lo cual

$$\text{II}_2 ) \quad \nabla_{\theta} \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{R} \mathbf{M}_{\text{ext}}^* \nabla_u \quad (\text{III.95})$$

Por otra parte, 
$$d\mathbf{M}_{\text{ext}} = d\tilde{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{R} \mathbf{M}_{\text{ext}}^* + \mathbf{R} d\mathbf{M}_{\text{ext}}^*$$

y como  $d\tilde{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{R} \mathbf{M}_{\text{ext}}^* = -\overline{\mathbf{R} \mathbf{M}_{\text{ext}}^*} d\boldsymbol{\theta} = -\tilde{\mathbf{M}}_{\text{ext}}^* \mathbf{R}^T d\boldsymbol{\theta}$ , y además  $\nabla_{\alpha} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{G}^T$  y  $\nabla_{\theta} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{I}$ , la derivada material u objetiva de los momentos exteriores vendría dada por:

$$\nabla_{\alpha} \mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{G}^T \mathbf{R} \tilde{\mathbf{M}}_{\text{ext}}^* \mathbf{R}^T + \nabla_{\alpha} \mathbf{M}_{\text{ext}}^* \mathbf{R}^T \quad (\text{III.96})$$

o bien, por 
$$\nabla_{\theta} \mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{M}}_{\text{ext}}^* \mathbf{R}^T + \nabla_{\theta} \mathbf{M}_{\text{ext}}^* \mathbf{R}^T \quad (\text{III.97})$$

Llevando esta última a (III.94) y considerando que  $\tilde{\mathbf{M}}_{\text{ext}} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{M}}_{\text{ext}}^* \mathbf{R}^T$ , se obtiene la siguiente condición para las derivadas convectivas de los momentos exteriores:

$$\nabla_{\theta} \mathbf{M}_{\text{ext}}^* \mathbf{R}^T - \mathbf{R} \mathbf{M}_{\text{ext}}^* \nabla_{\theta} = -\mathbf{R} \tilde{\mathbf{M}}_{\text{ext}}^* \mathbf{R}^T$$

que equivale a esta otra:

$$\text{III}_2 ) \quad \mathbf{R}^T \nabla_{\theta} \mathbf{M}_{\text{ext}}^* - \mathbf{M}_{\text{ext}}^* \nabla_{\theta} \mathbf{R} = \tilde{\mathbf{M}}_{\text{ext}}^* \quad (\text{III.98})$$

Conviene notar que tanto la condición III<sub>1</sub> como la III<sub>2</sub> son condiciones que afectan directamente a los momentos exteriores  $\mathbf{M}_{\text{ext}}$  que actúan sobre la viga. En un plano más abstracto, suponiendo que  $\hat{\mathbf{M}}_{\text{ext}}$  son los momentos generalizados conjugados de las variaciones paramétricas  $d\boldsymbol{\alpha}$  –los momentos  $\mathbf{M}_{\text{ext}}$  son conjugados de los giros  $d\boldsymbol{\theta}$ –, las condiciones II y III se reducen en el espacio paramétrico a dos condiciones de irrotacionalidad. En efecto, por definición, los momentos generalizados

cumplen:  $\hat{\mathbf{M}}_{\text{ext}}^T d\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}_{\text{ext}}^T d\boldsymbol{\theta}$ , y valen:

$$\hat{\mathbf{M}}_{\text{ext}} := \mathbf{G}^T(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{M}_{\text{ext}} \quad (\text{III.99})$$

con lo que las condiciones para que este campo sea conservativo se reducen a [S2]:

$$\text{II}_3 ) \quad \nabla_{\alpha} \mathbf{F}_{\text{ext}} = \hat{\mathbf{M}}_{\text{ext}} \nabla_{\mathbf{u}} \quad (\text{III.100})$$

$$\text{III}_3 ) \quad \nabla_{\alpha} \hat{\mathbf{M}}_{\text{ext}} - \hat{\mathbf{M}}_{\text{ext}} \nabla_{\alpha} = \mathbf{0} \quad \therefore \quad \frac{\partial \hat{M}_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial \hat{M}_j}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (\text{III.101})$$

Estos resultados se resumen en el siguiente cuadro.

I)	$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{ext}} \nabla_{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$
II)	En el espacio paramétrico: $\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\alpha} \hat{\mathbf{M}}_{\text{ext}} - \hat{\mathbf{M}}_{\text{ext}} \nabla_{\alpha} = \mathbf{0} \\ \nabla_{\alpha} \mathbf{F}_{\text{ext}} = \hat{\mathbf{M}}_{\text{ext}} \nabla_{\mathbf{u}} \end{array} \right.$
III)	En el espacio físico: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Sistema de ref.} \\ \text{absoluto:} \\ \text{Sistema de ref.} \\ \text{local:} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\theta} \mathbf{M}_{\text{ext}} - \mathbf{M}_{\text{ext}} \nabla_{\theta} = -\tilde{\mathbf{M}}_{\text{ext}} \\ \nabla_{\theta} \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{M}_{\text{ext}} \nabla_{\mathbf{u}} \\ \mathbf{R}^T \nabla_{\theta} \mathbf{M}_{\text{ext}}^* - \mathbf{M}_{\text{ext}}^* \nabla_{\theta} \mathbf{R} = \tilde{\mathbf{M}}_{\text{ext}}^* \\ \nabla_{\theta} \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{R} \mathbf{M}_{\text{ext}}^* \nabla_{\mathbf{u}} \end{array} \right.$

Cuadro III.1.

*Condiciones para que un campo de cargas sea conservativo.*

En conclusión, el campo de cargas  $\mathbf{P}_{\text{ext}}$  es conservativo si y sólo si se cumplen simultáneamente las condiciones (III.90), (III.100) y (III.101) –o bien (III.90), (III.93) y (III.94), o también (III.90), (III.95) y (III.98)–. La primera impone al campo de fuerzas exteriores  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  la condición de irrotacionalidad. Esta condición se cumple con frecuencia; por ejemplo, todos los campos de fuerzas constantes o centrales son irrotacionales. La segunda condición relaciona las derivadas de las fuerzas y momentos. Si el campo de cargas no contienen momentos, esta condición se reduce a:

$$\nabla_{\alpha} \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (\text{III.102.a})$$

y entonces las fuerzas deben ser independientes de los giros para que el campo sea conservativo. Por el contrario, si las cargas consisten sólo en momentos, se tiene

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} \nabla_{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (\text{III.102.b})$$

y éstos deben ser independientes de los desplazamientos  $\mathbf{u}$  del campo. Sin embargo, si actúan simultáneamente fuerzas y momentos, entonces la condición no es tan simple y viene dada por (III.93). Un ejemplo sencillo de campo conservativo que incluye fuerzas y momentos es el siguiente: supongamos que a una viga soldamos un conjunto de barras rígidas que llevan incorporadas anillos deslizantes; unamos éstos mediante alambres muy finos a tensores, obligando a los alambres a pasar antes por una serie de poleas situadas en puntos fijos del espacio. Si los anillos no presentan rozamiento y se tensan, por ejemplo, con una carga constante, ésta se transmitirá perpendicularmente de los anillos a la barras, y a través de ellas a los puntos de encuentro con la viga, donde actuarán simultáneamente los esfuerzos de los alambres y los momentos que éstos producen. Pues bien, al deformarse la viga, los anillos deslizarán por las barras y los momentos y fuerzas actuantes en los puntos de unión entre la viga y las barras crearán en ésta un campo de cargas conservativo, que necesariamente cumple las condiciones (III.93) y (III.94).

La tercera condición (III.101) –(III.94) y (III.98)–, que afecta sólo a los momentos exteriores, es más compleja y difícil de satisfacer que la primera; de hecho no la cumplen ni el campo de momentos constantes,  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$ , ni el corrotacional,  $\mathbf{M} = M_0 \boldsymbol{\theta}$ , salvo en los problemas planos –vigas 2D–.

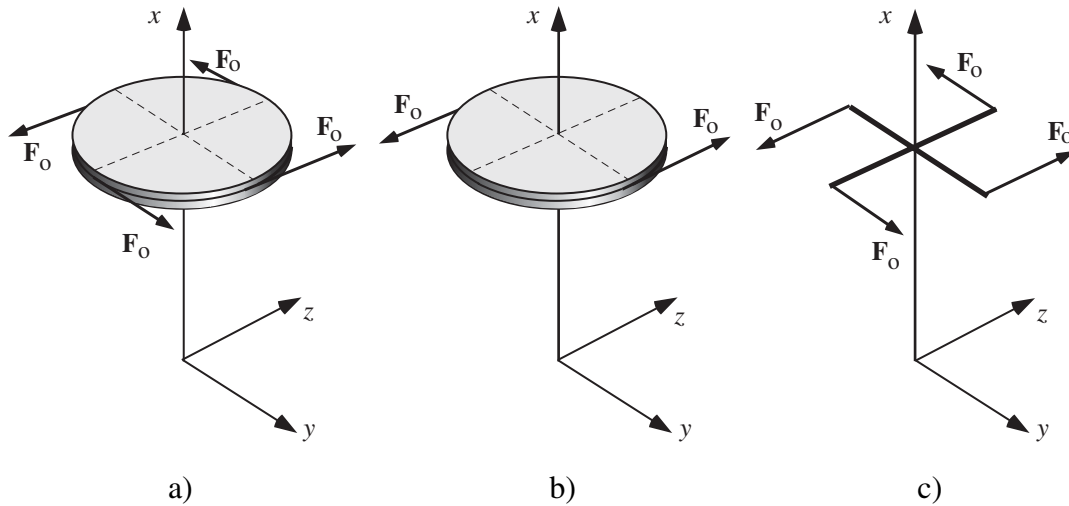


Figura III.4.

*Momentos: a) semitangenciales; b) cuasitangenciales; c) pseudotangenciales*

Entre los ejemplos sencillos de momentos que sí cumplen esta condición, Ziegler encontró tres tipos a los que denominó momentos semitangenciales, cuasitangenciales y pseudotangenciales [Z1]. En una viga recta sometida a torsión en uno de sus extremos, los dos primeros se generan tirando de una o dos parejas de hilos enrollados a un disco horizontal con fuerzas opuestas de valor constante en las direcciones de los ejes coordenados Y, Z –figuras III.4.a y b–. Los momentos semitangenciales se producen de forma análoga, tirando esta vez de los extremos de una cruceta de lados iguales. Los tres momentos son conservativos porque lo son también los campos de fuerzas que los generan. Comprobemos no obstante que verifican (III.94) y (III.101). Para los momentos cuasitangenciales  $\mathbf{M}_C$  y semitangenciales  $\mathbf{M}_S$  se tiene [Z1]:

$$\mathbf{M}_C = M [ 1, \theta_z, 0 ] \quad \therefore \quad \mathbf{M}_S = M \left[ 1, \frac{\theta_z}{2}, -\frac{\theta_y}{2} \right] \quad (\text{III.103})$$

siendo  $M$  un valor constante y  $[\theta_x, \theta_y, \theta_z]$  las componentes del giro  $\boldsymbol{\theta}$ , que se supone muy pequeño. En el instante en que se comienza a tirar de los alambres, el giro  $\boldsymbol{\theta}$  se anula y en ambos casos el momento inicial vale  $\mathbf{M} = M\mathbf{i}$ .

Llevando ahora (III.103) a (III.94), se comprueba inmediatamente que:

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{M}_C - \mathbf{M}_C \nabla_{\boldsymbol{\theta}} = M \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = M \tilde{\mathbf{i}} = \tilde{\mathbf{M}}_C \quad (\text{III.104})$$

(téngase en cuenta que para  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ ,  $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} = \nabla$ ). Al mismo resultado se llega con  $\mathbf{M}_S$ , quedando así probado que  $\mathbf{M}_C$  y  $\mathbf{M}_S$  son conservativos cuando los giros son pequeños.

Por otra parte, el valor en cada instante del momento pseudotangencial depende del giro que haya experimentado la cruceta. Si ésta inicialmente se encuentra situada en el plano ZY, como muestra la figura III.4.c, el momento pseudotangencial  $\mathbf{M}_p$  valdrá –trabajando por comodidad en el sistema paramétrico de Rodrigues–:

$$\mathbf{M}_p = \left[ \frac{1}{2} [\mathbf{I} + \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})] - 2\mu \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} \right] \mathbf{M}_o \quad (\text{III.105})$$

siendo  $\mathbf{M}_o$  el momento inicial aplicado antes de girar la cruceta y  $\mu$  la función escalar:

$$\mathbf{M}_o = M_o \mathbf{i} \quad \mu = \frac{1}{1 + \boldsymbol{\theta}^2} \quad (\text{III.106})$$

Para demostrar que  $\mathbf{M}_p$  es conservativo basta comprobar que se cumple (III.101), esto es, que la contribución  $\mathbf{X}_M$  del momento a la matriz  $\mathbf{X}$  es simétrica. En este caso la demostración es muy sencilla ya que

$$\mathbf{M}_p^T \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{M}_o^T \left[ \frac{1}{2} [\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\theta})] - 4\mu^2 \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} \right] = \mathbf{M}_o^T [2\mu \mathbf{I} - 4\mu^2 \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta}]$$

y por tanto, 
$$d[\mathbf{M}_p^T \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})] = d\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{X}_M \quad (\text{III.107})$$

siendo  $\mathbf{X}_M$  una matriz simétrica de componentes:

$$\mathbf{X}_{M_{ij}} = -4\mu^2 [\theta_i M_j + \theta_j M_i - M_k \theta_k (\delta_{ij} + 4 \theta_i \theta_j)] \quad (\text{III.108})$$

Por tanto, también los momentos pseudotangenciales son conservativos.

A diferencia de (III.103), la expresión de los momentos pseudotangenciales (III.105) es válida para cualquier giro  $\boldsymbol{\theta}$  de la cruceta, y por tanto el carácter conservativo de estos momentos no se limita a un pequeño entorno de la posición inicial u original de la viga como ocurría con los semitangenciales y cuasitangenciales, condicionados por las propias limitaciones del artificio mecánico que los genera, sino que se extiende a todo el espacio de configuración.

### III. 10.– PROCESOS CUASIESTÁTICOS CONSERVATIVOS

Como se indicó en el apartado III.5, la condición necesaria y suficiente para que un sistema conservativo se encuentre en equilibrio en una posición dada es que su potencial  $\Phi$  sea estacionario en ella. En consecuencia, si el proceso de carga es cuasiestático y las cargas y desplazamientos de la viga vienen dados por dos funciones:  $\mathbf{P}(\lambda)$  y  $\mathbf{q}(\lambda)$ , supuesto  $\lambda$  un parámetro de control, en las posiciones de equilibrio se cumple:  $\delta\Phi(\lambda) = 0$ , con independencia del valor  $\lambda$ ; y diferenciando esta ecuación con relación al parámetro, se tiene también:

$$d_\lambda \delta\Phi = d_\lambda \delta U + d_\lambda \delta W = 0 \quad (\text{III.109})$$

Si denotamos  $\mathbf{P}(\mathbf{q})$  al campo de cargas exteriores aplicadas y  $U(\mathbf{q}^\nabla)$  a la energía elástica interna del sistema, las variaciones segundas del trabajo exterior  $W$  producido por las cargas  $\mathbf{P}$  y de la energía elástica interna  $U$  se podrán expresar así:

$$d\delta U = \int_s d\mathbf{q}^{\nabla T} \mathbf{K}^N \delta\mathbf{q}^\nabla ds \quad \therefore \quad d\delta W = -\int_s \delta\mathbf{q}^T \mathbf{X} d\mathbf{q} ds \quad (\text{III.110})$$

siendo:

$$\mathbf{K}^N := \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{q}^\nabla \partial \mathbf{q}^\nabla} \quad \therefore \quad \mathbf{X} := \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{q}} \quad (\text{III.111})$$



dos matrices cuadradas, de las cuales la primera  $\mathbf{K}^N$  siempre es simétrica en el espacio paramétrico –como se indica al final del apartado III.7–, y la segunda  $\mathbf{X}$  si y sólo si el campo de cargas  $\mathbf{P}$  es conservativo.

Llevando (III.110) a (III.109) se llega finalmente a la ecuación:

$$\int_s d\mathbf{q}^{\nu T} \mathbf{K}^N \delta\mathbf{q}^\nu - \delta\mathbf{q}^T \mathbf{X} d\mathbf{q} ds = 0 \quad (\text{III.112})$$

Esta ecuación es la base de la formulación Tangente que exponemos en el próximo capítulo. Si el sistema es triparamétrico, de ella se obtiene directamente la relación diferencial entre los incrementos de la carga y los desplazamientos  $d\mathbf{P} = \mathbf{K}d\mathbf{q}$ , esto es, la matriz de rigidez tangente que requiere el método iterativo de Newton–Raphson; ahora bien, si es hiperparamétrico, entonces la obtención de  $\mathbf{K}$  no es directa y debe procederse de forma distinta, como se indica en el próximo apartado.

### III. 11.– LOS SISTEMAS HIPERPARAMÉTRICOS

Los sistemas de parametrización de rotaciones con un número de parámetros superior a tres, como el de Euler–Rodrigues, presentan un problema adicional derivado de las relaciones de interdependencia paramétrica que se dan en ellos (al ser sólo tres los parámetros independientes de una rotación, en estos sistemas se dan necesariamente una serie de relaciones de dependencia entre los parámetros rotacionales). estas relaciones deben ser tenidas en cuenta al minimizar la energía potencial total  $\Phi$  del sistema. No obstante, a pesar de su aparente complejidad, resulta sencillo adaptarles a estos sistemas los métodos variacionales expuestos en anteriores apartados [G1]. A continuación se indica el modo en que estas relaciones condicionan la variación del funcional  $\Phi$  y afectan al procedimiento general de minimización y a la estructura de la matriz de rigidez.

Supongamos que  $\alpha_j(s)$  ( $0 \leq s \leq L$ ) son los parámetros que definen las rotaciones de las secciones de la viga y

$$g_i(\alpha_j(s)) = 0 \quad i: 1, \dots, \underline{s} ; j: 1, \dots, \underline{s} + 3 , \quad (\text{III.113})$$

son las relaciones de dependencia entre los parámetros rotacionales.

El problema de minimizar el potencial total  $\Phi$  de una viga imponiendo a las variables  $\alpha_j(s)$  las condiciones de ligadura (III.113), es un simple problema de mínimos condicionados que puede resolverse aplicándole el clásico método de los multiplicadores de Lagrange. Éste presenta la ventaja de no destruir la simetría de la matriz de rigidez tangente cuando el sistema de ecuaciones se resuelve por el método de Newton-Raphson; como contrapartida, incrementa el número total de variables del problema, que pasa del valor normal  $6N$  a valer  $(6 + \underline{s})N$ , supuesto  $N$  el número total de nodos de la viga discretizada y  $\underline{s}$  el número relaciones de interdependencia paramétrica. De acuerdo con este método, minimizar el Potencial Total  $\Phi(\mathbf{q})$  de la viga con las condiciones (III.113) equivale a hallar el mínimo del funcional ampliado  $\Phi^* = \Phi - \int_s \lambda_i(s) g_i(\alpha_j(s)) ds$  sin ningún tipo de restricción. Los multiplicadores  $\lambda_i(s)$  entran a formar parte así del conjunto de variables independientes del nuevo funcional  $\Phi^*$ , teniéndose,

$$d\delta\Phi^* = d\delta U(\mathbf{q}^\vee(\mathbf{q})) + d\delta W(\mathbf{q}) - \int_s [d\lambda_i \delta g_i(\mathbf{q}(s)) - \delta\lambda_i dg_i(\mathbf{q}(s)) - \lambda_i d\delta g_i(\mathbf{q}(s))] ds \quad (\text{III.114})$$

para  $(i : 1, \dots, \underline{s})$  –se ha escrito  $g_i(\mathbf{q}(s))$  en vez de  $g_i(\alpha_j(s))$  para dar un sentido más general a la relación de dependencia; téngase en cuenta que  $\mathbf{q}(s) = \{\mathbf{u}(s), \boldsymbol{\alpha}(s)\}$ –.

Agrupando ahora las  $\underline{s}$  relaciones de dependencia paramétrica en un vector  $\mathbf{g}$ , y escribiendo:

$$d\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{D} d\mathbf{q} \quad \therefore \quad d\delta g_i(\mathbf{q}) = d\mathbf{q}^T \mathbf{E}_i \delta\mathbf{q} \quad (\text{III.115})$$

la condición  $d\delta\Phi^* = 0$  conduce a la siguiente ecuación –ténganse en cuenta (III.110)–:

$$0 = \int_s d\mathbf{q}^{\vee T} \mathbf{K}^N \delta\mathbf{q}^\vee ds - \int_s \delta\mathbf{q}^T \mathbf{X} d\mathbf{q} ds - \int_s [d\lambda^T \mathbf{D} \delta\mathbf{q} + \delta\lambda^T \mathbf{D} d\mathbf{q} + \lambda_i d\mathbf{q}^T \mathbf{E}_i \delta\mathbf{q}] ds \quad (\text{III.116})$$

que debe cumplirse para cualquier variación regular  $\delta\mathbf{q}(s)$  y  $\delta\lambda(s)$  de  $\mathbf{q}(s)$  y  $\lambda(s)$ .

Observando (III.116), se aprecia que la matriz de rigidez global del sistema cambia ligeramente su estructura, aumentando su dimensión pero conservando la simetría. La forma concreta que presentan las matrices  $\mathbf{E}_i$  y  $\mathbf{D}$  en un sistema hiperparamétrico como el de Euler–Rodrigues y los problemas específicos que genera la estructura particular de la matriz de rigidez se dejan para el próximo capítulo.

### III. 12.– RECAPITULACIÓN

Hemos presentado en este capítulo la teoría de vigas Cosserat de material Hookiano, geoméricamente no lineales, con capacidad para deformarse por flexión y cortante. Trabajando en paralelo sobre el espacio paramétrico y sobre el espacio físico, hemos calculado los esfuerzos y deformaciones conjugados de una viga, las ecuaciones de equilibrio y constitutivas; y a partir de éstas se ha determinado la función de densidad de energía elástica  $\Psi$  y la función potencial total  $\Phi$  del sistema, claves para desarrollar las formulaciones Secante y Tangente en próximos capítulos. Se han establecido además las condiciones para que un campo de momentos sea conservativo y hemos puesto de manifiesto las dificultades especiales que presentan los sistemas hiperparamétricos.

Nos encontramos así en condiciones de abordar el problema básico del análisis estructural, que consiste en hallar las posiciones de equilibrio de una estructura cargada –en nuestro caso concreto, de un sistema formado por vigas 3D– y determinar las condiciones en que este equilibrio es estable. Ambas cuestiones se abordan en los dos capítulos siguientes.

**III. 13.– REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- [C1] Cardona, A. & Géradin, M., “A Beam Finite Element Non Linear Theory with Finite Rotations”. *Int. J. Num. Meth. in Engng.*, **26**, 2403–2438, (1988); también en *Cuadernos de Matemática Aplicada*. **6**, 1–88, Santa Fe, Argentina, (1988).
- [C2] Cescotto, S., Frey, F. & Fonder, G., “Total and Up-dated Lagrangian Descriptions in Nonlinear Structural Analysis: a Unified Approach”, *Energy Methods in Finite Element Analysis*, Glowinsky–Rodin–Zienkiewicz (eds.) John Wiley, (1979).
- [C3] Courant, R. & Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I. Interscience Publishers division of John Wiley & Sons, New York, (1966).
- [C4] Crisfield, M.A., *Non–Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Vol. 2, John Wiley & Sons, Chichester, (1997).
- [C5] Crivelli, L.A., “A Total–Lagrangian Beam Element for Analysis of Nonlinear Space Structures”. *Ph. D. Dissertation*, Dept. of Aerospace Engineering Sciences. University of Colorado, Boulder, CO, (1990).
- [C6] Crivelli, L.A. & Felippa, C.A., “A Three–Dimensional Non–Linear Timoshenko Beam Based on the Core–Congruential Formulation”, *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, **36**, 3647–3673, (1993).
- [G1] Géradin, M., Robert, G. & Buchet, P., “Kinematic and Dynamic Analysis of Mechanisms. A Finite Element Approach Based on Euler Parameters”, *Finite Element Methods for Nonlinear Problems*, ed. Bergan, Bathe & Wunderlich, Springer–Verlag, Berlin, (1986).
- [G2] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Addison–Wesley, Reading, MA, Chap. 5, (1980).
- [I1] Ibrahimbegovic, A., “On FE Implementation of Geometrically Non–Linear Reissner Beam Theory: Three Dimensional Curved Beam Finite Elements”. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, **122**, 10–26, (1995).
- [I2] Ibrahimbegovic, A., & Al Mikdad M., “Finite Rotations in Dynamics of Beams and Implicit Time–Stepping Schemes”, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **41**, 781–814, (1998).
- [L1] Lanczos, C., *The Variational Principles of Mechanics*, Dover, New York, Chap.V, (1986).
- [L2] Landau, L.D. & Lifshitz, E.M., *Curso de Física Teórica. Vol. 1: Mecánica*, Ed. Reverté, 2ª ed., Barcelona, Cap. VI, (1978).

- [L3] Landau, L.D. & Lifshitz, E.M., *Curso de Física Teórica. Vol. 7: Teoría de la Elasticidad*, Ed. Reverté, 2ª ed., Barcelona, (1969).
- [M1] Malvern, L.E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey. Chap 4, (1969).
- [M2] Marsden, J.E., & Hughes, J.R., *Mathematical Foundations of Elasticity*, Dover, New York, (1994).
- [N1] Novozhilov, V.V., *Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity*, Graylock Press, Rochester, N. Y., Chap. VI, (1953).
- [R1] Reddy, J.N., *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, (1984).
- [R2] Romano, G., Rosati, L. and Ferro, G., “Shear Deformability of Thin-Walled Beams with Arbitrary Cross Sections”, *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, **35**, pp. 283-306, (1992).
- [S1] Senjanovic, I. and Fan, Y., “The Bending and Shear of Thin-Walled Girders”. *Thin-Walled Structures*, **10**, pp. 31- 57, (1990).
- [S2] Simó, J.C., “A Finite Strain Beam Formulation. The Three-Dimensional Dynamic Problem. Part I”, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, **49**, 55–70, (1985).
- [S3] Simó, J.C & Vu Quoc, L., “Three-Dimensional Finite Strain Rod Model. Part II: Computational Aspects”, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, **58**(1), 79–116, (1985).
- [S4] Simó, J.C. & Vu Quoc, L., “On the Dynamics of Flexible Beams under Large Overall Motions – the plane case: Part I”, *J. Appl. Mech.*, **53**(4), 849–854, (1986); también en Electronics Reserch Laboratory, Memorandum UCB/ERL M63, August, (1985).
- [S5] Simó, J.C. & Vu Quoc, L., “On the Dynamics in Space of Rods Undergoing Large Motions – A Geometrically Exact Approach”, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, **66**, 125–161, (1988).
- [S6] Simó, J.C. & Vu Quoc, L., “A Geometrically-Exact Rod Model Incorporating Shear and Torsion-Warping Deformation”, *Int. J. Solids. Structures*, **27**(3), 371–393, (1991).
- [W1] Washizu, K., *Variational methods in Elasticity and Plasticity*, 2nd ed., Pergamon Press, New York. Chap. 3 and 7, (1975).
- [Z1] Ziegler, H., *Principles of Structural Stability*, 2nd ed., Birkhäuser Verlag, Basel, (1977).

## CAPÍTULO IV

### **LA FORMULACIÓN TANGENTE DE VIGAS COSSERAT**

#### **IV. 1.– INTRODUCCIÓN**

En general, la relación entre las cargas y los desplazamientos de un sistema estructural es un funcional no lineal del tipo  $\Delta \mathbf{P} = f(\Delta \mathbf{q})$ , que se reduce a un conjunto discreto de funciones  $\Delta \mathbf{P}_k = f(\Delta \mathbf{q}_k)$  cuando las cargas se concentran en un número finito de nodos o se discretiza el sistema de algún modo –por ejemplo, empleando elementos finitos–. Si los incrementos de carga son pequeños, estas funciones se puede sustituir por las aproximaciones de primer orden  $\Delta \mathbf{P}_k = f' \Delta \mathbf{q}_k$ , que agrupadas conducen a la ecuación matricial  $\Delta \mathbf{P} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{q}$ , y el cálculo de los desplazamientos  $\Delta \mathbf{q}_k$  se reduce a resolver un simple sistema lineal de ecuaciones; sin embargo, si los incrementos de carga son importantes, esta aproximación no es suficiente y los desplazamientos tienen que hallarse utilizando técnicas iterativas basadas en sucesivas aproximaciones lineales –por lo general, variaciones del método de Newton-Raphson.

La formulación Tangente que desarrollamos en este capítulo tiene como principal objetivo el cálculo de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  que define la relación lineal  $\Delta \mathbf{P} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{q}$ . Este cálculo, que ocupa buena parte del capítulo, se lleva a cabo desde supuestos muy generales, independizándolo de cualquier sistema concreto de parametrización y partiendo de un sistema referencial Lagrangiano Generalizado. Al final del capítulo, los resultados obtenidos se particularizan para el sistema referencial actualizado y una serie muy concreta de sistemas de parametrización.

Reviste especial interés el estudio de las dos vías alternativas que pueden seguirse para establecer la relación incremental  $\Delta \mathbf{P} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{q}$ , probando que una de ellas es una generalización del método de Simó–Géradin, con matriz de rigidez *asimétrica*, y la otra un procedimiento enteramente distinto con matriz de rigidez *simétrica*. Se prueba en el primer caso que la relación  $\Delta \mathbf{P} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{q}$  puede formularse de dos formas distinta, pero equivalentes, cuando el tamaño de los elementos tiende a cero, y que la asimetría

se debe a la presencia de fuerzas residuales en el sistema no equilibrado. Se completa el capítulo con una serie de comentarios adicionales relacionados con la matriz de rigidez tangente.

#### IV. 2.– DISCRETIZACIÓN POR MEDIO DE ELEMENTOS FINITOS

Cuando se discretiza un viga con elementos finitos, ésta se divide en un conjunto de parcelas o segmentos de tamaño finito en cuyo interior los desplazamientos se aproximan partiendo de los valores que éstos toman en un pequeño grupo de puntos nodales. En principio, admitiremos que el desplazamiento  $\mathbf{q}$  de un punto genérico  $s$  de un elemento–viga se puede expresar como combinación lineal de los desplazamientos  $\mathbf{q}_k$  de sus nodos:

$$\mathbf{q}(s) = \boldsymbol{\Sigma}_k(s) \mathbf{q}_k \quad (\text{IV.1.a})$$

o bien,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} (s) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_k(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{B}_k(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}_k \quad (\text{IV.1.b})$$

donde  $k$  es un índice mudo que se extiende a todos los nodos del elemento y  $\mathcal{A}_k$ ,  $\mathcal{B}_k$  un conjunto de matrices de interpolación, diagonales y regulares, definidas sobre cada elemento. Conocido el campo de desplazamientos  $\mathbf{q}$  en el interior del elemento, el vector ampliado de derivadas  $\mathbf{q}^\nabla$  se obtiene directamente de (IV.1):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u},_s \\ \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha},_s \end{bmatrix} (s) = \boldsymbol{\Sigma}'_k(s) \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}_k \quad (\text{IV.2.a})$$

o bien, simbólicamente,

$$\mathbf{q}^\nabla(s) = \boldsymbol{\Sigma}'_k(s) \mathbf{q}_k \quad (\text{IV.2.b})$$

con,

$$\boldsymbol{\Sigma}'_k(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}'_k(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{B}_k(s) \\ \mathbf{0} & \mathcal{B}'_k(s) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.3})$$

donde  $\mathcal{A}'(s)$  y  $\mathcal{B}'(s)$  son las derivadas de  $\mathcal{A}(s)$  y  $\mathcal{B}(s)$ .

Interpolando los giros de los puntos nodales, el resultado que se obtiene en el interior de cada elemento depende del sistema de parametrización que se elija; además, no es lo mismo interpolar los giros físicos  $d\boldsymbol{\theta}$  que interpolar las variaciones paramétricas  $d\boldsymbol{\alpha}$  de una rotación [I1]; denotando, en el primer caso,  $d\mathbf{a}$  y  $d\mathbf{a}^\nabla$  a los vectores de desplazamientos y derivadas, y recordando (III.6), se tiene;

$$d\mathbf{a}^\nabla = \begin{bmatrix} d\mathbf{u},_s \\ d\boldsymbol{\theta} \\ d\boldsymbol{\theta},_s \end{bmatrix} \quad \therefore d\mathbf{a} = \begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ d\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \quad \therefore d\mathbf{a}_k = \begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ d\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}_k \quad (\text{IV.4.a})$$

$$d\mathbf{q}^\nabla = \begin{bmatrix} d\mathbf{u},_s \\ d\boldsymbol{\alpha} \\ d\boldsymbol{\alpha},_s \end{bmatrix} \quad \therefore d\mathbf{q} = \begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ d\boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \quad \therefore d\mathbf{q}_k = \begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ d\boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}_k \quad (\text{IV.4.b})$$

Es importante no confundir los vectores  $d\boldsymbol{\theta},_s$  y  $d(\boldsymbol{\theta},_s)$ . El primero representa la derivada espacial de un giro diferencial  $d\boldsymbol{\theta}$ , y su producto por  $ds$  equivale a la diferencial segunda  $d_s d\boldsymbol{\theta}$ ; mientras que el segundo vector es la diferencial de la derivada espacial  $\boldsymbol{\theta},_s$ , y su producto por  $ds$  equivale a  $dd_s \boldsymbol{\theta}$ , que no coincide con  $d_s d\boldsymbol{\theta}$  por no conmutar las diferenciales  $d$  y  $d_s$ , como se probó en el apartado II.11. Esto no ocurre, claro está, en el espacio paramétrico en el que las variaciones paramétricas  $d\boldsymbol{\alpha}$  sustituyen a los giros diferenciales  $d\boldsymbol{\theta}$ .

Interpolando ahora los cuatro vectores que figuran en (IV.4) se obtiene:

$$d\mathbf{a}^\nabla = \boldsymbol{\Sigma}'_k d\mathbf{a}_k \quad \therefore d\mathbf{a} = \boldsymbol{\Sigma}_k d\mathbf{a}_k \quad (\text{IV.5.a})$$

$$d\mathbf{q}^\nabla = \boldsymbol{\Sigma}'_k d\mathbf{q}_k \quad \therefore d\mathbf{q} = \boldsymbol{\Sigma}_k d\mathbf{q}_k \quad (\text{IV.5.b})$$

Ahora bien, los vectores  $d\mathbf{a}$  y  $d\mathbf{q}$  están relacionados entre sí por medio de (III.84), e igualmente lo están los vectores  $d\mathbf{a}^\nabla$  y  $d\mathbf{q}^\nabla$ , pudiendo escribirse, en general:

$$d\mathbf{a} = \boldsymbol{\Theta} d\mathbf{q} \quad \therefore d\mathbf{q} = \boldsymbol{\Theta}^{-1} d\mathbf{a} \quad (\text{IV.6})$$

$$d\mathbf{a}^\nabla = \boldsymbol{\Xi} d\mathbf{q}^\nabla \quad \therefore d\mathbf{q}^\nabla = \boldsymbol{\Xi}^{-1} d\mathbf{a}^\nabla \quad (\text{IV.7})$$



$$\text{con } \Xi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{,s}(\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\alpha}_{,s}) & \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \therefore \Xi^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{,s}(\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\alpha}_{,s}) & \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

En un sistema triparamétrico,  $\Theta$  y  $\Xi$  son operadores únicos, y  $\Theta^{-1}$  y  $\Xi^{-1}$  sus inversos (nótese que  $\Theta$  y  $\Theta^{-1}$  coinciden con las submatrices de orden 2 que se obtienen eliminando la última fila y columna en (IV.8)). Por el contrario, en un sistema hiperparamétrico  $\Theta$  y  $\Xi$  no son únicos por no serlo  $\mathbf{G}$ , como se indicó en el Apéndice III; además, estos operadores son matrices rectangulares y, por tanto, no invertibles. En este caso, lo único que puede afirmarse de  $\Theta^{-1}$  y  $\Xi^{-1}$  es que cumplen las relaciones:  $\Theta\Theta^{-1} = \mathbf{I}_{3+s}$  y  $\Xi\Xi^{-1} = \mathbf{I}_{3+2s}$ , aún cuando  $\Theta^{-1}\Theta \neq \mathbf{I}$  y  $\Xi^{-1}\Xi \neq \mathbf{I}$  (nótese que al ser  $\mathbf{GF} = \mathbf{I}$  se cumple necesariamente  $\mathbf{G}_{,s}\mathbf{F} + \mathbf{GF}_{,s} = \mathbf{0}$  y, por tanto, siempre se tiene:  $\Xi\Xi^{-1} = \mathbf{I}$  y  $\Theta\Theta^{-1} = \mathbf{I}$ ).

A los desplazamientos y gradientes  $d\mathbf{a}$ ,  $d\mathbf{q}$ ,  $d\mathbf{a}^\nabla$  y  $d\mathbf{q}^\nabla$  les corresponde un conjunto de fuerzas conjugadas  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P}_q$ ,  $\mathbf{P}^\nabla$  y  $\mathbf{P}_q^\nabla$ . En un sistema triparamétrico, las relaciones entre estas fuerzas, duales de (IV.6) y (IV.7), se deducen directamente de la expresión del trabajo interno de deformación y del trabajo exterior:

$$\begin{aligned} dW &= d\mathbf{q}^T \mathbf{P}_q = d\mathbf{a}^T \mathbf{P} \\ d\Psi &= d\mathbf{q}^{\nabla T} \mathbf{P}_q^\nabla = d\mathbf{a}^{\nabla T} \mathbf{P}^\nabla \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

En efecto, introduciendo en ellas (IV.6) y (IV.7) y eliminando  $d\mathbf{q}$ , resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_q &= \Theta^T \mathbf{P} \quad \therefore \quad \mathbf{P}_q^\nabla = \Xi^T \mathbf{P}^\nabla \\ \mathbf{P} &= \Theta^{-T} \mathbf{P}_q \quad \therefore \quad \mathbf{P}^\nabla = \Xi^{-T} \mathbf{P}_q^\nabla \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

Sin embargo, este razonamiento no es válido en un sistema hiperparamétrico, ya que en él las componentes del vector  $d\mathbf{q}$  no son todas independientes y no se pueden eliminar sin más de las ecuaciones (IV.9). No obstante, como  $\mathbf{P}_q^\nabla$  siempre viene dado por (III.69) –estando  $\mathbf{A}$  definida en (III.9) y  $\boldsymbol{\sigma}_o$  por (III.12)–, se tiene:

$$\mathbf{P}_q^\nabla = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\alpha}_s) & \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_t \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{Q}_t \\ \mathbf{M}_t \end{bmatrix}$$

Más adelante, se demostrará que el vector columna que figura al final de esta expresión es precisamente  $\mathbf{P}^\nabla$ . Partiendo de este resultado, la relación anterior prueba con carácter general, para cualquier sistema de parametrización, la siguiente relación:

$$\Xi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\alpha}_s) & \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.11})$$

(nótese que así como (IV.11) siempre es válida, la igualdad  $\mathbf{G}_s = \mathbf{R}\mathbf{T}$  sólo se da en los sistemas triparamétricos, como se demostró en el apartado II.11). Otro tanto podría afirmarse del operador  $\Theta$  en los sistemas hiperparamétricos.

### IV. 3.– ENERGÍA ELÁSTICA DEL SISTEMA DISCRETIZADO

Como se vio en el capítulo III, la densidad de energía elástica de deformación  $\Psi$  de un sistema hiperelástico lineal viene dada por (III.44), y el vector de deformación de una viga Cosserat  $\boldsymbol{\varepsilon}_g$  por (III.5). Este vector se puede expresar fácilmente en función de las variables  $\mathbf{q}^{\nabla T} = \{\mathbf{u}_s; \boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\alpha}_s\}$ ; en concreto,  $\boldsymbol{\gamma}$  se puede escribir así:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R}_o^T [\mathbf{R}^T \mathbf{u}_s + (\mathbf{R}^T - \mathbf{I}) \mathbf{r}_{o,s}]$$

e introduciendo el siguiente operador  $\mathbf{D}$

$$(\mathbf{R}^T - \mathbf{I}) \mathbf{v} := \mathbf{D}(\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{v}) \boldsymbol{\alpha} \quad (\text{IV.12})$$

de este otro modo:  $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R}_o^T [\mathbf{R}^T \mathbf{u}_s + \mathbf{D}(\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{r}_{o,s}) \boldsymbol{\alpha}]$

(nótese que  $\mathbf{D}$  es regular en el origen, ya que si  $\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{R} - \mathbf{I} \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\alpha}}$  y  $\mathbf{D} \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}$ )

En definitiva, el vector deformación de una viga 3D queda así:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_o^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_o^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T(\boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{D}(\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{r}_{o,s}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \mathbf{q}^\nabla \quad (\text{IV.13})$$

o bien, escrito en forma condensada:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_g(s) = \boldsymbol{\Pi}_o^T(s) \mathbf{B}^T(\mathbf{q}^\nabla; s) \mathbf{q}^\nabla(s) \quad (\text{IV.14})$$

De aquí se extraen los esfuerzos internos  $\boldsymbol{\sigma}(s)$  de la viga en el punto  $s$ :

$$\boldsymbol{\sigma}(s) = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_g(s) = \mathbf{C} \boldsymbol{\Pi}_o^T(s) \mathbf{B}^T(\mathbf{q}^\nabla; s) \mathbf{q}^\nabla(s) \quad (\text{IV.15})$$

Conocido  $\boldsymbol{\varepsilon}_g(s)$ , la energía elástica total  $U$  de la viga se calcula de inmediato integrando (III.44). El resultado final es:

$$U = \frac{1}{2} \int_s \mathbf{q}^{\nabla T} [\mathbf{B} \mathbf{C}_o \mathbf{B}^T] \mathbf{q}^\nabla ds \quad (\text{IV.16})$$

siendo

$$\mathbf{C}_o = \boldsymbol{\Pi}_o \mathbf{C} \boldsymbol{\Pi}_o^T \quad (\text{IV.17})$$

En (IV.16) hemos supuesto, implícitamente, que los esfuerzos internos  $\boldsymbol{\sigma}_r$  en la configuración de referencia  $C_{\text{ref}}$  son nulos; si no fueran nulos, éstos deben tenerse en cuenta en el cálculo de  $U$ , cuya expresión corregida queda entonces así:

$$U = \frac{1}{2} \int_s \mathbf{q}^{\nabla T} [\mathbf{B} \mathbf{C}_o \mathbf{B}^T] \mathbf{q}^\nabla ds + \int_s \boldsymbol{\sigma}_r^T \boldsymbol{\Pi}_o^T \mathbf{B}^T \mathbf{q}^\nabla ds \quad (\text{IV.18})$$

Como es lógico, los esfuerzos iniciales  $\boldsymbol{\sigma}_r$  vienen referidos a las bases locales móviles  $\mathbf{e}$  de las secciones transversales. Si se refirieran a la base global  $\mathbf{n}$  del espacio, se tendría:

$$\boldsymbol{\sigma}_{r0} = \boldsymbol{\Pi}_o \boldsymbol{\sigma}_r \quad (\text{IV.19})$$

$$y \quad U = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{q}^{\nabla T} [\mathbf{B} \mathbf{C}_o \mathbf{B}^T] \mathbf{q}^{\nabla} ds + \int_S \boldsymbol{\sigma}_{ro}^T \mathbf{B}^T \mathbf{q}^{\nabla} ds \quad (\text{IV.20})$$

Sustituyendo ahora (IV.5.b) en (IV.13), se obtiene el vector de deformación  $\boldsymbol{\epsilon}_g$  en función de los desplazamientos nodales  $\mathbf{q}_k$ .

$$\boldsymbol{\epsilon}_g(s) = \boldsymbol{\Pi}^T(s) \mathbf{B}^T(\mathbf{q}_k; s) \boldsymbol{\Sigma}'_k(s) \mathbf{q}_k \quad (\text{IV.21})$$

y la energía elástica de deformación U del sistema discretizado:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}_k^T \left[ \int_{S_k} \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \mathbf{B} \mathbf{C}_o \mathbf{B}^T \boldsymbol{\Sigma}'_k ds \right] \mathbf{q}_k + \left[ \int_{S_k} \boldsymbol{\sigma}_{ro}^T \mathbf{B}^T \boldsymbol{\Sigma}'_k ds \right] \mathbf{q}_k \quad (\text{IV.22})$$

(el índice k se extiende a todos los nodos del sistema; y  $S_k$  engloba a todos los elementos que tienen en común un mismo nodo k).

#### IV. 4.– FUERZAS NODALES

La variación primera de la energía elástica es:

$$dU = \int_S \boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\epsilon}_g ds = \int_S \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Pi}_o^T \mathbf{A}^T d\mathbf{q}^{\nabla} ds = \int_S \boldsymbol{\sigma}_o^T \mathbf{A}^T d\mathbf{q}^{\nabla} ds \quad (\text{IV.23})$$

y sustituyendo  $d\mathbf{q}^{\nabla}$  por (IV.5),

$$dU = \left[ \int_S \boldsymbol{\sigma}_o^T \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Sigma}'_k ds \right] d\mathbf{q}_k \quad (\text{IV.24})$$

$$\text{con} \quad \boldsymbol{\sigma}_o = \mathbf{C}_o \mathbf{B}^T \boldsymbol{\Sigma}'_k \mathbf{q}_k + \boldsymbol{\sigma}_{ro} \quad (\text{IV.25})$$

De (IV.23) y (IV.16) se extrae la siguiente relación entre los operadores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ :

$$d[\mathbf{B}^T(\mathbf{q}^{\nabla}) \mathbf{q}^{\nabla}] = d\mathbf{B}^T(\mathbf{q}^{\nabla}) \mathbf{q}^{\nabla} + \mathbf{B}^T(\mathbf{q}^{\nabla}) d\mathbf{q}^{\nabla} := \mathbf{A}^T d\mathbf{q}^{\nabla} \quad (\text{IV.26})$$

Por otra parte, el trabajo de las fuerzas exteriores en el sistema discretizado al producirse los desplazamientos  $d\mathbf{q}$ , vale – (III.89)–:

$$\int_S \mathbf{P}^T \boldsymbol{\Theta} d\mathbf{q} ds = \left[ \int_S \mathbf{P}^T \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\Sigma}_k ds \right] d\mathbf{q}_k \quad (\text{IV.27})$$

En consecuencia, las *fuerzas nodales reactivas* –internas– y *activas* –exteriores–, conjugadas de  $d\mathbf{q}_k$ , son:

$$\mathbf{P}_{qk}^i := -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_k} = -\int_{S_k} \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_o \\ \mathbf{M}_o \end{bmatrix} ds \quad (\text{IV.28})$$

$$\mathbf{P}_{qk}^e := -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}_k} = \int_{S_k} \boldsymbol{\Sigma}_k{}^T \boldsymbol{\Theta}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext}} \\ \mathbf{M}_{\text{ext}} \end{bmatrix} ds \quad (\text{IV.29})$$

La resultante de las fuerzas activas y reactivas nodales son las *fuerzas residuales*; denotando esta resultante  $\mathbf{R}_{qk}$  cuando las fuerzas son conjugadas de  $d\mathbf{q}$ , el sistema discretizado alcanza el equilibrio si y sólo si se cumple en cada nodo:

$$\mathbf{R}_{qk} := \mathbf{P}_{qk}^i + \mathbf{P}_{qk}^e = \mathbf{0} \quad (\text{IV.30})$$

( $\mathbf{R}_q$  y  $\mathbf{P}_q$  son vectores de  $3+s$  componentes por nodo).

Los vectores de fuerzas nodales activas y reactivas del espacio físico,  $\mathbf{P}_k^e$  y  $\mathbf{P}_k^i$ , son conjugados de los desplazamientos  $d\mathbf{a}$ , y por tanto distintos de los esfuerzos conjugados de las variables  $d\mathbf{q}$  en el espacio paramétrico:  $\mathbf{P}_{qk}^e$  y  $\mathbf{P}_{qk}^i$  (aunque esta diferencia sólo afecta a los momentos nodales). Dado que en este caso la interpolación se efectúa sobre las componentes del vector  $d\mathbf{a}$  y no del vector  $d\mathbf{q}$ , resulta:

$$\mathbf{P}_k^i := -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{a}_k} = -\int_{S_k} \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \boldsymbol{\Xi}^{-T} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_o \\ \mathbf{M}_o \end{bmatrix} ds \quad (\text{IV.31})$$

$$\mathbf{P}_k^e := -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{a}_k} = \int_{S_k} \boldsymbol{\Sigma}_k{}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext}} \\ \mathbf{M}_{\text{ext}} \end{bmatrix} ds \quad (\text{IV.32})$$

En este último caso, denotando  $\mathbf{R}$  a las fuerzas residuales, el sistema se encontrará en equilibrio cuando se cumpla en todos los nodos:

$$\mathbf{R}_k := \mathbf{P}_k^i + \mathbf{P}_k^e = \mathbf{0} \quad (\text{IV.33})$$

#### IV. 5.– LA FORMULACIÓN TANGENTE

La búsqueda de las posiciones de equilibrio es uno de los principales objetivos del análisis estructural. Si el sistema está formado por vigas 3D, hemos probado que las condiciones de equilibrio se reducen a satisfacer las ecuaciones (IV.30) y (IV.33). Como éstas no son lineales en  $\mathbf{q}$ , sólo se pueden resolver recurriendo a técnicas incrementales de aproximación. En general, estas técnicas se pueden clasificar en dos grupos: aquéllas que *minimizan la energía potencial total*  $\Phi$ , si el sistema es conservativo, y las que tratan simplemente de *eliminar o anular las fuerzas residuales*  $\mathbf{R}$  resultantes del desequilibrio.

Ambos métodos se basan en el conocimiento de la matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$  del sistema, esto es, de las relaciones incrementales de primer orden entre las fuerzas externas e internas y los desplazamientos en una posición  $\mathbf{q}$ . Ahora bien, la matriz tangente  $\mathbf{K}$  depende del método de aproximación elegido, resultando simétrica si se minimiza  $\Phi$ , y asimétrica cuando se intenta anular las fuerzas residuales  $\mathbf{R}$ . Esta diferencia se debe, como veremos, a que las variables independientes en ambos casos son distintas: en el primero coinciden con los incrementos  $\Delta\mathbf{q}$  del espacio paramétrico, y en el segundo con los incrementos  $\Delta\mathbf{a}$  del espacio físico. Es ésta una de las principales novedades que introducen las rotaciones finitas en el cálculo de estructuras; en el cálculo clásico de vigas, con pequeñas rotaciones, esta diferencia no se da, siendo equivalentes los métodos de minimización y equilibrio; sin embargo, con rotaciones finitas, la simetría o asimetría de  $\mathbf{K}$  depende de la técnica de aproximación que se siga, esto es, del espacio –paramétrico o físico– en el que se trabaje.

Seguidamente, se desarrollan por separado ambos métodos de aproximación, suponiendo para comenzar que el sistema de parametrización de las rotaciones es triparamétrico. Los sistemas hiperparamétricos se tratan aparte más adelante.

### I – Minimización de la energía potencial del sistema

Si el campo exterior de cargas aplicadas a una viga es conservativo, el sistema admite función potencial  $\Phi$  y ésta es estacionaria en las posiciones de equilibrio. Partiendo de este hecho, sea  $\mathbf{q}$  un punto próximo a una posición de equilibrio del sistema y  $\mathbf{R}_q$  el vector de fuerzas residuales –de desequilibrio– conjugadas de  $\delta\mathbf{q}$  en  $\mathbf{q}$ . Aplicando el Principio de los Trabajos Virtuales (PTV) a  $\mathbf{R}_q$ , tendremos:

$$\delta\Phi = \int_s (\delta\mathbf{q}^{\nabla T} \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{q}^{\nabla}} - \delta\mathbf{q}^T \mathbf{P}_q) ds = - \int_s \delta\mathbf{q}^T \mathbf{R}_q ds \quad \forall \delta\mathbf{q} \quad (\text{IV.34})$$

o bien, estando la viga discretizada,

$$\delta\mathbf{q}_k^T \int_s (\boldsymbol{\Sigma}'_k \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{q}^{\nabla}} - \boldsymbol{\Sigma}_k^T \mathbf{P}_q) ds = - \delta\mathbf{q}_k^T \mathbf{R}_{qk} \quad \forall \delta\mathbf{q}_k \quad (\text{IV.35})$$

Supongamos que  $\mathbf{q}+d\mathbf{q}$  es el punto de equilibrio ( $\mathbf{R} = 0$ ) próximo a  $\mathbf{q}$ . Aplicando el PTV a esta posición, por idéntica razón se tendrá:

$$\begin{aligned} \delta\Phi + \delta d\Phi &= \int_s \delta\mathbf{q}^{\nabla T} \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{q}^{\nabla}} + \delta\mathbf{q}^{\nabla T} \frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{q}^{\nabla}\partial\mathbf{q}^{\nabla}} d\mathbf{q}^{\nabla} ds - \\ &\int_s \delta\mathbf{q}^T (\mathbf{P}_q + d\mathbf{P}_q) ds = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.36})$$

Y considerando (IV.34) y (IV.36), los desplazamientos diferenciales  $d\mathbf{q}$  que habrá que aplicarle al sistema para recuperar el equilibrio, serán:

$$\int_s \delta\mathbf{q}^{\nabla T} \frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{q}^{\nabla}\partial\mathbf{q}^{\nabla}} d\mathbf{q}^{\nabla} ds - \int_s \delta\mathbf{q}^T d\mathbf{P}_q ds = \int_s \delta\mathbf{q}^T \mathbf{R}_q ds$$

o, si se prefiere, utilizando la notación matricial (III.110),

$$\int_s \delta\mathbf{q}^{\nabla T} \mathbf{K}^N d\mathbf{q}^{\nabla} ds - \int_s \delta\mathbf{q}^T \mathbf{X} d\mathbf{q} ds = \int_s \delta\mathbf{q}^T \mathbf{R}_q ds \quad \forall \delta\mathbf{q} \quad (\text{IV.37})$$

Por definición, el núcleo de rigidez  $\mathbf{K}^N$  es una matriz simétrica. También lo es  $\mathbf{X}$  si el campo de fuerzas exteriores  $\mathbf{P}$  es conservativo, como se demostró en el apartado III.9. En cualquier caso, sea o no conservativo el campo de cargas  $\mathbf{P}$ , si se supone la viga discretizada y las cargas exteriores repartidas, siempre se tiene:

$$\begin{aligned} \int_S \delta \mathbf{q}_k^T d\mathbf{P}_q ds &= \delta \mathbf{q}_k^T \left[ \int_S \boldsymbol{\Sigma}_k^T d\boldsymbol{\Theta}^T \mathbf{P} ds + \int_S \boldsymbol{\Sigma}_k^T \boldsymbol{\Theta}^T d\mathbf{P} ds \right] = \\ &= \delta \mathbf{q}_k^T \left[ \int_S \boldsymbol{\Sigma}_k^T (\mathcal{T}(\mathbf{P}) + \boldsymbol{\Theta}^T [\mathbf{P}\mathbf{V}_q]) \boldsymbol{\Sigma}_m ds \right] d\mathbf{q}_m = \quad (\text{IV.38}) \\ &= \delta \mathbf{q}_k^T \left[ \int_S \boldsymbol{\Sigma}_k^T \mathbf{X} \boldsymbol{\Sigma}_m ds \right] d\mathbf{q}_m = \delta \mathbf{q}_k^T \mathbf{X}_{km} d\mathbf{q}_m \end{aligned}$$

$$\text{con} \quad d\boldsymbol{\Theta}^T \mathbf{P} := \mathcal{T}(\mathbf{P}) d\mathbf{q} \quad (\text{IV.39})$$

$$\text{y} \quad \mathcal{T}[\mathbf{P}(\mathbf{F}, \mathbf{M})] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{M}; \boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.40})$$

Teniendo todo esto en cuenta, la condición (IV.37) en forma discretizada queda:

$$\delta \mathbf{q}_k^T \mathbf{R}_{qk} = \delta \mathbf{q}_k^T \left[ \int_S \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \mathbf{K}^N \boldsymbol{\Sigma}'_m ds - \mathbf{X}_{km} \right] d\mathbf{q}_m \quad \forall \delta \mathbf{q}_m \quad (\text{IV.41})$$

y como en los sistemas triparamétricos las tres componentes de  $\delta \mathbf{q}$  son independientes, esta condición se cumple si y sólo si  $d\mathbf{q}$  verifica el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{R}_{qk} = \left[ \int_S \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \mathbf{K}^N \boldsymbol{\Sigma}'_m ds - \mathbf{X}_{km} \right] d\mathbf{q}_m \quad (\text{IV.42})$$

que es la relación diferencial que buscábamos, válida tanto para sistemas de carga conservativos como no conservativos –un tratamiento distinto de éstos se recoge en [A6, A7]. Conviene advertir que la matriz simétrica  $\mathbf{K}^N$  es independiente del sistema de interpolación y de los grados de libertad o puntos nodales adoptados en la viga. En la formulación GCCF (General Core–Congruential) de Felippa [F1, F2, C7] se denomina a esta matriz *núcleo de rigidez tangente*.



Un caso particular de carga que merece especial atención es aquél en el que los momentos exteriores son nulos. Concretamente, si el campo exterior de cargas  $\mathbf{P}$  se reduce a un conjunto de fuerzas constantes, se tiene:  $\mathcal{T}(\mathbf{P}) = \mathbf{0}$  y  $\nabla \mathbf{P} = \mathbf{0}$  –o lo que es lo mismo:  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ – y la ecuación (IV.42), escrita en forma incremental, se reduce a:

$$\mathbf{R}_{qk} = \left[ \int_S \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \mathbf{K}^N \boldsymbol{\Sigma}'_m ds \right] \Delta \mathbf{q}_m \quad (\text{IV.43.a})$$

con 
$$\mathbf{R}_{qk} = \mathbf{P}_{qk}^e + \mathbf{P}_{qk}^i = \int_S \boldsymbol{\Sigma}_k{}^T \mathbf{P} ds - \int_S \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_o ds \quad (\text{IV.43.b})$$

(nótese que al ser  $\mathbf{P}^T = \{ \mathbf{F} ; \mathbf{0} \}$ , se tiene  $\boldsymbol{\Theta}^T \mathbf{P} = \mathbf{P}$ )

Por otra parte, si en cada punto de la viga el campo exterior de cargas se redujera a un conjunto de fuerzas variables –momentos nulos–, las matrices de carga  $\mathbf{X}_{km}$  pasarían entonces a valer:

$$\mathbf{X}_{km} = \int_S \boldsymbol{\Sigma}_k{}^T \boldsymbol{\Theta}^T [\mathbf{P} \nabla_q] \boldsymbol{\Sigma}_m ds = \int_S \boldsymbol{\Sigma}_k{}^T \boldsymbol{\Theta}^T [\mathbf{P} \nabla] \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\Sigma}_m ds \quad (\text{IV.44})$$

(los operadores gradiente en el espacio paramétrico y en el espacio físico se distinguen denotándolos  $\nabla_q$  y  $\nabla$ , respectivamente)

En conclusión, el sistema sólo admite función potencial  $\Phi$  si el campo exterior de cargas es conservativo, en cuyo caso  $\Phi$  es estacionaria y mínima en las posiciones de equilibrio estable, y el procedimiento de búsqueda de estas posiciones, o puntos con  $\mathbf{R}_q = 0$ , equivale a minimizar el funcional  $\Phi$ . Esta equivalencia entre minimizar  $\Phi$  y eliminar las fuerzas residuales  $\mathbf{R}_q$  conjugadas de  $d\mathbf{q}$  no se da fuera del espacio paramétrico. Por ejemplo, en el espacio físico este procedimiento de eliminación, en vez de anular las fuerzas residuales  $\mathbf{R}_q$  conjugadas de  $d\mathbf{q} : \{d\mathbf{u}, d\boldsymbol{\alpha}\}$ , anula las fuerzas residuales  $\mathbf{R}$  conjugadas de  $d\mathbf{a} : \{d\mathbf{u}, d\boldsymbol{\theta}\}$ ; la consecuencia inmediata de este cambio, como veremos en seguida, es que la matriz de rigidez deja de ser simétrica y no puede por tanto ser el resultado de un proceso de minimización. Nótese, además, que así como tiene sentido escribir  $\Phi(\mathbf{q})$  y minimizar este funcional con relación a  $\mathbf{q}$ , no tiene sentido una expresión análoga del tipo  $\Phi(\mathbf{a})$  debido a que  $d\mathbf{a}$  no es la diferencial absoluta de ningún vector de variables  $\mathbf{a}$ .

## II – Método del equilibrio

Este método, a diferencia del anterior, no trata de minimizar el potencial  $\Phi$  sino simplemente de anular las fuerzas residuales del sistema discretizado, calculando para ello la variación de las cargas nodales –fuerzas y momentos entendidos en el sentido convencional– al introducir en los nodos pequeños movimientos  $d\mathbf{a}_k: \{d\mathbf{u}_k, d\boldsymbol{\theta}_k\}$ , esto es, desplazamientos  $d\mathbf{u}_k$  y giros en las tres direcciones del espacio  $d\boldsymbol{\theta}_k$ . Veamos cómo.

Las cargas nodales activas  $\mathbf{P}_k^e$  y reactivas  $\mathbf{P}_k^i$ , conjugadas de los movimientos nodales  $d\mathbf{a}_k$ , vienen dadas por (IV.31) y (IV.32); como además  $\mathbf{P}_q^\nabla = \boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{P}^\nabla$ , en virtud de (IV.10), y  $\mathbf{P}_q^\nabla = \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_o$ , por (III.69), estas cargas cumplen:

$$\mathbf{P}_k^e := \int_S \boldsymbol{\Sigma}_k^T \mathbf{P} \, ds \quad \therefore \quad \mathbf{P}_k^i = - \int_S \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \mathbf{P}^\nabla \, ds \quad (\text{IV.45.a})$$

$$d\mathbf{P}_k^e := \int_S \boldsymbol{\Sigma}_k^T d\mathbf{P} \, ds \quad \therefore \quad d\mathbf{P}_k^i = - \int_S \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T d\mathbf{P}^\nabla \, ds \quad (\text{IV.45.b})$$

La variación  $d\mathbf{P}_q^\nabla$  se calcula inmediatamente ya que, por definición, se tiene:

$$d\mathbf{P}_q^\nabla = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{q}^\nabla \partial \mathbf{q}^\nabla} d\mathbf{q}^\nabla = \mathbf{K}^N d\mathbf{q}^\nabla \quad (\text{IV.46})$$

sin embargo, no resulta tan sencillo calcular la variación de  $\mathbf{P}^\nabla$ ; ahora bien, como

$$d\mathbf{P}_q^\nabla = d\boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{P}^\nabla + \boldsymbol{\Xi}^T d\mathbf{P}^\nabla \quad (\text{IV.47})$$

introduciendo un nuevo tensor  $\boldsymbol{\mathcal{U}}$  del siguiente modo,

$$d\boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{v} := \boldsymbol{\mathcal{U}}(\mathbf{v}) d\mathbf{q}^\nabla \quad (\text{IV.48})$$

se tiene,

$$d\mathbf{P}^\nabla = \boldsymbol{\Xi}^{-T} d\mathbf{P}_q^\nabla - \boldsymbol{\Xi}^{-T} \boldsymbol{\mathcal{U}}(\mathbf{P}^\nabla) d\mathbf{q}^\nabla$$

y expresando  $d\mathbf{q}^\nabla$  en función de  $d\mathbf{a}^\nabla$  por medio de (IV.7), se deduce la siguiente relación entre los vectores conjugados  $d\mathbf{a}^\nabla$  y  $d\mathbf{P}^\nabla$ :

$$d\mathbf{P}^\nabla = \mathbf{\Xi}^{-T} [ \mathbf{K}^N - \mathbf{U}(\mathbf{P}^\nabla) ] \mathbf{\Xi}^{-1} d\mathbf{a}^\nabla \quad (\text{IV.49})$$

Llevando este resultado a (IV.45) y sustituyendo allí  $d\mathbf{a}^\nabla$  por (IV.5.a), se obtiene la variación de las fuerzas nodales reactivas  $\mathbf{P}^i$  en función de los desplazamientos nodales  $d\mathbf{a}_k$ :

$$d\mathbf{P}_k^i = \left[ - \int_S \mathbf{\Sigma}'_k{}^T \mathbf{\Xi}^{-T} [ \mathbf{K}^N - \mathbf{U}(\mathbf{P}^\nabla) ] \mathbf{\Xi}^{-1} \mathbf{\Sigma}'_m ds \right] d\mathbf{a}_m \quad (\text{IV.50})$$

La variación de las fuerzas exteriores nodales se extrae inmediatamente de  $\delta dW$ :

$$- \delta dW = \int_S \delta \mathbf{a}^T d\mathbf{P} ds = \delta \mathbf{a}_k^T \int_S \mathbf{\Sigma}_k^T [ \mathbf{P}^\nabla ] \mathbf{\Sigma}_m ds d\mathbf{a}_m$$

con lo cual, 
$$d\mathbf{P}_k^e = \int_S \mathbf{\Sigma}_k^T [ \mathbf{P}^\nabla ] \mathbf{\Sigma}_m ds d\mathbf{a}_m = \mathbf{X}_{km}(\mathbf{P}) d\mathbf{a}_m \quad (\text{IV.51})$$

A diferencia de las  $\mathbf{X}_{km}$ , las nuevas matrices de cargas  $\mathbf{X}_{km}$  no tienen por qué ser simétricas cuando  $\mathbf{P}$  sea conservativo. Podrán serlo, eso sí, en casos excepcionales –por ejemplo, cuando los momentos exteriores sean nulos–, pero no necesariamente.

Suponiendo ahora que las fuerzas residuales  $\mathbf{R}_k$  son pequeñas, la condición de equilibrio (IV.33) se alcanzará cuando los desplazamientos nodales  $\Delta \mathbf{a}_k$  cumplan:

$$\mathbf{R}_k = \left[ \int_S \mathbf{\Sigma}'_k{}^T \mathbf{\Xi}^{-T} [ \mathbf{K}^N - \mathbf{U}(\mathbf{P}^\nabla) ] \mathbf{\Xi}^{-1} \mathbf{\Sigma}'_m ds - \mathbf{X}_{km}(\mathbf{P}) \right] \Delta \mathbf{a}_m \quad (\text{IV.52})$$

siendo 
$$\mathbf{R}_k = \mathbf{P}_k^e + \mathbf{P}_k^i = \int_S \mathbf{\Sigma}_k^T \mathbf{P} ds - \int_S \mathbf{\Sigma}'_k{}^T \mathbf{P}^\nabla ds \quad (\text{IV.53})$$

En este caso, al ser  $\mathbf{U}$  asimétrica, también lo es la matriz compuesta encerrada entre corchetes en (IV.52). Además, esta asimetría es inevitable al no depender del carácter conservativo de las cargas exteriores aplicadas a la viga. No obstante, si entre estas cargas exteriores no hay momentos, la matriz de rigidez global  $\mathbf{K}$  del sistema recupera la simetría cuando se alcanza una posición de equilibrio, ya que entonces la resultante de los momentos internos nodales se anula, y al ensamblar las matrices de rigidez de todos los elementos que concurren en un mismo nodo sus términos antimétricos se cancelan mutuamente, desapareciendo [S2, S3, T1].

### III – Una variante del método de equilibrio

A diferencia del procedimiento de minimización, el método del equilibrio admite variantes; una de ellas es la técnica mixta que exponemos a continuación.

Consiste ésta en tratar de anular las cargas residuales nodales  $\mathbf{R}_k$  del sistema, partiendo de la relación entre las variaciones los desplazamientos nodales  $d\mathbf{q}_m$  y las fuerzas residuales  $\mathbf{R}_{qk}$  en el espacio paramétrico:

$$-d\mathbf{R}_{qk} = \left[ \int_S \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \mathbf{K}^N \boldsymbol{\Sigma}'_m ds - \mathbf{X}_{km} \right] d\mathbf{q}_m \quad (\text{IV.54})$$

Esta expresión se obtiene restando (IV.34) de (IV.36) y es idéntica a la (IV.42) si se sustituye  $\mathbf{R}_{qk}$  por  $-d\mathbf{R}_{qk}$ . La diferencia en este primer término se debe al diferente sentido que tienen ambas relaciones: la (IV.54) indica únicamente cómo varían las fuerzas residuales con los desplazamientos nodales, mientras que (IV.42) indica qué desplazamientos concretos hay que aplicarle al sistema, cuando las fuerzas residuales son diferenciales, para restablecer el equilibrio. En definitiva, (IV.54) expresa una relación general, y (IV.42) una condición particular.

Pues bien, teniendo en cuenta que de acuerdo con (IV.39),

$$d\mathbf{P}_q = d\boldsymbol{\Theta}^T \mathbf{P} + \boldsymbol{\Theta}^T d\mathbf{P} = \mathcal{T}(\mathbf{P}) d\mathbf{q} + \boldsymbol{\Theta}^T d\mathbf{P} \quad (\text{IV.55})$$

y también que  $d\mathbf{q} = \boldsymbol{\Theta}^{-1} d\mathbf{a}$ , la ecuación (IV.54) se transforma en:

$$-\mathcal{T}(\mathbf{R}_k) d\mathbf{q}_k - \boldsymbol{\Theta}_k^T d\mathbf{R}_k = \left[ \int_S \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \mathbf{K}^N \boldsymbol{\Sigma}'_m ds - \mathbf{X}_{km} \right] \boldsymbol{\Theta}_m^{-1} d\mathbf{a}_m \quad (\text{IV.56})$$

y la relación entre las fuerzas residuales y los desplazamientos nodales se puede escribir así (conviniendo en que  $\delta_{km}$  sea la delta de Kronecker:  $\delta_{km} = 1$ , si  $k = m$ , y  $\delta_{km} = 0$ , si  $k \neq m$ ; “k” sea un índice fijo y “m” un índice mudo):

$$-d\mathbf{R}_k = \boldsymbol{\Theta}_k^{-T} \left[ \int_S \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \mathbf{K}^N \boldsymbol{\Sigma}'_m ds - \mathbf{X}_{km} + \mathcal{T}(\mathbf{R}_k) \delta_{km} \right] \boldsymbol{\Theta}_m^{-1} d\mathbf{a}_m \quad (\text{IV.57})$$

Por tanto, si se desea eliminar las fuerzas residuales y restaurar el equilibrio del sistema deben introducirse los siguientes desplazamientos nodales  $\Delta \mathbf{a}_k$ :

$$\mathbf{R}_k = \Theta_k^{-T} \left[ \int_S \Sigma_k'^T \mathbf{K}^N \Sigma_m' ds - \mathbf{X}_{km} + \mathcal{T}(\mathbf{R}_k) \delta_{km} \right] \Theta_m^{-1} \Delta \mathbf{a}_m \quad (\text{IV.58})$$

Siendo consecuentes con este método, las fuerzas residuales nodales  $\mathbf{R}_k$  deben valer  $\Theta_k^{-T} \mathbf{R}_{qk}$  y no la suma  $\mathbf{P}_k^i + \mathbf{P}_k^e$  de (IV.31) y (IV.32); esto es,

$$\mathbf{R}_k = \Theta_k^{-T} \mathbf{R}_{qk} = \Theta_k^{-T} \left[ \int_S \Sigma_k^T \Theta^T \mathbf{P} ds - \int_S \Sigma_k'^T \mathbf{A} \sigma_o ds \right] \quad (\text{IV.59})$$

Como antes, la matriz de rigidez del sistema es asimétrica por serlo también  $\mathcal{T}$ ; ésta sólo es simétrica si se anulan los momentos residuales de  $\mathbf{R}_k$ , esto es, en la posición de equilibrio. Por otra parte, a diferencia del caso anterior, la interpolación se efectúa sobre los parámetros rotaciones  $d\mathbf{q}$  y no sobre las rotaciones elementales  $d\boldsymbol{\theta}$ .

Nótese que en (IV.52) y (IV.58), aparte del núcleo  $\mathbf{K}^N$ , intervienen otras dos matrices: la matriz de cargas  $\mathbf{X}$  y las matrices  $\mathcal{U}$  o  $\mathcal{T}$ , dependientes de los esfuerzos internos  $\mathbf{P}^{iV}$  y las fuerzas reactivas nodales  $\mathbf{R}_k$  de la viga, respectivamente.

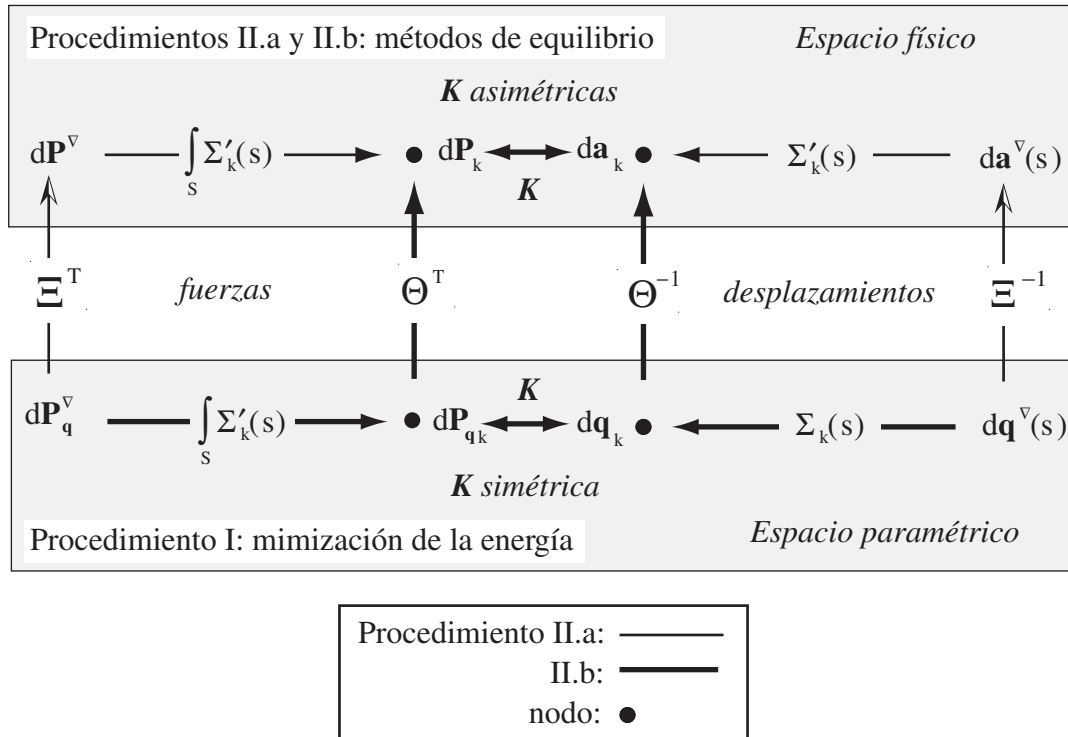
A los mismos resultados (IV.52) y (IV.58) se llega aplicando las reglas de la derivación compuesta a las derivadas direccionales  $[DU \cdot a_i, a_j]$  de la energía –la demostración se recoge en el Apéndice IV–. Aunque las dos formas de proceder sean en esencia equivalentes, esta segunda tiene interés en sí misma porque conecta con el concepto de derivada objetiva de Simó –apartado II.10– y sirve de puente entre el razonamiento físico, ligado al concepto clásico de fuerza y equilibrio, y el matemático puro, más abstracto.

En definitiva, se pueden seguir dos caminos distintos para establecer una relación incremental entre las fuerzas y los desplazamientos de la viga, fundamento de la formulación Tangente –Cuadros IV.1 y IV.2–. El primero y más simple consiste en trabajar con fuerzas y desplazamientos generalizados en el espacio paramétrico, resultando entonces simétrica la matriz de rigidez. El segundo, sin embargo, consiste en trabajar en el espacio físico con fuerzas y desplazamientos convencionales; en este caso la matriz de rigidez es asimétrica y admite variantes.

<p>Minimizando la energía potencial total <math>\Phi</math></p>	<p>Variables independientes: <math>\mathbf{q}</math> ; Se interpolan los parámetros <math>d\alpha</math></p> $d\mathbf{q}^\nabla = \Sigma'_k d\mathbf{q}_k \quad \therefore d\mathbf{q} = \Sigma_k d\mathbf{q}_k$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: fit-content;"> <math display="block">\mathbf{R}_{qk} = \left[ \int_S \Sigma'_k{}^T \mathbf{K}^N \Sigma'_m ds - \mathbf{X}_{km} \right] \Delta \mathbf{q}_m \quad (I)</math> </div> $\mathbf{R}_{qk} = \int_S \Sigma_k{}^T \Theta^T \mathbf{P} ds - \int_S \Sigma'_k{}^T \mathbf{A} \sigma_o ds$ $\mathbf{X}_{km} = \int_S \Sigma_k{}^T \mathbf{X} \Sigma_m ds \quad \therefore \mathbf{X} = \mathbf{P}_q \nabla_q = \mathcal{T}(\mathbf{P}) + \Theta^T [\mathbf{P}\nabla] \Theta$ $\mathcal{T}[\mathbf{P}(\mathbf{F}_{ext}, \mathbf{M}_{ext})] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{M}_{ext}; \alpha) \end{bmatrix}$ <p>–en los sistemas hiperparamétricos (I) adopta la forma (IV.89)–</p>
<p>Eliminando las fuerzas residuales nodales <math>\mathbf{R}_k</math></p>	<p>Variaciones independientes: <math>\delta \mathbf{a}</math> ; Se interpolan los giros <math>d\theta</math></p> $d\mathbf{a}^\nabla = \Sigma'_k d\mathbf{a}_k \quad \therefore d\mathbf{a} = \Sigma_k d\mathbf{a}_k$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: fit-content;"> <math display="block">\mathbf{R}_k = \left[ \int_S \Sigma'_k{}^T \Xi^{-T} [\mathbf{K}^N - \mathcal{U}(\mathbf{P}^\nabla)] \Xi^{-1} \Sigma'_m ds - \mathcal{X}_{km}(\mathbf{P}) \right] \Delta \mathbf{a}_m \quad (II.a)</math> </div> $\mathbf{R}_k = \mathbf{P}_k^e + \mathbf{P}_k^i = \int_S \Sigma_k{}^T \mathbf{P} ds - \int_S \Sigma'_k{}^T \mathbf{P}^\nabla ds$ $\mathbf{P}^\nabla = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_t \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{Q}_t \\ \mathbf{M}_t \end{bmatrix} \quad \mathcal{X}_{km}(\mathbf{P}) = \int_S \Sigma_k{}^T [\mathbf{P}\nabla] \Sigma_m ds$

Cuadro IV.1.

*Ecuaciones incrementales en los métodos de minimización I y equilibrio II.a*



Esquema IV.1.

*Esquema de las tres técnicas incrementales*

La relación entre los tres procedimientos descritos se muestra en el esquema IV.1. En él se indica el espacio de trabajo, cómo se establecen las relaciones incrementales entre las cargas y los desplazamientos, y qué variables relaciona en cada caso la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ . Como en el método del equilibrio el paso del espacio paramétrico al espacio físico se puede realizar a distintos niveles, este método admite variantes, cada una con su propia matriz de rigidez tangente; dos de ellas, que hemos denominado procedimientos II.a y II.b. se muestran en el mismo esquema IV.1.

En las ecuaciones incrementales de los Cuadros IV.1 y IV.2 figuran dos matrices que aún no han sido determinadas: el núcleo de rigidez tangente  $\mathbf{K}^N$  y el producto  $\Xi^{-T} [\mathbf{K}^N - \mathcal{U}(\mathbf{P}^\vee)] \Xi^{-1}$ , que depende además del vector  $\mathbf{P}^\vee$ . En los siguientes apartados calcularemos ambas matrices y el vector  $\mathbf{P}^\vee$ , suponiendo primero que el sistema es triparamétrico y más adelante que es hiperparamétrico.

<b>Minimizando las fuerzas residuales nodales <math>\mathbf{R}_k</math></b>	$d\mathbf{q}^\vee = \Sigma'_k d\mathbf{q}_k \quad \therefore d\mathbf{q} = \Sigma_k d\mathbf{q}_k$ <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px auto; width: 80%; text-align: center;"> <math display="block">\mathbf{R}_k = \Theta_k^{-T} \left[ \int_S \Sigma'_k{}^T \mathbf{K}^N \Sigma'_m ds - \mathbf{X}_{km} + \mathcal{T}(\mathbf{R}_k) \right] \Theta_m^{-1} \Delta \mathbf{a}_m \quad (\text{II.b})</math> </div> $\mathbf{R}_k = \Theta_k^{-T} \left[ \int_S \Sigma_k{}^T \Theta^T \mathbf{P} ds - \int_S \Sigma'_k{}^T \mathbf{A} \sigma_o ds \right]$ $\mathbf{X}_{km} = \int \Sigma_k{}^T \mathbf{X} \Sigma_m ds \quad \therefore \mathbf{X} = \mathbf{P}_q \nabla_q = \mathcal{T}(\mathbf{P}) + \Theta^T [\mathbf{P}\nabla] \Theta$ $\mathcal{T}[\mathbf{R}_k(\mathbf{F}_R, \mathbf{M}_R)] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{M}_R; \alpha) \end{bmatrix}$
---	--

Cuadro IV.2.

*Ecuaciones incrementales en el método de equilibrio II.b.*

#### IV. 6.- CÁLCULO DEL VECTOR DE ESFUERZOS $\mathbf{P}^\vee$

Por definición, el vector generalizado de esfuerzos  $\mathbf{P}^\vee$  es el vector conjugado del vector ampliado de derivadas  $d\mathbf{a}^\vee$ , esto es,

$$\mathbf{P}^\vee := \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}^\vee} \quad (\text{IV.60})$$

y vale de acuerdo con (III.69) y (IV.10),

$$\mathbf{P}^\vee = \mathbf{\Xi}^{-T} \mathbf{P}_q^\vee = \mathbf{\Xi}^{-T} \mathbf{A} \sigma_o \quad (\text{IV.61})$$



Ahora bien, teniendo en cuenta que  $\mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha})\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{F}_{,s}(\boldsymbol{\alpha}; \boldsymbol{\alpha}_s) = \mathbf{0}$ , por (II.80.b), y que  $\mathbf{F}^T \mathbf{G}^{*T} = \mathbf{R}$  (II.32), el producto  $\boldsymbol{\Xi}^{-T} \mathbf{A}$  resulta,

$$\boldsymbol{\Xi}^{-T} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{R} & \mathbf{F}^T \mathbf{T}^T + \mathbf{F}_{,s}^T \mathbf{G}^{*T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^T \mathbf{G}^{*T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.62})$$

y se puede escribir 
$$\boldsymbol{\Xi}^{-T} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{t,s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Pi} \quad (\text{IV.63})$$

con lo que el vector  $\mathbf{P}^\nabla$  se reduce simplemente a:

$$\mathbf{P}^\nabla = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{t,s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\sigma}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{t,s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_t \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{Q}_t \\ \mathbf{M}_t \end{bmatrix} \quad (\text{IV.64})$$

Este resultado se recoge también en el Cuadro IV.1.

#### IV. 7.– NÚCLEO DE RIGIDEZ TANGENTE

El núcleo de rigidez tangente es, por definición, el Hessiano de la función de densidad de energía elástica  $\Psi(\mathbf{q}^\nabla)$ :

$$\mathbf{K}^N := \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{q}^\nabla \partial \mathbf{q}^\nabla} \quad (\text{IV.65})$$

Tratándose de un material lineal,  $\Psi$  vienen dada por (III.45), y escribiendo:

$$d\boldsymbol{\gamma} := \boldsymbol{\varkappa}_1 d\mathbf{q}^\nabla \quad \therefore \quad d\boldsymbol{\kappa} := \boldsymbol{\varkappa}_2 d\mathbf{q}^\nabla \quad (\text{IV.66.a})$$

$$\mathbf{Q}^T (d\delta\boldsymbol{\gamma} + \delta d\boldsymbol{\gamma}) := 2 d\mathbf{q}^{\nabla T} \boldsymbol{\varkappa}_3(\mathbf{Q}) \delta\mathbf{q}^{\nabla} \quad (\text{IV.66.b})$$

$$\mathbf{M}^T (d\delta\boldsymbol{\kappa} + \delta d\boldsymbol{\kappa}) := 2 d\mathbf{q}^{\nabla T} \boldsymbol{\varkappa}_4(\mathbf{M}) \delta\mathbf{q}^{\nabla} \quad (\text{IV.66.c})$$

y separando los términos que dependen directamente de los esfuerzos internos  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{M}$  del resto, la matriz de rigidez  $\mathbf{K}^N$  queda descompuesta en dos: una matriz *geométrica* y otra *material*, que adoptan la forma característica:

$$\mathbf{K}^N = \mathbf{K}_M^N + \mathbf{K}_G^N \quad (\text{IV.67.a})$$

$$\mathbf{K}_M^N := [\boldsymbol{\varkappa}_1^T \quad \boldsymbol{\varkappa}_2^T] \mathbf{C} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varkappa}_1 \\ \boldsymbol{\varkappa}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.67.b})$$

$$\mathbf{K}_G^N := \boldsymbol{\varkappa}_3(\mathbf{Q}) + \boldsymbol{\varkappa}_4(\mathbf{M}) \quad (\text{IV.67.c})$$

En un sistema de parametrización de rotaciones triparamétrico, los operadores  $\boldsymbol{\varkappa}_1$  y  $\boldsymbol{\varkappa}_2$  representan los gradientes  $\partial\boldsymbol{\kappa} / \partial\mathbf{q}^{\nabla}$  y  $\partial\boldsymbol{\gamma} / \partial\mathbf{q}^{\nabla}$  del vector deformación, y los operadores  $\boldsymbol{\varkappa}_3$  y  $\boldsymbol{\varkappa}_4$  los Hessianos  $\partial^2(\mathbf{M}^T \boldsymbol{\kappa}) / \partial\mathbf{q}^{\nabla} \partial\mathbf{q}^{\nabla}$  y  $\partial^2(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\gamma}) / \partial\mathbf{q}^{\nabla} \partial\mathbf{q}^{\nabla}$ . En los sistemas hiperparamétricos esto, en general, no es cierto, si bien este hecho carece de consecuencias prácticas, como probaremos en el siguiente apartado.

El cálculo de estos los operadores  $\boldsymbol{\varkappa}_1$ ,  $\boldsymbol{\varkappa}_2$ ,  $\boldsymbol{\varkappa}_3$  y  $\boldsymbol{\varkappa}_4$  exige conocer previamente  $\delta\boldsymbol{\kappa}$ ,  $\delta\boldsymbol{\gamma}$ ,  $d\delta\boldsymbol{\gamma}$  y  $d\delta\boldsymbol{\kappa}$ . De estas cuatro variaciones, las dos primeras se obtuvieron en (III.7) y (III.8), resultando:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varkappa}_1 \\ \boldsymbol{\varkappa}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Pi}_0^T \mathbf{A}^T \quad (\text{IV.68})$$

y, por tanto,

$$\mathbf{K}_M^N = \mathbf{A} \mathbf{C}_0 \mathbf{A}^T \quad (\text{IV.69})$$

$$\mathbf{K}_M^N = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G}^T(\boldsymbol{\alpha}) \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{R} & \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^{*T}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \mathbf{C}_0 \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.70})$$

con

$$\mathbf{C}_0 = \boldsymbol{\Pi}_0 \mathbf{C} \boldsymbol{\Pi}_0^T \quad (\text{IV.71})$$

Diferenciando ahora  $\delta\boldsymbol{\kappa}$  –(III.7.b)–, se obtiene  $d\delta\boldsymbol{\kappa}$  en forma paramétrica:

$$d\delta\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{R}_0^T [ d\delta\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}_{,s} + d\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha})\delta\boldsymbol{\alpha}_{,s} + \delta\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\alpha}_{,s} ] \quad (\text{IV.72})$$

con lo cual, el producto escalar  $\mathbf{M}^T d\delta\boldsymbol{\kappa}$  queda como sigue –los tensores  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{T}$  se definieron en (II.67) y el operador  $\boldsymbol{\Lambda}$  en el apartado II.12–:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^T d\delta\boldsymbol{\kappa} &= \mathbf{M}_0^T [ d\delta\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}_{,s} + d\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha})\delta\boldsymbol{\alpha}_{,s} + \delta\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\alpha}_{,s} ] = \\ &= d\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{M}_0; \boldsymbol{\alpha}_{,s}; \boldsymbol{\alpha})\delta\boldsymbol{\alpha} + d\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{S}(\mathbf{M}_0; \boldsymbol{\alpha})\delta\boldsymbol{\alpha}_{,s} + \\ &\quad \delta\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{S}(\mathbf{M}_0; \boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\alpha}_{,s} \end{aligned} \quad (\text{IV.73})$$

Por otra parte, diferenciando ahora (III.7.a) y considerando que  $d\mathbf{R} = d\tilde{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{R}$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} d\delta\boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{R}_t^T [ -\overline{\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\alpha}} (\delta\mathbf{u}_{,s} + \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})\delta\boldsymbol{\alpha}) + \\ &\quad d\tilde{\mathbf{u}}_{,s} \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})\delta\boldsymbol{\alpha} + \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} d\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})\delta\boldsymbol{\alpha} ] \end{aligned} \quad (\text{IV.74})$$

y teniendo en cuenta la definición (II.67) del operador  $\hat{\mathbf{S}}$ , el producto escalar  $\mathbf{Q}^T d\delta\boldsymbol{\gamma}$  resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T d\delta\boldsymbol{\gamma} &= d\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{G}^T(\boldsymbol{\alpha})\tilde{\mathbf{Q}}_t (\delta\mathbf{u}_{,s} + \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})\delta\boldsymbol{\alpha}) - \\ &\quad - d\mathbf{u}_{,s}^T \tilde{\mathbf{Q}}_t \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})\delta\boldsymbol{\alpha} - d\boldsymbol{\alpha}^T \hat{\mathbf{S}}(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{Q}_t; \boldsymbol{\alpha})\delta\boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (\text{IV.75})$$

Ahora bien, como

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\alpha}^T [ \mathbf{G}^T(\boldsymbol{\alpha})\tilde{\mathbf{Q}}_t \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) - \hat{\mathbf{S}}(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{Q}_t; \boldsymbol{\alpha}) ] \delta\boldsymbol{\alpha} &= \\ = d\boldsymbol{\theta}^T [ \tilde{\mathbf{Q}}_t \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} - \mathbf{F}^T(\boldsymbol{\alpha}) \hat{\mathbf{S}}(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{Q}_t; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) ] \delta\boldsymbol{\theta} \end{aligned} \quad (\text{IV.76})$$

separando las partes simétrica y antisimétrica del operador  $\hat{\mathbf{S}}$  y aplicando la propiedad (II.71) a la parte antisimétrica, se obtiene:

$$2\mathbf{F}^T \hat{\mathbf{S}}(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s}, \mathbf{Q}_t; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{F} = \mathbf{F}^T [\hat{\mathbf{S}}(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s}, \mathbf{Q}_t; \boldsymbol{\alpha}) + \hat{\mathbf{S}}^T(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s}, \mathbf{Q}_t; \boldsymbol{\alpha})] \mathbf{F} - \overline{\tilde{\mathbf{r}}_{t,s}, \mathbf{Q}_t} \quad (\text{IV.77})$$

con lo cual, aplicando la propiedad (AI.8) al último operador antimétrico de esta expresión, se deduce el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\alpha}^T [\mathbf{G}^T(\boldsymbol{\alpha}) \tilde{\mathbf{Q}}_t \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) - \hat{\mathbf{S}}(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s}, \mathbf{Q}_t; \boldsymbol{\alpha})] d\boldsymbol{\alpha} = \\ = \frac{1}{2} d\boldsymbol{\alpha}^T [\mathbf{G}^T(\boldsymbol{\alpha}) [\tilde{\mathbf{Q}}_t \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} + \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \tilde{\mathbf{Q}}_t] \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})] d\boldsymbol{\alpha} - \\ - \frac{1}{2} d\boldsymbol{\alpha}^T [\hat{\mathbf{S}}(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s}, \mathbf{Q}_t; \boldsymbol{\alpha}) + \hat{\mathbf{S}}^T(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s}, \mathbf{Q}_t; \boldsymbol{\alpha})] d\boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (\text{IV.78})$$

y llevando éste a (IV.75), se obtiene,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T d\delta\boldsymbol{\gamma} = d\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{Q}}_t \delta\mathbf{u}_{,s} + \delta\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{Q}}_t d\mathbf{u}_{,s} + \\ + \frac{1}{2} \delta\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{G}^T [\tilde{\mathbf{Q}}_t \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} + \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \tilde{\mathbf{Q}}_t] \mathbf{G} d\boldsymbol{\alpha} - \\ - \frac{1}{2} \delta\boldsymbol{\alpha}^T [\hat{\mathbf{S}}(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s}, \mathbf{Q}_t; \boldsymbol{\alpha}) + \hat{\mathbf{S}}^T(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s}, \mathbf{Q}_t; \boldsymbol{\alpha})] d\boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (\text{IV.79})$$

En definitiva, de las expresiones finales (IV.73) y (IV.79) de los productos  $\mathbf{M}^T d\delta\boldsymbol{\kappa}$  y  $\mathbf{Q}^T d\delta\boldsymbol{\gamma}$  se extraen las matrices simétricas  $\boldsymbol{\kappa}_3$  y  $\boldsymbol{\kappa}_4$  que buscábamos, resultando:

$$\boldsymbol{\kappa}_3(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{Q}}_t \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^T(\boldsymbol{\alpha}) \tilde{\mathbf{Q}}_t & \mathbf{H}_1(\mathbf{Q}_t; \mathbf{r}_{t,s}; \boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{H}_2(\mathbf{Q}_t; \mathbf{r}_{t,s}; \boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.80})$$

$$\boldsymbol{\kappa}_4(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{M}_0; \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{S}(\mathbf{M}_0; \boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^T(\mathbf{M}_0; \boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.81})$$

$$\text{siendo: } \mathbf{H}_1(\mathbf{Q}_t; \mathbf{r}_{t,s}; \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \mathbf{G}^T(\boldsymbol{\alpha}) [ \tilde{\mathbf{Q}}_t \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} + \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \tilde{\mathbf{Q}}_t ] \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{IV.82})$$

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{Q}_t; \mathbf{r}_{t,s}; \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} [ \hat{\mathbf{S}}(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{Q}_t; \boldsymbol{\alpha}) + \hat{\mathbf{S}}^T(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{Q}_t; \boldsymbol{\alpha}) ] \quad (\text{IV.83})$$

Sumando ahora  $\mathfrak{K}_3$  y  $\mathfrak{K}_4$ , se obtiene la matriz geométrica de rigidez  $\mathbf{K}_G^N$ :

$$d\mathbf{q}^{\text{T}} \mathbf{K}_G^N \delta\mathbf{q}^{\text{V}} = \mathbf{Q}^T d\delta\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{M}^T d\delta\boldsymbol{\kappa} \quad (\text{IV.84})$$

$$\mathbf{K}_G^N = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{Q}}_t \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^T(\boldsymbol{\alpha}) \tilde{\mathbf{Q}}_t & \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{M}_0; \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{s}; \boldsymbol{\alpha}) + [\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2](\mathbf{Q}_t; \mathbf{r}_{t,s}; \boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{S}(\mathbf{M}_0; \boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^T(\mathbf{M}_0; \boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.85})$$

Y llevando (IV.70) y (IV.85) a (IV.67.a) se obtiene la expresión completa del *núcleo de rigidez tangente*  $\mathbf{K}^N$ . Esta matriz se muestra en la Cuadro IV.3 y es simétrica, como puede apreciarse. En ella intervienen los operadores  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{G}^*$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\hat{\mathbf{S}}$  y  $\boldsymbol{\Lambda}$  que dependen del sistema de parametrización y se calculan en el Apéndice II. En los sistemas paramétricos vectoriales, el cálculo de  $\mathbf{K}^N$  resulta más sencillo debido a que los operadores básicos  $\mathbf{G}^*$  y  $\hat{\mathbf{S}}$  se pueden expresar directamente en función de  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{T}$ , obteniéndose entonces  $\mathbf{K}^N$  como se indica en el Cuadro IV.4 .

#### IV. 8.– LA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE EN UN SISTEMA HIPERPARAMÉTRICO.

Al calcular en el apartado anterior el núcleo de rigidez tangente y al desarrollar en el apartado IV.5 el método de minimización de la energía, se supuso que el sistema de parametrización de las rotaciones era triparamétrico. Veamos ahora qué ocurre cuando el sistema es hiperparamétrico.

En un sistema triparamétrico, el núcleo de rigidez tangente  $\mathbf{K}^N$  del cuadro IV.3 coincide con el Hessiano del potencial  $\Phi$ . En los sistemas hiperparamétricos, sin embargo, esta identidad no se da, ya que el resultado del cuadro se dedujo suponiendo válida la relación  $d\mathbf{R} = d\tilde{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{R}$ , que sólo se cumple cuando  $d\mathbf{R}$  representa realmente una

Operadores Básicos :

$$\begin{aligned}
 d\theta^* &:= \mathbf{R}_0^T \mathbf{G}^*(\alpha) d\alpha & d\theta &:= \mathbf{G}(\alpha) d\alpha \\
 \mathbf{v}^T d\mathbf{G}^*(\alpha) &:= d\alpha^T \mathbf{S}(\mathbf{v}, \alpha) & \mathbf{v}^T d\mathbf{G}(\alpha) &:= d\alpha^T \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{v}, \alpha) \\
 d\mathbf{G}^*(\alpha) \mathbf{v} &:= \mathbf{T}(\mathbf{v}, \alpha) d\alpha & d\mathbf{G}(\alpha) \mathbf{v} &:= \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}, \alpha) d\alpha \\
 \mathbf{v}^T d\delta \mathbf{G}^*(\alpha) \alpha_{,s} &= d\alpha^T \Lambda(\mathbf{v}; \alpha_{,s}; \alpha) \delta\alpha
 \end{aligned}$$

Operadores y Vectores Auxiliares :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_t &:= \mathbf{R}_t \mathbf{Q} \\
 \mathbf{H}_1(\mathbf{Q}_t; \mathbf{r}_{t,s}; \alpha) &= \frac{1}{2} \mathbf{G}^T(\alpha) [\tilde{\mathbf{Q}}_t \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} + \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \tilde{\mathbf{Q}}_t] \mathbf{G}(\alpha) \\
 \mathbf{H}_2(\mathbf{Q}_t; \mathbf{r}_{t,s}; \alpha) &= \frac{1}{2} [\hat{\mathbf{S}}(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{Q}_t; \alpha) + \hat{\mathbf{S}}^T(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{Q}_t; \alpha)]
 \end{aligned}$$

Matriz Constitutiva :

$$\mathbf{C}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_o \mathbf{C}_{11} \mathbf{R}_o^T & \mathbf{R}_o \mathbf{C}_{12} \mathbf{R}_o^T \\ \mathbf{R}_o \mathbf{C}_{12}^T \mathbf{R}_o^T & \mathbf{R}_o \mathbf{C}_{22} \mathbf{R}_o^T \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigidez Tangente :  $\mathbf{K}^N = \mathbf{K}_M^N + \mathbf{K}_G^N$

Parte Material :

$$\mathbf{K}_M^N = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G}^T(\alpha) \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{R} & \mathbf{T}^T(\alpha_{,s}; \alpha) \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^{*T}(\alpha) \end{bmatrix} \mathbf{C}_o \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{G}(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}(\alpha_{,s}; \alpha) & \mathbf{G}^*(\alpha) \end{bmatrix}$$

Parte Geométrica :

$$\mathbf{K}_G^N = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{Q}}_t \mathbf{G}(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^T(\alpha) \tilde{\mathbf{Q}}_t & \Lambda(\mathbf{M}_o; \alpha_{,s}; \alpha) + [\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2](\mathbf{Q}_t; \mathbf{r}_{t,s}; \alpha) & \mathbf{S}(\mathbf{M}_o; \alpha) \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^T(\mathbf{M}_o; \alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Cuadro IV.3.

*Núcleo de rigidez tangente en un sistema triparamétrico.*

Operadores Básicos :

$$d\theta := \mathbf{G}(\alpha) d\alpha$$

$$d\mathbf{G}^T(\alpha) \mathbf{v} := \mathbf{T}(\mathbf{v}, \alpha) d\alpha$$

$$\mathbf{w}^T d\delta \mathbf{G}^T(\alpha) \mathbf{v} = d\alpha^T \Lambda(\mathbf{w}; \mathbf{v}; \alpha) \delta\alpha$$

Operadores y Vectores Auxiliares :

$$\mathbf{Q}_t := \mathbf{R}_t \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{Q}_t; \mathbf{r}_{t,s}; \alpha) = \frac{1}{2} \mathbf{G}^T(\alpha) [ \tilde{\mathbf{Q}}_t \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} + \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \tilde{\mathbf{Q}}_t ] \mathbf{G}(\alpha)$$

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{Q}_t; \mathbf{r}_{t,s}; \alpha) = \frac{1}{2} [ \mathbf{T}(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{Q}_t; \alpha) + \mathbf{T}^T(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{Q}_t; \alpha) ]$$

Matriz Constitutiva :

$$\mathbf{C}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_o \mathbf{C}_{11} \mathbf{R}_o^T & \mathbf{R}_o \mathbf{C}_{12} \mathbf{R}_o^T \\ \mathbf{R}_o \mathbf{C}_{12}^T \mathbf{R}_o^T & \mathbf{R}_o \mathbf{C}_{22} \mathbf{R}_o^T \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigidez Tangente :  $\mathbf{K}^N = \mathbf{K}_M^N + \mathbf{K}_G^N$

Parte Material :

$$\mathbf{K}_M^N = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G}^T(\alpha) \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{R} & \mathbf{T}^T(\alpha, s; \alpha) \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}(\alpha) \end{bmatrix} \mathbf{C}_o \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{G}(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}(\alpha, s; \alpha) & \mathbf{G}^T(\alpha) \end{bmatrix}$$

Parte Geométrica :

$$\mathbf{K}_G^N = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{Q}}_t \mathbf{G}(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^T(\alpha) \tilde{\mathbf{Q}}_t & \Lambda(\mathbf{M}_o; \alpha, s; \alpha) + [\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2](\mathbf{Q}_t; \mathbf{r}_{t,s}; \alpha) & -\mathbf{T}^T(\mathbf{M}_o; -\alpha) \\ \mathbf{0} & -\mathbf{T}(\mathbf{M}_o; -\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Cuadro IV.4.

*Núcleo de rigidez tangente en un sistema vectorial.*

variación dentro del propio grupo de rotaciones  $\mathbf{SO}(3)$ . Si el sistema es triparamétrico, toda variación paramétrica representa al mismo tiempo una variación interna en  $\mathbf{SO}(3)$ , pero en un sistema hiperparamétrico esto sólo es cierto si las variaciones verifican las condiciones (III.113), esto es, si  $\delta g_i = 0$  ( $i: 1, \dots, s$ ). En consecuencia, en estos sistemas

$$\mathbf{K}^N \neq \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{q}^\vee \partial \mathbf{q}^\vee} \quad (\text{IV.86})$$

$$\text{sin embargo, sí es cierto que:} \quad d^2 \Phi = d\mathbf{q}^{\vee T} \mathbf{K}^N \delta \mathbf{q}^\vee \quad (\text{IV.87})$$

para todas las variaciones y diferenciales  $\delta \mathbf{q}^\vee$  y  $d\mathbf{q}^\vee$  tales que  $\delta g_i = 0$  y  $dg_i = 0$ . Esto es, la expresión de  $\mathbf{K}^N$  del cuadro (IV.3), deducida para los sistemas triparamétricos, se puede utilizar también en los hiperparamétricos para calcular  $d^2 \Phi$  siempre y cuando los parámetros y sus diferenciales se mantengan en la restricción  $g(\alpha_i) = 0$ .

Conviene advertir que en los sistemas hiperparamétricos el orden de las matrices geométrica y material  $\mathbf{K}_M^N$  y  $\mathbf{K}_G^N$  depende de la dimensión “s” del sistema de parametrización de las rotaciones. Si este sistema es triparamétrico, las submatrices que figuran en  $\mathbf{K}_M^N$  y  $\mathbf{K}_G^N$  son cuadradas de orden 3, incluidas las matrices nulas  $\mathbf{0}$ ; sin embargo, si el número de parámetros es mayor, los órdenes de éstas varían siendo la mayor parte de ellas rectangulares:

$$\mathbf{K}_M^N = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}]_{3 \times 3} & [\mathbf{0}]_{3 \times 3} \\ -[\mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{R}]_{S \times 3} & [\mathbf{T}^T]_{S \times 3} \\ [\mathbf{0}]_{S \times 3} & [\mathbf{G}^{*T}]_{S \times 3} \end{bmatrix} [\mathbf{C}_o]_{6 \times 6} \begin{bmatrix} [\mathbf{R}^T]_{3 \times 3} & [\mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{G}]_{3 \times S} & [\mathbf{0}]_{3 \times S} \\ [\mathbf{0}]_{3 \times 3} & [\mathbf{T}]_{3 \times S} & [\mathbf{G}^*]_{3 \times S} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_G^N = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}]_{3 \times 3} & -[\tilde{\mathbf{Q}}_t \mathbf{G}]_{3 \times S} & [\mathbf{0}]_{3 \times S} \\ [\mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{Q}}_t]_{S \times 3} & [\mathbf{\Lambda} + \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2]_{S \times S} & [\mathbf{S}]_{S \times S} \\ [\mathbf{0}]_{S \times 3} & [\mathbf{S}^T]_{S \times S} & [\mathbf{0}]_{S \times S} \end{bmatrix}$$

Por otra parte, al calcular en un sistema hiperparamétrico la matriz de rigidez por el método de minimización, el paso de la relación (IV.41) a la ecuación incremental (IV.42) no se puede dar por no ser independientes todos los parámetros. De hecho, las



relaciones paramétricas  $g(\alpha_i) = 0$  transforman el problema original en un problema de mínimos condicionados, que se resuelve aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange, esto es, ampliando el funcional e introduciendo un conjunto de multiplicadores  $\lambda_i$ , como se indicó en el apartado III.11. Al hacerlo, los parámetros  $\alpha_i$  se independizan y se verifica la condición  $g(\alpha_i) = 0$ , pero la matriz de rigidez tangente modifica su estructura y aumenta su dimensión. Veamos cómo en un caso concreto.

Supongamos que las rotaciones se parametrizan en el sistema de Euler–Rodrigues y que la estructura consta de  $N$  nodos; en este supuesto, las relaciones de ligadura de los parámetros nodales son  $g(\alpha_i)$ :  $\alpha_i^2 - 1 = 0$  ( $i$ : 1, 2... $N$ ), y el funcional ampliado:  $\Phi^* = \Phi - \sum \lambda_i (\alpha_i^2 - 1)$ , con lo cual las matrices  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  definidas en (III.115) valen:

$$\mathbf{D} = 2 \begin{bmatrix} q_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & q_N \end{bmatrix}_{7N \times 7N} \quad \therefore \quad q_k^T = [0, 0, 0, \alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k, \alpha_4^k] \quad (\text{IV.88})$$

$$\mathbf{E} = 2 \begin{bmatrix} \lambda_1 \hat{\mathbf{I}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_N \hat{\mathbf{I}} \end{bmatrix}_{7N \times 7N} \quad \text{con} \quad \hat{\mathbf{I}} := \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{I}_4 \end{bmatrix}_{7 \times 7}$$

y la matriz de rigidez tangente del sistema (III.116) y la ecuación incremental (IV.43) se transforman en:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{q_k} + 2\lambda_k q_k]_{7N} \\ [q_k^2 - 1]_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[ \int_S \boldsymbol{\Sigma}'^T \mathbf{K}^N \boldsymbol{\Sigma}' ds - \mathbf{X}_{km} - \mathbf{E} \right]_{7N \times 7N} & -\mathbf{D}_{7N \times N} \\ -\mathbf{D}_{N \times N}^T & \mathbf{0}_{N \times N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}_{7N} \\ \Delta \lambda_N \end{bmatrix} \quad (\text{IV.89})$$

(nótese que el término  $\mathbf{R}_{q_k}$  del nuevo vector de fuerzas residuales es el mismo que figura en el Cuadro IV.1). El principal problema de este sistema de parametrización es que incrementa el orden de la matriz de rigidez y la dimensión del vector  $\Delta \mathbf{q}$  tantas veces como multiplicadores de Lagrange o relaciones de ligadura se den en el sistema. Además, los ceros que figuran en la diagonal principal de (IV.89) pueden causar problemas numéricos, si bien éstos pueden atenuarse añadiéndole a  $\Phi^*$  una función de penalización del tipo:  $p \sum g^2(\alpha_i)$ , donde  $p$  es una constante muy pequeña [B4].

**IV. 9.– LA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE EN EL MÉTODO DEL EQUILIBRIO**

Esta viene dada por el triple producto  $\Xi^{-T}[\mathbf{K}^N - \mathcal{U}(\mathbf{P}^\nabla)]\Xi^{-1}$  que figura en (IV.52), y aunque pueda sorprender a simple vista, su expresión desarrollada es muy simple. Para probarlo, descompongamos el núcleo de rigidez tangente  $\mathbf{K}^N$  como se indica en (IV.67.a), y calculemos por separado los productos  $\Xi^{-T} \mathbf{K}_M^N \Xi^{-1}$  y  $\Xi^{-T} [\mathbf{K}_G^N - \mathcal{U}(\mathbf{P}^\nabla)] \Xi^{-1}$ , que corresponden a las componentes material y geométrica.

Para la componente material,  $\mathbf{K}_M^N$ , el producto se calcula de inmediato ya que

$$\Xi^{-T} \mathbf{K}_M^N \Xi^{-1} = \Xi^{-T} \mathbf{A} \mathbf{C}_0 \mathbf{A}^T \Xi^{-1}$$

y considerando (IV.63), se tiene:

$$\Xi^{-T} \mathbf{K}_M^N \Xi^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{t,s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{C}_t \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.90})$$

$$\text{con} \quad \mathbf{C}_t := \mathbf{\Pi}_t \mathbf{C} \mathbf{\Pi}_t^T \quad (\text{IV.91})$$

El cálculo de la parte geométrica  $\Xi^{-T} [\mathbf{K}_G^N - \mathcal{U}(\mathbf{P}^\nabla)] \Xi^{-1}$  no es tan sencillo ya que exige conocer el operador  $\mathcal{U}(\mathbf{P}^\nabla)$ , definido en (IV.48) por medio de la relación  $d\Xi^T \mathbf{v} = \mathcal{U}(\mathbf{v}) d\mathbf{q}^\nabla$  en la que  $\mathbf{v}$  es un vector arbitrario de la misma dimensión  $3+2s$  que  $\mathbf{P}^\nabla$ . Descomponiendo este vector  $\mathbf{v}$  en otros tres vectores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  de dimensiones  $3$ ,  $s$  y  $s$ , respectivamente, y diferenciando (IV.8), se obtiene el siguiente resultado en un sistema triparamétrico:

$$\begin{aligned} d\Xi^T \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & d\mathbf{G}^T(\boldsymbol{\alpha}) & d_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{G}^T, s(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{G}^T, s(\boldsymbol{\alpha}; d\boldsymbol{\alpha}, s) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & d\mathbf{G}^T(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}(\mathbf{c}; \boldsymbol{\alpha}, s; \boldsymbol{\alpha}) + \hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{b}; \boldsymbol{\alpha}) & \hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{c}; \boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{c}; \boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ d\boldsymbol{\alpha} \\ d\boldsymbol{\alpha}, s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{Z}$  viene definido por (II.87). Como además, en virtud de (II.92):

$$\mathbf{Z}(\mathbf{M}_t; \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{M}_o; \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{M}}_t \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})$$

sustituyendo el vector  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  por  $\mathbf{P}^\nabla$  (IV.64), se obtiene  $\mathcal{U}(\mathbf{P}^\nabla)$ :

$$\mathcal{U}(\mathbf{P}^\nabla; \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{22} & \hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{M}_t; \boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{M}_t; \boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.92})$$

$$\text{con} \quad \mathbf{U}_{22} = \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{M}_o; \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) - \hat{\mathbf{S}}^T(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s}; \mathbf{Q}_t; \boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{M}}_t \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{IV.93})$$

Este resultado vale para un sistema triparamétrico o hiperparamétrico; en efecto, en un sistema arbitrario se tiene,

$$d\Xi^T \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & d\mathbf{G}^T(\boldsymbol{\alpha}) & d\mathbf{T}^T(\boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{R}^T + \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) d\mathbf{R}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & d\mathbf{G}^T(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.94})$$

Como además se tiene:  $\mathbf{T}^T d\mathbf{R}^T \mathbf{c} = -\mathbf{T}^T \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{c}} \mathbf{G} d\boldsymbol{\alpha}$ , por un lado; por otro,

$$d\mathbf{T}^T(\boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{R}^T \mathbf{c} = \boldsymbol{\Lambda}^T(\mathbf{R}^T \mathbf{c}; \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} + d_{\boldsymbol{\alpha}_s} \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{R}^T \mathbf{c},$$

y  $d_{\boldsymbol{\alpha}_s} \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{R}^T \mathbf{c} = \mathbf{S}(\mathbf{R}^T \mathbf{c}; \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha}_s$  –pues, de acuerdo con la definición (II.67.b),  $d\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha}$ –, el operador  $\mathcal{U}(\mathbf{P}^\nabla)$  que se desprende en este caso de (IV.94) es el mismo operador (IV.92) que se había obtenido para los sistemas triparamétricos. Siendo esto así, la matriz  $\mathbf{K}_G^N - \mathcal{U}(\mathbf{P}^\nabla)$  queda reducida en cualquier sistema de parametrización a:

$$\mathbf{K}_G^N - \mathcal{U}(\mathbf{P}^\nabla) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{Q}}_t \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^T(\boldsymbol{\alpha}) \tilde{\mathbf{Q}}_t & \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{M}_t; \boldsymbol{\alpha}) - \hat{\mathbf{S}}^T(\mathbf{M}_t; \boldsymbol{\alpha}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.95})$$

$$\mathbf{L} = [\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2](\mathbf{Q}_t; \mathbf{r}_{t,s}; \boldsymbol{\alpha}) + \hat{\mathbf{S}}^T(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s}; \mathbf{Q}_t; \boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{R}^T \tilde{\mathbf{M}}_t \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{IV.96})$$

Multiplicando ahora (IV.96) a derecha e izquierda por  $\Xi^{-T}$  y  $\Xi^{-1}$ , y aplicando (II.71.b), se deduce:

$$\Xi^{-T} [\mathbf{K}_G^N - \mathcal{U}(\mathbf{P}^\nabla)] \Xi^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{Q}}_t & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_t & \mathbf{F}^T \mathbf{L} \mathbf{F} - \mathbf{F}^T,{}_s \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{M}}_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{M}}_t & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.97})$$

cuyo término central vale,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^T \mathbf{L} \mathbf{F} - \mathbf{F}^T,{}_s \mathbf{G}^T \tilde{\mathbf{M}}_t &= \\ \mathbf{F}^T \mathbf{H}_1(\mathbf{Q}_t; \mathbf{r}_{t,s}) \mathbf{F} - \mathbf{F}^T [\mathbf{H}_2(\mathbf{Q}_t; \mathbf{r}_{t,s}) - \hat{\mathbf{S}}^T(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s}, \mathbf{Q}_t)] \mathbf{F} - \\ [\mathbf{F}^T,{}_s \mathbf{G}^T + \mathbf{F}^T \mathbf{T}^T \mathbf{R}^T] \tilde{\mathbf{M}}_t & \end{aligned}$$

Ahora bien, el último corchete se anula aplicando (II.80.c); por otra parte,

$$\mathbf{F}^T \mathbf{H}_1(\mathbf{Q}_t; \mathbf{r}_{t,s}; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{F} = \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \tilde{\mathbf{Q}}_t + \tilde{\mathbf{Q}}_t \tilde{\mathbf{r}}_{t,s}] \quad (\text{IV.98.a})$$

y además, teniendo en cuenta (IV.83), (II.71.b) y (AI.8),

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^T [\mathbf{H}_2(\mathbf{Q}_t; \mathbf{r}_{t,s}; \boldsymbol{\alpha}) - \hat{\mathbf{S}}^T(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s}, \mathbf{Q}_t; \boldsymbol{\alpha})] \mathbf{F} &= \\ = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T [\hat{\mathbf{S}}(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s}, \mathbf{Q}_t; \boldsymbol{\alpha}) - \hat{\mathbf{S}}^T(\tilde{\mathbf{r}}_{t,s}, \mathbf{Q}_t; \boldsymbol{\alpha})] \mathbf{F} &= \\ = \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{Q}}_t \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} - \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \tilde{\mathbf{Q}}_t] & \end{aligned} \quad (\text{IV.98.b})$$

con lo cual, se llega finalmente a la sencilla expresión:

$$\Xi^{-T} [\mathbf{K}_G^N - \mathcal{U}(\mathbf{P}^\nabla)] \Xi^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{Q}}_t & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_t & \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \tilde{\mathbf{Q}}_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{M}}_t & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.99})$$

Sumando ahora (IV.99) y (IV.90) se obtiene la expresión general de la matriz núcleo de rigidez tangente correspondiente al método del equilibrio; esto es,  $\Xi^{-T} [\mathbf{K}^N - \mathcal{U}(\mathbf{P}^\nabla)] \Xi^{-1}$ .

Esta matriz de rigidez se puede obtener también actualizando simplemente el sistema referencial Lagrangiano, como se verá en el apartado IV.11.

Si se generaliza ahora la notación (III.12–13) y se escribe:

$$\bar{\mathbf{\Pi}}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_t \end{bmatrix} \quad (\text{IV.100})$$

teniendo en cuenta además que  $\mathbf{t} := \mathbf{R}_t^T \mathbf{r}_{t,s}$  –en virtud de (III.3)– y, por tanto, que  $\tilde{\mathbf{t}} := \mathbf{R}_t^T \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \mathbf{R}_t$ , las matrices de rigidez tangente material y geométrica (IV.90) y (IV.99) se pueden escribir en la forma todavía más simple de Simó [S2]:

$$\mathbf{\Xi}^{-T} \mathbf{K}_M^N \mathbf{\Xi}^{-1} = \bar{\mathbf{\Pi}}_t \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{t}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \tilde{\mathbf{t}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{\Pi}}_t^T \quad (\text{IV.101.a})$$

$$\mathbf{\Xi}^{-T} [\mathbf{K}_G^N - \mathcal{U}(\mathbf{P}^V)] \mathbf{\Xi}^{-1} = \bar{\mathbf{\Pi}}_t \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{Q}} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{Q}} & \tilde{\mathbf{t}} \tilde{\mathbf{Q}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{\Pi}}_t^T \quad (\text{IV.101.b})$$

Estas expresiones del núcleo de rigidez tangente en una formulación Lagrangiana Actualizada son las más sencillas de cuantas hemos obtenido. El único inconveniente que presentan es su asimetría. Ésta se debe al hecho de haber utilizado un método de equilibrio para obtener  $\mathbf{K}_T$  y no un método de minimización –con el primer método, las rotaciones se componen en el espacio físico, donde no conmutan, y con el segundo, en el paramétrico, donde sí conmutan–. Esta asimetría característica de las vigas 3D no se aprecia sin embargo en otros sistemas Cosserat. Por ejemplo, en estructuras laminares, las componentes normales de las rotaciones y los momentos se pueden eliminar por no intervenir en las ecuaciones de equilibrio. Eliminando estas componentes, los vectores  $d\boldsymbol{\theta}$ ,  $\mathbf{M}_t$  y  $\delta\boldsymbol{\theta}$  quedan contenidos en un mismo plano y se anula el término asimétrico  $d\boldsymbol{\theta}^T \tilde{\mathbf{M}}_t \delta\boldsymbol{\theta}$  de la expresión  $\delta d\Phi$ , resultando en definitiva también simétrica la matriz de rigidez tangente laminar en el espacio físico [B5] –en el paramétrico lo es necesariamente–.

**IV. 10.– RELACIÓN ENTRE LOS PROCEDIMIENTOS II.a Y II.b**

Las ecuaciones incrementales en los procedimientos II.a y II.b son:

$$\mathbf{R}_k = \left[ \int_S \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \boldsymbol{\Xi}^{-T} [\mathbf{K}^N - \boldsymbol{\mathcal{U}}(\mathbf{P}^\nabla)] \boldsymbol{\Xi}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}'_m ds - \mathbf{X}_{km}(\mathbf{P}) \right] \Delta \mathbf{a}_m \quad (\text{IV.102})$$

$$\mathbf{R}_k = \boldsymbol{\Theta}_k^{-T} \left[ \int_S \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \mathbf{K}^N \boldsymbol{\Sigma}'_m ds + \mathcal{T}(\mathbf{R}_k) \delta_{km} - \mathbf{X}_{km} \right] \boldsymbol{\Theta}_m^{-1} \Delta \mathbf{a}_m \quad (\text{IV.103})$$

Como ambas relacionan las mismas variables  $\mathbf{R}_k$  y  $\Delta \mathbf{a}_k$ , es lógico que entre ellas se dé algún tipo de relación. A continuación vamos a demostrar que a pesar de las diferencias formales entre las expresiones (IV.102) y (IV.103), estas ecuaciones son equivalentes al tender a cero el tamaño de los elementos finitos.

Para ello, probemos primero que la ecuación (IV.102) se puede escribir de forma análoga a (IV.103). Esta nueva expresión de (IV.102) resulta además interesante porque revela la dependencia de las partes antimétricas de ambas ecuaciones con las fuerzas residuales  $\mathbf{R}$ , lo que tiene interesantes consecuencias prácticas, como veremos.

En efecto, dado que  $d\boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{P}^\nabla = \boldsymbol{\mathcal{U}}(\mathbf{P}^\nabla) d\mathbf{q}^\nabla$ , en virtud de (IV.48);  $\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_o = \boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{P}^\nabla$ , por (IV.61); y además  $\boldsymbol{\Xi} d\boldsymbol{\Xi}^{-1} = -d\boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{\Xi}^{-1}$  y  $d\mathbf{q}^\nabla = \boldsymbol{\Xi}^{-1} d\mathbf{a}^\nabla$ , se tiene

$$d\boldsymbol{\Xi}^{-T} \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_o = -\boldsymbol{\Xi}^{-T} d\boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{P}^\nabla = -\boldsymbol{\Xi}^{-T} \boldsymbol{\mathcal{U}}(\mathbf{P}^\nabla) \boldsymbol{\Xi}^{-1} d\mathbf{a}^\nabla$$

y así, 
$$\int_S \delta \mathbf{a}^{\nabla T} \boldsymbol{\Xi}^{-T} \boldsymbol{\mathcal{U}}(\mathbf{P}^\nabla) \boldsymbol{\Xi}^{-1} d\mathbf{a}^\nabla ds = -\int_S \delta \mathbf{a}^{\nabla T} d\boldsymbol{\Xi}^{-T} \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_o ds \quad (\text{IV.104})$$

Ahora bien, la relación (III.73) del Capítulo III establece que en un elemento de viga de extremos A y B, se verifica siempre:

$$\int_S \boldsymbol{\sigma}_o^T \mathbf{A}^T \mathbf{D} \delta \mathbf{q} ds = [\delta \mathbf{q}^T \mathbf{P}_q]_A^B - \int_S \delta \mathbf{q}^T \mathbf{D}^- [\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_o] ds \quad (\text{IV.105})$$

esto es, 
$$\int_S \boldsymbol{\sigma}_o^T \mathbf{A}^T \mathbf{D} [\boldsymbol{\Theta}^{-1} \delta \mathbf{a}] ds = [\delta \mathbf{a}^T \mathbf{P}]_A^B - \int_S \delta \mathbf{a}^T \boldsymbol{\Theta}^{-T} \mathbf{D}^- [\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_o] ds \quad (\text{IV.106})$$

y, por tanto, sustituyendo  $\delta \mathbf{q}$  por  $d\delta \mathbf{q}$  en (IV.105), y  $\delta \mathbf{a}$  por  $d\delta \mathbf{a}$  en (IV.106),

$$\int_S \boldsymbol{\sigma}_o^T \mathbf{A}^T \mathbf{D} d\delta \mathbf{q} ds = \left[ d\delta \mathbf{q}^T \mathbf{P}_q \right]_A^B - \int_S d\delta \mathbf{q}^T \mathbf{D}^{-1} [\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_o] ds \quad (\text{IV.107})$$

$$\int_S \mathbf{P}_q^{\nabla T} \mathbf{D} [\boldsymbol{\Theta}^{-1} d\delta \mathbf{a}] ds = \left[ d\delta \mathbf{a}^T \mathbf{P} \right]_A^B - \int_S d\delta \mathbf{a}^T \boldsymbol{\Theta}^{-T} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P}_q^{\nabla} ds \quad (\text{IV.108})$$

y como  $d\delta \mathbf{q} = d\boldsymbol{\Theta}^{-1} \delta \mathbf{a} + \boldsymbol{\Theta}^{-1} d\delta \mathbf{a}$ , restando (IV.108) de (IV.107), también se cumple:

$$\int_S \boldsymbol{\sigma}_o^T \mathbf{A}^T \mathbf{D} [d\boldsymbol{\Theta}^{-1} \delta \mathbf{a}] ds = \left[ \delta \mathbf{a}^T d\boldsymbol{\Theta}^{-T} \mathbf{P}_q \right]_A^B - \int_S \delta \mathbf{a}^T d\boldsymbol{\Theta}^{-T} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_o ds \quad (\text{IV.109})$$

Ahora bien,  $\boldsymbol{\sigma}_o^T \mathbf{A}^T \mathbf{D} [d\boldsymbol{\Theta}^{-1} \delta \mathbf{a}] = \boldsymbol{\sigma}_o^T \mathbf{A}^T d\boldsymbol{\Xi}^{-1} \delta \mathbf{a}^{\nabla}$  (IV.110)

y al ser  $d\boldsymbol{\Theta}^{-T} = -\boldsymbol{\Theta}^{-T} d\boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\Theta}^{-T}$ , y  $\mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_o = \boldsymbol{\Theta}^T \mathbf{P}^i$  de acuerdo con (III.74.b),

$$d\boldsymbol{\Theta}^{-T} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_o = -\boldsymbol{\Theta}^{-T} d\boldsymbol{\Theta}^T \mathbf{P}^i = -\boldsymbol{\Theta}^{-T} \mathcal{T}(\mathbf{P}^i) \boldsymbol{\Theta}^{-1} d\mathbf{a} \quad (\text{IV.111})$$

De modo que, llevando (IV.110) y (IV.111) a (IV.109), se deduce esta relación:

$$\int_S \boldsymbol{\sigma}_o^T \mathbf{A}^T d\boldsymbol{\Xi}^{-1} \delta \mathbf{a}^{\nabla} ds = \int_S \delta \mathbf{a}^T \boldsymbol{\Theta}^{-T} \mathcal{T}(\mathbf{P}^i) \boldsymbol{\Theta}^{-1} d\mathbf{a} ds - \left[ \delta \mathbf{a}^T \boldsymbol{\Theta}^{-T} \mathcal{T}(\mathbf{P}) \boldsymbol{\Theta}^{-1} d\mathbf{a} \right]_A^B \quad (\text{IV.112})$$

El último término puede eliminarse si no hay cargas concentradas en los extremos de la viga –si las hubiere, se pueden sustituir por cargas repartidas con una función de distribución del tipo  $\delta$  de Dirac–, con lo cual de (IV.104) y (IV.112) se extrae:

$$\int_S \delta \mathbf{a}^{\nabla T} \boldsymbol{\Xi}^{-T} \boldsymbol{\mathcal{U}}(\mathbf{P}^{\nabla}) \boldsymbol{\Xi}^{-1} d\mathbf{a}^{\nabla} ds = - \int_S \delta \mathbf{a}^T \boldsymbol{\Theta}^{-T} \mathcal{T}(\mathbf{P}^i) \boldsymbol{\Theta}^{-1} d\mathbf{a} ds \quad (\text{IV.113})$$

y así, (IV.102) puede escribirse:

$$\mathbf{R}_k = \left[ \int_S \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \boldsymbol{\Xi}^{-T} \mathbf{K}^N \boldsymbol{\Xi}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}'_m ds + \int_S \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \boldsymbol{\Theta}^{-T} \mathcal{T}(\mathbf{P}^i) \boldsymbol{\Theta}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_m ds - \mathcal{X}_{km}(\mathbf{P}) \right] \Delta \mathbf{a}_m \quad (\text{IV.114})$$

o bien, teniendo en cuenta que  $\mathcal{T}(\mathbf{R}) = \mathcal{T}(\mathbf{P}^i + \mathbf{P})$  y la definición de  $\mathbf{X}_{km}$ , de esta otra forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_k = & \left[ \int_S \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \boldsymbol{\Xi}^{-T} \mathbf{K}^N \boldsymbol{\Xi}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}'_m ds + \int_S \boldsymbol{\Sigma}_k{}^T \boldsymbol{\Theta}^{-T} \mathcal{T}(\mathbf{R}) \boldsymbol{\Theta}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_m ds - \right. \\ & \left. - \int_S \boldsymbol{\Sigma}_k{}^T \boldsymbol{\Theta}^{-T} [\mathcal{T}(\mathbf{P}) + \boldsymbol{\Theta}^T [\mathbf{P}\nabla] \boldsymbol{\Theta}] \boldsymbol{\Theta}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_m ds \right] \Delta \mathbf{a}_m \end{aligned} \quad (\text{IV.115})$$

Si el campo de fuerzas es conservativo, en esta expresión el único término no simétrico es el segundo, que depende de las fuerzas residuales  $\mathbf{R}$ . En teoría, por tanto, la matriz de rigidez debiera ser simétrica en la posición de equilibrio, por anularse en ella  $\mathbf{R}$ , y en un entorno de esta posición, casi simétrica –en la práctica, la simetría se puede perder por problemas computacionales, como veremos más adelante–.

Escrita (IV.102) en la forma (IV.115), la equivalencia de ésta con (IV.103) se prueba fácilmente. Así, por definición de  $\mathbf{X}_k$ , se tiene:

$$\boldsymbol{\Theta}_k^{-T} \mathbf{X}_{km} \boldsymbol{\Theta}_m^{-1} = \boldsymbol{\Theta}_k^{-T} \left[ \int_S \boldsymbol{\Sigma}_k{}^T [\mathcal{T}(\mathbf{P}) + \boldsymbol{\Theta}^T [\mathbf{P}\nabla] \boldsymbol{\Theta}] \boldsymbol{\Sigma}_m ds \right] \boldsymbol{\Theta}_m^{-1} \quad (\text{IV.116})$$

Por otra parte, si  $d$  es el diámetro de los elementos y las funciones  $\boldsymbol{\Theta}(s)$  son uniformemente continuas en el dominio  $S$ , se verifica, en general, para toda matriz  $\mathcal{F}$ :

$$\boldsymbol{\Theta}_k^{-T} \int_S \mathcal{F}(s) ds \boldsymbol{\Theta}_m^{-1} = \int_S \boldsymbol{\Theta}^{-T}(s) \mathcal{F}(s) \boldsymbol{\Theta}^{-1}(s) ds + \boldsymbol{\varepsilon}_{km} \quad \text{con} \quad \lim_{d \rightarrow 0} \boldsymbol{\varepsilon}_{km} = \mathbf{0} \quad (\text{IV.117})$$

De modo que las últimas integrales en (IV.115) y (IV.103) convergen al mismo límite al tender  $d$  a cero –nótese que  $\boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\Sigma}_k = \boldsymbol{\Sigma}_k \boldsymbol{\Theta}$ , al ser  $\mathcal{A} = g(s) \mathbf{I}$  y  $\mathcal{B} = g(s) \mathbf{I}$  en  $\boldsymbol{\Sigma}$  –:

$$\int_S \boldsymbol{\Sigma}_k{}^T \boldsymbol{\Theta}^{-T} [\mathcal{T}(\mathbf{P}) + \boldsymbol{\Theta}^T [\mathbf{P}\nabla] \boldsymbol{\Theta}] \boldsymbol{\Theta}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_m ds \rightarrow \boldsymbol{\Theta}_k^{-T} \mathbf{X}_{km} \boldsymbol{\Theta}_m^{-1} \quad (\text{IV.118})$$

Lo mismo ocurre con las segundas integrales si se consideran los siguientes hechos: en primer lugar, que las fuerzas residuales nodales  $\mathbf{R}_k$  en el método II.a valen:

$$\mathbf{R}_k = \int_S \boldsymbol{\Sigma}_k{}^T \mathbf{R} ds$$



en segundo lugar, que el operador  $\mathcal{T}(\mathbf{v})$  es lineal en  $\mathbf{v}$ , que  $\mathcal{B} = g(s)\mathbf{I}$  en  $\Sigma$  y que, por tanto,

$$\mathcal{T}(\mathbf{R}_k) = \mathcal{T}\left(\int_S \Sigma_k^T \mathbf{R} ds\right) = \int_S \Sigma_k^T \mathcal{T}(\mathbf{R}) ds \quad (\text{IV.119})$$

y, finalmente, que como  $\Sigma_m(s)\Delta\mathbf{a}_m = \mathbf{1} \forall s$ , si  $\Delta\mathbf{a}_m = \mathbf{1}$ , y el soporte de la función matricial  $\Sigma_k(s)$  se limita a los elementos que contienen el nodo  $k$ , en el límite, al tender el tamaño del elemento a cero, se tiene:

$$\mathcal{T}(\mathbf{R}_k)\Delta\mathbf{a}_k \rightarrow \int_S \Sigma_k^T \mathcal{T}(\mathbf{R})\Sigma_m \Delta\mathbf{a}_m ds$$

y así, 
$$\Theta_k^{-T} \mathcal{T}(\mathbf{R}_k) \Theta_k^{-1} \delta_{km} \Delta\mathbf{a}_m \rightarrow \int_S \Sigma_k^T \Theta^{-T} \mathcal{T}(\mathbf{R}) \Theta^{-1} \Sigma_m ds \Delta\mathbf{a}_m \quad (\text{IV.120})$$

Siendo esto así, sólo resta comprobar que las primeras integrales en (IV.115) y (IV.103) tienden al mismo límite cuando  $d \rightarrow 0$ . La demostración es inmediata ya que

$$\Sigma'_k \Theta^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}'_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{B}_k \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathcal{B}'_k \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \Xi^{-1} \Sigma'_k = \begin{bmatrix} \mathcal{A}'_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{B}_k \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathcal{B}_k \mathbf{F}_s + \mathcal{B}'_k \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.121})$$

y como al disminuir el tamaño del elemento el operador  $\mathbf{F}_s$  y las funciones de interpolación  $\mathcal{B}_k$  se mantienen acotadas, pero no las derivadas  $\mathcal{B}'_k$ , el término  $\mathcal{B}_k \mathbf{F}_s$  llega a ser despreciable frente a  $\mathcal{B}'_k \mathbf{F}$ , y al tender  $d \rightarrow 0$ , se tiene:

$$\Xi^{-1} \Sigma'_k \rightarrow \Sigma'_k \Theta^{-1} \quad (\text{IV.122})$$

con lo cual, 
$$\int_S \Sigma_k^T \Xi^{-T} \mathbf{K}^N \Xi^{-1} \Sigma'_m ds \rightarrow \Theta_k^{-T} \int_S \Sigma_k^T \mathbf{K}^N \Sigma'_m ds \Theta_m^{-1} \quad (\text{IV.123})$$

Con esto queda demostrada la equivalencia entre las ecuaciones (IV.102) y (IV.103) cuando el tamaño de los elementos finitos tiende a cero, y la identidad de las ecuaciones (IV.102) y (IV.115) cuando las integrales que figuran en ellas se calculan de forma exacta.

**IV. 11.– FORMULACIÓN LAGRANGIANA ACTUALIZADA**

Adoptando un sistema referencial Lagrangiano Actualizado para describir los movimientos generales de la viga, los resultados de los Cuadros IV.3 y IV.4 se simplifican mucho y las diferencias entre los tres tipos de ecuaciones incrementales se reducen a cuestiones de detalle. En efecto, en este supuesto, los tensores fundamentales  $\mathbf{F}(\mathbf{0})$  y  $\mathbf{G}(\mathbf{0})$  son constantes y sus derivadas nulas; los operadores  $\Xi$  y  $\Theta$  son también constantes y los productos  $\Xi^{-1}\Sigma'$  y  $\Sigma'\Theta^{-1}$  iguales a :

$$\Xi^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}(\mathbf{0}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \Theta = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}(\mathbf{0}) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.124})$$

$$\Xi^{-1}\Sigma' = \Sigma'\Theta^{-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}(\mathbf{0})\mathcal{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}(\mathbf{0})\mathcal{B}' \end{bmatrix} \quad (\text{IV.125})$$

Por otra parte, en el sistema referencial actualizado, al ser  $\alpha_{,s} = \alpha = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{R}(\mathbf{0}) = \mathbf{I}$ , se tiene también:  $\mathbf{G}^*(\mathbf{0}) = \mathbf{G}(\mathbf{0})$  en virtud de (II.32), y  $\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{v}, \mathbf{0}) = \mathbf{S}^T(\mathbf{v}, \mathbf{0})$  por (II.77); además los términos  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{\Lambda}$  se pueden eliminar de (IV.70) y (IV.85) por ser  $\mathbf{T}(\mathbf{0}; \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$  y  $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{M}_0; \mathbf{0}; \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ , y el núcleo  $\mathbf{K}^N$  del Cuadro IV.3 se reduce a:

$$\mathbf{K}_{M_0}^N = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G}^T(\mathbf{0})\tilde{\mathbf{r}}_{o,s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^T(\mathbf{0}) \end{bmatrix} \mathbf{C}_o \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \tilde{\mathbf{r}}_{o,s} \mathbf{G}(\mathbf{0}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}(\mathbf{0}) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.126.a})$$

$$\mathbf{K}_{G_0}^N = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{Q}}_o \mathbf{G}(\mathbf{0}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^T(\mathbf{0})\tilde{\mathbf{Q}}_o & [\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2](\mathbf{Q}_o; \mathbf{r}_{o,s}) & \mathbf{S}(\mathbf{M}_0; \mathbf{0}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^T(\mathbf{M}_0; \mathbf{0}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.126.b})$$

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{Q}_o; \mathbf{r}_{o,s}) = \frac{1}{2} \mathbf{G}^T(\mathbf{0}) [\tilde{\mathbf{Q}}_o \tilde{\mathbf{r}}_{o,s} + \tilde{\mathbf{r}}_{o,s} \tilde{\mathbf{Q}}_o] \mathbf{G}(\mathbf{0}) \quad (\text{IV.126.c})$$

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{Q}_o ; \mathbf{r}_{o, s}) = \frac{1}{2} [\mathbf{S}(\tilde{\mathbf{r}}_{o, s} \mathbf{Q}_o ; \mathbf{0}) + \mathbf{S}^T(\tilde{\mathbf{r}}_{o, s} \mathbf{Q}_o ; \mathbf{0})] \quad (\text{IV.126.d})$$

Además, denotando  $\hat{\mathbf{K}}^N$  al producto  $\Xi^{-T}[\mathbf{K}^N - \mathcal{U}(\mathbf{P}^\nabla)]\Xi^{-1}$ , la parte geométrica de éste en el sistema actualizado queda así:

$$\hat{\mathbf{K}}_{G_0}^N := \Xi^{-T}[\mathbf{K}_G^N - \mathcal{U}(\mathbf{P}^\nabla)]\Xi^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{Q}}_o & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_o & \tilde{\mathbf{r}}_{o, s} \tilde{\mathbf{Q}}_o & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{M}}_o & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.127})$$

y  $\mathcal{T}$  se reduce a:

$$\mathcal{T}(\mathbf{P}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}(\mathbf{M}; \mathbf{0}) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.128})$$

Llevando todos estos resultados a (IV.43), (IV.52) y (IV.58) se obtienen las ecuaciones incrementales actualizadas (I), (II.a) y (II.b) de los Cuadros IV.1 y IV.2.

Los resultados dependen, por tanto, de los tensores  $\mathbf{G}(\mathbf{0})$  y  $\mathbf{S}(\mathbf{v}; \mathbf{0})$ , y éstos, a su vez, del sistema de parametrización que se adopte para las rotaciones. A continuación se presentan las matrices de rigidez en los sistemas más importantes.

Los operadores  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{S}$  en los sistemas triparamétricos de Rodrigues, natural y no objetivos –ángulos de Euler y Cardan–, así como en el tetraparamétrico de Euler–Rodrigues, se calculan en el Apéndice III. Para  $\boldsymbol{\alpha}_{, s} = \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ , valen:

$$\text{Rodrigues} \quad \mathbf{G}(\mathbf{0}) = 2\mathbf{I} \quad \therefore \quad \mathbf{S}(\mathbf{v}, \mathbf{0}) = 2\tilde{\mathbf{v}} \quad (\text{IV.129.a})$$

$$\text{Natural:} \quad \mathbf{G}(\mathbf{0}) = \mathbf{I} \quad \therefore \quad \mathbf{S}(\mathbf{v}, \mathbf{0}) = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{v}} \quad (\text{IV.129.b})$$

$$\text{Ángulos de Euler:} \quad \mathbf{G}(\mathbf{0}) = \mathbf{I} \quad \therefore \quad \mathbf{S}(\mathbf{v}, \mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ v^2 & 0 & 0 \\ 0 & -v^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.129.c})$$

$$\text{Ángulos Cardan:} \quad \mathbf{G}(\mathbf{0}) = \mathbf{I} \quad \therefore \quad \mathbf{S}(\mathbf{v}, \mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ v^3 & 0 & 0 \\ -v^2 & v^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.129.d})$$

En el sistema tetraparamétrico de Euler–Rodrigues,  $\mathbf{G}(\mathbf{0}) = [\mathbf{0} ; 2\mathbf{I}]$  no depende de  $\lambda$ . Los demás operadores son independientes de  $\boldsymbol{\alpha}$ , si se toma  $\lambda = 0$ , y vienen dados por las expresiones (AIII.50) y (AIII.51) del Apéndice III.

Llevando estos resultados a (IV.126), se obtiene en el sistema de *Rodrigues*:

$${}^R \mathbf{K}_{M0}^N = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -2\tilde{\mathbf{r}}_{o,s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{C}_o \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 2\tilde{\mathbf{r}}_{o,s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.130.a})$$

$${}^R \mathbf{K}_{G0}^N = 2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{Q}}_o & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_o & \tilde{\mathbf{Q}}_o \tilde{\mathbf{r}}_{o,s} + \tilde{\mathbf{r}}_{o,s} \tilde{\mathbf{Q}}_o & \tilde{\mathbf{M}}_o \\ \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{M}}_o & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.130.b})$$

Y en el sistema *natural*:

$${}^N \mathbf{K}_{M0}^N = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{o,s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{C}_o \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \tilde{\mathbf{r}}_{o,s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.131.a})$$

$${}^N \mathbf{K}_{G0}^N = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{Q}}_o & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_o & \frac{1}{2} [\tilde{\mathbf{Q}}_o \tilde{\mathbf{r}}_{o,s} + \tilde{\mathbf{r}}_{o,s} \tilde{\mathbf{Q}}_o] & \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{M}}_o \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{M}}_o & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.131.b})$$

En los sistemas triparamétricos, cuando la parte lineal en  $\boldsymbol{\alpha}$  del tensor  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})$  es antimétrica pura, la matriz de rigidez presenta una forma sencilla del tipo (IV.130)–(IV.131), ya que en este supuesto, de acuerdo con (II.71), el tensor  $\mathbf{S}(\mathbf{v}, \mathbf{0})$  vale:

$$\mathbf{S}(\mathbf{v}, \mathbf{0}) = \frac{1}{2} \mathbf{G}^T(\mathbf{0}) \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{G}(\mathbf{0}) \quad (\text{IV.132})$$

y al ser  $\mathbf{S}$  antimétrico, se tiene  $\mathbf{H}_2 \equiv \mathbf{0}$ , quedando finalmente.

$$\mathbf{K}_0^N = \mathcal{G}^T [ {}^N\mathbf{K}_{M_0}^N + {}^N\mathbf{K}_{G_0}^N ] \mathcal{G} \quad (\text{IV.133})$$

con

$$\mathcal{G} := \Xi^{-1}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}(\mathbf{0}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}(\mathbf{0}) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.134})$$

Esto es, en los sistemas triparamétricos en los que la parte lineal del tensor  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})$  es antimétrica pura, los núcleos de todas las matrices de rigidez tangente actualizadas  $\mathbf{K}_0^N$  son congruentes con el núcleo del sistema de parametrización natural, y por tanto congruentes entre sí.

Por otra parte, comparando (IV.127) y (IV.131), se observa que la matriz de rigidez actualizada del método I en el sistema natural coincide con la parte simétrica de esta misma matriz en el método II.a,

$${}^N\mathbf{K}_0^N = \text{Sim} \left[ \hat{\mathbf{K}}_0^N \right] \quad (\text{IV.135})$$

( $\text{Sim}[\mathbf{A}] := \frac{1}{2}[\mathbf{A} + \mathbf{A}^T]$ ). Y en general, en cualquier sistema triparamétrico:

$$\mathbf{K}_0^N = \mathcal{G}^T \text{Sim} \left[ \hat{\mathbf{K}}_0^N \right] \mathcal{G} \quad (\text{IV.136})$$

En los sistemas no objetivos –ángulos de Euler y Cardan– la matriz de rigidez presenta una forma similar a las anteriores, coincidiendo exactamente con (IV.131.a) la parte material, si bien la parte geométrica difiere de (IV.131.b).

Por último, en el sistema tetraparamétrico de Euler–Rodrigues y para el caso más sencillo, que corresponde al valor  $\lambda = 0$ , se tiene para la parte material del núcleo de rigidez tangente:

$$\mathbf{K}_{M0}^N = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ 2 \tilde{\mathbf{r}}_{o, s} & -2 \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 2 \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{C}_o \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & 2 \tilde{\mathbf{r}}_{o, s} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & -2 \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & 2 \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.137.a})$$

y para la parte geométrica de este mismo núcleo:

$$\mathbf{K}_{G0}^N = 2 \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & -\tilde{\mathbf{Q}}_{o} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & \mathbf{M}_{o}^T \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{o} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & [\tilde{\mathbf{Q}}_{o} \tilde{\mathbf{r}}_{o, s} + \tilde{\mathbf{r}}_{o, s} \tilde{\mathbf{Q}}_{o}] & -\mathbf{M}_{o} & \tilde{\mathbf{M}}_{o} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & -\mathbf{M}_{o}^T & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{M}_{o} & -\tilde{\mathbf{M}}_{o} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{11 \times 11} \quad (\text{IV.137.b})$$

Como era de esperar, entre las matrices (IV.130) y (IV.137) existen importantes semejanzas. La diferencia fundamental es el orden de la matriz  $\mathbf{K}_0^N$ , que en el primer caso es 9 y en este último 11.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, juntamente con (IV.124–125), las ecuaciones incrementales en los tres casos I, II.a y II.b. se pueden plantear de inmediato. En concreto, en el sistema paramétrico natural y en los no objetivos de Euler y Cardan, al ser  $\mathbf{G}(\mathbf{0}) = \mathbf{I}$  y por tanto  $\Xi = \mathcal{G} = \mathbf{I}_3$  y  $\Theta = \mathbf{I}_2$ , estas ecuaciones se reducen a:

$$\text{Método I} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}_{qk} = \left[ \int_S \Sigma_k^T \mathbf{K}_0^N \Sigma_m' ds - \mathbf{X}_{km} \right] \Delta \mathbf{q}_m \\ \mathbf{R}_{qk} = \int_S \Sigma_k^T \mathbf{P} ds - \int_S \Sigma_k^T \mathbf{A}_t \sigma_o ds \end{array} \right. \quad (\text{IV.138.a})$$

$$\text{Método II.a} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}_k = \left[ \int_S \Sigma_k^T \hat{\mathbf{K}}_0^N \Sigma_m' ds - \Xi_{km}(\mathbf{P}) \right] \Delta \mathbf{a}_m \\ \mathbf{R}_k = \int_S \Sigma_k^T \mathbf{P} ds - \int_S \Sigma_k^T \mathbf{A}_t \sigma_o ds \end{array} \right. \quad (\text{IV.138.b})$$

$$\text{Método II.b} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}_k = \left[ \int_S \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \mathbf{K}_0^N \boldsymbol{\Sigma}'_m ds - \mathbf{X}_{km} + \mathbf{T}(\mathbf{R}_k) \delta_{km} \right] \Delta \mathbf{a}_m \\ \mathbf{R}_k = \boldsymbol{\Theta}_k^{-T} \mathbf{R}_{qk} = \int_S \boldsymbol{\Sigma}_k^T \mathbf{P} ds - \int_S \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \mathbf{A}_t \boldsymbol{\sigma}_o ds \end{array} \right. \quad (\text{IV.138.c})$$

con

$$\mathbf{A}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{r}}_{t,s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Pi}_t \quad (\text{IV.139.a})$$

$$\mathcal{T}(\mathbf{R}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}(\mathbf{M}_R; \mathbf{0}) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.139.b})$$

$$\mathbf{X}_{km} = \int_S \boldsymbol{\Sigma}_k^T \mathcal{T}(\mathbf{P}) \boldsymbol{\Sigma}_m ds + \mathcal{X}_{km} \quad (\text{IV.139.c})$$

$$\mathcal{X}_{km} = \int_S \boldsymbol{\Sigma}_k^T \nabla \mathbf{P} \boldsymbol{\Sigma}_m ds \quad (\text{IV.139.d})$$

Obsérvese que las fuerzas residuales valen lo mismo en los tres casos, aun cuando sus significados sean distintos, y que el operador  $\mathbf{A}_t$  depende de la posición que ocupa el sistema después de aplicarle el incremento de carga y, en consecuencia, no puede obtenerse anulando sin más los giros y desplazamientos de las expresiones generales, como ocurría con la matriz de rigidez.

El conjunto de ecuaciones incrementales (IV.138) es muy simple si se lo compara con el que se obtiene utilizando un sistema referencial Lagrangiano generalizado y un sistema de parametrización arbitrario. Esto explica la sencillez del modelo de Simó [S1, S2], que parte de un sistema referencial actualizado y adopta el más sencillo de los sistemas triparamétricos que cumplen la condición  $\mathbf{G}(\mathbf{0}) = \mathbf{I}$ , el natural.

Comparando las ecuaciones (IV.138.a), (IV.138.b) y (IV.138.c), se observa que la diferencia entre las matrices de rigidez tangente en los tres casos se reduce a su parte geométrica  $\mathbf{K}_{G0}^N$  y a los términos adicionales que se suman al núcleo. En concreto, en el sistema natural, con cargas constantes y en ausencia de momentos exteriores aplicados a la viga ( $\mathbf{X}_{km} = \mathcal{X}_{km} = \mathbf{0}$ ), la matriz de rigidez correspondiente a la pareja de nodos (k, m) en los tres casos, es:

$$\mathbf{K}_{km}^I = \int_S \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \text{Sim} [\hat{\mathbf{K}}_0^N] \boldsymbol{\Sigma}'_m ds \quad (\text{IV.140.a})$$

$$\mathbf{K}_{km}^{II} = \int_S \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \hat{\mathbf{K}}_0^N \boldsymbol{\Sigma}'_m ds \quad (\text{IV.140.b})$$

$$\mathbf{K}_{km}^{III} = \int_S \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \text{Sim} [\hat{\mathbf{K}}_0^N] \boldsymbol{\Sigma}'_m ds + \mathcal{T}(\mathbf{R}_k) \delta_{km} \quad (\text{IV.140.c})$$

Una vez más se comprueba que en el espacio paramétrico la matriz de rigidez  $\mathbf{K}^I$  coincide con la parte simétrica de la matriz de rigidez en el espacio físico  $\mathbf{K}^{II}$ ; como, además, los vectores de fuerzas residuales se calculan con la misma expresión en ambos casos, la mera sustitución de la matriz de rigidez asimétrica  $\mathbf{K}^{II}$  por su parte simétrica  $\mathbf{K}^I$  es suficiente para trasladar el problema del espacio físico al paramétrico. La diferencia entre utilizar una u otra matriz en un proceso iterativo de aproximación a la posición de equilibrio  $\mathbf{q}$ , como es el método de Newton, estriba en la forma en que se converge a esta solución, ya que si se utiliza  $\mathbf{K}^I$  la aproximación se lleva a cabo reduciendo las fuerzas residuales generalizadas, y si se utiliza  $\mathbf{K}^{II}$  reduciendo las fuerzas residuales convencionales. Por tanto, aunque las posiciones de partida y la solución final sean las mismas, los caminos recorridos para pasar de una a otra son distintos en ambos casos –ver figura IV.1–; no obstante, al estar el sistema actualizado

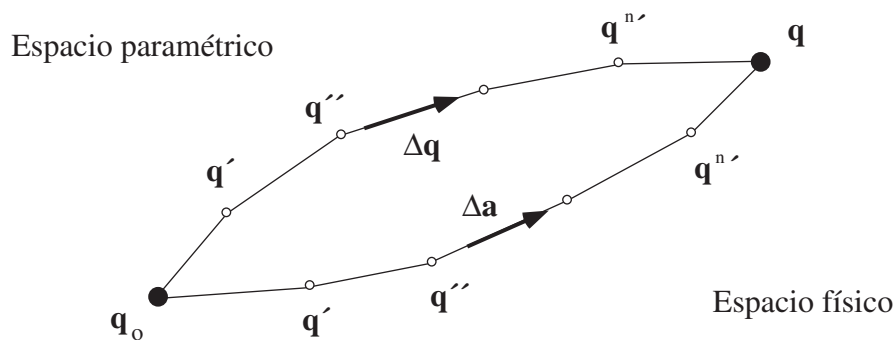


Figura IV.1

*Recorridos seguidos en el proceso incremental de Newton–Raphson aplicando las técnicas de minimización y equilibrio (métodos I y II.a)*



estos caminos se aproximan mucho entre sí y las diferencias numéricas entre las matrices de rigidez  $\mathbf{K}^I$  y  $\mathbf{K}^{II}$  son pequeñas; dicho de otra forma,  $\mathbf{K}^{II}$  es “casi” simétrica.

Esta similitud entre  $\mathbf{K}^I$  y  $\mathbf{K}^{II}$  fue aprovechada por Simó y Vu-Quoc [S1, S2] para simetrizar directamente  $\mathbf{K}^{II}$ , al comprobar que el cambio apenas afectaba al proceso de convergencia –la semejanza no se da si el sistema no está actualizado, como veremos en el siguiente apartado–. El artificio de sustituir la verdadera matriz de rigidez por otra aproximada se utiliza con frecuencia en el método de Newton–Raphson para evitar la inversión repetida de la matriz de rigidez, ahorrando así tiempo de cálculo. Además, para garantizar que  $\mathbf{K}^I$  y  $\mathbf{K}^{II}$  convergían cuadráticamente a la misma solución, Simó probó la identidad de ambas matrices en la posición de equilibrio, y aunque no parece que advirtiera la diferencia esencial de planteamiento que supone optar por una u otra de las matrices  $\mathbf{K}^I$  y  $\mathbf{K}^{II}$  –ver Cuadro IV.1 y figura IV.1–, sin embargo mostró que tal diferencia desaparece cuando los momentos residuales se anulan, y que, por tanto,  $\mathbf{K}^{II} \rightarrow \mathbf{K}^I$  a medida que el proceso converge.

Analizando el problema desde otro punto de vista, se ha probado a lo largo de este capítulo que este artificio de simetrizar  $\mathbf{K}^{II}$  es algo más que una mera técnica computacional; supone, de hecho, un cambio de espacio de trabajo y de variables independientes, de modo que la convergencia a la posición de equilibrio queda garantizada no por razones numéricas dependientes en última instancia del valor de la norma  $\|\mathbf{K}^I - \mathbf{K}^{II}\|$ , sino por razones estrictamente mecánicas. Por otra parte, la relación de la matriz de rigidez con las fuerzas residuales es explícita en la versión II.b del método del equilibrio y se refleja claramente en la estructura de la propia matriz de rigidez, como se aprecia en (IV.58) y (IV.140.c). Para la versión II.a del método del equilibrio se puede probar lo mismo desde supuestos completamente generales, como se indicó en el apartado IV.10.

Para finalizar, vamos a mostrar la relación que existe entre las matrices de rigidez tangente en las formulaciones Lagrangianas Total (FLT) y Actualizada (FLA). Aunque esta relación ya ha sido probada para otros modelos y desde otros supuestos, es interesante comprobar para la viga Cosserat que los resultados coinciden en líneas generales con los obtenidos en los modelos clásicos [B1, S1, S2]. Nos limitaremos a comparar las matrices de rigidez obtenidas por el método del equilibrio.

Centrándonos en el procedimiento II.a, de acuerdo con (IV.101), las matrices de rigidez geométrica y material en los sistemas actualizado y total son respectivamente:

$$\hat{\mathbf{K}}_0^N = \bar{\mathbf{\Pi}}_0 \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{t}}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \tilde{\mathbf{t}}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{Q}} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{Q}} & \tilde{\mathbf{t}}_0 \tilde{\mathbf{Q}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right] \bar{\mathbf{\Pi}}_0^T \quad (\text{IV.141.a})$$

$$\hat{\mathbf{K}}_t^N = \bar{\mathbf{\Pi}}_t \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{t}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \tilde{\mathbf{t}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{Q}} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{Q}} & \tilde{\mathbf{t}} \tilde{\mathbf{Q}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right] \bar{\mathbf{\Pi}}_t^T \quad (\text{IV.141.b})$$

Ahora bien, como en el sistema actualizado la rotación inicial  $\mathbf{R}_0$  es igual a  $\mathbf{R}_t$  y se tiene  $\bar{\mathbf{\Pi}}_0 \equiv \bar{\mathbf{\Pi}}_t$ , la diferencia entre los dos núcleos de rigidez  $\hat{\mathbf{K}}_0^N$  y  $\hat{\mathbf{K}}_t^N$  se limita a los respectivos vectores tangentes en el sistema local:  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{t}_0$ , que son, por definición:

$$\mathbf{t} := \mathbf{R}_t^T \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad \therefore \quad \mathbf{t}_0 := \mathbf{R}_0^T \frac{d\mathbf{r}}{ds_0},$$

con lo cual, 
$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_0 \frac{ds_0}{ds} \quad (\text{IV.142})$$

En cuanto a las matrices elementales de rigidez tangente correspondientes a la pareja de nodos (k, m), se tiene:

$$\hat{\mathbf{K}}_0 = \int_S \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \hat{\mathbf{K}}_0^N \boldsymbol{\Sigma}'_m ds_0 \quad \therefore \quad \hat{\mathbf{K}}_t = \int_S \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \hat{\mathbf{K}}_t^N \boldsymbol{\Sigma}'_m ds \quad (\text{IV.143})$$

Aquí, de nuevo, la diferencia radica únicamente en el cambio de  $ds$  por  $ds_0$ ; esto es, en la sustitución de la longitud medida en el sistema inicial,  $s_0$ , por la longitud medida en el sistema deformado  $s$ . Como una de las hipótesis de partida es que las deformaciones de la viga son muy pequeñas,  $ds_0/ds \approx 1$ , la diferencia entre las dos matrices de rigidez (IV.143) es despreciable. En definitiva, bajo este supuesto, las formulaciones Actualizada y Total son equivalentes.

#### IV. 12.– RELACIÓN ENTRE $\mathbf{K}^N$ Y $\hat{\mathbf{K}}^N$

En los apartados IV.7 y IV.8 se hallaron las expresiones generales de las matrices de rigidez tangente  $\mathbf{K}^N$  y  $\hat{\mathbf{K}}^N = \Xi^{-T}[\mathbf{K}^N - \mathcal{U}(\mathbf{P}^V)]\Xi^{-1}$ . Partiendo de estos resultados es sencillo probar para los sistemas triparamétricos la siguiente relación entre las componentes geométrica y material de  $\mathbf{K}^N$  y  $\hat{\mathbf{K}}^N$  (el símbolo  $\text{Sim}[\ ]$  representa la parte simétrica de una matriz):

$$\mathbf{K}_M^N = \Xi^T \hat{\mathbf{K}}_M^N \Xi \quad \therefore \quad \mathbf{K}_G^N = \Xi^T \text{Sim}[\hat{\mathbf{K}}_G^N] \Xi + \Delta_G \quad (\text{IV.144})$$

siendo,

$$\text{Sim}[\hat{\mathbf{K}}_G^N] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -2\tilde{\mathbf{Q}}_t & \mathbf{0} \\ 2\tilde{\mathbf{Q}}_t & [\tilde{\mathbf{Q}}_t \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} + \tilde{\mathbf{r}}_{t,s} \tilde{\mathbf{Q}}_t] & \tilde{\mathbf{M}}_t \\ \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{M}}_t & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.145})$$

y

$$\Delta_G = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda(\mathbf{M}_o; \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{H}_2(\mathbf{Q}_t; \mathbf{r}_{t,s}; \boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.146})$$

con

$$\mathbf{X} = -\text{Sim}[\mathbf{G}^{*T}(\boldsymbol{\alpha})\tilde{\mathbf{M}}_o\mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha})]$$

$$\mathbf{Y} = \text{Sim}[\mathbf{S}(\mathbf{M}_o; \boldsymbol{\alpha})]$$

En definitiva, los núcleos de rigidez tangente  $\mathbf{K}^N$  y  $\hat{\mathbf{K}}^N$  que se obtienen equilibrando el sistema o minimizando su energía interna, están relacionados entre sí del siguiente modo:

$$\mathbf{K}^N = \Xi^T \text{Sim}[\hat{\mathbf{K}}^N] \Xi + \Delta_G \quad (\text{IV.147})$$

En los sistemas triparamétricos esta relación es exacta; en los hiperparamétricos, como el de Euler–Rodrigues, lo que realmente se cumple es:

$$d\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{K}^N d\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\alpha}^T [\Xi^T \text{Sim}[\hat{\mathbf{K}}^N] \Xi + \Delta_G] d\boldsymbol{\alpha} \quad (\text{IV.148})$$

para todas las variaciones paramétricas  $d\alpha$  y  $\delta\alpha$  compatibles con las relaciones de ligadura  $g(\alpha_i) = 0$ . Al no ser independientes, por tanto, las componentes de los vectores  $d\alpha$  y  $\delta\alpha$ , las igualdades (IV.148) y (IV.147) no son equivalentes. No obstante, como al calcular la posición de equilibrio, el mínimo de la energía total  $\Phi$  se busca sólo en la restricción  $g(\alpha_i) = 0$ , la sustitución en las ecuaciones incrementales de  $\mathbf{K}^N$  por (IV.147) afecta a los pasos intermedios del proceso iterativo pero no al resultado final, como se indicó en el apartado IV.8, y es válida desde un punto de vista operativo.

Una conclusión inmediata que se desprende de (IV.147) es que en una formulación Lagrangiana Generalizada no es cierta la relación  $\mathbf{K}^N = \text{Sim}[\hat{\mathbf{K}}^N]$ ; para serlo, la matriz residual  $\Delta_G$  debe anularse y  $\Xi$  coincidir con la matriz identidad. Estas condiciones se cumplen si se elige un sistema de parametrización en el que  $\mathbf{G}(\mathbf{0}) = \mathbf{I}$  y se adopta una formulación Lagrangiana Actualizada, en cuyo caso se anulan todos los términos de  $\Delta_G$ :  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{X}$ , por las razones apuntadas en el apartado anterior, y  $\mathbf{H}_2$  e  $\mathbf{Y}$  por ser  $\hat{\mathbf{S}}$  antimétrico.

#### IV. 13.– FORMULACIONES LAGRANGIANAS TOTAL Y GENERALIZADA

En el apartado III.2 se describieron las dos formulaciones Total y Generalizada, y en este capítulo se ha deducido el núcleo de rigidez tangente en el supuesto más general, que corresponde a la formulación Lagrangiana Generalizada. Queda, no obstante, una tarea pendiente: relacionar ambas formulaciones e intentar extraer algunas conclusiones de tipo práctico. En primer lugar, importa notar que la forma general de las matrices de rigidez de los cuadros IV.3 y IV.4 no cambia al pasar de una formulación a otra. Lo que varía realmente son los valores de los desplazamientos y parámetros que definen la geometría de la viga durante el proceso de deformación, ya que la configuración de referencia es distinta en las dos formulaciones; esto es, lo que cambian son los valores de las variables cinemáticas  $\mathbf{q}$ , sus gradientes  $\mathbf{q}^\vee$  y también las rotaciones  $\mathbf{R}_0$  de las bases locales nodales en la configuración de referencia, como se indica en la figura IV.2. Por tanto, desde el punto de vista formal no hay diferencias entre ambas formulaciones. Ahora bien, desde un punto de vista operativo, al correr los programas de cálculo y medir su eficacia en tiempos de

ejecución y estabilidad en la convergencia del método de Newton–Raphson, entonces sí se aprecian diferencias entre las formulaciones Actualizada, Total y Generalizada, y aun cuando éstas no sean muy acusadas, la tendencia es clara: cuanto más general es una formulación, tanto más lentos e inestables se vuelven en ella los cálculos.

La razón de este comportamiento es simple: cuanto más pequeños son los giros que se manejan, más alejados nos encontramos de las singularidades propias de los sistemas de parametrización. Por ello, cuanto más actualizado se encuentre el sistema referencial, tanto mejor; de ahí la ventaja que se aprecia con frecuencia en la formulación Actualizada frente a la Total y a la Generalizada. Excepcionalmente, en algunas ocasiones, las singularidades del espacio paramétrico no se encuentran alejadas del origen, sino muy cerca de éste, pudiendo incluso llegar a coincidir con él. Esto ocurre, por ejemplo, en el sistema de parametrización de Euler–Rodrigues. En tal caso, no queda más remedio que girar o deformar previamente la viga con el fin de alejarnos de esta zona singular. Naturalmente, la formulación Actualizada en estos casos es impracticable y no queda más remedio que recurrir a las formulaciones Total o Generalizada, si bien los inconvenientes que entraña esta operación no son pocos, como se comprobará en el apartado IV.16.

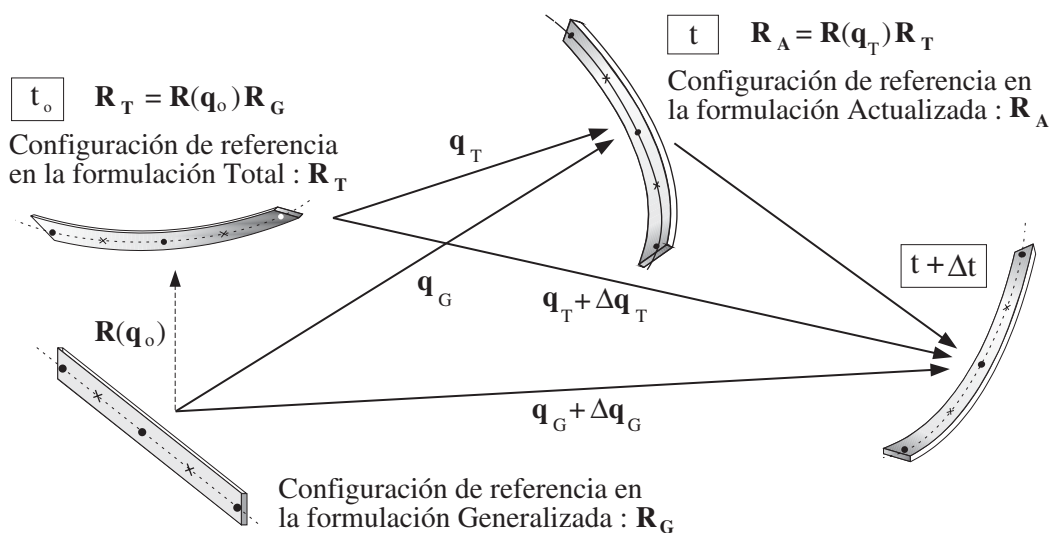


Figura IV.2: Formulaciones Actualizada, Total y Generalizada

#### IV. 14.– INTERPOLACIONES PARAMÉTRICAS NO LINEALES. ESTADOS DE DEFORMACIÓN CONSTANTE

Cuando se aplica el método de los elementos finitos a un sistema lineal como una barra o una viga, se admite que los movimientos de una sección cualquiera  $\mathcal{A}(s)$  del sistema dependen directamente de los desplazamientos y giros de un conjunto de secciones nodales  $\mathcal{A}_k$ . Como la formulación matemática del método resulta tanto más sencilla cuanto más simple es la relación entre las variables cinemáticas  $\mathbf{q}^\vee(s)$  de esta sección y los movimientos nodales  $\mathbf{q}_k$ , generalmente se acepta que ésta sea lineal en  $\mathbf{q}_k$  y polinómica en  $s$ , con un grado bajo en el orden de los polinomios. De hecho, las matrices de rigidez de los cuadros IV.1 y IV.2 se han obtenido desde este supuesto básico, cuya formulación expresa se encuentra en (IV.1) y (IV.2). Sin embargo, aún siendo este tipo de relación el más sencillo, no es necesariamente el que mejor reproduce los estados elementales de deformación de una viga, como puede ser el estado de flexión con curvatura constante. Para reproducir estos estados básicos de deformación constante, es preciso sustituir la clásica interpolación lineal, implícita en (IV.1)–(IV.3), por otra no lineal del tipo:

$$\mathbf{q}^\vee(s) = \mathcal{F}_k(\mathbf{q}_k; s) \quad (\text{IV.149})$$

Este cambio no sólo afecta a la expresión concreta de las matrices de interpolación (IV.2) y (IV.3), sino también a la estructura general de la matriz de rigidez, ya que al suponer ahora no lineal la relación  $\mathbf{q}^\vee(\mathbf{q}_k; s)$ , a la derivada segunda de la función de densidad de energía elástica  $\Psi$  hay que añadirle un nuevo término que incluya la diferencial segunda del vector ampliado de derivadas  $\mathbf{q}^\vee$ :

$$\delta d\Psi = \delta \mathbf{q}^{\vee T} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{q}^\vee \partial \mathbf{q}^\vee} d\mathbf{q}^\vee + \delta d\mathbf{q}^{\vee T} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}^\vee}$$

Este término no se ha considerado hasta ahora por ser nula la diferencial segunda  $\delta d\mathbf{q}^\vee$  en una relación lineal. No obstante, en la práctica puede eliminarse, como veremos enseguida, dejando inalterada la estructura básica de la matriz de rigidez.

Diferenciando (IV.149), se tienen además,

$$d\mathbf{q}^\vee(s) = \mathbf{\Gamma}'_k(\mathbf{q}_k; s) d\mathbf{q}_k \quad (\text{IV.150})$$

donde  $\mathbf{\Gamma}'_k(\mathbf{q}_k; s)$  son las nuevas matrices de interpolación (nótese que, a diferencia de (IV.2) y (IV.5), estas matrices  $\mathbf{\Gamma}'$  dependen no sólo de la coordenada curvilínea  $s$  sino también de las variables nodales  $\mathbf{q}_k$ ).

Y por tanto,

$$\delta d\Psi = \delta \mathbf{q}_k^T \mathbf{\Gamma}'_k{}^T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{q}^\vee \partial \mathbf{q}^\vee} \mathbf{\Gamma}'_k d\mathbf{q}_k + \delta d\mathbf{q}^\vee{}^T \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}^\vee} \quad (\text{IV.151})$$

Ahora bien, el último término en esta igualdad puede despreciarse y no es preciso calcularlo, como ya hemos comentado. Al eliminarlo, la matriz de rigidez que se obtiene no es ya la matriz tangente sino otra distinta, lo que no impide que se alcance la convergencia en un proceso iterativo de Newton–Raphson como comprobaremos más adelante. Esta forma de proceder representa en realidad una variante del método de Newton-Raphson *modificado*. Eliminando, pues, este término, las matrices (IV.140) de la formulación Actualizada, por ejemplo, se transforman en éstas otras:

$$\mathbf{K}_{km}^I = \int_S \mathbf{\Gamma}'_k{}^T \text{Sim} [\hat{\mathbf{K}}_0^N] \mathbf{\Gamma}'_m ds \quad (\text{IV.152.a})$$

$$\mathbf{K}_{km}^{II} = \int_S \mathbf{\Gamma}'_k{}^T \hat{\mathbf{K}}_0^N \mathbf{\Gamma}'_m ds \quad (\text{IV.152.b})$$

$$\mathbf{K}_{km}^{III} = \int_S \mathbf{\Gamma}'_k{}^T \text{Sim} [\hat{\mathbf{K}}_0^N] \mathbf{\Gamma}'_m ds + \mathcal{T}(\mathbf{R}_k) \delta_{km} \quad (\text{IV.152.c})$$

Aunque a simple vista pueda parecer una tarea fácil, no es sencillo calcular las funciones de interpolación  $\mathbf{\Gamma}'$  en los casos elementales que nos interesan, y que son fundamentalmente: 1) el estado de deformación con curvatura constante [C6, J1], típico de barras o vigas sometidas a flexión pura; y 2) el estado de deformación helicoidal, que se da en los resortes [B2, B3]. En el primer caso, el cambio de interpolación sólo afecta a los giros de las secciones transversales –las traslaciones siguen interpolándose linealmente como en el apartado IV.2–, mientras que en el

segundo la interpolación afecta tanto a los giros como a las traslaciones de las secciones. De cualquier forma, como la curvatura se supone constante en ambos casos, la energía de flexión se integra de forma exacta con un sólo punto de Gauss y es suficiente calcular las matrices  $\mathbf{\Gamma}'$  en un sólo punto del elemento, por ejemplo, el punto central. El cálculo de estas matrices se desarrolla en el Apéndice IV, obteniéndose los siguientes resultados para un elemento de dos nodos –evidentemente, no tiene sentido usar elementos de más nodos si la curvatura y la deformación transversal son constantes–:

$$\delta \mathbf{q}^\nabla(L/2) = \mathbf{\Gamma}'_1 \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_1 \\ \delta \boldsymbol{\alpha}_1 \end{bmatrix} + \mathbf{\Gamma}'_2 \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_2 \\ \delta \boldsymbol{\alpha}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.153})$$

*Estado de deformación con curvatura constante:*

$$\mathbf{\Gamma}'_1 = -\frac{1}{L} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \widehat{\mathbf{E}}^\text{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^\text{T}(\boldsymbol{\alpha}) \left[ \mathbf{R}(L\boldsymbol{\tau}_0/2) \mathbf{R}_1^\text{T} \mathbf{F}(L\boldsymbol{\tau}) + \mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \widehat{\mathbf{E}}^\text{T} \right] \end{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_1 \quad (\text{IV.154})$$

$$\mathbf{\Gamma}'_2 = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \widehat{\mathbf{E}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^\text{T}(\boldsymbol{\alpha}) \left[ \mathbf{R}(L\boldsymbol{\tau}_0/2) \mathbf{R}_1^\text{T} \mathbf{F}(L\boldsymbol{\tau}) - \mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \widehat{\mathbf{E}} \right] \end{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_2$$

*Estado de deformación helicoidal:*

$$\mathbf{\Gamma}'_1 = -\frac{1}{L} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{C}} & \widehat{\mathbf{D}} [\mathbf{F}(L\boldsymbol{\tau}) + L\tilde{\boldsymbol{\tau}}] \\ \mathbf{0} & -\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \widehat{\mathbf{E}}^\text{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^\text{T}(\boldsymbol{\alpha}) \left[ \mathbf{R}(L\boldsymbol{\tau}_0/2) \mathbf{R}_1^\text{T} \mathbf{F}(L\boldsymbol{\tau}) + \mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \widehat{\mathbf{E}}^\text{T} \right] \end{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_1 \quad (\text{IV.155})$$

$$\mathbf{\Gamma}'_2 = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{C}} & \widehat{\mathbf{D}} \mathbf{F}(L\boldsymbol{\tau}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \widehat{\mathbf{E}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^\text{T}(\boldsymbol{\alpha}) \left[ \mathbf{R}(L\boldsymbol{\tau}_0/2) \mathbf{R}_1^\text{T} \mathbf{F}(L\boldsymbol{\tau}) - \mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}_s; \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \widehat{\mathbf{E}} \right] \end{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_2$$



$$\text{siendo} \quad \Theta_1 := \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}(\alpha_1) \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \Theta_2 := \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}(\alpha_2) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.156})$$

$$\hat{\mathbf{A}} = 1/2 \mathbf{I} + p(\phi) \tilde{\mathbf{e}}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{r}} [\phi^{-1} p(\phi) \tilde{\mathbf{e}}^2 - u(\phi) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}]$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{I} + q(\phi) \tilde{\mathbf{e}}^2 \quad (\text{IV.157})$$

$$\hat{\mathbf{D}} = \phi^{-1} [v(\phi) [\mathbf{r} \otimes \mathbf{e} - (\mathbf{e}^T \mathbf{r}) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}] + q(\phi) [\mathbf{e} \otimes \mathbf{r} - 2\mathbf{r} \otimes \mathbf{e} + (\mathbf{e}^T \mathbf{r}) \mathbf{I}]]$$

$$\hat{\mathbf{E}} := \frac{L}{2} [\mathbf{I} + \text{tag}(\phi/4) \tilde{\mathbf{e}}]$$

$$\text{con} \quad p(\phi) = \frac{\cos(\phi/2) - 1}{2 \text{sen}(\phi/2)} \quad q(\phi) = 1 - \frac{\phi}{2 \text{sen}(\phi/2)} \quad (\text{IV.158})$$

$$u(\phi) = \frac{p(\phi)}{2 \text{sen}(\phi/2)} \quad v(\phi) = 2 - \frac{\phi}{2 \text{sen}(\phi/2)} \left[ 1 + \frac{\phi}{2 \text{tag}(\phi/2)} \right]$$

Estas interpolaciones no son más efectivas que las lineales, pues aunque aproximan mejor la deformación real de la viga, el cálculo de las funciones  $\Gamma'$  complica bastante el proceso de obtención de las matrices de rigidez y aumenta de forma apreciable el tiempo de ejecución de los programas. En general, si se busca mayor precisión, resulta más práctico afinar la malla con un número mayor de elementos o bien utilizar elementos de orden superior, como probaremos con ejemplos más adelante. Además la velocidad de convergencia del método de Newton–Raphson decrece cuando se utilizan directamente los resultados (IV.152), que, repetimos, son sólo expresiones aproximadas de las verdaderas matrices de rigidez tangente.

Si se desea incluir en la matriz de rigidez el término eliminado de (IV.151)

$$\delta d\mathbf{q}^{\nabla T} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}^{\nabla}} \equiv \delta d\mathbf{q}^{\nabla T} \mathbf{P}_q^{\nabla} \quad (\text{IV.159})$$

deberá calcularse previamente la siguiente diferencial:

$$\mathbf{P}_q^{\nu T} \delta \Gamma'_k(\mathbf{q}) d\mathbf{q}_i \quad (IV.160)$$

donde el índice mudo "k" se extiende a todos los nodos del elemento.

Dada la extraordinaria complejidad de las matrices de interpolación  $\Gamma_p$ , el cálculo de estas diferenciales resulta inabordable por vía analítica, por lo que es preciso realizarlo numéricamente a partir de las expresiones (IV.154) y (IV.155). Efectuada dicha derivación, (IV.160) se puede escribir así

$$\delta \mathbf{q}_i^T \mathbf{K}_\Gamma(\mathbf{P}_q^\nu) d\mathbf{q}_i \quad (IV.161)$$

y la expresión general de la matriz de rigidez tangente cuando se minimiza el potencial de la viga y se utiliza una interpolación no lineal queda del siguiente modo:

$$\mathbf{K}_T = \int_S \left[ \Gamma'_k{}^T [\mathbf{K}_M^N + \mathbf{K}_G^N] \Gamma'_k + \mathbf{K}_\Gamma \right] ds \quad (IV.162)$$

En esta última expresión,  $\mathbf{K}_M^N$  y  $\mathbf{K}_G^N$  son las componentes material y geométrica del núcleo de rigidez tangente que se dedujeron en apartados anteriores para distintas formulaciones Lagrangianas,  $\Gamma'_k$  son las matrices de interpolación (IV.154-155) y  $\mathbf{K}_\Gamma$  la componente adicional que tiene en cuenta el efecto de una interpolación no lineal. Puesto que la matriz  $\mathbf{K}_\Gamma$  coincide con el Hessiano de la función escalar  $\mathbf{q}^{\nu T} \mathbf{P}_q^\nu$  –se supone constante el vector  $\mathbf{P}_q^\nu$ –, necesariamente es simétrica. Más adelante, se probará con ejemplos que esta componente  $\mathbf{K}_\Gamma$  puede eliminarse de (IV.162) y simplificarse con ello el cálculo de  $\mathbf{K}_T$ .

Para mejorar la eficacia del procedimiento algunos investigadores han ensayado el cálculo directo de las variaciones de la curvatura y de la deformación transversal del elemento, y a partir de ellas de las variaciones  $\delta U$  y  $\delta dU$ , evitando así tener que interpolar el vector cinemático  $\delta \mathbf{q}$ . Esto comporta un cálculo de la matriz de rigidez algo más simple del mostrado en este apartado, si bien los resultados obtenidos hasta la fecha [B2, B3] no mejoran los procedimientos expuestos en este capítulo y no se pueden extender fácilmente a otros tipos de estructuras flexibles como las láminas.

#### IV. 15.– NO LINEALIDAD MATERIAL

Hasta ahora sólo se ha considerado la no linealidad geométrica de la viga, suponiendo el material hiperelástico y lineal. Ahora bien, esta simplificación resulta excesiva y poco realista cuando las deformaciones rebasan ciertos límites. Un análisis rigurosos de la no linealidad del sistema exige en estos casos contemplar, al menos, cierto grado de no linealidad en el material. Manteniendo el carácter hiperelástico de éste y suponiendo que las relaciones  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}_g)$  son derivables, vamos a desarrollar seguidamente las bases que permiten incorporar la no linealidad material en el esquema general trazado en apartados anteriores.

El hecho de suponer que las nuevas relaciones constitutivas no son constantes, sino dependientes del vector deformación:  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}_g)$ , no altera el esquema general de las ecuaciones incrementales de equilibrio en una formulación Tangente (consultar los métodos de minimización y equilibrio de los cuadros IV.1 y IV.2). Únicamente afecta al núcleo de rigidez tangente del apartado IV.7, que en este caso debe incorporar la variación de la matriz constitutiva  $\mathbf{C}$ . Concretamente, suponiendo  $d\Psi = \boldsymbol{\epsilon}_g^T \mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}_g) d\boldsymbol{\epsilon}_g$  y  $\boldsymbol{\sigma}_g = \mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}_g) \boldsymbol{\epsilon}_g$ , la diferencial segunda de la función de energía elástica únicamente contendrá los tres términos siguientes::

$$d^2\Psi = d\boldsymbol{\epsilon}_g^T \mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}_g) d\boldsymbol{\epsilon}_g + \boldsymbol{\epsilon}_g^T \mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}_g) d^2\boldsymbol{\epsilon}_g + \boldsymbol{\epsilon}_g^T d\mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}_g) d\boldsymbol{\epsilon}_g \quad (\text{IV.163})$$

De los dos primeros se extraen las componentes material y geométrica,  $\mathbf{K}_M^N$  y  $\mathbf{K}_G^N$ , de la matriz de rigidez. Las expresiones finales de estas componentes coinciden con las mostradas en los cuadros IV.3 y IV.4 si se tiene la precaución de sustituir la matriz constitutiva constante  $\mathbf{C}$  por la matriz variable  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}_g)$  al calcular  $\mathbf{K}_M^N$ ; esto es,

$$\mathbf{K}_M^N = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Pi}_0^T \mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}_g) \boldsymbol{\Pi}_0 \mathbf{A} \quad (\text{IV.164})$$

Por otra parte, el tercer término se puede expresar de forma análoga. En efecto, escribiendo:

$$\boldsymbol{\epsilon}_g^T d\mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}_g) := d\boldsymbol{\epsilon}_g^T \overline{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\epsilon}_g) \quad (\text{IV.165})$$

y teniendo en cuenta que  $d\boldsymbol{\epsilon}_g = \boldsymbol{\Pi}_0 \mathbf{A} d\mathbf{q}^\vee$  –en virtud de (III.8)–; y que, por definición de núcleo de rigidez tangente,  $d^2\Psi = d\mathbf{q}^\vee \mathbf{K}^N d\mathbf{q}^\vee$ , se llega a la siguiente expresión general de  $\mathbf{K}^N$ :

$$\mathbf{K}^N = \overline{\mathbf{K}}_M^N + \mathbf{K}_G^N \quad (\text{IV.166})$$

siendo ahora, 
$$\overline{\mathbf{K}}_M^N = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Pi}_0^T [\mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}_g) + \overline{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\epsilon}_g)] \boldsymbol{\Pi}_0 \mathbf{A} \quad (\text{IV.167})$$

En definitiva, basta sustituir en el cálculo de la matriz de rigidez material la matriz constitutiva  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}_g)$  por la suma  $\mathbf{C}^*(\boldsymbol{\epsilon}_g) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}_g) + \overline{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\epsilon}_g)$  para introducir el efecto no lineal del material. Las componentes  $C^*_{ij}$  de esta nueva matriz se calculan de inmediato:

$$C^*_{ij} = C_{ij} + \epsilon_k \partial_i C_{kj} \quad (\text{IV.168})$$

Nótese que las matrices  $\overline{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\epsilon}_g)$  y  $\mathbf{C}^*(\boldsymbol{\epsilon}_g)$  son también simétricas al igual que  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}_g)$ . En efecto, por ser  $\boldsymbol{\sigma}_g = \mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}_g) \boldsymbol{\epsilon}_g$ , el producto  $\boldsymbol{\epsilon}_g^T \mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}_g)$  deriva de un potencial y es integrable; y por derivar éste de un potencial, necesariamente verifica la relación:

$$\partial_i [\boldsymbol{\epsilon}_g^T \mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}_g)]_j = \partial_j [\boldsymbol{\epsilon}_g^T \mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}_g)]_i$$

(para simplificar la notación, las derivadas parciales con relación a la componente “i” del vector de deformación,  $\partial / \partial \epsilon_i$ , las denotamos simplemente  $\partial_i$ .)

esto es, 
$$C_{ij} + \boldsymbol{\epsilon}_g^T \partial_i [\mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}_g)]_j = C_{ji} + \boldsymbol{\epsilon}_g^T \partial_j [\mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}_g)]_i$$

y puesto que  $\mathbf{C}$  es simétrica, se cumple también la condición:

$$\overline{C}_{ij} = \boldsymbol{\epsilon}_g^T \partial_i [\mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}_g)]_j = \boldsymbol{\epsilon}_g^T \partial_j [\mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}_g)]_i = \overline{C}_{ji}$$

que es, precisamente, lo que deseábamos demostrar.

#### IV. 16.– RESULTADOS Y CONVERGENCIA

Para describir el comportamiento no lineal de una estructura sometida a cargas cuasiestáticas se utilizan normalmente técnicas iterativas de aproximación basadas en el método de Newton-Raphson. Este método reduce un problema general no lineal del tipo  $\Delta \mathbf{P} = \mathbf{f}(\Delta \mathbf{q})$  a una sucesión de problemas lineales valiéndose de las relaciones diferenciales entre la carga y los desplazamientos,  $d\mathbf{P} = \mathbf{f}'d\mathbf{q}$ , que son el fundamento de la formulación Tangente. En los sistemas formados por vigas, la mayor dificultad que presenta el método de Newton-Raphson es precisamente la obtención de estas relaciones diferenciales. Un procedimiento general para obtenerlas se ha descrito en detalle a lo largo de este capítulo. Sin embargo, la velocidad de convergencia hacia la solución final y el esfuerzo computacional requerido para alcanzarla dependen del sistema de parametrización adoptado para las rotaciones, del tipo de carga que se aplica, que puede ser de dirección fija o variable, y del grado y tipo de discretización de los elementos que componen la estructura.

Seguidamente vamos a mostrar con una serie de ejemplos cómo influyen estas variables en el grado de convergencia, en los tiempos de proceso y en la exactitud de los resultados. En estos ejemplos utilizaremos varias estructuras planas y espaciales, y dos clases fundamentales de carga: una de dirección fija en el espacio y otra normal a la propia estructura, esto es, de dirección constante en el sistema convectivo local de la viga. Concretamente, los sistemas estructurales que se van a ensayar son los siguientes.

##### *Sistemas planos*

El primero consiste en una viga recta, en voladizo, de longitud  $L = 1$  y sección transversal constante, con un área  $A = 1$  y una rigidez a flexión  $EI = 2$  (las unidades no se especifican) La viga se carga en su extremo volado con un momento flector  $M_0$  normal al plano X–Y y se discretiza sólo con 5 elementos finitos lineales, como se indica en la figura IV.5.

El segundo sistema consiste en un arco circular con un ángulo de abertura de  $215^\circ$  y un radio  $R = 100$ , articulado en un extremo y empotrado en el otro –figura IV.13.a–. La sección transversal del arco se supone constante, con un área  $A = 12$  e inercia  $I = 1$ .

El módulo de Young vale  $E = 10^6$  y el coeficiente de Poisson se supone nulo. La carga es puntual y se aplica en la clave del arco, que se discretiza con 40 elementos lineales. Debido al sistema desigual de apoyos, el comportamiento del arco es asimétrico.

El tercer sistema es el semipórtico plano de la figura IV.7.a [A5, A6]. Las secciones transversales del soporte y del dintel son idénticas, con un área  $A = 6$  y un momento de inercia  $I = 2$ . El módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson del material valen  $E = 7.2 \cdot 10^6$  y  $\nu = 0.3$ . El pórtico está articulado en sus dos apoyos y la carga se aplica sobre el dintel en el punto situado a  $L/5$  del extremo izquierdo. Tanto el dintel como el soporte se discretizan con 5 elementos cuadráticos.

#### *Sistemas espaciales*

El cuarto sistema consiste en una viga de directriz circular, con un radio  $R = 100$  y un ángulo central de abertura  $\phi = 45^\circ$ . La sección transversal es cuadrada de lado unidad –ver figura IV.3–. La viga descansa en el plano horizontal y tiene un extremo empotrado y el otro libre. Los módulos de elasticidad longitudinal y transversal del material valen:  $E = 10^7$  y  $G = 5 \cdot 10^6$ . La viga se discretiza con 8 elementos lineales y la carga se aplica en el extremo libre, en dirección normal al plano del arco.

El quinto sistema consiste en un angular recto y simétrico de brazos iguales, de longitud  $L = 240$  y sección transversal rectangular de dimensiones  $30 \times 0.6$ ; el módulo de Young y el coeficiente de Poisson valen  $E = 71240$  y  $\nu = 0.31$ . El angular está situado en el plano X-Y y se encuentra sometido en los extremos a dos momentos flectores iguales y de signo opuesto orientados según el eje Z, como se indica en la figura IV.15. Los extremos del angular pueden desplazarse sobre el eje X y girar en el plano X-Y, manteniéndose constantemente el vértice del angular en el plano Y-Z. Dada la simetría de la estructura, sólo es preciso estudiar la mitad de ella, esto es, uno de los brazos, que se discretiza con 20 elementos lineales. Debido a la esbeltez de la sección transversal, el angular presenta una fuerte tendencia al pandeo lateral. Para inducirlo y poder estudiar el comportamiento postcrítico del sistema, se introduce una pequeña perturbación en las proximidades de los puntos de divergencia. Estas perturbaciones suavizan ligeramente las curvas carga-desplazamiento en el entorno de los puntos críticos sin llegar a alterar la forma general de éstas.

El sexto sistema consiste en una pletina semicircular de radio  $R = 100$  con una sección transversal idéntica a la del ejemplo anterior,  $E = 71240$  y  $\nu = 0.31$ . El extremo superior de la pletina se encuentra empotrado y en el inferior se aplica un par torsor en la dirección del eje  $X$  como se muestra en la figura IV.16. La dirección de este momento se supone en primer lugar constante, y después variable, normal a la sección. La pletina se discretiza con 20 elementos lineales.

El último de los sistemas es una estructura reticular en forma de casquete esférico, compuesta por 156 vigas interconectadas en 61 nodos, que se apoya elásticamente en su anillo perimetral. Se trata de una de las típicas mallas geodésicas desarrolladas por B. Fuller cuyo comportamiento estructural analizó y ensayó Makowski [M1, Z2] Las vigas forman una retícula de elementos triangulares con simetría hexagonal respecto al eje central –fig. IV.25–. El radio de la esfera circunscrita al casquete es  $R = 50\sqrt{2}$  y el del anillo perimetral  $r = 50$ . Las vigas son tubulares; las de la retícula interior con un área  $A = 0.008$ , un momento de inercia  $I = 2.5 \cdot 10^{-4}$  y un módulo de torsión  $J = 5 \cdot 10^{-4}$ ; y las del anillo perimetral, mucho más rígidas, con  $A = 0.1$ ,  $I = 2.5 \cdot 10^{-3}$  y  $J = 5 \cdot 10^{-3}$ . El módulo de Young y el coeficiente de Poisson se suponen:  $E = 2 \cdot 10^7$ ,  $\nu = 0.3$ . En este tipo de cubiertas, los esfuerzos de la cubierta se transmiten al cimiento a través de soportes tubulares inclinados de gran rigidez. Para simular la rigidez de estos soportes en el plano horizontal e impedir que la estructura sea lábil, se introducen en los nodos del anillo perimetral apoyos elásticos en las direcciones  $x$  e  $y$  de rigidez  $k_x = k_y = 10^4$ . Al sistema se le aplican dos tipos de carga: una vertical en el nodo cenital, y otra radial uniformemente repartida en la cubierta, pudiendo ser éstas de dirección fija o variable, normal a la superficie de cubierta.

En cuanto a las pruebas que se van a realizar, la primera consiste en comparar los resultados y el grado de convergencia alcanzados al resolver las siete estructuras descritas utilizando los tres métodos de equilibrio y minimización que se mostraron en los cuadros IV.1–IV.2 y los cinco sistemas de parametrización de las rotaciones más importantes: los objetivos de Rodrigues y natural, el hiperparamétrico de Euler–Rodrigues, y los ángulos Cardan y de Euler. Como los resultados de esta prueba son similares para las tres estructuras planas, por un lado, y las cuatro espaciales, por otro, sólo mostramos los resultados obtenidos con las más simples de estos dos grupos, que son la viga recta del primer ejemplo y la viga curva del cuarto ejemplo –la primera

plana y la segunda espacial– cargadas además del siguiente modo: la viga recta con un momento flector puro aplicado en el extremo libre de valor  $\mathbf{M}_0 = 8\pi$ , que provoca una flexión plana de curvatura constante  $\kappa = 4\pi$ ; y la viga curva con una carga vertical,  $\mathbf{P} = 600$ , que induce una importante deformación por flexotorsión.

En el primer caso, la flexión que produce el momento  $\mathbf{M}_0$  obliga a la viga a dar dos vueltas completas sobre sí misma en el plano X-Y –figuras IV.5–. En algunos sistemas de parametrización el método de Newton–Raphson no converge para un valor tan alto del momento, sino para otro menor que se indica en las tablas IV.14 y IV.15. Algo parecido ocurre con la viga curva del segundo ejemplo, en la que a menudo el valor de los incrementos de carga  $\Delta\mathbf{P}$  es demasiado alto y debe disminuirse para que el proceso converja, aumentando el número de incrementos de carga  $n$  –en las tablas IV.2 a IV.10 se ha optimizado  $\Delta\mathbf{P}$  para que  $n$  sea lo más bajo posible–.

Se han elegido estos dos sistemas como ejemplos de prueba por ser sencillos y porque su solución es conocida. En la viga recta cargada en el extremo con el momento  $\mathbf{M}_0$ , por ejemplo, se conoce la solución exacta por tratarse de un caso de flexión pura; y en la viga curva se dispone de una extensa lista de resultados obtenidos con otros modelos, que van desde el tridimensional de Bathe [B1], con elementos cúbicos de 16 nodos, o el modelo de sólido degenerado de Crivelli–Felippa [C6, C7], hasta los lineales de Simó y Cardona–Géradin [S1, S2, C1] y el corrotacional de Crisfield. Los resultados con estos modelos para una carga vertical  $\mathbf{P} = 600 \mathbf{k}$  se muestran en la tabla IV.1, juntamente con el número y el valor de los incrementos de carga que se aplicaron en cada caso. En el ejemplo corrotacional, la secuencia de incrementos se obtuvo para el modelo de viga de Timoshenko [C3] y los desplazamientos para el modelo de viga de Kirchhoff [C4]. En relación con el número de incrementos en que se divide la carga  $P$ , se observa en esta tabla una diferencia muy grande entre los modelos lineales de Simó y Géradin, o el degenerado de Crivelli –que lleva implícita la linealización–, y el modelo espacial de Bathe. En general, los modelos espaciales, que trabajan con más grados de libertad, no sólo requieren más memoria y tiempo de computación que los lineales, sino también una segmentación de la carga mucho mayor para que el proceso converja. Por otra parte, si la dirección de  $\mathbf{P}$  es variable, se puede integrar directamente la ecuación diferencial de la elástica, obteniendo entonces el resultado que se indica al final de la tabla IV.20.



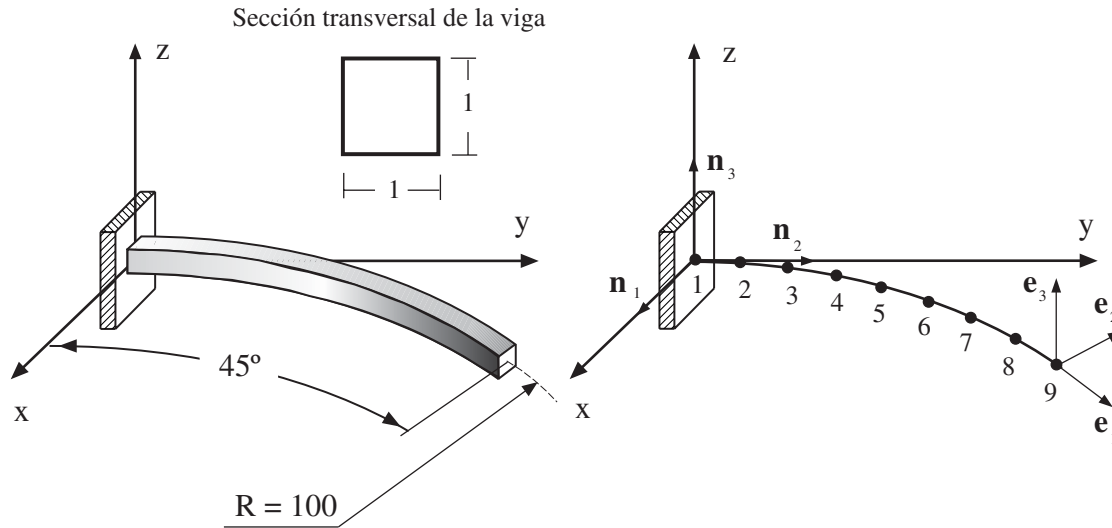


Fig.IV.3.a:

*Perspectiva de la viga curva.  
Orientación y dimensiones*

Fig.IV.3.b:

*Discretización de la viga curva en 8  
elementos lineales de igual longitud.*

Referencias	$\Delta P$	Iteraciones	$\mathbf{r}$
Bathe-Bolourchi	$60 \times 10$	—	(15.90, 47.20, 53.40)
Simó - Vu-Quoc	$300 + 2 \times 150$	13-8-6	(15.79, 47.23, 53.37)
Cardona-Gérardin	$6 \times 100$	7.8 (media)	(15.55, 47.04, 53.50)
Crivelli-Felippa	$6 \times 100$	—	(15.75, 47.25, 53.37)
Crisfield - Cole	$300 + 2 \times 150$	12-8-6	(15.61, 46.84, 53.71)

Tabla IV.1:

*Coordenadas finales del extremo de la viga curva bajo una carga vertical  $P = 600$ ,  
valor de los incrementos sucesivos de carga y número de iteraciones*

Los resultados de esta tabla coinciden básicamente con los obtenidos utilizando los métodos de minimización y equilibrio I, II.a y II.b que se muestran en las tablas

IV.2 a IV.10. Dado que los métodos I y II.a son generalizaciones de los modelos de G eradin y Simó, lo lógico sería que las diferencias de resultados en las tablas IV.2 y IV.5 fueran similares a las que se aprecian en la tabla IV.1, sin embargo son mucho menores, como se aprecia. Esto prueba que las diferencias encontradas en la tabla IV.1 no se deben tanto a razones de método como a razones de procedimiento en el modo concreto de realizar determinadas operaciones.

Además de una fuerza vertical  $\mathbf{P} = 600 \mathbf{k}$ , de dirección e intensidad constantes, a la viga curva también se le aplica –por separado– en su extremo libre una fuerza y un momento,  $\mathbf{P} = 600 \mathbf{e}_3$  y  $\mathbf{M} = 5000 (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$ , de intensidad constante y dirección variable, que giran con la propia estructura y mantienen la orientación con relación al sistema local de referencia  $\{\mathbf{e}_i\}$  de la sección extrema. Las deformadas de esta viga para estos tres tipos de cargas se muestran en las figuras IV.4.a, IV.4.b y IV.4.c, que también incluyen las deformadas correspondientes a valores intermedios de la carga. Por otra parte, las coordenadas del extremo libre de la viga curva deformada bajo estas cargas y el giro relativo final del sistema local  $\{\mathbf{e}_i\}$  respecto al absoluto  $\{\mathbf{n}_i\}$  –ver figura IV.3.b– se muestran en las tablas IV.2 a IV.10. De estas tablas, las tres primeras se han obtenido utilizando el método de minimización I y las seis restantes con los métodos de equilibrio II.a. y II.b.

Finalmente, los resultados de la viga recta del ejemplo plano se muestran en las figuras IV.5 y se recogen en las tablas IV.11 a IV.13. En este caso, la convergencia es muy rápida y la exactitud en los giros nodales completa aun aplicando el momento total  $M_0 = 8\pi$  de una sola vez, como se aprecia en la figura IV.6. Esta figura, que se ha obtenido utilizando el método de minimización y el sistema de parametrización natural, muestra cómo la deformación de la viga coincide prácticamente con la solución exacta tras sólo cuatro iteraciones. Análogos resultados se obtienen con los ángulos Cardan o de Euler –en los problemas planos, estos dos sistemas de ángulos coinciden y no tiene sentido distinguirlos; por otra parte, las diferencias con el natural son mínimas como reflejan las tablas mencionadas– Sin embargo, la convergencia es peor en los sistemas de Rodrigues y Euler–Rodrigues. Éste último se incluye también en las tablas correspondientes a los métodos I y II.A, aunque en la práctica no tenga sentido usar un sistema tetraparamétrico para resolver una estructura plana en la que los giros son unidimensionales.

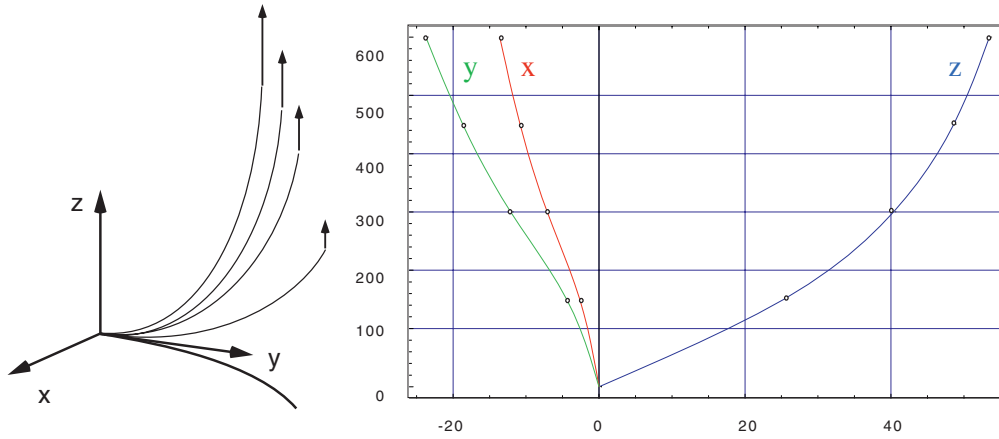


Fig IV.4.a: *Deformación de la viga y desplazamientos del extremo libre al aplicarle una carga de dirección constante e intensidad máxima  $P = 600$ .*

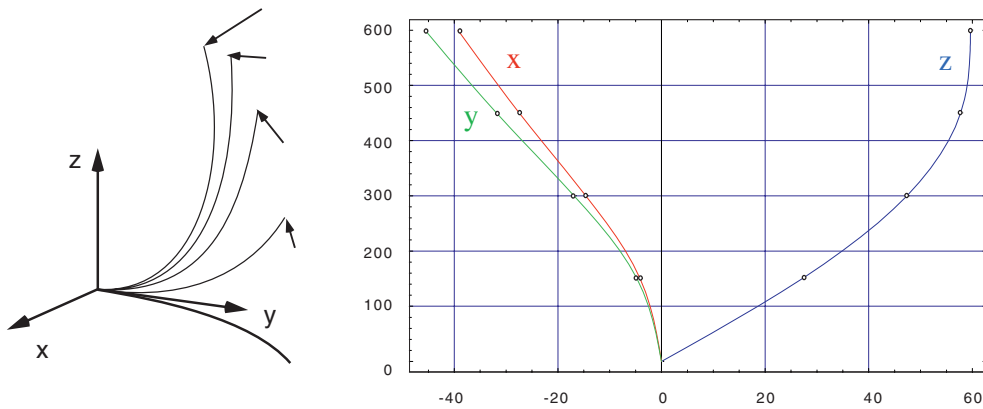


Fig IV.4.b: *Deformación de la viga y desplazamientos del extremo libre al aplicarle una carga de dirección variable e intensidad máxima  $P = 600$ .*

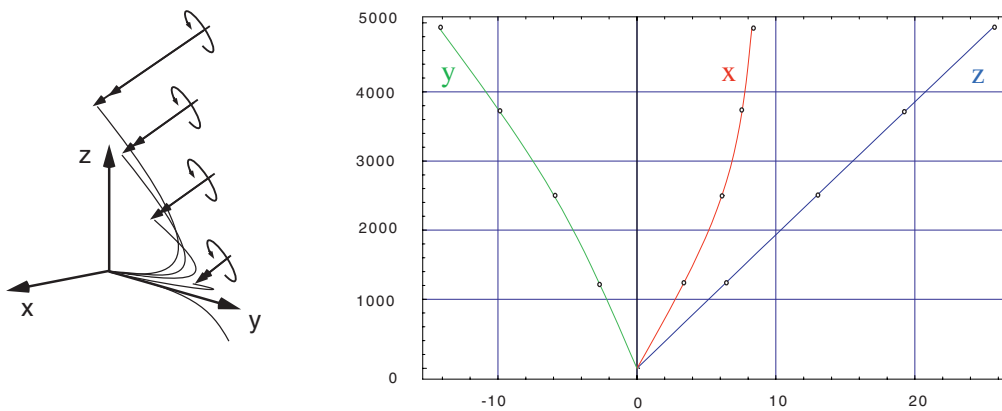


Fig IV.4.c: *Deformación de la viga y desplazamientos del extremo libre al aplicarle un momento de dirección variable e intensidad máxima  $M = 5000\sqrt{3}$ .*

S. Paramétrico	$\Delta P$	Iteraciones	<b>r</b>	$\theta$
Rodrigues	$4 \times 150$	10-9-10-7	(15.68, 46.98, 53.50)	(0.691, -0.982, 0.766)
Natural	$4 \times 150$	10-13-10-7	(15.68, 46.99, 53.49)	(0.692, -0.982, 0.767)
Euler-Rodrigues	$4 \times 150$	11-13-16-7	(15.68, 46.98, 53.50)	(0.691, -0.982, 0.766)
Ángulos Euler	$6 \times 100$	9-11-12-8-7-6	(15.67, 46.98, 53.49)	“
Ángulos Cardan	$8 \times 75$	8-10-11-8-6-8-6-5	(15.66, 46.98, 53.50)	“

Tabla IV.2: Método I. Coordenadas y giros del extremo de la viga para **P** constante.

S. Paramétrico	$\Delta P$	Iteraciones	<b>r</b>	$\theta$
Rodrigues	$6 \times 100$	7-7-8-13-8-8	(-9.97, 25.07, 59.65)	(1.137, -1.644, 0.750)
Natural	$4 \times 150$	13-12-10-11	(-9.98, 25.08, 59.65)	(1.137, -1.644, 0.750)
Euler-Rodrigues	$8 \times 150$	12-11-10-7-7-7-7-7	(-9.97, 25.08, 59.65)	(1.137, -1.643, 0.749)
Ángulos Euler	$9 \times 200/3$	11.55 (media)	(-10.05, 25.07, 59.63)	(1.137, -1.644, 0.750)
Ángulos Cardan	$8 \times 150$	8-8-9-10-8-7-6-6	(-10.05, 25.07, 59.65)	“

Tabla IV.3: Método I. Coordenadas y giros del extremo de la viga para **P** variable.

S. Paramétrico	$\Delta M$	Iteraciones	<b>r</b>	$\theta$
Rodrigues	$2 \times 2500$	7-7	(37.77, 56.35, 25.45)	(0.220, -0.660, 0.342)
Natural	$2 \times 2500$	10-10	“	“
Euler-Rodrigues	$8 \times 625$	7-7-7-7-8-8-8-9	(37.77, 56.36, 25.46)	“
Ángulos Cardan	$3 \times 5000/3$	9-9-8	(37.76, 56.36, 25.45)	“

Tabla IV.4: Método I. Coordenadas y giros del extremo de la viga para **M** variable.

Sistema Paramétrico	$\Delta P$	Iteraciones	$\mathbf{r}$	$\theta$
Rodrigues	$6 \times 100$	11-11-8-7-8-6	(15.69, 46.98, 53.5)	(0.691, -0.982, 0.766)
Natural	$4 \times 150$	12-12-9-7	“	“
Euler-Rodrigues	$6 \times 100$	10-11-8-7-6-6	(15.63, 46.93, 53.55)	(0.689, -0.985, 0.764)
Ángulos Cardan	$4 \times 150$	12-16-11-8	(15.68, 46.99, 53.5)	(0.691, -0.983, 0.766)

Tabla IV.5: Método II.a. Coordenadas y giros del extremo de la viga para  $\mathbf{P}$  constante

Sistema Paramétrico	$\Delta P$	Iteraciones	$\mathbf{r}$	$\theta$
Rodrigues	$6 \times 100$	10-9-8-8-8-8	(-9.96, 25.06, 59.66)	(1.137, -1.643, 0.749)
Natural	$5 \times 120$	10-9-10-13-9	(-9.96, 25.07, 59.66)	“
Euler-Rodrigues	$5 \times 120$	9-10-10-10-9	(-10.53, 24.87, 59.59)	(1.142, -1.651, 0.756)
Ángulos Cardan	$9 \times 200/3$	9-9-9-8-7-7-6-6-6	(-10.01, 25.07, 59.65)	(1.138, -1.643, 0.750)

Tabla IV.6: Método II.a. Coordenadas y giros del extremo de la viga para  $\mathbf{P}$  variable

Sistema Paramétrico	$\Delta M$	Iteraciones	$\mathbf{r}$	$\theta$
Rodrigues	$3 \times 5000/3$	6-6-6	(37.77, 56.35, 25.46)	(0.220, -0.660, 0.342)
Natural	$2 \times 2500$	9-10	“	“
Euler-Rodrigues	$2 \times 2500$	10-16	(37.78, 56.33, 25.47)	“
Ángulos Cardan	$2 \times 2500$	9-9	(37.76, 56.36, 25.45)	“

Tabla IV.7: Método II.a. Coordenadas y giros del extremo de la viga para  $\mathbf{M}$  variable

Sistema Paramétrico	$\Delta P$	Iteraciones	$\mathbf{r}$	$\theta$
Rodrigues	$6 \times 100$	11-10-8-7-6-6	(15.68, 46.98, 53.5)	(0.691, -0.982, 0.766)
Natural	$4 \times 150$	10-13-9-7	“	“
Áng. Cardan	$4 \times 60 + 3 \times 120$	8-8-8-7-13-8-7	(15.66, 46.98, 53.5)	“

Tabla IV.8: Método II.b. Coordenadas y giros del extremo de la viga para  $P$  constante

Sistema Paramétrico	$\Delta P$	Iteraciones	$\mathbf{r}$	$\theta$
Rodrigues	$5 \times 120$	10-11-11-10-9	(-9.98, 25.08, 59.65)	(1.137, -1.644, 0.750)
Natural	$4 \times 150$	10-13-12-11	(-9.98, 25.09, 59.65)	“
Áng. Cardan	$4 \times 60 + 3 \times 120$	7-7-7-7-13-12-8	(-10.08, 25.07, 59.65)	(1.138, -1.644, 0.751)

Tabla IV.9: Método II.b. Coordenadas y giros del extremo de la viga para  $P$  variable

Sistema Paramétrico	$\Delta M$	Iteraciones	$\mathbf{r}$	$\theta$
Rodrigues	$3 \times 5000/3$	6 - 6 - 6	(37.77, 56.35, 25.46)	(0.220, -0.660, 0.342)
Natural	$2 \times 2500$	10 - 10	“	“
Áng. Cardan	$2 \times 2500$	9 - 9	(37.76, 56.37, 25.45)	“

Tabla IV.10: Método II.b. Coordenadas y giros del extremo de la viga para  $M$  variable

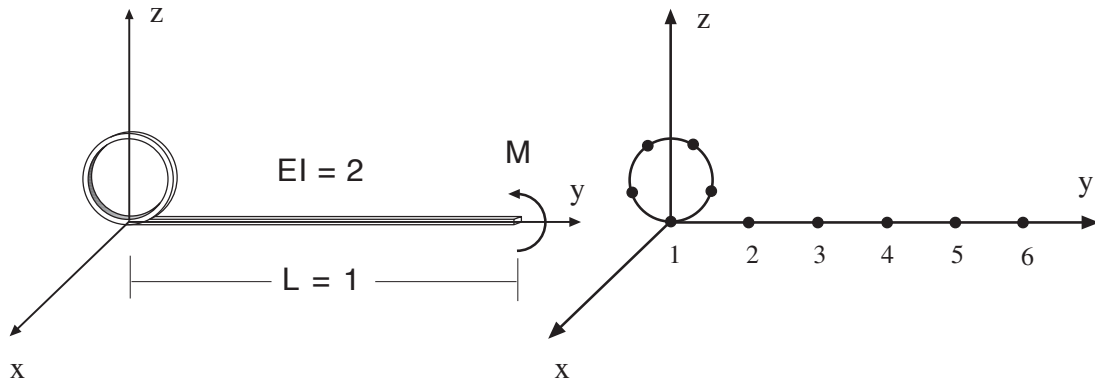


Fig IV.5.a :

*Dimensiones y deformada de la viga  
bajo un momento flector  $M = 8\pi$ .*

Fig IV.5.b :

*Discretización de la viga con  
5 elementos finitos lineales.*

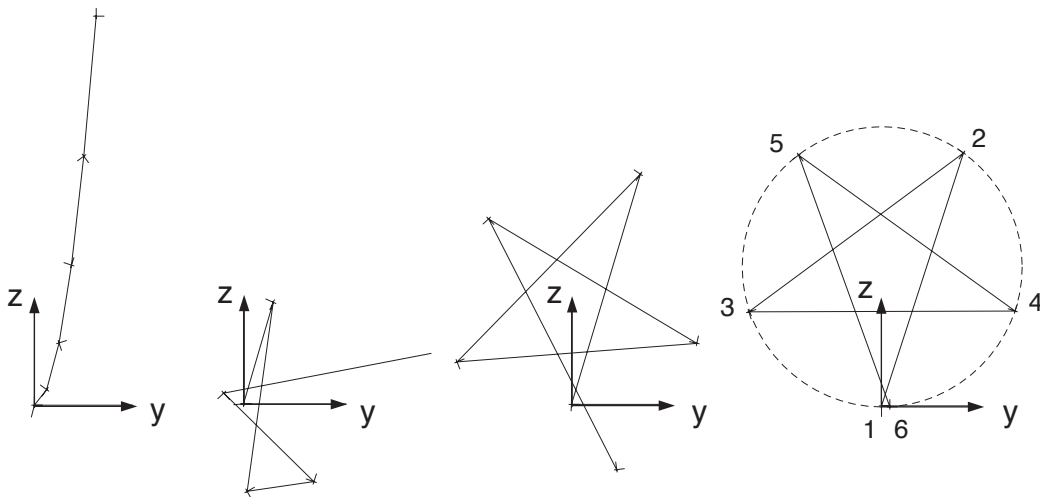


Fig.IV.6.

*Geometría de los elementos durante las 4 primeras iteraciones*

Sistema Paramétrico	$M_0$	Iteraciones	$\mathbf{r}$	$\theta$	$\mathbf{r}$ error en %	$\theta$ error en %
Rodrigues	$\pi$	6	(0.6366, 0.6366)	90.284	0.611	0.182
Natural	$8\pi$	6	(0, 0)	720	0	0
Euler–Rodrigues	$\pi$	7	(0.6345, 0.6419)	90.664	0.635	0.423
Euler– Cardan	$8\pi$	6–	(0, 0)	720	0	0

Tabla IV.11: Método I. Coordenadas y giros del extremo de la viga recta

Sistema Paramétrico	$M_0$	Iteraciones	$\mathbf{r}$	$\theta$	$\mathbf{r}$ error en %	$\theta$ error en %
Rodrigues	$\pi$	5	(0.6374, 0.6404)	89.916	0.432	0.094
Natural	$8\pi$	6	(0, 0)	720	0	0
Euler–Rodrigues	$\pi$	5	(0.6377, 0.6403)	89.928	0.432	0.080
Euler– Cardan	$\pi$	4	(0.639, 0.639)	90	0.412	0

Tabla IV.12: Método II.a. Coordenadas y giros del extremo de la viga recta

Sistema Paramétrico	$M_0$	Iteraciones	$\mathbf{r}$	$\theta$	$\mathbf{r}$ error en %	$\theta$ error en %
Rodrigues	$\pi$	5	(0.6342, 0.6416)	90.284	0.611	0.316
Natural	$8\pi$	6	(0, 0)	720	0	0
Euler– Cardan	$\pi$	5	(0.6392, 0.6392)	90	0.412	0

Tabla IV.13: Método II.b. Coordenadas y giros del extremo de la viga recta



En estas tres últimas tablas, el momento  $M_0$  aplicado en cada sistema de parametrización es distinto debido a que el proceso no converge por igual en todos ellos, como se comentó anteriormente. Por ejemplo, en el sistema de Rodrigues la singularidad se presenta teóricamente cuando el giro del extremo final de la viga alcanza el valor  $\theta = \pi$ , esto es, cuando el momento vale  $M_0 = 2\pi$ . En la práctica, así ocurre si se utiliza el método de equilibrio II.A, sin embargo con el método de minimización el momento crítico se reduce aún más, bajando hasta un valor aproximado  $M_0 = 1.3\pi$ . En las tablas IV.14 y IV.15 se muestran los límites de convergencia del momento  $M_0$  en los cinco sistemas de parametrización.

Sistema Paramétrico	Valores de $M_0$ para los que converge	Valores de $M_0$ para los que no converge
Rodrigues	$< 1.3\pi$	$\geq 1.4\pi$
Natural	$8\pi$ y $< 5\pi$	$7\pi, 6\pi$
Euler–Rodrigues	$< 2\pi$	$> 3\pi$
Áng. Euler y Cardan	$8\pi$ y $< 5\pi$	$7\pi, 6\pi$

Tabla IV.14: *Método I. Límites de convergencia en distintos sistemas de parametrización para la estructura plana de la figura IV.5*

Sistema Paramétrico	Valores de $M_0$ para los que converge	Valores de $M_0$ para los que no converge
Rodrigues	$< 2\pi$	$> 2\pi$
Natural	$8\pi$ y $< 5\pi$	$7\pi, 6\pi$
Euler–Rodrigues	$< 6\pi$	$> 6\pi$
Euler– Cardan	$8\pi$ y $< 5\pi$	$7\pi, 6\pi$

Tabla IV.15: *Método II.a. Límites de convergencia en distintos sistemas de parametrización para la estructura plana de la figura IV.5*

De los resultados obtenidos en los ejemplos descritos, la mayor parte de los cuales se recogen en las tablas IV.2 a IV.13, se extraen las siguientes conclusiones generales:

1) Los resultados finales obtenidos utilizando el método de minimización I y los métodos de equilibrio II.a y II.b son casi idénticos en todos los sistemas de parametrización, pudiendo afirmarse que el grado de exactitud en la solución no se ve prácticamente afectado ni por el sistema de parametrización ni por el método elegido.

2) De los cinco sistemas paramétricos ensayados, los que presentan un comportamiento más estable y convergen mejor, permitiendo así mayores incrementos de carga, son los sistemas objetivos de Rodrigues y natural; y entre éstos, el que muestra mayor regularidad es el natural por salvar mejor sus propias singularidades. Como compensación, en el sistema de Rodrigues los algoritmos son más simples.

3) La dimensión de la matriz de rigidez es mayor y presenta un perfil más irregular en el sistema tetraparamétrico de Euler–Rodrigues que en los otros cuatro sistemas triparamétricos. Esto afecta al tiempo de ejecución de los programas y daña ligeramente la convergencia del proceso iterativo cuando se aproxima la solución por el método de Newton, resultando en general preferibles los sistemas triparamétricos a los hiperparamétricos. No obstante, cuando los giros nodales de la estructura no son libres y presentan restricciones, puede suceder que éstas sean más fáciles de definir en un sistema hiperparamétrico que en uno convencional triparamétrico; en tales casos, la adopción de estos sistemas no entraña ningún problema, salvo el mencionado para el sistema de Euler–Rodrigues, que es común a todos los sistemas hiperparamétricos.

4) Los ángulos de Euler, tantas veces utilizados en mecánica, no son un buen sistema de parametrización de las rotaciones, ya que presentan una singularidad en el plano  $(\theta_1, 0, \theta_3)$  que contiene el origen. Se evita aplicando un giro previo  $(0, \varphi, 0)$  a la estructura al comenzar la ejecución del programa y al actualizar la configuración de referencia, de modo que ésta y la deformada inicial no coincidan en ningún momento. El valor de  $\varphi$  debe ser suficientemente alto –en los ejemplos resueltos hemos tomado  $\varphi = \pi/2$ –, para que al deformarse la estructura la componente  $\theta_2$  de los giros nodales no llegue a anularse. Aun cuando esta operación no presente especiales dificultades, complica lo suficiente el proceso como para hacer que este sistema de parametrización sea poco recomendable.

5) De los métodos I, II.a. y II.b., los dos primeros convergen por regla general mejor que el tercero sin que haya diferencias importantes entre ellos. Sin embargo, el método II.a es el más rápido en calcular la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , debido a la sencillez de la expresión IV.99, y el II.b el más lento ya que incluye un término adicional en  $\mathbf{K}$ .

6) A diferencia de los métodos de equilibrio II.a y II.b, que conducen a matrices de rigidez asimétricas, minimizando la energía potencial se obtiene siempre una matriz de rigidez simétrica si el sistema de cargas es conservativo. No obstante, usando los métodos de equilibrio II.a y II.b las matrices de rigidez se pueden simetrizar como se indicó al final del apartado IV.11.

7) La convergencia con cualquiera de los métodos y sistemas de parametrización, incluido el tetraparamétrico de Euler–Rodrigues, es siempre cuadrática.

Además de estas conclusiones, en un sistema hiperparamétrico como el de Euler–Rodrigues es preciso tener en cuenta que:

a) En cada iteración deben normalizarse los parámetros  $q_i + \Delta q_i$  que definen los giros nodales, de modo que cumplan automáticamente las condiciones de ligadura impuestas. Sin esta *normalización* la convergencia del proceso se deteriora mucho y los incrementos de carga que pueden tomarse en cada fase se reducen varias veces –en el ejemplo de la viga curva, como mínimo 3 veces–. Los resultados de las tablas que se han mostrado hasta el momento se han obtenido normalizando los parámetros  $q_i$ .

b) En los sistemas hiperparamétricos la expresión de la matriz de rigidez no es única sino dependiente de  $3(n-3)$  constantes reales  $\lambda_i$ , esto es,  $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\lambda_i)$  –en el apéndice III se deducen las expresiones de los operadores  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{T}$ , etc. para el sistema de Euler–Rodrigues ( $n = 4$ ) en función de una sola de estas constantes  $\lambda = \lambda_1$ –. Pues bien, aunque en teoría los valores de las constantes puedan fijarse arbitrariamente, en la práctica el comportamiento del sistema depende de los valores que éstas tomen. Las tablas IV.16 muestran, por ejemplo, cómo converge en el sistema de Euler–Rodrigues la viga curva de la figura IV.4.a y cómo se fracciona la carga vertical  $P = 600$  que la solicita para distintos valores de la constante  $\lambda$ , utilizando los métodos I y II.a. El comportamiento de la viga variando las otras dos constantes  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  es análogo.

c) Al calcular los incrementos de los desplazamientos nodales y resolver el sistema lineal de ecuaciones  $\Delta P = \mathbf{K}\Delta q$ , se observa a menudo que este sistema no está bien condicionado debido al conjunto de ceros que aparecen en la cola de la diagonal

<i>Método I</i>			<i>Método II.a</i>		
$\lambda$	$\Delta P$	Iteraciones	$\lambda$	$\Delta P$	Iteraciones
-2	$8 \times 50$	10-9-8-8-7-7-6-6	-2	$6 \times 100$	10-11-8-7-6-6
-1	$8 \times 50$	10-9-8-7-7-6-6-6	-1	$6 \times 100$	9-11-8-7-6-6
-0.5	$6 \times 100$	11-10-9-7-7-6	-0.5	$6 \times 100$	10-11-8-7-6-6
0	$4 \times 150$	11-13-16-7	0	$6 \times 100$	10-11-8-7-6-6
0.5	$4 \times 150$	12-14-15-7	0.5	$6 \times 100$	13-11-8-7-6-6
1	$5 \times 120$	11-18-10-8-7	1	$6 \times 100$	20-12-8-7-6-6
2	$5 \times 120$	11-21-10-8-7	2	$8 \times 75$	8-8-7-6-6-6-6-5

Tablas IV.16:

*Convergencia en el sistema de Euler Rodrigues al variar la constante  $\lambda$*

principal de la matriz de rigidez (IV.89) y también a un efecto de contaminación de la matriz de rigidez causada por los términos dependientes de las constantes  $\lambda_i$ . En estos casos una adecuada elección de estas constantes puede mejorar bastante el condicionamiento del sistema. En el ejemplo anterior se ha podido comprobar que el valor  $\lambda = 0$ , que anula estos términos adicionales, es uno de los que mejor se comporta en este sentido, facilitando la convergencia, como se aprecia en las tablas IV.16.

d) En los ejemplos resueltos, los resultados numéricos obtenidos para distintos valores de  $\lambda$  fueron siempre los mismos con cada uno de los tres métodos utilizados: I, II.a y II.b. Es curioso que dependiendo la matriz de rigidez de una serie de constantes  $\lambda_i$ , sin embargo la solución sea única. Como es sabido, esta aparente contradicción se debe a que los parámetros están ligados entre sí por una serie de relaciones y no son independientes. En cualquier caso, con estos ejemplos se ha probado que se pueden tomar cualesquiera valores de  $\lambda_i$  para construir la matriz de rigidez del sistema sin afectar para nada a los resultados finales, aunque sí al grado de convergencia del proceso, como se ha indicado antes.

La segunda prueba que realizamos sobre la viga recta 2D y curva 3D consistió en comparar el rendimiento de los métodos de cálculo descritos cuando se sustituye la interpolación lineal clásica por una interpolación paramétrica no lineal que reproduce un estado de deformación constante. Puesto que en el cambio de funciones de interpolación no intervienen ni el método ni el sistema de parametrización, bastó realizar esta prueba con uno sólo de los métodos descritos y un único sistema de parametrización; concretamente, con el método de minimización y el sistema natural. Por otra parte, puesto que el estado de deformación helicoidal es más restrictivo que el de curvatura constante, limitamos las pruebas al estado de deformación helicoidal.

Comenzando con la viga plana de la figura IV.5, sometida a un momento flector puro  $M_0$ , la tabla IV.17 recoge los errores cuadráticos medios cometidos en el cálculo de las coordenadas y giros nodales utilizando las interpolaciones lineal y helicoidal.

$M_0$	Interpolación helicoidal			Interpolación lineal		
	Iteraciones	Error en las coordenadas nodales	Error en los giros nodales	Iteraciones	Error en las coordenadas nodales	Error en los giros nodales
$8\pi$	No converge	-----	-----	6	32.1 %	0
$2 \times 4\pi$	7-10	0	0	6-6	32.1 %	0
$4\pi$	7	0	0	6	6.9 %	0
$2\pi$	6	0	0	5	1.66 %	0

Tabla IV.17:

*Método de minimización y sistema natural. Convergencia y errores medios cuadráticos en las coordenadas y giros nodales de la viga*

En una interpolación helicoidal, los resultados que se obtienen con el método de Newton-Raphson y una matriz de rigidez tangente exacta que incluya el término  $\delta d\mathbf{q}^\vee$  de la expresión (IV.151), apenas difieren de los obtenidos eliminando este término y trabajando con una matriz de rigidez aproximada. En efecto, debido al pequeño valor

relativo de este término, el proceso global de convergencia no se ve afectado por la inclusión de la componente  $\mathbf{K}_{\Pi}$  dentro de la matriz de rigidez tangente. Incluyéndola, se recupera la ley de convergencia cuadrática en las fases medias del proceso, pero a un coste computacional elevadísimo, ya que  $\mathbf{K}_{\Pi}$  se obtiene por derivación numérica, como se indicó en el apartado IV.14, y ésta es una operación lenta. Por otra parte, los errores inherentes a esta derivación numérica se acusan principalmente en las últimas fases del proceso, en las que se requiere mayor exactitud y resulta más necesaria y útil la convergencia cuadrática, reduciendo la eficacia de  $\mathbf{K}_{\Pi}$ . Para comprobar todo esto, volvamos al ejemplo de la viga curva de la figura IV.3 sometida a una carga vertical P. La tabla IV.18 muestra cómo varía la norma euclídea de los residuos que genera el método de Newton–Raphson al producirse el salto de carga P: 450  $\rightarrow$  600. En la misma se comparan los resultados obtenidos con dos interpolaciones: una lineal y otra helicoidal; y en este último caso, utilizando primero la matriz de rigidez tangente aproximada:  $\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G$ , y después la exacta:  $\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_{\Pi}$ . Esta secuencia es típica y se repite también para otros incrementos y valores de carga.

Interpolación Lineal $\mathbf{K}_T$ exacta	Interpolación Helicoidal $\mathbf{K}_T$ aproximada.	Interpolación Helicoidal $\mathbf{K}_T$ exacta
2.20 10 <sup>5</sup>	2.20 10 <sup>5</sup>	2.20 10 <sup>5</sup>
1604	1614	1580
6309	6566	7437
24.23	26.00	24.81
6.22	7.33	6.98
1.75 10 <sup>-5</sup>	2.09 10 <sup>-4</sup>	1.87 10 <sup>-5</sup>
5.95 10 <sup>-9</sup>	1.32 10 <sup>-6</sup>	3.47 10 <sup>-7</sup>
	4.68 10 <sup>-7</sup>	

Tabla IV.18:

*Norma euclídea de los residuos con P: 450  $\rightarrow$  600*

Se obtienen resultados análogos cuando se sustituye la carga vertical del extremo libre de la viga por otra de dirección variable, normal a su directriz. En la tabla IV.19 se indican los desplazamientos y giros finales del extremo en ambos casos.

$\Delta P$	Tipo de carga	Iteraciones	$\mathbf{r}$	$\theta$
$4 \times 150$	Constante	11-13-11-7	(15.64, 46.98, 53.41)	(0.691, -0.980, 0.768)
$4 \times 150$	Variable	14-14-12-12	(-10.33, 24.86, 59.46)	(1.140, -1.648, 0.753)

Tabla IV.19 :

*Coordenadas y giros del extremo de la viga curva para  $P$  constante y variable minimizando la energía, en el sistema natural, con una interpolación helicoidal*

La conclusión final que se extrae de estos ejemplos es que la interpolación helicoidal, en general, converge peor que la lineal, y además siempre es preferible trabajar con la matriz de rigidez aproximada:  $\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G$ , que con la matriz de rigidez exacta.  $\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_{II}$ .

Como contrapartida, la solución que se obtiene con la interpolación helicoidal es siempre más precisa que la obtenida con la interpolación lineal. En el ejemplo de la viga sometida a flexión pura llega a proporcionar los giros y desplazamientos nodales exactos, como se aprecia en la tabla IV.17. Con la interpolación lineal, sin embargo, se cometen errores importantes en el cálculo de las coordenadas nodales cuando la viga deformada está muy curvada, debido a que la longitud del elemento se mide sobre la secante y no, como debiera hacerse, sobre el círculo que une los nodos de la viga. En casos como éste, la precisión que se gana con el uso de la interpolación helicoidal compensa el trabajo extra que supone su utilización, aunque no siempre sucede así. Por ejemplo, con la viga curva cargada en el extremo libre, la influencia del tipo de interpolación es mucho menor que en el ejemplo anterior, por ser más pequeña la deformación de los elementos, y resulta más efectivo utilizar una interpolación lineal que una no lineal. En efecto, si se comparan los resultados correspondientes a los estados de carga de las figuras IV.4.a y IV.4.b, para un valor de carga  $P=600$  y una interpolación helicoidal –tabla IV.19–, con los resultados de las tablas IV.2 y IV.3 en

el sistema natural, las diferencias que se aprecian entre ellos son mínimas, tanto en la precisión como en el número de incrementos de carga o iteraciones necesarios para alcanzar la convergencia. Sin embargo, el tiempo de cálculo empleado en ambos casos es bastante mayor con la interpolación helicoidal que con la interpolación lineal. La tabla IV.20 muestra el grado de exactitud que se alcanza en el último ejemplo, al sustituir la interpolación lineal por una helicoidal cuando la carga es variable. Con este tipo de carga, la ecuación de la elástica se puede integrar fácilmente. Los resultados obtenidos por esta vía se pueden considerar “exactos” y sirven de referencia para medir la precisión de los demás.

$\Delta P$	Método	$\mathbf{r}$	$\boldsymbol{\theta}$
$4 \times 150$	Interpol. Lineal (8 elem. 1-1)	(-9.98, 25.08, 59.65 )	(1.137, -1.644, 0.750)
$4 \times 150$	Interpol. Helicoidal (8 elem. 1-1)	(-10.33, 24.86, 59.46)	(1.140, -1.648, 0.753)
$4 \times 150$	Integración Numérica	(-10.98, 24.45, 59.44 )	(1.1, -1.6, 0.7)

Tabla IV.20 :

*Coordenadas y giros del extremo de la viga con  $\mathbf{P}$  variable, utilizando a) 8 elementos lineales con una interpolación lineal; b) 8 elementos lineales con una interpolación helicoidal; y c) integrando numéricamente la ecuación de la elástica (cuasi-exacta).*

Por otra parte, comparando los resultados obtenidos con distintas discretizaciones de la viga curva, variando el número y el tipo de los elementos finitos –tabla IV.21–, se observa que el cambio de los elementos lineales por cuadráticos con una interpolación lineal produce mejores resultados que la duplicación del número de elementos con una interpolación helicoidal; esto es, para el mismo número de grados de libertad, son más eficaces las discretizaciones con elementos de orden superior que las interpolaciones no lineales. Por tanto, en la viga curva el comportamiento de las interpolaciones helicoidales es muy diferente del que se observa en el ejemplo de la viga recta sometida a flexión pura, no pudiendo afirmarse de forma rotunda que las interpolaciones no lineales, que reproducen estados de deformación constante, sean más exactas o convenientes que las simples interpolaciones lineales, sino más bien lo



contrario: salvo casos excepcionales de sistemas con grandes deformaciones de los elementos, las interpolaciones lineales aventajan a las no lineales en sencillez de programación y rapidez de cálculo, además de mejorar la convergencia y estabilidad del método de Newton-Raphson.

Discretización	Interpolación	$\mathbf{r}$	$\theta$
8 elementos lineales	lineal	(-9.98, 25.08, 59.65)	(1.137, -1.644, 0.750)
8 elementos lineales	helicoidal	(-10.33, 24.86, 59.46)	(1.140, -1.648, 0.753)
16 elementos lineales	lineal	(-10.70, 24.67, 59.47)	(1.157, -1.634, 0.739)
16 elementos lineales	helicoidal	(-10.79, 24.61, 59.43)	(1.157, -1.635, 0.739)
24 elementos lineales	lineal	(-10.83, 24.59, 59.44)	(1.163, -1.630, 0.735)
8 elementos cuadráticos	lineal	(-10.93, 24.53, 59.41)	(1.175, -1.620, 0.725)
Integración numérica	-----	(-10.98, 24.45, 59.44)	(1.176, -1.620, 0.725)

Tabla IV.21 :

*Coordenadas y giros finales del extremo de la viga curva para una carga variable  $\mathbf{P}= 600 \mathbf{e}_3$  con distintos tipos de discretización e interpolación*

Los ejemplos de la viga recta 2D y curva 3D se han resuelto utilizando cinco sistemas de parametrización, tres técnicas de cálculo basadas en los principios de minimización y equilibrio, y dos formas de interpolación, la lineal y la helicoidal. Los resultados obtenidos han puesto de manifiesto: a) las ventajas que ofrecen los sistemas objetivos de parametrización, particularmente el sistema natural, frente al resto; b) el mayor rendimiento que se extrae de las interpolaciones lineales cuando la estructura está finamente discretizada; c) la igualdad y equilibrio que guardan los tres métodos de cálculo I, II.a y II.b en velocidad de convergencia y grado de estabilidad, si bien sólo el primero de estos tres métodos –minimización I– proporciona una matriz de rigidez simétrica con un desarrollo en serie “consistente”, como veremos en el próximo capítulo.

En todas las pruebas realizadas hasta ahora, cada incremento de carga ha ido precedido de una actualización de la configuración de referencia, que se ha mantenido en toda la serie de iteraciones derivadas de la aplicación del método de Newton-Raphson. Por ejemplo, en el caso de la viga curva, la carga  $P = 600$  se repartió en incrementos más pequeños de valor  $\Delta P = 150$  y el problema se resolvió en cuatro fases, sirviendo la deformación alcanzada en cada una de ellas como sistema referencial para la siguiente. En suma, la viga experimentó cuatro actualizaciones.

Bathe mostró la analogía que existe entre las formulaciones Actualizada y Total en su modelo de viga, y probó la identidad de las mismas con una adecuada elección de la matriz constitutiva [B1]. En nuestro caso, dada la complejidad del modelo, esta identidad no es tan sencilla de establecer y toda actualización durante el proceso de deformación supone una pequeña desviación de los resultados como consecuencia del cambio de sistema referencial. En estas condiciones, es importante saber cómo afecta a la exactitud de los cálculos y a la estabilidad del proceso el número y tipo de actualizaciones. La respuesta, en términos generales, es simple: dado que los errores que introduce cada actualización son pequeños y tienen sentidos distintos, que tienden a compensarse entre sí, la desviación final de los resultados entre las formulaciones Actualizada, Total y Pseudototal –una formulación intermedia entre las dos primeras con un número de actualizaciones inferior al de fases de carga–, es en la práctica irrelevante, siendo tanto más exacta la solución cuanto menor es el número de actualizaciones. Como contrapartida, al aumentar el número de actualizaciones del sistema referencial, mejora la estabilidad numérica del método de Newton-Raphson y se precisan menos incrementos de carga. Para comprobarlo, estudiaremos las deformaciones del semipórtico plano descrito al comienzo de este apartado cuando se somete a dos cargas puntuales de intensidad variable: una de dirección fija vertical y otra de dirección normal al punto de aplicación. Las figuras IV.7 – IV.11 muestran las deformaciones globales del pórtico y las diferencias que se obtienen al cambiar el tipo de formulación. Estas diferencias varían con la carga y no responden a una ley determinada, si bien se mantienen siempre muy pequeñas. Además sólo son significativas cuando las cargas son variables y giran con la estructura. Cuando la dirección de la carga es fija, estas diferencias son despreciables y entonces puede afirmarse que el tipo de formulación no afecta a los resultados del problema.

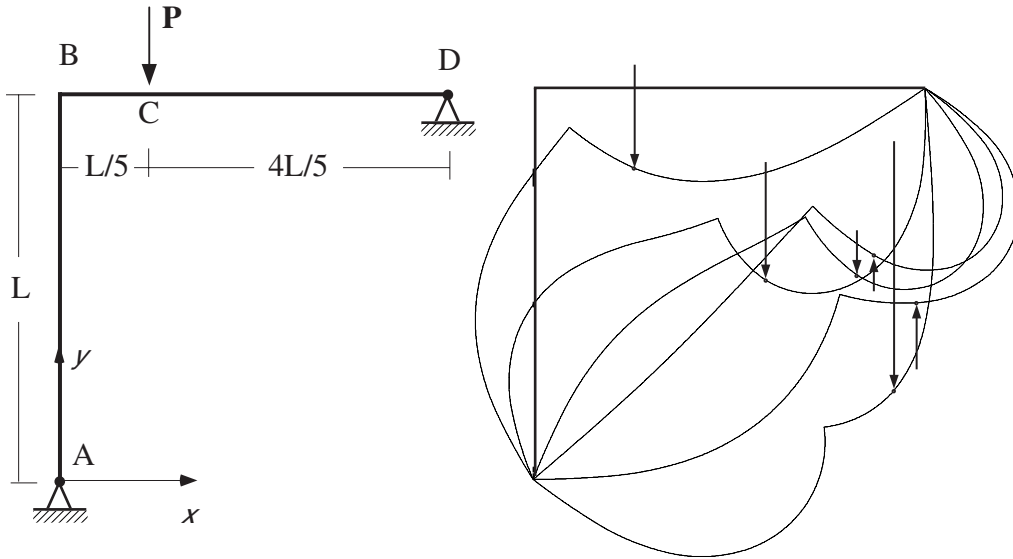


Fig.IV.7.a :

*Geometría y deformadas del semipórtico al variar la carga vertical  $P$*

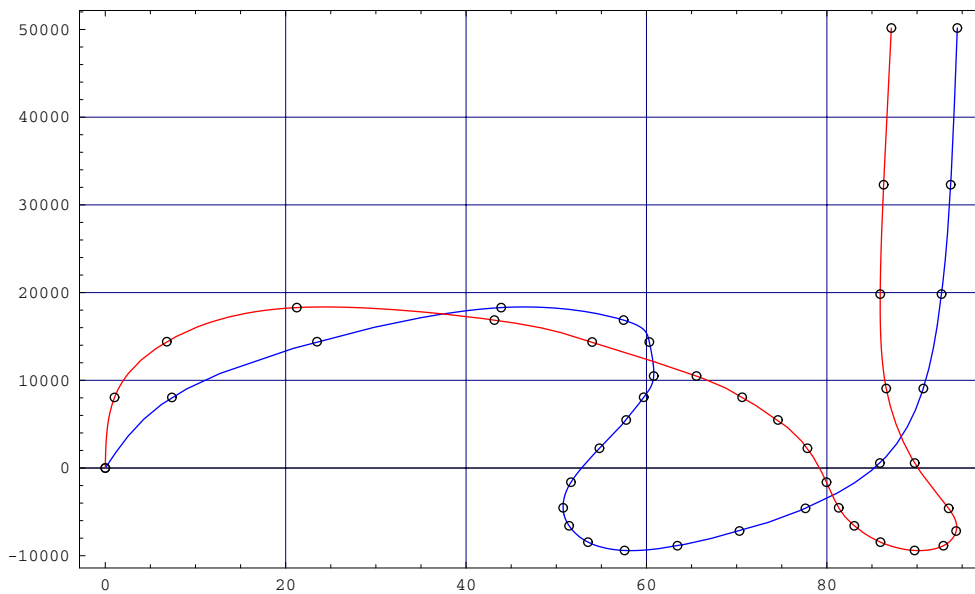


Fig IV.7.b :

*Desplazamientos horizontal  $u$  y vertical  $v$  del punto de aplicación de la carga*

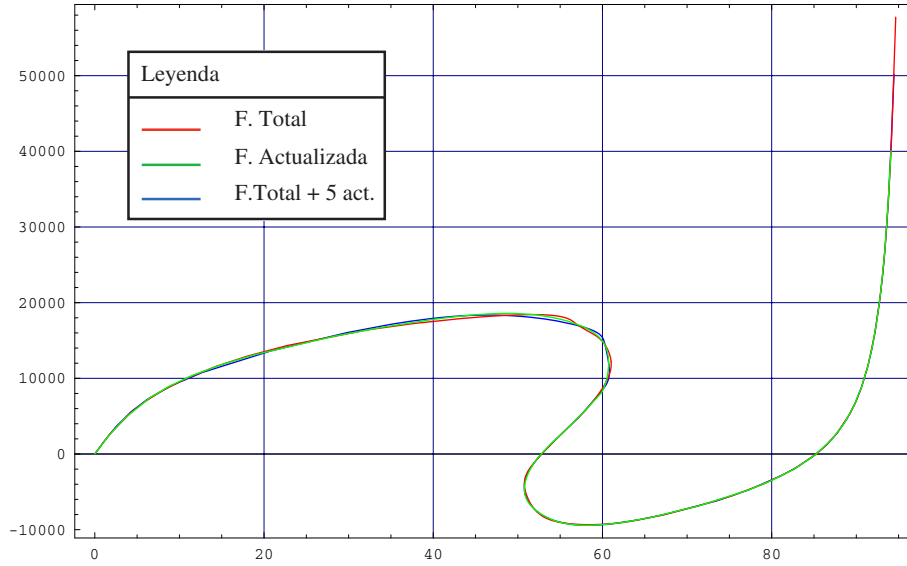


Fig IV.8.a:

*Desplazamiento horizontal del punto C al aplicar una carga vertical P dependiendo de que la formulación sea total, actualizada o mixta.*

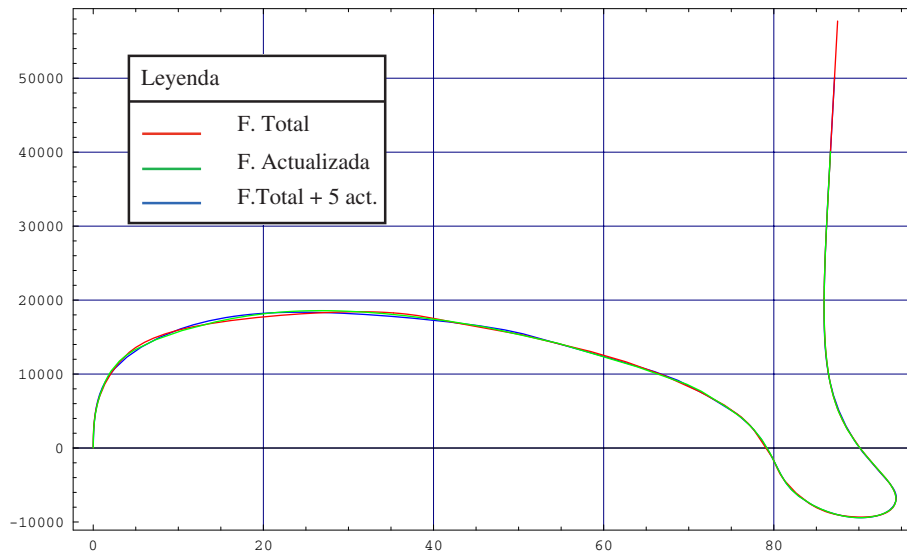


Fig IV.8.b:

*Desplazamiento vertical del punto C al aplicar una carga vertical P dependiendo de que la formulación sea total, actualizada o mixta.*

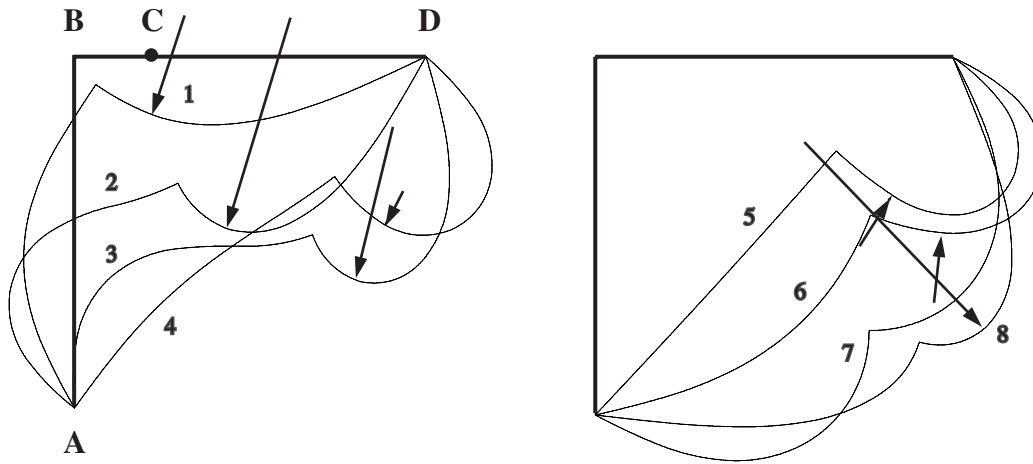


Fig.IV.9.a:

*Deformadas sucesivas del semipórtico al variar la carga normal  $P$*

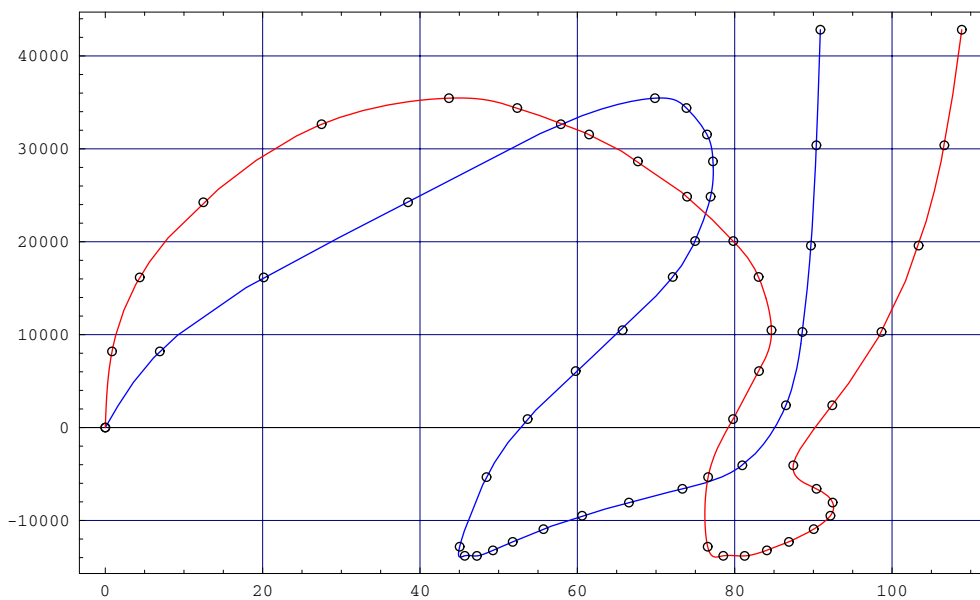


Fig IV.9.b :

*Desplazamientos horizontal  $u$  y vertical  $v$  del punto de aplicación de la carga*

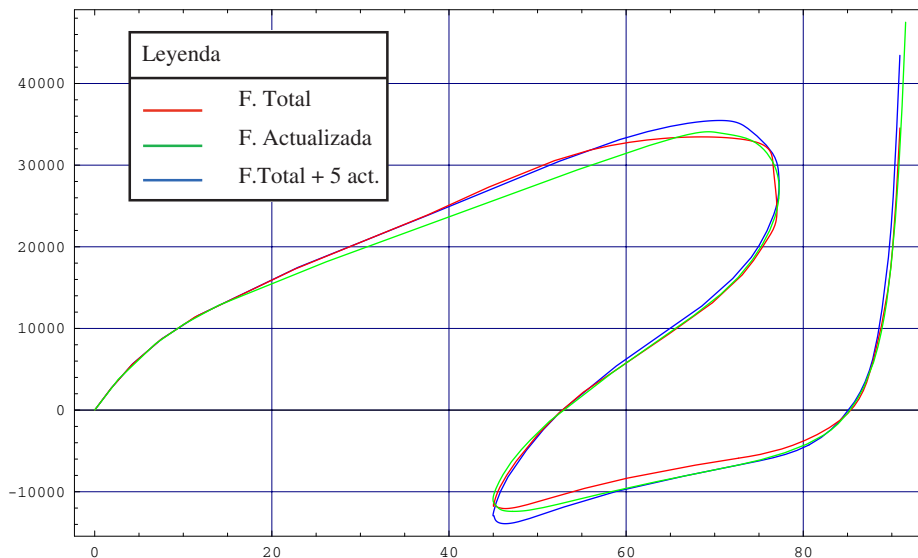


Fig IV.10.a:

*Desplazamiento horizontal del punto C al aplicar una carga normal  $P$  dependiendo de que la formulación sea total, actualizada o mixta.*

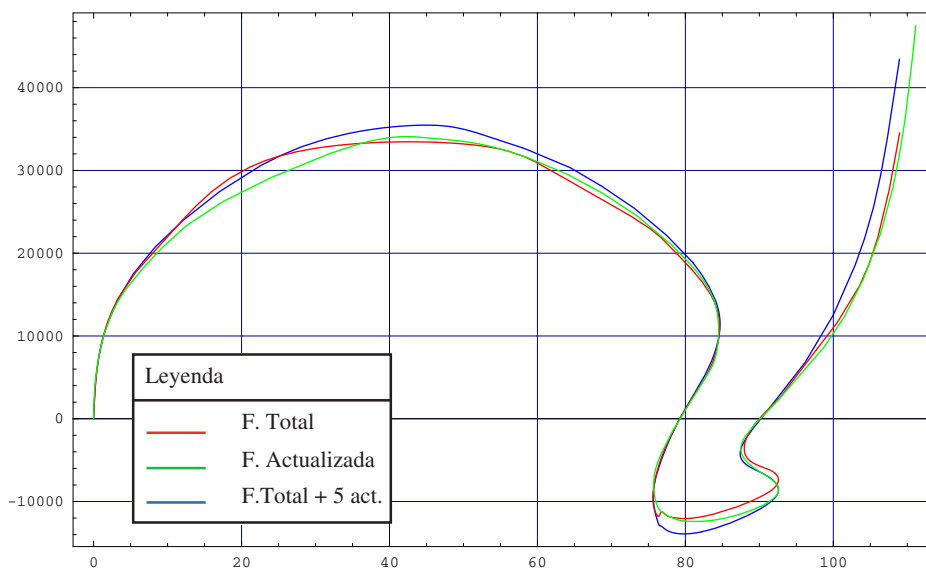


Fig IV.10.b:

*Desplazamiento vertical del punto C al aplicar una carga normal  $P$  dependiendo de que la formulación sea total, actualizada o mixta.*

Lo mismo sucede en los problemas espaciales. Los resultados que se obtienen, por ejemplo, para la viga curva de la figura IV.3 bajo una carga vertical, fija, o una carga normal, móvil, se muestran en las figuras IV.11 y IV.12, que son una extensión de las curvas IV.4.a y b calculadas sólo para cargas moderadas. Al igual que antes, el tipo de formulación resulta irrelevante cuando la dirección de la carga es fija, y apenas modifica los resultados cuando la carga es móvil –figura IV.12.b–.

En estos ejemplos y en los siguientes, para trazar los diagramas de respuesta  $\mathbf{q}(\lambda)$  del sistema al deformarse, se han utilizado las técnicas habituales del análisis no lineal, combinando un *método de control* con un procedimiento de optimación de los incrementos de la carga y los desplazamientos. Como método de control se ha usado el clásico *arc-length* de Riks y Wempner [R1, W2], y la versión *spherical arc-length* de Crisfield, Watson y Holzer [C2, C5, W1]. La presencia de puntos críticos en las trayectorias, con fuertes saltos del tipo *snap-through* y *snap-back*, obligaron a usar estos métodos, al tiempo que mejoraron el rendimiento general del programa sin deteriorar la exactitud de los resultados. Dos ejemplos notables, uno plano y otro espacial, que confirman lo dicho y constituyen dos magníficos indicadores de la eficacia y potencia del modelo de viga se muestran en las figuras IV.13.a y IV.15.a.

El primero consiste en un arco empotrado-articulado cargado en clave, y el segundo es un angular de gran esbeltez sometido a dos momentos iguales y contrarios en los extremos de los brazos. Ambos forman parte de los siete ejemplos descritos al comienzo de este apartado. Del primero se conoce la solución analítica cuando la carga es vertical [D1] y los resultados que se obtuvieron con los modelos de Simó, Wood y Franchi [S2, W4, Z1, F3]. De acuerdo con la solución analítica, la carga crítica se alcanza para un valor  $P = 897$ . Con los modelos de Simó y Wood, se obtuvieron  $P = 905$  y  $P \approx 930$ ; Franchi con un modelo mixto, obtuvo para un número equivalente de variables  $P = 916.4$ ; y con nuestra versión del modelo de Géraudin, se registró  $P = 903$ . En cuanto a las trayectorias, se han rebajado los 155 incrementos de carga que precisó Simó para obtener la curva IV.13.b, a tan sólo 28, con un número medio de 8.6 iteraciones por incremento. Para la carga móvil, normal al arco, el valor crítico que se ha encontrado es  $P = 889$  y la trayectoria se ha obtenido con tan sólo 31 incrementos de carga. En ambos casos se ha utilizado una formulación Lagrangiana Total.

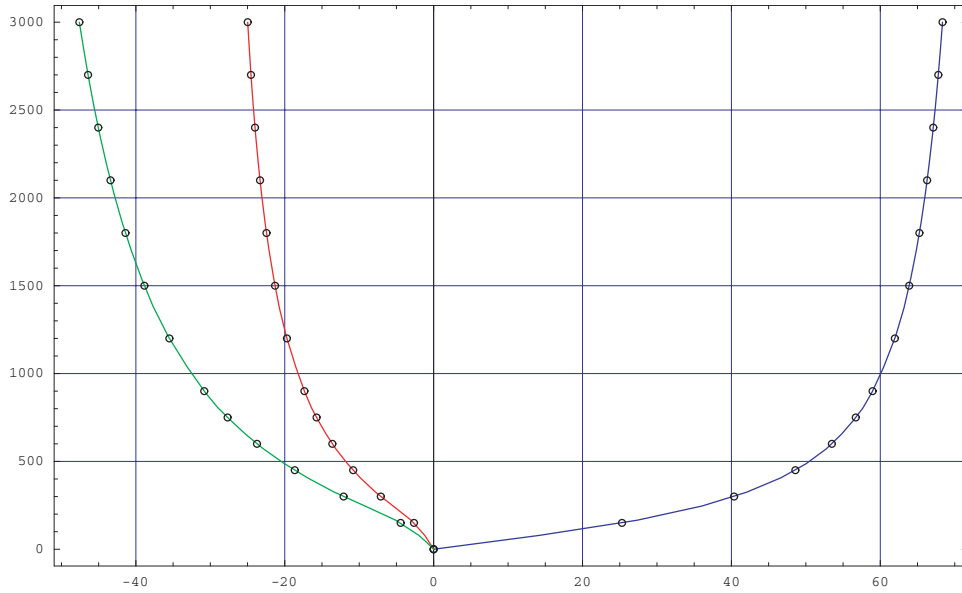


Fig IV.11.b:

Desplazamientos  $x$ - $y$ - $z$  del extremo de la viga al aplicarle una carga vertical  $P$

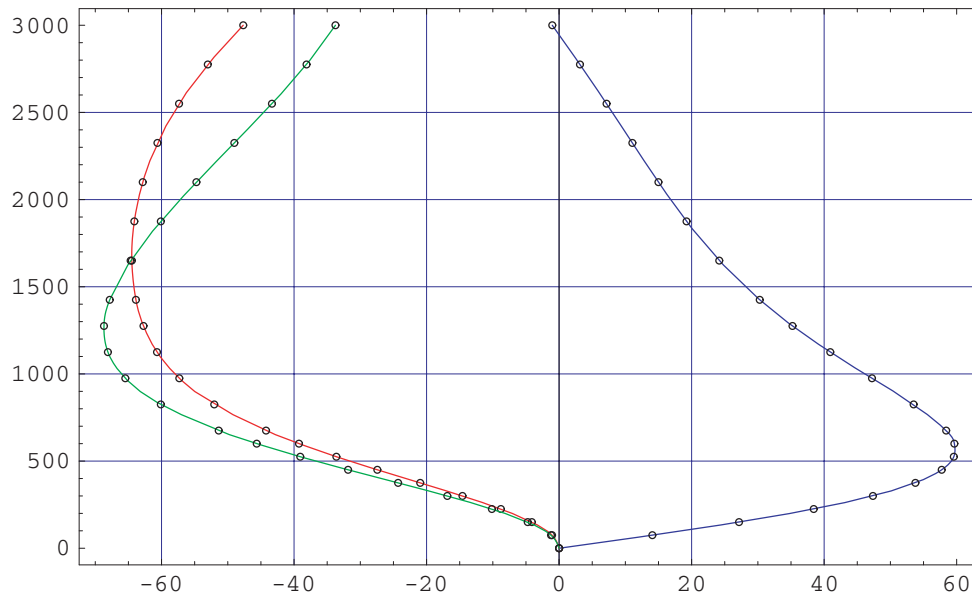


Fig IV.11.b:

Desplazamientos  $x$ - $y$ - $z$  del extremo de la viga al aplicarle una carga normal  $P$



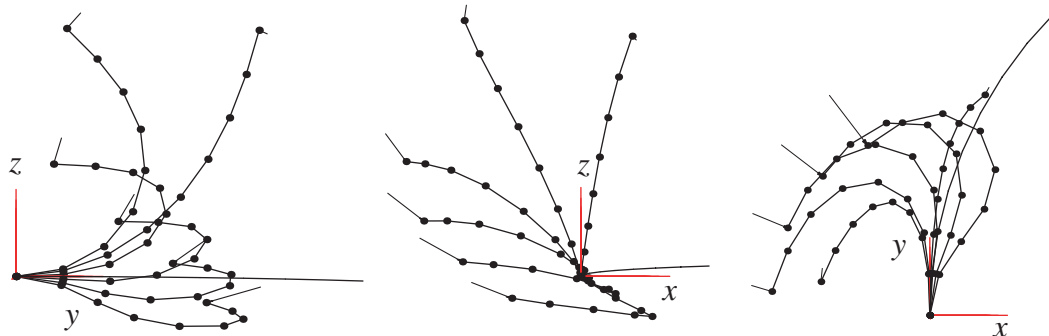


Fig IV.12.a:

*Alzado, perfil y planta de la deformación de la viga curva bajo una carga normal  $0 < P < 3000$  utilizando sólo 8 elementos finitos lineales*

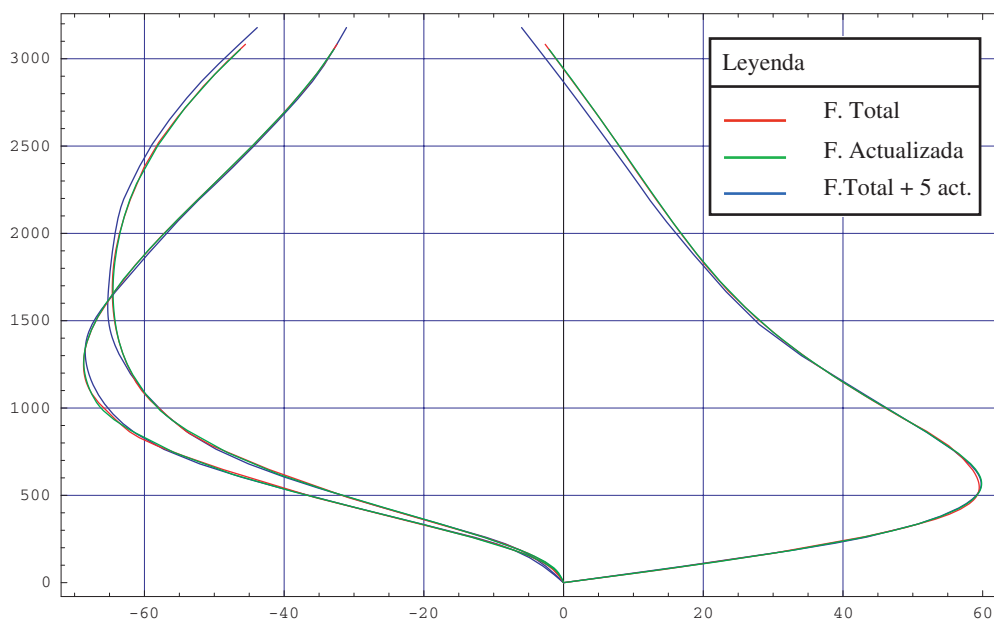


Fig IV.12.b:

*Desplazamientos del extremo libre de la viga bajo una carga normal  $P$  dependiendo de que la formulación sea total, actualizada o mixta.*

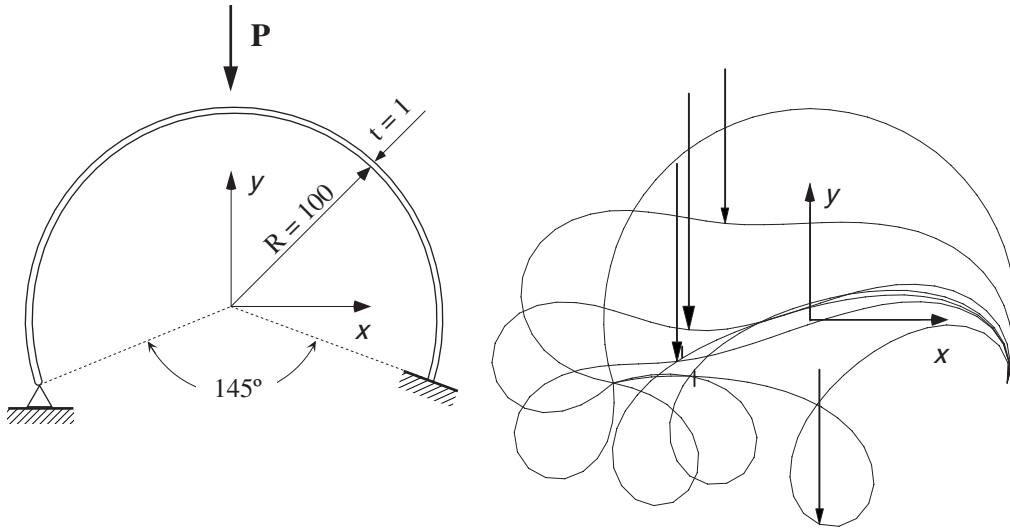


Fig.IV.13.a :

*Geometría y deformadas sucesivas del arco al variar la carga vertical  $P$*

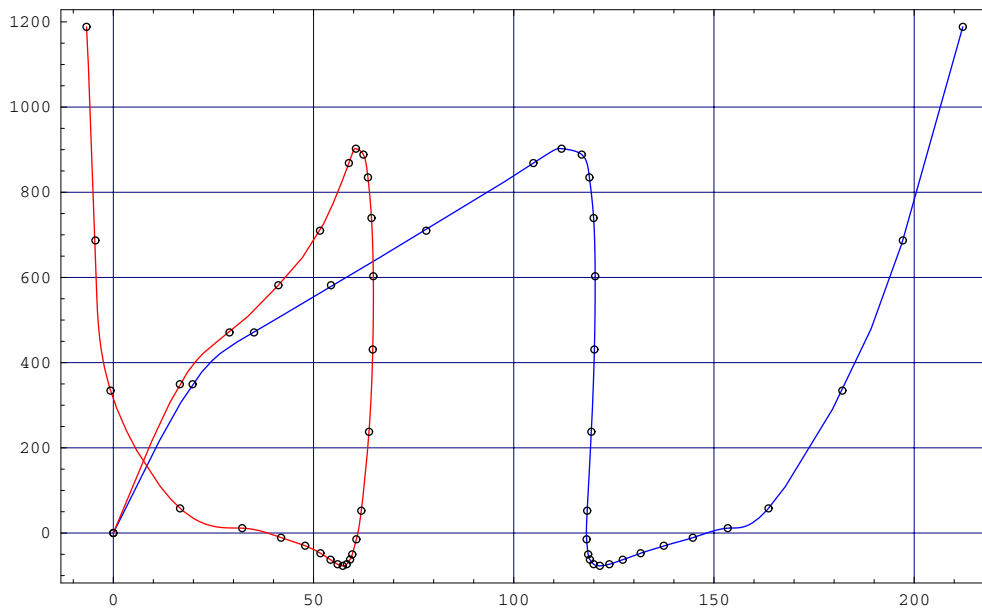


Fig.IV.13.b :

*Desplazamientos horizontal  $u$  y vertical  $v$  del punto de aplicación de la carga*

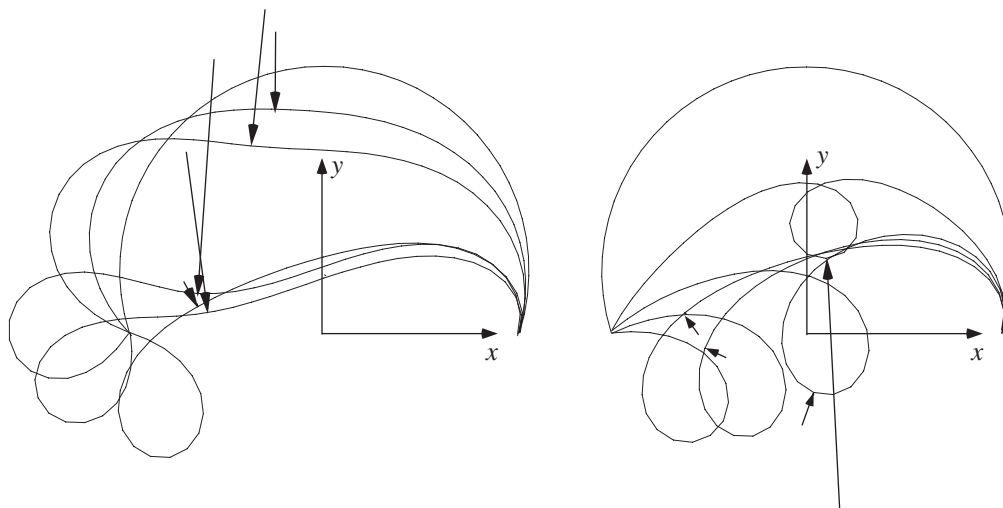


Fig.IV.14.a :

*Deformadas sucesivas del arco al variar la carga normal aplicada en la clave.*

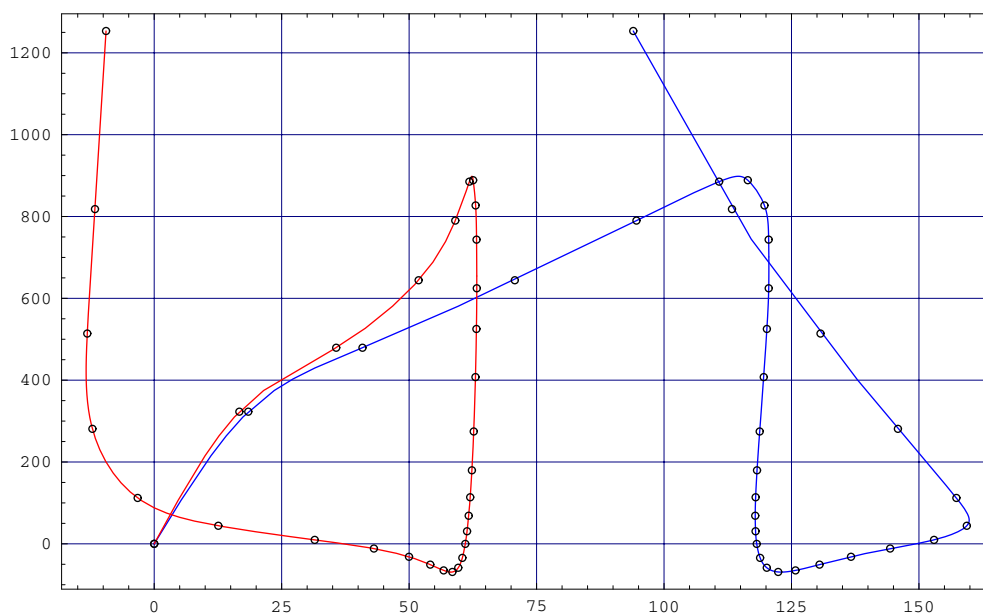


Fig.IV.14.b :

*Desplazamientos horizontal  $u$  y vertical  $v$  del punto de aplicación de la carga*

En los ejemplos del semipórtico y el arco hay un momento en que la deformación de la estructura se mantiene en equilibrio sin necesidad de aplicar carga alguna. Esta situación es inestable, como se aprecia en las figuras IV.7.b, IV.9.b, IV.13.b y IV.14.b, y para reconducirla a la zona de estabilidad debe invertirse el sentido de la carga en un pequeño tramo intermedio. Como es lógico, en esta zona inestable la convergencia resulta más difícil y los incrementos de carga se reducen mucho.

El ejemplo del angular –figura IV.15– es más complejo, pues presenta dos puntos de bifurcación y una fuerte deformación por flexotorsión. La complejidad de los movimientos que experimenta el vértice del angular se refleja en las figuras IV.17 a IV.20. En ellas se observa cómo el angular apenas se deforma por debajo del momento crítico de pandeo lateral  $M_{cr}$ , y cómo al llegar a este valor experimenta un movimiento brusco fuera del plano que le obliga a dar un giro completo de  $360^\circ$  y lo devuelve a la situación de partida. Una secuencia de imágenes de esta primera revolución se muestra en la figura IV.19 –para no entorpecer la vista general de la deformación con las imágenes superpuestas de los dos brazos, se ha optado por mostrar la deformación global de uno de ellos y sólo la directriz del otro–. Al término de esta primera revolución, el momento toma el mismo valor crítico que al inicio del pandeo, pero con signo cambiado, y la situación se repite en sentido inverso con otro giro completo de  $360^\circ$ . Esta segunda revolución se muestra en la secuencia de imágenes de la figura IV.20. Completadas estas dos revoluciones, el sistema retorna a la situación inicial, previa al pandeo, y se repite de nuevo el ciclo. La asimetría de estos dos giros se refleja claramente en la curva IV.17, que muestra el desplazamiento normal al plano  $x$ - $y$  del vértice del angular, y también en la superposición de las dos curvas correspondientes al desplazamiento sobre el eje  $x$  de la figura IV.18.

En este ejemplo, se discretizó un brazo del angular con 20 elementos lineales y se necesitaron 112 incrementos de carga y 5 actualizaciones del sistema referencial para trazar la trayectoria completa de las dos revoluciones. El momento crítico que se obtuvo fue  $M_{cr} = 627.4$ . El mismo ejemplo, resuelto por Argyris con 10 elementos e interpolación cúbica [A3], presentó algunos problemas y no logró que la curva IV.17 fuera simétrica; y resuelto por Simó con 10 elementos cuadráticos y una formulación Lagrangiana Actualizada [S2], requirió 320 incrementos de carga para completar el trazado de la trayectoria.

Una estructura que presenta también importantes deformaciones de flexotorsión es la pletina semicircular de la figura IV.16 –sexto de los sistemas descritos al inicio del apartado. En principio, desde un punto de vista computacional, este ejemplo es más simple que el anterior al no presentar ningún punto crítico; sin embargo, permite calibrar bien la capacidad del modelo para reproducir con un número pequeño de elementos finitos situaciones extremas de estructuras que sufren importantes alabeos y distorsiones al deformarse, y constituye una excelente prueba para valorar el comportamiento de un modelo de viga al introducir momentos no conservativos.

En este caso, se alternan también dos tipos de momentos. En primer lugar se aplica un momento torsor fijo en la dirección  $x$ , y después, un momento torsor de dirección variable, normal a la sección extrema. La intensidad de los momentos se incrementa de forma gradual hasta que la deformación del sistema es tan importante que exige una discretización más fina del sistema. Los desplazamientos del extremo libre y la secuencia de deformación de la pletina con el momento torsor orientado en la dirección  $x$  se recogen en las figuras IV.21 y IV.23; y con el momento normal a la sección, en las figuras IV.22 y IV.24. En ambos casos el momento no es conservativo.

Finalmente, en la figura IV.25 se presenta el último de los siete sistemas de prueba seleccionados: un sistema reticular tubular cuyas dimensiones y características se indicaron al inicio de este apartado. Con este ejemplo pretendimos comprobar la capacidad del modelo para determinar las formas de pandeo y reproducir los estados de deformación que hipotéticamente se producirían en estructuras complejas como los entramados espaciales utilizados en construcción civil para cubrir grandes vanos, en el supuesto de que los materiales mantuvieran su elasticidad lineal.

Esta estructura se sometió a dos tipos de carga: una fuerza puntual y vertical aplicada en el nodo cenital C, y una carga radial repartida uniformemente entre todos los nodos –figuras IV.26 a IV.38–. Las curvas que relacionan el factor de intensidad de carga  $Q$  con el desplazamiento vertical del nudo cenital C se muestran en las gráficas IV.26 y IV.27 para una carga radial repartida de dirección fija; en la figura IV.35 para una carga repartida normal (dirección variable) y en las gráficas IV.31 y IV.32 para una carga puntual de dirección fija y otra de dirección variable. Por otra parte, las figuras IV.29, IV.34 y IV.38 muestran una secuencia de imágenes de la deformación de la malla a medida que varía el factor de carga  $Q$  en estos casos.

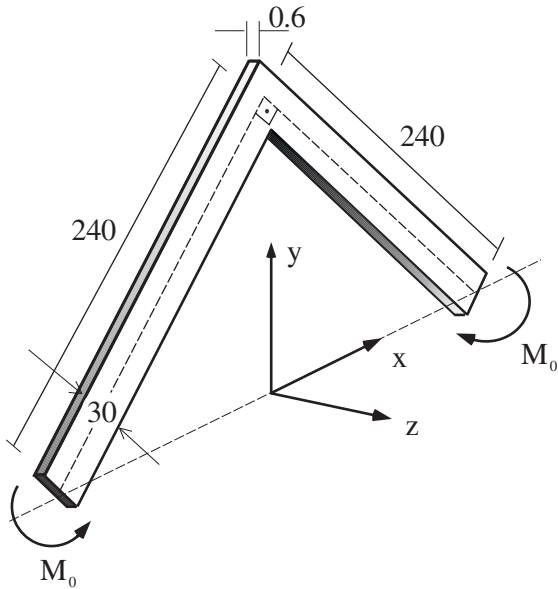


Fig. IV.15.a :

*Vista general del angular*

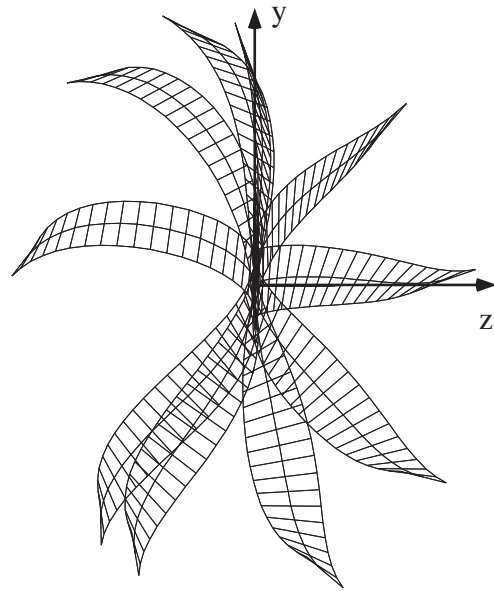


Fig IV.15.b :

*Deformadas sucesivas del angular*

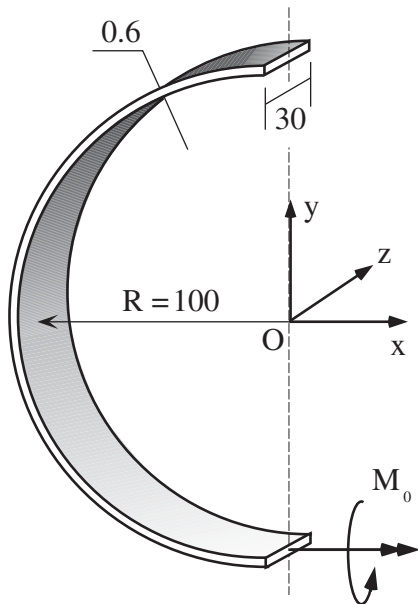


Fig IV.16.a :

*Vista general de la pletina.*

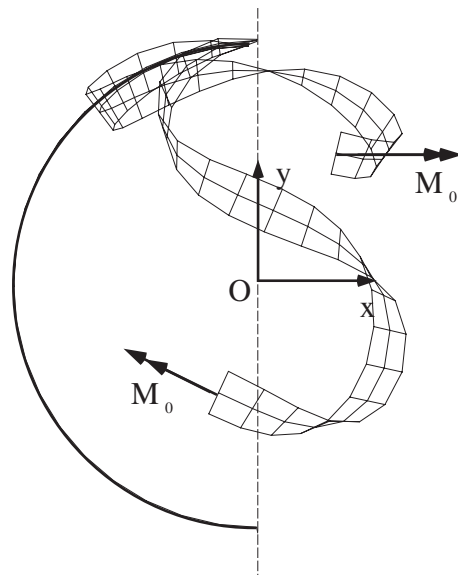


Fig IV.16.b :

*Deformadas de la pletina para  $M_0 = 1500$ , con un par de dirección fija y otro normal*

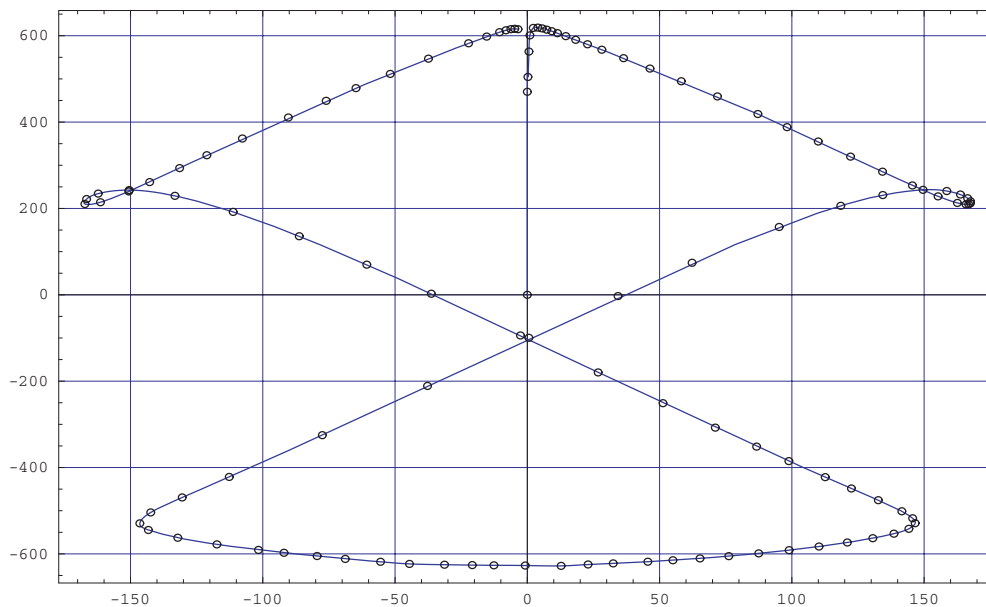


Fig.IV.17 :

*Desplazamiento  $\Delta z$  del vértice del angular al variar el par  $M_0$*

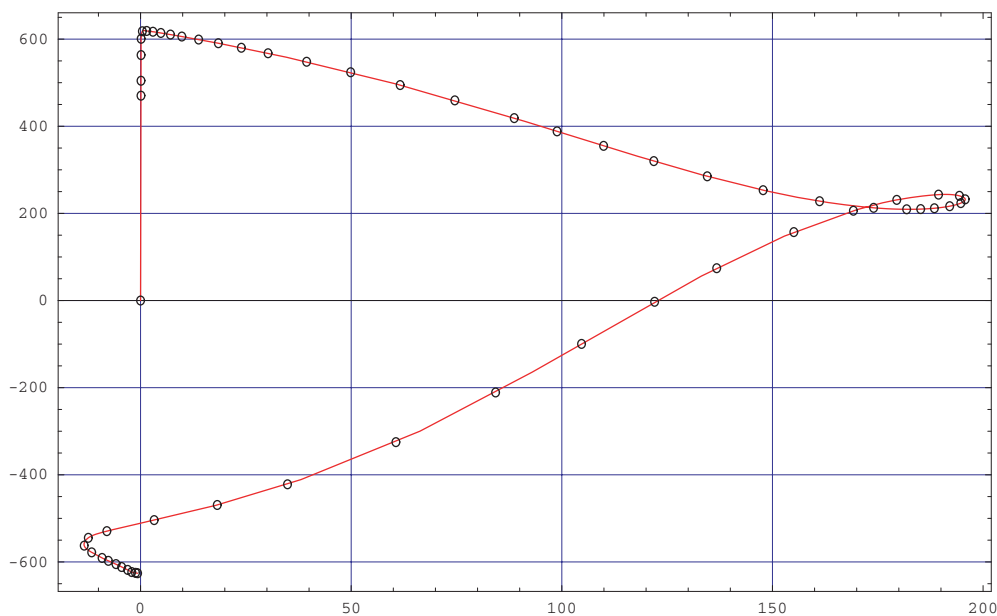


Fig.IV.18 :

*Desplazamientos  $\Delta z$  de los extremos del angular al variar el par  $M_0$*

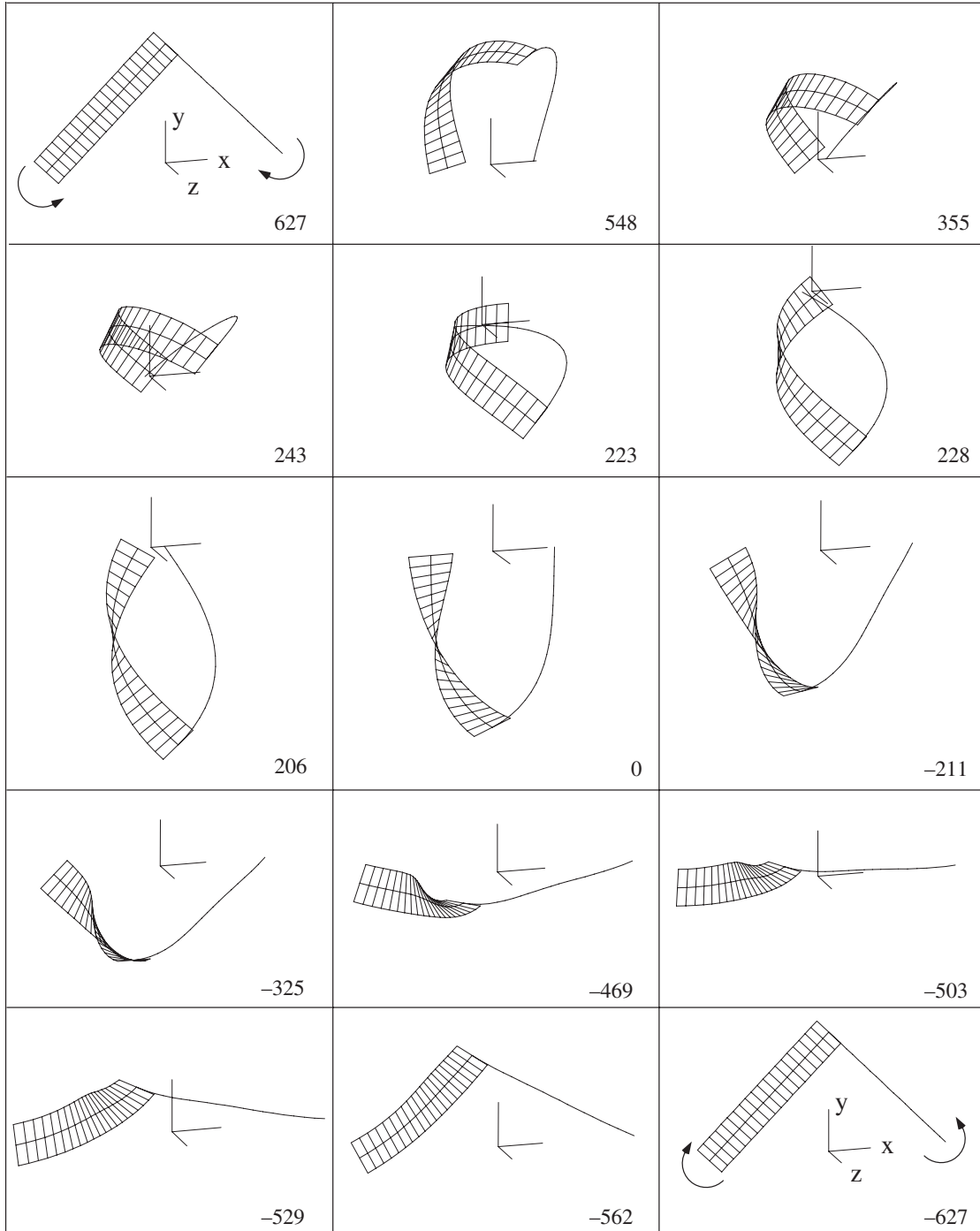


Fig IV.19 :

*Deformación del angular al dar la primera vuelta, variando el par  $M_0$  entre 627 y -627*



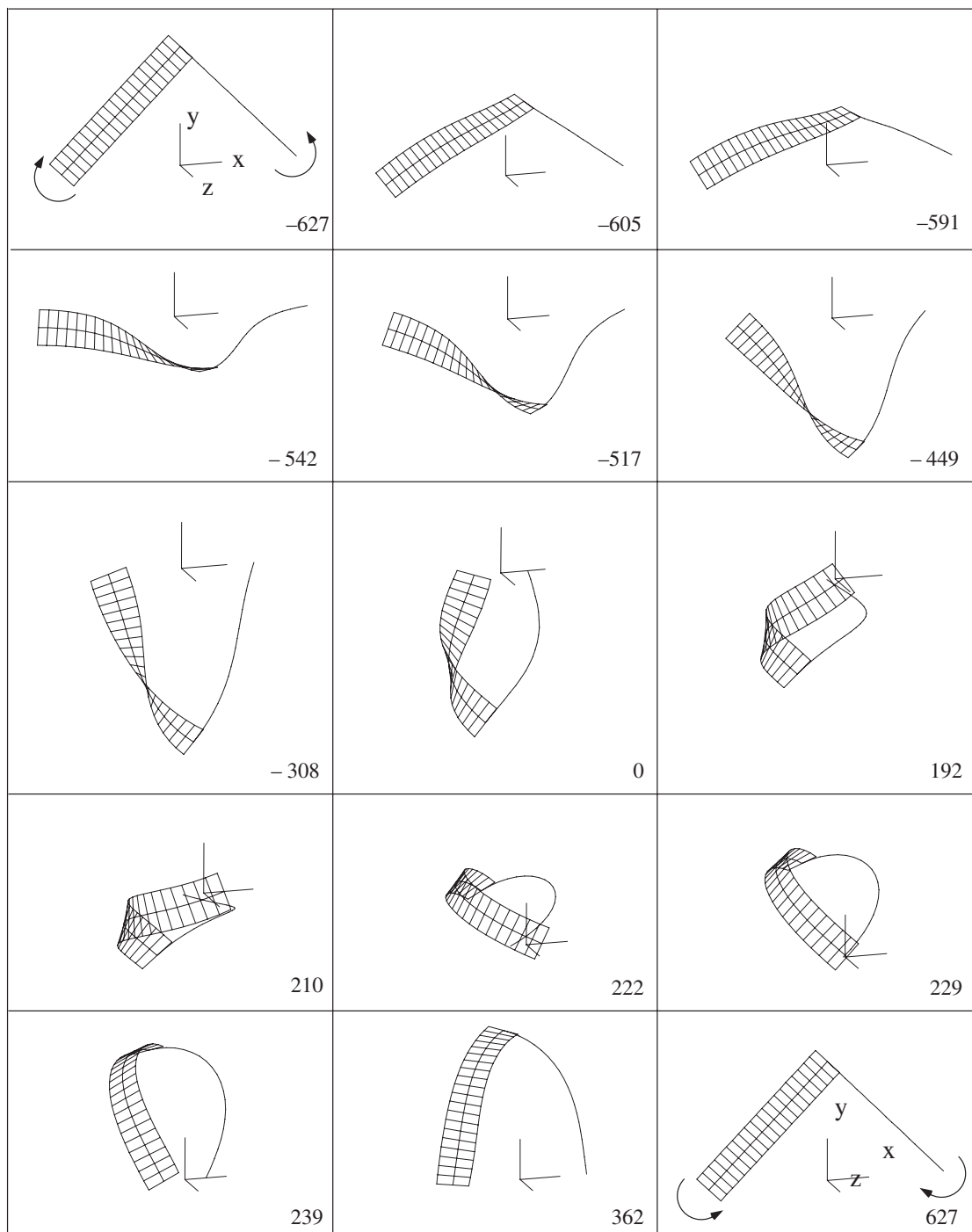


Fig IV.20 :

*Deformación del angular al dar la segunda vuelta, variando el par  $M_0$  entre  $-627$  y  $627$*

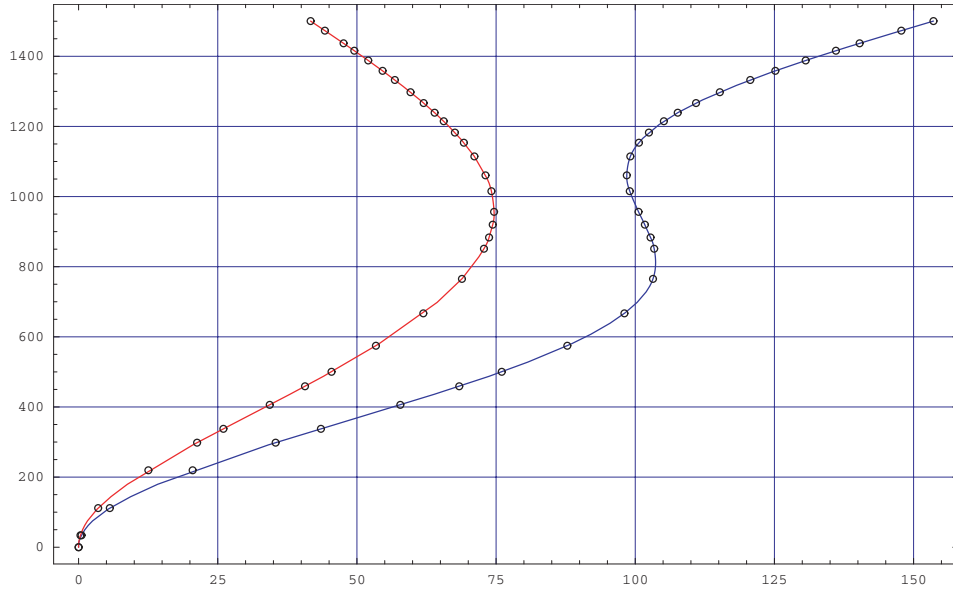


Fig.IV.21:

*Desplazamientos  $x$ - $y$  del extremo de la pletina al aplicarle un par torsor en la dirección  $x$*

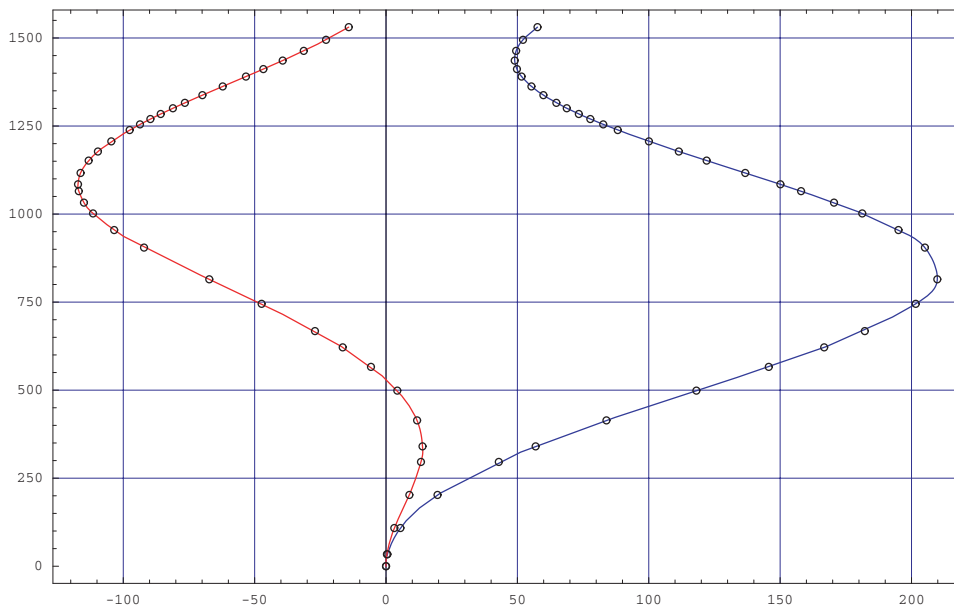
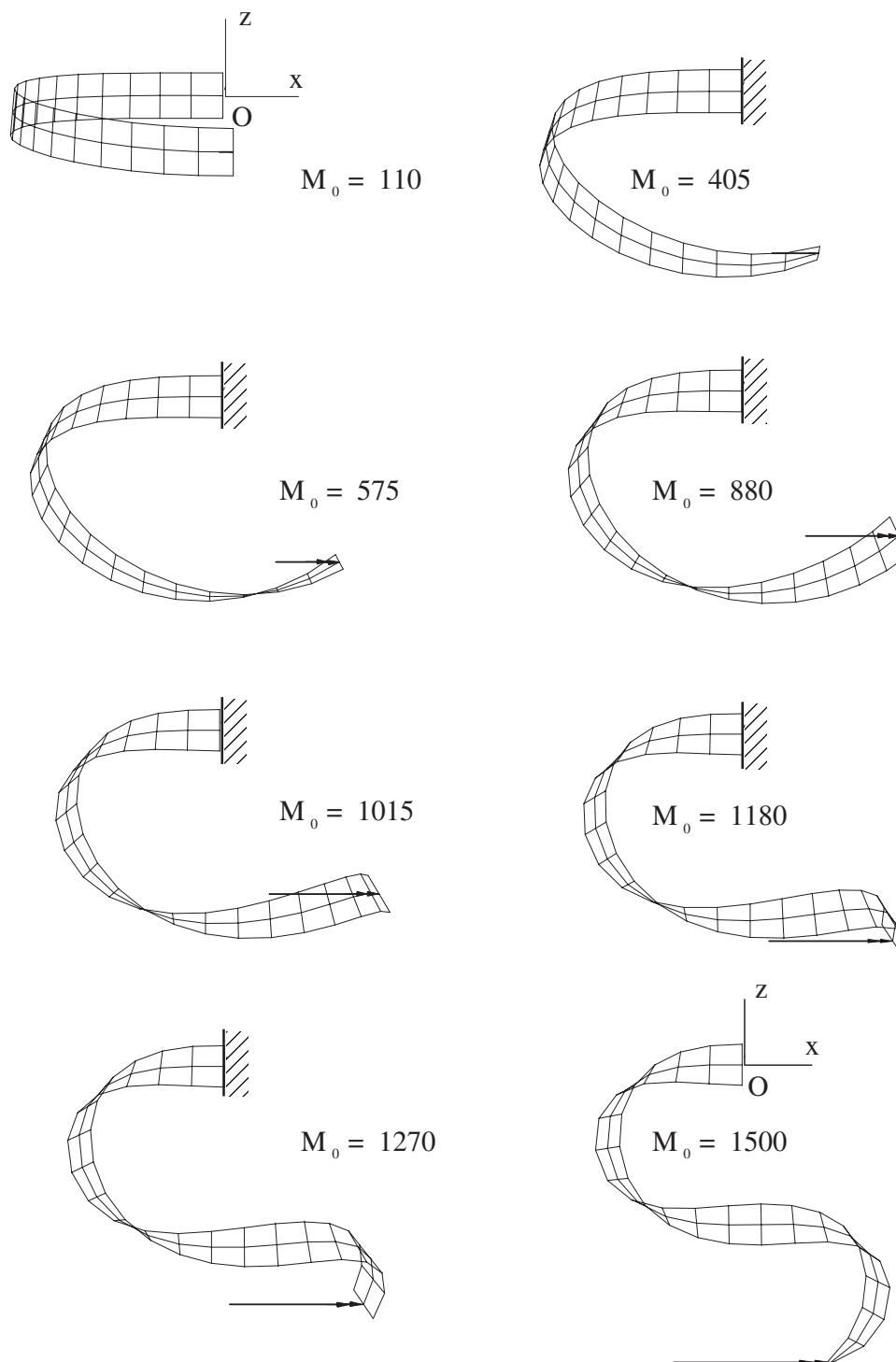


Fig.IV.22 :

*Desplazamientos  $x$ - $y$  del extremo de la pletina al aplicarle un par torsor normal*

Fig IV.23 : Deformadas de la pletina sometida a un momento torsor en la dirección  $x$

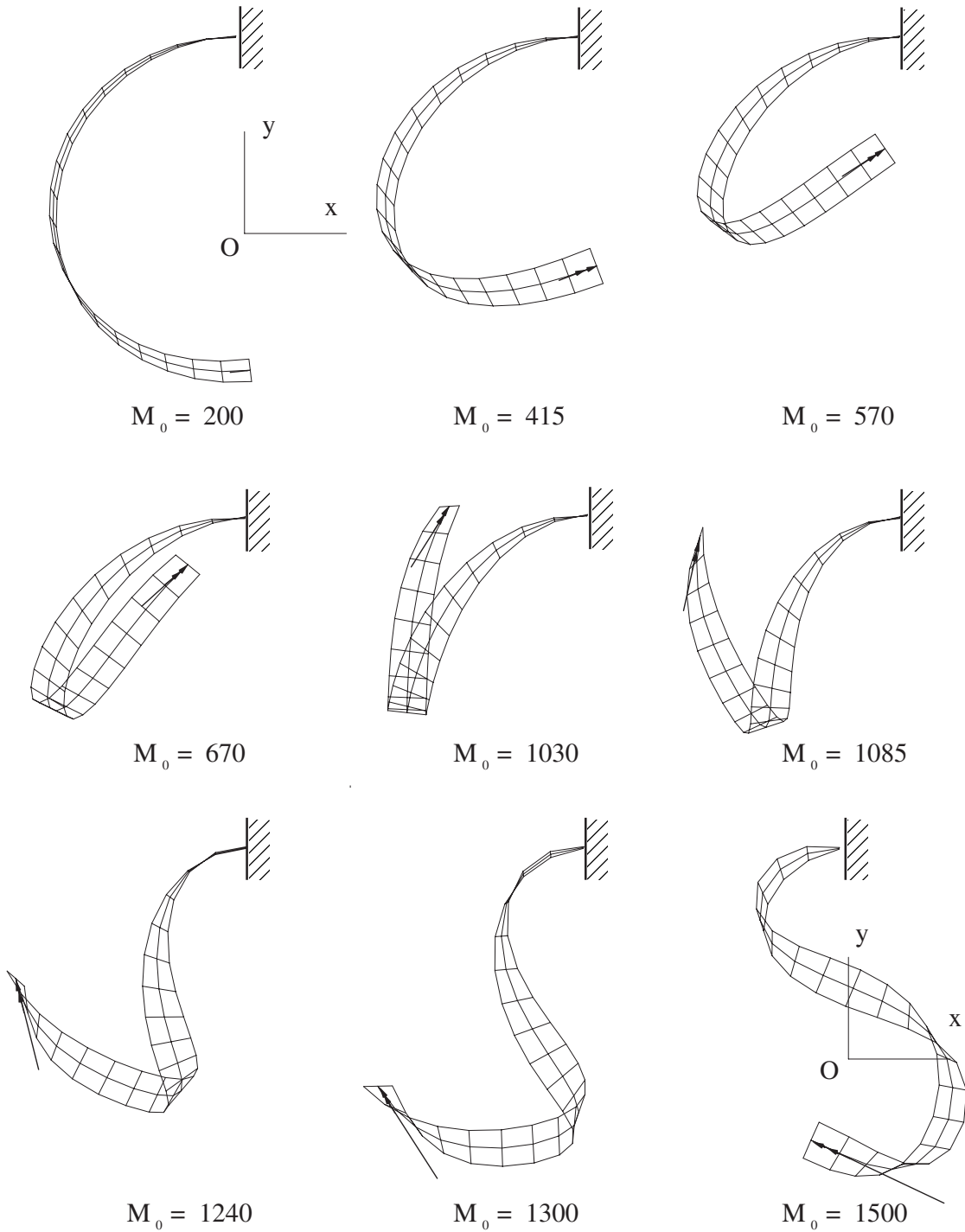


Fig IV.24 : Deformadas de la pletina sometida a un momento torsor normal

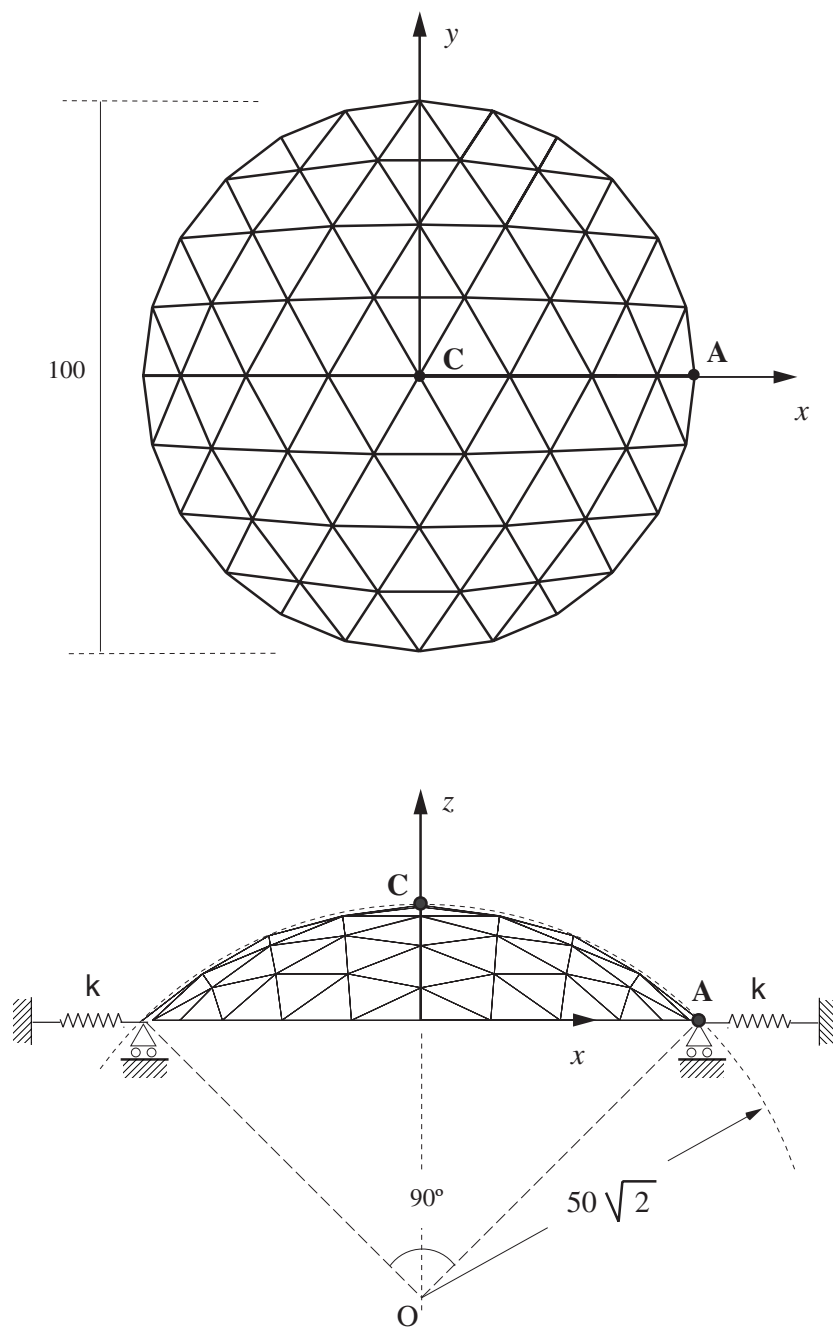


Fig. IV.25 :

*Planta y alzado de la cúpula:  
geometría y condiciones de apoyo de la malla reticular*

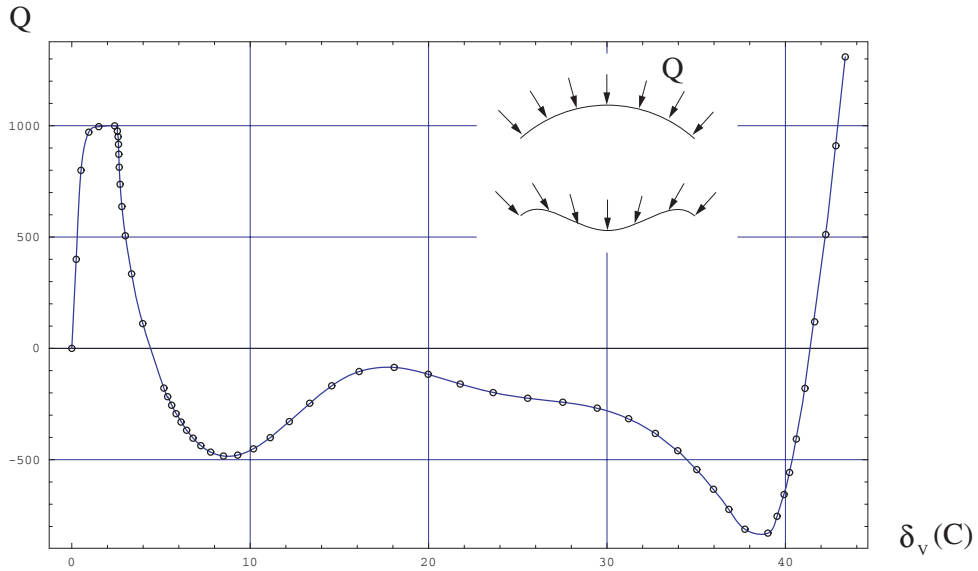


Fig. IV.26 :

*Desplazamiento vertical del nudo cenital C bajo carga radial uniforme (dirección fija) siguiendo la trayectoria principal de equilibrio.*

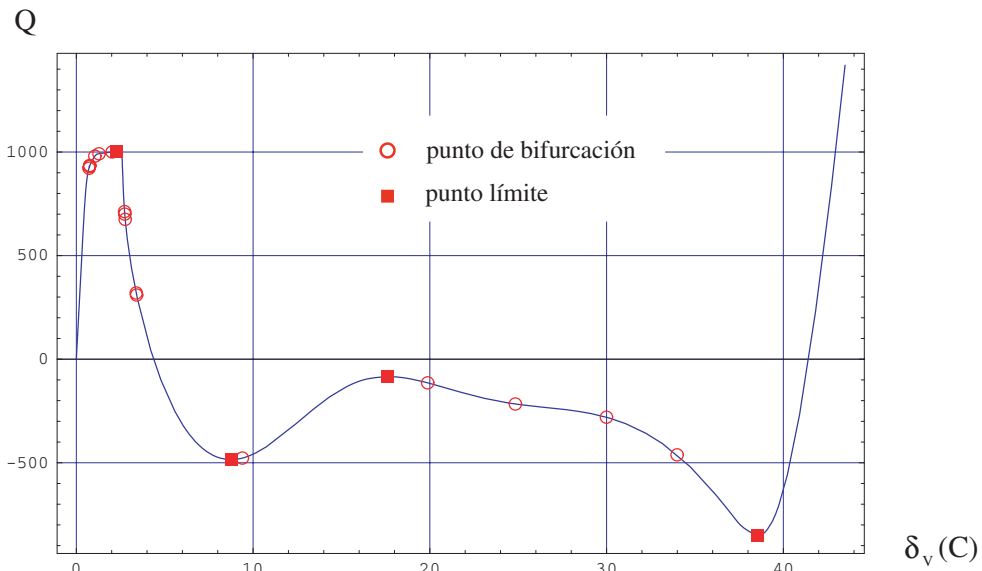


Fig. IV.27 :

*Situación de los puntos críticos sobre la trayectoria principal de equilibrio con carga radial uniforme (dirección fija).*

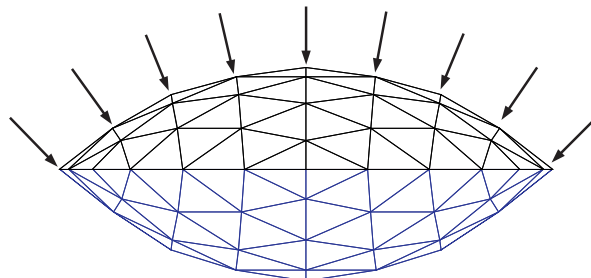


Fig. IV.28 :

*Alzado de la cúpula: geometría inicial y deformada final de la malla*

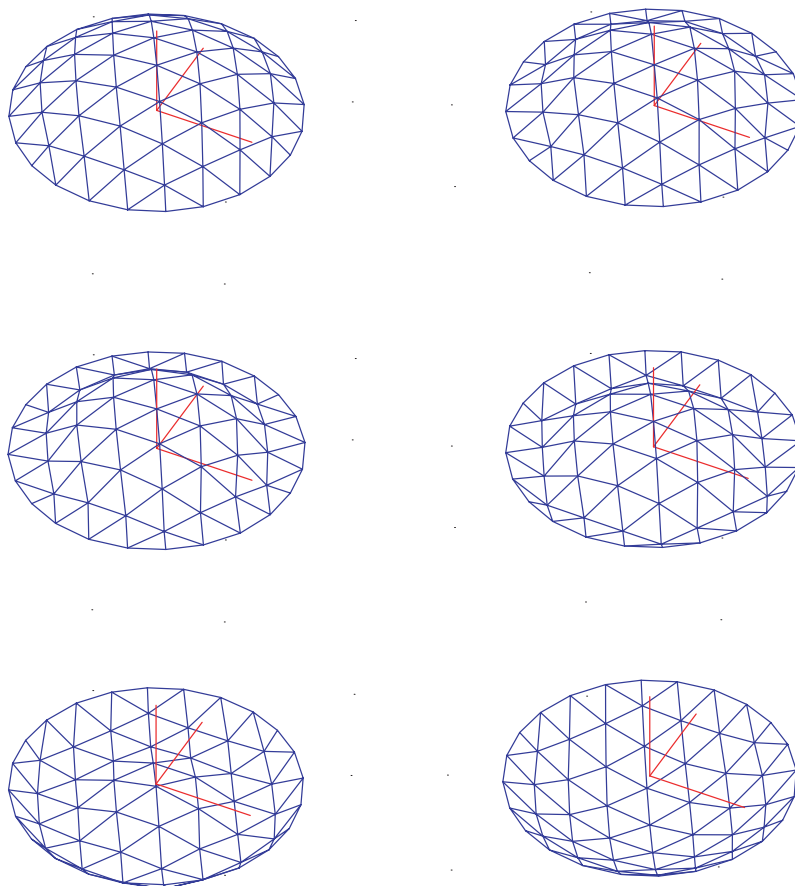


Fig. IV.29 :

*Deformaciones sucesivas de la malla reticular al variar el factor de carga.*

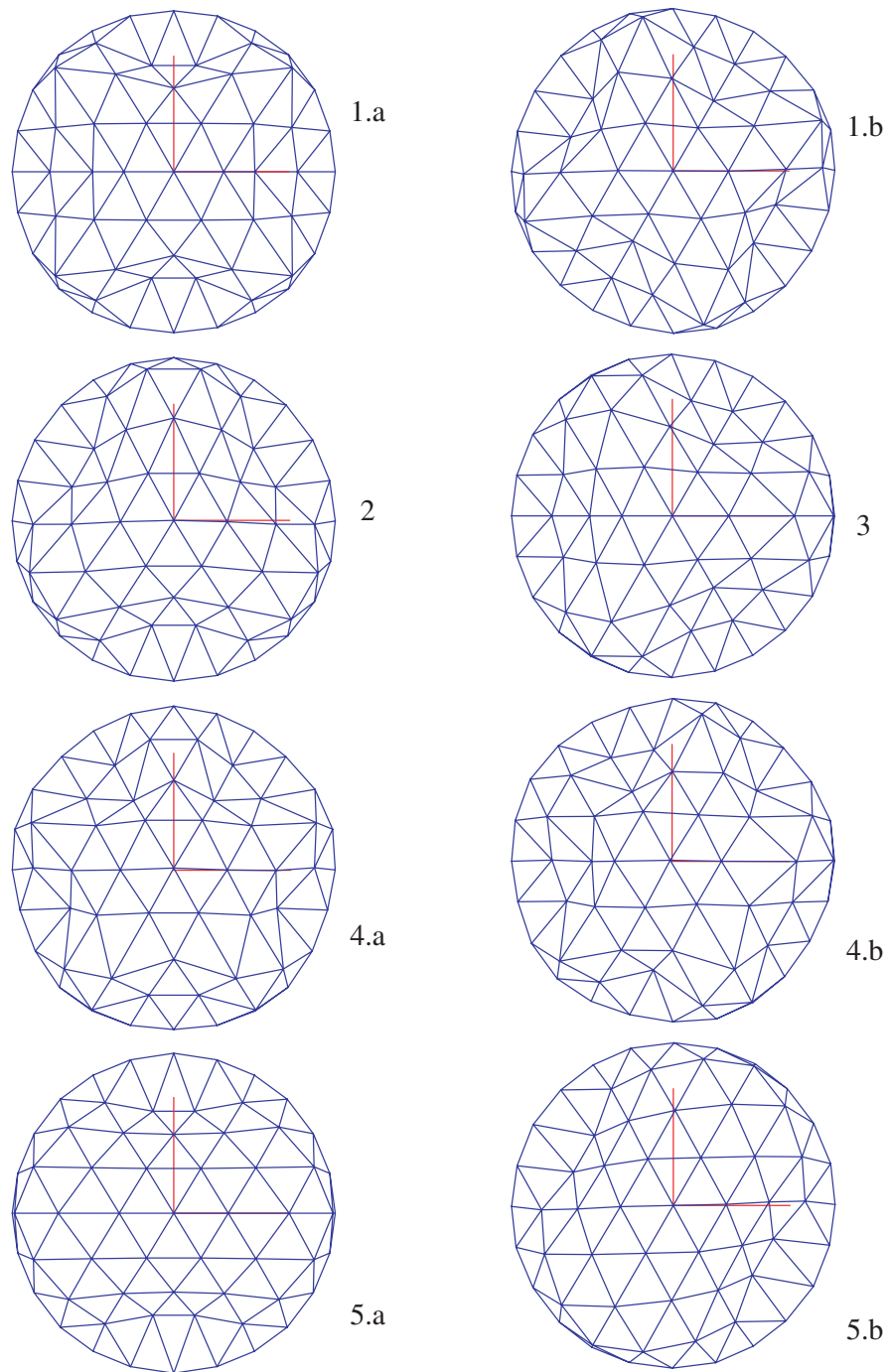


Fig. IV.30 :

*Vista en planta de las formas de pandeo correspondientes a los cinco primeros puntos críticos bajo carga radial uniforme de dirección fija.*



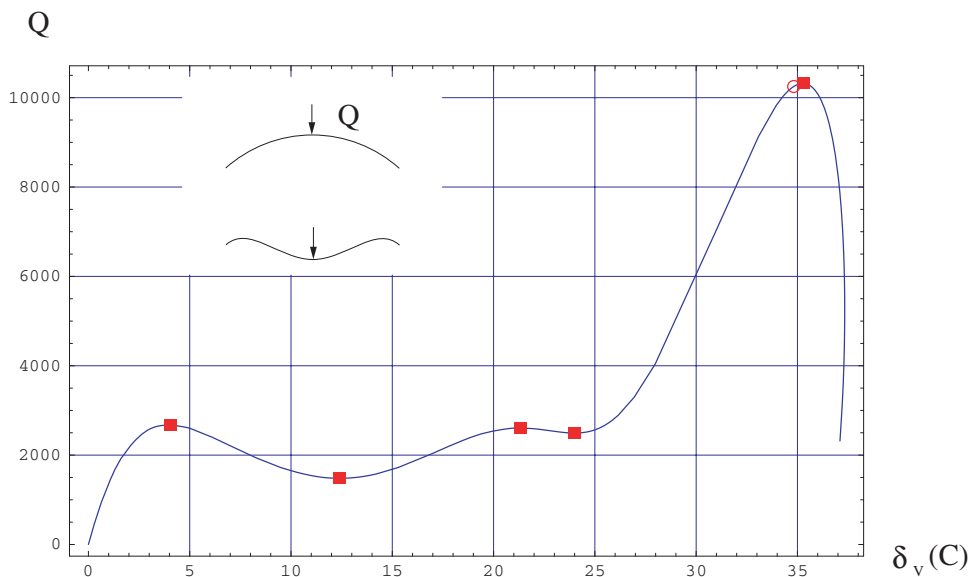


Fig. IV.31 :

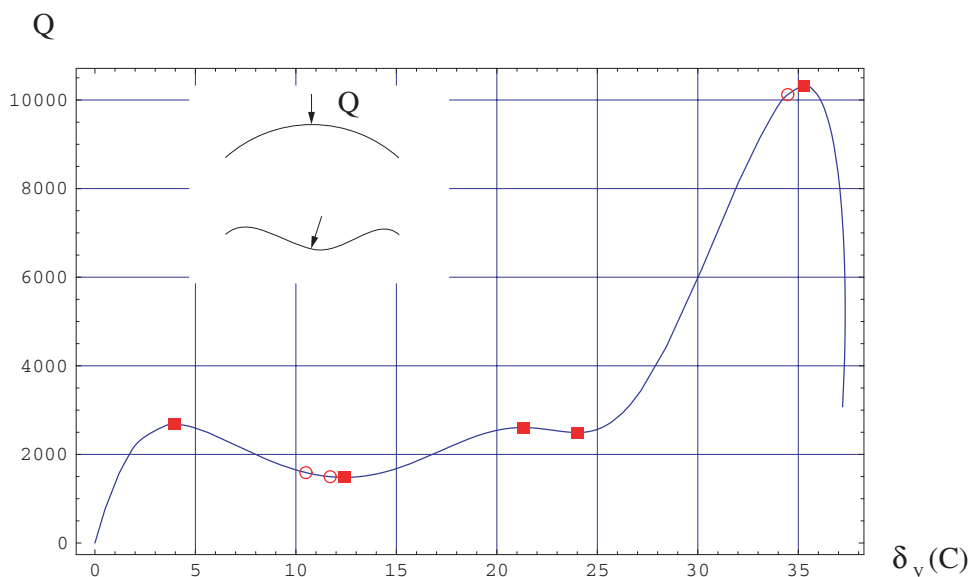


Fig. IV.32 :

*Desplazamiento vertical del nudo cenital C al aplicarle una carga puntual normal (dir. variable). Situación de los puntos críticos.*

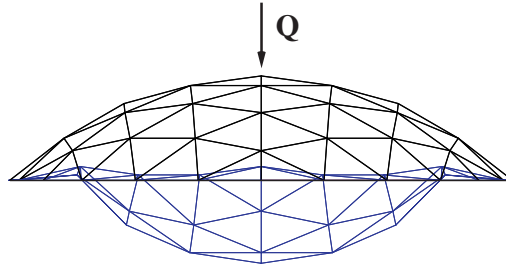


Fig. IV.33 :

*Alzado de la cúpula: geometría inicial y deformada final de la malla reticular al aplicar una carga puntual vertical en el nodo cenital.*

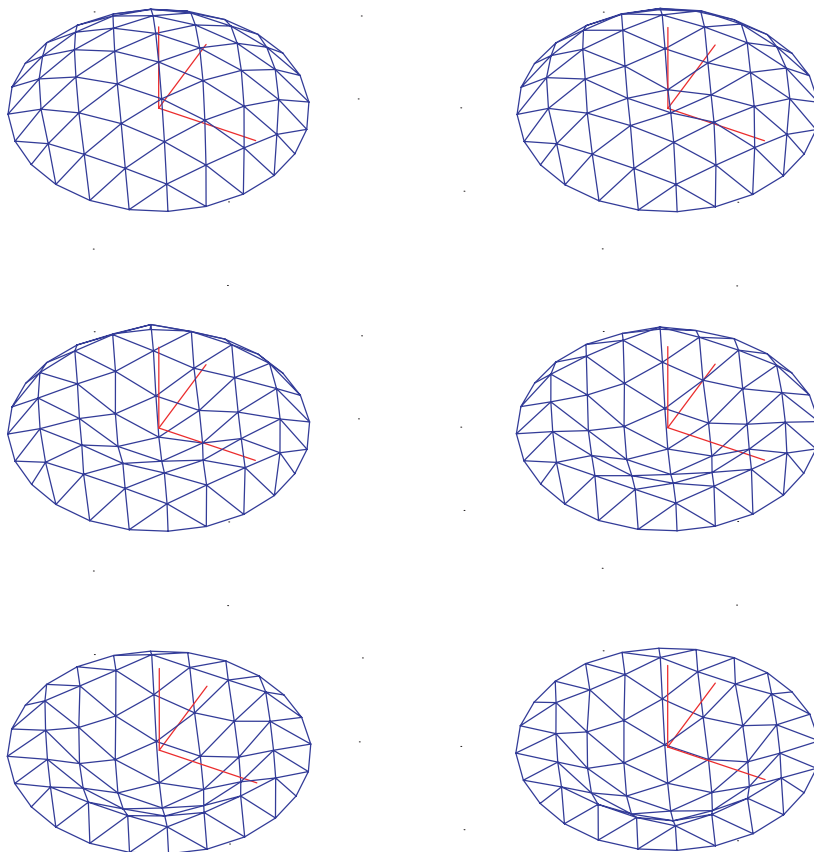


Fig. IV.34 :

*Deformaciones sucesivas de la malla reticular al variar la carga puntual  $Q$ .*

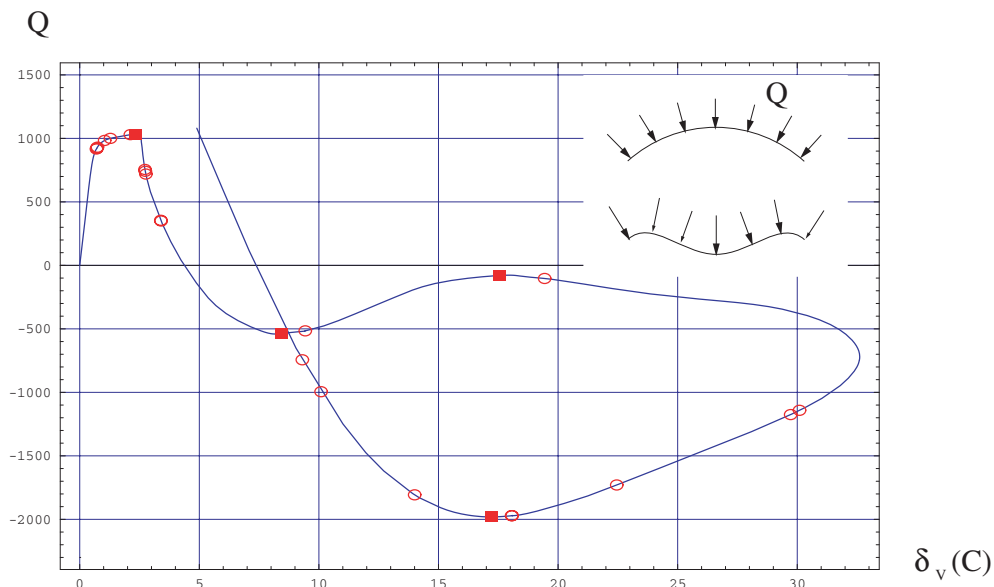


Fig. IV.35 :

*Desplazamiento vertical  $\delta$  del nudo central C al aplicar una carga uniforme y normal (dir. variable). Situación de los puntos críticos en la rama principal.*

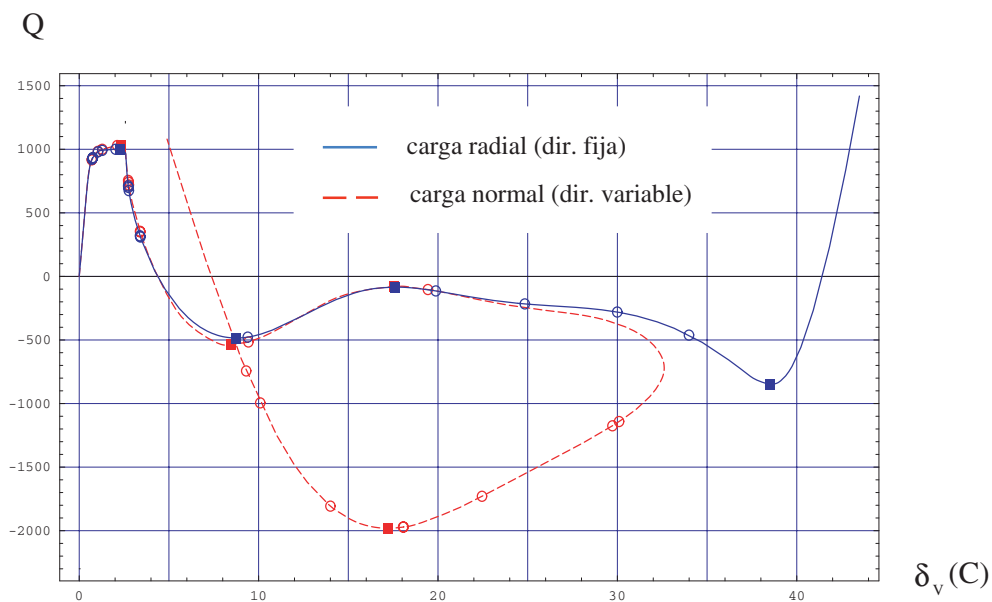


Fig. IV.36 :

*Curvas de desplazamiento vertical del nudo C correspondientes a una carga uniforme radial (dir. fija) y otra uniforme normal (dir. variable).*

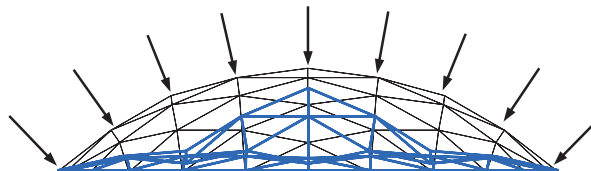


Fig. IV.37 :

*Alzado de la cúpula: geometría inicial y deformada final de la malla reticular al aplicarle una carga normal.*

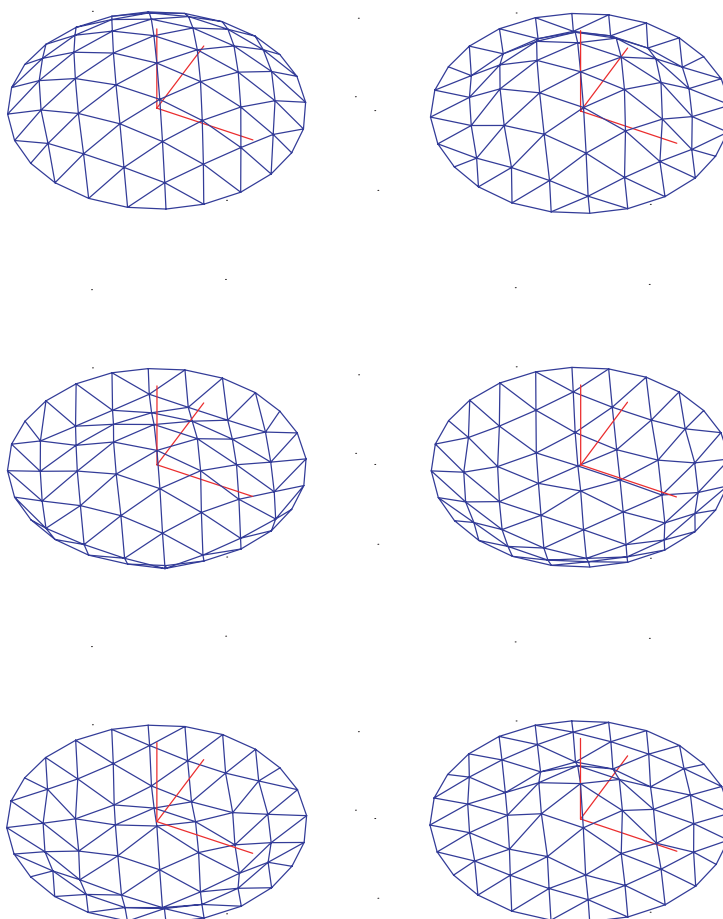


Fig. IV.38 :

*Deformaciones sucesivas de la malla reticular al variar la carga normal.*

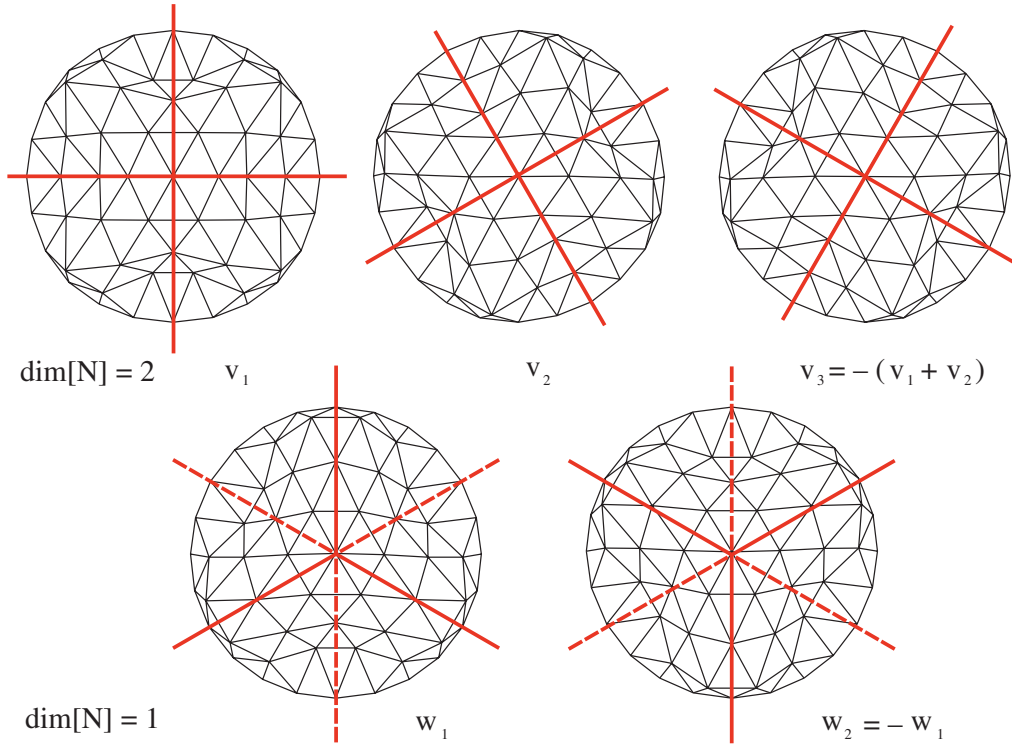


Fig. IV.39 :

*Formas simétricas de pandeo en un punto de bifurcación.*

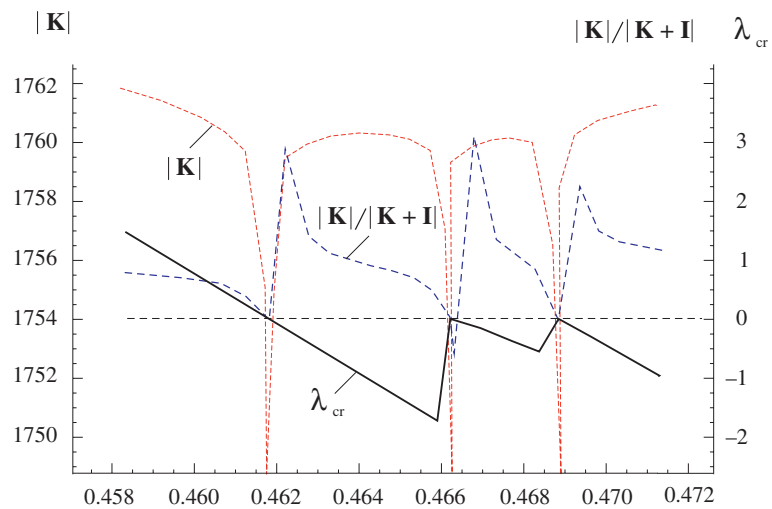


Fig. IV.40 :

*Variación de las funciones  $|K|$ ,  $|K|/|K+I|$  y  $\lambda_{cr}$  al cruzar tres puntos críticos*

Al variar el factor de carga e irse deformando la malla, van apareciendo una serie de puntos críticos a lo largo de la curva carga–deformación. La mayoría son puntos de bifurcación o ramificación en los que la curva se desdobra en dos o tres ramas secundarias, y el resto puntos límite, –ver tabla IV.22–. Lógicamente, el número y posición de estos puntos dependen del tipo de carga y de la trayectoria seguida por la estructura al deformarse. Entre las posibles trayectorias sólo una, la rama principal, mantiene la simetría hexagonal de la malla original; esta rama se muestra en las figuras IV.26 a IV.36 para cuatro casos de carga distintos: carga repartida de dirección radial (fija) o normal (móvil), y carga puntual de dirección vertical (fija) o normal (móvil). Como la rama principal es inestable a partir del primer punto crítico, sólo representa una de las muchas curvas *teóricas* de equilibrio que pueden darse en un proceso de deformación continuo controlado por el factor de intensidad de carga.

	<i>Carga repartida radial</i>	<i>Carga repartida normal</i>	<i>Carga puntual vertical</i>	<i>Carga puntual normal</i>
1	921.58 (2 ramas)	914.59 (2 ramas)	2675.3 (p. límite)	2675.3 (p. límite)
2	930.20 (1 rama)	921.56 (1 rama)	1481.7 (p. límite)	1588.5 (2 ramas)
3	935. 10 (1 rama)	930. 75 (1 rama)	2605.7 (p. límite)	1496.8 (2 ramas)
4	980.08 (2 ramas)	983.84 (2 ramas)	2494.0 (p. límite)	1481.7 (p. límite)
5	991.56 (2 ramas)	1000.03 (2 ramas)	10250.5 (2 ramas)	2605.7 (p. límite)
6	1000.32 (2 ramas)	1029.50 (2 ramas)	10318.7 (p. límite)	2494.0 (p. límite)
7	1001.86 (p. límite)	1033.72 (p. límite)		10122.9 (2 ramas)
8	712.59 (2 ramas)	755.25 (2 ramas)		10318.7 (p. límite)
9	700.27 (1 rama)	740.90 (1 rama)		
10	675.03 (2 ramas)	719.16 (2 ramas)		

Tabla IV.22:

*Factores de intensidad de carga en los diez primeros puntos críticos de la rama principal bajo distintas condiciones de carga.*

En los puntos de bifurcación y ramificación la estructura es inestable y presenta una o dos formas independientes de pandeo. Por ejemplo, la figura IV.30 muestra la proyección horizontal de los ocho modos de pandeo independientes que se producen en los cinco primeros puntos críticos de la rama principal con una carga repartida radial –prácticamente los mismos modos y factores de carga se obtienen con una carga normal si los desplazamientos y rotaciones de la malla son pequeños–. Como es lógico, estos modos de pandeo poseen un conjunto de simetrías acorde con la organización hexagonal de la retícula. Así, los autovectores críticos en los puntos límite presentan simetría completa con relación a las seis diagonales del hexágono, y en los puntos de divergencia presentan, o bien simetría con relación a tres diagonales alternas del hexágono y asimetría con relación a las tres restantes –puntos críticos 2 y 3 de la figura IV.30–, o bien simetría con relación a una sola de las tres diagonales del hexágono –puntos críticos 1, 4 y 5 de la misma figura–. En el primer caso el núcleo de rigidez tangente tiene dimensión 1 y sólo contiene un autovalor independiente; en el segundo, la dimensión del núcleo es 2, dándose una relación de dependencia entre los tres autovectores relacionados con las tres diagonales del hexágono. El conjunto completo de formas simétricas de pandeo correspondientes a los dos primeros puntos críticos de la figura IV.30, juntamente con las relaciones de dependencia que las ligan, se muestra en la figura IV.39.

Son conocidos los problemas que entraña la localización precisa de los puntos críticos y las dificultades que surgen al intentar cambiar de trayectoria de equilibrio en los puntos de ramificación, debido a la singularidad que presenta en ellos la matriz de rigidez. Para evitar estos problemas se requiere un criterio inequívoco de detección de estos puntos singulares, un método fiable de resolución de los sistemas lineales mal o pobremente condicionados y una técnica eficaz que permita el cambio de trayectoria. En los ejemplos precedentes, los dos últimos problemas se han resuelto de una forma simple y convencional; así, para resolver los sistemas lineales de ecuaciones, se utilizó una rutina común basada en el método del gradiente conjugado [P1, P3], y para cambiar de trayectoria, el clásico método de *perturbación*. Únicamente el primero de estos tres problemas, relativo a la localización de los puntos críticos, se ha resuelto de una forma distinta a la usual, que se expone a continuación.

Normalmente, para detectar la presencia de los puntos críticos se recurre a un análisis de los autovalores de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , o bien, si se desea un procedimiento menos costoso, al cálculo de las raíces de una función escalar  $f(\mathbf{K})$  que tenga la propiedad de anularse cuando  $\mathbf{K}$  es singular. Son varias las funciones que cumplen esta propiedad. Desde un punto de vista computacional, las dos más simples son el determinante de la propia matriz  $\mathbf{K}$  y, si  $\mathbf{K}$  es simétrica, la función que le asigna el término diagonal de menor valor absoluto que en la descomposición  $\mathbf{LDL}^T$  aparece en la matriz diagonal  $\mathbf{D}$ . Un serio inconveniente de la función determinante es que no se puede aplicar cuando el grado de multiplicidad del autovalor nulo es par, ya que entonces el determinante no cambia de signo y como el valor absoluto de éste no varía apreciablemente a lo largo del proceso de deformación, salvo en un pequeño entorno de los puntos críticos en los que registra una caída brusca y llega a anularse, no es fácil ni probable detectar la presencia de estos puntos con incrementos de carga moderados. Por otra parte, con la segunda de las funciones sólo se puede localizar el primer punto crítico pero no los sucesivos, por razones de tipo numérico que no se detallan. Con el fin de evitar estos problemas, se ha ensayado una nueva función de localización de los puntos críticos que puede aplicarse de forma rápida y segura a todo problema cuya matriz de rigidez tangente sea simétrica, esto es, a cualquier problema conservativo.

Esta función consiste en calcular directamente el número de autovalores negativos o nulos  $\nu(\mathbf{K})$  de la matriz simétrica  $\mathbf{K}$ . Como a lo largo del proceso de carga, el paso por un punto crítico de grado de multiplicidad  $m$  queda registrado automáticamente como un salto de valor  $\pm m$  en  $\nu$ , este indicador es completamente fiable. Además, de acuerdo con la *Ley de Inercia de Sylvester* [G1], el valor  $\nu(\mathbf{K})$  coincide con el de cualquier otra matriz congruente de  $\mathbf{K}$ :  $\nu(\mathbf{K}) = \nu(\mathbf{C K C}^T)$ ; de modo que  $\nu(\mathbf{K}) = \nu(\mathbf{D})$  en la descomposición  $\mathbf{LDL}^T$  de  $\mathbf{K}$ . Dado que esta descomposición es un paso obligado al resolver el sistema de ecuaciones lineales  $\Delta\mathbf{Q} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{d}$ , el cálculo de  $\nu(\mathbf{K})$  se reduce a un simple computo del número de términos negativos o nulos que figuran en la diagonal principal de  $\mathbf{D}$  y no implica ningún esfuerzo computacional adicional.

Por su similitud con el método de Cholesky, la descomposición  $\mathbf{LDL}^T$  conserva todas las ventajas de éste en lo referente a velocidad de cálculo y a requisitos de memoria; además, se puede aplicar a cualquier tipo de matriz simétrica, sea ésta o no



definida positiva. El mayor inconveniente del método es su falta de estabilidad cuando la matriz  $\mathbf{K}$  está mal condicionada –situación que se da siempre que nos aproximamos a un punto crítico–, ya que la simetría del procedimiento impide aplicar técnicas de pivotaje. Una forma de devolver estabilidad al procedimiento, sin restarle velocidad, consiste en sustituir la clásica descomposición  $\mathbf{LDL}^T$  por una descomposición  $\mathbf{LTL}^T$ , donde  $\mathbf{L}$  sigue siendo una matriz triangular pero  $\mathbf{T}$  es ahora una matriz *tridiagonal* simétrica. El método más sencillo y estable de lograr esta descomposición ha sido desarrollado por Aasen [A1, G1]. Este método permite pivotar las filas y columnas de la matriz  $\mathbf{K}$ , confiriendo al sistema una estabilidad comparable a la alcanzada con el método de eliminación de Gauss, a un coste computacional mínimo. En efecto, suponiendo  $n$  la dimensión de  $\mathbf{K}$ , la descomposición  $\mathbf{LTL}^T$  requiere  $O(n^3/3)$  bucles de cálculo, esto es, el mismo número de operaciones aritméticas que en una descomposición de Cholesky. Además, si se desea utilizar la descomposición  $\mathbf{LTL}^T$  para resolver el sistema de ecuaciones de equilibrio  $\Delta\mathbf{Q} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{d}$ , el único cálculo adicional que hay que realizar es resolver aparte un sistema lineal del tipo:  $\mathbf{q} = \mathbf{T}\mathbf{d}$ , cuyo coste es mínimo – $O(n)$  bucles– al ser  $\mathbf{T}$  tridiagonal. Esta descomposición, además de ser numéricamente estable, permite un cálculo rápido del indicador  $v(\mathbf{K})$ , como veremos a continuación.

En efecto, aplicando la ley de Sylvester a la nueva descomposición, el cálculo del número de autovalores negativos o nulos de  $\mathbf{K}$  se reduce al cálculo de  $v(\mathbf{T})$ , y éste al cálculo del número de concordancias de signo entre los términos consecutivos de la serie de Sturm:  $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2 \dots \Delta_n$ , formada por los determinantes de los menores principales de orden  $k \times k$  de la matriz  $\mathbf{K}$  [W3]:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{kk} & t_{kk} & & 0 & \dots & 0 \\ t_{kk} & t_{kk} & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & t_{k-1\ k-1} & t_{k-1\ k} & \\ 0 & & & t_{k\ k-1} & t_{kk} & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & & & 0 & & t_{nn} \end{bmatrix} \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} t_{kk} & t_{kk} & & 0 \\ t_{kk} & t_{kk} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & t_{k-1\ k-1} & t_{k-1\ k} \\ & & & t_{k\ k-1} & t_{kk} \end{vmatrix}$$

Tomando  $\Delta_0 = 1$ , los determinantes  $\Delta_k$  se calculan de forma secuencial aplicando la sencilla relación de recurrencia:

$$\Delta_k = t_{kk} \Delta_{k-1} - t_{k,k-1}^2 \Delta_{k-2} \quad (k: 1, 2, \dots, n) \quad (\text{IV.159})$$

en la que  $t_{ij}$  es el término que ocupa la posición  $[i, j]$  en la matriz tridiagonal  $\mathbf{T}$ .

Se puede comprobar que los cambios de signo de la serie de Sturm coinciden con los términos negativos de la serie conexa:  $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ , en la que  $\delta_0 = t_{11}$ , y

$$\delta_k = t_{kk} - t_{k,k-1}^2 / \delta_{k-1} \quad (\text{IV.160})$$

Al derivar estas series de una descomposición  $\mathbf{LTL}^T$ , de por sí estable, no producen problemas numéricos en las proximidades de los puntos críticos. No obstante, como la segunda se calcula con más precisión que la primera [P2], es preferible partir de ella para hallar  $v(\mathbf{T})$ .

Examinando el valor de  $v(\mathbf{T})$  al finalizar cada incremento de carga, se puede saber si se ha sobrepasado algún punto crítico. De darse esta circunstancia, para localizarlo de forma precisa se realiza una serie de particiones sucesivas del último incremento de carga; éstas pueden ser simples bisecciones o subdivisiones obtenidas aplicando un método secante a una función de referencia  $f(\mathbf{K})$ . La función de referencia más sencilla es el determinante de  $\mathbf{K}$ , que coincide con el valor  $\Delta_n$  de la serie de Sturm; otra función es el cociente  $|\mathbf{K}|/|\mathbf{K}+\mu\mathbf{I}|$ , que tiende a  $(\mu\lambda_{cr})^m$  con  $\lambda_{cr} \rightarrow 0$ , si  $m$  es el grado de multiplicidad del autovalor crítico  $\lambda_{cr}$ . El comportamiento de estas funciones cerca de los puntos críticos se muestra en las gráficas IV.40. En ellas se aprecia cómo varían el valor absoluto del determinante  $|\mathbf{K}|$ , el cociente  $|\mathbf{K}|/|\mathbf{K}+\mu\mathbf{I}|$  (con  $\mu=1$ ) y el autovalor crítico  $\lambda_{cr}$  al atravesar los tres primeros puntos críticos de la curva IV.27, que corresponde a una carga repartida y radial.

Naturalmente, el método secante puede sustituirse por una interpolación directa de la serie de valores  $f(\mathbf{K}_i)$  que se van obteniendo al acercarnos al punto crítico. En este caso, conviene notar la dificultad que supone interpolar la función determinante  $|\mathbf{K}|$ , sobre todo si se compara con la relativa sencillez con que se interpola la serie de autovalores  $\{\lambda_{cr}\}$ . Las curvas de la gráfica IV.40. muestran claramente la irregularidad del determinante  $|\mathbf{K}|$  y la variación suave, casi lineal, de la serie  $\{\lambda_{cr}\}$  en un entorno de

los puntos críticos. Por esta razón, aunque supone un esfuerzo considerable el cálculo del espectro total de autovalores de la matriz  $\mathbf{K}$ , o de una pequeña parte de él, una vez que se ha detectado la presencia de un punto crítico con un procedimiento rápido y seguro como el descrito anteriormente, resulta en ocasiones más práctico basar el método de localización exacta de este punto en el menor autovalor que en el determinante, ya que al ser más precisa y ajustada la interpolación, es menor el número de iteraciones necesarias para alcanzar el punto crítico y se compensa así el trabajo extra empleado en calcular este autovalor.

#### IV. 17.– ESTABILIZADORES

Si lo que se pretende no es conocer en detalle las curvas carga–desplazamiento de la estructura, sino únicamente hallar la deformación final que alcanza ésta para un determinado valor  $P_f$  de la carga, convendrá elegir incrementos  $\Delta P$  que sean lo más amplios posibles, a fin de reducir a un mínimo el número de iteraciones necesarias para calcularla. La amplitud de estos incrementos, como se ha visto, depende del método y sistema de parametrización elegidos y viene limitada por diversos motivos, el más importante de los cuales es el siguiente: al ensayar una posición de equilibrio, los desplazamientos de los nodos de la viga en las primeras fases del proceso iterativo se distancian bastante de los valores correctos, generando así un conjunto de fuerzas residuales que se incorporan como fuerzas exteriores en la siguiente iteración. Si la norma de estas fuerzas residuales es muy elevada, el método iterativo de Newton–Raphson puede fácilmente divergir y no alcanzar la solución buscada. En estos casos la única forma de mejorar la convergencia del proceso es introducir algún tipo de *estabilizador* que atenúe o controle el efecto de estas fuerzas.

En el modelo de viga estudiado en apartados anteriores, un error de situación u orientación de las secciones nodales produce variaciones de curvatura del mismo orden de magnitud que el error y genera momentos residuales equiparables a los momentos internos de equilibrio del elemento, y, por tanto, controlables. Sin embargo, produce al mismo tiempo deformaciones transversales y longitudinales de un orden de magnitud mucho mayor, y éstas, a su vez, esfuerzos axiales, cortantes y flectores residuales muy superiores a los esfuerzos internos de equilibrio, con fuerzas residuales

muy elevadas. De modo que un pequeño error de cálculo de las deformaciones transversal y longitudinal puede producir fuertes desequilibrios internos que impidan la convergencia del proceso.

Una forma sencilla de evitar este problema, mejorando al mismo tiempo la estabilidad del proceso, consiste en utilizar una matriz constitutiva con coeficientes de rigidez variables, que puedan irse ajustando a medida que el proceso converge. Inicialmente, los coeficientes de rigidez axial y transversal pueden ser varios órdenes de magnitud inferiores a los reales, a fin de que la norma del vector de fuerzas residuales no exceda de un determinado valor. A medida que el proceso converge y los desequilibrios internos se reducen, los coeficientes de rigidez se pueden ir aproximando a sus valores reales.

En las figuras IV.41 y IV.42 se muestran los resultados obtenidos con el semipórtico plano –figura IV.9.a– y con la viga espacial –figura IV.3– al aplicar esta técnica de corrección de los coeficientes de rigidez longitudinal y transversal  $AE$ ,  $A_x G_x$  y  $A_y G_y$ . En ambos casos se partió de unos coeficientes con un valor 1000 veces inferior al real y se efectuaron tres correcciones sucesivas, multiplicándolos por un factor de 10 en cada una de ellas. Comparando los resultados obtenidos en el semipórtico plano utilizando esta técnica y siguiendo el procedimiento normal –gráficas IV.41 y IV.7.b–, se observa cómo aumentan los incrementos de carga y la amplitud de los segmentos de avance al flexibilizar la estructura. El mismo efecto se aprecia con la viga curva en voladizo. Por ejemplo, la figura IV.42 muestra cómo para aplicar una carga vertical,  $Q = 3000$ , en el extremo libre se precisan al menos cinco incrementos de carga con la rutina normal, pero tan sólo dos si se relajan los coeficientes. Por desgracia, no se produce un ahorro equivalente en tiempo de cálculo, ya que el número de iteraciones necesarias aumenta casi en la misma proporción.

En estructuras complejas como la malla reticular, pueden encontrarse trayectorias distintas de la principal y sus ramificaciones, compatibles sin embargo con el mismo estado de carga. Estas nuevas trayectorias no pasan por el origen y no cortan la trayectoria principal en ningún punto. En consecuencia, no se puede acceder a ellas desde la trayectoria principal si no es dando un salto, y permanecen ocultas en un proceso normal de deformación si los segmentos de avance no tienen la suficiente amplitud para realizarlo. Para localizarlas se requiere una técnica como la descrita que

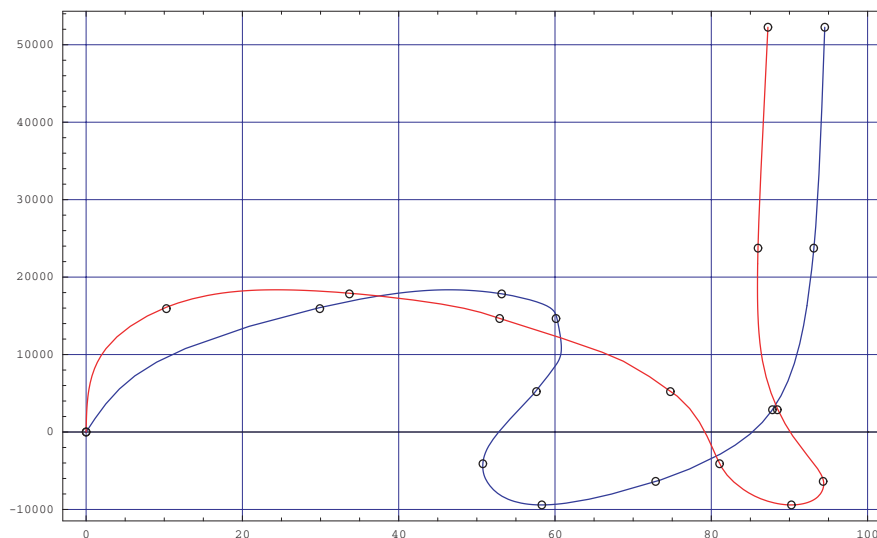


Fig. IV.41 :

*Semipórtico plano con carga vertical: incrementos de carga necesarios para alcanzar el valor  $P=50000$  utilizando una técnica de flexibilización.*

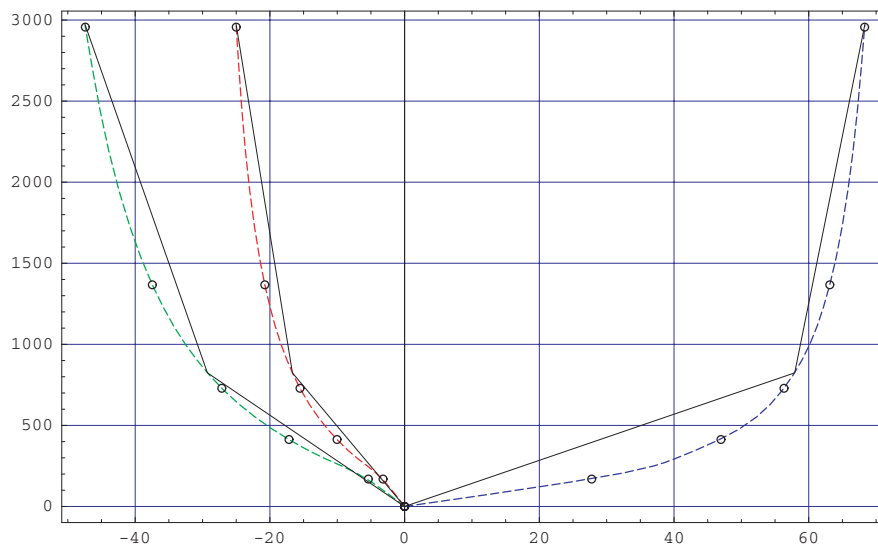


Fig. IV.42 :

*Viga espacial con carga vertical: incrementos de carga necesarios para alcanzar el valor  $Q=3000$  con una técnica de flexibilización (rectas) y sin ella (curvas).*

permita aumentar los incrementos de carga y efectuar saltos de gran amplitud.

Un ejemplo ilustrativo se presenta en la gráfica IV.43. En ella se muestran dos trayectorias de equilibrio de la malla reticular con carga uniforme y radial; una de ellas es la rama principal de la gráfica IV.26. Estas trayectorias son independientes entre sí y no tienen ningún punto en común. El cruce que se observa en la gráfica entre las dos curvas es sólo aparente y se debe a que éstas únicamente registran un grado de libertad de la estructura. En la misma gráfica, se marca con un trazo recto y un pequeño círculo el salto realizado para pasar del estado inicial, que corresponde a la estructura descargada, a la nueva trayectoria –compárese la amplitud del salto con la longitud de los segmentos de avance de la figura IV.26–. Variando la amplitud del salto, se obtienen otros puntos de la misma trayectoria que completan su trazado.

El mayor inconveniente que presenta este método de flexibilización es que exige conocer de antemano los factores de relajación que deben aplicarse a los coeficientes de rigidez, ya que una estimación equivocada de los mismos no sólo no mejora la convergencia del proceso, como se pretende, sino que incluso puede empeorarla. Otro inconveniente es que incrementa mucho el número de iteraciones del proceso. Además

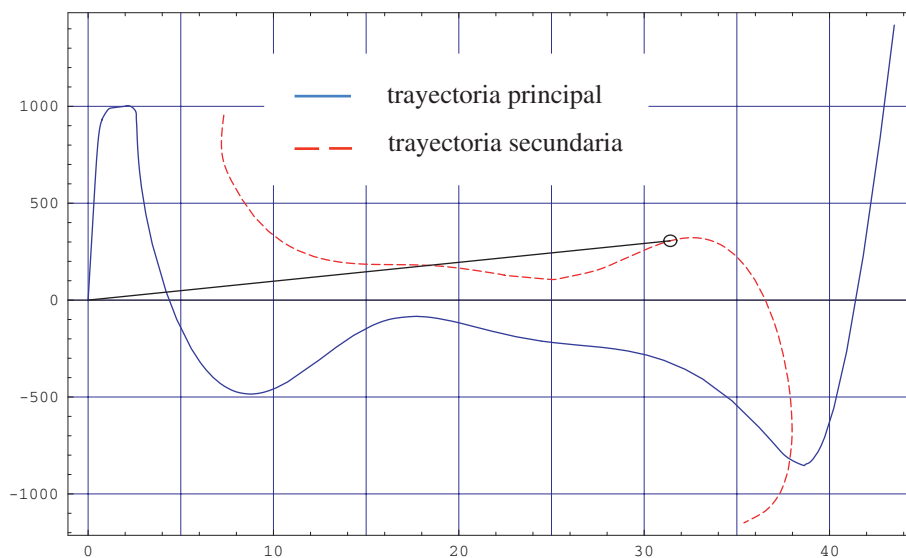


Fig. IV.43 :

*Malla reticular con carga radial uniforme: salto a una nueva trayectoria, independiente de la principal, usando una técnica de flexibilización.*

la implementación del método, aún siendo sencilla, afecta a la estructura general del programa y no a una parte localizada del mismo como hubiera sido más deseable.

Otra técnica de estabilización que resuelve algunos de los problemas mencionados consiste en relajar la estructura bloqueando transitoriamente parte de sus grados de libertad. Concretamente, el proceso de relajación se lleva a cabo en dos fases. En la primera, se anulan o bloquean todos los giros de la estructura –en los sistemas triparamétricos, estos grados de libertad ocupan las posiciones  $i+3$ ,  $i+4$  e  $i+5$  en la matriz de rigidez global, estando  $i$  comprendido entre 1 y el número total de nodos–. Con este conjunto de restricciones, a las que se añaden los desplazamientos impuestos por el sistema de apoyos de la propia estructura, se resuelve el sistema lineal de ecuaciones  $\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{d} = \mathbf{R}$ , donde  $\mathbf{K}_T$  es la restricción de la matriz de rigidez a los grados de libertad traslacionales,  $\mathbf{R}$  es el vector de fuerzas residuales y  $\Delta \mathbf{d}$  el vector de desplazamientos puros nodales –los giros no forman parte de  $\Delta \mathbf{d}$  por estar bloqueados. Dado que la dependencia entre el vector de cargas y la única variable activa del sistema en el supuesto anterior,  $\mathbf{u}_s$ , es lineal, el resultado es un desplazamiento nodal  $\Delta \mathbf{d}$  que anula por completo la norma de las fuerzas residuales activas –cortantes–. Concluida esta fase, se procede de forma análoga bloqueando los grados de libertad traslacionales de la estructura y activando los giros –que ocupan las posiciones  $i$ ,  $i+1$  e  $i+2$  en la matriz de rigidez global en un sistema triparamétrico–. El sistema de ecuaciones de equilibrio que se resuelve ahora es:  $\mathbf{K}_T \Delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{R}$ , siendo  $\mathbf{K}_T$  la restricción de la matriz de rigidez a las nuevas variables activas y  $\mathbf{R}$  el conjunto de reacciones y momentos reactivos hallados en la fase anterior. El resultado final de esta doble operación de bloqueo alternativo de las variables traslaciones y rotacionales es un estado de deformación con un sistema de fuerzas residuales más relajado de lo que se hubiera obtenido de haberse seguido el procedimiento normal de Newton–Raphson.

Esta técnica, a diferencia de la anterior, no requiere prefijar ningún factor o constante, y no afecta a todas las fases o iteraciones del método de Newton–Raphson, sino únicamente a aquéllas en las que se considere oportuno aplicarla; por ejemplo, cuando la norma de las fuerzas residuales –o bien la norma de los esfuerzos– no decrece convenientemente. De este modo se reduce a un mínimo el número de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia. Además, puesto que al bloquear los grados de libertad traslacionales o rotacionales el ancho de banda y el número de

filas de la matriz de rigidez se reducen a la mitad, y el coste computacional en invertir una matriz varía con el cubo de su dimensión, el hecho de dividir una iteración normal en dos más simples reduce la tarea de cálculo.

Otra forma de estabilizar el proceso iterativo de Newton-Raphson consiste en utilizar los métodos clásicos de relajación de sistemas no lineales de ecuaciones [P3]. Una feliz adaptación de estos métodos, debida a Kröplin, introduce un elemento amortiguador en las ecuaciones de equilibrio del sistema y convierte el proceso iterativo en un proceso reológico viscoso [K1, K2, K3, K4]. Con este artificio la ecuación de equilibrio  $\mathbf{K}\Delta\mathbf{d} = \mathbf{R}$  se transforma en:  $\mathbf{D}\Delta\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\Delta\mathbf{d} = \mathbf{R}$ , donde  $\mathbf{D}$  es una matriz diagonal amortiguadora que multiplica al vector velocidad  $\Delta\dot{\mathbf{d}}$ ,  $\mathbf{K}$  la matriz de rigidez normal y  $\mathbf{R}$  el vector de fuerzas residuales. Suponiendo que el tiempo aumenta una unidad con cada iteración, la ecuación anterior se puede escribir simplemente  $[\mathbf{D} + \mathbf{K}] \Delta\mathbf{d} = \mathbf{R}$ . La clave del método consiste en elegir adecuadamente la matriz de amortiguamiento  $\mathbf{D}$ . Una condición que debe cumplir esta matriz es que su norma tienda a cero a medida que decrece la norma del vector  $\mathbf{R}$ , a fin de que en las últimas fases del proceso se mantenga la convergencia cuadrática característica del método de Newton. Otra condición es que sea estable numéricamente y garantice la convergencia del proceso, sobre todo en las primeras fases de éste, que son las más problemáticas. Ambas condiciones se satisfacen de forma razonable tomando en cada iteración:  $D_{kk} = \gamma |R_k / \Delta d_k|$ , con  $|\Delta d_k| > \varepsilon$  y  $\gamma > 0$ , donde  $\gamma$  y  $\varepsilon$  son constantes que deben ser ensayadas, y  $\Delta\mathbf{d}$  es el desplazamiento que se obtuvo en la última iteración.

Aunque los tres métodos mejoran sustancialmente la estabilidad del proceso, ninguno de ellos es completamente seguro, fallando los tres cuando los incrementos de carga son importantes. En la tabla IV.23 se comparan los resultados obtenidos aplicando los tres métodos al ejemplo de la viga espacial de las figuras IV.3, al semipórtico plano de la figura IV.9 y a un arco plano rebajado que se describe en el capítulo V. Las constantes que se utilizaron en el método de relajación fueron  $\gamma = 0.5$  y  $\varepsilon = 1$ ; y los factores de flexibilización para la viga espacial: (0.001, 0.01, 0.1, 1), para el semipórtico: (0.04, 0.2, 1) y para el arco rebajado: (0.2, 1). En el ejemplo de la viga espacial, los tres métodos fallaron cuando se intentó aplicar un incremento de carga inicial  $\Delta P \geq 825$ ; sin embargo, el segundo incremento, entre 800 y 3000, no presentó ningún problema con los tres métodos e incluso pudo ampliarse. Los otros



dos ejemplos pretenden reflejar una situación de salto casi horizontal semejante a la de la figura IV.43, si bien, en este caso, el salto se produce entre dos posiciones estables de una misma trayectoria de equilibrio, entre las que media un punto límite y todo un tramo inestable.

Ejemplo	Flexibilización	Bloqueo	Relajación
Viga curva 3D	0 – 825 (19)	0 – 825 (18)	0 – 825 (65)
	800 – 3000 (16)	800 – 3000 (11)	800 – 3000 (35)
Semipórtico plano	0 – 18000 (24)	0 – 18000 (19)	0 – 18000 (43)
	0 – 20000 (No)	0 – 20000 (No)	0 – 20000 (149)
Arco rebajado	0 – 300 (9)	0 – 350 (9)	0 – 350 (11)
	350 – 400 (19)	350 – 450 (25)	350 – 400 (36)

Tabla IV.23:

*Incrementos de carga y número de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia en función del tipo de estabilizador utilizado.*

En general, comparando los tres métodos de estabilización, puede concluirse que el método de relajación es el más sencillo de programar y el más robusto de los tres, mientras el método de bloqueo alternativo de variables, cuando converge, es el más rápido y económico desde un punto de vista computacional. Un defecto importante de este último método y del método de flexibilización es que han sido diseñados *ex profeso* para el modelo de viga 3D descrito en este capítulo y no son extensibles a estructuras formadas por otro tipo de elementos.

En el siguiente capítulo, se mostrará un método general y seguro de estabilizar del proceso iterativo de Newton-Raphson, aplicable a cualquier sistema conservativo.

#### IV. 18.– RECAPITULACIÓN

Por regla general, la matriz de rigidez de un sistema estructural se calcula determinando las reacciones nodales que produce un pequeño desplazamiento nodal. Este método “ingenieril”, que exige trabajar con fuerzas y giros convencionales en el espacio físico, se ve afectado en elasticidad no lineal-3D por un conjunto de problemas derivados de la no conmutatividad de las rotaciones finitas, entre los que se encuentra la asimetría de la matriz de rigidez [A2, A3, A4, C1, S2, S3].

No es éste un problema menor, ya que buena parte de las rutinas numéricas de los programas de cálculo de estructuras aprovechan la simetría de la matriz de rigidez para simplificar al máximo los procedimientos y reducir espacio en la memoria del ordenador. Además esta curiosa propiedad tiene un elevado interés teórico y plantea algunas cuestiones de calado en el campo analítico, ya que aparentemente contradice el teorema de reciprocidad de Betti–Maxwell. Existen estudios monográficos sobre el tema que explican el fenómeno de la asimetría basándose en un comportamiento *sui generis* de los momentos internos nodales [T1] y lo corrigen *a posteriori* con herramientas matemáticas como la derivada covariante [S3], o más técnicas como la composición semitangencial de rotaciones de Argyris [A2, A3, A4]. Aunque todos precisan la causa que produce la asimetría, la mayoría de ellos resultan bastante confusos y no logran dar con una solución clara y sencilla.

En este capítulo se ha probado que la asimetría de la matriz de rigidez no es esencial, y que se puede evitar trabajando en el espacio paramétrico. En este espacio los coeficientes de la matriz de rigidez son las derivadas segundas de una función de energía y la matriz de rigidez tangente resulta necesariamente simétrica. Como contrapartida, los momentos se definen con arreglo a criterios energéticos y no coinciden con los convencionales, quedando así alterados los sentidos de la relación incremental  $\Delta \mathbf{P} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{q}$  y de la propia matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$ .

Aunque parezca extraño, esta sencilla solución no se formula con claridad en los estudios mencionados. Los conceptos de fuerza, giro y equilibrio, en el sentido convencional, tienen un fundamento geométrico tan simple e intuitivo que resulta difícil sustituirlos por otros más abstractos. Esto explica por qué se ha tardado tanto tiempo en introducir una formulación coherente en las vigas 3D, capaz de superar las

limitaciones del método clásico mediante un tratamiento adecuado de las rotaciones finitas. Si en varias ocasiones se ha estado cerca de ella, la inercia de los conceptos tradicionales de rotación y momento han impedido plantear el equilibrio de forma conveniente; en unos casos porque no se ha sabido aprovechar la necesaria parametrización de las rotaciones finitas para redefinir estos conceptos; y en otros porque al concebir el método de Newton como una técnica de eliminación de fuerzas y momentos residuales, éstos se han entendido siempre en el sentido tradicional, no generalizado. En definitiva, la asimetría de la matriz de rigidez en las vigas 3D se debe a una formulación incoherente del problema estructural y a un tratamiento inadecuado de las rotaciones finitas.

En este capítulo se han desarrollado dos métodos generales para tratar los problemas no lineales de equilibrio estático por el método de los elementos finitos: el método de minimización de la energía y el método de equilibrio. Estos métodos se pueden aplicar no sólo a estructuras formadas por vigas, sino también a otras que incluyan membranas, placas o láminas. El primero aprovecha las ventajas que supone trabajar con fuerzas y momentos generalizados en el espacio paramétrico y conduce a una matriz de rigidez simétrica. El segundo, por el contrario, se mantiene en el espacio físico, sujeto a los conceptos tradicionales de fuerza y momento, y conduce a una matriz de rigidez asimétrica. En este último caso, las ecuaciones incrementales son distintas según se interpolen los giros o los parámetros rotacionales –la equivalencia matemática de estas dos formulaciones del segundo método se ha probado en el apartado IV.10–. En definitiva, de los dos métodos se han extraído tres procedimientos de cálculo, que se resumen esquemáticamente en la figura IV.1 y en los cuadros IV.1 y IV.2. Estos procedimientos se pueden aplicar también a sistemas hiperparamétricos –apdo. IV.8– y admiten interpolaciones paramétricas no lineales –apdo. IV.14–.

Todos estos resultados se han particularizado para una formulación Lagrangiana Actualizada, analizando las ventajas e inconvenientes de ésta frente a las formulaciones Lagrangianas Total y Generalizada.

La resolución de una serie de ejemplos utilizando los métodos de minimización (I) y equilibrio en sus dos versiones (II.a y II.b), juntamente con cinco sistemas de parametrización –Rodrigues, natural, Euler-Rodrigues y ángulos de Euler y Cardan–, y dos tipos de interpolación paramétrica –lineal y helicoidal–, prueban lo siguiente:

- a) De los tres procedimientos I, II.a. y II.b., los dos primeros convergen mejor que el tercero, sin que haya diferencias importantes entre ellos. El procedimiento II.a es el más rápido en calcular la matriz de rigidez, y el II.b el más lento.
- b) De los cinco sistemas paramétricos, los que presentan un comportamiento más estable y convergen mejor son los objetivos de Rodrigues y natural; y entre éstos, el que muestra mayor regularidad es el natural.
- c) En un sistema hiperparamétrico como el de Euler–Rodrigues es preciso, con cada iteración, normalizar los parámetros de los giros nodales. En estos sistemas la matriz de rigidez depende al menos de  $n-3$  constantes reales. Los valores de estas constantes no afectan al resultado, pero sí al grado de convergencia del proceso. En este sentido, el valor  $\lambda = 0$  en el sistema tetraparamétrico de Euler-Rodrigues es el que mejor se comporta.
- d) Utilizando una interpolación paramétrica lineal, la convergencia con uno cualquiera de los tres procedimientos y sistemas de parametrización, incluido el tetraparamétrico de Euler–Rodrigues, es siempre cuadrática. Esta propiedad se pierde con una interpolación helicoidal.
- e) Con una interpolación helicoidal los resultados son más exactos que con una interpolación lineal, pero las interpolaciones lineales aventajan a las no lineales en sencillez de programación y rapidez de cálculo, además de mejorar la convergencia y estabilidad del sistema. Si lo que se desea es exactitud, para un mismo número de grados de libertad son más eficaces las discretizaciones con elementos de orden superior que las interpolaciones no lineales.

Para probar la versatilidad y buen comportamiento del método de minimización, se han resuelto algunos ejemplos de especial dificultad, partiendo de una formulación Lagrangiana Total. Estos ejemplos incluyen estructuras sometidas a fuertes rotaciones y a procesos de carga en los que aparecen puntos críticos, tanto puntos límite como puntos de ramificación. Para localizar estos puntos críticos se ha seguido un método especial que exige la tridiagonalización de la matriz de rigidez.

Por último, se han descrito y ensayado tres técnicas de estabilización del proceso iterativo de Newton-Raphson que mejoran sustancialmente la convergencia del mismo, permitiendo ampliar el valor de los incrementos de carga y reducir su número.

**IV. 19.– REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- [A1] Aasen, J.O., “On the Reduction of a Symmetric Matrix to Tridiagonal Form”. *BIT*, **11**, 233-242, (1971).
- [A2] Argyris, J.H., Dunne, P.C. & Scharpf, D.W., “On Large Displacement–Small Strain Analysis of Structures with Rotational Degrees of Freedom”, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, **14**, 401–451, (1978).
- [A3] Argyris, J.H., Dunne, P.C., Malejannakis, G. & Scharpf, D.W., “On Large Displacement–Small Strain Analysis of Structures with Rotational Degrees of Freedom”, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, **15**, 99–135, (1979).
- [A4] Argyris, J.H., Balmer, H., Dolsinis J.St., Dunne, P.C., Haase, M., Kleiber, M., Malejannakis, J.P., Mlejnek M., Muller, M., & Scharpf, D.W., “Finite Element Method: The Natural Approach”, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, **17/18**, 1–106, (1979).
- [A5] Argyris, J.H. & Symeonidis, Sp., “Non–Linear Finite Element Analysis of Elastic Systems under NonConservative Loading–Natural Formulation. Part I. Quasistatic Problems”, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, **26**, 75–123, (1981).
- [A6] Argyris, J.H. & Symeonidis, Sp., “A sequel to: Non–Linear Finite Element Analysis of Elastic Systems under NonConservative Loading–Natural Formulation. Part I. Quasistatic Problems”, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, **26**, 377–383, (1981).
- [A7] Argyris, J.H., Strub, K. & Symeonidis, Sp., “Non–Linear Finite Element Analysis of Elastic Systems under NonConservative Loading–Natural Formulation. Part II. Dynamic Problems”, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, **28**, 241–258, (1981).
- [B1] Bathe, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, (1982).
- [B2] Borri, M. & Bottasso, C., “An Intrinsic Beam Model Based on a Helicoidal Approximation– Part I: Formulation”, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **37**, 2267–2289, (1994).
- [B3] Borri, M. & Bottasso, C., “An Intrinsic Beam Model Based on a Helicoidal Approximation– Part II: Linearization and Finite Element Implementation”, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **37**, 2291–2309, (1994).

- [B4] Botasso, C., “A Non-Linear Beam Space-Time Finite Element Formulation using Quaternion Algebra: Interpolation of the Lagrange Multipliers and the Appearance of Spurious Modes”, *Computational Mechanics*, **10**, 359–368, (1992).
- [B5] Buechter, N. & Ramm, E., “Shell Theory versus Degeneration – A Comparison in Large Rotation Finite Element Analysis”, *Int. J. for Num. Meth. Engng.*, **34**, 39–59, (1992).
- [C1] Cardona, A. & Géradin, M., “A Beam Finite Element Non Linear Theory with Finite Rotations”. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **26**, 2403–2438, (1988); también en *Cuadernos de Matemática Aplicada*. **6** –88, Santa Fe, Argentina, (1988).
- [C2] Crisfield, M.A., “An Incremental-Iterative Algorithm that Handles Snap-Through”, *Computer and Structures*. **13**, 55-62, (1981).
- [C3] Crisfield, M.A. & Cole, G., “Co-rotational Beam Elements for Two and Three Dimensional Non-Linear Analysis”. *Proc. IUTAM / IACM symp. in Discretization Methods in Structural Mech.*, Vienna., G. Khun & H. Mang (eds), Springer-Verlag, 115-124, (1989).
- [C4] Crisfield, M.A., “A Consistent Co-Rotational Formulation for Non-Linear Three-Dimensional Beam-Elements”. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, **81**, 131–150, (1990).
- [C5] Crisfield, M.A., *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley & Sons, Chichester, (1997).
- [C6] Crivelli, L.A., “A Total-Lagrangian Beam Element for Analysis of Nonlinear Space Structures”. *Ph. D. Dissertation*, Dept. of Aerospace Engineering Sciences. University of Colorado, Boulder, CO, (1990).
- [C7] Crivelli, L.A. & Felippa, C.A., “A Three-Dimensional Non-Linear Timoshenko Beam Based on the Core-Congruential Formulation”, *Int. J. for Num. Meth. Engng.*, **36**, 3647–3673, (1993).
- [D1] Da Deppo, D.A. & Schmidt, R., “Instability of clamped-hinged circular arches subjected to a point load”. *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, 894-906, Dic., (1975).
- [F1] Felippa, C.A. & Crivelli, L.A. The Core-Congruential Formulation for Geometrically Nonlinear TL Finite Elements, in *Non-linear Computational Mechanics. The state of the Art*. P Wriggers and W. Wagner (eds.) Springer-Verlag, **1**, 1, 1–48, (1991).

- [F2] Felippa, C.A., Crivelli, L.A. & Haugen, B. “A, Survey of the Core–Congruential Formulation for Geometrically Non–Linear TL Finite Elements”, *Int. J. for Num. Meth. Engrg.*, **36**, 3647–3673, (1993); también en: *Archives of Comp. Meth. in Engrg.* **1**, 1, 1–48, (1994).
- [F3] Franchi, C.G. & Montelagni F., “A Weak–Weak Formulation for Large Displacements Beam Statics: a Finite Volumes Approximation”, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **39**, 585–604, (1996).
- [G1] Golub, G.H. & Van Loan, C.F., *Matrix Computations*. Chap. IV, pp. 161-171. The Johns Hopkins University Press, 3<sup>a</sup> ed . Baltimore, (1996).
- [I1] Ibrahimbegovic, A., Frey, F. & Kozar, I., “Computational aspects of Vector-Like Parametrization of Tree-Dimensional Finite Rotations”. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **38**, 3653–3673, (1995).
- [J1] Jelenic, G. & Crisfield, M., “Interpolation of Rotational Variables in Nonlinear Dynamics of 3D Beams”, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **43**, 7, 1193-1222, Dec., (1998).
- [K1] Kröplin, B., Implicit Relaxation for NonLinear Structural Analysis, in *Proc. Int. Conf. on Finite Elements Method*. He Guangquiau and Y.K. Cheung (eds.), Science Press. Beijing. China, (1982).
- [K2] Kröplin, B. & Dinkler, D., “A creep type strategy used for tracing the load path in elastoplastic post-buckling analysis”, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, **32**, 365–376, (1982).
- [K3] Kröplin, B., “Implicit Relaxation Applied to Postbuckling Analysis of Cylindrical Shells”, in *Flexible Shells*. E.L. Axelrad and F.A. Emmerling (eds.), Springer-Verlag., (1984).
- [K4] Kröplin, B. & Dinkler, D., “Quasi viscous analysis and arc-length method. A comparison”, in *Proc. NUMETA '85 Conf.* J. Middleton., G.N. Pande and A.A. Balkema (eds.), Boston, (1985).
- [M1] Makowski, Z.S., *Räumliche Tragwerke aus Stahl*, Stahleisen, Düsseldorf, (1963).
- [P1] Papadrakakis, M., *Solving Large-Scale Problems in Mechanics*. Chap.I y II, Wiley & Sons, New York, (1993).
- [P2] Parlett, B.N., *The Symmetric Eigenvalue Problem*. Chap. III, p. 52. Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, (1980).

- [P3] Press, W.H., Vetterling, W.T., Teukolsky, S.A. & Flannery, B.P., *Numerical Recipes*. Chap.II. 2nd ed., Cambridge University Press, (1992).
- [R1] Riks, E., “The Application of Newton’s Method to the Problem of Elastic Stability”, *J. Applied Mechanics*, **39**, 1060-1065, (1972).
- [S1] Simó, J.C., “A Finite Strain Beam Formulation. The Three-Dimensional Dynamic Problem. Part I”, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, **49**, 55–70, (1985).
- [S2] Simó, J.C. & Vu Quoc, L., “Three-Dimensional Finite Strain Rod Model. Part II: Computational Aspects”, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, **58**(1), 79–116, (1985).
- [S3] Simó, J.C., “The Symmetric Hessian for Geometrically Nonlinear Models in Solid Mechanics: Intrinsic Definition and Geometric Interpretation”. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, **96**, 189–200, (1992).
- [T1] Teh, L.H. & Clarke, M.J., “Symmetry of Tangent matrices of 3D elastic Frame”, *Journal of Engineering Mechanics*, V.**125**, nº 2, 248-251, February, (1999).
- [W1] Watson, L.T. & Holzer, S.M., “Quadratic Convergence of Crisfield’s Method”, *Computer and Structures*, **17**, 69-72, (1983).
- [W2] Wempner, G.A., “Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids”, *Int. J. Solids. Structures*, **7**, 1581–1599, (1971).
- [W3] Wilkinson, J.H., *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Chap. V, p. 300. Oxford University Press, (1965, reimpresso con correcciones en 1999).
- [W4] Wood, R.D. & Zienkiewicz, O.C., *Geometrically non-linear finite element analysis of beams–frames–circles and axisymmetric shells*, Dept. Civ. Eng. Report C/R/281/76, University of Wales, Swansea, (1976).
- [Z1] Zienkiewicz, O.C. & Taylor, R.L. *The Finite Element Method*, 4ª Ed., McGraw-Hill, Vol I (1989), Vol II, (1991).
- [Z2] Zignoli, V. *Costruzioni Metalliche*, 3ª Ed., Editrice Torinese, Torino, Vol. II, Cap. XXXIV, (1969).





## CAPÍTULO V

### **FORMULACIÓN SECANTE DE VIGAS COSSERAT**

#### **V.1.– INTRODUCCIÓN**

Para predecir el comportamiento de un sistema no lineal más allá del entorno inmediato de un punto de equilibrio o anticipar la clase de singularidad y el tipo de trayectorias que se producen en un punto crítico, no basta conocer la aproximación de primer orden a las ecuaciones de equilibrio que aporta la formulación lineal Tangente, sino que es preciso conocer también otros términos de orden superior que intervienen en estas ecuaciones; al menos, un número de ellos suficiente para caracterizar el tipo de no linealidad o singularidades que encierran las mismas. Este requisito exige una formulación nueva del problema estructural, más avanzada y general que la Tangente. Ésta es la formulación Secante, que ya ha sido ensayada con éxito en entramados, membranas y sólidos [C1, M1, O1, O3, O7], y de cuyo desarrollo y aplicación a las vigas Cosserat trata este capítulo.

A diferencia, por tanto, de la formulación Tangente, en la que únicamente interesaba conocer los términos de segundo grado de la función potencial, en la formulación Secante se retienen de un sistema conservativo todos los términos del desarrollo en serie de Taylor de la función potencial de orden menor o igual que uno dado  $n$ . Determinar en cada caso concreto el valor de  $n$  forma parte del problema. En los sistemas simples donde el potencial responde a una función polinómica, como los entramados de barras o sistemas de membranas en los que  $n = 4$ , este desarrollo es completo y las ecuaciones de equilibrio exactas. Sin embargo, en sistemas más complejos como las vigas Cosserat, el desarrollo de la función potencial consta de infinitos términos y es necesario truncarlo para poderlo manejar. En la práctica, son suficientes los primeros términos del desarrollo para retener las características fundamentales de no linealidad del sistema, al menos localmente. Se obtiene así un conjunto de teorías de alto orden, o formulaciones *localmente secantes*, situadas en un punto intermedio entre las formulaciones Secante –pura– y Tangente.

Estas teorías pueden utilizarse para estabilizar el método de Newton-Raphson, caracterizar singularidades, localizar puntos críticos o prever el número de trayectorias que pasan por uno de estos puntos. Además, con estos desarrollos se puede abordar otro tipo de problemas a los que se ha prestado poca atención hasta ahora por encontrarse fuera de alcance de la clásica formulación Tangente, entre ellos uno fundamental en la teoría de Estabilidad como es la determinación precisamente del *grado de estabilidad* de un sistema estructural o, si se prefiere, de los límites dentro de los cuales una determinada estructura es estable.

De todas estas cuestiones nos ocuparemos en este capítulo. Siguiendo un orden lógico de exposición, comenzaremos con la formulación Secante pura. Más adelante, mostraremos cómo están relacionados y cómo pueden obtenerse de forma sistemática los desarrollos en serie de Taylor de la energía potencial, de las ecuaciones de equilibrio –o del vector de cargas– y de la matriz de rigidez tangente de un sistema hiperelástico general, particularizando los resultados para el caso concreto de las vigas Cosserat. Presentaremos después la teorías de vigas Cosserat de tercer y cuarto orden, y finalizaremos con una serie de aplicaciones prácticas orientadas al cálculo anticipado de la carga de pandeo, al análisis, caracterización y detección de puntos críticos y a la determinación del grado de estabilidad de un sistema. Algunas de estas aplicaciones se tratarán en detalle y otras se propondrán como nuevas líneas de investigación.

## V.2.– FORMULACIÓN SECANTE

Del mismo modo que la formulación Tangente se basa en el conocimiento de las relaciones diferenciales entre los desplazamientos y las cargas de un sistema, la formulación Secante se desarrolla a partir de las relaciones incrementales finitas entre los desplazamientos y las cargas, medidos ambos desde una posición de equilibrio dada  $(\mathbf{P}_0, \mathbf{q}_0)$ . De ahí que el primer problema que deba afrontar la formulación Secante sea precisamente determinar las ecuaciones incrementales de equilibrio que gobiernan el sistema o, lo que es equivalente, las relaciones carga-desplazamiento  $\Delta \mathbf{P} = \mathbf{P}(\Delta \mathbf{q})$ , supuestos  $\Delta \mathbf{P}$  y  $\Delta \mathbf{q}$  referidos al punto  $(\mathbf{P}_0, \mathbf{q}_0)$ . En los sistemas estructurales, estas ecuaciones no tienen por qué ser lineales pero sí son analíticas en las  $r$  componentes

del vector  $\Delta\mathbf{q}$ , pudiendo por tanto desarrollarse en serie de Taylor en torno al punto  $(\mathbf{P}_0, \mathbf{q}_0)$ , y también aproximarse suficientemente con una serie limitada de términos de estos desarrollos, esto es, por medio de un conjunto de polinomios  $p_j(\Delta q_i)$  con un determinado grado en  $\Delta\mathbf{q}$ :

$$\begin{aligned} \Delta P_1 &= p_1 [\Delta q_1 \dots \Delta q_r] \\ \Delta P_2 &= p_2 [\Delta q_1 \dots \Delta q_r] \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta P_r &= p_r [\Delta q_1 \dots \Delta q_r] \end{aligned}$$

Estas ecuaciones polinómicas pueden expresarse de múltiples formas. En lo sucesivo, emplearemos una ordenación matricial del tipo:

$$\Delta\mathbf{P} = [ \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1(\Delta\mathbf{q}) + \mathbf{P}_2(\Delta\mathbf{q}^2) + \dots ] \Delta\mathbf{q}$$

en la que cada componente  $\mathbf{P}_k$  es una matriz simétrica de orden  $k$  en las variables  $\Delta q_i$ .

Esta disposición, como veremos más adelante, no es casual ni responde a un criterio puramente formal. Al contrario, lo que persigue es satisfacer un triple objetivo: primero, facilitar los cálculos algebraicos almacenando las funciones polinómicas en un bloque de matrices simétricas, cuyas ventajas operativas son conocidas; segundo, permitir el cálculo directo de cualquier derivada o integral a lo largo de una trayectoria de la función  $\mathbf{P}(\Delta\mathbf{q})$  sin necesidad de derivar o integrar analíticamente, término a término, toda la serie polinómica; y tercero, conseguir que los resultados sean una extensión natural de los obtenidos con la formulación Tangente y coincidan con ellos si se supone que los desplazamientos son diferenciales.

La segunda de estas razones tiene especial interés porque permite un cálculo cómodo del gradiente del vector de cargas  $\Delta\mathbf{P}$ , esto es, de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}_T$  del sistema, y de la variación de energía interna que se produce entre dos puntos de equilibrio del espacio de estado. En concreto se probará en el siguiente apartado que las variaciones de la función potencial  $\Delta\Psi$ , del vector de cargas  $\Delta\mathbf{P}$  y de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}_T$  en un punto arbitrario  $\mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}$  están relacionadas entre sí de forma simple y puede expresarse en función de un único grupo de matrices simétricas  $\mathbf{K}_i$  del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\Delta\Psi(\Delta\mathbf{q}) &= \Delta\mathbf{q}^T \left[ \frac{1}{2} \mathbf{K}_0 + \frac{1}{6} \mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{q}) + \frac{1}{12} \mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{q}^2) + \dots \right] \Delta\mathbf{q} \\ \Delta\mathbf{P}(\Delta\mathbf{q}) &= \left[ \mathbf{K}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{q}) + \frac{1}{3} \mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{q}^2) + \dots \right] \Delta\mathbf{q} \\ \mathbf{K}_T(\Delta\mathbf{q}) &= \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{q}) + \mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{q}^2) + \dots\end{aligned}$$

Estos desarrollos, que son una generalización de los obtenidos por Mallet y Marcal para un pequeño grupo de sistemas simples [M1], ponen de manifiesto que las ecuaciones de equilibrio, debidamente organizadas, son una fuente de información extraordinaria que rebasa al propio vector de cargas  $\Delta\mathbf{P}$  e invitan a extraer de ella el máximo rendimiento posible, máxime cuando algunos problemas como los aludidos en la introducción a este capítulo caen fuera del campo lineal y exigen conocer el modo preciso en que varían la carga  $\mathbf{P}$  y la función de energía en un entorno del punto de equilibrio  $(\mathbf{P}_0, \mathbf{q}_0)$  en el que nos encontramos.

El método más utilizado para resolver un sistema de ecuaciones no lineales es la técnica iterativa de Newton–Raphson, que linealiza a cada paso el sistema completo de ecuaciones. Esta linealización se consigue derivando el sistema con relación a todas las variables que intervienen en el mismo. Cuando la derivación entraña dificultades y la obtención del Hessiano resulta una tarea ardua, se recurre a *métodos explícitos*, computacionalmente menos costosos. Estos métodos no requieren calcular el Hessiano ni resolver ningún sistema lineal en cada iteración. Parten del conjunto de ecuaciones de equilibrio escritas en la forma.

$$\mathbf{g}(\Delta\mathbf{q}) = \mathbf{F}(\Delta\mathbf{q}) - \Delta\mathbf{P} = \mathbf{0}$$

y mediante una ley recurrente del tipo:

$$\Delta\mathbf{q}_{i+1} = -\alpha_i \mathbf{g}_i + (1 + \alpha_i e_{i-1}) \Delta\mathbf{q}_i - \alpha_i e_{i-1} \Delta\mathbf{q}_{i-1}$$

donde  $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}(\Delta\mathbf{q}_i)$ , y  $\alpha_i$  y  $e_i$  son escalares que caracterizan cada método concreto. Variando los valores de estos coeficientes en la fórmula recurrente anterior, se obtienen: la versión no lineal del método de los gradientes conjugados, el método de segundo orden de Richardson, el semi-iterativo de Chebichev o los procedimientos de relajación dinámica [G2, P1]. Sin necesidad de llegar a calcular el Hessiano de  $\Psi$ ,

pero resolviendo un sistema lineal de ecuaciones en cada iteración, se dispone además de una serie de *métodos implícitos* sobradamente conocidos, entre los que destacan los métodos *cuasi-Newton* (DFP, BFGS o cualquier otro de la familia Broyden) o los *modificados de Newton* [F4, G2, L1, P1]. Estos métodos no calculan directamente el Hessiano de  $\Psi$ , sino que parten de una aproximación al mismo  $\mathbf{H}_0$  y la van corrigiendo en cada iteración, utilizando para ello la información que el propio proceso suministra. Se evita así el cálculo explícito de la matriz de rigidez y su factorización. La mayor desventaja de estos métodos es que con ellos la convergencia ya no es cuadrática sino lineal o a lo sumo, en el mejor de los casos, supuesto un sistema de ecuaciones bien condicionado o preconditionado, superlineal.

También se puede recurrir a *métodos secantes directos*. En la figura V.1 se muestra cómo se comportan éstos, comparados con los tangentes, en un caso unidimensional.

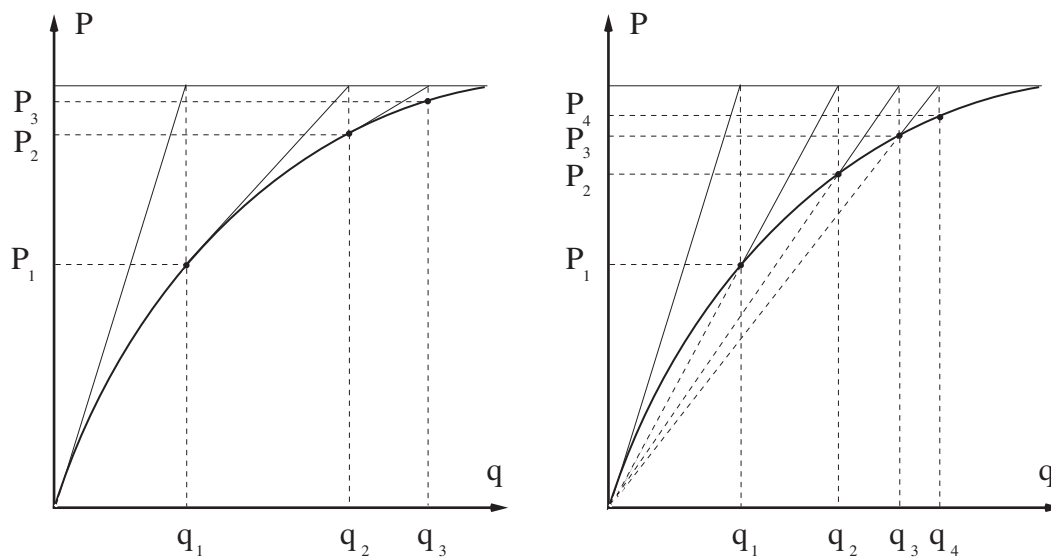


Figura V.1.

*Métodos de Newton–raphson (tangente) y Newton modificado (secante)*

En general, los métodos implícitos tratan de extraer el máximo rendimiento de la escasa información que va suministrando el propio proceso iterativo. Todo esto es cierto para un sistema arbitrario de ecuaciones no lineales. Sin embargo, en el caso particular que nos ocupa, tratándose de ecuaciones que derivan de un potencial como ocurre con las ecuaciones de equilibrio de un sistema conservativo, la situación es diferente. En estos casos, las ecuaciones se pueden ordenar de la forma antes indicada, y esto indica que, además del plano tangente, se conocen las derivadas de cualquier orden de este plano. En definitiva, la situación ahora es justamente la opuesta a la descrita anteriormente: no nos encontramos ante un defecto sino ante un exceso de información, y la dificultad consiste precisamente en saber administrar este exceso. Dado que no es posible resolver analíticamente un sistema de ecuaciones polinómicas como el descrito, a menos que se trate de un caso trivial, lo que vamos a intentar es extraer el máximo partido posible de estos desarrollos en serie de la función de energía, de las ecuaciones de equilibrio y de la matriz de rigidez tangente.

En el apartado IV.4 del capítulo anterior obtuvimos las *ecuaciones incrementales finitas de equilibrio* de un sistema estructural discretizado con elementos-viga 3D. En una formulación Lagrangiana Total, dependiendo del espacio considerado para establecerlas –el físico o el paramétrico–, alcanzamos los siguientes resultados:

$$\text{En el espacio paramétrico:} \quad \int_{S_k} \Sigma_k^T \Theta^T \mathbf{P}_{\text{ext}} \, ds - \int_{S_k} \Sigma_k'^T \mathbf{A} \Pi_o \boldsymbol{\sigma} \, ds = \mathbf{0}$$

$$\text{En el espacio físico:} \quad \int_{S_k} \Sigma_k^T \mathbf{P}_{\text{ext}} \, ds - \int_{S_k} \Sigma_k'^T \Xi^{-T} \mathbf{A} \Pi_o \boldsymbol{\sigma} \, ds = \mathbf{0}$$

siendo  $\mathbf{P}_{\text{ext}}$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  los vectores de cargas exteriores y esfuerzos internos en la viga:

$$\mathbf{P}_{\text{ext}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext}} \\ \mathbf{M}_{\text{ext}} \end{bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix},$$

$\Pi_o$  la transformación (III.13) entre las bases locales de los sistemas referenciales  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{e}^o$  en una formulación Lagrangiana Generalizada, y  $\Xi$  y  $\mathbf{A}$  los operadores definidos en (III.9) y (IV.11). Las dos ecuaciones anteriores son válidas siempre y cuando se utilice un sistema de interpolación clásico, dependiente únicamente de la coordenada

curvilínea  $s$ . Sustituyendo las matrices simples de interpolación  $\Sigma'(s)$  por las más generales  $\Gamma(\mathbf{q}, s)$  del apartado IV.14, se obtienen las ecuaciones de equilibrio correspondientes a un estado de deformación constante (curvatura constante o deformación helicoidal).

Si las cargas exteriores se limitan a fuerzas en los nodos –no hay momentos aplicados– y se utiliza una integración numérica, las ecuaciones de equilibrio en el espacio paramétrico se reducen a:

$$\mathbf{P}_{\text{ext}_k} - \Sigma'_k{}^T \mathbf{A} \Pi_0 \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$$

Naturalmente, estas ecuaciones de equilibrio se pueden resolver aplicando alguno de los métodos implícitos o explícitos antes mencionados, o bien utilizando un método directo secante.

**NOTA:** Las fuerzas nodales se calculan en el apartado IV.4 a partir de los esfuerzos internos  $\boldsymbol{\sigma}_0$ , de la siguiente forma:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{q}_k}^i := -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_k} = -\int_{s_k} \Sigma'_k{}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_0 ds$$

de modo que la transformación de los esfuerzos en cargas nodales se realizó a través del producto  $\Sigma'_k \mathbf{A}$ . Por otra parte, el operador  $\mathbf{A}$  se dedujo en el apartado III.3 de la diferencial  $d\boldsymbol{\epsilon}_g$  –(III.9)–:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G}^T(\boldsymbol{\alpha}) \tilde{\mathbf{r}}_{t, s} \mathbf{R} & \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\alpha}, s; \boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^{*T}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix}$$

Es evidente, por simples consideraciones de equilibrio, que los esfuerzos internos en los puntos de Gauss también se pueden transformar en cargas nodales a través del producto  $\Sigma'_k \mathbf{B}$ , donde:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G}^T(\boldsymbol{\alpha}) \tilde{\mathbf{r}}_{t, s} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix},$$

lo que equivale a suponer  $\boldsymbol{\alpha}$  constante en  $\mathbf{A}$ .

Pues bien, sustituyendo  $\mathbf{A}$  por  $\mathbf{B}$ , se evita el cálculo de la matriz  $\mathbf{T}$  y se simplifican las ecuaciones de equilibrio en una formulación Lagrangiana Total o Generalizada. Esta sustitución interesa cuando se resuelven directamente las ecuaciones de equilibrio aplicando una técnica secante, ya que ahorra tiempo



de cálculo. Sin embargo, si se opta por una técnica tangente como el método de Newton, la sustitución no compensa, ya que conduce a una matriz de rigidez tangente algo más simple pero asimétrica. Incluso con los métodos iterativos implícitos, específicos para sistemas no simétricos como el método de los gradientes bi-conjugados [G2, P2], son mayores las desventajas anejas a la sustitución, que las ventajas.

En efecto, la nueva matriz de rigidez es semejante a la mostrada en los cuadros IV.3 y IV.4 con dos diferencias notables: 1) la componente material simétrica  $\mathbf{K}_m^n = \mathbf{A} \mathbf{C}_o \mathbf{A}^T$  se transforma en el producto asimétrico  $\mathbf{K}_m^n = \mathbf{B} \mathbf{C}_o \mathbf{A}^T$ ; 2) en la componente geométrica de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}_g^n$  no figura ningún término dependiente del momento  $\mathbf{M}_o$ , a excepción del  $\mathbf{S}^T(\mathbf{M}_o; \boldsymbol{\alpha})$ , que ocupa la posición (3, 2). En definitiva, son asimétricas las dos componentes material y geométrica.

Resolviendo con esta nueva matriz de rigidez tangente algunos ejemplos del capítulo anterior, las diferencias apreciadas en los resultados fueron mínimas; así, en la viga espacial curva de las figuras IV.3, con una carga  $P = 600$ , los resultados difirieron tan sólo un 0.3%, en media, respecto a los registrados en las tablas IV.1 y IV.2. Concretamente, se obtuvieron los siguientes desplazamientos del extremo libre: (15.87, 46.91, 53.49), suponiendo la carga vertical –fija– y (–9.70, 25.08, 59.68), suponiendo la carga normal a la directriz de la viga –móvil–, manteniéndose además en ambos casos el número de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia.

Nótese que la nueva matriz de rigidez en una formulación Lagrangiana Actualizada coincide con la matriz asimétrica de Simó y puede, por tanto, considerarse una extensión de ésta a una formulación Lagrangiana Total. Una diferencia importante entre ambas, no obstante, es que en una formulación Lagrangiana Total la asimetría de la matriz es esencial y no se elimina a medida que converge el proceso, como sucede en una formulación Lagrangiana Actualizada.

### V.3.– DESARROLLO EN SERIE DE TAYLOR DE LA ENERGÍA ELÁSTICA

En general, la función de densidad de energía elástica  $\Psi$  de un sistema hiperelástico, libre de tensiones iniciales, viene dada por una expresión del tipo:

$$\Psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_g^T[\mathbf{q}^\vee(s)] \mathbf{C}[\mathbf{q}^\vee(s)] \boldsymbol{\varepsilon}_g[\mathbf{q}^\vee(s)] \quad (\text{V.1})$$

donde la variable  $\mathbf{q}^\vee(s)$  es el vector generalizado de gradientes que se definió en (III.8) y la matriz  $\mathbf{C}$  es constante si las relaciones constitutivas son lineales.

Suponiendo que la energía elástica sea una función analítica de las componentes del vector de gradientes ampliado  $\mathbf{q}^\vee(s)$ , se podrá descomponer en un conjunto de términos homogéneos  $\Psi^{(n)}$ , con órdenes crecientes  $n = 2, 3, 4, \dots$ , en las variables  $\mathbf{q}^\vee(s)$  –eliminamos los términos constantes y lineales de  $\Psi$  porque los primeros no afectan a las ecuaciones de equilibrio y los segundos sólo se dan en estado de precarga–.

$$\Psi = \Psi^{(2)} + \Psi^{(3)} + \dots \Psi^{(n)} + \dots \quad (\text{V.2})$$

En sistemas estructurales simples, como los entramados de barras, y en algunos problemas de elasticidad, la energía  $\Psi$  viene dada por funciones polinómicas y la serie (V.2) es finita, conteniendo normalmente tan sólo tres términos. Sin embargo, en sistemas más complejos como las láminas o vigas curvas 3D que analizamos en este trabajo, las funciones que intervienen son racionales y trigonométricas, y los desarrollos en serie de Taylor de  $\Psi$  constan generalmente de infinitos términos.

Dado que las componentes  $\Psi^{(n)}$  del desarrollo (V.2) se suponen *funciones homogéneas* de grado  $n$ , ellas y sus derivadas parciales de primer orden  $\Psi^{(n)},_i$  podrán expresarse en función de las derivadas segundas parciales  $\Psi^{(n)},_{ij}$  del siguiente modo:

$$\Psi^{(n)} \equiv \frac{1}{n(n-1)} \Psi^{(n)},_{ij} q_i^{\vee} q_j^{\vee} \quad (\text{V.3})$$

$$\Psi^{(n)},_i \equiv \frac{1}{(n-1)} \Psi^{(n)},_{ij} q_j^{\vee}$$

(en la expresión anterior, los subíndices “i” , “j” precedidos de una coma denotan las derivadas parciales de  $\Psi$  con relación a las variables  $q_i^{\vee}$  y  $q_j^{\vee}$ ).

Como, en un sistema discretizado por medio de elementos finitos, los gradientes  $q^{\vee}(s)$  son funciones a su vez de los desplazamientos nodales  $\mathbf{q}_k$ , y las componentes del vector de cargas y de la matriz de rigidez coinciden con las derivadas primeras y segundas de la energía interna  $\Psi$  con relación a estos desplazamientos  $\mathbf{q}_k$ , en virtud de (V.3), tanto la energía  $\Psi$  como el vector de cargas  $\mathbf{P}$  y la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  se podrán descomponer y expresar en función de un único conjunto de matrices homogéneas  $\mathbf{B}^{(n)}$  del siguiente modo:

$$\Psi = \mathbf{q}^T \mathbf{K}_U \mathbf{q} \quad (\text{V.4.a})$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}_S \mathbf{q} \quad (\text{V.4.b})$$

$$d\mathbf{P} = \mathbf{K}_T d\mathbf{q} \quad (\text{V.4.c})$$

$$\mathbf{K}_U = \int_V \boldsymbol{\Sigma}'^T \left[ \frac{1}{2} \mathbf{B}^{(2)} + \frac{1}{6} \mathbf{B}^{(3)} + \frac{1}{12} \mathbf{B}^{(4)} + \dots + \frac{1}{r(r-1)} \mathbf{B}^{(r)} + \dots \right] \boldsymbol{\Sigma}' dV \quad (\text{V.5.a})$$

$$\mathbf{K}_S = \int_V \boldsymbol{\Sigma}'^T \left[ \mathbf{B}^{(2)} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^{(3)} + \frac{1}{3} \mathbf{B}^{(4)} + \dots + \frac{1}{(r-1)} \mathbf{B}^{(r)} + \dots \right] \boldsymbol{\Sigma}' dV \quad (\text{V.5.b})$$

$$\mathbf{K}_T = \int_V \boldsymbol{\Sigma}'^T \left[ \mathbf{B}^{(2)} + \mathbf{B}^{(3)} + \mathbf{B}^{(4)} + \dots + \mathbf{B}^{(r)} + \dots \right] \boldsymbol{\Sigma}' dV \quad (\text{V.5.c})$$

Siendo  $\boldsymbol{\Sigma}'$  el conjunto de matrices de interpolación propias del método de los elementos finitos, y  $\mathbf{B}^{(n)}$  una serie de matrices *simétricas y homogéneas* de grado  $n-2$  en las componentes del vector gradiente  $\mathbf{q}^v$  –por tanto no constantes– que están relacionadas del siguiente modo con las componentes homogéneas de la función de energía:

$$\mathbf{B}^{(n)}_{ij} = \Psi^{(n)}_{,ij} \quad (\text{V.6})$$

Dependiendo de los coeficientes que multipliquen a estas componentes  $\mathbf{B}^{(n)}$  se obtienen, al sumarlas, tres nuevas matrices: una primera  $\mathbf{K}_U$ , que permite calcular la energía elástica interna del sistema pre- y postmultiplicándola por el vector de desplazamientos  $\mathbf{q}$ ; una segunda  $\mathbf{K}_S$ , que proporciona el vector de cargas nodales al postmultiplicarla por  $\mathbf{q}$ ; y finalmente la matriz tangente de rigidez  $\mathbf{K}_T$ , que coincide con la calculada en el apartado anterior pero que ahora se encuentra desarrollada en serie. Denominaremos a las dos primeras matrices, *matriz de energía* y *matriz de rigidez secante*, respectivamente.

En los sistemas simples, como los entramados y membranas, el vector de deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}_g$  es una función de segundo orden; la energía potencial  $\Psi$ , de cuarto; y el número de componentes homogéneas no nulas  $\mathbf{B}^{(n)}$  se reduce a tres. En estos casos,  $\mathbf{K}_U$ ,  $\mathbf{K}_S$  y  $\mathbf{K}_T$  se pueden expresar como una combinación lineal de tres matrices básicas  $\mathbf{K}_0$ ,  $\mathbf{K}_1$  y  $\mathbf{K}_2$ , de órdenes respectivos 0, 1 y 2 [M1] :

$$\mathbf{K}_0 = \int_V \boldsymbol{\Sigma}'^T \mathbf{B}^{(2)} \boldsymbol{\Sigma}' dV \quad ; \quad \mathbf{K}_1 = \int_V \boldsymbol{\Sigma}'^T \mathbf{B}^{(3)} \boldsymbol{\Sigma}' dV \quad ; \quad \mathbf{K}_2 = \int_V \boldsymbol{\Sigma}'^T \mathbf{B}^{(4)} \boldsymbol{\Sigma}' dV$$

$$\mathbf{K}_U = \frac{1}{2}\mathbf{K}_0 + \frac{1}{6}\mathbf{K}_1 + \frac{1}{12}\mathbf{K}_2 \quad (\text{V.7.a})$$

$$\mathbf{K}_S = \mathbf{K}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{K}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{K}_2 \quad (\text{V.7.b})$$

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 \quad (\text{V.7.c})$$

En principio, estos desarrollos permiten enfocar un problema no lineal desde tres puntos de vista diferentes, simultaneando distintos métodos de cálculo con un coste computacional mínimo. El primero consiste en minimizar la energía potencial total del sistema, cuya parte elástica interna  $\Psi(\mathbf{q})$  viene dada por la expresión (V.7.a)–; el segundo, en resolver directamente las ecuaciones de equilibrio  $\mathbf{K}_S(\mathbf{q}) = \mathbf{P}_o$ –(V.7.b)–; y un tercero, en aproximar la solución utilizando el método iterativo de Newton–Raphson, para lo cual es preciso linealizar el problema y construir la matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_T$ . Ante la disyuntiva de elegir uno u otro, la ventaja principal que ofrece la descomposición (V.7) es que obtiene simultáneamente los tres datos:  $\Psi(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{P}(\mathbf{q})$  y  $\mathbf{K}_T(\mathbf{q})$ , necesarios para aplicar estas tres técnicas. El hecho de que hasta ahora no se haya explotado suficientemente esta propiedad se debe a que el método de Newton es la mejor técnica conocida de minimización de la energía y de resolución del sistema de ecuaciones de equilibrio cuando se posee el Hessiano del potencial  $\Psi$ , y en las estructuras clásicas elásticas éste se calcula fácilmente  $\mathbf{H} \equiv \mathbf{K}_T$ .

En sistemas estructurales más complejos como los formados por vigas curvas 3D, las descomposiciones (V.5) son los desarrollos en serie de Taylor de la función de energía, de su gradiente y de su Hessiano, y constan de infinitos términos. En estos casos, por razones operativas, no queda más remedio que truncar la serie procurando reducir al máximo el número de componentes. Conviene advertir que la descomposición de  $\Psi$ ,  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{K}$  en matrices homogéneas no es única y que cada componente  $\mathbf{B}^{(n)}$  admite una multiplicidad de expresiones matriciales, la mayoría no simétricas [R1, B1], que derivan de las propiedades especiales de que gozan las funciones homogéneas [F1, F2, O3, M3]. Si los desarrollos son finitos, se puede reducir su número introduciendo variables auxiliares que fuerzan la homogeneidad de algunos términos y permiten agruparlos. Entre las muchas descomposiciones posibles,

las que figuran en (V.5.a) tienen la ventaja de ser simétricas y poder calcularse con una sencilla regla, una vez que se ha descompuesto el vector generalizado de deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}_g$  en términos homogéneos [M3].

En efecto, supongamos que la matriz constitutiva  $\mathbf{C}$  es constante, independiente de  $\mathbf{q}^\nabla$ , y que el sistema se encuentra libre de tensiones iniciales. Si se admite que la deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q}^\nabla)$  es una función analítica del vector de gradientes  $\mathbf{q}^\nabla$  –condición que siempre se cumple en la práctica–, esta deformación podrá descomponerse del siguiente modo:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{q}^\nabla) = \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}(\mathbf{q}^\nabla) + \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}(\mathbf{q}^\nabla) + \dots + \boldsymbol{\varepsilon}^{(s)}(\mathbf{q}^\nabla) + \dots \quad (\text{V.8})$$

siendo  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(s)}$  una función homogénea de grado “s” en  $\mathbf{q}^\nabla$ .

Con lo cual la componente n-sima del desarrollo (V.2) valdrá:

$$\Psi^{(n)} = \frac{1}{2} \sum_{(a,b) \in S_n} c(a,b) \boldsymbol{\varepsilon}^{(a)\text{T}} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^{(b)} \quad (\text{V.9})$$

donde  $c(a,b)$  es un entero igual a 2, si  $a \neq b$ , e igual a 1 si  $a = b$ ; y el sumatorio se extiende al siguiente conjunto de índices:

$$S_n : \{ (a,b) / b \geq 1; a \geq 1; a+b = n \} \quad (n \geq 2)$$

Y llevando este desarrollo a (V.6), se extrae la siguiente regla para construir las matrices  $\mathbf{B}^{(n)}$ :

$$\mathbf{B}^{(n)} = \sum_{(a,b) \in S_n} c(a,b) \text{sim} \left[ \mathbf{N}_1^{(a,b)} + \mathbf{N}_2^{(a,b)} \right] \quad (\text{V.10})$$

En esta expresión,  $\mathbf{N}_1$  y  $\mathbf{N}_2$  son dos matrices simétricas y homogéneas que vienen definidas del siguiente modo:

$$\mathbf{N}_1^{(a,b)} = \mathbf{E}^{(a)\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{E}^{(b)} \quad (\text{V.11.a})$$

$$\mathbf{N}_2^{(a,b)} = \left[ \nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon}^{(a)T} \boldsymbol{\sigma}^{(b)} \right] \quad (\text{V.11,b})$$

$$\text{con} \quad \mathbf{E}^{(*)}(i, j) := \varepsilon_{,j}^{(*)}(i) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\sigma}^{(*)} := \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^{(*)} \quad (\text{V.12})$$

Hasta ahora hemos admitido que el sistema se encontraba libre de tensiones al comienzo de la deformación. Si, por el contrario, el sistema se encuentra sometido a esfuerzos iniciales  $\boldsymbol{\sigma}^0$ , será preciso añadir un conjunto de términos adicionales a (V.9) que los contemplen. En este caso, supuesto que el nivel cero de energía corresponde a la configuración inicial del sistema –estado de deformación nula–, las expresiones generales de la componente n-sima de la energía y de la matriz  $\mathbf{B}^{(n)}$  al incorporar las tensiones iniciales, quedan así:

$$\Psi^{(n)} = \frac{1}{2} \sum_{(a,b) \in S_n} c(a,b) \boldsymbol{\varepsilon}^{(a)T} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^{(b)} + \boldsymbol{\sigma}^{(0)T} \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} \quad (\text{V.13})$$

$$\mathbf{B}^n = \sum_{(a,b) \in S_n} c(a,b) \text{sim} \left[ \mathbf{N}_1^{(a,b)} + \mathbf{N}_2^{(a,b)} \right] + \boldsymbol{\sigma}^{(0)T} \nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} \quad (\text{V.14})$$

Hasta ahora hemos supuesto la matriz constitutiva  $\mathbf{C}$  constante. Si dependiera del vector  $\mathbf{q}^\nabla$ , habría que incluir en (V.14) los términos correspondientes a las derivadas de  $\mathbf{C}$  con relación a  $\mathbf{q}^\nabla$ . Los resultados serían algo más complejos, pero el procedimiento de cálculo no variaría sustancialmente, por lo que no nos detendremos en él. En el caso especial de que la matriz constitutiva  $\mathbf{C}$  se pudiera expresar en forma de producto  $\mathbf{C} \mathbf{C}^T$ , bastaría hacer  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_g = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\varepsilon}_g$  para encontrarlos en una situación similar a la que se da cuando  $\mathbf{C}$  es constante. Para evitar complicaciones innecesarias, en lo sucesivo seguiremos admitiendo que  $\mathbf{C}$  es constante.

Ya se ha indicado que en los problemas con vigas espaciales (3D), el desarrollo (V.2) consta de infinitos términos y no queda más remedio que truncar la serie y trabajar con un número limitado de ellos, sustituyendo la función de energía  $\Psi$  por una expresión aproximada, tanto más exacta cuantos más términos contenga el desarrollo. Ahora bien, como el número mínimo de términos que debe contener el desarrollo depende del tipo de aplicación, no basta con saber calcular un número

limitado de ellos sino que es preciso conocer la forma general de las matrices  $\mathbf{N}_1$  y  $\mathbf{N}_2$ . Esta expresión general la deducimos en los siguientes apartados para el caso particular de las vigas Cosserat, aunque el procedimiento se puede extender a otros sistemas como las láminas, en los que las rotaciones desempeñan también un papel importante.

Una vez calculadas las matrices  $\mathbf{N}_1$  y  $\mathbf{N}_2$ , disponemos del término general del desarrollo (V.5) y conocemos también las derivadas direccionales de cualquier orden de la matriz tangente  $\mathbf{K}_T$  en el origen  $\mathbf{q}_0$  (estas derivadas juegan un papel esencial en algunos procedimientos de localización y tratamiento de los puntos críticos [S1, W2] y se utilizan para acelerar la convergencia de procesos no lineales). La relación entre las componentes  $\mathbf{B}^{(n)}$  y las derivadas direccionales de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}_T$  se obtiene de forma inmediata si se tiene en cuenta que en un punto cualquiera  $\mathbf{q}$  del espacio de deformación la matriz de rigidez  $\mathbf{K}_T$  puede desarrollarse en serie de Taylor del siguiente modo (se supone que  $\{\mathbf{e}_i\}$  constituye una base de dicho espacio y, por tanto, cualquier punto del mismo puede escribirse:  $\mathbf{q} = q_i \mathbf{e}_i$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T = & \mathbf{K}_0 + D[\mathbf{K}_T \cdot \mathbf{e}_i] q_i + \\ & \frac{1}{2!} D^2 [\mathbf{K}_T \cdot \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] q_i q_j + \\ & \frac{1}{3!} D^3 [\mathbf{K}_T \cdot \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k] q_i q_j q_k + \dots \end{aligned} \quad (\text{V.15})$$

y, por otra parte, puede descomponerse en la forma (V.5.c),

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_2(\mathbf{q}^2) + \dots \quad (\text{V.16})$$

–al igual que en (V.7), en esta ocasión hemos denotado  $\mathbf{K}_i$  los términos sucesivos del desarrollo (V.5.c)–. Identificando ambas expresiones, se extraen las siguientes relaciones que prueban que los términos del desarrollo (V.5.c) coinciden con las derivadas direccionales de la matriz de rigidez en el origen  $\mathbf{q}_0$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_1(\mathbf{e}_i) &= \mathbf{D}[\mathbf{K}_T \cdot \mathbf{e}_i] \\
 \mathbf{K}_2(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) &= \frac{1}{2!} \mathbf{D}^2[\mathbf{K}_T \cdot \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] \\
 \mathbf{K}_3(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) &= \frac{1}{3!} \mathbf{D}^3[\mathbf{K}_T \cdot \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k] \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{V.17}$$

**V.4.– COMPONENTES HOMOGÉNEAS DEL VECTOR DEFORMACIÓN**

El vector de deformación de una viga se expresa de varios modos dependiendo del sistema de parametrización de rotaciones que se adopte. En general, y de acuerdo con (II.29), este vector se puede escribir así:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_g := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{q}^v) \\ \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{q}^v) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Pi}_o^T \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T(\mathbf{e}_3^o + \mathbf{u}, s) - \mathbf{e}_3^o \\ \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\alpha}, s \end{bmatrix}
 \tag{V.18}$$

El desarrollo de  $\boldsymbol{\varepsilon}_g$  en la forma (V.8) puede resultar complejo si el sistema de parametrización no se elige adecuadamente. Por fortuna, en el sistema de vectores naturales este desarrollo es fácil de obtener debido a la forma exponencial que en él adopta el operador rotación  $\mathbf{R}$  y a la posibilidad de encontrar un desarrollo similar para el operador  $\mathbf{G}^*$ . En efecto, considerando la relación especial que liga  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{G}$  en un sistema objetivo –fórmula (II.137.b)–, en el sistema paramétrico de vectores naturales  $[\boldsymbol{\theta}]$  se tendrá, por un lado,

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = e^{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = \mathbf{I} + \frac{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}{1!} + \frac{\tilde{\boldsymbol{\theta}}^2}{2!} + \frac{\tilde{\boldsymbol{\theta}}^3}{3!} + \dots + \frac{\tilde{\boldsymbol{\theta}}^n}{n!} + \dots
 \tag{V.19}$$

y, por otro,  $\mathbf{R}^T(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I} - \tilde{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\theta})$

Además –(AIII.11)–,  $[\mathbf{I} - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})]\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$  (V.20)



con lo cual,

$$\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I} - \frac{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}{2!} + \frac{\tilde{\boldsymbol{\theta}}^2}{3!} - \frac{\tilde{\boldsymbol{\theta}}^3}{4!} + \dots (-1)^n \frac{\tilde{\boldsymbol{\theta}}^n}{(n-1)!} + \dots \quad (\text{V.21})$$

Llevando estos desarrollos a (V.18), se obtiene la expresión general de la componente n-sima del vector deformación:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \mathbf{\Pi}_0^T \begin{bmatrix} n \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{n-1} \mathbf{u}_{,s} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^n \mathbf{e}_3^o \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{n-1} \boldsymbol{\theta}_{,s} \end{bmatrix} \quad (\text{V.22})$$

Esta expresión no resulta tan simple en otros sistemas de parametrización. Por ejemplo, en el sistema de Rodrigues, que desde un punto de vista formal era hasta ahora el más sencillo, estas componentes vienen dadas, no por una, sino por dos expresiones, que resultan más difíciles de manejar. Son,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = 2c (-1)^{n/2} \mathbf{\Pi}_0^T \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^n \mathbf{e}_3^o - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{n-1} \mathbf{u}_{,s} \\ -\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{n-1} \boldsymbol{\theta}_{,s} \end{bmatrix} \quad (\text{n par})$$

$$\text{y} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = 2c \mathbf{\Pi}_0^T \begin{bmatrix} (-1)^{(n-1)/2} (a \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{n-1} \mathbf{u}_{,s} + b \tilde{\boldsymbol{\theta}}^n \mathbf{e}_3^o) \\ -\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{n-1} \boldsymbol{\theta}_{,s} \end{bmatrix} \quad (\text{n impar})$$

con

$$\begin{aligned} a &= 1/2 & b &= -1 & c &= 1 & \text{si } n &= 1 \\ a &= 1 & b &= 1 & c &= -1 & \text{si } n &= 2 \\ a &= -1 & b &= 1 & c &= 1 & \text{si } n &= 3 \\ a &= 1 & b &= 1 & c &= 1 & \text{si } n &> 3 \end{aligned}$$

En otros sistemas de parametrización las expresiones se complican aún más. A fin de obtener los resultados más simples posibles, supondremos en lo sucesivo que el sistema de parametrización es el natural y que la componente n-sima del vector de deformación viene dada por (V.22).

**V.5.– CÁLCULO DE LAS MATRICES  $\mathbf{N}_1$  Y  $\mathbf{N}_2$** 

Diferenciando la componente  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$  y escribiendo,

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \mathbf{E}^{(n)} d\mathbf{q}^\vee \quad (\text{V.23})$$

(recuérdese que  $d\mathbf{q}^\vee{}^T = [d\mathbf{u},_s; d\boldsymbol{\theta}; d\boldsymbol{\theta},_s]$ , se obtiene el operador  $\mathbf{E}^{(n)}$  de la expresión (V.12),

$$\mathbf{E}^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \boldsymbol{\Pi}_o^T \begin{bmatrix} n\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{n-1} & n\mathcal{A}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u},_s) - \mathcal{A}_n(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{e}_3^o) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathcal{A}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta},_s) & \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{V.24})$$

donde  $\mathcal{A}_n$  es un nuevo operador que se define del siguiente modo:

$$d\tilde{\boldsymbol{\theta}}^n \mathbf{v} := \mathcal{A}_n(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) d\boldsymbol{\theta} \quad (\text{V.25})$$

y vale,

$$\mathcal{A}_n(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) \begin{cases} n=0 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ n \text{ impar} & (-1)^{(n+1)/2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{n-1} \tilde{\mathbf{v}} [\mathbf{I} + (n-1)\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}] \\ n \text{ par} & \tilde{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{A}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) + (-1)^{n/2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{n-2} [\mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{v}] \end{cases} \quad (\text{V.26})$$

siendo  $\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{e}$  con  $\|\mathbf{e}\| = 1$  (V.27)

La demostración de (V.26), omitida aquí por brevedad, es sencilla si se sustituye  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^n$  por las expresiones (AI.9) del Apéndice I y se tiene en cuenta que por ser  $\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{e}$  se puede escribir:  $\mathbf{v} d\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{e}) d\boldsymbol{\theta}$ . Calculado  $\mathbf{E}^{(n)}$ , se construye de inmediato la matriz  $\mathbf{N}_1$ , definida en (V.11.a). Por otra parte, para hallar  $\mathbf{N}_2$  basta calcular el producto  $\boldsymbol{\sigma}^{(r)T} d^2 \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$ , con  $\boldsymbol{\sigma}^{(r)} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^{(r)}$ . Diferenciando para ello dos veces (V.22) y usando de nuevo la notación (III.12), se obtiene:

$$\boldsymbol{\sigma}^T d^2 \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \frac{(-1)^n}{n!} \boldsymbol{\sigma}_o^T \begin{bmatrix} d^2 \tilde{\boldsymbol{\theta}}^n \mathbf{e}_3^o - n(d^2 \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{n-1} \mathbf{u},_s + 2d\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{n-1} d\mathbf{u},_s) \\ - (d^2 \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{n-1} \boldsymbol{\theta},_s + 2d\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{n-1} d\boldsymbol{\theta},_s) \end{bmatrix} \quad (\text{V.28})$$

(hemos eliminado el superíndice “r” del término  $\boldsymbol{\sigma}^{(r)}$  para obtener una notación simplificada, que utilizaremos en lo sucesivo).

Pues bien, desarrollando el producto (V.29), sustituyendo  $\boldsymbol{\sigma}_o^T$  por  $[\mathbf{Q}_o^T; \mathbf{M}_o^T]$  y aprovechando la definición (V.22) para condensar el resultado, se llega a:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^T d^2 \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \frac{(-1)^n}{n!} & \left[ \mathbf{Q}_o^T d^2 \tilde{\boldsymbol{\theta}}^n \mathbf{e}_3^o - n \mathbf{Q}_o^T d^2 \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{n-1} \mathbf{u}_{,s} - \mathbf{M}_o^T d^2 \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{n-1} \boldsymbol{\theta}_{,s} \right. \\ & - 2n(-1)^{n-1} d\mathbf{u}_{,s} \mathfrak{A}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Q}_o) d\boldsymbol{\theta} \\ & \left. - 2(-1)^{n-1} d\boldsymbol{\theta}_{,s} \mathfrak{A}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{M}_o) d\boldsymbol{\theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{V.29})$$

que también puede escribirse así:

$$\boldsymbol{\sigma}^T d^2 \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \frac{1}{n!} d\mathbf{q}^v{}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & n \mathfrak{A}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Q}_o) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ n \mathfrak{A}_{n-1}^T(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Q}_o) & (-1)^n \mathcal{D}_n & \mathfrak{A}_{n-1}^T(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{M}_o) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathfrak{A}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{M}_o) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} d\mathbf{q}^v \quad (\text{V.30})$$

siendo  $\mathcal{D}_n$  un nuevo operador, dependiente esta vez de  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $\boldsymbol{\theta}_{,s}$ ,  $\mathbf{u}_{,s}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_o$  y  $\mathbf{e}_3^o$ :

$$\mathcal{D}_n := \left[ \mathfrak{B}_n(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Q}_o; \mathbf{e}_3^o) - n \mathfrak{B}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{Q}_o; \mathbf{u}_{,s}) - \mathfrak{B}_{n-1}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{M}_o; \boldsymbol{\theta}_{,s}) \right] \quad (\text{V.31})$$

y viniendo  $\mathfrak{B}_n$  definido del siguiente modo:

$$\mathbf{q}^T d^2 \tilde{\boldsymbol{\theta}}^n \mathbf{v} := d\boldsymbol{\theta}^T \mathfrak{B}_n(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}, \mathbf{v}) d\boldsymbol{\theta} \quad (\text{V.32})$$

La expresión final de  $\mathfrak{B}_n$  depende de que “n” sea par o impar. En efecto, si “n” es par, el operador  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^n$  se puede sustituir por  $(-1)^{n/2-1} (\boldsymbol{\theta}^{n-2} \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^n \mathbf{I})$  –consultar la tabla AI.1 del Apéndice I–, y su diferencial segunda vale,

$$\begin{aligned}
 d^2 \tilde{\boldsymbol{\theta}}^n = & (-1)^{n/2-1} \theta^{n-2} [(n-2)(n-3)(d\theta)^2 \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \\
 & 2(n-2)d\theta(d\boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{e} + \mathbf{e} \otimes d\boldsymbol{\theta}) + \\
 & (n-2)\mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \theta d^2\theta + 2d\boldsymbol{\theta} \otimes d\boldsymbol{\theta} - \\
 & n((n-1)(d\theta)^2 - \theta d^2\theta) \mathbf{I}]
 \end{aligned}$$

que llevada a (V.32), proporciona el siguiente resultado:

$$\mathcal{B}_n(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}, \mathbf{v}) = (-1)^{n/2-1} \theta^{n-2} [\widehat{\mathcal{B}}_n(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}, \mathbf{v}) + \widehat{\mathcal{B}}_n^T(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}, \mathbf{v})] \quad (\text{V.33})$$

con

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathcal{B}}_n(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}, \mathbf{v}) = & (n/2-1) [(n-4)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{q})(\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}) - n(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})] \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \\
 & (n-2)[(\mathbf{e} \cdot \mathbf{v})\mathbf{q} \otimes \mathbf{e} + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{q})\mathbf{v} \otimes \mathbf{e}] + \\
 & \mathbf{q} \otimes \mathbf{v} + [(n/2-1)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{q})(\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}) - (n/2)(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})] \mathbf{I}
 \end{aligned} \quad (\text{V.34})$$

Sin embargo, si  $n$  es impar, el operador  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^n$  se puede sustituir por  $(-1)^{(n-1)/2} \theta^{n-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}$  y su diferencial segunda vale:

$$d^2 \tilde{\boldsymbol{\theta}}^n = (-1)^{(n-1)/2} \theta^{n-2} (n-1) [(n-2)(d\theta)^2 \tilde{\mathbf{e}} + 2d\theta(d\tilde{\boldsymbol{\theta}} \otimes d\boldsymbol{\theta}) + \tilde{\boldsymbol{\theta}} d^2\theta] \quad (\text{V.35})$$

que llevada también a (V.32) conduce a una expresión semejante a la (V.33)

$$\mathcal{B}_n(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}, \mathbf{v}) = (-1)^{(n-1)/2} \theta^{n-2} [\widehat{\mathcal{B}}_n(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}, \mathbf{v}) + \widehat{\mathcal{B}}_n^T(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}, \mathbf{v})] \quad (\text{V.36})$$

siendo ahora

$$\widehat{\mathcal{B}}_n(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{q}, \mathbf{v}) = (n-1) \left[ \left( \frac{\mathbf{q}^T \tilde{\mathbf{e}} \mathbf{v}}{2} \right) [(n-3)\mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mathbf{I}] + \mathbf{e} \otimes \mathbf{v} \tilde{\mathbf{q}} \right] \quad (\text{V.37})$$

Llevando finalmente (V.33–34) y (V.36–37) a (V.31), e introduciendo este último resultado en (V.30), se obtiene la expresión general de  $\boldsymbol{\sigma}^T d^2 \boldsymbol{\epsilon}^{(n)}$  que buscábamos.

Al sustituir la función de energía por un desarrollo de orden  $n$ , el sistema modifica su rigidez y la matriz secante deja de ser exacta, proporcionando sólo un valor aproximado del vector de fuerzas. Con el fin de comprobar el grado de exactitud que se alcanza, hemos repetido el ejemplo de la figura IV.3. utilizando los desarrollos (V.5) de las matrices de rigidez secante y tangente con distintos órdenes  $n$ . Las tablas V.1 y V.2 indican los tiempos relativos empleados en la formación de los desarrollos y los errores medios cuadráticos de los resultados para una carga  $P = 300$  aplicada en 6 incrementos. La diferencia fundamental entre las dos tablas es que en la primera se trunca la función de energía  $\Psi$  y en la segunda el vector de deformación  $\epsilon_g$ .

Orden de $\Psi$	Convergencia	Error en %	Tiempo relativo	Orden de $\epsilon_g$
4	No	–	–	2
6	Sí	17	2	3
8	No	–	–	4
10	Sí	Despreciable	5	6
20	Sí	Despreciable	25	11

Tabla V.1:

*Formulación secante con truncamiento de la función potencial  $\Psi$*

Orden de $\epsilon_g$	Convergencia	Error en %	Tiempo relativo	Orden de $\Psi$
2	No	–	–	4
3	Sí	< 0.5	1	6
4	Sí	Despreciable	2	8
5	Sí	Despreciable	3	10
10	Sí	Despreciable	11	20

Tabla V.2:

*Formulación secante con truncamiento del vector generalizado  $\epsilon_g$*

En concreto, la tabla V.1 es el resultado de calcular las fuerzas internas y la matriz de rigidez reteniendo los  $n$  primeros términos del desarrollo completo de la función de energía, y la tabla V.2 es el resultado de retener los  $n/2$  primeros términos del desarrollo completo del vector de deformación (nótese que el orden de  $\Psi$  al sustituir  $\epsilon_g$  por  $\epsilon_{n/2}$  en (V.1) es también  $n$ ); esto es, de sustituir  $\Psi$  y  $\epsilon$  por las aproximaciones:

$$\Psi_n = \mathbf{q}^T \left[ \frac{1}{2} \mathbf{K}_0 + \frac{1}{6} \mathbf{K}_1(\mathbf{q}) + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \mathbf{K}_n(\mathbf{q}^n) \right] \mathbf{q}$$

$$\epsilon_{n/2} = \epsilon^{(0)} + \epsilon^{(1)}(\mathbf{q}^\nabla) + \epsilon^{(2)}(\mathbf{q}^\nabla) + \dots + \epsilon^{(n/2)}(\mathbf{q}^\nabla)$$

Desde un punto de vista computacional, es más efectivo truncar el vector de deformación que truncar la serie (V.5) porque se ahorra tiempo de cálculo y se mejora la convergencia del proceso iterativo. Nótese que para formar el conjunto completo de matrices  $\mathbf{N}_1$  de orden igual o inferior a  $n$  es preciso calcular  $n(n-1)/2$  productos del tipo  $\nabla \epsilon^{(a)T} \mathbf{C} \nabla \epsilon^{(b)}$  truncando la función de energía, y  $n^2/4$  productos truncando el vector deformación, esto es, casi la mitad que en el caso anterior. A similares conclusiones se llega al calcular los productos  $\nabla^2 \epsilon^{(a)T} \sigma^{(b)}$  de las matrices  $\mathbf{N}_2$ . Los cuadros V.1.a y b ilustran ambas situaciones en el caso particular en que el orden de la

————— a - 1 —————→

	0	1	2	3	4	5	6	
	1	2	3	4	5	6		
	2	3	4	5	6			
b - 1	3	4	5	6				
	4	5	6					
	5	6						
	6							
			$\mathbf{N}_1^{(a,b)} = \nabla \epsilon^{(a)T} \mathbf{C} \nabla \epsilon^{(b)}$					

Cuadro V.1.a

————— a - 2 —————→

	0	1	2	3	4	5	6	
	1	2	3	4	5	6		
	2	3	4	5	6			
b	3	4	5	6				
	4	5	6					
	5	6						
	6							
			$\mathbf{N}_2^{(a,b)} = \nabla^2 \epsilon^{(a)T} \sigma^{(b)}$					

Cuadro V.1.b

*Componentes no nulas  $\mathbf{N}_1$  y  $\mathbf{N}_2$  de orden  $n \leq 8$ , según se trunque la función de energía o el vector de deformación (casillas sombreadas)*

función potencial vale 8 ( $n = 6$ ). En el primer caso, el hecho de que sólo una parte de los términos corresponda a un desarrollo completo del vector deformación afecta a la convergencia del método de Newton-Raphson, como puede apreciarse en las tablas V.3 y V.4. En ellas se recogen los resultados de las pruebas de convergencia realizadas sobre la viga curva de la figura IV.3 para distintos valores de la carga y órdenes de la función potencial y del vector de deformación (nótese que un orden  $n$  en el vector de deformación equivale a un orden  $2n$  en el potencial). También se indica el número de iteraciones que fue preciso realizar hasta alcanzar la convergencia, aplicando la carga íntegra de una vez. La primera columna de resultados corresponde al problema lineal. Remarcamos con un ligero sombreado los casos en los que el desplazamiento del extremo libre de la viga se obtuvo con un error inferior al 1%.

	Orden de la función potencial $\Psi$					
Carga P	2	4	6	8	10	12
50	1	No	6	5	5	5
100	1	No	No	No	9	9
150	1	No	13	No	9	9
300	1	No	No	No	No	No

Tabla V.3:  
*Convergencia y nº de iteraciones truncando la función potencial  $\Psi$*

	Orden del vector de deformación $\epsilon_g$					
Carga P	1	2	3	4	5	6
50	1	8	5	5	5	5
100	1	No	8	8	9	9
150	1	No	12	10	9	9
300	1	No	No	15	No	16

Tabla V.4:  
*Convergencia y nº de iteraciones truncando el vector de deformación  $\epsilon_g$*

### V.6.– TEORÍAS DE SEGUNDO, TERCER Y CUARTO ÓRDENES

En las aplicaciones prácticas bastan unos pocos términos del desarrollo (V.5) para resolver los problemas que se plantean más adelante. Generalmente los tres primeros términos, que corresponden a teorías de segundo, tercer y cuarto órdenes en  $\Psi$ , son suficientes. Dado el interés especial que presentan estos casos básicos, resumimos a continuación los resultados que se obtienen al particularizar las expresiones generales del apartado anterior para un valor  $n$  igual a 2, 3 y 4.

$$\mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{E}^{(1)\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{E}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(0)\text{T}} \nabla^2 \boldsymbol{\epsilon}^{(2)} \quad (\text{V.38.a})$$

$$\mathbf{B}^{(3)} = \mathbf{E}^{(1)\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{E}^{(2)} + \mathbf{E}^{(2)\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{E}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(0)\text{T}} \nabla^2 \boldsymbol{\epsilon}^{(3)} + \boldsymbol{\sigma}^{(1)\text{T}} \nabla^2 \boldsymbol{\epsilon}^{(2)} \quad (\text{V.38.b})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(4)} = & \mathbf{E}^{(1)\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{E}^{(3)} + \mathbf{E}^{(3)\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{E}^{(2)} \\ & + \boldsymbol{\sigma}^{(0)\text{T}} \nabla^2 \boldsymbol{\epsilon}^{(4)} + \boldsymbol{\sigma}^{(1)\text{T}} \nabla^2 \boldsymbol{\epsilon}^{(3)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)\text{T}} \nabla^2 \boldsymbol{\epsilon}^{(2)} \end{aligned} \quad (\text{V.38.c})$$

$$\mathbf{E}^{(1)} = \boldsymbol{\Pi}_0^{\text{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \tilde{\mathbf{e}}_3^0 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{V.39.a})$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Pi}_0^{\text{T}} \begin{bmatrix} -2\tilde{\boldsymbol{\theta}} & 2\tilde{\mathbf{u}}_{,s} + 2\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{e}_3^0) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{,s} & -\tilde{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} \quad (\text{V.39.b})$$

$$\mathbf{E}^{(3)} = \frac{1}{6} \boldsymbol{\Pi}_0^{\text{T}} \begin{bmatrix} 3\tilde{\boldsymbol{\theta}}^2 & 6\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}_{,s}) - \tilde{\mathbf{e}}_3^0 \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & 2\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{,s}) & \tilde{\boldsymbol{\theta}}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{V.39.c})$$

$$\left[ \boldsymbol{\sigma}^{(\cdot)\text{T}} \nabla^2 \boldsymbol{\epsilon}^{(2)} \right] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & -2\tilde{\mathbf{Q}}_0^{(\cdot)} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ 2\tilde{\mathbf{Q}}_0^{(\cdot)} & \mathcal{H}(\tilde{\mathbf{e}}_3^0, \mathbf{Q}_0^{(2)}) & \tilde{\mathbf{M}}_0^{(\cdot)} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\tilde{\mathbf{M}}_0^{(\cdot)} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (\text{V.40.a})$$



$$\left[ \boldsymbol{\sigma}^{(\cdot)T} \nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} \right] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & 3\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Q}_o^{(\cdot)}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ 3\mathcal{F}(\mathbf{Q}_o^{(\cdot)}, \boldsymbol{\theta}) & \mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{e}_3^o; \mathbf{u}_{,s}; \boldsymbol{\theta}_{,s}; \boldsymbol{\sigma}_o^{(\cdot)}) & \mathcal{F}(\mathbf{M}_o^{(\cdot)}, \boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{M}_o^{(\cdot)}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (\text{V.40.b})$$

$$\left[ \boldsymbol{\sigma}^{(0)T} \nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon}^{(4)} \right] = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & 4\tilde{\mathbf{Q}}_o^{(0)} \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -4\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}) \tilde{\mathbf{Q}}_o^{(0)} & \mathcal{W}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{e}_3^o; \mathbf{u}_{,s}; \boldsymbol{\theta}_{,s}; \boldsymbol{\sigma}_o^{(0)}) & -\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}) \tilde{\mathbf{M}}_o^{(1)} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\mathbf{M}}_o^{(1)} \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (\text{V.40.c})$$

Siendo  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{I}$  ... la siguiente familia de operadores:

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}) = 2\boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} + \theta^2 \mathbf{I} \quad (\text{V.41.a})$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \text{sim}[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{I}] \quad (\text{V.41.b})$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{I} \quad (\text{V.41.c})$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{I} \quad (\text{V.41.d})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{e}_3^o; \mathbf{u}_{,s}; \boldsymbol{\theta}_{,s}; \mathbf{Q}_o^{(\cdot)}; \mathbf{M}_o^{(\cdot)}) &= 3\mathcal{H}(\mathbf{u}_{,s}, \mathbf{Q}_o^{(\cdot)}) + \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}_{,s}, \mathbf{M}_o^{(\cdot)}) \\ &\quad + 2\mathcal{H}(\tilde{\mathbf{e}}_3^o \mathbf{Q}_o^{(\cdot)}, \boldsymbol{\theta}) + (\boldsymbol{\theta}^T \tilde{\mathbf{e}}_3^o \mathbf{Q}_o^{(\cdot)}) \mathbf{I} \end{aligned} \quad (\text{V.41.e})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{e}_3^o; \mathbf{u}_{,s}; \boldsymbol{\theta}_{,s}; \mathbf{Q}_o^{(0)}; \mathbf{M}_o^{(0)}) &= \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}; 4\tilde{\mathbf{Q}}_o^{(0)} \mathbf{u}_{,s} + \tilde{\mathbf{M}}_o^{(0)} \boldsymbol{\theta}_{,s}) \\ &\quad - \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}) \tilde{\mathbf{Q}}_o^{(0)} \tilde{\mathbf{e}}_3^o - 2\boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} \tilde{\mathbf{e}}_3^o \tilde{\mathbf{Q}}_o^{(0)} - (\mathbf{e}_3^o \cdot \boldsymbol{\theta} \tilde{\mathbf{Q}}_o^{(0)}) \mathbf{I} \end{aligned} \quad (\text{V.41.f})$$

Como era de esperar, la matriz  $\mathbf{B}^{(2)}$ , que corresponde a la teoría de 2º orden en la energía, coincide con la matriz de rigidez tangente en una formulación Lagrangiana Actualizada. Esto confirma por un lado que el límite de la matriz de rigidez secante, cuando la norma de los desplazamientos tiende a cero, es precisamente la matriz

tangente; pero, además, muestra la vía más sencilla y rápida de obtener esta matriz, que consiste simplemente en sustituir el vector de deformación por su aproximación de segundo orden, tomando  $\mathbf{R}^T(\boldsymbol{\theta}) \approx \mathbf{I} - \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^2/2$  y  $\mathbf{G}^T(\boldsymbol{\theta}) \approx \mathbf{I} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}/2$ , y haciendo,

$$\boldsymbol{\gamma} \approx \mathbf{R}_0^T \left[ (\mathbf{I} - \tilde{\boldsymbol{\theta}})(\mathbf{e}_3^0 + \mathbf{u},_s) + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^2 \mathbf{e}_3^0 - \mathbf{e}_3^0 \right] \quad (\text{V.42.a})$$

$$\boldsymbol{\kappa} \approx \mathbf{R}_0^T \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \right] \boldsymbol{\theta},_s \quad (\text{V.42.b})$$

De este modo el procedimiento seguido en el capítulo anterior para obtener la matriz tangente en el sistema natural, que condujo a la expresión (IV.131), se vuelve una tarea elemental si se sustituye directamente (V.42) en (V.39.a) y (V.40.a). Estas conclusiones se pueden extender a otros sistemas espaciales, como pueden ser las estructuras laminares. En cualquiera de estos casos, las aproximaciones anteriores de  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{G}$  permiten obtener de inmediato las componentes que comúnmente se denominan *material* y *geométrica* de la matriz de rigidez tangente:

$${}^N \mathbf{K}_{M0}^N = \mathbf{E}^{(1)T} \mathbf{C} \mathbf{E}^{(1)} \quad \therefore \quad {}^N \mathbf{K}_{G0}^N = \boldsymbol{\sigma}_0^T \nabla^2 \boldsymbol{\epsilon}^{(2)} \quad (\text{V.44})$$

Nótese que en la teoría de primer orden (lineal) los términos  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^2 \mathbf{e}_3^0/2$  y  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\theta},_s/2$  no figuran ni en la componente de la deformación transversal  $\boldsymbol{\gamma}$  ni en la curvatura  $\boldsymbol{\kappa}$ . El primero de estos dos términos está relacionado con el alargamiento de segundo orden que experimenta la viga al flectar cuando sus extremos se mantienen fijos:

$$\delta = \frac{1}{2} \int_0^L w'^2 dx \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2} \int_0^L \theta^2 dx$$

El segundo, sin embargo, se debe a la diferencia de segundo orden que existe entre el vector  $d\boldsymbol{\alpha} \oplus d\boldsymbol{\beta}$ , que representa en el sistema natural la suma de dos rotaciones diferenciales  $d\boldsymbol{\alpha}$  y  $d\boldsymbol{\beta}$ , y la suma vectorial  $d\boldsymbol{\alpha} + d\boldsymbol{\beta}$ ; esto es, obedece al hecho de que  $\| d\boldsymbol{\alpha} \oplus d\boldsymbol{\beta} - d\boldsymbol{\alpha} + d\boldsymbol{\beta} \| = O(2)$ .

### V.7.– APLICACIONES DE LOS DESARROLLOS EN SERIE

Una de las herramientas de análisis más útiles en el estudio de la estabilidad de un sistema conservativo son los desarrollos en serie de Taylor de su función potencial y de su matriz de rigidez secante, que indican cómo varían la energía elástica y las cargas  $\mathbf{P}$  en torno a una posición de equilibrio. En la actualidad no se dispone de un método general que permita determinar con precisión el grado de estabilidad o inestabilidad de un sistema estructural cualquiera. Aun en los sistemas más simples, como los conservativos, un estudio en profundidad de este problema comporta la resolución de otra serie de problemas colaterales de difícil solución, como se apreció en el ejemplo de la malla reticular del capítulo anterior. Entre estos problemas, que exigen un análisis aparte detallado, se encuentran los siguientes:

- 1.a) la localización de los puntos críticos a lo largo de una trayectoria.
- 2.a) la clasificación de las trayectorias que se cruzan en un punto crítico y la elaboración de técnicas de desvío o apertura entre ellas.
- 3.a) la caracterización topológica o cualitativa de los puntos críticos.
- 4.a) la determinación del grado de sensibilidad del sistema a las imperfecciones.

De estos cuatro problemas, el primero es el más sencillo y el único que puede resolverse fácilmente con una formulación Tangente, esto es, con el primer término de los desarrollos (V.4 –5). Los tres problemas restantes no se pueden resolver si no se conocen todos los términos de estos desarrollos hasta un orden dado  $n > 2$ . El valor de  $n$  depende del tipo de sistema y su determinación constituye una de las partes esenciales del problema. No obstante, de acuerdo con los estudios de Thom y Zeeman [Z1], este valor por regla general es bajo, raramente superior a 5, y en situaciones normales igual a 3.

De la caracterización topológica de una singularidad y de la determinación de su grado de sensibilidad a las imperfecciones, esto es, de la dependencia que se da entre la carga crítica y los desalineamientos e imperfecciones en la geometría del sistema, se ocupan los estudios clásicos de Koiter sobre estabilidad elástica y, más recientemente, la *teoría de la catástrofe* de Thom y Zeeman [Z1]. Por otra parte, del cálculo y clasificación de las distintas trayectorias que pasan por los puntos críticos se ocupa la

teoría específica sobre bifurcaciones iniciada por Golubitsky y Schaeffer [G1], más tarde ampliada por Marsden y Thompson [M2, T1]. En el apartado V.11 volveremos sobre esta cuestión; en él expondremos las posibilidades que ofrecen los desarrollos (V.4-5) en el marco general de la teoría de la catástrofe.

Aun cuando se hayan realizado numerosos estudios sobre el tema y exista un volumen importante de literatura relacionada con él, estos problemas distan mucho de estar definitivamente cerrados y resueltos. En este sentido, la formulación Secante ofrece nuevas y valiosas herramientas de análisis. Un ejemplo lo constituye la *teoría del desplazamiento crítico*, que permite estimar el valor de la carga crítica en un sistema no lineal. Pero además existen otros problemas de estabilidad que precisan un conocimiento de los desarrollos en serie de Taylor de la función de energía a los que, a pesar de su importancia, se ha dispensado muy poca atención hasta el momento. Entre estos se encuentran los dos siguientes:

- 1.b) la posibilidad de efectuar *saltos* entre posiciones de equilibrio distantes que pueden incluso estar situadas en distintas trayectorias de equilibrio.
- 2.b) el análisis del grado de estabilidad de una estructura en equilibrio.

Aunque ambos problemas están relacionados entre sí, como veremos en el apartado V.10, el segundo es el más interesante desde un punto de vista práctico. Conocer el grado de estabilidad de una estructura supone no sólo saber si el sistema es en sí estable o inestable en una determinada posición, sino saber también en qué medida esa estabilidad está garantizada cuando alguna causa accidental –por ejemplo, una pequeña fuerza exterior– perturba el sistema. La determinación del grado de estabilidad de un sistema es una cuestión mucho más compleja de dilucidar que la mera precisión de la situación de estabilidad o inestabilidad en la que éste se encuentra, pero es fundamental conocerlo, ya que de él depende la verdadera seguridad de una estructura. Las láminas de revolución bajo carga axisimétrica, por ejemplo, son sistemas teóricamente estables en un rango muy amplio de cargas, pero su grado de estabilidad es muy bajo y por ello las cargas críticas de pandeo halladas experimentalmente se encuentran muy por debajo de los valores teóricos que proporciona la teoría de la estabilidad –figura V.8–. En casos así, un diseño seguro de una estructura no puede basarse en la carga teórica de pandeo que es capaz de soportar

ésta en condiciones ideales, sino en aquel nivel de carga que garantiza un grado mínimo de estabilidad.

Por último, la posibilidad de efectuar saltos entre posiciones de equilibrio distantes depende fundamentalmente de la capacidad que se tenga para detectar y aproximarse a dichas posiciones. No es una tarea fácil, como veremos en el apartado V.9; además, en la práctica puede resultar imposible de realizar si no se dispone de un buen estabilizador del proceso iterativo. En el capítulo anterior presentamos algunos estabilizadores sencillos y fáciles de programar, si bien sólo aplicables a un modelo concreto de viga y con un grado limitado de estabilización. En el siguiente apartado mostraremos un nuevo método de estabilización, mucho más seguro, basado en los desarrollos en serie de la energía elástica. Iniciamos con él una serie de ejemplos prácticos de aplicación de los desarrollos en serie de Taylor (V.4-5).

#### **V.8.— PROYECCIÓN DE LOS DESARROLLOS SOBRE UN SUBESPACIO**

En la práctica, los desarrollos analíticos (V.5) de grado  $n > 2$  no son manejables si el sistema depende de muchas variables y no es posible establecer relaciones de dependencia entre ellas que reduzcan el número efectivo de grados de libertad.

Por fortuna, en los procesos de carga de una estructura no todas las direcciones de desplazamiento juegan el mismo papel: algunas son significativas e importantes, como las direcciones propias en el entorno de una singularidad o las líneas tangentes de desplazamiento; y otras, la mayoría, irrelevantes. En general, dada una función de carga  $P(\lambda)$ , el comportamiento global de un sistema en torno a una posición de equilibrio depende del comportamiento local sobre un reducido grupo de direcciones características, y el interés en conocer la energía, el vector de cargas y la matriz tangente en el espacio de estado se limita, en la práctica, a saber cómo varían estas funciones en el subespacio que forma este pequeño grupo de direcciones *características*. En consecuencia, en adelante orientaremos el trabajo de investigación en estas dos direcciones del problema: a) determinar el subespacio característico  $S$  de mínima dimensión; y b) proyectar los desarrollos (V.5) sobre este subespacio  $S$ .

La proyección de estos desarrollos sobre el subespacio  $S$  no ofrece, en teoría, ninguna dificultad. Suponiendo  $n$  el número de grados de libertad del sistema,  $\{s_k\}$  el conjunto de direcciones  $S$  y  $m$  la dimensión de este subespacio, la proyección  $\mathbf{q}_\Pi$  de cualquier dirección  $\mathbf{q}$  del espacio sobre  $S$  se determina de inmediato a través del producto:

$$\mathbf{q}_\Pi = \mathbf{\Pi}_S \mathbf{q} \quad \text{con} \quad \mathbf{\Pi}_S = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{s}_1 & \dots & \mathbf{s}_m \\ | & & | \end{bmatrix} \quad (\text{V.45})$$

y, por consiguiente, las proyecciones de los desarrollos (V.5) de orden  $r$ , se realizan efectuando las transformaciones lineales siguientes:

$$\Psi_\Pi = \mathbf{q}^T \mathbf{\Pi}_S^T \mathbf{K}_U[\mathbf{q}_\Pi] \mathbf{\Pi}_S \mathbf{q} \quad (\text{V.46.a})$$

$$\mathbf{P}_\Pi = \mathbf{\Pi}_S^T \mathbf{K}_S[\mathbf{q}_\Pi] \mathbf{\Pi}_S \mathbf{q} \quad (\text{V.46.b})$$

$$d\mathbf{P}_\Pi = \mathbf{\Pi}_S^T \mathbf{K}_T[\mathbf{q}_\Pi] \mathbf{\Pi}_S d\mathbf{q} \quad (\text{V.46.c})$$

donde las matrices  $\mathbf{K}_U[\mathbf{q}_\Pi]$ ,  $\mathbf{K}_S[\mathbf{q}_\Pi]$  y  $\mathbf{K}_T[\mathbf{q}_\Pi]$  vienen definidas por:

$$\mathbf{K}_U[\mathbf{q}_\Pi] := \sum_{k=2}^r \frac{1}{k(k-1)} \int_V \mathbf{\Sigma}'^T \mathbf{B}^{(k)}[\overline{\mathbf{\Pi}}_S \mathbf{q}] \mathbf{\Sigma}' dV \quad (\text{V.47.a})$$

$$\mathbf{K}_S[\mathbf{q}_\Pi] := \sum_{k=2}^r \frac{1}{(k-1)} \int_V \mathbf{\Sigma}'^T \mathbf{B}^{(k)}[\overline{\mathbf{\Pi}}_S \mathbf{q}] \mathbf{\Sigma}' dV \quad (\text{V.47.b})$$

$$\mathbf{K}_T[\mathbf{q}_\Pi] := \sum_{k=2}^r \int_V \mathbf{\Sigma}'^T \mathbf{B}^{(k)}[\overline{\mathbf{\Pi}}_S \mathbf{q}] \mathbf{\Sigma}' dV \quad (\text{V.47.c})$$

Se ha escrito  $\overline{\mathbf{\Pi}}$  para indicar que los núcleos de las matrices de rigidez se puede proyectar sobre un subespacio  $\overline{S}$  distinto al utilizado para proyectar las propias matrices  $\mathbf{K}_U$ ,  $\mathbf{K}_S$  y  $\mathbf{K}_T$ . Cuando haya peligro de confusión, para distinguir ambas proyecciones denominaremos *proyección interna* a la de los núcleos internos y *proyección externa* a la de las matrices.

En la práctica, estas proyecciones sobre los subespacio  $S$  y  $\bar{S}$  no entrañan ninguna dificultad, ya que las matrices de cada elemento-viga se construyen y proyectan al mismo tiempo, antes de proceder a ensamblarlas para componer las matrices globales del sistema. Este punto es esencial si queremos ahorrar memoria y reducir los tiempos de ejecución del programa. Si se proyectan los desarrollos sobre un subespacio de dos o más dimensiones, este tipo de operaciones se agiliza aún más utilizando un programa de cálculo simbólico como *Mathematica* o *MATLAB*.

Como es lógico, la proyección más simple es la unidimensional en una dirección dada. En este caso las transformaciones (V.46–47) son elementales e inmediatas; no obstante, a pesar de su simplicidad, estas proyecciones internas unidimensionales pueden resultar muy útiles, como vamos a comprobar en los siguientes apartados en los que mostramos dos ejemplos interesantes de aplicación.

### V.9.– ESTABILIZACIÓN DEL MÉTODO DE NEWTON–RAPHSON

Si intentamos resolver las ecuaciones de equilibrio de un sistema compuesto por vigas con el método iterativo de Newton–Raphson, el proceso sólo converge si los incrementos de las variables cinemáticas  $\Delta \mathbf{q}$  se mantienen acotados en norma por debajo de un determinado valor  $\varepsilon$ . Cuando los incrementos de carga son importantes, estos vectores  $\Delta \mathbf{q}$  también lo son y el proceso diverge.

En el capítulo anterior presentamos tres tipos de estabilizadores que mejoraban la convergencia del proceso sin llegar a garantizarla, porque simplemente elevaban el valor de  $\varepsilon$ . A diferencia de estos estabilizadores, el conocimiento de la función de energía en una dirección dada permite diseñar un método simple y seguro de convergencia.

Este método consiste simplemente en combinar el procedimiento iterativo de Newton–Raphson, que marca las direcciones  $\mathbf{e}_i$  en las que debemos movernos hasta alcanzar la solución final, con una técnica de minimización de la energía potencial del sistema a lo largo de estas direcciones  $\mathbf{e}_i$ . En definitiva, una técnica *line-search* en la que las direcciones de búsqueda las proporciona el método de Newton–Raphson. El procedimiento exige proyectar la función de energía en estas direcciones  $\mathbf{e}_i$ .

Sean  $\mathbf{P}_0$  y  $\Psi_0$  la carga y energía potencial de un sistema en una determinada posición de equilibrio  $C$ , y  $\Delta\mathbf{P}$  un incremento de carga. La energía elástica interna del sistema, cuando efectuamos un desplazamiento  $\mathbf{d} = \lambda \mathbf{e}$ , valdrá entonces:

$$\Psi(\mathbf{d}) = \Psi_0 + \lambda \mathbf{P}^T \mathbf{e} + (\lambda \mathbf{e})^T \left[ \frac{1}{2} \mathbf{K}_0 + \frac{1}{6} \mathbf{K}_1(\lambda \mathbf{e}) + \frac{1}{12} \mathbf{K}_2(\lambda \mathbf{e}) + \dots \right] (\lambda \mathbf{e})$$

y por tanto el incremento de la energía potencial total  $\Delta\Psi$ , bajo la carga  $\mathbf{P}_0 + \Delta\mathbf{P}$ , se podrá expresar en función de la amplitud de desplazamiento  $\lambda$  de esta forma:

$$\Delta\Psi(\lambda) = -\lambda \Delta\mathbf{P}^T \mathbf{e} + \frac{\lambda^2}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{e} + \frac{\lambda^3}{6} \mathbf{e}^T \mathbf{K}_1(\mathbf{e}) \mathbf{e} + \frac{\lambda^4}{12} \mathbf{e}^T \mathbf{K}_2(\mathbf{e}) \mathbf{e} + \dots \quad (\text{V.48})$$

Truncando estos desarrollos y minimizando la función resultante, se obtiene un valor  $\lambda_e$  que garantiza un descenso de la energía potencial total del sistema y, por tanto, un acercamiento a la nueva posición de equilibrio. Dado que los valores  $\lambda_e$  obtenidos de esta forma, por regla general son inferiores a los que proporciona el método de Newton–Raphson (NR)  $-\lambda_{\text{NR}} = \mathbf{e}^T \mathbf{K}_0^{-1} \Delta\mathbf{P} / \mathbf{e}^T \mathbf{e}$ , un problema que puede surgir es que el proceso de convergencia se vuelva demasiado lento. De ocurrir esto, se puede acelerar la convergencia multiplicando los valores  $\lambda_e$  por un factor adecuado de escala  $k$ , de tal forma que el resultado final  $k\lambda$  quede comprendido entre los dos anteriores:  $\lambda_e \leq k\lambda \leq \lambda_{\text{NR}}$ . No obstante, hay que guardar ciertas cautelas al aplicar este factor para no producir un efecto contrario al esperado. Más seguro y eficaz –según se concluye de ejemplos resueltos– es limitar el cálculo de  $\lambda_e$  a las primeras fases del proceso iterativo, mientras la norma de los residuos se mantiene por encima de un determinado valor umbral  $\rho$ , que debe fijarse de antemano. Para determinar estos valores de  $k$  y  $\rho$ , lo más práctico es efectuar una serie de tanteos previos.

En el capítulo anterior ensayamos tres estabilizadores con tres sistemas y situaciones de carga diferentes: el arco rebajado de la figura V.3 –pág.278–, el semipórtico de la figura IV.9.a y la viga curva de la figura IV.3. Los incrementos de carga y número de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia se recogieron en la Tabla IV.23. Estos mismos indicadores se muestran en la Tabla V.5 para el estabilizador que acabamos de presentar. Comparando los resultados, se observa que



con el nuevo estabilizador el proceso siempre es estable y converge para cualquier incremento de carga –nótese que ninguno de los estabilizadores del capítulo anterior convergía en el caso de la viga curva para un salto de carga de 0 a 3000 unidades, ni en el arco rebajado para saltos de 0 a 375, justo por encima del punto límite–. Esta ventaja se paga con una ligera ralentización del proceso. Por otra parte, con este nuevo método basado en minimizar la energía sólo se pueden encontrar posiciones de equilibrio estables. Los puntos de equilibrio situados en ramas inestables, que no corresponden a ningún mínimo, son por tanto inaccesibles.

Viga curva 3D	Semipórtico plano	Arco rebajado
0 – 3000 (76)	0 – 20000 (47)	0 – 350 (6) 350 – 400 (14) 0 – 375 (17) 0 – 900 (14)

Tabla V.5:

*Incrementos de carga y número de iteraciones para alcanzar la convergencia minimizando la energía en las direcciones N-R.*

#### V.10.– EL MÉTODO DEL DESPLAZAMIENTO CRÍTICO

En un proceso cuasiestático de carga:  $\mathbf{P} = \lambda \mathbf{P}_0$ , gobernado por un único parámetro  $\lambda$ , la forma tradicional de calcular la carga crítica  $\mathbf{P}_{cr}$  y el modo de pandeo  $\mathbf{z}$  consiste en resolver el siguiente problema de autovectores y autovalores:

$$[\mathbf{K}_M + \lambda_{cr} \mathbf{K}_G] \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (\text{V.49})$$

donde  $\mathbf{K}_M(\mathbf{d})$  y  $\mathbf{K}_G(\mathbf{F}, \mathbf{d})$  son las componentes material y geométrica de la matriz de rigidez tangente del sistema en la posición de equilibrio  $(\mathbf{P}, \mathbf{d})$ . Al ser simétricas  $\mathbf{K}_M$  y  $\mathbf{K}_G$ , el número de autovalores reales  $\lambda_i$  coincide con el orden de estas matrices. Obtenida la serie  $\{\lambda_i\}$ , el menor de estos autovalores proporciona la carga crítica del sistema:  $\mathbf{P}_{cr} = \lambda_1 \mathbf{P}$ , y el subespacio de autovectores asociado a este autovalor  $\{\mathbf{z}_1\}$ , los correspondientes modos de pandeo.

Cuando se calcula  $\mathbf{P}_{cr}$ , de esta forma, se presupone que el sistema estructural apenas se deforma al pasar de la posición de equilibrio  $\mathbf{d}$  a la crítica de pandeo, y en consecuencia la dependencia de  $\mathbf{K}_M$  y  $\mathbf{K}_G$  con relación a  $\mathbf{d}$  se puede obviar, y la de  $\mathbf{K}_G$  con los esfuerzos  $\mathbf{F}(\mathbf{d})$  puede considerarse lineal. Ahora bien, si los desplazamientos del sistema no son despreciables, al resolver (V.49) se pueden cometer errores importantes en la determinación del factor crítico  $\lambda_{cr}$ . En estos casos es preciso modificar el método de cálculo de este factor para tener en cuenta la dependencia de las matrices  $\mathbf{K}_M$  y  $\mathbf{K}_G$  de los desplazamientos  $\mathbf{d}$ .

Un procedimiento que considera esta dependencia es el *método del desplazamiento crítico* [O4-6]. Consiste en proyectar la matriz de rigidez  $\mathbf{K}_T$  en la dirección de los desplazamientos previstos del sistema  $\mathbf{d}$ , tomar la aproximación lineal de primer orden de dicha proyección y resolver el problema de autovalores resultante. Hasta ahora este método sólo se ha aplicado a sistemas conservativos con la energía potencial dada por un polinomio de cuarto orden en los desplazamientos  $\mathbf{d}$  y sus gradientes  $\nabla \mathbf{d}$  –o, lo que es equivalente, con un vector de deformación de segundo orden en  $\mathbf{d}$  y  $\nabla \mathbf{d}$  –. La energía elástica y las matrices de rigidez secante y tangente se expresaban en la forma (V.7) [O4-5] y el cálculo de la carga crítica y modo de pandeo se reducía a resolver el siguiente problema de autovectores:

$$[\mathbf{K}_0 + \lambda_{cr} \mathbf{K}_1] \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (\text{V.50})$$

que tiene solución, si y sólo si, el determinante de la matriz característica es nulo:

$$|\mathbf{K}_0 + \lambda_{cr} \mathbf{K}_1| = 0 \quad (\text{V.51})$$

La diferencia entre (V.49) y (V.50) es clara si se tiene en cuenta que cada término del desarrollo de la matriz de rigidez se puede descomponer a su vez en dos partes: una material y otra geométrica. Por ejemplo, con una formulación Lagrangiana Total, suponiendo los esfuerzos iniciales nulos ( $\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = 0$ ), la ecuación (V.50) se puede expresar de la forma equivalente:

$$[\mathbf{K}_{M0} + \lambda_{cr} (\mathbf{K}_{G1} + \mathbf{K}_{M1})] \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (\text{V.52})$$

que incluye un nuevo término  $\mathbf{K}_{M1}$  que no figuraba en (V.49) y que representa la derivada de la matriz de rigidez material en la dirección  $\mathbf{d}$ .

Con una formulación Lagrangiana Actualizada –por tanto, con  $\boldsymbol{\sigma}^{(0)} \neq 0-$ , (V.52) se transforma a su vez en:

$$\left[ \mathbf{K}_{M0} + \mathbf{K}_{G0} + \lambda_{cr} (\mathbf{K}_{M1} + \mathbf{K}_{G1}) \right] \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (\text{V.53})$$

Comparando esta ecuación con (V.52), la principal diferencia que se advierte no es la aparición de otro nuevo término  $\mathbf{K}_{G0}$ , sino el hecho de que ahora la dirección sobre la que se proyecta la matriz de rigidez es la dirección tangente obtenida por el método de Newton-Raphson, y no una dirección secante como en (V.50) y (V.52).

Las componentes material y geométrica de  $\mathbf{K}_0$  y  $\mathbf{K}_1$  se extraen en ambos casos de (V.5) y (V.38). Concretamente, en los sistemas en los que el vector de deformación es una función de segundo orden en los desplazamientos y sus derivadas, se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_{M0} + \mathbf{K}_{G0} \\ \mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_{M1} + \mathbf{K}_{G1} \end{array} \right\} \begin{cases} \mathbf{K}_{M0} = \int_V \boldsymbol{\Sigma}'^T \mathbf{E}^{(1)T} \mathbf{C} \mathbf{E}^{(1)} \boldsymbol{\Sigma}' dV \\ \mathbf{K}_{G0} = \int_V \boldsymbol{\Sigma}'^T \left[ \boldsymbol{\sigma}^{(0)T} \nabla^2 \boldsymbol{\epsilon}^{(2)} \right] \boldsymbol{\Sigma}' dV \\ \mathbf{K}_{M1} = \int_V \boldsymbol{\Sigma}'^T \left[ \mathbf{E}^{(1)T} \mathbf{C} \mathbf{E}^{(2)} + \mathbf{E}^{(2)T} \mathbf{C} \mathbf{E}^{(1)} \right] \boldsymbol{\Sigma}' dV \\ \mathbf{K}_{G1} = \int_V \boldsymbol{\Sigma}'^T \left[ \boldsymbol{\sigma}^{(1)T} \nabla^2 \boldsymbol{\epsilon}^{(2)} \right] \boldsymbol{\Sigma}' dV \end{cases}$$

En principio, el método del desplazamiento crítico se puede aplicar a cualquier sistema conservativo cuyo potencial sea desarrollable en serie de Taylor. Como los desarrollos (V.5) se dedujeron desde una formulación Lagrangiana Actualizada, al aplicarlo a las vigas Cosserat el problema de autovalores que origina es del tipo (V.52–53). No obstante, este método se puede mejorar con ligeras modificaciones o variantes, algunas de las cuales se comentan seguidamente.

Hasta ahora, en (V.50–53), se ha proyectado la matriz de rigidez sobre una dirección recta del espacio, pero también puede proyectarse sobre una trayectoria curvilínea unidimensional, no necesariamente recta; por ejemplo, sobre una curva definida por  $n$  vectores  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ , de la forma:

$$\mathbf{d}(\lambda) = \lambda \mathbf{v}_1 + \lambda^2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda^n \mathbf{v}_n \quad (\text{V.54})$$

En este supuesto, de acuerdo con (V.17), se tendrá:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\lambda) = & \mathbf{K}_0 + \lambda \mathbf{K}_1(\mathbf{v}_1) + \lambda^2 [\mathbf{K}_1(\mathbf{v}_2) + \mathbf{K}_2(\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_1)] + \\ & \lambda^3 [\mathbf{K}_1(\mathbf{v}_3) + \mathbf{K}_2(\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2) + \mathbf{K}_2(\mathbf{v}_2; \mathbf{v}_1) + \mathbf{K}_3(\mathbf{v}_1)] + \dots \end{aligned} \quad (\text{V.55})$$

Nótese que,  $\mathbf{K}_2(\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2) \neq \mathbf{K}_2(\mathbf{v}_2; \mathbf{v}_1)$  (V.56)

y, sin embargo,  $\mathbf{K}_1(\mathbf{v}_1) \mathbf{v}_2 \equiv \mathbf{K}_1(\mathbf{v}_2) \mathbf{v}_1$  (V.57)

Cuando se trazan las trayectorias de equilibrio, la carga se aplica en pequeños incrementos y la curva  $\mathbf{d}(\lambda)$  se puede obtener interpolando posiciones de la propia trayectoria. Así, en los ejemplos que se presentan más adelante,  $\mathbf{d}(\lambda)$  es un polinomio cúbico que se obtiene interpolando dos posiciones consecutivas de equilibrio ( $\mathbf{d}_i$ ;  $\mathbf{d}_{i+1}$ ) con tangentes a la trayectoria conocidas:  $\mathbf{K}^{-1}\Delta\mathbf{P}$  –éstas las proporciona el método de Newton-Raphson en la primera iteración–. También se puede interpolar utilizando más puntos y menos tangentes, pero los resultados empeoran.

Desarrollando la matriz de rigidez proyectada  $\mathbf{K}_d(\lambda)$  en serie de  $\lambda$ , los valores críticos de  $\lambda$  cumplirán:

$$\left| \mathbf{K}_0 + \lambda_{cr} \mathbf{K}_1 + \lambda_{cr}^2 \mathbf{K}_2 + \lambda_{cr}^3 \mathbf{K}_3 + \dots \right| = 0$$

La aproximación de primer orden de esta ecuación en  $\lambda$  coincide con la (V.51), pero también se pueden escribir las aproximaciones sucesivas de órdenes  $n = 1, 2, \dots$

$$\left| \mathbf{K}_0 + \lambda_{cr} \mathbf{K}_1 + \lambda_{cr}^2 \mathbf{K}_2 + \dots + \lambda_{cr}^n \mathbf{K}_3 \right| = 0 \quad (\text{V.58})$$

En teoría, la resolución de este problema no lineal de autovalores no ofrece ninguna dificultad, pues se puede transformar en otro lineal del tipo  $|\mathbf{K}' - \lambda\mathbf{I}| = 0$  [P2]. En la práctica, sin embargo, presenta dos inconvenientes: por un lado, la nueva matriz  $\mathbf{K}'$  no es simétrica; y por otro, el orden de esta matriz  $\mathbf{K}'$  es  $n$  veces mayor que el orden de las matrices  $\mathbf{K}_i$ , y como la extracción de autovalores de una matriz de

orden  $m$  es una operación algebraica de orden  $O(m^3)$ , los tiempos de computación aumentan de forma alarmante y desproporcionada con el orden del polinomio.

Por otra parte, del mismo modo que se extrajo (V.53) de (V.50), se pueden ahora escribir relaciones análogas para (V.58), descomponiendo cada matriz  $\mathbf{K}_i$  en sus dos partes material y geométrica:  $\mathbf{K}_{Mi}$  y  $\mathbf{K}_{Gi}$ , que pueden combinarse a conveniencia. Entre las posibles combinaciones muy pocas son útiles –algunas se muestran en las figuras V.6 y V.7.–. Además, se ha observado que las componentes geométricas de órdenes elevados tienden a degradar el método y conviene eliminarlas.

Hasta ahora sólo hemos considerado las proyecciones  $\mathbf{K}_d$  del núcleo de la matriz de rigidez, pero también podemos proyectar la matriz de rigidez global, como se indicó en el apartado V.8. De hacerlo así, la proyección debe realizarse sobre un pequeño subespacio que varíe de forma continua al movernos por la trayectoria y contenga los vectores propios en el punto crítico. Los métodos I, II y III de las gráficas V.4 a V.7, corresponden, respectivamente, a las proyecciones externas de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}_T$  sobre los subespacios  $\mathbf{E}:\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ,  $\mathbf{V}:\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{d}\}$  y  $\{\mathbf{e}_1\}$ , donde  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$  son los autovectores de menor valor propio y  $\mathbf{d}$  la dirección tangente a la trayectoria.

Todas estas variantes del método del desplazamiento crítico las hemos ensayado con una serie de ejemplos. Los más interesantes se muestran en las figuras (V.2–7) y son: a) una estructura hexagonal formada por 18 elementos-viga –figura V.2– con un punto límite muy marcado; b) el semipórtico de la figura IV.7; y c) un arco rebajado plano, discretizado con 12 elementos lineales –figura V.3–. Como datos característicos del material y de las secciones transversales de las vigas, adoptamos en la estructura hexagonal los siguientes valores:  $E = 439800$ ,  $G = 169154$ ,  $A = 0.494$ ,  $I_x = I_y = 0.0203$ ,  $J = 0.0331$ ; y en el arco plano:  $E = 10^6$ ,  $G = 5 \cdot 10^5$ ,  $A = 13.11$ ,  $I_x = 28.186$ .

Los resultados del arco rebajado y de la estructura hexagonal quedan recogidos en las figuras V.4 y V.5. El semipórtico, por otro lado, se calcula como sistema espacial con posibilidad de pandear fuera del plano de la estructura –figura V.7–, y como sistema plano con movimientos contenidos en el plano de la estructura –figura V.6–. En el semipórtico espacial y en el arco rebajado encontramos un punto de bifurcación antes de alcanzar el punto límite, con una diferencia importante entre ambos casos: en el arco, el modo de pandeo está contenido en el plano de la estructura, y en el semipórtico, fuera de él.

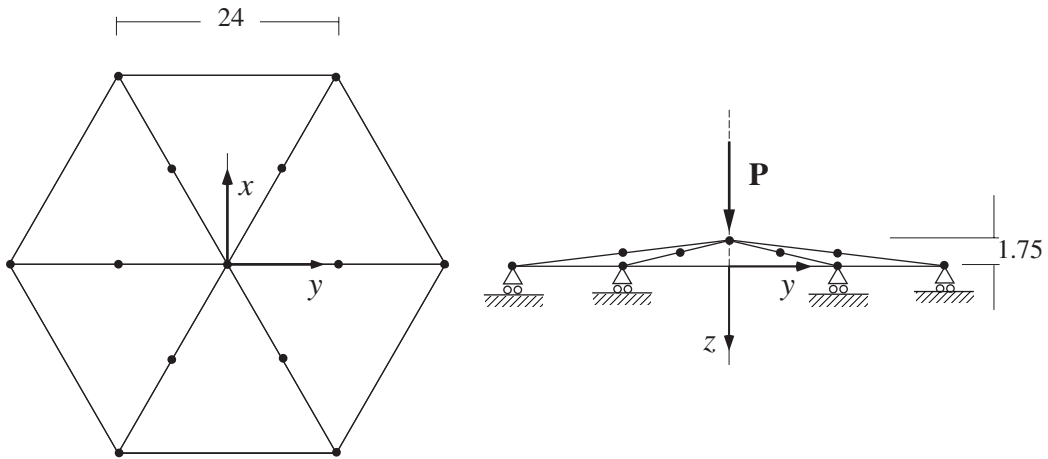


Figura V.2.a.

Geometría, sistema de apoyos y discretización de la estructura hexagonal

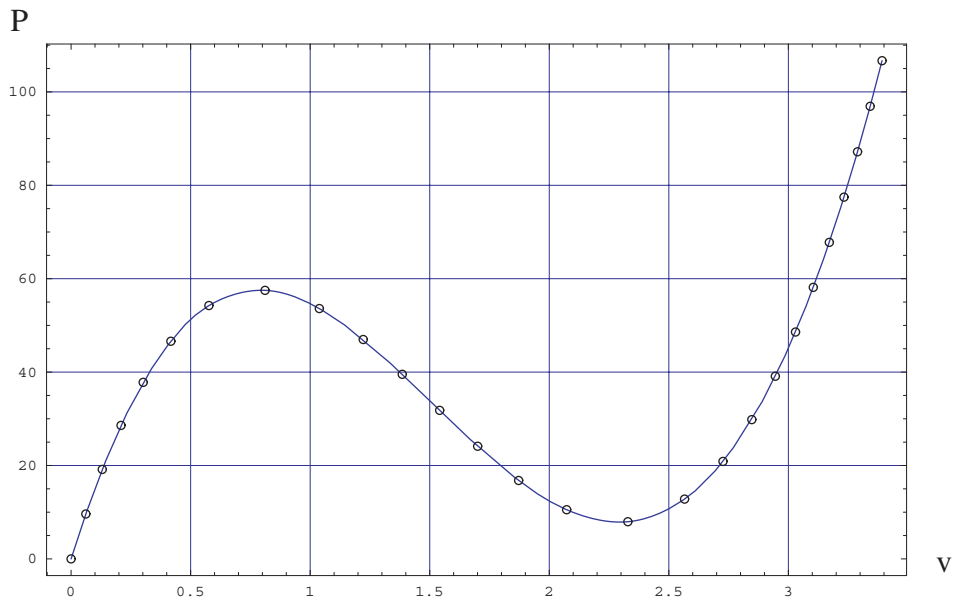
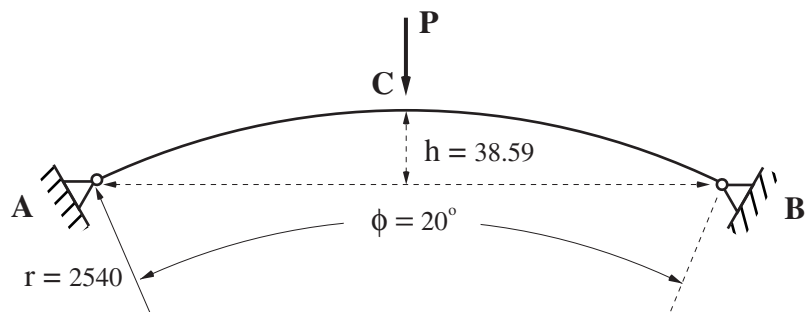
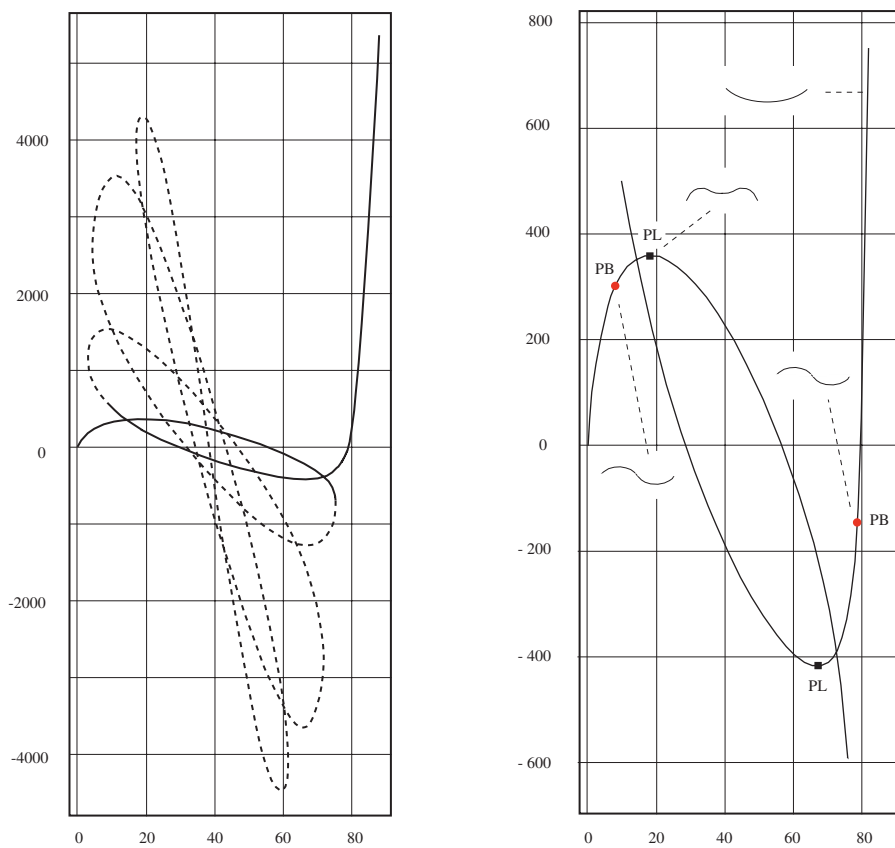


Figura V.2.b.

Desplazamiento vertical del vértice central del hexágono en función de P



Figs. V.3.a : Arco rebajado plano



Figs. V.3.b :

*Desplazamiento vertical del punto central en función de la carga  $P$  y situación de los primeros y últimos puntos críticos.*

(● pto. de bifurcación; ■ pto. límite)

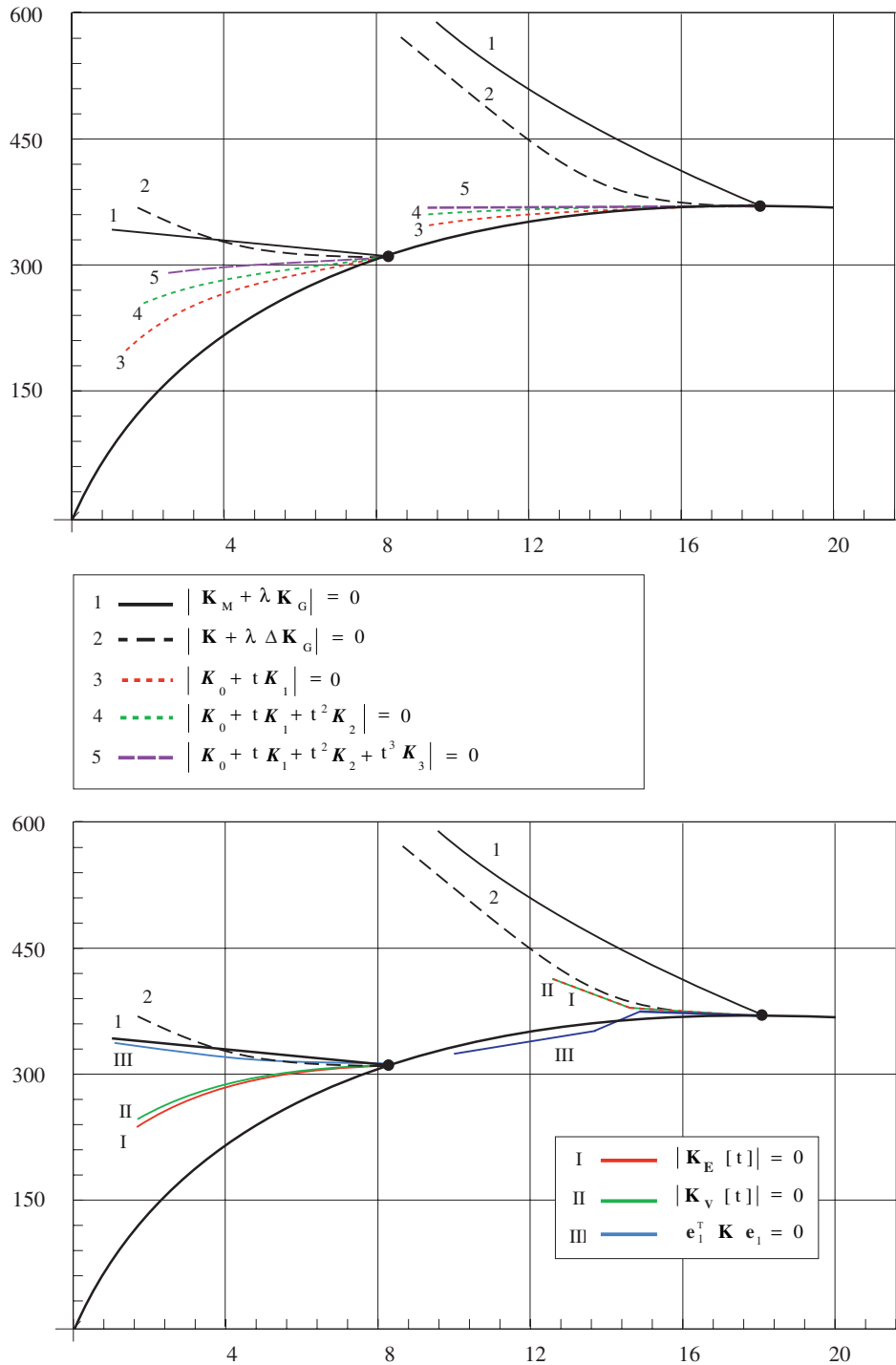


Figura V.4.

Arco rebajado plano: estimación de la carga crítica por distintos métodos



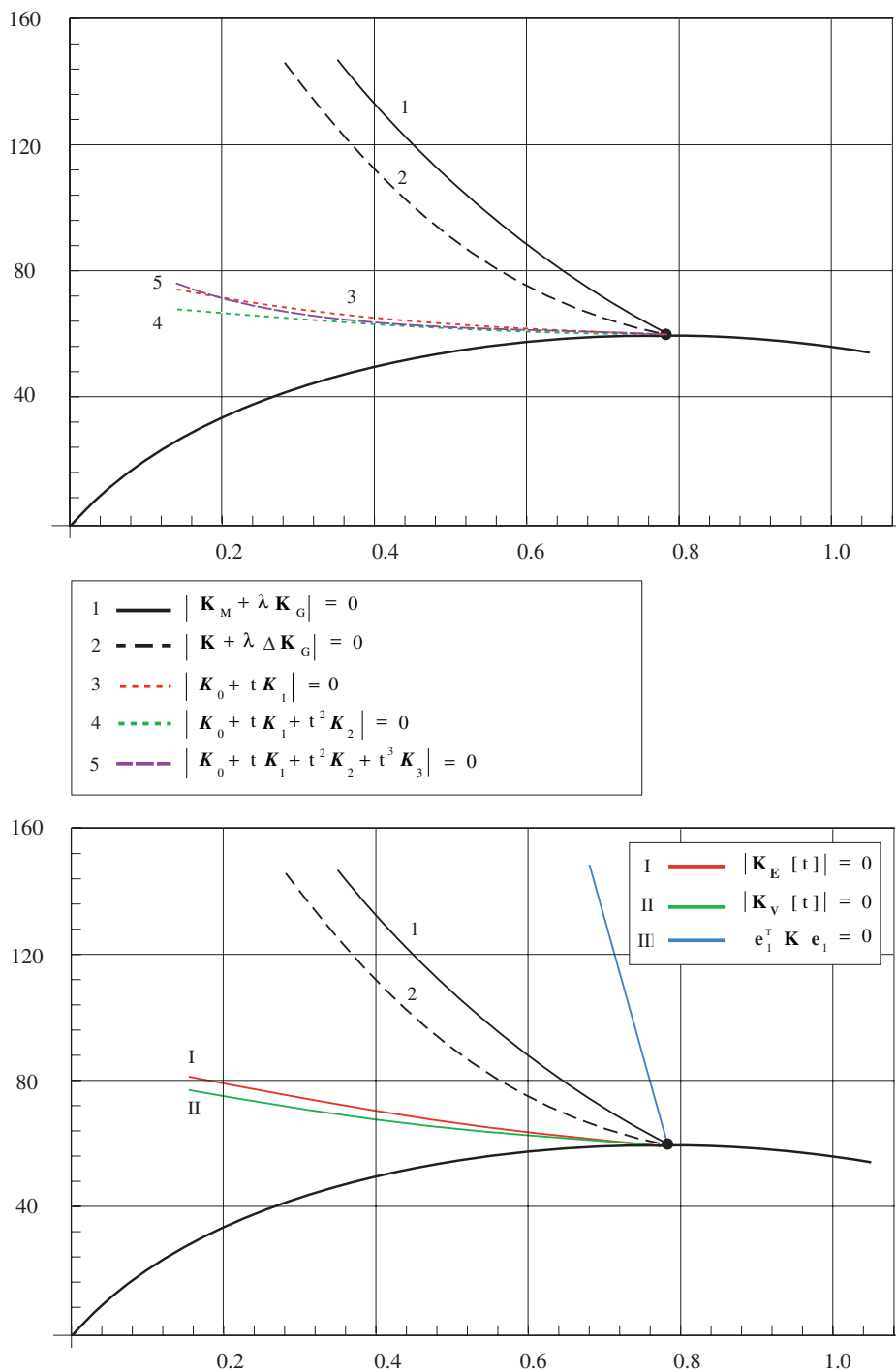


Figura V.5.

Arco rebajado plano: estimación de la carga crítica por distintos métodos

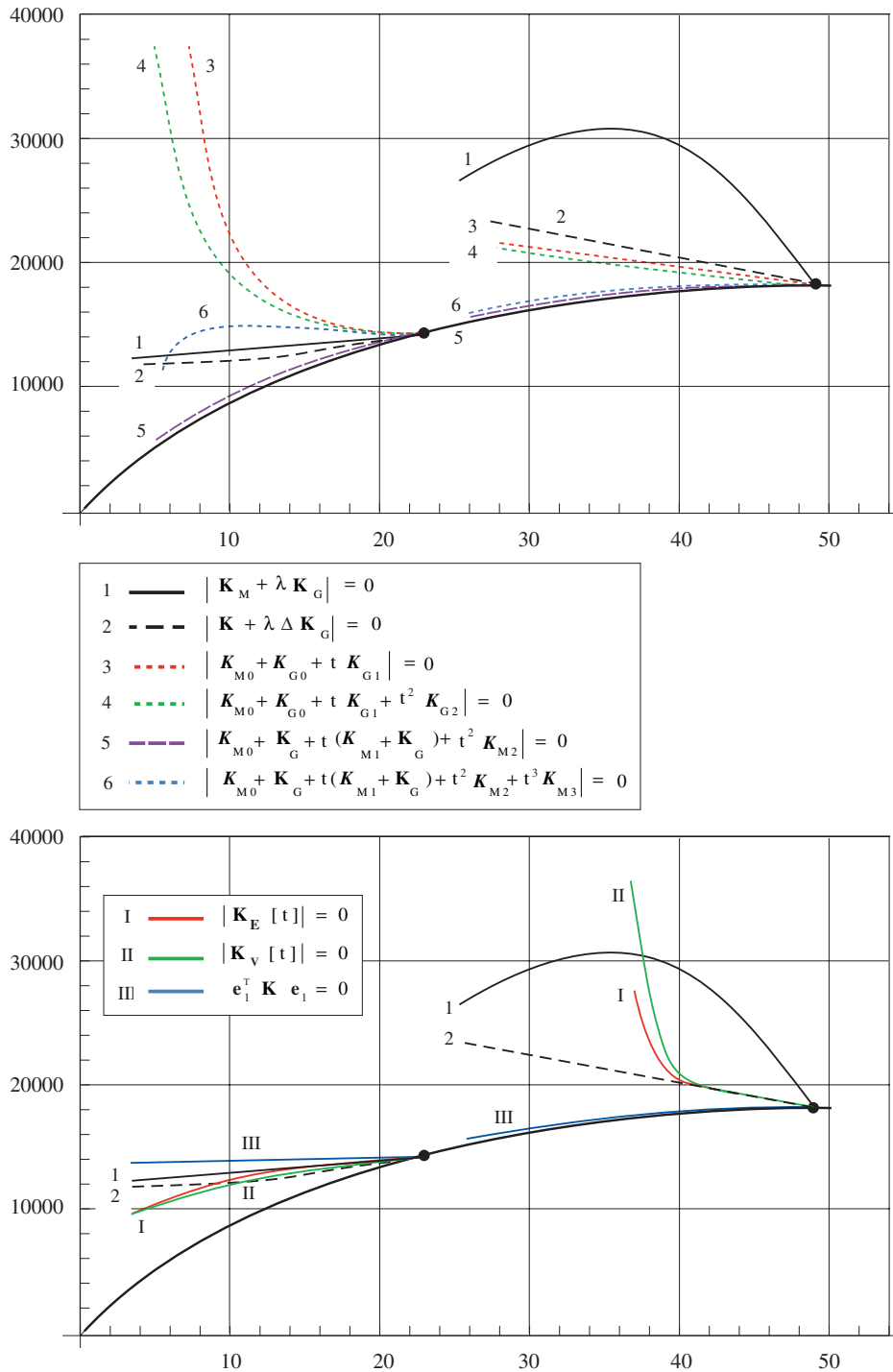


Figura V.6.

Semipórtico espacial: estimación de la carga crítica por distintos métodos

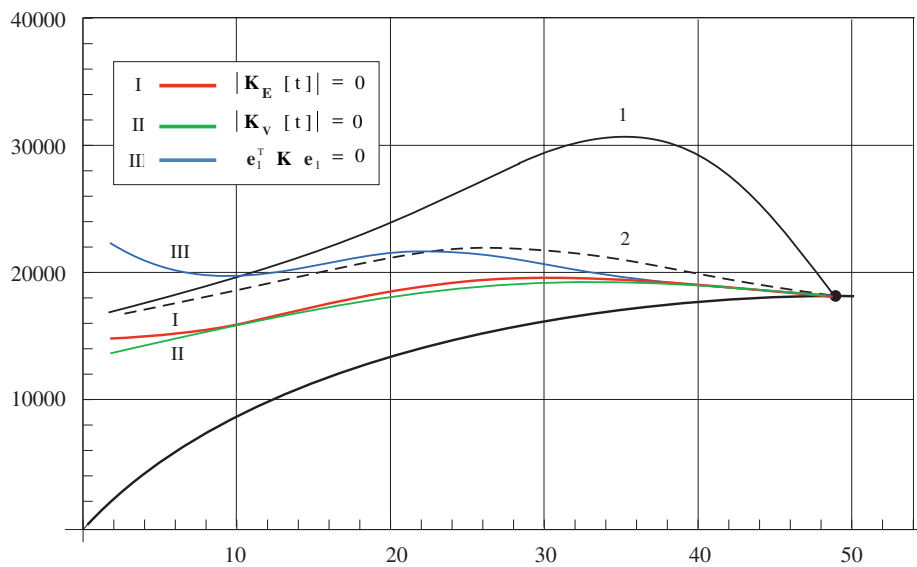
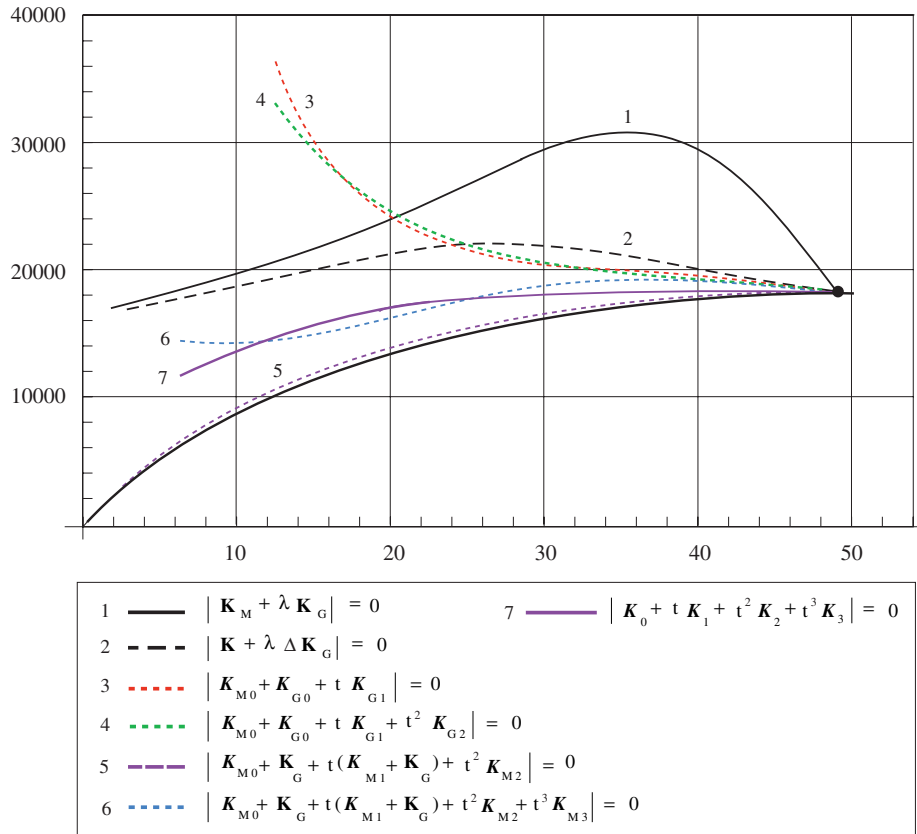


Figura V.7.

Semipórtico plano: estimación de la carga crítica por distintos métodos

Comentario aparte merece, por su singularidad, el arco rebajado. La curva característica del desplazamiento vertical de su punto central C muestra una serie de bucles o lazos cuyo número depende del grado de discretización del arco. En nuestro caso particular, con 12 elementos, hemos obtenido tres lazos –figura V.3.b– separados por 8 puntos límite con modos de pandeo simétricos. El primer punto límite se produce para un valor de la carga  $P = 365$  y el último para un valor  $P = -421$ . Entre ellos se encuentran además 8 puntos de bifurcación con modos de pandeo asimétricos. El primero,  $P = 305$ , y el último,  $P = -167$ , con un modo de pandeo similar formado por un simple seno. Al recorrer la curva V.3.b, la directriz del arco se deforma y ondula progresivamente hasta llegar a formar 4 senos, que van desapareciendo en la última parte del recorrido. En este tramo final ascendente, con fuerte pendiente vertical, el arco se encuentra en posición invertida y es estable.

Del análisis de las gráficas V.4 a V.8 se extraen las siguientes conclusiones:

- 1) La forma tradicional de calcular la carga crítica de pandeo por medio de la fórmula (V.51) da buenos resultados cuando los cambios de geometría del sistema, al pasar de la situación inicial de descarga a la de inestabilidad, son muy pequeños. Esta condición la cumple generalmente el primer punto de bifurcación. Pero si los cambios de geometría son importantes, la fórmula (V.51) ofrece una predicción muy pobre de la carga crítica.
- 2) Los métodos basados en desarrollos en serie muestran un comportamiento desigual, que depende mucho del sistema concreto analizado. Como es lógico, y con algunas excepciones, exigen más tiempo de cálculo y son más precisos los que retienen más términos de la serie. En algunas ocasiones, no obstante, los términos de elevado orden degradan el sistema de ecuaciones y, por razones que explicamos en la siguiente página, empeoran la solución. Por ello, conviene limitar el número de términos de la serie a uno o dos.
- 3) Las predicciones de la carga crítica mejoran sustancialmente al acercarnos al punto crítico con los métodos basados en desarrollos, no así con los métodos tradicionales. Obedece a la misma razón por la que los métodos tangentes convergen cuadráticamente mientras los secantes sólo lo hacen linealmente. Los desarrollos en serie, por tanto, son herramientas poderosísimas para localizar puntos críticos o desviar la trayectoria en un punto de ramificación.

- 4) Los métodos que proyectan la matriz de rigidez sobre un pequeño subespacio  $S$  también dan buenos resultados si  $S$  contiene el subespacio de autovectores críticos  $\mathbf{E}_{cr}$  o representa una buena aproximación al mismo. El inconveniente de estos métodos es que requieren el cálculo previo de algunos autovectores.

En resumen, las cargas críticas que corresponden a los puntos de bifurcación de las figuras (V.4) a (V.8) se predicen con suficiente exactitud con el método tradicional (V.49), que es el más simple de cuantos se han descrito; y los puntos límite, con el método del desplazamiento crítico en su versión más simple (V.50). Conviene advertir, no obstante, que la localización de los puntos límite no es tan problemática como la de los puntos de bifurcación, pues se desprende del propio trazado de las trayectorias y se puede predecir extrapolando estas curvas. Por otra parte, si se desea exactitud en la predicción y nos encontramos en un pequeño entorno del punto crítico, el método del desplazamiento crítico es el único capaz de conseguirla, y cuanto más elevado sea el orden del mismo, tanto más ajustada será esta predicción.

El método del desplazamiento crítico muestra generalmente un comportamiento más uniforme y proporciona mejores resultados en los sistemas formados por barras y sólidos que en los sistemas formados por vigas. La razón es simple: en algunos sistemas conservativos, al alejarnos de una posición de equilibrio estable en distintas direcciones, el orden de magnitud del incremento de energía potencial que se produce con tal desplazamiento varía mucho de unas direcciones a otras –por ejemplo, en las vigas Cosserat, con desplazamientos de la misma norma  $\|\Delta\mathbf{q}\|$ , el orden de magnitud de  $\Delta U$  es mucho mayor cuando éstos comportan variaciones significativas de las deformaciones transversal o longitudinal, que si solo afectan a la curvatura–. En tales casos, si los incrementos  $\Delta\mathbf{q}$  se separan mucho de la trayectoria de carga, la función  $\Delta U$  puede presentar un crecimiento asintótico desproporcionado que afecte a los resultados numéricos –concretamente, al valor  $\lambda_{cr}$ – y contamine al sistema, tanto más cuanto mayor sea el orden  $n$  en (V.58). Este es el principal problema de las vigas Cosserat, que incorporan directamente la energía de deformación por cortante. También es el causante de la pérdida de convergencia a la que nos hemos referido en el apartado V.8, y fuente de otro tipo de problemas como el conocido efecto de bloqueo en los modelos discretos de vigas con deformación por cortante, que se resuelve normalmente sustituyendo la integración exacta por una reducida.

## V.11.– OTRAS APLICACIONES

### I) Localización de puntos críticos

En el capítulo anterior presentamos un método sencillo para localizar puntos críticos basado en la serie de Sturm. Partiendo de los desarrollos en serie de Taylor de las matrices secante y tangente, exponemos a continuación otro método algo más complejo que permite localizarlos rápidamente.

Supongamos que nos encontramos en una posición de equilibrio  $\mathbf{q}$  próxima a un punto crítico  $\mathbf{q}_{cr}$ . Sean  $\mathbf{P}(\lambda)$ ,  $\mathbf{K}_s(\lambda)$  y  $\mathbf{K}_T(\lambda)$  la ley de carga y las matrices de rigidez secante y tangente expresadas en función de un parámetro  $\lambda$ . Supongamos que en la posición de equilibrio  $\mathbf{q}$ , se tiene  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$  y  $\lambda = \lambda_0$ , y en un punto de su entorno  $\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}$ :  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \Delta\mathbf{P}$  y  $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ . Admitiendo que todas estas funciones son analíticas y desarrollables en serie de Taylor del parámetro  $\lambda$ , vamos a determinar los incrementos  $\Delta\mathbf{P}_{cr}$  y  $\Delta\lambda_{cr}$  que corresponden al punto crítico. Para ello expresemos  $\Delta\mathbf{q}$  y  $\Delta\mathbf{P}(\lambda)$  del siguiente modo:

$$\Delta\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 \Delta\lambda + \mathbf{q}_2 \Delta\lambda^2 + \mathbf{q}_3 \Delta\lambda^3 + \dots \quad (\text{V.58})$$

$$\Delta\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \Delta\lambda + \mathbf{P}_2 \Delta\lambda^2 + \mathbf{P}_3 \Delta\lambda^3 + \dots \quad (\text{V.59})$$

–con una elección adecuada del parámetro  $\lambda$ , el incremento de carga se puede expresar en la forma más simple:  $\Delta\mathbf{P} = \mathbf{P}_s \Delta\lambda^s$ , donde  $s$  es el menor entero para el que  $\mathbf{P}_s \neq 0$ –.

Teniendo en cuenta (V.4) y (V.5), en un entorno del punto  $\mathbf{q}$  se tiene:

$$\Delta\mathbf{P} = \mathbf{K}_s[\Delta\mathbf{q}]\Delta\mathbf{q} \quad ; \quad d\mathbf{P} = \mathbf{K}_T[\Delta\mathbf{q}]d\mathbf{q} \quad (\text{V.60})$$

con

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{K}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{q}) + \frac{1}{3}\mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{q}) + \dots \quad (\text{V.61})$$

y

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{q}) + \mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{q}) + \dots \quad (\text{V.62})$$

e introduciendo (V.58) y (V.59) en (V.60), e identificando los términos de igual exponente en  $\Delta\lambda$ , se obtiene el sistema de ecuaciones (V.63), que permite determinar secuencialmente todas las componentes  $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots$  del vector  $\Delta\mathbf{q}$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_1 &= \mathbf{K}_0 \mathbf{q}_1 \\
 \mathbf{P}_2 &= \mathbf{K}_0 \mathbf{q}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\mathbf{q}_1) \mathbf{q}_1 \\
 \mathbf{P}_3 &= \mathbf{K}_0 \mathbf{q}_3 + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\mathbf{q}_1) \mathbf{q}_2 + \frac{1}{3} \mathbf{K}_2(\mathbf{q}_1) \mathbf{q}_1 \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{V.63}$$

Como todas las componentes  $\mathbf{q}_i$  se obtienen resolviendo una ecuación del mismo tipo:  $\mathbf{q}_i = \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{z}_i$ , sólo se necesita invertir una vez la matriz  $\mathbf{K}_0$ , o bien descomponerla en la forma  $\mathbf{LL}^T$ . Es evidente que no interesa obtener todas las componentes  $\mathbf{q}_i$  sino sólo un pequeño grupo de ellas, el suficiente para aproximar la matriz de rigidez tangente hasta el orden  $n$  que se estime conveniente.

Si se introducen estas componentes en  $\Delta\mathbf{q}$  y se lleva este resultado a (V.62), la matriz de rigidez del sistema, desarrollada, adopta la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_T(\Delta\lambda) &= \bar{\mathbf{K}}_0 + \bar{\mathbf{K}}_1 \Delta\lambda + \bar{\mathbf{K}}_2 \Delta\lambda^2 + \dots + \bar{\mathbf{K}}_n \Delta\lambda^n \\
 \text{con,} \quad \bar{\mathbf{K}}_1 &= \mathbf{K}_1(\mathbf{q}_1) \\
 \bar{\mathbf{K}}_2 &= \mathbf{K}_1(\mathbf{q}_2) + \mathbf{K}_2(\mathbf{q}_1; \mathbf{q}_1) \\
 \bar{\mathbf{K}}_3 &= \mathbf{K}_1(\mathbf{q}_3) + \mathbf{K}_2(\mathbf{q}_1; \mathbf{q}_2) + \mathbf{K}_2(\mathbf{q}_2; \mathbf{q}_1) + \mathbf{K}_3(\mathbf{q}_1) \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{V.64}$$

Y el problema de localización del punto crítico se reduce a buscar el valor  $\Delta\lambda$  que hace singular  $\mathbf{K}_T$ ; o lo que es equivalente, el valor que anula el determinante:

$$\left| \bar{\mathbf{K}}_0 + \bar{\mathbf{K}}_1 \Delta\lambda + \bar{\mathbf{K}}_2 \Delta\lambda^2 + \dots + \bar{\mathbf{K}}_n \Delta\lambda^n \right| = 0
 \tag{V.65}$$

Este problema es idéntico al (V.58) y se puede resolver de la misma forma. Dado que  $\Delta\lambda$  se supone pequeño, este escalar también se puede hallar de forma recurrente, resolviendo varias veces el problema lineal  $\left| \bar{\mathbf{K}}_0 + \Delta\lambda \bar{\mathbf{K}}_1 \right| = 0$ ; o bien, si el punto crítico es un punto de bifurcación simple, calculando simultáneamente el autovalor  $\Delta\lambda$  y su correspondiente autovector  $\mathbf{z}$ :

$$\left[ \bar{\mathbf{K}}_0 + \bar{\mathbf{K}}_1 \Delta\lambda + \bar{\mathbf{K}}_2 \Delta\lambda^2 + \dots + \bar{\mathbf{K}}_n \Delta\lambda^n \right] \mathbf{z} = \mathbf{0}
 \tag{V.66}$$

En este último caso, se parte de una estimación del autovector  $\mathbf{z}$  que se corrige posteriormente. Una buena aproximación a  $\mathbf{z}$  se obtiene resolviendo el problema lineal:

$$|\bar{\mathbf{K}}_0 + \Delta\lambda\bar{\mathbf{K}}_1| \mathbf{z}_0 = \mathbf{0} \quad (\text{V.67})$$

o bien, adoptando el autovector de  $\bar{\mathbf{K}}_0$  de menor autovalor. Para corregir la primera estimación del autovector  $\mathbf{z}$ , se sustituye éste por  $\mathbf{z}_0 + \mathbf{z}_1\Delta\lambda$  en (V.66), obteniéndose:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_0 \mathbf{z}_0 + [\bar{\mathbf{K}}_0 \mathbf{z}_1 + \bar{\mathbf{K}}_1 \mathbf{z}_0] \Delta\lambda + [\bar{\mathbf{K}}_1 \mathbf{z}_1 + \bar{\mathbf{K}}_2 \mathbf{z}_0] \Delta\lambda^2 + \\ [\bar{\mathbf{K}}_2 \mathbf{z}_1 + \bar{\mathbf{K}}_3 \mathbf{z}_0] \Delta\lambda^3 + o(\Delta\lambda^3) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{V.68})$$

Si  $\mathbf{z}_0$  es solución de (V.67), esta ecuación, simplificada, se reduce a:

$$\bar{\mathbf{K}}_0 \mathbf{z}_1 + [\bar{\mathbf{K}}_1 \mathbf{z}_1 + \bar{\mathbf{K}}_2 \mathbf{z}_0] \Delta\lambda + [\bar{\mathbf{K}}_2 \mathbf{z}_1 + \bar{\mathbf{K}}_3 \mathbf{z}_0] \Delta\lambda^2 + o(\Delta\lambda^2) = \mathbf{0} \quad (\text{V.69})$$

y si  $\mathbf{z}_0$  es el autovector de  $\bar{\mathbf{K}}_0$  de menor autovalor  $-\lambda_0 \approx 0^-$ , queda de este otro modo:

$$\bar{\mathbf{K}}_0 \mathbf{z}_0 + [\bar{\mathbf{K}}_0 \mathbf{z}_1 + \bar{\mathbf{K}}_1 \mathbf{z}_0] \Delta\lambda + o(\Delta\lambda) = \mathbf{0} \quad (\text{V.70})$$

Para que el problema (V.68) tenga solución única y ésta sea distinta de la trivial  $\mathbf{z}_1\Delta\lambda = -\mathbf{z}_0$ , se impone a  $\mathbf{z}_1$  la condición de ser ortogonal a  $\mathbf{z}_0$ , esto es, en el primer caso se obliga a  $\mathbf{z}_1$  a cumplir la condición:  $\mathbf{z}_1^T [\bar{\mathbf{K}}_0 + \Delta\lambda\bar{\mathbf{K}}_1] \mathbf{z}_0 = 0$ , y en el segundo, la condición  $\mathbf{z}_1^T \bar{\mathbf{K}}_0 \mathbf{z}_0 = 0$ . Dada la simetría de las matrices  $\bar{\mathbf{K}}_i$ , estas condiciones implican las relaciones siguientes:

$$\mathbf{z}_0^T \bar{\mathbf{K}}_2 \mathbf{z}_0 \Delta\lambda + [\mathbf{z}_0^T \bar{\mathbf{K}}_2 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_0^T \bar{\mathbf{K}}_3 \mathbf{z}_0] \Delta\lambda^2 + o(\Delta\lambda^2) = 0 \quad (\text{V.71.a})$$

$$\mathbf{z}_0^T \bar{\mathbf{K}}_0 \mathbf{z}_0 + \mathbf{z}_0^T \bar{\mathbf{K}}_1 \mathbf{z}_0 \Delta\lambda + o(\Delta\lambda) = 0 \quad (\text{V.71.b})$$

De las que se extraen respectivamente los valores estimados de  $\Delta\lambda$  –en teoría el primero debe aproximarse más al valor buscado  $\Delta\lambda_{cr}$  que el segundo–:

$$\Delta\lambda = -\mathbf{z}_0^T \bar{\mathbf{K}}_2 \mathbf{z}_0 / (\mathbf{z}_0^T \bar{\mathbf{K}}_2 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_0^T \bar{\mathbf{K}}_3 \mathbf{z}_0) \quad (\text{V.72.a})$$

$$\Delta\lambda = -\lambda_0 / \mathbf{z}_0^T \bar{\mathbf{K}}_1 \mathbf{z}_0 \quad (\text{V.72.b})$$



Introduciendo estos valores en (V.69) y (V.70), se obtienen las correcciones de  $\mathbf{z}_1$  buscadas –si únicamente se desea localizar el punto crítico  $\mathbf{q}_{cr}$ , no es preciso calcular  $\mathbf{z}$ , basta resolver  $\Delta\lambda$ –. Trasladándonos al punto  $\lambda + \Delta\lambda$ , y repitiendo el proceso  $n$  veces, se obtiene una sucesión de valores  $\lambda_0, \lambda_1, \dots$  que converge rápidamente al punto crítico. Por tanto, el problema no lineal de autovalores (V.65) se puede resolver de tres formas distintas: directamente, mediante un proceso recurrente de aproximaciones lineales del tipo (V.67), o bien de la forma descrita en la página anterior.

## II) Apertura de trayectorias en puntos de ramificación

En los puntos de ramificación se cruzan varias trayectorias de equilibrio, que pueden modificar su carácter estable o inestable al traspasarlos. En la práctica, los puntos de ramificación que se dan con más frecuencia son los puntos de bifurcación simple en los que se cruzan solamente dos trayectorias. Un análisis detallado de estos puntos no es posible si no se dispone de medios para trazar estas trayectorias. Cuando nos movemos a lo largo de una de ellas y nos aproximamos a un punto crítico donde se cruzan dos trayectorias, no es fácil realizar el cambio de una a otra; de ahí que se haya dedicado un importante esfuerzo a desarrollar técnicas específicas de apertura de ramas. Éstas se pueden clasificar en dos grupos: las basadas en métodos tangentes y las basadas en métodos de interpolación [S1]. En ambos casos el proceso de apertura comprende dos fases: una predictiva, de aproximación a un punto de la nueva trayectoria, y otra correctora, en la que se corrigen las desviaciones producidas en la fase anterior. Las técnicas de apertura más seguras son las basadas en métodos tangentes, aunque su aplicación exige partir de una buena aproximación al punto crítico y conocer la derivada de la matriz tangente en una dirección dada.

Lo ideal, por supuesto, es conocer los desarrollos (V.4–5), que incluyen todas las derivadas de las matrices secante y tangente. Está claro que cuantos más términos conozcamos de estos desarrollos tanto más aproximado será el resultado que obtengamos en la fase predictiva. Las ventajas que ofrecen los desarrollos de las matrices secante y tangente en un caso general de carga son evidentes. El procedimiento de obtención de las trayectorias presenta algunas variantes respecto del seguido para localizar puntos críticos, pero es semejante a éste y no lo repetiremos aquí. Sobre este tema y el anterior se está trabajando en la actualidad

### III) Hacia un nuevo criterio de estabilidad

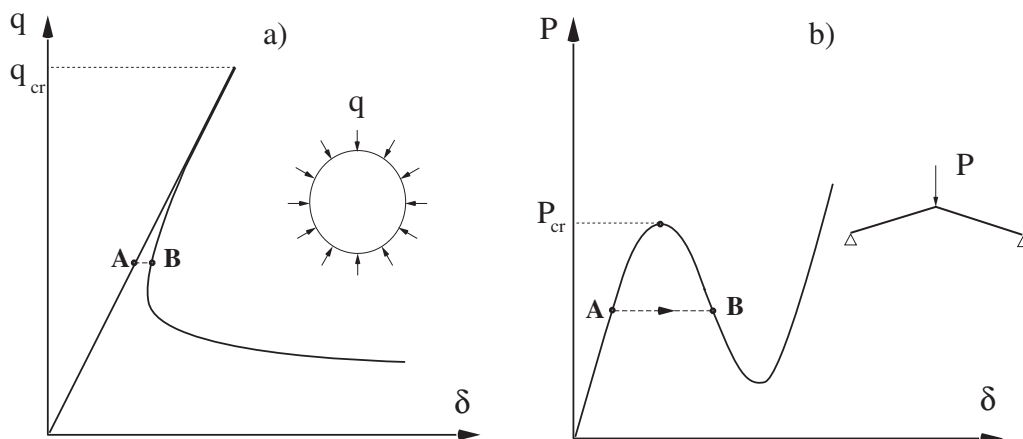
Por *estabilidad estática* se entiende la capacidad que tiene un sistema para retornar a su posición de equilibrio cuando sufre alguna pequeña perturbación que lo aleja de ella; por ejemplo, un pequeño desplazamiento. En los sistemas conservativos –únicos que consideramos en este capítulo– la condición necesaria y suficiente para que un estado de equilibrio sea estable es que en él la energía potencial total alcance un mínimo aislado (teorema de Lagrange). Este mínimo se da cuando los términos de segundo orden de la función potencial  $\Psi$  constituyen una función cuadrática definida positiva; esto es, cuando los autovalores  $\lambda_i$  en la serie de Sturm de la matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_T$  son todos mayores que cero. Si alguno de estos autovalores es negativo, el sistema es inestable; y si uno o más autovalores se anulan y el resto son positivos, entonces la estabilidad o inestabilidad depende de los términos de orden superior ( $>2$ ) de la función potencial  $\Psi$ .

Un estado de equilibrio estable puede serlo además global o localmente. En el primer caso, el sistema retorna siempre a su posición de equilibrio inicial con independencia de cuál sea el valor de la perturbación sufrida. En el segundo caso, esta vuelta a la posición de partida sólo se produce cuando la magnitud de la perturbación se mantiene por debajo de un determinado valor umbral, más allá del cual el sistema puede acceder a otras posiciones de equilibrio o bien divergir. La magnitud mínima o valor umbral de esta perturbación determina el grado de estabilidad del sistema en esa posición. Si este umbral es pequeño, bastará un pequeño impulso, una mínima variación de las cargas exteriores o un pequeño defecto de forma para producir un salto energético irreversible que impida al sistema retornar a la posición inicial, conduciéndolo a una situación de total inestabilidad o a otra posición de equilibrio, por lo general con un nivel energético más bajo y, por tanto, más estable. En estos casos el sistema no es seguro, aun cuando teóricamente, en condiciones ideales y en ausencia de cualquier perturbación, se considere estable. Por el contrario, si el valor umbral es alto, el sistema reaccionará de forma estable ante pequeñas o moderadas perturbaciones, impidiendo cualquier alejamiento de la posición inicial de equilibrio. En este último caso, teniendo en cuenta los aspectos dinámicos del problema –no considerados en el análisis estático precedente–, el sistema vibrará en torno a la posición inicial de equilibrio, y sujeto a la acción de fuerzas disipativas presentes en

todo sistema real, retornará finalmente a ella. Cuando se da esta circunstancia, el sistema se puede considerar seguro. Las figuras V.8. ilustran claramente las dos situaciones que acabamos de describir. La primera se ilustra en la figura V.8.a, que corresponde a una lámina esférica con puntos de equilibrio muy próximos para un mismo valor de la carga  $P$ . La segunda, por el contrario, corresponde a una estructura similar a la mostrada en la figura V.2, con puntos de equilibrio A y B muy distanciados entre sí. En el primer caso, para realizar un salto entre las posiciones A y B, basta una pequeña perturbación. En el segundo caso, por el contrario, se requiere un fuerte impulso –en términos relativos– para producir el salto.

De acuerdo con estas ideas, el concepto tradicional de estabilidad estática no sirve para determinar si un sistema estructural se puede considerar seguro o no. Para valorar la seguridad de una estructura, es preciso conocer no sólo la situación de estabilidad o inestabilidad en que se encuentra en un determinado momento, sino también el *grado* de estabilidad asociado a cada estado de equilibrio. Veamos cómo se puede valorar este grado de estabilidad en un caso como el de la figura V.8.a.

Supongamos que un sistema conservativo admite dos posiciones de equilibrio estático A y B para un mismo valor de la carga  $P_A$ , que estas posiciones se encuentran muy próximas entre sí y que se puede pasar de una a otra introduciendo en el sistema



Figuras V.8.

*Curvas carga-deformación de una lámina esférica sometida a compresión uniforme y de una estructura cargada en clave.*

una pequeña perturbación. Admitamos que esta perturbación, cuantificada, equivale a una aportación de energía exterior  $\Delta W$ . Si el sistema perturbado abandona la posición de equilibrio A y pasa a la posición B, en el tránsito de una a otra atravesará un punto límite O –figura V.9–. Sean  $\Delta\Psi_B$  y  $\Delta\Psi_O$  las variaciones de energía potencial en B y O respecto a A. Para alcanzar la posición B se necesita que  $\Delta W \geq \Delta\Psi_B$ . Si  $\Delta W < \Delta\Psi_B$ , el sistema oscilará en torno a A; sin embargo, si  $\Delta W > \Delta\Psi_B$ , el sistema rebasará la posición B y se desplazará hacia otra posición de equilibrio C o bien divergirá. En definitiva,  $\Delta\Psi_B$  es la mínima energía requerida para que el sistema abandone la posición A y no retorne a ella. Al haber supuesto que los puntos A y B se encuentran muy próximos entre sí, la cantidad de energía que se precisará para alcanzar la posición B será aproximadamente igual al duplo de la requerida para alcanzar el punto límite O :  $\Delta\Psi_B \approx 2 \Delta\Psi_O$ , pudiendo utilizarse  $\Delta\Psi_O$  como patrón de medida para calibrar el grado de seguridad del sistema, en sustitución de  $\Delta\Psi_B$ . La cuestión se centra, por tanto, en buscar un método que permita calcular  $\Delta\Psi_O$ . A tal fin proponemos el siguiente, que sigue parcialmente la línea marcada por Kröplin en estos temas [K1-3].

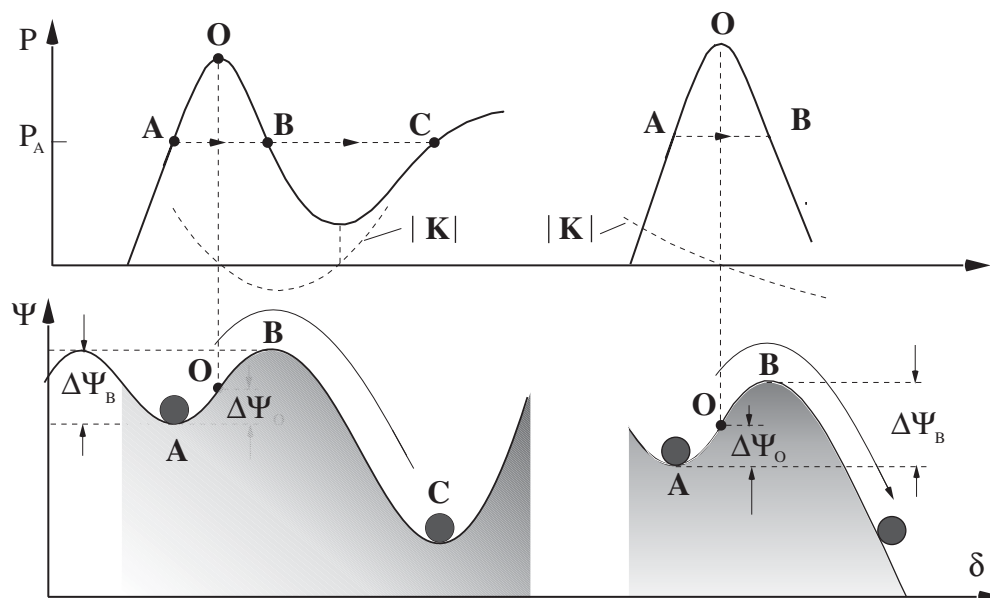


Figura V.9.  
Salto crítico de energía.

En general, en un sistema con  $n$  grados de libertad  $q_i$  las zonas de estabilidad e inestabilidad se encuentran separadas entre sí por una o varias hipersuperficies de puntos singulares de dimensión  $n-1$ . Supongamos que el punto de equilibrio  $A$  se encuentra próximo a una de estas superficies  $\Sigma$  y que  $\mathbf{q}_\Sigma$  es un punto de esta superficie situado en el entorno de  $A$ . El punto  $O$ , energéticamente más próximo a  $A$ , será aquél que minimice la siguiente función de energía:

$$\Delta\Psi = \mathbf{P}_0^T \Delta\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}^T \mathbf{K}_U \Delta\mathbf{q}$$

donde

$$\mathbf{K}_U = \frac{1}{2}\mathbf{K}_0 + \frac{1}{6}\mathbf{K}_1(\Delta\mathbf{q}) + \frac{1}{12}\mathbf{K}_2(\Delta\mathbf{q}) + \dots$$

y el valor de  $\Psi$  en este punto  $O$  será precisamente el valor buscado.

El problema de búsqueda del punto  $O$  se convierte, por tanto, en un problema de mínimos condicionados: consiste en minimizar el funcional  $\Delta\Psi(\mathbf{q}_A)$ , partiendo de una posición  $\mathbf{q}_\Sigma \in \Sigma$ , y sujeto a la condición de que la solución  $\mathbf{q}_A$  pertenezca también a  $\Sigma$ . Como punto  $\mathbf{q}_\Sigma$  puede tomarse el punto de intersección de  $\Sigma$  con la dirección del autovector de  $\mathbf{K}_0$  cuyo autovalor más se aproxima a 0. Sea éste  $\mathbf{e}$ . En tal caso, el punto de intersección  $\mathbf{q}_\Sigma$  se obtiene resolviendo de nuevo el sistema (V.65) con  $\Delta\mathbf{q} = \Delta\lambda\mathbf{e}$ .

Por otra parte, para desplazarnos desde  $\mathbf{q}_\Sigma$  a  $O$ , manteniéndonos en todo momento dentro de la superficie  $\Sigma$ , deberemos efectuar desplazamientos que estén contenidos en los planos tangentes a la misma. Estos planos se determinan fácilmente teniendo en cuenta la singularidad de la matriz de rigidez en  $\Sigma$ . En efecto, si  $\mathbf{z}$  es el autovector de autovalor nulo en un punto  $\mathbf{q}$  de  $\Sigma$  y  $\mathbf{z}+d\mathbf{z}$  el correspondiente a otro punto  $\mathbf{q}+d\mathbf{q}$  de la misma superficie, tendrá que cumplirse:

$$[\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(d\mathbf{q})][\mathbf{z} + d\mathbf{z}] = \mathbf{0}$$

y dado que se tiene:  $\mathbf{K}_1(d\mathbf{q})\mathbf{z} = \mathbf{K}_1(\mathbf{z})d\mathbf{q}$  –propiedad (V.57)–, y  $\mathbf{z}$  pertenece al núcleo de  $\mathbf{K}_0$ , se tendrá también:

$$\mathbf{z}^T \mathbf{K}_1(\mathbf{z})d\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (\text{V.73})$$

En definitiva, el vector  $\mathbf{n}$  normal a la superficie  $\Sigma$  en  $\mathbf{q}$  es:  $\mathbf{n} = \mathbf{K}_1(\mathbf{z})\mathbf{z}$  y el plano tangente a la misma en  $\mathbf{q}$  viene definido por (V.73).

Hasta ahora sólo hemos considerado perturbaciones de las variables de estado  $q_i$  y del parámetro de carga  $\lambda$ . Ahora bien, el sistema puede depender además de varios parámetros de control, generalmente relacionados con algún tipo de imperfección. En este supuesto una modificación de estos parámetros supone una modificación de las condiciones iniciales del problema y un cambio en la respuesta del sistema.

El número posible de formas de discontinuidad o singularidades topológicamente diferentes que se originan al perturbar los parámetros depende del número de éstos  $m$ . Por ejemplo, si  $m < 5$ , sólo pueden darse siete tipos de singularidades o *catástrofes* y en ninguna de ellas intervienen más de dos variables de estado [Z1, T1]. Para la *teoría de la catástrofe* un sistema es estable cuando cualquier perturbación de los parámetros de control no modifica el carácter cualitativo de la respuesta del sistema. El estudio de estas singularidades se basa en el conocimiento de los desarrollos en serie de Taylor de la energía potencial del sistema y en la aplicación de una técnica de eliminación de variables pasivas que reduce el número de grados de libertad del sistema a un pequeño grupo de variables activas. Las posibilidades de los desarrollos (V.4-5) y proyecciones (V.46-47) en este tipo de análisis resultan evidentes, pero dejamos para una futura investigación los dos temas apuntados en este subapartado

## V.12.– RECAPITULACIÓN

En este capítulo hemos desarrollado en serie de Taylor la función de energía  $\Psi$  y las matrices de rigidez secante y tangente del modelo Cosserat de viga, expresando los resultados en la forma compacta de Mallet y Marcal. Además, hemos marcado la pauta para construir desarrollos similares en otros sistemas estructurales

Una característica importante de estos desarrollos es que se puede obtener con la ayuda de un ordenador. Los nuevos programas matemáticos de cálculo simbólico permiten programar tanto la tarea de descomposición de una función en serie de Taylor, implícita en (V.8), como la de derivación, incluida en (V.12), como la de organización y construcción de las matrices básicas  $\mathbf{B}$ . Los únicos datos que hay que facilitarle al programa, aparte del tipo de elemento, interpolación e integración numérica, son la expresión matemática del funcional de energía  $\Psi$  y el conjunto de variables independientes.

Para las vigas Cosserat hemos deducido el término genérico de los desarrollos en el sistema natural con una formulación Lagrangiana Actualizada.

También hemos pasado revista a la formulación Secante pura, y hemos desarrollado una serie de teorías de alto orden *localmente secantes*. Las hemos utilizado para estabilizar el método de Newton-Raphson y abordar una serie de problemas clásicos de estabilidad elástica como: la localización de puntos críticos o la aplicación del método del desplazamiento crítico a la predicción de la carga crítica de pandeo. De este último método hemos explorado un grupo de variantes, cuya puesta a prueba ilustramos con los ejemplos respectivos.

Por ultimo, dejamos constancia y breve comentario de algunos problemas que reclaman solución y en los que, al día de hoy, se sigue trabajando.

#### V.13.- REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [B1] Badawi, M. & Cusens, A.R., "Symmetry of the stiffness matrices for geometrically non-linear analysis", *Communications in Appl. Num. Meth.*, **8**, 135-40, (1992).
- [C1] Carrera, E., "Sull'uso dell'operatore secant in analisi non-lineare di strutture multistrato con il metodo degli elementi finiti" in ATTI, XI Congresso Nazionale AIMETA, Trento, 28 Sept-2 Oct, (1992).
- [D1] Duddeck, H., Kröplin, B., Dinkler, D., Hillmann, J. & Wagenhuber, W., "Berechnung des nichtlinearen Tragverhaltens dünner Schalen im Vor- und Nachbeulbereich", *Nichtlineare Berechnungen im Konstruktiven Ingenieurbau* (Cálculo no lineal de estructuras en ingeniería civil), DFG Colloquium, 2-3 Marzo, 1989, Stein E., (ed.), Springer-Verlag, Berlin, (1989).
- [F1] Felippa, C., "Discussions on the paper by Rajasekaran and Murray (1973)", *J. Struct. Div.*, ASCE, **100**, 2521-23, (1974).
- [F2] Felippa, C. & Crivelli, L.A., "The core congruential formulation of geometrically non-linear finite elements", *Non Linear Computational Mechanics. The State of the Art*, P. Wriggers & W. Wagner (eds.), Springer-Verlag, Berlin, (1991).
- [F3] Felippa, C., Crivelli, L.A. & Haugen, B., "A survey of the core congruential formulation for geometrically non-linear TL finite elements", *Archives of Comp. Meth. in Engng.*, **1**, 1, 1-48, (1994).

- [F4] Fletcher, R., *Practical Methods of Optimization*, 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley & Sons, (1987).
- [G1] Golubitsky, M. & Schaeffer, D., “A theory for imperfect bifurcation via singularity theory”, *Commun. Pure. Appl. Math.*, **32**, 21, (1979).
- [G2] Golub, G.H. & Van Loan, C.F., *Matrix Computations*, Chap. IV, pp. 161-171. The Johns Hopkins University Press, 3<sup>a</sup> ed., Baltimore, (1996).
- [K1] Kröplin, B., Dinkler, D. & Hillmann, J., “An energy perturbation method applied to non-linear structural analysis”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, **52**, 885-97, (1985).
- [K2] Kröplin, B., “Instability prediction by energy perturbation”, *Numerical Methods in Applied Sciences and Engineering*, H. Alder, J. C. Heinrich, S. Lavanchy, E. Oñate and B. Suárez (eds.), CIMNE, Barcelona, (1991).
- [K3] Kröplin, B., Wilhelm, M. & Herrmann, M. “Unstable phenomena in sheet metal forming processes and their simulation”, *VDI Berichte*, **894**, 137–152, (1991).
- [L1] Luenberger, D.G., *Linear and Nonlinear Programming*, 2nd ed., Addison Wesley, (1989).
- [M1] Mallet, R. & Marcal, P., “Finite element analysis of non-linear structures”, *J. Struct. Div.*, ASCE, **14**, 2081-2105, (1968).
- [M2] Marsden, J.E., “Qualitative Methods in Bifurcation Theory”, *Bull. Am. Math Soc.*, **84**, 1125, (1978).
- [M3] Morán, A., Oñate, E. & Miquel, J., “A General Procedure for Deriving Symmetric expressions for the Secant and Tangent Stiffness Matrices in Finite Element Analysis” *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **42**, 219-236, (1998).
- [O1] Oñate, E., Oliver, J., Miquel, J. & Suárez, B., “Finite element formulation for geometrically non-linear problems using a secant matrix”, *Computational Plasticity* 86, S. Atluri and G. Yagawa (eds.), Springer-Verlag, (1986).
- [O2] Oñate, E., “Possibilities of the secant stiffness matrix for non-linear finite element analysis”, *Non Linear Engineering Computation*, N. Bicanic et al. (eds.), Pineridge Press, (1991).
- [O3] Oñate, E. “On the Derivation of the Secant Stiffness Matrix for Non-Linear Finite Element Analysis”, *Computational Mechanics*, **15**, 572–93, (1995).
- [O4] Oñate, E. & Matias, W.T., “A critical displacement approach for predicting structural instability”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, **134**, 135–161, (1996).



- [O5] Oñate, E. & Matias, W.T., “Enhanced prediction of structural instability points using a critical displacement method”, *Advances in Finite Element Technology*, N. E. Wiberg (ed.), Barcelona, (1995).
- [O6] Oñate, E., Tschöpe, H. & Wriggers, P., “Combination of the critical displacement method with a damage model for structural instability analysis”, *Engineering Computations*, **18**, 3/4, 642–662, (2001).
- [O7] Oñate, E., “Derivation of the Secant Stiffness Matrix for Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Trusses”, CIMNE, Barcelona,
- [P1] Papadrakakis, M., *Solving Large-Scale Problems in Mechanics*, Chap. 7, John Wiley, (1993).
- [P2] Press, W.H., Vetterling, W.T., Teukolsky, S.A. & Flannery, B.P., *Numerical Recipes*, Chap.II. 2nd ed., Cambridge University Press, (1992).
- [R1] Rajasekaran, S. & Murray, D.W., “On incremental finite element matrices”, *J. Struct. Div.*, ASCE, **99**, 7423-38, (1973).
- [S1] Seydel, R., *From Equilibrium to Chaos*, Elsevier, New York, (1988).
- [T1] Thompson, J.M.T. & Hunt, G.W., “Towards a unified bifurcation theory”, *J. Appl. Math. Phys. (Z.A.M.P.)*, **26**, 581, (1975).
- [T2] Thompson, J.M.T. & Hunt, G.W., *Elastic Instability Phenomena*, Wiley, New York, (1984).
- [W1] Wood, R. D. & Schrefler, B., “Geometrically non-linear analysis – A correlation of finite element notations”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **12**, 635-42, (1978).
- [W2] Wriggers, P. & Simó, J.C., “A General procedure for the Direct Computation of Turning and Bifurcation Points”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **30**, 155-176, (1990).
- [Z1] Zeeman, E.C., *Catastrophe Theory: Selected Papers 1972-1977*, Addison-Wesley, London, (1977).
- [Z2] Zienkiewicz, O.C. & Taylor, R.L., *The Finite Element Method*, Vol. I, McGraw-Hill, (1991).

## CAPÍTULO VI

### **EPÍLOGO**

#### **VI. 1.– CONCLUSIONES**

En la recapitulación de este trabajo debemos significar que hemos dedicado los cinco capítulos precedentes a la exposición y discretización de un modelo clásico no lineal de viga Cosserat por medio del método de elementos finitos, utilizando las formulaciones Tangente y Secante.

Las dificultades inherentes a este tipo de estudios clásicos de la Mecánica hacen difíciles y muy laboriosos los avances significativos pero, al término de cada capítulo, hemos intentado sintetizar y resaltar las novedades de contenido o perspectiva que creemos haber aportado con nuestro trabajo, así como esbozar y señalar algunas vías que conviene abrir a nuevas y deseables investigaciones. Extractamos a continuación algunas de las aportaciones que consideramos más relevantes.

A partir de la definición de la viga Cosserat hecha en el capítulo I, hemos estudiado con detalle en el capítulo II algunos aspectos de las rotaciones finitas, introduciendo las nociones de espacio paramétrico  $E^N$  y de espacio de configuración  $\mathcal{E}$ , juntamente con los tensores fundamentales  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$  del espacio  $\mathcal{E}$ . Ahondando en estas cuestiones hemos analizado la composición paramétrica de rotaciones y su relación con la composición semitangencial de Argyris –que hemos generalizado– y la derivada objetiva de Simó. También hemos deducido una serie de propiedades generales de los tensores fundamentales y de sus derivadas de primero y segundo orden, y hemos visto que, además de dichas propiedades generales, los sistemas de parametrización que hemos denominado objetivos cumplen otras propiedades específicas que simplifican cálculos y demostraciones. Estas propiedades las hemos utilizado para desarrollar la formulación secante y tangente de las vigas Cosserat.

En el capítulo III, tras deducir las ecuaciones de equilibrio de la viga, hemos redefinido el concepto de momento en el espacio paramétrico partiendo de un

principio energético, y lo hemos puesto en relación con la clásica noción de momento en el espacio físico. También hemos establecido las condiciones para que un campo de momentos exteriores sea conservativo.

En el capítulo IV hemos desarrollado la formulación tangente de las vigas Cosserat probando que la asimetría de la matriz de rigidez tangente no es esencial y que ésta se puede simetrizar trabajando en el espacio paramétrico. En este espacio, como ya hemos apuntado, los momentos se definen con arreglo a criterios energéticos y no coinciden con los convencionales. En consecuencia, tanto la relación diferencial  $d\mathbf{P}=\mathbf{K}d\mathbf{q}$  como la propia matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$  adquieren un sentido ligeramente diferente al tradicional.

Partiendo de una formulación Lagrangiana Generalizada, hemos discretizado el modelo teórico de viga con elementos finitos y hemos calculado su matriz de rigidez tangente de dos formas: minimizando la energía potencial y aplicando directamente el Principio de los Trabajos Virtuales al sistema deformado. En este último caso, las ecuaciones incrementales de equilibrio son distintas según se interpolen los giros o los parámetros rotacionales. Quedan estudiadas ambas variantes y probada su equivalencia. En correspondencia con estos métodos, hemos elaborado tres modelos discretos completamente generales que aceptan cualquier tipo de parametrización de las rotaciones –incluyendo sistemas hiperparamétricos–, contemplan interpolaciones no lineales de las variables cinemáticas y admiten materiales elásticos no Hookianos o vigas de sección transversal variable.

De los ensayos realizados con distintos sistemas de parametrización de rotaciones –Rodrigues, natural, Euler-Rodrigues, ángulos de Euler y ángulos Cardan– y de interpolación de las variables cinemáticas –lineal y helicoidal–, se extraen las siguientes conclusiones prácticas:

a) Cuando las variables cinemáticas se interpolan linealmente y las rotaciones se parametrizan con el sistema natural, el método tangente de Newton-Raphson converge de forma más estable y más rápidamente.

b) De los cinco sistemas de parametrización ensayados, el clásico basado en los ángulos de Euler es el que peor se comporta de todos ellos, ya que contiene una singularidad en el origen; y el sistema tetraparamétrico de Euler-Rodrigues es el más

complejo y no ofrece ventajas apreciables respecto a los sistemas triparamétricos objetivos.

c) En las interpolaciones no lineales, las derivadas de las funciones de interpolación se calculan numéricamente. En estos casos, aunque parezca paradójico, el método iterativo tangente de Newton–Raphson es más estable y converge mejor cuando se desprecian estas derivadas y se trabaja con una matriz de rigidez tangente aproximada que cuando se tienen en cuenta y se trabaja con una matriz de rigidez exacta. Además es preferible una interpolación lineal con una fina discretización de la estructura, a una interpolación no lineal con una discretización más grosera y de menos elementos.

Adicionalmente hemos puesto a prueba en este capítulo un nuevo método de localización de puntos críticos basado en una descomposición  $\mathbf{LTL}^T$ , con una matriz  $\mathbf{L}$  triangular inferior y una matriz central  $\mathbf{T}$  tridiagonal, y hemos ensayado dos técnicas de estabilización del proceso iterativo de Newton-Raphson que mejoran la convergencia y permiten ampliar los incrementos de carga.

En el capítulo V hemos desarrollado en serie de Taylor la función de energía elástica y las matrices de rigidez secante y tangente del modelo discreto de viga, expresando los resultados en la forma compacta de Mallet y Marcal. A diferencia de otros sistemas más simples, en las vigas Cosserat los desarrollos en serie de Taylor constan de infinitos términos y no son manejables si no se truncan. Aprovechando la forma exponencial del operador rotación hemos calculado el término genérico de estos desarrollos en el sistema de parametrización natural y hemos esbozado teorías de alto orden, localmente secantes a partir de dichos desarrollos.

Estas teorías de alto orden las hemos utilizado para: a) Estabilizar el método de Newton-Raphson y obligarle a converger necesariamente a una solución estable. b) Localizar puntos críticos en un entorno próximo. c) Predecir a distancia la carga crítica de pandeo.

Ensayados varios métodos predictivos de la carga crítica basados en el *método del desplazamiento crítico*, los resultados obtenidos son desiguales; en general se predicen mejor los puntos límite que los puntos de bifurcación.

A diferencia de lo que ocurre cuando nos alejamos de un punto crítico, donde los desarrollos pueden converger mal, cuando nos encontramos en un pequeño entorno

del mismo, los desarrollos en serie reproducen muy bien y con muy pocos términos las características de no linealidad del sistema y son ideales para abordar por vía directa cualquier problema relacionado con su estabilidad, principalmente problemas de caracterización, apertura de ramas en puntos de bifurcación y determinación del grado de estabilidad o seguridad del sistema. Estos problemas quedan sólo apuntados y reclaman futuros trabajos de investigación que podrían orientarse hacia las cinco cuestiones que enumeramos seguidamente.

## **VI. 2.- NUEVAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN**

Para dar continuidad al trabajo aquí presentado, nos atrevemos a señalar escuetamente las líneas de investigación que, sin orden de prelación, convendría considerar y acometer en el futuro:

- 1) Ensayo de la formulación Secante y del método del desplazamiento crítico con un modelo corrotacional de viga.
- 2) Desarrollo de un modelo de viga de sección variable, aprovechando los resultados sistematizados en el capítulo IV.
- 3) Utilización de los desarrollos en serie de Taylor de la matriz Secante para elaborar una teoría general de apertura de trayectorias en puntos de bifurcación.
- 4) Realización de un estudio de caracterización de los puntos críticos, utilizando los resultados de la Teoría de la Catástrofe y los desarrollos en serie de Taylor de la función de energía.
- 5) Desarrollo de los métodos de Kröplin para la determinación del grado de estabilidad de una estructura, utilizando la técnica trazada en el capítulo V.

## APÉNDICES



## APÉNDICE I

### **EL ÁLGEBRA DE LOS OPERADORES ANTISIMÉTRICOS EN $E^3$**

Los operadores antisimétricos presentan una serie de propiedades notables que se utilizan constantemente en las demostraciones y desarrollos teóricos contenidos en los capítulos II y III. Para agilizar estas demostraciones y evitar recurrencias argumentales innecesarias, se estudian en este apéndice las propiedades singulares más importantes de estos operadores.

#### **AI. 1.— CARACTERÍSTICAS GENERALES**

Un operador antisimétrico del espacio  $E^3$  es una transformación lineal de matriz característica:

$$\tilde{\mathbf{v}} := \begin{bmatrix} 0 & -v^3 & v^2 \\ v^3 & 0 & -v^1 \\ -v^2 & v^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{AI.1})$$

El conjunto  $\text{so}(3)$  formado por todos los operadores antisimétricos  $\tilde{\mathbf{v}}$  de  $E^3$  constituye, por tanto, un subespacio vectorial de  $M_3(\mathbb{R})$  isomorfo al propio espacio  $E^3$ :

$$\tilde{\mathbf{v}} \leftrightarrow \mathbf{v} (v^1, v^2, v^3)$$

El resultado de aplicar la transformación lineal  $\tilde{\mathbf{v}}$  a un vector arbitrario  $\mathbf{r}$  de  $E^3$  es el producto vectorial del vector  $\mathbf{v} (v^1, v^2, v^3)$  con  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{v} \times \mathbf{r} = \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{r} \quad \forall \mathbf{r} \in E^3 \quad (\text{AI.2})$$

Esta relación analógica entre los operadores antisimétricos y el producto vectorial explica una serie de propiedades notables; entre ellas, la ley de antimetría:

$$\tilde{\mathbf{v}} \mathbf{r} = \mathbf{v} \times \mathbf{r} = -\mathbf{r} \times \mathbf{v} = -\tilde{\mathbf{v}} \mathbf{r} \quad (\text{AI.3})$$



y las propiedades que se recogen en la segunda columna de la siguiente tabla.

Operación vectorial	Operador correspondiente	(AI.3)
$\mathbf{v} \times \mathbf{r}$	$\tilde{\mathbf{v}}$	(AI.4)
$\mathbf{v} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{v}^T \mathbf{r}) \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{v}^T \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}$	$\tilde{\mathbf{v}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{v} - (\mathbf{v}^T \boldsymbol{\omega}) \mathbf{I}$	(AI.5)
$\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{v}^T \mathbf{r}) \mathbf{v} - v^2 \mathbf{r}$	$\tilde{\mathbf{v}}^2 = \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - v^2 \mathbf{I}$	(AI.6)
$(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r} = (\mathbf{v}^T \mathbf{r}) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{r}) \mathbf{v}$	$(\tilde{\mathbf{v}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}) = \boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \boldsymbol{\omega}$	(AI.7)
$(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r} = \mathbf{v} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$	$(\tilde{\mathbf{v}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}) = \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\mathbf{v}}$	(AI.8)
$\underbrace{\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times (\dots (\mathbf{v} \times \mathbf{r})))}_{n \text{ ( impar ) veces}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} v^{n-1} \mathbf{v} \times \mathbf{r}$ $\underbrace{\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times (\dots (\mathbf{v} \times \mathbf{r})))}_{n \text{ ( par ) veces}} = (-1)^{\frac{n-2}{2}} v^{n-2} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r})$	$\tilde{\mathbf{v}}^n = \begin{cases} n \text{ impar:} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} v^{n-1} \tilde{\mathbf{v}} \\ n \text{ par :} \\ (-1)^{\frac{n-2}{2}} v^{n-2} \tilde{\mathbf{v}}^2 \end{cases}$	(AI.9)

Tabla AI.1

Los operadores antisimétricos constituyen además un álgebra de Lie sobre  $\mathbb{R}$  para el siguiente producto interno  $[\cdot, \cdot]$ :

$$[\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}] = \tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{b}} - \tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{a}} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

pues cumplen las dos propiedades características de estas álgebras [B1, D1, K1]:

- 1)  $[\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}] = -[\tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{a}}]$  (anticonmutatividad) (AI.10.a)
- 2)  $[[\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}] \tilde{\mathbf{c}}] + [[\tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{c}}] \tilde{\mathbf{a}}] + [[\tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{a}}] \tilde{\mathbf{b}}] = \mathbf{0}$  (identidad de Jacobi) (AI.10.b)

Este producto interno establece de paso una curiosa relación isomórfica entre los grupos  $\{\text{so}(3); [ , ]\}$  y  $\{\mathbf{E}^3; \times\}$ :

$$\mathbf{a} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{a}} \quad \mathbf{b} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{b}} \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \leftrightarrow [\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}]$$

Los operadores  $\tilde{\mathbf{v}}$  tienen naturaleza tensorial. En efecto, admitiendo que (AI.1) representa el conjunto de componentes covariantes de  $\tilde{\mathbf{v}}$  en la base canónica de  $\mathbf{E}^3$ , se tiene.

$$\tilde{v}_{ij} := \epsilon_{ijk} v^k \quad \therefore \quad [\mathbf{v} \times \mathbf{r}]_i = \tilde{v}_{ij} r^j \quad (\text{AI.11})$$

siendo  $\epsilon_{ijk}$  el símbolo de permutación de Kronecker: igual a 0 si dos subíndices coinciden, igual a +1 si la permutación (i, j, m) de la sucesión (1, 2, 3) es par, e igual a -1 si esta permutación es impar. Las dos expresiones (AI.1) son válidas únicamente si la base de referencia del espacio es ortonormal; sin embargo, se pueden generalizar a cualquier sistema de referencia considerando la definición tensorial del producto vectorial [L1, S1]:

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{r})_i := \epsilon_{ijk} v^k r^j \quad \therefore \quad (\mathbf{v} \times \mathbf{r})^i = g^{im} \epsilon_{mjk} v^k r^j \quad (\text{AI.12.a})$$

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{r})_i := \epsilon_{ijk} v^k r^j \quad \therefore \quad (\mathbf{v} \times \mathbf{r})^i = g^{im} \epsilon_{mjk} v^k r^j \quad (\text{AI.12.b})$$

donde  $\epsilon_{ijk}$  es el tensor de Ricci de tercer orden covariante:  $\epsilon_{ijk} = \sqrt{|G|} e_{ijk}$  (se denotan, como de costumbre,  $v_i$  e  $v^i$  a las componentes covariantes y contravariantes de un vector cualquiera  $\mathbf{v}$ , y  $|G|$  al determinante del tensor métrico  $g_{ij}$ ).

De (AI.12) y (AI.2) se extraen las componentes covariantes y mixtas de  $\tilde{\mathbf{v}}$ , que prueban finalmente el carácter tensorial del operador:

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{r})_i = \tilde{v}_{ij} r^j \quad \tilde{v}_{ij} = \epsilon_{ijk} v^k = \sqrt{|G|} e_{ijk} v^k \quad (\text{AI.13.a})$$

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{r})^i = \tilde{v}^i_j r^j \quad \tilde{v}^i_j = g^{im} \epsilon_{mjk} v^k = \sqrt{|G|} e_{ijk} g^{im} v^k \quad (\text{AI.13.b})$$

Cuando se cambia el sistema de referencia de  $E^3$ , pasando de una base inicial  $\mathbf{e}$  a otra  $\mathbf{e}'$  por medio de una transformación  $\mathbf{A}$ , las componentes contravariantes de un vector  $\mathbf{r}$  se transforman así:

$$\mathbf{e}'_i = A^j_i \mathbf{e}_j \quad \mathbf{r}'^i = B^i_j \mathbf{r}^j \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-T}$$

y las componentes covariantes y mixtas del tensor  $\tilde{\mathbf{v}}$  de este otro modo:

$$\tilde{\mathbf{v}}'^i_j = B^i_k \tilde{\mathbf{v}}^k_n A^n_j \quad (\tilde{\mathbf{v}}' = \mathbf{B} \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{B}^{-1}) \quad (\text{AI.14.a})$$

$$\tilde{\mathbf{v}}'_{ij} = A^k_i \tilde{\mathbf{v}}_{kn} A^n_j \quad (\tilde{\mathbf{v}}' = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{A}^T) \quad (\text{AI.14.b})$$

Restringiendo los cambios de base al grupo de rotaciones ( $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{R}$ ), esta regla se transforma en ambos casos en la siguiente relación de congruencia:

$$\tilde{\mathbf{v}}' = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{R}^T \quad (\text{AI.15})$$

Si en vez de cambiar de base, transformamos el propio vector  $\mathbf{v}$  por medio de  $\mathbf{A}$ , obtenemos otra relación notable. En este caso, dado que el producto mixto de tres vectores  $(\mathbf{z} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{r}$  es igual al volumen  $\rho$  del paralelepípedo que forman  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{r}$ , al transformar estos vectores este volumen cambia, y su variación viene dada por el Jacobiano o determinante de la propia transformación lineal  $\mathbf{A}$ , teniéndose:

$$\rho = \mathbf{z}^T \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{r} \quad \therefore \quad \rho' = \mathbf{z}'^T \tilde{\mathbf{v}}' \mathbf{r}' = |\mathbf{A}| \rho$$

Ahora bien, como, 
$$\rho' = [\mathbf{A}\mathbf{z}]^T [\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{v}] [\mathbf{A}\mathbf{r}]$$

necesariamente, se cumplirá: 
$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{v} = |\mathbf{A}| \mathbf{B} \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{B}^T \quad (\text{AI.16})$$

o, si se prefiere, 
$$\mathbf{A}^{-T} \mathbf{v} = |\mathbf{A}| \tilde{\mathbf{v}}'$$

A la misma conclusión se llega por vía tensorial teniendo en cuenta que el producto contraído  $\sqrt{|G|} e_{ijk} g^{im} v^k z^i r^j$  es un invariante y el determinante del tensor métrico se transforma de acuerdo con la regla:  $|G'| = |\mathbf{A}|^2 |G|$ .

Si  $\mathbf{A}$  es una rotación:  $\mathbf{A} = \mathbf{R}$ , como  $|\mathbf{R}| = 1$  y  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ , el resultado (AI.16) se transforma en:

$$\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{v} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{R}^T \tag{AI.17}$$

A este resultado se llega también mediante un sencillo razonamiento geométrico. Basta observar en la figura AI.1 cómo el producto vectorial  $\tilde{\mathbf{v}}$  se transforma del mismo modo al aplicarle un giro  $\theta$  a la base de referencia, manteniendo  $\mathbf{v}$  fijo, que al aplicarle el giro contrario  $-\theta$  a  $\mathbf{v}$ , manteniendo ahora fija la base de referencia [B2].

La expresión (AI.7) se puede generalizar a una potencia  $k$ -ésima de  $\tilde{\mathbf{v}}$ ; en efecto:

$$[\mathbf{R}\mathbf{v}]^2 = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{R}^T \mathbf{R} \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{v}}^2 \mathbf{R}^T$$

y en general, 
$$[\mathbf{R}\mathbf{v}]^k = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{v}}^k \mathbf{R}^T \tag{AI.18}$$

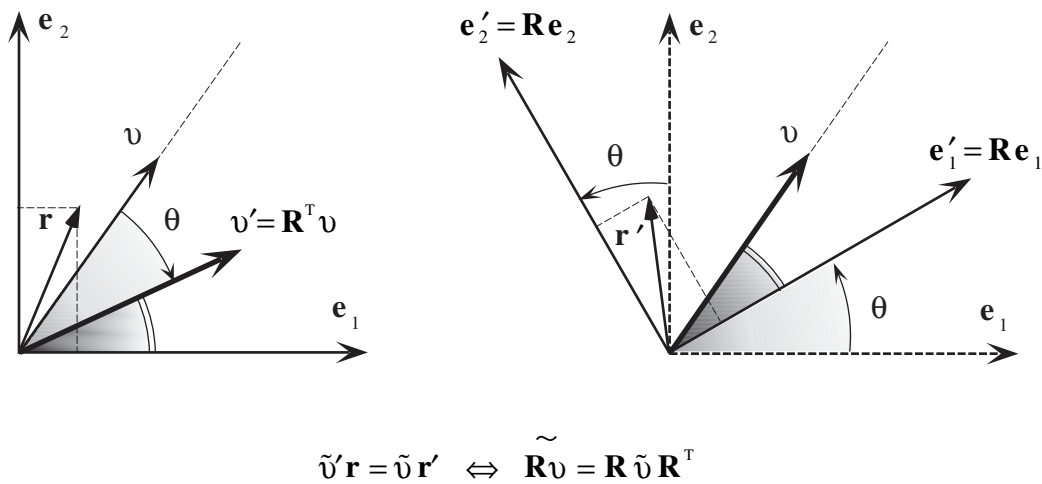


Figura AI.1.

*Comprobación en el plano de la relación AI.15*

**AI. 2.– EL SEMIGRUPO  $\mathcal{J}$**

En los sistemas más simples de parametrización de las rotaciones, el operador  $\mathbf{R}$  suele expresarse como una combinación lineal del operador identidad  $\mathbf{I}$ , el operador antisimétrico  $\tilde{\mathbf{v}}$  y el producto diádico  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ . Como el producto es cerrado y conmutativo para este reducido grupo de operadores –tabla AI.2–, las operaciones algebraicas dentro del grupo suelen ser simples y los desarrollos muy sencillos, de ahí la importancia de estos sistemas de parametrización en la teoría de rotaciones. A continuación vamos a estudiar las propiedades más interesantes de estos operadores.

	$\mathbf{I}$	$\tilde{\mathbf{v}}$	$\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$	$\tilde{\mathbf{v}}$	$\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$
$\tilde{\mathbf{v}}$	$\tilde{\mathbf{v}}$	$\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - v^2 \mathbf{I}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$	$\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$	$\mathbf{0}$	$v^2 \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$

Tabla AI.2

La tabla AI.2 muestra que el subespacio vectorial de  $M_3(\mathbb{R})$  que definen los vectores básicos  $\{\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}\}$  tiene estructura algebraica de *semigrupo conmutativo* con elemento unidad (monoide) para la ley de composición producto [K1]. En lo sucesivo, denotaremos este semigrupo con el símbolo  $\mathcal{J}$ . Sin embargo, no tiene estructura algebraica de grupo, por no tener todos sus elementos inverso –por ejemplo,  $\tilde{\mathbf{v}}$  y  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$  carecen de inverso por ser singulares. No obstante, si alguno de los elementos  $a$  de  $\mathcal{J}$  posee inverso en  $M_3(\mathbb{R})$  éste pertenecerá necesariamente a  $\mathcal{J}$ . Para comprobarlo, admitamos que esto es cierto y, por tanto, que todo inverso  $a^{-1}$  es una combinación lineal de los operadores  $\mathbf{I}$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}$  y  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ . En este supuesto, resulta sencillo calcularlo. En efecto, si  $a = a\mathbf{I} + b\tilde{\mathbf{v}} + c\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$  y  $a^{-1} = \xi\mathbf{I} + \eta\tilde{\mathbf{v}} + \zeta\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ , como el producto de ambos debe ser igual a  $\mathbf{I}$ , se tendrá:

$$\mathbf{I} = a a^{-1} = (a\xi - b\eta v^2)\mathbf{I} + (b\xi + a\eta)\tilde{\mathbf{v}} + (c\xi + b\eta + a\zeta + c\zeta v^2)\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$$

o, lo que es lo mismo,  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\zeta$  deben satisfacer el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 1 &= a\xi - b\nu^2\eta \\ 0 &= b\xi + a\eta \\ 0 &= c\xi + b\eta + (a + c\nu^2)\zeta \end{aligned}$$

Este sistema carece de solución si  $a = b = 0$  ó  $a = -c\nu^2$ , casos extremos en los que  $a$  coincide con uno de los operadores singulares:  $c\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ ,  $c\tilde{\mathbf{v}}$  ó  $c\tilde{\mathbf{v}}^2$ ; si no se dan estas circunstancias, el elemento  $a$  posee el siguiente inverso  $a^{-1}$ :

$$a = a\mathbf{I} + b\tilde{\mathbf{v}} + c\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \quad \therefore \quad a^{-1} = \xi\mathbf{I} + \eta\tilde{\mathbf{v}} + \zeta\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \quad (\text{AI.19})$$

$$\xi = \frac{a}{a^2 + \nu^2 b^2} \quad \therefore \quad \eta = \frac{-b}{a^2 + \nu^2 b^2} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{b^2 - ac}{(a + \nu^2 c)(a^2 + \nu^2 b^2)}$$

Del mismo modo, es inmediato probar que son inversos los operadores siguientes:

$$a = a\mathbf{I} + b\tilde{\mathbf{v}} + c\tilde{\mathbf{v}}^2 \quad \therefore \quad a^{-1} = \xi\mathbf{I} + \eta\tilde{\mathbf{v}} + \zeta\tilde{\mathbf{v}}^2 \quad (\text{AI.20})$$

$$\xi = \frac{1}{a} \quad \therefore \quad \eta = \frac{-b}{b^2\nu^2 + (a - c\nu^2)^2} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{b^2 - c(a - c\nu^2)}{a(b^2\nu^2 + (a - c\nu^2)^2)}$$

Estas reglas de inversión son muy útiles y se usan con frecuencia en el capítulo II y apéndice IV para invertir una serie de operadores pertenecientes a  $\mathcal{J}$ . Naturalmente, las dos reglas son equivalentes y la relación entre ellas inmediata si se considera que  $\{\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{v}}^2\}$  es una base alternativa de  $\mathcal{J}$  y que cualquier elemento  $\mathbf{v}$  del semigrupo se puede escribir de estas dos formas equivalentes:

$$a\mathbf{I} + b\tilde{\mathbf{v}} + c\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \quad \text{y} \quad (a - c\nu^2)\mathbf{I} + b\tilde{\mathbf{v}} + c\tilde{\mathbf{v}}^2 \quad (\text{AI.21})$$

La segunda es particularmente interesante, ya que caracteriza al conjunto  $\mathcal{J}$  como aquél que agrupa a todas las transformaciones lineales *transversalmente isótropas con relación al plano normal a  $\mathbf{v}$* —es claro que hay tantos semigrupos  $\mathcal{J}$  como direcciones en el espacio—. Una transformación transversalmente isótropa con relación a un plano

$\pi_{\mathbf{v}}$  es aquella que transforma por igual todas las direcciones de  $\pi_{\mathbf{v}}$ ; más concretamente, aquella cuya matriz característica  $\mathbf{A}$  verifica, para toda rotación  $\mathbf{R}_{\mathbf{v}}$  de eje  $\mathbf{v}$ ,

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_{\mathbf{v}} \mathbf{A} \mathbf{R}_{\mathbf{v}}^T \quad (\text{AI.22})$$

Que los operadores (AI.21) verifican esta propiedad y representan por tanto transformaciones transversalmente isótropas, se desprende de (AI.17) y (AI.18). La inversa también es cierta: toda transformación transversalmente isótropa con relación a  $\pi_{\mathbf{v}}$  es del tipo (AI.21). Comprobémoslo.

Si se cumple (AI.22), el plano  $\pi_{\mathbf{v}}$  se transforma en sí mismo mediante  $\mathbf{A}$ . En efecto, siendo  $\mathbf{z}$  un vector arbitrario de este plano y  $\mathbf{R}_{\mathbf{v}}$  una rotación completa de  $\pi$  radianes en torno a  $\mathbf{v}$ , se tendrá:

$$\lambda = \mathbf{v} \mathbf{A} \mathbf{z} = \mathbf{v} \mathbf{R}_{\mathbf{v}} \mathbf{A} \mathbf{R}_{\mathbf{v}}^T \mathbf{z} = \mathbf{v} \mathbf{A} (-\mathbf{z}) = -\lambda$$

esto es,  $\lambda = 0$  y  $\mathbf{A} \mathbf{z}$  y  $\mathbf{v}$  son ortogonales. Además,  $\mathbf{v}$  es un autovector de  $\mathbf{A}$ , ya que

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \mathbf{R}_{\mathbf{v}} \mathbf{A} \mathbf{R}_{\mathbf{v}}^T \mathbf{v} = \mathbf{R}_{\mathbf{v}} \mathbf{A} \mathbf{v}$$

y los únicos autovectores reales de  $\mathbf{R}_{\mathbf{v}}$  son los vectores  $\lambda \mathbf{v}$ .

En definitiva, los operadores (AI.22) dejan invariables el eje  $\mathbf{v}$  y el plano normal  $\pi_{\mathbf{v}}$ , y pueden descomponerse en dos transformaciones lineales independientes: una dilatación –positiva o negativa– en la dirección del  $\mathbf{v}$  y una transformación del plano  $\pi_{\mathbf{v}}$ . Como esta última, a su vez, cumple también (AI.22), debe ser independiente de la orientación del sistema de referencia y sólo puede tratarse del producto de una rotación por una dilatación del propio plano  $\pi_{\mathbf{v}}$ . La conclusión final es que toda transformación transversalmente isótropa con relación a  $\pi_{\mathbf{v}}$  es el producto de tres transformaciones lineales básicas: una dilatación transversal isótropa del plano  $\pi_{\mathbf{v}}$ , una dilatación longitudinal y una rotación, ambas de eje  $\mathbf{v}$ , y como éstas pertenecen a  $\mathcal{J}$  – tabla AI.3–, aquella también pertenecerá a  $\mathcal{J}$ .

Algebraicamente, esta triple descomposición se puede expresar así:

$$\mathbf{A} = a\mathbf{I} + b\tilde{\mathbf{v}} + c\tilde{\mathbf{v}}^2 = \left[ a\mathbf{I} + \frac{d}{v^2}\tilde{\mathbf{v}}^2 \right] \left[ \mathbf{I} + \frac{e}{v^2}\tilde{\mathbf{v}}^2 \right] \left[ \mathbf{I} + \frac{g}{v}\tilde{\mathbf{v}} + \frac{h}{v^2}\tilde{\mathbf{v}}^2 \right] \quad (\text{AI.23})$$

con 
$$d = a - 1 \quad \therefore \quad e = 1 - \lambda \quad \therefore \quad g = \frac{b}{\lambda} \quad \therefore \quad h = \frac{c v^2 - a + \lambda}{\lambda}$$

y 
$$\lambda = \sqrt{|a^2 + v^2(b^2 - 2ac) + v^4 c^2|} > 0$$

Es fácil comprobar que los tres factores de (AI.23) representan un alargamiento a en la dirección  $\mathbf{v}$ , una dilatación transversal  $\lambda$  del plano  $\pi_v$ , y una rotación de eje  $\mathbf{v}$ . Estas transformaciones se recogen en las tablas AI.3 y AI.4 en las que se muestran además los casos singulares que se dan cuando la dilatación volumétrica es nula y todo el espacio se proyecta sobre el eje  $\mathbf{v}$  o sobre el plano  $\pi_v$ :  $\lambda = 0$  ó  $a = 0$ .

Alargamiento a en la dirección $\mathbf{v}$	$a \mathbf{I} + \frac{a-1}{v^2} \tilde{\mathbf{v}}^2 \quad (a > 0)$
Dilatación transv. isótropa $\lambda$ de $\pi_v$	$\mathbf{I} + \frac{1-\lambda}{v^2} \tilde{\mathbf{v}}^2 \quad (\lambda > 0)$
Rotación de eje $\mathbf{v}$	$\mathbf{I} + g \tilde{\mathbf{v}} + h \tilde{\mathbf{v}}^2 \quad (g^2 = 2h - v^2 h^2)$
Dil. trans. + dil. long. + rotación	$a \mathbf{I} + b \tilde{\mathbf{v}} + c \tilde{\mathbf{v}}^2$

Tabla AI.3: principales transformaciones regulares en  $\mathcal{J}$

Proyección sobre el plano $\pi$	$-\frac{1}{v^2} \tilde{\mathbf{v}}^2$
Proyección sobre el eje $\mathbf{v}$	$\frac{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}{v^2} = \mathbf{I} + \frac{1}{v^2} \tilde{\mathbf{v}}^2$
Proyección sobre el plano $\pi$ y giro de 90 grados	$\frac{1}{v} \tilde{\mathbf{v}}$

Tabla AI.4: principales transformaciones singulares en  $\mathcal{J}$



En el capítulo II se definen los *sistemas triparamétricos objetivos* como aquéllos en los que al girar el sistema de referencia los parámetros de una rotación se transforman del mismo modo que las componentes de un vector, esto es, los que cumplen:  $\alpha(\mathbf{R}\mathbf{v}) = \mathbf{R}\alpha(\mathbf{v})$  –(II.8)–. En estos sistemas, las componentes de cualquier tensor de segundo orden  $\mathbf{H}$  dependiente de un vector de parámetros  $\alpha$  verifican la siguiente *transformación objetiva* al girar el sistema de referencia:

$$\mathbf{H}(\mathbf{R}\alpha) = \mathbf{R}\mathbf{H}(\alpha)\mathbf{R}^T \quad \forall \mathbf{R}, \alpha \quad (\text{AI.24})$$

Evidentemente, al cumplir (AI.24) cumplen también (AI.22), pues basta sustituir  $\mathbf{R}$  por una rotación  $\mathbf{R}_\alpha$  de eje  $\alpha$  para probarlo. Por tanto, en un sistema triparamétrico objetivo, todo tensor de segundo orden  $\mathbf{H}(\alpha)$  representa una transformación isótropa en un plano, que puede escribirse

$$\mathbf{H} = f(\alpha^2)\mathbf{I} + g(\alpha^2)\tilde{\alpha} + h(\alpha^2)\tilde{\alpha}^2 \quad (\text{AI.25})$$

(Nótese que para que  $\mathbf{H}$  sea realmente un tensor, las funciones escalares  $f$ ,  $g$  y  $h$  deben ser invariantes al girar el sistema de referencia, y por tanto sólo pueden depender del módulo del vector  $\alpha$ , o, si se prefiere, del producto escalar  $\alpha^2 = \alpha^T\alpha$ ).

En conclusión, en un sistema objetivo, el operador rotación  $\mathbf{R}$  y todos los tensores de segundo orden derivados de él, como son los operadores  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{F}^*$  y  $\mathbf{G}^*$  del capítulo II, son elementos de  $\mathcal{J}$  y esta pertenencia no es un hecho casual y fortuito, sino que viene obligada por la propia naturaleza del sistema de parametrización. La ventaja fundamental de los sistemas objetivos de parametrización es que aprovechan las bondades operativas que ofrece el semigrupo  $\mathcal{J}$  donde, como se ha podido comprobar, las operaciones algebraicas básicas resultan bastante simples y conducen casi siempre a resultados sencillos.

Una propiedad interesante que se desprende directamente de (AI.25) y cumplen por tanto  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{F}^*$ ,  $\mathbf{G}^*$  y  $\mathbf{R}$  en un sistema objetivo, es la siguiente:

$$\mathbf{H}(-\alpha) \equiv \mathbf{H}^T(\alpha) \quad (\text{AI.26})$$

En el caso particular de resultar  $\mathbf{H}$  una rotación o una dilatación transversal isótropa, se tiene además  $f(\alpha^2) \equiv 1$  –Tabla AI.3–, y la expresión (AI.25) se reduce a

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{I} + g(\alpha^2) \tilde{\boldsymbol{\alpha}} + h(\alpha^2) \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^2 \quad (\text{AI.27})$$

En todos estos casos, si las funciones  $h$  y  $g$  son analíticas en un entorno del punto  $\alpha = 0$ , se pueden desarrollar en serie de potencias de  $\alpha^2$ ,

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{I} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \alpha^{2n} \right) \tilde{\boldsymbol{\alpha}} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \alpha^{2n} \right) \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^2$$

y transformando los términos  $\alpha^{2n} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}$  y  $\alpha^{2n} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^2$  en  $(-1)^{n/2} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{2n+1}$  y  $(-1)^{n/2} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{2n+2}$ , por aplicación directa de la regla (AI.9), se obtiene un desarrollo de  $\mathbf{H}$  en serie de potencias del operador antisimétrico  $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ :

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{I} + c_1 \tilde{\boldsymbol{\alpha}} + c_2 \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^2 + c_3 \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^3 + \dots \quad (\text{AI.28})$$

En ocasiones, los coeficientes de este desarrollo pueden resultar familiares. Por ejemplo, en el Apéndice II se prueba que en el sistema de parametrización natural los coeficientes  $c_i$  de una rotación coinciden con los coeficientes del desarrollo en serie de Taylor de la función exponencial.

Se obtienen resultados parecidos si a la rotación y dilatación transversal se les añade una dilatación longitudinal, siempre y cuando ésta sea constante:  $f(\alpha^2) \equiv c_0$ , en cuyo caso el desarrollo adopta la forma siguiente,

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\alpha}) = c_0 \mathbf{I} + c_1 \tilde{\boldsymbol{\alpha}} + c_2 \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^2 + c_3 \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^3 + \dots \quad (\text{AI.29})$$

Como la inversa también es cierta: todo desarrollo convergente de la forma (AI.29) puede reducirse a una expresión del tipo (AI.25), la propiedad de ser desarrollable un operador  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\alpha})$  en la forma (AI.29) caracteriza el conjunto de las transformaciones transversalmente isótropas con dilatación axial constante, dependientes de un vector  $\boldsymbol{\alpha}$ :

$$D : \{ \mathbf{H}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{J} \mid \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{H}(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\alpha} = c_0 \alpha^2 \} \quad (\text{AI.30})$$

Fuera del conjunto  $D$ , ninguna otra transformación cumple esta propiedad.

**AI. 3.– RELACIÓN ENTRE LOS OPERADORES R Y G EN EL SEMIGRUPO  $\mathcal{J}$**

Un operador que desempeña un papel esencial en el estudio de las rotaciones finitas y se utiliza constantemente a lo largo de este trabajo es el operador básico  $\mathbf{G}$ . Éste puede definirse algebraicamente del siguiente modo:

$$d\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \overline{\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\alpha}}$$

Denotando  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\mathbf{e}$  al módulo y al vector unitario de la rotación  $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{e}$ , si el operador rotación  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha})$  pertenece a  $\mathcal{J}$ , se podrá escribir también así:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{I} + g(\alpha)\tilde{\mathbf{e}} + h(\alpha)\tilde{\mathbf{e}}^2$$

con la condición adicional  $h^2 + g^2 = 2h$ .

El producto  $d\mathbf{R}\mathbf{R}^T$  se puede ahora calcular directamente, y tras sustituir  $\tilde{\mathbf{e}}^3$  y  $\tilde{\mathbf{e}}^4$  por  $-\tilde{\mathbf{e}}$  y  $-\tilde{\mathbf{e}}^2$ , teniendo además en cuenta que  $h'h + g'g = h'$  y que  $\mathbf{e} \cdot d\mathbf{e} = 0$ , queda:

$$d\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \frac{h'}{g}\tilde{\mathbf{e}} d\alpha + g d\tilde{\mathbf{e}} + h(\tilde{\mathbf{e}}d\tilde{\mathbf{e}} - d\tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}}) \tag{AI.31}$$

( $g'$  y  $h'$  representan las derivadas de  $g$  y  $h$  con relación a la variable  $\alpha$ ). Ahora bien, como de acuerdo con (AI.8),

$$\tilde{\mathbf{e}}d\tilde{\mathbf{e}} - d\tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{e}}d\mathbf{e},$$

identificando el segundo miembro de (AI.31) con  $\overline{\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\alpha}}$ , se obtienen dos condiciones que debe satisfacer  $\mathbf{G}$  (téngase en cuenta que  $d\boldsymbol{\alpha} = d\alpha\mathbf{e} + \alpha d\mathbf{e}$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})\alpha d\mathbf{e} &= (g+h\tilde{\mathbf{e}})d\mathbf{e} \\ \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{e} &= \frac{h'}{g}\mathbf{e} \end{aligned}$$

(nótese que en la primera de es un vector arbitrario ortogonal a  $\mathbf{e}$ )

Y de estas condiciones se extrae el operador  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{h'}{g} \mathbf{I} + \frac{h}{\alpha} \tilde{\mathbf{e}} + \left[ \frac{h'}{g} - \frac{g}{\alpha} \right] \tilde{\mathbf{e}}^2 \quad (\text{AI.32})$$

Esta expresión se ha deducido suponiendo que  $\mathbf{R}$  pertenecía  $\mathcal{T}$  y por tanto venía dado por (AI.27); si esta condición no se cumple, deja de ser cierta (AI.32), como es fácil probar con ejemplos. Sin embargo, si  $\mathbf{R} \in \mathcal{T}$ , son válidas (AI.27) y (AI.32), y de ellas se desprende la siguiente relación entre  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{I} + \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) \quad (\text{AI.33})$$

#### AI. 4.– REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- [B1] Bahturin, Y.A., *Basic Structures of Modern Algebra*, Kluwer Academic, Dordrecht, (1993).
- [B2] Bottema, O. & Roth, B., *Theoretical Kinematics*, North-Holland, Amsterdam, (1979). Reeditado por Dover Publications, Inc. New York, (1990).
- [D1] Dieudonné, J.A., *Special Functions and Linear Representations of Lie Groups*. (CBMS, Regional Conference Series in Mathematics, nº 42), *American Mathematical Society*, Providence, Rhode Island, (1980).
- [K1] Kostrikin, A., *Introducción al Álgebra*. Ed. Mir, Moscú, (1979).
- [L1] Lichnerowicz, A., *Elementos de Cálculo Tensorial*. Ed. Aguilar, Madrid, (1972).
- [S1] Sokolnikoff, I.S., *Análisis Tensorial*. Ed. Index-Prial, Madrid, (1971).



## APÉNDICE II

### **PARAMETRIZACIÓN DE ROTACIONES 3D**

En el capítulo II se clasificaron los sistemas de parametrización de las rotaciones atendiendo al número de parámetros y al carácter objetivo o no de los mismos. La clasificación se limitó a los más importantes, incluyendo la mayoría de los sistemas utilizados hoy en día en los diversos campos de la Ciencia y la Técnica, desde la robótica industrial y aeronáutica a la mecánica cuántica.

Dado que el estudio algebraico y geométrico de estos sistemas se ha abordado con extensión en numerosas publicaciones, en este apéndice nos limitamos a presentar y resumir las propiedades más importantes de cada uno de ellos, remitiendo al lector, para más detalles, a la selección bibliográfica anexa a este mismo apéndice.

#### **AII. 1.- INTRODUCCIÓN**

Para definir una rotación en el espacio se precisan al menos tres parámetros. Los sistemas con este número mínimo de parámetros –*triparamétricos*– son los más sencillos y prácticos porque, aparte de resultar intuitivos, sus propiedades pueden demostrarse geoméricamente. No ocurre así con los hiperparamétricos, con un número de parámetros  $s > 3$ , más abstractos y cuyas propiedades se deducen sólo por vía algebraica –en seguida se verá la diferencia entre un vector y un cuaternio y sus consecuencias en el cálculo operacional con rotaciones–.

En los triparamétricos es importante distinguir además los sistemas objetivos vectoriales –simples e intuitivos– de los no objetivos, relacionados con problemas muy concretos, y que por razones históricas en las que no entramos han sido los más utilizados en Mecánica hasta las últimas décadas; como veremos, éstos son generalmente sistemas de descomposición de una rotación en otras más simples. De todos ellos nos ocupamos a continuación, comenzando por estos últimos.

## AII. 2.– SISTEMAS DE DESCOMPOSICIÓN EN ROTACIONES ELEMENTALES

En Mecánica Clásica se utilizan frecuentemente los ángulos de Euler para orientar un sólido en el espacio. Estos ángulos  $(\phi, \theta, \psi)$  –*precesión, nutación y giro propio*– corresponden a tres rotaciones sucesivas e independientes alrededor de los ejes  $OZ'$ – $OX'$ – $OZ'$  de un triedro de referencia móvil unido rígidamente al sólido –figura AII.1.a–. Cuando las rotaciones son muy pequeñas, los ángulos  $\phi$  y  $\psi$  tienden a confundirse, debido a que el eje  $OZ$  apenas varía con  $\theta$ . En estos casos es preferible utilizar un sistema de orientación en el que intervengan los tres ejes del triedro, y no sólo dos ( $OX'$ – $OZ'$ ) como en el caso anterior. Entre éstos el más conocido es el sistema Cardan, que consiste en tres giros consecutivos  $(\theta, \phi, \phi)$  –*guiñada, inclinación y balanceo*– alrededor de los ejes  $OX'$ – $OY'$ – $OZ'$ , como muestra la figura AII.1.b, aunque algunas veces se prefiere esta otra secuencia de ejes de giro:  $OZ'$ – $OY'$ – $OX'$ .

En esencia, estos sistemas de orientación descomponen una rotación en tres giros elementales en torno a los ejes de un triedro que se mueve solidario con el cuerpo, de modo que toda rotación  $\alpha$  se obtiene sumando secuencialmente estos tres giros elementales, y su operador asociado  $\mathbf{R}_\alpha$  calculando el producto ordenado de los operadores correspondientes a los giros en que ha quedado descompuesta aquélla. En concreto, para los ángulos de Euler y Cardan, se tiene [G1, K1, S1]:

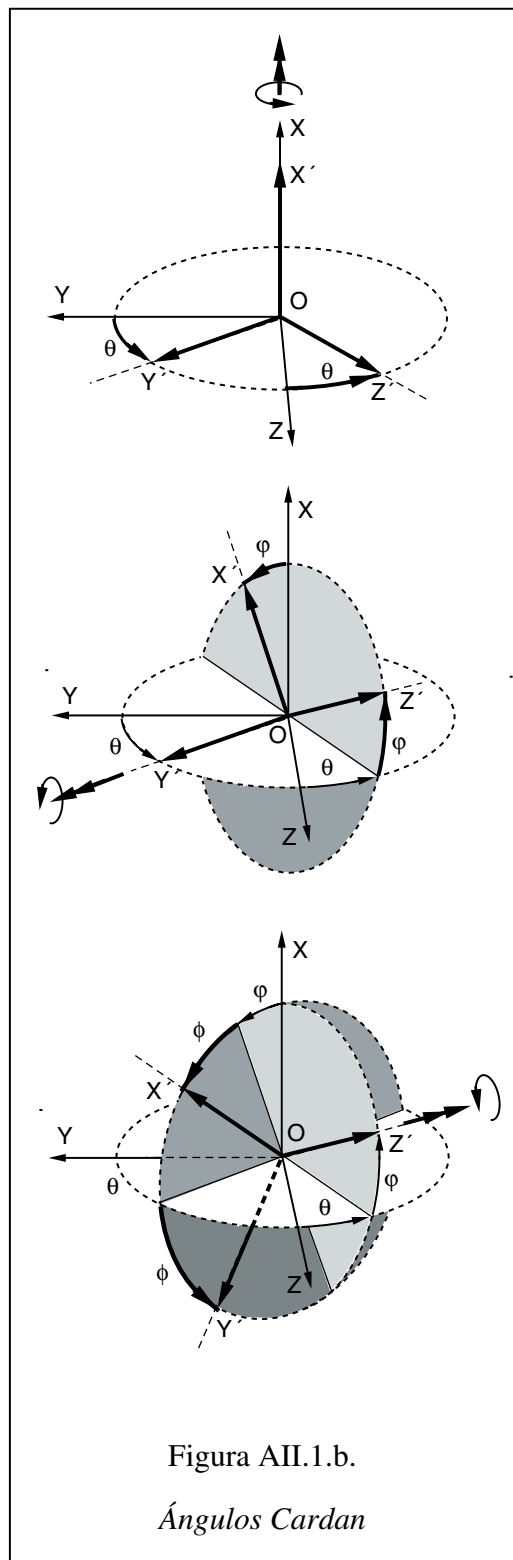
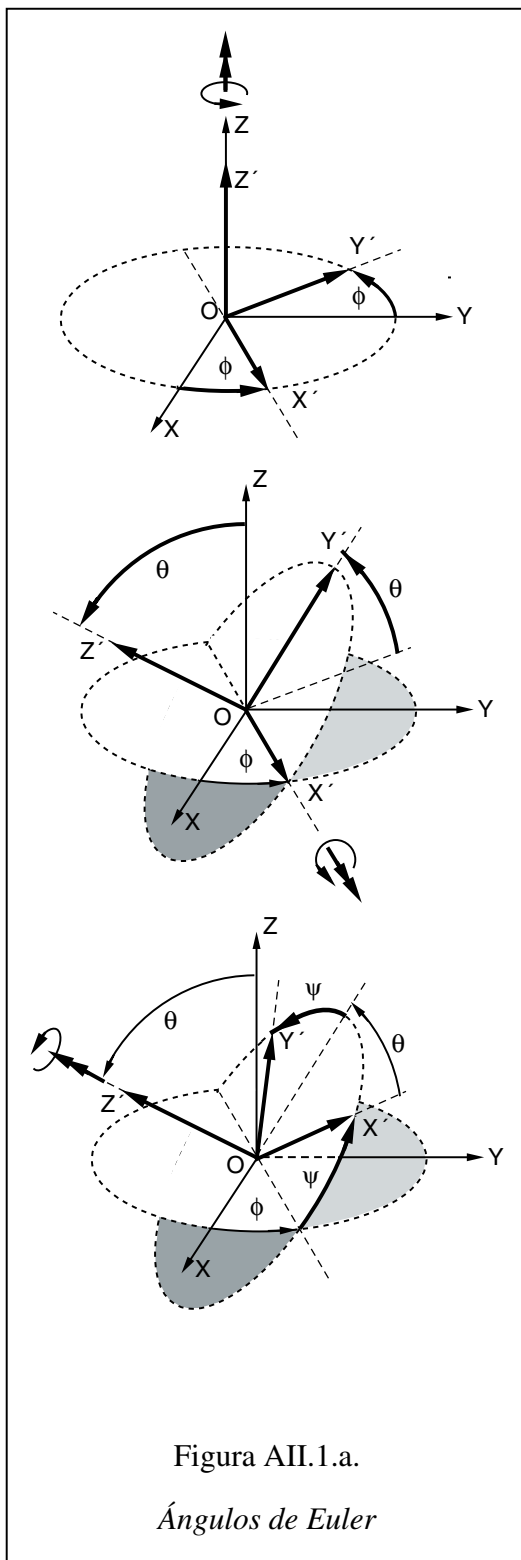
$$\text{Euler:} \quad \mathbf{R}_E = \mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_x(\theta)\mathbf{R}_z(\psi) \quad -\pi < \phi, \psi \leq \pi; \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (\text{AII.1})$$

$$\text{Cardan:} \quad \mathbf{R}_C = \mathbf{R}_x(\theta)\mathbf{R}_y(\phi)\mathbf{R}_z(\phi) \quad -\pi < \theta, \phi \leq \pi; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{AII.2})$$

$$\text{con:} \quad \mathbf{R}_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\text{sen} \phi & 0 \\ \text{sen} \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ 0 & \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\text{sen} \psi & 0 \\ \text{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \text{sen} \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}$$

cuyo producto final da:





$$\mathbf{R}_E = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & -\cos \phi \sin \psi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & \sin \theta \sin \phi \\ \sin \phi \cos \psi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & -\sin \phi \sin \psi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & -\sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{AII.3})$$

$$\mathbf{R}_C = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \phi & -\cos \phi \sin \phi & \sin \phi \\ \cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi \sin \phi & \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi - \cos \theta \cos \phi \sin \phi & \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (\text{AII.4})$$

Aparte de la pérdida de objetividad –a la que nos referimos en el capítulo II–, la sustitución de toda rotación por una suma secuencial de giros elementales, obliga a fijar de antemano el orden de composición de éstos a fin de garantizar un único resultado. Esto introduce un grado de arbitrariedad y desequilibrio entre los parámetros que dificulta los desarrollos teóricos y los cálculos numéricos; en el sistema Cardan, sin embargo, este inconveniente puede sortearse mediante un sistema de compensación. Veamos cómo.

La expresión (AII.1) sugiere nuevas descomposiciones variando la secuencia de giro alrededor de los tres ejes del triedro; así, permutando el orden de los tres giros, encontramos seis formas válidas de descomponer una rotación (sistemas de Tait–Bryan). Desde un punto de vista computacional, claro está, el comportamiento numérico es distinto para cada una de ellas, presentándose a veces problemas de convergencia para algún tipo concreto de descomposición [S4]. Si únicamente interesa obtener el giro de un vector dado –por ejemplo, el giro de la normal a una sección transversal de una viga–, estos problemas pueden evitarse promediando los resultados de componer los tres giros elementales  $\theta$ ,  $\phi$  y  $\phi$  en las seis formas indicadas, esto es, introduciendo una especie de *rotación media*. No obstante, a pesar de que este procedimiento es más estable numéricamente que cualquiera de las seis posibles descomposiciones, presenta el serio inconveniente de que sólo sirve para determinar la orientación de un vector prefijado, pero no define la rotación completa del triedro de referencia ya que la suma promediada de una serie de rotaciones no es necesariamente una rotación –el operador correspondiente ni tan siquiera es ortogonal–. Aun así, este procedimiento ha sido utilizado con éxito en análisis no lineal de estructuras [S4].

### AII. 3 - SISTEMAS VECTORIALES

El sentido geométrico de una rotación es claro: consiste en aplicar al espacio un giro  $\nu$  alrededor de un eje orientado  $\mathbf{e}$ . De acuerdo con esta definición, una rotación viene determinada por la pareja  $(\nu, \mathbf{e})$ , compuesta por un escalar y un vector unitario, o bien, por las tres componentes naturales, o canónicas, del *vector rotación*:  $\mathbf{v} = \nu \mathbf{e}$ . Es fácil comprobar que esta definición geométrica equivale a la algebraica (II.1) del capítulo II. En efecto, las rotaciones en el sentido geométrico apuntado son isometrías propias de  $\mathbf{E}^3$ , esto es, elementos del grupo  $\mathbf{SO}(3)$ ; la inversa, que toda isometría propia corresponde a un giro del espacio en torno a un eje, se desprende del siguiente teorema de Euler (1775): *todo desplazamiento de un cuerpo rígido que mantiene un punto fijo P, es simplemente un giro de éste alrededor de un eje que pasa por P* [G1, S1, H1]. Obviamente, esta conclusión es también válida si en vez de un cuerpo rígido consideramos el propio espacio  $\mathbf{E}^3$ ; en este caso, trasladando el origen de coordenadas O al punto P, el teorema de Euler se puede enunciar así: el conjunto de movimientos del espacio que mantienen fijo O coincide con el grupo de rotaciones  $\mathbf{SO}(3)$ .

En consecuencia, la forma más simple de parametrizar una rotación consiste en asignarle un *vector rotación*  $\mathbf{v} = \nu \mathbf{e}$ . Conocido  $\mathbf{v}$ , el giro de un vector arbitrario  $\mathbf{r}$  de  $\mathbf{E}^3$  viene dado por la siguiente fórmula de Euler [A2, G1, H1] –ver figura AII.2– :

$$\mathbf{r}_g = \mathbf{r} + \text{sen}\nu \tilde{\mathbf{e}} \mathbf{r} + (1 - \cos \nu) \tilde{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{e}} \mathbf{r} \quad (\text{AII.5})$$

Dado que, haciendo  $t = \text{tg}^2 \nu / 2$ , se tiene:  $\text{sen}\nu = t / (1 + t^2)$  y  $1 - \cos \nu = t^2 / (1 + t^2)$ , la expresión anterior se puede simplificar adoptando como parámetros característicos de una rotación las tres componentes del siguiente *vector de Rodrigues* [A2, B2, G1] :

$$\underline{\mathbf{v}} = \text{tg}(\nu / 2) \mathbf{e} \quad (\text{AII.6})$$

Evidentemente, este sistema paramétrico –sistema de Rodrigues– y el anterior –sistema natural– son objetivos; de hecho, en ambos casos las componentes de los vectores característicos  $\mathbf{v}$  y  $\underline{\mathbf{v}}$  cumplen la condición (II.8).

Con los parámetros de Rodrigues, la expresión (AII.5) adopta la forma simple siguiente [A2, G1]:

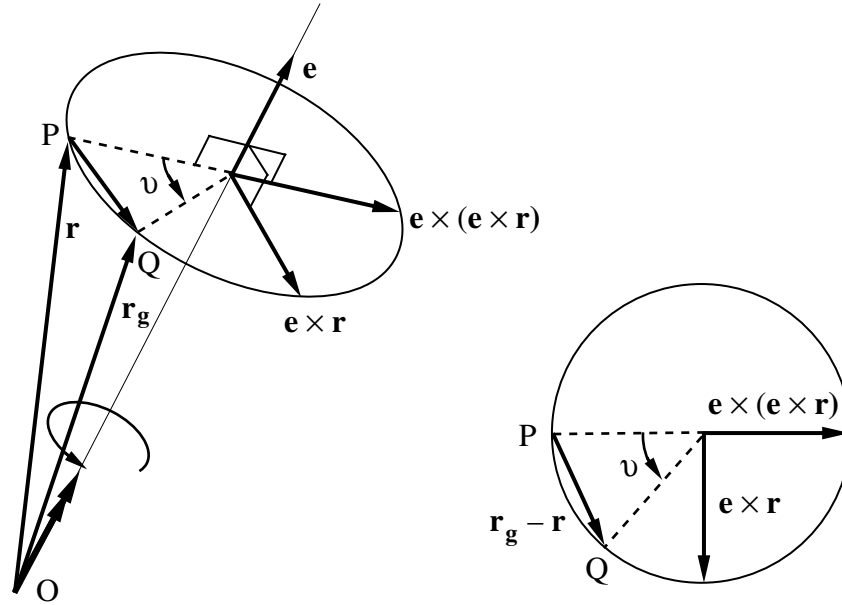


Figura AII.2.

*Demostración geométrica de la fórmula de Euler*

$$\mathbf{r}_g = \mathbf{r} + \frac{2}{1 + \underline{\nu}^2} \left[ \underline{\tilde{\nu}} \mathbf{r} + \underline{\tilde{\nu}} \underline{\tilde{\nu}} \mathbf{r} \right] \quad (\text{AII.7})$$

y en consecuencia, el operador rotación  $\mathbf{R}$  en ambos sistemas se puede escribir:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\text{sen} \nu}{\nu} \underline{\tilde{\nu}} + \frac{1 - \cos \nu}{\nu^2} \underline{\tilde{\nu}}^2 \quad (\text{AII.8.a})$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{2}{1 + \underline{\nu}^2} \left[ \underline{\tilde{\nu}} + \underline{\tilde{\nu}}^2 \right] \quad (\text{AII.8.b})$$

En concreto, en el sistema paramétrico de Rodrigues, se tiene:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{1 + \underline{\nu}^2} \begin{bmatrix} 1 + \underline{\nu}_x^2 - \underline{\nu}_y^2 - \underline{\nu}_z^2 & 2(\underline{\nu}_x \underline{\nu}_y - \underline{\nu}_z) & 2(\underline{\nu}_x \underline{\nu}_z + \underline{\nu}_y) \\ 2(\underline{\nu}_x \underline{\nu}_y + \underline{\nu}_z) & 1 - \underline{\nu}_x^2 + \underline{\nu}_y^2 - \underline{\nu}_z^2 & 2(\underline{\nu}_y \underline{\nu}_z - \underline{\nu}_x) \\ 2(\underline{\nu}_x \underline{\nu}_z - \underline{\nu}_y) & 2(\underline{\nu}_y \underline{\nu}_z + \underline{\nu}_x) & 1 - \underline{\nu}_x^2 - \underline{\nu}_y^2 + \underline{\nu}_z^2 \end{bmatrix} \quad (\text{AII.9})$$

La forma simple de las expresiones AII.8 era previsible, ya que en un sistema de parametrización objetivo el operador  $\mathbf{R}$  pertenece al semigrupo conmutativo  $\mathcal{T}$  y presenta siempre la misma estructura:  $\mathbf{R} = a \mathbf{I} + b \tilde{\boldsymbol{\alpha}} + c \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^2$  –consultar el apéndice I–.

Además, el vector de Rodrigues  $\underline{\mathbf{v}}$  coincide con el vector axial de la matriz antimétrica de Cayley  $\tilde{\mathbf{v}}$ , definida en el apartado II.2; esto es,  $\underline{\mathbf{v}} = axial [\tilde{\mathbf{v}}]$ . Para probarlo, supongamos conocida la rotación  $\mathbf{R}$ , e intentemos hallar la correspondiente matriz  $\tilde{\mathbf{v}}$ . Teniendo en cuenta que el producto  $\tilde{\mathbf{v}} \mathbf{z}$  sólo se anula si  $\mathbf{z} = \lambda \mathbf{v}$ , y que la dirección  $\mathbf{e}$  del eje de rotación es un autovector de  $\mathbf{R}$ , esto es,  $(\mathbf{R} - \mathbf{I}) \mathbf{e} = \mathbf{0}$  y  $(\mathbf{R} + \mathbf{I}) \mathbf{e} = \mu \mathbf{e}$ , se deduce de (II.5.b.) que  $\tilde{\mathbf{v}} \mathbf{e} = \mathbf{0}$  o, lo que es lo mismo, que  $\tilde{\mathbf{v}} = \lambda' \tilde{\mathbf{e}}$ . Sólo resta, pues, probar que  $\lambda' = \text{tg}(\nu/2)$ , para concluir que  $\tilde{\mathbf{v}} = \text{tg}(\nu/2) \tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{v}}$ .

Para determinar el módulo  $\lambda'$ , efectuemos un cambio de base que convierta el eje de coordenadas  $Z$  en el eje de rotación  $\mathbf{e}$  de  $\mathbf{v}$ , de modo que  $\mathbf{v} = \lambda' \mathbf{k}$ . Proyectando ahora  $\mathbf{v}$  sobre el nuevo plano coordenado  $OXY$ , esta rotación espacial se transformará en una rotación plana en  $OXY$  y el producto de operadores que figuran en la expresión de Cayley (II.5.b) en un producto de números complejos. En efecto, en el plano complejo un giro  $\nu$  equivale a una multiplicación por  $e^{i\nu}$ , y las transformaciones  $\tilde{\mathbf{k}}$ ,  $(\mathbf{R} - \mathbf{I})$ ,  $(\mathbf{R} + \mathbf{I})$  y  $(\mathbf{R} - \mathbf{I})(\mathbf{R} + \mathbf{I})^{-1}$  del plano  $OXY$  a multiplicaciones por los factores:  $e^{\pi/2i}$ ,  $2 \text{sen}(\nu/2) e^{(\pi+\nu)/2i}$ ,  $2 \text{cos}(\nu/2) e^{\nu/2i}$  y  $\text{tg}(\nu/2) e^{\pi/2i}$ , respectivamente. Por tanto, las transformaciones  $\text{tg}(\nu/2) \tilde{\mathbf{k}}$  y  $(\mathbf{R} - \mathbf{I})(\mathbf{R} + \mathbf{I})^{-1}$  son idénticas en  $OXY$ , y  $\lambda' = \text{tg}(\nu/2)$ .

Identificando  $\tilde{\mathbf{v}}$  con la matriz de Cayley, los parámetros de Rodrigues de una rotación  $\mathbf{R}$  se obtienen directamente de (II.5.b); del mismo modo, si se conoce  $\tilde{\mathbf{v}}$ ,  $\mathbf{R}$  se obtiene de (II.5.a). El cálculo de las inversas  $(\mathbf{R} + \mathbf{I})^{-1}$  y  $(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{v}})^{-1}$  es sencillo cuando, como en este caso, se conocen los polinomios característicos de  $\mathbf{R}$  y  $\tilde{\mathbf{v}}$ ; en efecto, basta tomar  $(\mathbf{R} + \mathbf{I})^{-1} \equiv a \mathbf{I} + b \mathbf{R} + c \mathbf{R}^2$  y obligar a que el producto de este polinomio por  $(\mathbf{R} + \mathbf{I})$  sea igual a  $\mathbf{I}$ , para deducir a partir de (II.2) los tres coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  de  $(\mathbf{R} + \mathbf{I})^{-1}$ . Procediendo de esta forma y llevando el resultado a (II.5.b), se obtiene:

$$\tilde{\mathbf{v}} = (\mathbf{R} - \mathbf{I})(\mathbf{R} + \mathbf{I})^{-1} = \frac{1}{1 + \alpha_R} [\mathbf{R}^2 - (1 + \alpha_R)\mathbf{R} + \alpha_R \mathbf{R}] \quad (\text{AII.10})$$

con  $\alpha_R = \text{Tr } \mathbf{R}$ ; mientras la relación inversa (II.5.a) nos devuelve (AII.8.b):

$$\mathbf{R} = (\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{I})(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{v}})^{-1} = \mathbf{I} + \frac{2}{1 + \sigma^2} [\tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}}^2] \quad (\text{AII.11})$$

$$\text{con} \quad \sigma^2 = -\frac{1}{2} \text{Tr} \tilde{\mathbf{v}}^2 = |\underline{\mathbf{v}}|^2 = \underline{v}^2 \quad (\text{AII.12})$$

En (AII.10), la traza del operador  $\mathbf{R}$  vale  $\alpha_R = (3 - \sigma^2)/(1 + \sigma^2)$ , estando por tanto comprendida en el intervalo  $(-1, 3]$ . Al resultar inalcanzable el extremo inferior  $-1$ , que corresponde al caso límite  $\sigma^2 = \infty$ , y éste, a su vez, al conjunto de rotaciones con autovalores negativos  $\mathbf{R}_{-1}$ :  $\{\mathbf{R} \in \mathbf{SO}(3) \mid \lambda_i = \lambda_j = -1; \lambda_k = 1\} \equiv \{v = \pm \pi\}$ , puede afirmarse que (AII.10) y (AII.11) aplican biunívocamente el conjunto de rotaciones  $\mathbf{SO}(3) - \mathbf{R}_{-1}$  en el de operadores antisimétricos  $\{\tilde{\mathbf{v}} \in \mathfrak{so}(3)\}$ .

Si se cambia el sistema de parametrización y se sustituye el vector de Rodrigues  $\underline{\mathbf{v}}$  por el vector rotación canónico  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}$ , se puede hallar una expresión análoga a la (AII.10) para el nuevo operador antisimétrico  $\tilde{\mathbf{v}}$ . Una forma simple de obtenerla consiste en partir directamente de (AII.8.a) y escribir  $\tilde{\mathbf{v}}$  del siguiente modo:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \frac{v}{2 \text{sen} v} (\mathbf{R} - \mathbf{R}^T) \quad (\text{AII.13})$$

Puesto que  $\mathbf{R}^T$  es inverso de  $\mathbf{R}$ , y el polinomio característico de  $\mathbf{R}$  viene dado por la expresión (II.2) del capítulo II,  $\mathbf{R}^T$  puede escribirse en función de  $\mathbf{R}$  del siguiente modo:

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^2 - \alpha_R \mathbf{R} + \alpha_R \mathbf{I} \quad (\text{AII.14})$$

Sustituyendo este resultado en la expresión anterior, se llega finalmente a:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \frac{v}{2 \text{sen} v} [-\mathbf{R}^2 + (1 + \alpha_R)\mathbf{R} - \alpha_R \mathbf{I}] \quad (\text{AII.15})$$

que sólo difiere de (AII.10) en el coeficiente escalar, como era de esperar. Además, al ser  $\alpha_R = \text{Tr} \mathbf{R} = 1 + 2 \cos v$ , de acuerdo con la fórmula (II.2.b) del capítulo II,  $\tilde{\mathbf{v}}$  se puede escribir también de otras dos formas equivalentes [P1, P2]:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \frac{v}{2 \text{sen} v} [-\mathbf{R}^2 + 2(1 + \cos v)\mathbf{R} - (1 + 2 \cos v)\mathbf{I}] \quad (\text{AII.16})$$

$$\text{o bien, } \tilde{\mathbf{v}} = \nu \tilde{\mathbf{e}} : \begin{cases} \tilde{\mathbf{e}} = (3 + 2\alpha_R - \alpha_R^2)^{-\frac{1}{2}} [-\mathbf{R}^2 + (1 + \alpha_R)\mathbf{R} - \alpha_R\mathbf{I}] \\ \nu = \cos^{-1}[(\alpha_R - 1) / 2] \end{cases} \quad (\text{AII.17})$$

Ahora, la singularidad se produce para  $\alpha_R = -1$  y  $\alpha_R = 3$  ( $\nu = \pm \pi$ ), esto es, para los mismos ángulos que en el sistema de Rodrigues. Para estos valores de  $\alpha_R$  la dirección de rotación  $\mathbf{e}$  no está determinada, poniéndose así de manifiesto la singularidad de la aplicación  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{v}$  para  $\nu = \pm \pi$ . Otro tanto ocurre en el sistema de Rodrigues con la aplicación  $\mathbf{R} \rightarrow \underline{\mathbf{v}}$ .

#### AII. 4.- SISTEMA TETRAPARAMÉTRICO DE EULER-RODRIGUES

Como se indica en el apartado II.5 del capítulo II, el mayor inconveniente de los sistemas de parametrización vectoriales es que todos presentan alguna discontinuidad o singularidad; es más, éstas son esenciales a todos los sistemas triparamétricos y, por tanto, inevitables, y sólo se pueden eliminar aumentando el número de parámetros del sistema. Por ejemplo, en el sistema paramétrico de Rodrigues, la expresión (AII.8) del operador rotación  $\mathbf{R}$  es singular para  $\nu = \pm \pi$ , pero si se escribe del siguiente modo [A1, R1, G1, W1]

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + 2q_0\tilde{\mathbf{q}} + 2\tilde{\mathbf{q}}^2 \quad \begin{cases} q_0 = \cos(\vartheta / 2) \\ \mathbf{q} = \text{sen}(\vartheta / 2)\mathbf{e} \end{cases} \quad (\text{AII.18})$$

resulta completamente regular. La diferencia principal entre (AII.8.b) y (AII.18) es que la primera se expresa en función de tres parámetros y la segunda requiere cuatro: el escalar  $q_0$  y las tres componentes del vector  $\mathbf{q}$ : ( $q_1, q_2, q_3$ ). Al conjunto formado por estos cuatro escalares ( $q_0, q_1, q_2, q_3$ ) se le conoce como sistema de parámetros de Euler-Rodrigues [H1] o, simplemente, parámetros de Euler. De ellos, sólo tres son completamente independientes; el cuarto se extrae de la necesaria relación de ligadura:

$$\sum_{i=1}^4 q_i^2 = 1 \quad (\text{AII.19})$$

Dado que:  $\tilde{\mathbf{q}}^2 = \mathbf{q} \otimes \mathbf{q} - (\mathbf{q}^T \mathbf{q}) \mathbf{I} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{q} + (q_0^2 - 1) \mathbf{I}$  –consultar el apéndice I–, si se desea, (AII.18) se puede escribir también de la forma equivalente:

$$\mathbf{R} = (2q_0^2 - 1)\mathbf{I} + 2(q_0\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}) \quad (\text{AII.20})$$

Desarrollando esta expresión, se obtiene la forma final del operador  $\mathbf{R}$  expresada en función de los parámetros de Euler–Rodrigues [B2, G1, K1 ]:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix} \quad (\text{AII.21})$$

Por último, considerando (AII.18), la relación entre el vector de Rodrigues  $\underline{\mathbf{v}}$  y los parámetros de Euler–Rodrigues es inmediata:

$$\underline{\mathbf{v}} = q_0^{-1} \mathbf{q}$$

Más adelante se relacionarán estos parámetros de Euler–Rodrigues con las componentes de un cuaternio y se mostrará la ventaja operativa que supone trabajar dentro del álgebra abstracta de los cuaternios H.

## AII. 5.– SISTEMA TETRAPARAMÉTRICO DE CAYLEY–KLEIN

Dado que el conjunto formado por las matrices unitarias y propias de orden 2 sobre  $\mathbb{C}$  constituye un grupo  $\mathbf{SU}(2)$  endomorfo de  $\mathbf{SO}(3)$  por medio de una aplicación de la clase  $2 \leftrightarrow 1$  [A1, G1, K1], las cuatro componentes complejas  $(\alpha, \beta, \chi, \delta)$  de las matrices de  $\mathbf{SU}(2)$  constituyen un nuevo sistema de parametrización de rotaciones, denominado de Cayley–Klein. Denotando  $\mathbf{Q}^*$  a la matriz adjunta de  $\mathbf{Q}$ , el grupo  $\mathbf{SU}(2)$  es, por definición, el conjunto de matrices de orden 2 tales que:

$$\mathbf{SU}(2): \{ \mathbf{Q} \in M_2(\mathbb{C}), \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^* \text{ y } \text{Det}[\mathbf{Q}] = 1 \}$$

esto es, 
$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \delta = \alpha^* ; \gamma = \beta^* \\ \alpha\delta + \beta\gamma = 1 \end{cases} \quad (\text{AII.22})$$

( $\gamma^*$  es el conjugado de  $\gamma$ ). Escribiendo ahora  $\alpha = c_1 + ic_2$ ;  $\beta = c_3 + ic_4$ ;  $\alpha^* = c_1 - ic_2$  y  $\beta^* = c_3 - ic_4$ , se tiene por tanto:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{bmatrix} \quad \text{con:} \quad \alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1 \quad (\text{AII.23})$$

Las partes real e imaginaria ( $c_1, c_2, c_3, c_4$ ) de  $\alpha$  y  $\beta$  forman así un sistema de 4 parámetros ligados por la condición de normalidad:  $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = \sum c_i^2 = 1$ .

La relación entre los grupos  $\mathbf{SU}(2)$  y  $\mathbf{SO}(3)$  se prueba demostrando que toda transformación lineal  $\mathbf{Q}$  –de la forma (AII.23)– del espacio vectorial  $\mathbf{K}_0$  formado por las matrices hermíticas de orden 2 y traza nula se encuentra en correspondencia con una rotación  $\mathbf{R}$  del espacio homomórfico  $\mathbf{E}^3$ . Veamos.

Una base del espacio tridimensional  $\mathbf{K}_0$  la constituyen las matrices:

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{h}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

además, entre los vectores  $\mathbf{r}$  de  $\mathbf{E}^3$  y las matrices  $\mathbf{P}$  de  $\mathbf{K}_0$  se da la relación isomórfica:

$$\mathbf{r}(x, y, z) \leftrightarrow \mathbf{P} = \begin{bmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{bmatrix} = x\mathbf{h}_1 + y\mathbf{h}_2 + z\mathbf{h}_3$$

Pues bien, toda transformación lineal  $\mathbf{Q} \in \mathbf{SU}(2)$  aplica el espacio  $\mathbf{K}_0$  en sí mismo:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{Q}^* ; \quad \mathbf{Q} \in \mathbf{SU}(2) \quad (\text{AII.24})$$

En efecto,  $\mathbf{P}'$  es hermítica:  $\mathbf{P}'^* = \mathbf{Q} \mathbf{P}^* \mathbf{Q}^* = \mathbf{P}'$ , y de traza nula por ser semejante a  $\mathbf{P}$ :  $\text{Tr } \mathbf{P}' = \text{Tr } \mathbf{P} = 0$  (recuérdese que  $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^{-1}$ ). Por otro lado, a toda transformación lineal  $\mathbf{Q}$  en  $\mathbf{SU}(2)$  le corresponde una transformación imagen  $\hat{\mathbf{Q}}$  en el espacio isomorfo  $\mathbf{E}^3$ , tal que, si  $\mathbf{n}_i$  es una base de este espacio, se tiene:



$$\begin{aligned} x\mathbf{h}_1 + y\mathbf{h}_2 + z\mathbf{h}_3 \in \mathbf{K}_0 &\xrightarrow{\mathbf{Q}} x'\mathbf{h}_1 + y'\mathbf{h}_2 + z'\mathbf{h}_3 \in \mathbf{K}_0 \\ \mathbf{r} \equiv x\mathbf{n}_1 + y\mathbf{n}_2 + z\mathbf{n}_3 \in \mathbf{E}^3 &\xrightarrow{\widehat{\mathbf{Q}}} x'\mathbf{n}_1 + y'\mathbf{n}_2 + z'\mathbf{n}_3 \equiv \mathbf{r}' \in \mathbf{E}^3 \end{aligned} \quad (\text{AII.25})$$

Como las matrices  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{P}'$  tienen el mismo determinante por ser semejantes, la norma de los vectores  $\mathbf{r}$  de  $\mathbf{E}^3$  se mantendrá constante al transformarlos con  $\widehat{\mathbf{Q}}$ :

$$|\mathbf{r}'|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = -\text{Det}[\mathbf{P}'] = -\text{Det}[\mathbf{P}] = x^2 + y^2 + z^2 = |\mathbf{r}|^2$$

De modo que la aplicación  $\widehat{\mathbf{Q}}: \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$  es una isometría en  $\mathbf{E}^3$ , y como además es propia, se trata de una rotación  $\mathbf{R}$ . La matriz de transformación de esta rotación  $\mathbf{R}: \{\widehat{\mathbf{Q}}(\mathbf{n}_1), \widehat{\mathbf{Q}}(\mathbf{n}_2), \widehat{\mathbf{Q}}(\mathbf{n}_3)\}$  vale:

$$\widehat{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 1 - 2(c_2^2 + c_3^2) & 2(c_3c_4 + c_1c_2) & 2(c_2c_4 - c_1c_3) \\ 2(c_3c_4 - c_1c_2) & 1 - 2(c_2^2 + c_4^2) & 2(c_2c_3 + c_1c_4) \\ 2(c_2c_4 + c_1c_3) & 2(c_2c_3 - c_1c_4) & 1 - 2(c_3^2 + c_4^2) \end{bmatrix} \quad (\text{AII.26})$$

Identificando (AII.26) y (AII.21), se deduce la siguiente relación entre los cuatro parámetros de Euler de la rotación  $\widehat{\mathbf{Q}}$ , las partes reales e imaginarias  $c_i$  de  $\alpha$  y  $\beta$  y los parámetros de Cayley–Klein:

$$(c_1, c_2, c_3, c_4) \leftrightarrow (-q_0, q_1, q_2, q_3)$$

$$\alpha = -q_0 + iq_3 \quad \therefore \quad \beta = q_2 + iq_1 \quad \therefore \quad \gamma = -q_2 + iq_1 \quad \therefore \quad \delta = -q_0 - iq_3$$

En definitiva, queda establecido un endomorfismo entre los grupos  $\mathbf{SU}(2)$  y  $\mathbf{SO}(3)$  (es inmediato comprobar que toda rotación  $\mathbf{R}$  es imagen de alguna matriz  $\mathbf{Q}$  de  $\mathbf{SU}(2)$ ). Sin embargo, no se trata de un isomorfismo ya que las transformaciones opuestas  $\mathbf{Q}$  y  $-\mathbf{Q} \in \mathbf{SU}(2)$  se aplican en una misma rotación  $\mathbf{R}$  de  $\mathbf{SO}(3)$ . En definitiva, como  $\sum c_i^2 = 1$ , a toda matriz  $\mathbf{Q}$  le corresponde un punto de la superficie esférica  $\mathbf{S}^3$  en  $\mathbf{E}^4$ , y a una rotación  $\mathbf{R}$  dos puntos opuestos, pudiendo afirmarse que el grupo de rotaciones  $\mathbf{SO}(3)$  es topológicamente equivalente al espacio real proyectivo tridimensional  $\mathbf{R}(P^3)$  (conjunto de rectas que pasan por el origen en  $\mathbf{E}^4$ ) [K1].

**AII. 6.– EL SISTEMA PENTAPARAMÉTRICO DE STUELPNAGEL**

Como se prueba en el apartado II.5 del capítulo II, ningún sistema de tres o cuatro parámetros es isomorfo al grupo de rotaciones  $\mathbf{SO}(3)$ ; los sistemas vectoriales no son regulares y el tetraparamétrico de Euler–Rodrigues no aplica biunívocamente  $\mathbf{SO}(3)$  en la esfera  $\mathbf{S}^3$ . La única posibilidad de hallar un sistema regular y al mismo tiempo biunívoco, es aumentar el número  $n$  de parámetros a 5 o más. Un sistema pentaparamétrico muy sencillo, regular y biunívoco, es el sistema de Stuelpnagel. Veamos cómo se establece en este sistema la aplicación  $\mathbf{R} \in \mathbf{SO}(3) \leftrightarrow \{y_i\} (i:1, \dots, 5)$

Las tres columnas de todo operador  $\mathbf{R}$  están formadas por las componentes de los vectores  $\mathbf{R}(\mathbf{e}_1)$ ,  $\mathbf{R}(\mathbf{e}_2)$ ,  $\mathbf{R}(\mathbf{e}_3)$ . Dado que  $\mathbf{R}(\mathbf{e}_3) = \mathbf{R}(\mathbf{e}_1) \times \mathbf{R}(\mathbf{e}_2)$ , los dos primeros vectores son suficientes para definir  $\mathbf{R}$ . Formemos con ellos el nuevo vector de dimensión 6 :  $\mathbf{w} := [\mathbf{R}(\mathbf{e}_1), \mathbf{R}(\mathbf{e}_2)]$ . No todas las componentes de este vector  $\mathbf{w}$  son independientes; entre ellas se dan tres relaciones de ortonormalidad:

$$\mathbf{R}(\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{e}_1) = 1 \quad \therefore \quad \mathbf{R}(\mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{e}_2) = 1 \quad \therefore \quad \mathbf{R}(\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{e}_2) = 0 \quad (\text{AII.27})$$

Esto es, el extremo del vector  $\mathbf{w} / \sqrt{2}$  está situado en la hiperesfera de radio unidad  $\mathbf{S}^5$  de  $\mathbf{E}^6$ . Imponiendo de antemano esta condición a los vectores  $\mathbf{w}$ , las tres relaciones (AII.27) se reducen a dos, y determinan un dominio  $\mathcal{S}$  en  $\mathbf{S}^5$  que no cubre por completo la hiperesfera. Al ser las funciones (AII.27) continuas,  $\mathcal{S}$  es un cerrado en  $\mathbf{S}^5$  y por tanto existen puntos en la hiperesfera a una distancia finita de  $\mathcal{S}$ . Siendo  $A$  uno de estos puntos, proyectemos estereográficamente desde él la esfera  $\mathbf{S}^5$  sobre el hiperplano  $\pi_A$  normal al vector  $\mathbf{a} \equiv \mathbf{w}(A)$ . Esta proyección será una representación regular y biunívoca de  $\mathcal{S}$  sobre este hiperplano  $\pi_A$  –figura AII.3–. Identificando ahora los puntos de  $\mathcal{S}$  con las rotaciones  $\mathbf{R}$ , se obtiene la aplicación buscada.

Analíticamente, el proceso es el siguiente: sea  $\mathbf{a}$  el vector de posición del punto  $A$  y  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{a}\}$  una base ortonormal de vectores que contenga  $\mathbf{a}$ . Supongamos que  $\mathbf{C}$  es la matriz de cambio de base de este grupo de vectores. En estas condiciones la proyección estereográfica  $\mathbf{y}$  del punto  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ , vale –figura AII.3– [S3]:

$$\mathbf{y} = \frac{1}{1 - \mathbf{a}^T \mathbf{x}} [\mathbf{C} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}] \mathbf{x} \quad (\text{AII.28})$$

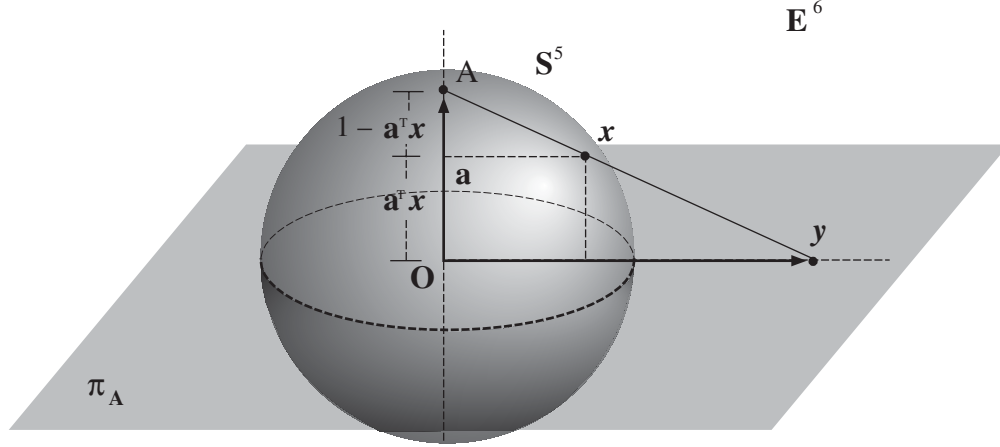


Figura AII.3.

Proyección estereográfica de la hipersfera  $S^5$  en el plano de 5 dimensiones  $\pi_A$ .

La última componente del vector  $\mathbf{y}$  es idénticamente nula. Eliminandola, las otras cinco componentes de  $\mathbf{y} : (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ , constituyen el sistema de parámetros de Stuelpnagel, que cumple las condiciones deseadas de regularidad y biunivocidad. Se obtiene así la representación buscada del dominio  $\mathcal{S}$  –isomorfo a  $\mathbf{SO}(3)$ – sobre  $\mathbf{E}^5$ .

La relación  $\mathbf{R} \rightarrow \{y_i\}$  admite inversa: a los parámetros  $\{y_i\}$  les corresponde una y solo una rotación en  $\mathbf{SO}(3)$ , esto es, uno y sólo un punto en  $\mathcal{S}$ . Éste es [S3]:

$$\mathbf{x} = \frac{2\mathbf{C}^T \mathbf{y} + (y^2 - 1)\mathbf{a}}{1 - y^2} \quad (\text{AII.29})$$

donde  $\mathbf{y}$  es el punto  $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, 0)$  de  $\pi_A$ ;  $\mathbf{x} [\mathbf{R}(\mathbf{e}_1), \mathbf{R}(\mathbf{e}_2)]$  su imagen inversa en  $S^5$  y  $\mathbf{R} := [\mathbf{R}(\mathbf{e}_1), \mathbf{R}(\mathbf{e}_2), \mathbf{R}(\mathbf{e}_1) \times \mathbf{R}(\mathbf{e}_2)]$  la correspondiente rotación en  $\mathbf{SO}(3)$ . Por tanto, (AII.28–29) son las ecuaciones analíticas de esta representación biunívoca. Las dos relaciones que ligán los cinco parámetros de Stuelpnagel se desprenden directamente de (AII.27), y son [S3]:

$$[(y^2 - 1)\mathbf{a} + 2\mathbf{C}^T \mathbf{y}]^T \mathbf{J}_i [(y^2 - 1)\mathbf{a} + 2\mathbf{C}^T \mathbf{y}] = 0 \quad (i: 1, 2) \quad (\text{AII.30})$$

con 
$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & -\mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{AII.31})$$

Luego, toda rotación se puede definir por medio de 5 escalares ( $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ ) que verifiquen las relaciones (AII.30), siendo isomórfica la aplicación  $\mathbf{R} \leftrightarrow \{y_i\}$ .

En la práctica, sin embargo, este sistema ideal de parametrización no se utiliza, pues las ventajas teóricas de una representación regular y biunívoca no compensan las dificultades que supone trabajar con un número tan elevado de parámetros.

### AII.7.- OBTENCIÓN DE LOS PARÁMETROS CARACTERÍSTICOS DE UNA ROTACIÓN

Con frecuencia surge el problema inverso: conocido el operador  $\mathbf{R}$ , se desea obtener el grupo de parámetros característicos de esta rotación  $p_i[\mathbf{R}]$  en alguno de los sistemas descritos. En los sistemas vectoriales natural y de Rodrigues, por ejemplo, estos parámetros se pueden extraer directamente de (AII.10) y (AII.17):  $\underline{\mathbf{v}} = axial [\tilde{\mathbf{v}}]$  y  $\underline{\mathbf{v}} = axial [\tilde{\mathbf{v}}]$ . En general, existe una amplia variedad de formas de obtener los parámetros de una rotación, sin embargo, el comportamiento numérico en el entorno de una singularidad no es el mismo en todos los casos. Dependiendo del algoritmo  $p_i[\mathbf{R}]$  utilizado, los errores numéricos pueden ser más o menos grandes en estos entornos. Un método seguro y preciso de obtener, por ejemplo, los parámetros de Euler–Rodrigues de una rotación  $\mathbf{R}$ , es la técnica de Spurrier. Una vez que se conocen los parámetros en este sistema, en otros sistemas se pueden obtener de forma indirecta utilizando las relaciones mostradas en la Tabla AII.1 u otras semejantes. Veamos en qué consiste la técnica de Spurrier.

Los parámetros de Euler–Rodrigues se pueden obtener directamente de (AII.21). El valor de  $q_0$  se deduce de la traza del operador rotación  $\mathbf{R}$ :  $\text{Tr } \mathbf{R} = 4q_0^2 - 1$  (téngase en cuenta que  $\sum q_i^2 = 1$ ); y el resto de los parámetros de sencillas relaciones que satisfacen los coeficientes de  $\mathbf{R}$ . El resultado final es el siguiente (en AII.32 se supone que los índices  $i, j, k$  permutan cíclicamente tomando los valores 1, 2, 3):

$$q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \text{Tr } \mathbf{R}} \quad \therefore \quad q_i = \frac{Q_i}{4q_0} \quad \therefore \quad Q_i = R_{kj} - R_{jk} \quad (\text{AII.32})$$

Ángulos de Euler	Rodrigues	Euler–Rodrigues	Cayley–Klein
$\cos \frac{\psi + \phi}{2} \cos \frac{\theta}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \underline{v}^2}}$	$q_0$	$-c_1 = -\frac{\alpha + \delta}{2}$
$\sin \frac{\psi + \phi}{2} \cos \frac{\theta}{2}$	$\frac{\underline{v}_z}{\sqrt{1 + \underline{v}^2}}$	$q_3$	$c_2 = \frac{\alpha + \delta}{2i}$
$\sin \frac{\phi - \psi}{2} \sin \frac{\theta}{2}$	$\frac{\underline{v}_y}{\sqrt{1 + \underline{v}^2}}$	$q_2$	$c_3 = \frac{\beta - \gamma}{2}$
$\cos \frac{\phi - \psi}{2} \sin \frac{\theta}{2}$	$\frac{\underline{v}_x}{\sqrt{1 + \underline{v}^2}}$	$q_1$	$c_4 = \frac{\beta + \gamma}{2i}$

Tabla AII.1.

*Relación entre los parámetros de Euler, Rodrigues, Euler–Rodrigues y Cayley*

Sin embargo, estas fórmulas no resultan prácticas cuando los ángulos de giro se aproximan a  $\pi$  radianes, ya que al tender éstos a  $\pi$ ,  $q_0$  tiende a cero y las expresiones (AII.32) se vuelven indeterminadas. Para ángulos grandes es preferible utilizar estas otras expresiones:

$$q_i = \frac{1}{2} \text{Sign}[Q_i] \sqrt{1 + 2R_{ii} - \text{Tr} \mathbf{R}} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{AII.33})$$

manteniendo para  $q_0$  la definición (AII.32). O mejor aún, hacer uso del *algoritmo de Spurrier* [S2], que coincide con (AII.33) cuando el valor máximo de los cuatro escalares  $\{\text{Tr} \mathbf{R}, R_{11}, R_{22}, R_{33}\}$  es  $\text{Tr} \mathbf{R}$ , pero que, cuando este máximo corresponde a uno de los elementos diagonales  $R_{ii}$  ( $i: 1, 2, 3$ ), limita el uso de (AII.33) al parámetro de índice “i”,  $q_i$ , en tanto que los tres restantes:  $q_0$ ,  $q_j$  y  $q_k$  ( $i \neq j, k$ ) los deduce del siguiente modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0 = \frac{Q_i}{4q_i} > 0 \\ q_m = \frac{R_{mi} + R_{im}}{4q_i} \quad (m = j, k) \end{array} \right. \quad (\text{AII.34})$$

En los sistemas triparamétricos, los parámetros característicos de una rotación se pueden obtener, como hemos comentado, por métodos directos sin necesidad de recurrir a los parámetros de Euler–Rodrigues. Así, los parámetros de Rodrigues y las componentes naturales del vector rotación se extraen directamente de (AII.10) y (AII.17), cuando  $\mathbf{R}$  no es involutivo ( $\mathbf{R} \neq \mathbf{I}$  y  $\mathbf{R} \notin \mathbf{R}_{-1}$ ). Ahora bien, si  $\mathbf{R}$  es involutivo, su traza vale  $-1$  ó  $3$  y las expresiones (AII.10) y (AII.17) se vuelven indeterminadas. Este hecho carece de importancia si  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$  ( $\text{Tr } \mathbf{R} = 3$ ) o  $\mathbf{R} \equiv \mathbf{I}$  ( $\text{Tr } \mathbf{R} \equiv 3$ ); sin embargo, si la traza se aproxima al valor  $-1$ , o lo que es lo mismo, si  $\mathbf{R}$  se encuentra en un entorno de  $\mathbf{R}_{-1}$ , entonces conviene tomar algunas precauciones si se desea evitar que los errores de truncamiento que se producen al calcular numéricamente (AII.10) y (AII.17) puedan afectar a la solución.

## AII. 8.– EL ÁLGEBRA DE LOS CUATERNIOS

Una herramienta matemática útil que permite resolver problemas relacionados con rotaciones finitas y, en particular, componer rotaciones de forma muy sencilla, es el sistema de números hipercomplejos de Hamilton, también llamados *cuaternios*. El álgebra abstracta de los cuaternios es importante en sí misma porque revela y pone en claro las propiedades algebraicas internas de las rotaciones finitas, al tiempo que permite sistematizar las operaciones y resultados más importantes obtenidos hasta ahora. Además, tiene la ventaja de que en ella las leyes de composición son bastante simples, de modo que los resultados se obtienen con relativa facilidad. Un resultado que se desprende de forma inmediata de las propiedades de los cuaternios es precisamente la ley de composición suma de rotaciones, que se estudia en el siguiente apartado. Dada la estrecha relación de esta álgebra con las rotaciones, en general, y el

sistema de Euler–Rodrigues, en particular, presentamos a continuación de forma sumaria las propiedades más importantes que la caracterizan.

Los cuaternios constituyen un sistema tetradimensional  $H$  con tres leyes de composición –suma, producto interno y producto por un escalar  $\in \mathbb{R}$ – que generalizan las leyes de composición de los números complejos [A1, K1, W1]. Del mismo modo que un número complejo se puede expresar en la forma  $\mathbb{R} + \mathbf{i} \mathbb{R}$ , todo cuaternio de  $H$  se puede definir por medio de cuatro elementos básicos:  $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  :

$$H : \{ \mathbb{R} + \mathbf{i} \mathbb{R} + \mathbf{j} \mathbb{R} + \mathbf{k} \mathbb{R} \} \quad (\text{AII.35})$$

con productos internos:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \quad \therefore \begin{cases} \mathbf{i} \mathbf{j} = -\mathbf{j} \mathbf{i} = \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \mathbf{k} = -\mathbf{k} \mathbf{j} = \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \mathbf{i} = -\mathbf{i} \mathbf{k} = \mathbf{j} \end{cases} \quad (\text{AII.36})$$

Nótese que los tres primeros generalizan la ley  $\mathbf{i}^2 = -1$ , característica de la unidad imaginaria compleja, y los restantes, la regla del producto vectorial de tres versores en  $\mathbf{E}^3$ . En lo sucesivo, los cuaternios  $q = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}$  de  $H$  los denotaremos en forma abreviada:  $q = q_0 + \mathbf{q}$ .

El producto de dos cuaternios,  $p = p_0 + \mathbf{p}$  y  $q = q_0 + \mathbf{q}$ , es otro cuaternio  $pq$  cuyo valor se deduce de (AII.36):

$$pq = p_0 q_0 - \mathbf{p}^T \mathbf{q} + p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}} \mathbf{q} \quad (\text{AII.37})$$

Escribiendo vectorialmente ambos cuaternios,  $-\mathbf{p}^T = [p_0 \ \mathbf{p}^T]$ ,  $\mathbf{q}^T = [q_0 \ \mathbf{q}^T]$ –, este producto se puede expresar matricialmente como sigue [G2]:

$$pq = \mathbf{T}_p q = \mathbf{T}_q p \quad (\text{AII.38})$$

$$\mathbf{T}_p(p) := \begin{bmatrix} p_0 & -\mathbf{p}^T \\ \mathbf{p} & p_0 \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \mathbf{T}_q(q) := \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q}^T \\ \mathbf{q} & q_0 \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (\text{AII.39})$$

Nótese que las matrices  $\mathbf{T}_p$  y  $\mathbf{T}_q$  dependen únicamente de  $p$  y  $q$ .

Se comprueba de inmediato que H es un álgebra asociativa sobre  $\mathbb{R}$ ; la suma y producto por un escalar (real) siguen las reglas convencionales del cálculo vectorial.

Además, a cada cuaternio  $q$  le corresponde un conjugado  $q^* = q_0 - \mathbf{q}$ , de acuerdo con las siguientes reglas de conjugación:

$$\begin{aligned} q^* &:= q_0 - \mathbf{q} = q_0 - q_1 \mathbf{i} - q_2 \mathbf{j} - q_3 \mathbf{k} \\ (p + q)^* &= p^* + q^* \quad (p q)^* = q^* p^* \end{aligned} \tag{AII.40}$$

Evidentemente, un cuaternio es igual a su conjugado si y sólo si se anula su componente vectorial; por el contrario, si el cuaternio y su conjugado son opuestos, entonces la componente escalar se anula:

$$q^* = q \Leftrightarrow q = q_0 \quad q^* = -q \Leftrightarrow q_0 = 0 \tag{AII.41}$$

En H se puede introducir una *norma*  $\| \cdot \|$  del siguiente modo:

$$\| q \|^2 = q^* q = q q^* = q_0^2 + \mathbf{q}^T \mathbf{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \tag{AII.42}$$

que cumple las condiciones necesarias:

$$\begin{aligned} \| q \| &= 0, \text{ si y sólo si } q = 0 \\ \| p + q \| &\leq \| p \| + \| q \| \\ \| \lambda q \| &= |\lambda| \| q \| \end{aligned}$$

y además,  $\| p q \| = \| p \| \| q \|$  (AII.43)

De aquí se desprende que todo cuaternio  $q$  tiene inverso:

$$q^{-1} := q^* / \| q \|^2 \tag{AII.44}$$

Por tanto, H, además de ser un álgebra asociativa, es un álgebra con división y tiene estructura de grupo no abeliano para la ley de composición interna producto



definida en (AII.37). La singularidad de esta álgebra se refleja en un célebre teorema de Frobenius [B1], según el cual sobre el cuerpo de los números reales sólo existen tres álgebras asociativas de dimensión finita y con división:  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{H}$ .

Entre los cuaternios de norma unidad y las rotaciones finitas –esto es, entre  $H_1$  y  $\mathbf{SO}(3)$ – se puede establecer la siguiente correspondencia:

$$\text{rotación: } \mathbf{v} \in \mathbf{SO}(3) \longleftrightarrow \text{cuaternio: } \pm q (q_0, \mathbf{q}) \in H_1 \quad (\text{AII.45})$$

Esta correspondencia no es biyectiva sobre todo el espacio  $H_1$ , pues a cada rotación le asigna dos cuaternios, pero sí lo es en cada una de las ramas  $(\pm q_0, \mathbf{q})$  de  $H_1$  que parten de la superficie  $(0, \mathbf{q})$ . Es más, sobre estas ramas es un isomorfismo ya que la suma de dos rotaciones equivale al producto de dos cuaternios. Para demostrar esto último vamos a probar antes que el giro de un vector  $\mathbf{r}$  de  $\mathbf{E}^3$  al aplicarle una rotación  $\mathbf{v}$  se expresa en el álgebra  $\mathbb{H}$  por medio de un triple producto de cuaternios.

Si asociamos a todo vector  $\mathbf{r}$  el cuaternio  $r (0, \mathbf{r})$  y a la rotación  $\mathbf{v}$  el cuaternio  $q$ , como se indicó en (AII.45), al vector  $\mathbf{r}_g$  que resulta de girar  $\mathbf{r}$  con  $\mathbf{v}$  le corresponderá el resultado de multiplicar los tres cuaternios siguientes [A1, G1, G2, W1]:

$$\mathbf{r}_g = q r q^* \quad (\text{AII.46})$$

$$r_g [0, \mathbf{r}_g] \therefore r [0, \mathbf{r}] \therefore q [\cos \nu/2, \text{sen } \nu/2 \mathbf{e}]$$

La demostración de que el algoritmo (AII.46) representa una rotación en  $\mathbf{E}^3$  es inmediata notando que define una aplicación isométrica del subgrupo de cuaternios de parte escalar nula en sí mismo:

$$r_g + r_g^* = q (r + r^*) q^* = 0$$

$$\| \mathbf{r}_g \| = \| \mathbf{r} \|$$

Esta rotación además coincide con  $\mathbf{v}$ . En efecto, desarrollando el producto (AII.46) y separando las partes escalar y vectorial, se obtiene de nuevo (AII.20). Concretamente, si  $\mathbf{0}_3$  denota el vector nulo de  $\mathbf{E}^3$ , y  $\mathbf{R}$  el operador (AII.20), se tiene:

$$\mathbf{r}_g = \mathbf{R}_g \mathbf{r} \quad \text{con} \quad \mathbf{R}_g = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_3^T \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (\text{AII.47})$$

Es fácil demostrar ahora que la suma de dos rotaciones de  $\mathbf{SO}(3)$  equivale en  $H_1$  al producto de los respectivos cuaternios. Veamos: si en vez de una, se aplican dos rotaciones  $q$  y  $p$  al vector  $\mathbf{r}$  de  $\mathbf{E}^3$ , el resultado final se puede expresar así:

$$\mathbf{r}_g = p [ q \mathbf{r} q^* ] p^* = (p q) \mathbf{r} (p q)^*$$

de lo cual se deduce que a la rotación suma  $p \oplus q$  le corresponde el cuaternio  $pq$ .

En conclusión, la correspondencia entre el álgebra de cuaternios  $H_1$  con su ley producto y el conjunto de rotaciones finitas  $\mathfrak{R}$  con su ley suma, es isomórfica en las dos ramas mencionadas más arriba, y componer rotaciones en el espacio  $\mathbf{E}^3$  equivale, algebraicamente, a multiplicar cuaternios:

Rotación	↔	Cuaternio	
$\alpha$	↔	$q = \pm(q_0 + \mathbf{q})$	
$\beta$	↔	$p = \pm(p_0 + \mathbf{p})$	
$\alpha \oplus \beta$	↔	$pq$	(AII.48)
$\beta \oplus \alpha$	↔	$qp$	

Se da así una analogía, incluso formal, entre el sistema de parametrización de Euler–Rodrigues y el álgebra de los cuaternios. En definitiva, los parámetros de Euler–Rodrigues no son sino las componentes de un cuaternio de módulo unidad; el producto de dos de estos cuaternios equivale a una composición de rotaciones y el triple producto (AII.46) a una rotación  $\mathbf{R}$  en  $\mathbf{E}^3$ . Nótese, también, la relación que existe entre el triple producto de cuaternios (AII.46) y el triple producto matricial (AII.24); esto es, entre  $H_1$  y los parámetros de Cayley–Klein.

En general, cualquier operación geométrica imaginable con rotaciones tiene su expresión correlativa en el álgebra  $H$  de los cuaternios, resultando en ocasiones más sencillo operar con rotaciones dentro de esta álgebra abstracta que en el propio espacio físico  $\mathbf{E}^3$  [A1, G2, W1].

### AII. 9.– SUMA DE ROTACIONES EN EL SISTEMA DE RODRIGUES

En el apartado anterior se probó que la suma de rotaciones equivale a una simple multiplicación en el álgebra H de los cuaternios; a continuación se demuestra que en el sistema de Rodrigues las rotaciones se suman también de forma muy sencilla [L1, A2, P1] –las propiedades generales de la suma de rotaciones, con independencia del sistema de parametrización, se tratan en el capítulo II–.

Siendo  $\underline{\mathbf{v}}_1$  y  $\underline{\mathbf{v}}_2$  los vectores de Rodrigues de dos rotaciones arbitrarias  $\alpha$  y  $\beta$ , referidas a un sistema de referencia fijo del espacio, e  $\underline{\mathbf{Y}}$  el vector de Rodrigues de la rotación suma  $\alpha \oplus \beta$ , vamos a intentar hallar la expresión exacta de la rotación  $\alpha \oplus \beta$  en este sistema de parametrización de Rodrigues, determinando el módulo y dirección del vector  $\underline{\mathbf{Y}}$ .

Dado que la dirección de  $\underline{\mathbf{Y}}$  coincide con el propio eje de giro de la rotación suma  $\alpha \oplus \beta$ , al aplicarle ésta al propio vector  $\underline{\mathbf{Y}}$ , éste no variará:

$$\underline{\mathbf{Y}} = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \underline{\mathbf{Y}} \quad (\text{AII.49})$$

cumpliendo, por tanto, 
$$\mathbf{R}_2^T \underline{\mathbf{Y}} = \mathbf{R}_1 \underline{\mathbf{Y}} \quad (\text{AII.50})$$

Ahora bien,  $\mathbf{R}_1$  y  $\mathbf{R}_2$  se pueden escribir en función de los respectivos vectores de Rodrigues como se indica en (AII.8.b):

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{I} + \frac{2}{1 + \underline{\mathbf{v}}_1^2} \left[ \tilde{\underline{\mathbf{v}}}_1 + \tilde{\underline{\mathbf{v}}}_1^2 \right] \quad \mathbf{R}_2^T = \mathbf{I} + \frac{2}{1 + \underline{\mathbf{v}}_2^2} \left[ -\tilde{\underline{\mathbf{v}}}_2 + \tilde{\underline{\mathbf{v}}}_2^2 \right]$$

Llevados a (AII.50), conducen a la siguiente ecuación lineal en  $\underline{\mathbf{Y}}$  :

$$\frac{1}{1 + \underline{\mathbf{v}}_2^2} \left[ -\tilde{\underline{\mathbf{v}}}_2 + \tilde{\underline{\mathbf{v}}}_2^2 \right] \underline{\mathbf{Y}} = \frac{1}{1 + \underline{\mathbf{v}}_1^2} \left[ \tilde{\underline{\mathbf{v}}}_1 + \tilde{\underline{\mathbf{v}}}_1^2 \right] \underline{\mathbf{Y}} \quad (\text{AII.51})$$

En esta ecuación, el primer miembro es un vector normal a  $\underline{\mathbf{v}}_2$ , y el segundo un vector normal a  $\underline{\mathbf{v}}_1$ ; como se supone que ambos miembros son iguales, el vector que representan,  $\underline{\mathbf{Z}}$ , necesariamente tiene que ser normal a  $\underline{\mathbf{v}}_1$  y  $\underline{\mathbf{v}}_2$ , y en consecuencia su dirección tiene que coincidir con la del vector  $\tilde{\underline{\mathbf{v}}}_1 \underline{\mathbf{v}}_2$ . Denotando  $\mu$  al módulo de  $\underline{\mathbf{Z}}$ , se

tendrá, por tanto, la doble igualdad:

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{v}}_1 + \tilde{\mathbf{v}}_1^2] \mathbf{Y} &= \mu(1 + \underline{\mathbf{v}}_1^2) \tilde{\mathbf{v}}_1 \underline{\mathbf{v}}_2 \\ [\tilde{\mathbf{v}}_2 - \tilde{\mathbf{v}}_2^2] \mathbf{Y} &= \mu(1 + \underline{\mathbf{v}}_2^2) \tilde{\mathbf{v}}_2 \underline{\mathbf{v}}_1 \end{aligned} \quad (\text{AII.52})$$

Extrayendo los factores comunes  $\tilde{\mathbf{v}}_1$  y  $\tilde{\mathbf{v}}_2$  en ambas ecuaciones, se llega a:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_1 \left[ [\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{v}}_1] \mathbf{Y} - \mu(1 + \underline{\mathbf{v}}_1^2) \underline{\mathbf{v}}_2 \right] &= \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{v}}_2 \left[ [\tilde{\mathbf{v}}_2 - \mathbf{I}] \mathbf{Y} + \mu(1 + \underline{\mathbf{v}}_2^2) \underline{\mathbf{v}}_1 \right] &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{AII.53})$$

que equivalen a:

$$\begin{aligned} [\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{v}}_1] \mathbf{Y} &= \lambda \underline{\mathbf{v}}_1 + \mu(1 + \underline{\mathbf{v}}_1^2) \underline{\mathbf{v}}_2 \\ [\tilde{\mathbf{v}}_2 - \mathbf{I}] \mathbf{Y} &= \mu(1 + \underline{\mathbf{v}}_2^2) \underline{\mathbf{v}}_1 + \gamma \underline{\mathbf{v}}_2 \end{aligned} \quad (\text{AII.54})$$

donde  $\lambda$  y  $\gamma$  son dos escalares que hay que determinar.

En estas ecuaciones los factores  $[\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{v}}_1]$  y  $[\tilde{\mathbf{v}}_2 - \mathbf{I}]$  se pueden invertir fácilmente con la ayuda de las relaciones (AI.19) del apéndice I, obteniéndose en tal caso:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= (\lambda + \mu \underline{\mathbf{v}}_1 \underline{\mathbf{v}}_1^T) \underline{\mathbf{v}}_1 + \mu \underline{\mathbf{v}}_2 - \mu \tilde{\mathbf{v}}_1 \underline{\mathbf{v}}_2 \\ \mathbf{Y} &= \mu \underline{\mathbf{v}}_1 - (\gamma + \mu \underline{\mathbf{v}}_1 \underline{\mathbf{v}}_1^T) \underline{\mathbf{v}}_2 + \mu \tilde{\mathbf{v}}_2 \underline{\mathbf{v}}_1 \end{aligned} \quad (\text{AII.55})$$

cuya compatibilidad exige que se cumpla:

$$\mathbf{Y} = \mu [ \underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2 - \tilde{\mathbf{v}}_1 \underline{\mathbf{v}}_2 ] \quad (\text{AII.56})$$

Fijada la dirección de  $\mathbf{Y}$ , sólo resta hallar el factor  $\mu$  para tener completamente determinado este vector. Denotando  $\mathbf{V}$  a la dirección de  $\mathbf{Y}$ :

$$\mathbf{V} := \underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2 - \tilde{\mathbf{v}}_1 \underline{\mathbf{v}}_2 \quad (\text{AII.57})$$

De la identidad  $\mathbf{R}(\mathbf{Y}) \equiv \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1$  se desprende:

$$\underline{\mathbf{v}}_2^T \mathbf{R} \underline{\mathbf{v}}_1 = \underline{\mathbf{v}}_2^T \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \underline{\mathbf{v}}_1 \quad (\text{AII.58})$$

Ahora bien, el segundo miembro de esta igualdad vale  $\underline{\mathbf{v}}_2^T \underline{\mathbf{v}}_1$  por ser  $\mathbf{R}_1 \underline{\mathbf{v}}_1 = \underline{\mathbf{v}}_1$  y  $\mathbf{R}_2 \underline{\mathbf{v}}_2 = \underline{\mathbf{v}}_2$ ; por otra parte, el primer miembro se calcula sustituyendo  $\mathbf{R}$  por (AII.8.b), previo cambio de  $\tilde{\mathbf{v}}$  por  $\underline{\mathbf{Y}}$ . Realizando estos cambios y simplificando el resultado se llega a la siguiente ecuación en  $\mu$ :

$$\underline{\mathbf{v}}_2^T [ \tilde{\mathbf{V}} + \mu \tilde{\mathbf{V}}^2 ] \underline{\mathbf{v}}_1 = 0 \quad (\text{AII.59})$$

que resuelta, proporciona el valor buscado de  $\mu$ :

$$\mu = - \frac{\underline{\mathbf{v}}_2^T \tilde{\mathbf{V}} \underline{\mathbf{v}}_1}{\underline{\mathbf{v}}_2^T \tilde{\mathbf{V}}^2 \underline{\mathbf{v}}_1} = \frac{\underline{\mathbf{v}}_2^T \tilde{\mathbf{v}}_1 \mathbf{V}}{\mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{v}}_2 \tilde{\mathbf{v}}_1 \mathbf{V}} \quad (\text{AII.60})$$

Introduciendo (AII.57) en (AII.60) se obtiene finalmente:

$$\mu = \frac{1}{1 - \underline{\mathbf{v}}_1^T \underline{\mathbf{v}}_2} \quad (\text{AII.61})$$

En conclusión, el vector de Rodrigues  $\underline{\mathbf{Y}}$  de la suma de dos rotaciones  $\underline{\mathbf{v}}_1$  y  $\underline{\mathbf{v}}_2$ , viene dado por la sencilla y elegante expresión:

$$\underline{\mathbf{Y}} = \frac{1}{1 - \underline{\mathbf{v}}_1^T \underline{\mathbf{v}}_2} \left[ \underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2 - \tilde{\mathbf{v}}_1 \underline{\mathbf{v}}_2 \right] \quad (\text{AII.62})$$

En el sistema de Rodrigues, por tanto, la composición de rotaciones resulta tan simple como lo es trabajando con cuaternios. En los demás sistemas triparamétricos, como el de vectores naturales o los no objetivos, la expresión final de la suma se complica mucho y no resulta práctica. Este hecho revela la importancia que tienen los sistemas de Rodrigues y Euler–Rodrigues –cuaternios– en la teoría de las rotaciones finitas. El primero tiene además la ventaja de ser vectorial.

De (AII.62) se deduce una serie interesante de propiedades de las rotaciones que se utilizan en el capítulo II y en el apéndice IV. En el siguiente apartado se recurre también a esta expresión para introducir una nueva ley de composición de rotaciones – la suma semitangencial– que sí es conmutativa.

**AII. 10.– ROTACIONES SEMITANGENCIALES**

Aunque la suma convencional de rotaciones no es conmutativa, si se modifica el sentido dado a esta ley de composición se puede lograr que lo sea, como probó Argyris con un simple ejemplo que pasamos a exponer.

Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos rotaciones arbitrarias; al sumarlas, aplicando primero  $\alpha$  y después  $\beta$ , se obtiene la rotación  $\alpha \oplus \beta$ ; y si se invierte este orden,  $\beta \oplus \alpha$ . En el sistema de parametrización de Rodrigues, denotando  $\underline{\mathbf{v}}_1$  y  $\underline{\mathbf{v}}_2$  a los vectores característicos de  $\alpha$  y  $\beta$ , los vectores de Rodrigues de las dos sumas  $\alpha \oplus \beta$  y  $\beta \oplus \alpha$  son, respectivamente:

$$\underline{\mathbf{Y}} = \frac{1}{1 - \underline{\mathbf{v}}_1^T \underline{\mathbf{v}}_2} \left[ \underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2 - \tilde{\underline{\mathbf{v}}}_1 \underline{\mathbf{v}}_2 \right] \tag{AII.63.a}$$

y

$$\underline{\mathbf{Y}}^* = \frac{1}{1 - \underline{\mathbf{v}}_1^T \underline{\mathbf{v}}_2} \left[ \underline{\mathbf{v}}_2 + \underline{\mathbf{v}}_1 - \tilde{\underline{\mathbf{v}}}_2 \underline{\mathbf{v}}_1 \right] \tag{AII.63.b}$$

siendo su diferencia:

$$\underline{\mathbf{Y}} - \underline{\mathbf{Y}}^* = \frac{2}{1 - \underline{\mathbf{v}}_1^T \underline{\mathbf{v}}_2} \tilde{\underline{\mathbf{v}}}_1 \underline{\mathbf{v}}_2 \tag{AII.64}$$

que sólo se anula si  $\underline{\mathbf{v}}_1$  y  $\underline{\mathbf{v}}_2$  tienen la misma dirección.

Supongamos ahora que  $\mathbf{n}_i$  es la base de referencia de los vectores  $\underline{\mathbf{v}}_1$  y  $\underline{\mathbf{v}}_2$ ; como invertir el orden de composición de las rotaciones  $\alpha$  y  $\beta$  equivale a cambiar la base fija de referencia  $\mathbf{n}_i$  por la móvil  $\mathbf{R}_1 \mathbf{n}_i$ , el vector de Rodrigues de la rotación  $\beta \oplus \alpha$  se podrá calcular también sustituyendo en (AII.63.a)  $\underline{\mathbf{v}}_2$  por  $\mathbf{R}_1 \underline{\mathbf{v}}_2$  –esto es, girando  $\underline{\mathbf{v}}_2$  con  $\alpha$ –; como, además, el producto escalar de los vectores  $\underline{\mathbf{v}}_1$  y  $\underline{\mathbf{v}}_2$  es idéntico al de  $\mathbf{R}_1 \underline{\mathbf{v}}_2$  y  $\underline{\mathbf{v}}_2$ , el cociente escalar en (AII.63) no variará, y se tendrá:

$$\underline{\mathbf{Y}}^* = \frac{1}{1 - \underline{\mathbf{v}}_1^T \underline{\mathbf{v}}_2} \left[ \underline{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{R}_1 \underline{\mathbf{v}}_2 - \tilde{\underline{\mathbf{v}}}_1 \mathbf{R}_1 \underline{\mathbf{v}}_2 \right] \tag{AII.65}$$

Por tanto, dependiendo de que venga definida la segunda rotación  $\beta$  por los vectores  $\underline{\mathbf{v}}_2$  o  $\mathbf{R}_1 \underline{\mathbf{v}}_2$  –esto es, se suponga el eje de giro fijo o móvil–, el vector de Rodrigues de la suma convencional de  $\alpha$  y  $\beta$  vendrá dado por la relación (AII.63.a) o (AII.63.b). Como al sumar ambas relaciones desaparece el término  $\tilde{\underline{\mathbf{v}}}_1 \underline{\mathbf{v}}_2$  y se obtiene

una expresión simétrica en  $\underline{\mathbf{v}}_1$  y  $\underline{\mathbf{v}}_2$ , si se modifica el concepto de suma de rotaciones y se define ésta como el resultado de promediar los dos tipos de composición (AII.63), la nueva ley de composición definida así, “ $\overset{s}{\oplus}$ ”, será conmutativa, y verificará:

$$\underline{\alpha} \overset{s}{\oplus} \underline{\beta} = \frac{1}{2} [\underline{\mathbf{Y}} + \underline{\mathbf{Y}}^*] = \frac{1}{1 - \underline{\mathbf{v}}_1^T \underline{\mathbf{v}}_2} [\underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2] \quad (\text{AII.66})$$

Argyris demostró además que esta composición equivalía a sustituir la segunda rotación  $\underline{\mathbf{v}}_2$  por otra  $\underline{\mathbf{v}}_2^s$ , que denominó *semitangencial* y definió así –en rigor no tiene mucho sentido aplicar este término a rotaciones aisladas, ya que lo que resulta propiamente semitangencial no son las rotaciones sino su ley de composición–:

$$\underline{\mathbf{v}}_2^s := \frac{1}{2} [\underline{\mathbf{v}}_2 + \mathbf{R}_1[\underline{\mathbf{v}}_2]] \quad (\text{AII.67})$$

La demostración de que la suma de  $\underline{\mathbf{v}}_1$  y  $\underline{\mathbf{v}}_2^s$  en el sentido convencional coincide con la semitangencial (AII.66) es inmediata; en efecto, denotando  $\underline{\mathbf{Y}}^s$  al vector de Rodrigues de esta suma  $\underline{\mathbf{v}}_1 \oplus \underline{\mathbf{v}}_2^s$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{Y}}^s &= \frac{1}{1 - \underline{\mathbf{v}}_1^T \underline{\mathbf{v}}_2^s} [\underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2^s - \tilde{\underline{\mathbf{v}}}_1 \underline{\mathbf{v}}_2^s] \\ &= \frac{1}{2(1 - \underline{\mathbf{v}}_1^T \underline{\mathbf{v}}_2)} \left\{ (\underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2 - \tilde{\underline{\mathbf{v}}}_1 \underline{\mathbf{v}}_2) + (\underline{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{R}_1[\underline{\mathbf{v}}_2] - \tilde{\underline{\mathbf{v}}}_1 \mathbf{R}_1[\underline{\mathbf{v}}_2]) \right\} \\ &= \frac{1}{2} [\underline{\mathbf{Y}} + \underline{\mathbf{Y}}^*] \end{aligned}$$

Como este resultado es simétrico en  $\underline{\mathbf{v}}_1$  y  $\underline{\mathbf{v}}_2$ , la suma semitangencial “ $\overset{s}{\oplus}$ ” es conmutativa –en la figura A.II.4 se aprecia cómo conmutan dos rotaciones ortogonales  $\underline{\mathbf{v}}_1$  y  $\underline{\mathbf{v}}_2$  al componerlas semitangencialmente–. Sin embargo, y a diferencia de la suma convencional, no es distributiva, como es fácil probar:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{v}}_1 \overset{s}{\oplus} \underline{\mathbf{v}}_2 &= \underline{\mathbf{v}}_2 \overset{s}{\oplus} \underline{\mathbf{v}}_1 \\ (\underline{\mathbf{v}}_1 \overset{s}{\oplus} \underline{\mathbf{v}}_2) \overset{s}{\oplus} \underline{\mathbf{v}}_3 &\neq \underline{\mathbf{v}}_1 \overset{s}{\oplus} (\underline{\mathbf{v}}_2 \overset{s}{\oplus} \underline{\mathbf{v}}_3) \end{aligned}$$

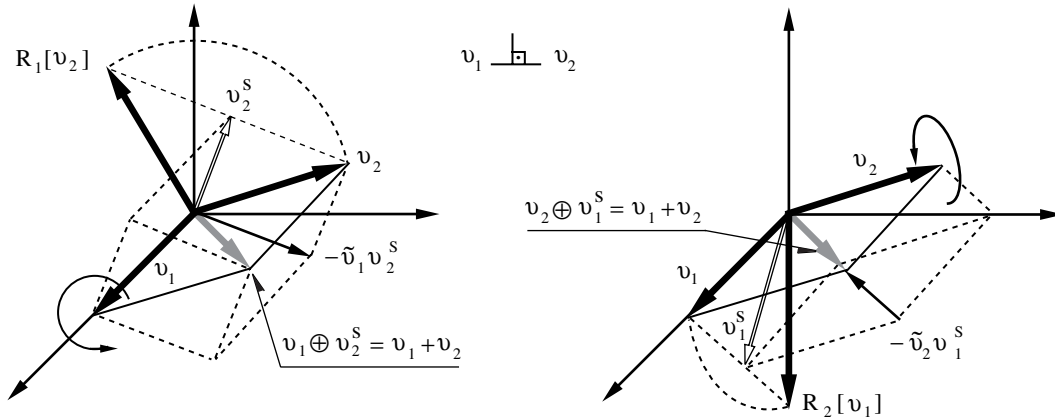


Figura AII.4.

*Conmutatividad en la composición semitangencial de rotaciones*

**AII. 11.- FORMA EXPONENCIAL DEL OPERADOR ROTACIÓN**

Toda rotación finita  $\mathbf{v}$  puede considerarse el resultado de sumar una serie infinita de rotaciones diferenciales idénticas  $d\mathbf{v}$ ; y el operador  $\mathbf{R}(\mathbf{v})$  el producto infinito de los correspondientes operadores diferenciales  $d\mathbf{R}(d\mathbf{v})$ , o, más exactamente, el límite de la potencia N-sima de  $\mathbf{R}(\mathbf{v}/N)$  al tender N a infinito:

$$\mathbf{R}(\mathbf{v}) = \lim_{N \rightarrow \infty} [\mathbf{R}(\mathbf{v}/N)]^N \tag{AII.68}$$

La norma de  $\mathbf{R}(\mathbf{v}/N)$  es de orden  $O(1/N)$ , y al crecer N tiende a  $\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{v}}/N$ , de modo que en el límite se tiene:

$$\mathbf{R}(\mathbf{v}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \mathbf{I} + \frac{\tilde{\mathbf{v}}}{N} \right]^N = \mathbf{I} + \frac{\tilde{\mathbf{v}}}{1!} + \frac{\tilde{\mathbf{v}}^2}{2!} + \frac{\tilde{\mathbf{v}}^3}{3!} + \dots \tag{AII.69}$$

Dada la coincidencia formal entre esta serie y el desarrollo de Taylor de la función exponencial  $e^{\tilde{\mathbf{v}}}$ , el operador  $\mathbf{R}(\mathbf{v})$  se representa en ocasiones en la forma simbólica:



$$\mathbf{R}(\mathbf{v}) := \text{Exp} [\tilde{\mathbf{v}}] := e^{\tilde{\mathbf{v}}} \quad (\text{AII.70})$$

que es la *forma exponencial del operador rotación* [A2].

Conviene subrayar, no obstante, el carácter puramente formal de (AII.70). Las propiedades características de la función exponencial no encuentran correspondencia directa en los operadores  $\mathbf{R}$ . El ejemplo más significativo lo encontramos en el producto, que es conmutativo para las funciones exponenciales y no para los operadores  $\mathbf{R}$ :

$$e^{\tilde{\mathbf{v}}_1} e^{\tilde{\mathbf{v}}_2} = \mathbf{R}_1(\tilde{\mathbf{v}}_1) \mathbf{R}_2(\tilde{\mathbf{v}}_2) = e^{\tilde{\mathbf{v}}_2 \oplus \tilde{\mathbf{v}}_1} \neq e^{\tilde{\mathbf{v}}_1 \oplus \tilde{\mathbf{v}}_2} = \mathbf{R}_2(\tilde{\mathbf{v}}_2) \mathbf{R}_1(\tilde{\mathbf{v}}_1) = e^{\tilde{\mathbf{v}}_2} e^{\tilde{\mathbf{v}}_1}$$

Naturalmente, la serie (AII.69) se podía haber obtenido también desarrollando por separado en (AII.7) las funciones escalares  $\text{sen}v/v$  y  $(1-\text{cos}v)/v^2$ , sumando los resultados, y transformándolos por medio de la propiedad (AI.9) del apéndice I.

En cualquier caso, la importancia práctica de este desarrollo es clara y no precisa muchos comentarios: si las rotaciones son muy pequeñas –o diferenciales–, los dos primeros términos de (AII.69) son suficientes para definir el operador  $\mathbf{R}$ , como se indicó en el apartado II.3 del capítulo II; sin embargo, si tratamos con problemas de naturaleza no lineal –por ejemplo, problemas de estabilidad o deformaciones con corrimientos moderados–, la aproximación a  $\mathbf{R}$  debe al menos contemplar los términos de segundo orden en  $\mathbf{v}$ , en cuyo caso:

$$\mathbf{R}(\mathbf{v}) \stackrel{(2)}{=} \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{v}}^2 \quad (\text{AII.71})$$

Si el problema fuera aún más complicado, pueden añadirse nuevos términos, tantos como sea necesario, generando así las respectivas teorías de primer orden, segundo orden,...etc. La ventaja de estas aproximaciones cuando el número de términos es pequeño –no mayor de tres– es que evitan tratar directamente con la expresión exacta de  $\mathbf{R}$ , que como hemos visto introduce funciones complejas de tipo racional o trigonométrico, sustituyendo aquélla por sencillas expresiones algebraicas mucho más simples y cómodas de manejar.

**AII. 12.– SINGULARIDADES.**

Al estudiar en el capítulo II las singularidades de los sistemas de parametrización, se prueba que no existe ningún sistema con un número inferior a 5 parámetros que sea regular, global y biunívoco al mismo tiempo, En este apartado, vamos a comprobarlo directamente en todos los sistemas de parametrización del cuadro II.1 que se han ido presentando a lo largo de este apéndice. Comencemos por los triparamétricos.

En el apartado AII.3 se probó la relación biunívoca entre el conjunto de rotaciones  $\mathbf{SO}(3) - \mathbf{R}_{-1}$  y el de operadores antimétricos  $\{ \tilde{\mathbf{v}} \in \mathfrak{so}(3) \mid -\pi < \nu < \pi \}$ . Esta aplicación, que caracteriza al sistema de parametrización de Rodrigues, no es global, pues no atribuye una terna de parámetros a ninguna de las rotaciones contenidas en  $\mathbf{R}_{-1}$ . Se puede no obstante completar estableciendo directamente una correspondencia entre los elementos de  $\mathbf{R}_{-1}$  y los de  $\mathbf{Y}$ :  $\{ \tilde{\mathbf{v}} \in \mathfrak{so}(3) \mid \nu = \pm \pi \}$  mediante sucesiones convergentes; ahora bien, como las sucesiones  $\tilde{\mathbf{v}}_1 = \text{tg}(-\pi/2 + \varepsilon_k) \mathbf{e}$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}_2 = \text{tg}(\pi/2 - \varepsilon_k) \mathbf{e}$ , con  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , convergen en  $\mathbf{SO}(3)$  a un mismo punto de  $\mathbf{R}_{-1}$ , y sin embargo en  $\mathbf{E}^3$  convergen a puntos antipodales de la esfera impropia ( $r = \infty$ ), no se evita con ello la discontinuidad de la aplicación (la biyección en  $r = \infty$  se corrige introduciendo un criterio de selección que asigne a cada rotación de  $\mathbf{R}_{-1}$  un único operador de  $\mathbf{Y}$ ; por ejemplo, escogiendo el signo adecuado del operador  $\pm \tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{Y}$  de modo que sea positivo el primer coeficiente no nulo de la serie  $\pm \tilde{\mathbf{v}}_{ij}$ ).

Tampoco son uniformes los sistemas definidos por los ángulos de Euler y Cardan. En efecto, para  $\theta = 0$  y  $\varphi = \pi/2$ , los operadores rotación (AII.3) y (AII.4) valen:

$$\mathbf{R}_E = \begin{bmatrix} \cos(\phi + \psi) & -\text{sen}(\phi + \psi) & 0 \\ \text{sen}(\phi + \psi) & \cos(\phi + \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \text{sen}(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) & 0 \\ -\cos(\theta + \phi) & \text{sen}(\theta + \phi) & 0 \end{bmatrix}$$

y a todas las parejas de ángulos  $\phi + \psi = \text{cte.}$  y  $\theta + \phi = \text{cte.}$  les corresponde un mismo operador  $\mathbf{R}$ . En consecuencia, tampoco son continuas las aplicaciones  $\mathbf{R} \rightarrow (\phi, \theta, \psi)$  y  $\mathbf{R} \rightarrow (\theta, \phi, \phi)$  en  $\theta = 0$  y  $\varphi = \pi/2$ . Si, para recuperar en estos casos la uniformidad de las aplicaciones, se conviniera en fijar el valor de  $\phi$  –por ejemplo, haciendo  $\phi = 0-$ , no se lograría con ello evitar las discontinuidades en aquellos puntos.

Por último, el sistema de parametrización natural  $\mathbf{v} = \nu \mathbf{e}$  ( $\nu \geq 0$ ) es multiforme: a cada rotación le asigna la serie de puntos  $(\nu + 2k\pi) \mathbf{e}$ , con  $k: 1, 2, \dots$ . Por otra parte, al origen  $O$  y a las superficies bidimensionales  $C_k: \{2k\pi \mathbf{e}\}$  de  $E^3$  les corresponde en este sistema un mismo operador: la rotación identidad  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$  –ver figura AII.5.–; por tanto la aplicación  $\mathbf{R} \rightarrow (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  es discontinua en cada una de las superficies  $C_k$ . También es discontinua en el contorno  $C_{1/2}$  de la esfera  $\nu \leq \pi$  que limita el mínimo dominio paramétrico de definición: a los puntos antipodales  $\mathbf{v} = \pi \mathbf{e}$  y  $\mathbf{v}' = \pi(-\mathbf{e})$  de este contorno les corresponde la misma rotación. Este último ejemplo prueba sin embargo que el espacio  $\mathbf{SO}(3)$ , aun cuando no sea homeomorfo a ningún subconjunto del espacio euclídeo  $E^3$ , sí lo es a la esfera  $\nu \leq \pi$ , si se identifican los puntos antipodales de la superficie que la limita –espacio de identificación con la topología correspondiente [K1]–. Recurriendo de nuevo a la topología, es fácil probar que este espacio de identificación es homeomorfo del espacio real proyectivo tridimensional  $\mathbb{R}(P^3)$  [K1], como se indicó en el apartado AII.5

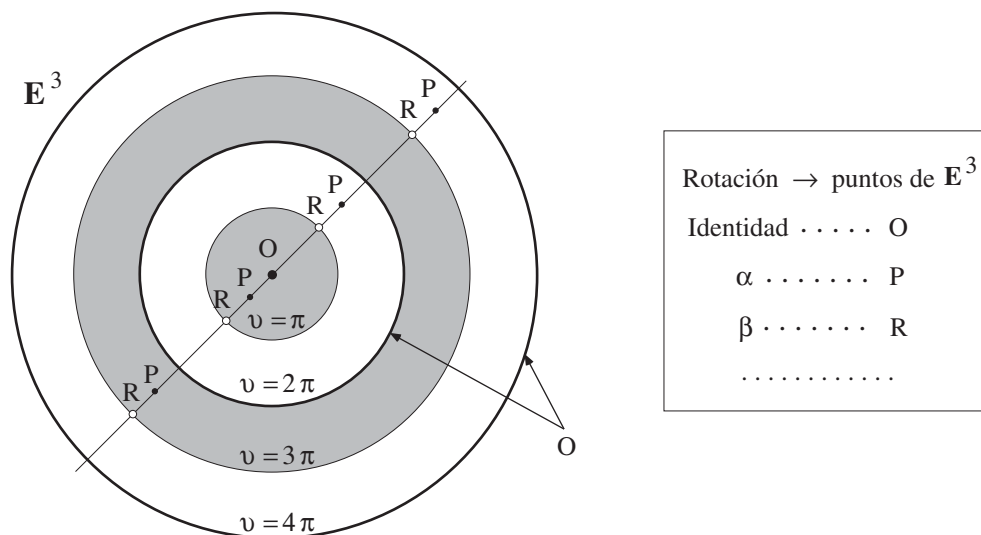


Figura AII.5.

*Multiplicidad y singularidades de una representación triparamétrica*

También se demuestra que no existe ningún homeomorfismo entre el grupo  $\mathbf{SO}(3)$  y algún subconjunto  $U$  del espacio euclídeo tetradimensional  $\mathbf{E}^4$ . Esta demostración es mucho más compleja que la anterior y no arroja nueva luz al tema, por lo que no nos detendremos en ella –referencias bibliográficas precisas se encuentran en [S3]–.

En conclusión, todos los sistemas triparamétricos del cuadro II.1 presentan discontinuidades. En contraste con éstos, los sistemas tetraparamétricos, como el de Euler–Rodrigues, son continuos, pero no biunívocos. Únicamente el pentaparamétrico de Stuelpnagel es regular, global y biunívoco, como probamos en el apartado AII.6.

### AII. 13.– REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- [A1] Altmann S.L., *Rotations, Quaternions and Double Groups*, Clarendon Press, Oxford, U.K., (1986).
- [A2] Argyris J.H., An Excursion into Large Rotations, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg.*, **32**, 85–155, (1982).
- [B1] Bahturin Y.A., *Basic Structures of Modern Algebra*, Kluwer Academic, Dordrecht, (1993).
- [B2] Bottema O. & Roth B., *Theoretical Kinematics*, North–Holland, Amsterdam, (1979). Reeditado por Dover Publications, Inc. New York, (1990).
- [G1] Goldstein H., *Classical Mechanics*, Addison–Wesley, Reading, MA. 2nd. ed., (1980). Traducido al español y publicado por Ed. Reverté. Barcelona, (1988).
- [G2] Gérardin M. Robert G. & Buchet P., Kinematic and Dynamic Analysis of Mechanisms. A Finite Element Approach Based on Euler Parameters, *Finite Element Methods for Nonlinear Problems*, ed. Bergan, Bathe & Wunderlich, Springer–Verlag, Berlin, (1986).
- [H1] Hui Cheng & Gupta, K.C., An Historical Note on Finite Rotations. *ASME Journal of Applied Mechanics*, **56**, 139–145, (1989).
- [K1] Kostrikin A., *Introducción al Álgebra*. Ed. Mir, Moscú, (1983).
- [L1] Lur’ é A.L., *Mécanique Analytique*. Vol. I. Ed. Masson, Paris, (1968).

- [P1] Pietraszkiewicz W., Finite Rotations and Lagrangean Description in the Non-Linear Theory of Shells. *Polish Scientific Publishers. Warszawa*, (1979).
- [P2] Pietraszkiewicz W. & Badur, J., Finite Rotations in the Description of Continuum Deformation. *Int. J. Engng Sci.* **21**, n° 9, 1097-1115, (1981).
- [R1] Rodrigues O., Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire, *J. de Mathématiques Pures et Appliquées*, **5**, 380-440, (1840).
- [S1] Shabana A.A., *Dynamics of Multibody Systems*, John Wiley & Sons, New York, (1989).
- [S2] Spurrier R.A., Comment on " Singularity-Free Extraction of a Quaternion from a Direction-Cosine Matrix", *Journal of Spacecraft*, **15**, n° 4, 255, (Jul-Aug, 1978).
- [S3] Stuelpnagel J., On the Parametrization of the Three-Dimensional Rotation Group. *SIAM Review*, **6**, n° 4, 422-430, (1964).
- [S4] Surana K.S. & Sorem R.M, Geometrically Non-Linear Formulation for Three Dimensional Curved Beam Elements with Large Rotations, *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, **28**, 43-73, (1989).
- [W1] Wehage R.A., Quaternions and Euler Parameters. A Brief Exposition, *Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical Systems Dynamics*, ed. E. Haug, Springer-Verlag, Berlin, (1984).

APÉNDICE III**LOS TENSORES FUNDAMENTALES**

En este apéndice se recoge el cálculo de los tensores fundamentales y sus derivadas en distintos sistemas de parametrización, así como un conjunto de demostraciones complementarias que se omitieron en el capítulo II para aligerar su lectura; en todas ellas juegan un papel esencial los operadores antisimétricos cuyas propiedades se resumen en el Apéndice I.

AIII.1 –Los tensores  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^*$  en el sistema de vectores naturales.

Por definición, los operadores  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^*$  relacionan las variaciones paramétricas  $d\alpha_i$  con los giros diferenciales en una base fija  $d\boldsymbol{\theta}$ , y los giros diferenciales en una base móvil  $d\boldsymbol{\theta}^*$ . En el sistema de Rodrigues los parámetros  $\alpha_i$  son las componentes del vector  $\underline{\mathbf{v}}$ , y  $\mathbf{G}$  viene dada por (II.28.a). En el sistema de vectores naturales, los parámetros  $\alpha_i$  son las componentes del vector natural  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{G}$  se puede deducir de (II.28.a) con el siguiente razonamiento:

$$\text{Dado que,} \quad d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{G} d\underline{\mathbf{v}} = 2\mu \left[ \mathbf{I} + \tilde{\underline{\mathbf{v}}} \right] d\underline{\mathbf{v}} \quad (\text{AIII.1})$$

$$\text{con} \quad \mu = \frac{1}{1 + \text{tg}^2(\nu/2)} = \cos^2(\nu/2), \quad (\text{AIII.2})$$

efectuando en (AIII.1) el siguiente cambio de variable:

$$\underline{\mathbf{v}} = h(\nu) \mathbf{v} \quad \therefore \quad h(\nu) = \frac{\text{tg } \nu/2}{\nu}, \quad (\text{AIII.3})$$

$$\text{se obtiene:} \quad d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{G} d\underline{\mathbf{v}} = \mathbf{G} [ dh(\nu) \mathbf{v} + h(\nu) d\mathbf{v} ] \quad (\text{AIII.4})$$

Ahora bien, la diferencial del módulo del vector  $\mathbf{v}$  es:

$$v^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{v} \quad \rightarrow \quad v dv = \mathbf{v}^T d\mathbf{v} \quad (\text{AIII.5})$$

y la diferencial de  $h(v)$  en la dirección  $d\mathbf{v}$  vale por tanto:

$$dh(v) = \frac{h'(v)}{v} \mathbf{v}^T d\mathbf{v} \quad (\text{AIII.6})$$

Llevando, pues, (AIII.6) a (AIII.4), se obtiene operando el siguiente resultado:

$$d\boldsymbol{\theta} = \mu \left[ 2 \frac{h'(v)}{v} \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + h(v) \mathbf{I} + \mu h^2(v) \tilde{\mathbf{v}} \right] d\mathbf{v}$$

si además se tiene en cuenta que  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}^2 + \theta^2 \mathbf{I}$ , se puede escribir también:

$$d\boldsymbol{\theta} = 2\mu \left[ [h(v) + v h'(v)] \mathbf{I} + h^2(v) \tilde{\mathbf{v}} + \frac{h'(v)}{v} \tilde{\mathbf{v}}^2 \right] d\mathbf{v} \quad (\text{AIII.7})$$

$$\text{donde: } 2\mu h(v) = \frac{\text{sen } v}{v} \quad \therefore \quad 2\mu v h'(v) = 1 - \frac{\text{sen } v}{v} \quad \therefore \quad 2\mu h^2(v) = \frac{1 - \cos v}{v^2} \quad (\text{AIII.8})$$

$$\text{En definitiva, } \quad \mathbf{G} = \mathbf{I} + \frac{1 - \cos v}{v^2} \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{v^2} \left[ 1 - \frac{\text{sen } v}{v} \right] \tilde{\mathbf{v}}^2 \quad (\text{AIII.9})$$

Si hubiéramos considerado una base móvil, en vez de una fija, partiendo de:

$$d\boldsymbol{\theta}^* = \mathbf{G}^*(\underline{\mathbf{v}}) d\underline{\mathbf{v}} = 2\mu \left[ \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{v}} \right] d\underline{\mathbf{v}} \quad (\text{AIII.10})$$

habríamos obtenido con un razonamiento similar el operador  $\mathbf{G}^*$ , que en este caso sólo difiere de  $\mathbf{G}$  en el signo del segundo sumando.

$$\mathbf{G}^* = \mathbf{I} - \frac{1 - \cos v}{v^2} \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{v^2} \left[ 1 - \frac{\text{sen } v}{v} \right] \tilde{\mathbf{v}}^2 \quad (\text{AIII.11})$$

AIII.2 – Los tensores  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^*$  en los sistemas no objetivos de Euler y Cardan.

Los ángulos de Euler y Cardan pertenecen a una clase especial de sistemas no objetivos que se caracterizan porque en ellos toda rotación se descompone en la suma de tres giros elementales  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  con relación a unos ejes, fijos o móviles, establecidos de antemano; dicho de otra forma, en ellos el operador  $\mathbf{R}$  es el producto de otros tres:  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\beta \mathbf{R}_\gamma$ . Si los giros elementales dependen de una variable escalar  $t$ , el operador  $\mathbf{R}$  también dependerá de esta variable y su derivada valdrá:

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_\alpha \mathbf{R}_\beta \mathbf{R}_\gamma + \mathbf{R}_\alpha \dot{\mathbf{R}}_\beta \mathbf{R}_\gamma + \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\beta \dot{\mathbf{R}}_\gamma \quad (\text{AIII.12})$$

Por tanto, 
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha \tilde{\boldsymbol{\omega}}_\beta \mathbf{R}_\alpha^T + \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\beta \tilde{\boldsymbol{\omega}}_\gamma \mathbf{R}_\beta^T \mathbf{R}_\alpha^T$$

y 
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^* = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_\gamma^T \mathbf{R}_\beta^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_\alpha \mathbf{R}_\gamma \mathbf{R}_\beta + \mathbf{R}_\gamma^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_\beta \mathbf{R}_\gamma + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_\gamma$$

esto es, 
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha \tilde{\boldsymbol{\omega}}_\beta + \overline{\mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\beta \boldsymbol{\omega}_\gamma}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^* = \overline{\mathbf{R}_\gamma^T \mathbf{R}_\beta^T \boldsymbol{\omega}_\alpha} + \mathbf{R}_\gamma^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}_\beta + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_\gamma$$

o, lo que es equivalente, 
$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha \boldsymbol{\omega}_\beta + \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\beta \boldsymbol{\omega}_\gamma \quad (\text{AIII.13})$$

$$\boldsymbol{\omega}^* = \mathbf{R}_\gamma^T \mathbf{R}_\beta^T \boldsymbol{\omega}_\alpha + \mathbf{R}_\gamma^T \boldsymbol{\omega}_\beta + \boldsymbol{\omega}_\gamma \quad (\text{AIII.14})$$

De estas dos relaciones se extraen inmediatamente los operadores  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^*$ ; por ejemplo, de la última se obtiene:

$$\boldsymbol{\omega}^* = \mathbf{G}^* \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_\alpha \\ \boldsymbol{\omega}_\beta \\ \boldsymbol{\omega}_\gamma \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{R}_\gamma^T \mathbf{R}_\beta^T \mathbf{e}_\alpha ; & \mathbf{R}_\gamma^T \mathbf{e}_\beta ; & \mathbf{e}_\gamma \\ | & | & | \end{bmatrix} \quad (\text{AIII.15})$$



supuestas  $\mathbf{e}_\alpha$ ,  $\mathbf{e}_\beta$  y  $\mathbf{e}_\gamma$  las direcciones de los giros elementales en la base móvil; esto es, admitiendo que:  $\boldsymbol{\omega}_\alpha^* = \mathbf{e}_\alpha \omega_\alpha$ ;  $\boldsymbol{\omega}_\beta^* = \mathbf{e}_\beta \omega_\beta$ ;  $\boldsymbol{\omega}_\gamma^* = \mathbf{e}_\gamma \omega_\gamma$ .

En concreto, para los ángulos de Euler se tiene:

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\phi & 0 \\ \text{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_\gamma = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\text{sen}\psi & 0 \\ \text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_\alpha = [0, 0, 1] \quad \therefore \quad \mathbf{e}_\beta = [1, 0, 0] \quad \therefore \quad \mathbf{e}_\gamma = [0, 0, 1]$$

$$\mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} \text{sen}\psi \text{sen}\theta & \cos\psi & 0 \\ \cos\psi \text{sen}\theta & -\text{sen}\psi & 0 \\ \cos\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{AIII.16})$$

Y para los ángulos Cardan:

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \text{sen}\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_\gamma = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\phi & 0 \\ \text{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_\alpha = [1, 0, 0] \quad \therefore \quad \mathbf{e}_\beta = [0, 1, 0] \quad \therefore \quad \mathbf{e}_\gamma = [0, 0, 1]$$

$$\mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} \cos\phi \cos\phi & \text{sen}\phi & 0 \\ -\text{sen}\phi \cos\phi & \cos\phi & 0 \\ \text{sen}\phi & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{AIII.17})$$

En ambos sistemas de parametrización, la complejidad de los operadores  $\mathbf{R}$  que reflejan las expresiones (AII.3) del Apéndice II contrasta con la sencillez de los tensores  $\mathbf{G}^*$  que acabamos de deducir.

Procediendo del mismo modo con la relación (AIII.13), o bien derivando directamente el producto  $\mathbf{R} \mathbf{G}^*$  –si se tiene en cuenta la propiedad (II.32)–, se obtiene la expresión general de  $\mathbf{G}$ :

$$\mathbf{G} = \left[ \begin{array}{c|c|c} | & | & | \\ \mathbf{e}_\alpha & \mathbf{R}_\alpha \mathbf{e}_\beta & \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\beta \mathbf{e}_\gamma \\ | & | & | \end{array} \right] \quad (\text{AIII.18})$$

que, concretamente, en el sistema de Euler vale:

$$\mathbf{G} = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & \cos\phi & \text{sen}\phi \text{sen}\theta \\ 0 & \text{sen}\phi & -\cos\phi \text{sen}\theta \\ 1 & 0 & \cos\theta \end{array} \right] \quad (\text{AIII.19})$$

y en el sistema Cardan:

$$\mathbf{G} = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & \text{sen}\phi \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta \cos\phi \\ 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta \cos\phi \end{array} \right] \quad (\text{AIII.20})$$

### AIII.3 – Los tensores $\mathbf{G}$ y $\mathbf{G}^*$ en el sistema tetraparamétrico de Euler–Rodrigues.

Teniendo en cuenta que el pseudovector de Rodrigues  $\underline{\mathbf{v}}$  está relacionado con los parámetros de Euler–Rodrigues ( $p_0, \mathbf{p}$ ) del siguiente modo:

$$\underline{\mathbf{v}} := \text{tg} \frac{\nu}{2} \mathbf{e} = \frac{\mathbf{p}}{p_0} \quad (\text{AIII.21})$$

y, por tanto,

$$d\underline{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{p}}{p_0} - \frac{\mathbf{p}}{p_0^2} dp_0 \quad (\text{AIII.22})$$

las relaciones generales  $d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{G}(\underline{\mathbf{v}})d\underline{\mathbf{v}}$  y  $d\boldsymbol{\theta}^* = \mathbf{G}^*(\underline{\mathbf{v}})d\underline{\mathbf{v}}$  en el sistema de Rodrigues, con los operadores (II.28), se pueden escribir así en función de los nuevos parámetros:

$$d\boldsymbol{\theta} = 2 \left[ \begin{array}{c|c|c} | & | & | \\ -\mathbf{p} & p_0 \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{p}} & \\ | & | & | \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} dp_0 \\ | \\ d\mathbf{p} \\ | \end{array} \right] \quad (\text{AIII.23.a})$$

$$d\boldsymbol{\theta}^* = 2 \begin{bmatrix} | & | \\ -\mathbf{p} & p_o \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{p}} \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp_o \\ | \\ d\mathbf{p} \\ | \end{bmatrix} \quad (\text{AIII.23.b})$$

De modo que los operadores  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^*$  en este sistema son:

$$\mathbf{G} = 2 \begin{bmatrix} | & | \\ -\mathbf{p} & p_o \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{p}} \\ | & | \end{bmatrix} \quad (\text{AIII.24.a})$$

$$\mathbf{G}^* = 2 \begin{bmatrix} | & | \\ -\mathbf{p} & p_o \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{p}} \\ | & | \end{bmatrix} \quad (\text{AIII.24.b})$$

Ahora bien, como las cuatro componentes del cuaternio  $d\mathbf{p}$  ( $dp_o$ ,  $d\mathbf{p}$ ) están ligadas entre sí por la condición  $p_o dp_o + \mathbf{p}^T d\mathbf{p} = 0$ , una de ellas, por ejemplo  $dp_o$ , puede expresarse en función de las otras tres:

$$dp_o = - \frac{\mathbf{p}^T d\mathbf{p}}{p_o}$$

Si se procede así, las relaciones (AIII.23) se transforman en éstas otras:

$$d\boldsymbol{\theta} = 2 \left[ p_o \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{p}} + \frac{\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}}{p_o} \right] d\mathbf{p} \quad (\text{AIII.25.a})$$

$$d\boldsymbol{\theta} = 2 \left[ p_o \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{p}} + \frac{\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}}{p_o} \right] d\mathbf{p} \quad (\text{AIII.25.b})$$

obteniéndose, finalmente:

$$\mathbf{G} = 2 \left[ \mathbf{0} ; p_o \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{p}} + \frac{\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}}{p_o} \right] \quad (\text{AIII.26.a})$$

$$\mathbf{G}^* = 2 \left[ \mathbf{0} ; p_o \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{p}} + \frac{\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}}{p_o} \right] \quad (\text{AIII.26.b})$$

Estos resultados prueban que en el sistema de Euler–Rodrigues los tensores  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^*$  no son únicos. Una expresión más general se obtiene sumando los productos de (AIII.24) y (AIII.26) por los escalares  $(1-\lambda)$  y  $\lambda$ , siendo  $\lambda$  un real cualquiera:

$$\mathbf{G} = 2 \begin{bmatrix} | & | \\ (\lambda-1)\mathbf{p} & p_o\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{p}} + \frac{\lambda}{p_o}\mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \\ | & | \end{bmatrix}_{3 \times 4} \quad (\text{AIII.27.a})$$

$$\mathbf{G}^* = 2 \begin{bmatrix} | & | \\ (\lambda-1)\mathbf{p} & p_o\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{p}} + \frac{\lambda}{p_o}\mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \\ | & | \end{bmatrix}_{3 \times 4} \quad (\text{AIII.27.b})$$

$$[ \mathbf{d}\boldsymbol{\theta} ] = \mathbf{G} \begin{bmatrix} dq_o \\ d\mathbf{q} \end{bmatrix} \quad \therefore \quad [ \mathbf{d}\boldsymbol{\theta}^* ] = \mathbf{G}^* \begin{bmatrix} dq_o \\ d\mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (\text{AIII.28})$$

Particularizando el valor de  $\lambda$  se obtienen distintas expresiones de los operadores  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^*$ . Por ejemplo, haciendo  $\lambda = 0$ , se obtiene (AIII.24); y tomando  $\lambda = 1$ , (AIII.26). Invertiendo precisamente (AIII.26), se obtienen las matrices  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}^*$ , de orden  $4 \times 3$ :

$$\begin{bmatrix} dq_o \\ d\mathbf{q} \end{bmatrix} = \mathbf{F} [ \mathbf{d}\boldsymbol{\theta} ] \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} dq_o \\ d\mathbf{q} \end{bmatrix} = \mathbf{F}^* [ \mathbf{d}\boldsymbol{\theta}^* ] \quad (\text{AIII.29})$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\mathbf{p}^T \\ p_o\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \mathbf{F}^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\mathbf{p}^T \\ p_o\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad (\text{AIII.30})$$

Es importante notar que el problema (AIII.29) no admite más que una solución y por tanto  $\mathbf{F}$ , a diferencia de  $\mathbf{G}$ , sí es única.

Si hubiéramos eliminado otro parámetro del cuaternio distinto a  $p_o$ , habríamos llegado a resultados parecidos. De las cuatro expresiones del tipo (AIII.27) que se pueden obtener de este modo, sólo tres son independientes, y con ellas se puede construir la forma general del operador  $\mathbf{G}$ , que en este caso depende de tres escalares. Se comprueba de inmediato que en un sistema con  $3+\underline{\sigma}$  parámetros rotacionales la expresión general de  $\mathbf{G}$  depende siempre de  $3\underline{\sigma}$  constantes arbitrarias.

AIII.4 – Los tensores  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\hat{\mathbf{S}}$  y  $\hat{\mathbf{T}}$  en distintos sistemas de parametrización

Los tensores  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\hat{\mathbf{S}}$  y  $\hat{\mathbf{T}}$  se definieron en el capítulo II por medio de las siguientes relaciones diferenciales –(II.67)–:

$$\mathbf{v}^T d\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) := d\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{S}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) \quad \therefore \quad d\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{v} := \mathbf{T}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathbf{v}^T d\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}) := d\boldsymbol{\alpha}^T \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) \quad \therefore \quad d\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{v} := \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\alpha}$$

Por tanto, una vez hallados los operadores  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^*$  en un determinado sistema de parametrización, el cálculo de estos tensores se reduce a sencillas operaciones algebraicas; si, además, el sistema es objetivo y central –vectorial–, este cálculo se simplifica mucho, ya que entonces se cumple (II.70) y de uno cualquiera de los tensores  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\hat{\mathbf{S}}$  y  $\hat{\mathbf{T}}$  se puede deducir el resto.

Por ejemplo, en el sistema paramétrico de Rodrigues, el operador  $\mathbf{G}$  viene dado por (II.28.a); y en el natural, por (AIII.9). En este último caso, el operador (AIII.9) se puede escribir también así:

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}) = \mathbf{I} + \eta(\nu)\tilde{\mathbf{v}} + \xi(\nu)\tilde{\mathbf{v}}^2 \quad (\text{AIII.31.a})$$

o bien, 
$$\mathbf{G}(\mathbf{v}) = \zeta(\nu)\mathbf{I} + \eta(\nu)\tilde{\mathbf{v}} + \xi(\nu)\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \quad (\text{AIII.31.b})$$

con: 
$$\zeta(\theta) := \frac{\text{sen } \theta}{\theta} \quad \therefore \quad \eta(\theta) := \frac{1}{\theta^2}(1 - \cos \theta)$$

$$\xi(\theta) := \frac{1}{\theta^2}[1 - \zeta(\theta)] \quad (\text{AIII.32})$$

Las diferenciales de  $\mathbf{G}$  en los sistemas natural y de Rodrigues valen por tanto:

$$d\mathbf{G} = 2\mu(\underline{\mathbf{v}})[d\tilde{\mathbf{v}} - (\underline{\mathbf{v}} \cdot d\underline{\mathbf{v}})\mathbf{G}] \quad (\text{AIII.33})$$

$$d\mathbf{G} = [D\zeta(\nu)\mathbf{I} + D\eta(\nu)\tilde{\mathbf{v}} + D\xi(\nu)\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}](\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}) + \eta(\nu)d\tilde{\mathbf{v}} + \xi(\nu)[d\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes d\mathbf{v}] \quad (\text{AIII.34})$$

siendo D el operador diferencial:  $D := \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}$ ; esto es, tomando:

$$D\zeta(\theta) = \xi(\theta) - \eta(\theta) \quad \therefore \quad D\eta(\theta) = \frac{1-2\eta(\theta)}{\theta^2} - \xi(\theta) \quad (\text{AIII.35})$$

$$D\xi(\theta) = \frac{\eta(\theta) - 3\xi(\theta)}{\theta^2}$$

Conviene advertir que aunque estas funciones no están definidas para  $\theta = 0$ , se pueden extender por continuidad a este punto pasando al límite (AIII.32) – (AIII.35), esto es, haciendo:  $\mu(0) = 1$ ;  $\eta(0) = 1/2$ ;  $\zeta(0) = 1$ ;  $\xi(0) = 1/6$ ;  $D\eta(0) = -1/6$ ;  $D\zeta(0) = -1/3$  y  $D\xi(0) = 0$ .

Si calculamos ahora el producto  $\mathbf{v}^T d\mathbf{G}$  y sustituimos  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}^T$  por  $\mathbf{b}^T(\mathbf{a} \otimes \mathbf{c})$ , obtenemos en ambos sistemas de parametrización:

$$\mathbf{v}^T d\mathbf{G} = - d\underline{\mathbf{v}}^T [2\mu(\underline{\mathbf{v}})\tilde{\mathbf{v}} + \mu(\underline{\mathbf{v}})(\underline{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{v})\mathbf{G}]$$

$$\mathbf{v}^T d\mathbf{G} = d\underline{\mathbf{v}}^T \left[ [D\zeta(\underline{\mathbf{v}})(\underline{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{v}) - D\eta(\underline{\mathbf{v}})(\underline{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{v})\tilde{\mathbf{v}} + \right.$$

$$D\xi(\underline{\mathbf{v}})(\underline{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})\underline{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{v}] - \eta(\underline{\mathbf{v}})\tilde{\mathbf{v}} +$$

$$\left. \xi(\underline{\mathbf{v}})[\underline{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{v} + (\underline{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})\mathbf{I}] \right]$$

En consecuencia, en el sistema de Rodrigues el tensor  $\hat{\mathbf{T}}$  vale:

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}; \underline{\mathbf{v}}) = -2\mu(\underline{\mathbf{v}})[\tilde{\mathbf{v}} + (\underline{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{v})\mathbf{G}] \quad (\text{AIII.36})$$

y en el sistema natural:

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}; \mathbf{v}) = D\zeta \underline{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{v} - D\eta(\underline{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{v})\tilde{\mathbf{v}} - \eta\tilde{\mathbf{v}} +$$

$$D\xi(\underline{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})\underline{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{v} + \xi[\underline{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{v} + (\underline{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v})\mathbf{I}] \quad (\text{AIII.37})$$

Teniendo en cuenta ahora las relaciones (II.70), deducimos los cuatro tensores  $\mathbf{S}, \mathbf{T}, \hat{\mathbf{S}}$  y  $\hat{\mathbf{T}}$  en estos dos sistemas vectoriales; los resultados se muestran en la tabla AIII.1 (téngase en cuenta que en los sistemas vectoriales se cumple  $\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{S}^T$  y  $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{T}^T$ ).

	<i>Rodrigues</i>	<i>Natural</i>
<b>T</b>	$2\mu(\underline{v}) [\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{G}^T(\mathbf{v} \otimes \underline{v})]$	$D\zeta \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + D\eta \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \eta \tilde{\mathbf{v}} + D\xi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \xi [\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I}]$
<b>S</b>	$2\mu(\underline{v}) [\tilde{\mathbf{v}} - (\underline{v} \otimes \mathbf{v}) \mathbf{G}^T]$	$D\zeta \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + D\eta \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \tilde{\mathbf{v}} + \eta \tilde{\mathbf{v}} + D\xi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \xi [\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I}]$
<b><math>\hat{\mathbf{S}}</math></b>	$-2\mu(\underline{v}) [\tilde{\mathbf{v}} + (\underline{v} \otimes \mathbf{v}) \mathbf{G}]$	$D\zeta \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - D\eta \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \tilde{\mathbf{v}} - \eta \tilde{\mathbf{v}} + D\xi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \xi [\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I}]$
<b><math>\hat{\mathbf{T}}</math></b>	$-2\mu(\underline{v}) [\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{G}(\mathbf{v} \otimes \underline{v})]$	$D\zeta \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - D\eta \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \eta \tilde{\mathbf{v}} + D\xi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \xi [\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I}]$

Tabla AIII.1

En los sistemas que no son vectoriales, como los ángulos de Euler y Cardan o el tetraparamétrico de Euler–Rodrigues, estos tensores no se deducen tan fácilmente unos de otros, siendo necesario calcularlos por separado. Así, por ejemplo, en los sistemas no objetivos de Euler y Cardan, se tiene:

*Euler:*

$$d\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & -\text{sen}\phi & \text{cos}\phi \text{sen}\theta \\ 0 & \text{cos}\phi & \text{sen}\phi \text{sen}\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\phi + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{sen}\phi \text{cos}\theta \\ 0 & 0 & -\text{cos}\phi \text{cos}\theta \\ 0 & 0 & -\text{sen}\theta \end{bmatrix} d\theta \quad (\text{AIII.38})$$

$$d\mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} \text{cos}\psi \text{sen}\theta & -\text{sen}\psi & 0 \\ -\text{sen}\psi \text{sen}\theta & -\text{cos}\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\psi + \begin{bmatrix} \text{sen}\psi \text{cos}\theta & 0 & 0 \\ \text{cos}\psi \text{cos}\theta & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & 0 \end{bmatrix} d\theta \quad (\text{AIII.39})$$

Cardan:

$$d\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{sen}\theta & -\text{cos}\theta \text{cos}\phi \\ 0 & \text{cos}\theta & -\text{sen}\theta \text{cos}\phi \end{bmatrix} d\theta + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{cos}\phi \\ 0 & 0 & \text{sen}\theta \text{sen}\phi \\ 0 & 0 & -\text{cos}\theta \text{sen}\phi \end{bmatrix} d\phi \quad (\text{AIII.40})$$

$$d\mathbf{G}^* = \begin{bmatrix} -\text{sen}\phi \text{cos}\phi & \text{cos}\phi & 0 \\ -\text{cos}\phi \text{cos}\phi & -\text{sen}\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\phi + \begin{bmatrix} -\text{cos}\phi \text{sen}\phi & 0 & 0 \\ \text{sen}\phi \text{sen}\phi & 0 & 0 \\ \text{cos}\phi & 0 & 0 \end{bmatrix} d\phi \quad (\text{AIII.41})$$

Y, al igual que antes, de aquí se obtienen los tensores  $\mathbf{S}, \mathbf{T}, \hat{\mathbf{S}}$  y  $\hat{\mathbf{T}}$  –tabla AIII.2–:

	Ángulos de Euler	Ángulos Cardan
$\alpha^T$	$[\phi; \theta; \psi]$	$[\theta; \phi; \phi]$
$\mathbf{T}(\mathbf{v}, \alpha)$	$\begin{bmatrix} 0 & \text{sen}\psi \text{cos}\theta v^1 & a(\mathbf{v}, \theta, \psi) \\ 0 & \text{cos}\psi \text{cos}\theta v^1 & b(\mathbf{v}, \theta, \psi) \\ 0 & -\text{sen}\theta v^1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -\text{cos}\phi \text{sen}\phi v^1 & a'(\mathbf{v}, \phi, \phi) \\ 0 & \text{sen}\phi \text{sen}\phi v^1 & b'(\mathbf{v}, \phi, \phi) \\ 0 & \text{cos}\phi v^1 & 0 \end{bmatrix}$
$\mathbf{S}(\mathbf{v}, \alpha)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e(\mathbf{v}, \theta, \psi) & 0 & 0 \\ d(\mathbf{v}, \theta, \psi) & c(\mathbf{v}, \psi) & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e'(\mathbf{v}, \phi, \phi) & 0 & 0 \\ d'(\mathbf{v}, \phi, \phi) & c'(\mathbf{v}, \phi) & 0 \end{bmatrix}$
$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{v}, \alpha)$	$\begin{bmatrix} 0 & f(\mathbf{v}, \phi) & g(\mathbf{v}, \phi, \theta) \\ 0 & 0 & h(\mathbf{v}, \phi, \theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & f'(\mathbf{v}, \theta) & g'(\mathbf{v}, \theta, \phi) \\ 0 & 0 & h'(\mathbf{v}, \theta, \phi) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}, \alpha)$	$\begin{bmatrix} k(\mathbf{v}, \phi, \theta) & \text{sen}\phi \text{cos}\theta v^3 & 0 \\ l(\mathbf{v}, \phi, \theta) & -\text{cos}\phi \text{cos}\theta v^3 & 0 \\ 0 & -\text{sen}\theta v^3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & \text{cos}\phi v^3 & 0 \\ k'(\mathbf{v}, \theta, \phi) & \text{sen}\theta \text{sen}\phi v^3 & 0 \\ l'(\mathbf{v}, \theta, \phi) & -\text{cos}\theta \text{sen}\phi v^3 & 0 \end{bmatrix}$

Tabla AIII.2



siendo  $a, b, \dots, l'$  las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
 a(\mathbf{v}, \theta, \psi) &= \cos \psi \operatorname{sen} \theta v^1 - \operatorname{sen} \psi v^2 & a'(\mathbf{v}, \varphi, \phi) &= -\operatorname{sen} \phi \cos \varphi v^1 + \cos \phi v^2 \\
 b(\mathbf{v}, \theta, \psi) &= -\operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta v^1 - \cos \psi v^2 & b'(\mathbf{v}, \varphi, \phi) &= -\cos \phi \cos \varphi v^1 - \operatorname{sen} \phi v^2 \\
 c(\mathbf{v}, \psi) &= -\operatorname{sen} \psi v^1 - \cos \psi v^2 & c'(\mathbf{v}, \phi) &= \cos \phi v^1 - \operatorname{sen} \phi v^2 \\
 d(\mathbf{v}, \theta, \psi) &= c(\mathbf{v}, \psi - \pi/2) \operatorname{sen} \theta & d'(\mathbf{v}, \varphi, \phi) &= c'(\mathbf{v}, \phi + \pi/2) \cos \varphi \\
 e(\mathbf{v}, \theta, \psi) &= -c(\mathbf{v}, \psi) \cos \theta - \operatorname{sen} \theta v^3 & e'(\mathbf{v}, \varphi, \phi) &= -c'(\mathbf{v}, \phi) \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi v^3 \\
 f(\mathbf{v}, \phi) &= -\operatorname{sen} \phi v^1 + \cos \phi v^2 & f'(\mathbf{v}, \theta) &= -\operatorname{sen} \theta v^2 + \cos \theta v^3 \\
 g(\mathbf{v}, \phi, \theta) &= f(\mathbf{v}, \phi - \pi/2) \operatorname{sen} \theta & g'(\mathbf{v}, \theta, \varphi) &= f'(\mathbf{v}, \theta + \pi/2) \cos \varphi \\
 h(\mathbf{v}, \phi, \theta) &= -f(\mathbf{v}, \phi) \cos \theta - \operatorname{sen} \theta v^3 & h'(\mathbf{v}, \theta, \varphi) &= \cos \varphi v^1 - f'(\mathbf{v}, \theta) \operatorname{sen} \varphi \\
 k(\mathbf{v}, \phi, \theta) &= -\operatorname{sen} \phi v^2 + \operatorname{sen} \theta \cos \phi v^3 & k'(\mathbf{v}, \theta, \varphi) &= -\operatorname{sen} \theta v^2 - \cos \theta \cos \varphi v^3 \\
 l(\mathbf{v}, \phi, \theta) &= \cos \phi v^2 + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi v^3 & l'(\mathbf{v}, \theta, \varphi) &= \cos \theta v^2 - \operatorname{sen} \theta \cos \varphi v^3
 \end{aligned}$$

Pasando ahora al sistema tetraparamétrico de Euler–Rodrigues, las relaciones (AIII.27), diferenciadas, proporcionan:

$$d\mathbf{G} = 2 \left[ (\lambda - 1) d\mathbf{p} ; \left[ \mathbf{I} - \frac{\lambda}{p_o^2} \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \right] dp_o + d\tilde{\mathbf{p}} + \frac{\lambda}{p_o} [d\mathbf{p} \otimes \mathbf{p} + \mathbf{p} \otimes d\mathbf{p}] \right] \quad (\text{AIII.42})$$

$$d\mathbf{G}^* = 2 \left[ (\lambda - 1) d\mathbf{p} ; \left[ \mathbf{I} - \frac{\lambda}{p_o^2} \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \right] dp_o - d\tilde{\mathbf{p}} + \frac{\lambda}{p_o} [d\mathbf{p} \otimes \mathbf{p} + \mathbf{p} \otimes d\mathbf{p}] \right] \quad (\text{AIII.43})$$

con lo cual, si  $\lambda = 0$ , se tiene:

$$d\mathbf{G} = 2 \left[ -d\mathbf{p} ; \mathbf{I} dp_o + d\tilde{\mathbf{p}} \right] \quad (\text{AIII.44})$$

$$d\mathbf{G}^* = 2 \left[ -d\mathbf{p} ; \mathbf{I} dp_o - d\tilde{\mathbf{p}} \right] \quad (\text{AIII.45})$$

y multiplicando estas diferenciales, a derecha e izquierda, por dos vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{z}$  de dimensiones 3 y 4, respectivamente, se obtienen los tensores buscados  $\mathbf{S}, \mathbf{T}, \hat{\mathbf{S}}$  y  $\hat{\mathbf{T}}$ :

$$\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) = 2 \left[ \begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{v}^T - \frac{\lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{p})}{p_o^2} \mathbf{p}^T \\ \hline (\lambda - 1)\mathbf{v} & \left[ \frac{\lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{p})}{p_o} \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{v}} + \frac{\lambda}{p_o} \mathbf{v} \otimes \mathbf{p} \right] \end{array} \right] \quad (\text{AIII.46})$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) = 2 \left[ \begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{v}^T - \frac{\lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{p})}{p_o^2} \mathbf{p}^T \\ \hline (\lambda - 1)\mathbf{v} & \left[ \frac{\lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{p})}{p_o} \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{v}} + \frac{\lambda}{p_o} \mathbf{v} \otimes \mathbf{p} \right] \end{array} \right] \quad (\text{AIII.47})$$

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\alpha}) = 2 \left[ \begin{array}{c|c} z - \frac{\lambda(\mathbf{z} \cdot \mathbf{p})}{p_o^2} \mathbf{p} & \left[ (\lambda - 1)z_1 + \frac{\lambda}{p_o} (\mathbf{z} \cdot \mathbf{p}) \right] \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{z}} + \frac{\lambda}{p_o} \mathbf{p} \otimes \mathbf{z} \end{array} \right] \quad (\text{AIII.48})$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\alpha}) = 2 \left[ \begin{array}{c|c} z - \frac{\lambda(\mathbf{z} \cdot \mathbf{p})}{p_o^2} \mathbf{p} & \left[ (\lambda - 1)z_1 + \frac{\lambda}{p_o} (\mathbf{z} \cdot \mathbf{p}) \right] \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{z}} + \frac{\lambda}{p_o} \mathbf{p} \otimes \mathbf{z} \end{array} \right] \quad (\text{AIII.49})$$

donde  $\boldsymbol{\alpha} = [p_o; \mathbf{p}]$  y  $\mathbf{z} = [z_1; z_2; z_3; z_4] = [z_1; \tilde{\mathbf{z}}]$ . Nótese que mientras  $\mathbf{S}$  y  $\hat{\mathbf{S}}$  son matrices cuadradas de cuarto orden,  $\hat{\mathbf{T}}$  y  $\mathbf{T}$  son rectangulares, de orden  $3 \times 4$ .

Estos operadores se simplifican mucho si se toma  $\lambda = 0$ , en cuyo caso:

$$\mathbf{S}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) = 2 \left[ \begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{v}^T \\ \hline -\mathbf{v} & \tilde{\mathbf{v}} \end{array} \right] \quad \therefore \quad \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) = 2 \left[ \begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{v}^T \\ \hline -\mathbf{v} & -\tilde{\mathbf{v}} \end{array} \right] \quad (\text{AIII.50})$$

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\alpha}) = 2 \left[ \begin{array}{c} \mathbf{z} \\ -z_1 \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{z}} \end{array} \right] \quad \therefore \quad \mathbf{T}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\alpha}) = 2 \left[ \begin{array}{c} \mathbf{z} \\ -z_1 \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{z}} \end{array} \right] \quad (\text{AIII.51})$$

y al resultar  $\hat{\mathbf{S}}$  antisimétrico,  $2\mathbf{H}_2 = \hat{\mathbf{S}} + \hat{\mathbf{S}}^T = \mathbf{0}$  (AIII.52)

AIII.5 – El tensor  $\mathbf{\Lambda}$  en distintos sistemas de parametrización

El tensor  $\mathbf{\Lambda}$  viene definido por una cualquiera de las tres relaciones diferenciales siguientes:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^T d\delta\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{z} &= d\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{\Lambda}(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \boldsymbol{\alpha})\delta\boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{v}^T d\mathbf{T}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\alpha}) &= d\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{\Lambda}(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \boldsymbol{\alpha}) \\ d\mathbf{S}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha})\mathbf{z} &= \mathbf{\Lambda}(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\alpha}\end{aligned}\tag{AIII.53}$$

donde  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{z}$  son dos vectores arbitrarios, fijos, del espacio. Por tanto,  $\mathbf{\Lambda}$  se obtiene diferenciando uno cualquiera de los operadores  $\mathbf{G}^*$ ,  $\mathbf{T}$  ó  $\mathbf{S}$ . Por ejemplo, diferenciando  $\mathbf{G}^*$  en el sistema vectorial de Rodrigues, se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Lambda}(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \underline{\mathbf{v}}) &= \\ -2\mu \left[ \mathbf{S}(\mathbf{v}; \underline{\mathbf{v}})(\mathbf{z} \otimes \underline{\mathbf{v}}) + (\mathbf{v}^T \mathbf{G}^*(\underline{\mathbf{v}})\mathbf{z})\mathbf{I} + (\underline{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{z})\mathbf{S}^T(\mathbf{v}; \underline{\mathbf{v}}) \right]\end{aligned}\tag{AIII.54}$$

En el sistema natural, sin embargo, los resultados se complican mucho más. En este caso, para condensar el resultado, conviene introducir el siguiente operador  $D^2$  :

$$D^2 := \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right]\tag{AIII.55}$$

que aplicado a las funciones (AIII.32), proporciona:

$$\begin{aligned}D^2\zeta(\theta) &= \frac{1}{\theta^2} [3(\eta(\theta) - \xi(\theta)) - 1] + \xi(\theta) \\ D^2\eta(\theta) &= \frac{1}{\theta^2} [D\zeta(\theta) - 4D\eta(\theta)] \\ D^2\xi(\theta) &= -\frac{1}{\theta^2} [D^2\zeta(\theta) + 4D\xi(\theta)]\end{aligned}\tag{AIII.56}$$

Con esta notación, se tiene:

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \underline{\mathbf{v}}) = & [D^2\eta(\underline{\mathbf{v}}) \underline{\mathbf{v}}^\top \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{z} + D^2\xi(\underline{\mathbf{v}}) \mathbf{v}^\top \tilde{\mathbf{v}}^2 \mathbf{z}] (\underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{v}}) + \\ & [D\eta(\underline{\mathbf{v}}) \underline{\mathbf{v}}^\top \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{z} + D\xi(\underline{\mathbf{v}}) \mathbf{v}^\top \tilde{\mathbf{v}}^2 \mathbf{z}] \mathbf{I} + \\ & D\eta(\underline{\mathbf{v}}) (\tilde{\mathbf{v}} \mathbf{z} \otimes \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{z} \tilde{\mathbf{v}}) + \\ & \xi(\underline{\mathbf{v}}) \Theta(\mathbf{v}; \mathbf{z}) + 2D\xi(\underline{\mathbf{v}}) \Psi(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \underline{\mathbf{v}}) \end{aligned} \quad (\text{AIII.57})$$

$$\begin{aligned} \Theta(\mathbf{v}; \mathbf{z}) = & \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{z}} \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{z} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{z} \\ \Psi(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \underline{\mathbf{v}}) = & (\mathbf{z} \cdot \underline{\mathbf{v}}) \mathbf{v} \otimes \underline{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} \cdot \underline{\mathbf{v}}) \mathbf{z} \otimes \underline{\mathbf{v}} - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (\text{AIII.58})$$

Por otra parte, en los sistemas no objetivos de Euler y Cardan las diferenciales segundas de  $\mathbf{G}^*$  son, respectivamente:

$$\begin{aligned} d^2\mathbf{G}^* = & \begin{bmatrix} -\text{sen}\psi \text{sen}\theta & 0 & 0 \\ -\text{cos}\psi \text{sen}\theta & 0 & 0 \\ -\text{cos}\theta & 0 & 0 \end{bmatrix} d\theta^2 + 2 \begin{bmatrix} \text{cos}\psi \text{cos}\theta & 0 & 0 \\ -\text{sen}\psi \text{cos}\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\psi d\theta \\ & + \begin{bmatrix} -\text{sen}\psi \text{sen}\theta & -\text{cos}\psi & 0 \\ -\text{cos}\psi \text{sen}\theta & \text{sen}\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\psi^2 \end{aligned} \quad (\text{AIII.59})$$

$$\begin{aligned} d^2\mathbf{G}^* = & \begin{bmatrix} -\text{cos}\phi \text{cos}\phi & 0 & 0 \\ \text{sen}\phi \text{cos}\phi & 0 & 0 \\ -\text{sen}\phi & 0 & 0 \end{bmatrix} d\phi^2 + 2 \begin{bmatrix} \text{sen}\phi \text{sen}\phi & 0 & 0 \\ \text{cos}\phi \text{sen}\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\phi d\phi \\ & + \begin{bmatrix} -\text{cos}\phi \text{cos}\phi & -\text{sen}\phi & 0 \\ \text{sen}\phi \text{cos}\phi & -\text{cos}\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\phi^2 \end{aligned} \quad (\text{AIII.60})$$

En consecuencia, en estos dos sistemas el operador  $\Lambda$  vale:

*Ángulos de Euler :*

$$\Lambda(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \{\phi, \theta, \psi\}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \theta, \psi) & \beta(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \theta, \psi) \\ 0 & \beta(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \theta, \psi) & \gamma(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \theta, \psi) \end{bmatrix} \quad (\text{AIII.61})$$

$$\text{con } \begin{cases} \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \theta, \psi) = z^1 e(\mathbf{v}, \theta + \pi/2, \psi) \\ \beta(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \theta, \psi) = z^1 d(\mathbf{v}, \theta + \pi/2, \psi) \\ \gamma(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \theta, \psi) = v^1 b(\mathbf{z}, \theta, \psi) - v^2 a(\mathbf{z}, \theta, \psi) \end{cases}$$

Ángulos Cardan :

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \{\theta, \varphi, \phi\}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha'(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \varphi, \phi) & \beta'(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \varphi, \phi) \\ 0 & \beta'(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \varphi, \phi) & \gamma'(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \varphi, \phi) \end{bmatrix} \quad (\text{AIII.62})$$

$$\text{con } \begin{cases} \alpha'(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \varphi, \phi) = z^1 e'(\mathbf{v}, \varphi + \pi/2, \phi) \\ \beta'(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \varphi, \phi) = z^1 d'(\mathbf{v}, \varphi + \pi/2, \phi) \\ \gamma'(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \varphi, \phi) = v^1 b'(\mathbf{z}, \varphi, \phi) - v^2 a'(\mathbf{z}, \varphi, \phi) \end{cases}$$

Finalmente, en el sistema tetraparamétrico de Euler-Rodrigues, se tiene:

$$d\delta\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) = 2 [ \mathbf{0} ; \mathbf{a} ] \quad (\text{AIII.63})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & \frac{2\lambda}{p_o^3} \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} dp_o \delta p_o - \frac{\lambda}{p_o^2} [d\mathbf{p} \otimes \mathbf{p} + \mathbf{p} \otimes d\mathbf{p}] \delta p_o - \\ & - \frac{\lambda}{p_o^2} [\delta\mathbf{p} \otimes \mathbf{p} + \mathbf{p} \otimes \delta\mathbf{p}] dp_o + \frac{\lambda}{p_o} [d\mathbf{p} \otimes \delta\mathbf{p} + \delta\mathbf{p} \otimes d\mathbf{p}] \end{aligned} \quad (\text{AIII.64})$$

con  $\boldsymbol{\alpha} = [ p_o ; \mathbf{p} ]$ .

Por tanto, volviendo a escribir  $\mathbf{z}$  en la forma  $[ z_1 ; \mathbf{z} ]$ , el operador  $\mathbf{\Lambda}$  queda:

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{p}, \lambda) = 2\lambda \left[ \begin{array}{c|c} \frac{2}{p_o^3} (\mathbf{p}\mathbf{v})(\mathbf{p}\mathbf{z}) & -\frac{1}{p_o^2} [(\mathbf{p}\mathbf{v})\mathbf{z}^T + (\mathbf{p}\mathbf{z})\mathbf{v}^T] \\ \hline -\frac{1}{p_o^2} [(\mathbf{p}\mathbf{v})\mathbf{z} + (\mathbf{p}\mathbf{z})\mathbf{v}] & \frac{1}{p_o} [\mathbf{v} \otimes \mathbf{z} + \mathbf{z} \otimes \mathbf{v}] \end{array} \right] \quad (\text{AIII.65})$$

que se anula para  $\lambda = 0$ .

AIII.6 – El tensor  $\hat{\mathbf{A}}$  en distintos sistemas de parametrización

Este tensor viene definido por una de las tres relaciones diferenciales siguientes:

$$\mathbf{v}^T d\delta\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{z} = d\boldsymbol{\alpha}^T \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \boldsymbol{\alpha}) \delta\boldsymbol{\alpha}$$

$$d\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha})\mathbf{z} = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathbf{v}^T d\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\alpha}) = d\boldsymbol{\alpha}^T \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \boldsymbol{\alpha})$$

Como en los sistemas vectoriales se da la relación:  $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{A}(\mathbf{z}; \mathbf{v}; -\boldsymbol{\alpha})$  y  $\mathbf{A}$  es conocido, no es preciso calcular  $\hat{\mathbf{A}}$ . Por otra parte, en el sistema tetraparamétrico de Euler–Rodrigues se tiene  $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{v}; \mathbf{z}; \boldsymbol{\alpha}) \equiv \mathbf{A}(\mathbf{z}; \mathbf{v}; \boldsymbol{\alpha})$  –compárense las expresiones de  $d\mathbf{G}$  y  $d\mathbf{G}^*$  (AIII.42) y (AIII.43)–. Estas sencillas relaciones no se dan sin embargo en los sistemas triparamétricos no vectoriales, como pueden ser los ángulos de Euler y Cardan; en estos casos, hay que recurrir al cálculo directo de  $\hat{\mathbf{A}}$ , comenzando por hallar  $d^2\mathbf{G}$ . Los resultados finales son:

*Ángulos de Euler:*

$$d^2\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\text{sen}\phi\text{sen}\theta \\ 0 & 0 & \text{cos}\phi\text{sen}\theta \\ 0 & 0 & -\text{cos}\theta \end{bmatrix} d\theta^2 + 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{cos}\phi\text{cos}\theta \\ 0 & 0 & \text{sen}\phi\text{cos}\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\phi d\theta + \begin{bmatrix} 0 & -\text{cos}\phi & -\text{sen}\phi\text{sen}\theta \\ 0 & -\text{sen}\phi & \text{cos}\phi\text{sen}\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\phi^2 \quad (\text{AIII.66})$$

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \{\phi, \theta, \psi\}) = \begin{bmatrix} \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \phi, \theta) & \beta(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \phi, \theta) & 0 \\ \beta(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \phi, \theta) & \gamma(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \phi, \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{AIII.67})$$

$$\text{con} \quad \begin{cases} \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \phi, \theta) = z^2 f(\mathbf{v}, \phi + \pi/2) + z^3 \text{sen} \theta f(\mathbf{v}, \phi) \\ \beta(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \phi, \theta) = z^3 g(\mathbf{v}, \phi, \theta + \pi/2) \\ \gamma(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \phi, \theta) = z^3 h(\mathbf{v}, \phi, \theta + \pi/2) \end{cases} \quad (\text{AIII.68})$$

*Ángulos Cardan:*

$$\begin{aligned} d^2 \mathbf{G} = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\text{sen} \varphi \\ 0 & 0 & \text{sen} \theta \cos \varphi \\ 0 & 0 & -\cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} d\varphi^2 + 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta \text{sen} \varphi \\ 0 & 0 & \text{sen} \theta \text{sen} \varphi \end{bmatrix} d\varphi d\theta + \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \theta & \text{sen} \theta \cos \varphi \\ 0 & -\text{sen} \theta & -\cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} d\theta^2 \end{aligned} \quad (\text{AIII.69})$$

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \{\theta, \varphi, \phi\}) = \begin{bmatrix} \alpha'(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \theta, \varphi) & \beta'(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \theta, \varphi) & 0 \\ \beta'(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \theta, \varphi) & \gamma'(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \theta, \varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{AIII.70})$$

$$\text{con} \quad \begin{cases} \alpha'(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \theta, \varphi) = z^2 f'(\mathbf{v}, \theta + \pi/2) - z^3 \cos \varphi f'(\mathbf{v}, \theta) \\ \beta'(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \theta, \varphi) = z^3 g'(\mathbf{v}, \theta, \varphi + \pi/2) \\ \gamma'(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \theta, \varphi) = z^3 h'(\mathbf{v}, \theta, \varphi + \pi/2) \end{cases} \quad (\text{AIII.71})$$

Las funciones  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $f'$ ,  $g'$  y  $h'$  que figuran tanto en (AIII.69) como en (AIII.71), son las mismas del apartado AIII.4 de este Apéndice.

### AIII.7. –Diferencial del tensor $\mathbf{F}$ en el sistema paramétrico de Rodrigues

La variación del vector de Rodrigues  $\mathbf{v}$  de una rotación cuando se añade un giro diferencial  $d\theta$ , viene dada por la relación (II.24), si el sistema de referencia es fijo, o bien la relación (II.25), si es móvil, y los operadores  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}^*$  por (II.27).

Suponiendo que el sistema de referencia es fijo, si se aplica un segundo giro  $\delta\theta$ , la diferenciales primera y segunda del vector de Rodrigues valdrán:

$$d\underline{\mathbf{v}} = \mathbf{F}(\underline{\mathbf{v}})d\theta$$

$$d^2 \underline{\mathbf{v}} = [D\mathbf{F}(\underline{\mathbf{v}}) \cdot \delta\theta] d\theta \quad (\text{AIII.72})$$

con 
$$\mathbf{F}(\underline{\mathbf{v}}) := \frac{1}{2} [\mathbf{I} - \tilde{\underline{\mathbf{v}}} + \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{v}}]$$

Para hallar la diferencial segunda  $d^2 \underline{\mathbf{v}}$  debemos, por tanto, calcular previamente la diferencial de  $\mathbf{F}$  en la dirección  $\delta\theta$ ; ésta vale:

$$D\mathbf{F}(\underline{\mathbf{v}}) \cdot \delta\theta = -D\tilde{\underline{\mathbf{v}}} \cdot \delta\theta + [D\underline{\mathbf{v}} \cdot \delta\theta] \otimes \underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{v}} \otimes [D\underline{\mathbf{v}} \cdot \delta\theta] \quad (\text{AIII.73})$$

siendo:

a) 
$$D\tilde{\underline{\mathbf{v}}} \cdot \delta\theta = \mathbf{F}(\underline{\mathbf{v}}) \cdot \delta\theta = \frac{1}{2} [\delta\theta - \tilde{\underline{\mathbf{v}}}\delta\theta + (\underline{\mathbf{v}} \cdot \delta\theta)\tilde{\underline{\mathbf{v}}}] \mathbf{F}(\underline{\mathbf{v}}) \delta\theta$$

b) 
$$[D\underline{\mathbf{v}} \cdot \delta\theta] \otimes \underline{\mathbf{v}} = \mathbf{F}(\underline{\mathbf{v}})(\delta\theta \otimes \underline{\mathbf{v}})$$

c) 
$$\underline{\mathbf{v}} \otimes [D\underline{\mathbf{v}} \cdot \delta\theta] = \underline{\mathbf{v}} \otimes (\mathbf{F}(\underline{\mathbf{v}})\delta\theta)$$

Agrupando estos términos y desarrollando los productos en que figura el operador  $\mathbf{F}(\underline{\mathbf{v}})$ , se llega finalmente a:

$$D\mathbf{F}(\underline{\mathbf{v}}) \cdot \delta\theta = \frac{1}{4} \left[ -\delta\tilde{\theta} - (\underline{\mathbf{v}} \cdot \delta\theta)\tilde{\underline{\mathbf{v}}} + \delta\theta \otimes \underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{v}} \otimes \delta\theta + 2\mathbf{F}(\underline{\mathbf{v}})\delta\theta \otimes \underline{\mathbf{v}} + 2\underline{\mathbf{v}} \otimes \delta\theta \mathbf{F}^T(\underline{\mathbf{v}}) \right] \quad (\text{AIII.74})$$

Denotando, como en el capítulo II,  $\mathbf{m}_i$  ( $i: 1, 2, 3$ ) a los tres vectores básicos de  $\mathbb{E}^3$  y  $\mathbf{F}_j$  al producto  $\mathbf{F} \mathbf{m}_j$ , esto es, al vector que forma la columna  $j$  de la matriz  $\mathbf{F}$ , llevando (AIII.74) a (AIII.72) y sustituyendo  $\delta\theta$  por  $\mathbf{m}_i \delta t$  y  $d\theta$  por  $\mathbf{m}_i dt$ , se obtiene:



$$d^2 \underline{\mathbf{v}} = D\mathbf{F}_j \cdot \mathbf{n}_i dt \delta t$$

con

$$D\mathbf{F}_j \cdot \mathbf{n}_i = \frac{1}{4} \left[ (\mathbf{I} + \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{m}}_j \mathbf{n}_i - \underline{v}_{1j} \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{n}_i - \underline{v}_i \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{n}_j + \right. \\ \left. 2 \underline{v}_j \mathbf{n}_i + 2 \underline{v}_i \underline{v}_j \underline{\mathbf{v}} \right] \quad (\text{AIII.75})$$

$$\text{Y en conclusión,} \quad D\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n}_j - D\mathbf{F}_j \cdot \mathbf{n}_i = \mathbf{F}(\underline{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{m}}_i \mathbf{n}_j \quad (\text{AIII.76})$$

$$\text{o, si se prefiere,} \quad D\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n}_j - D\mathbf{F}_j \cdot \mathbf{n}_i = e(i j m) \mathbf{F}_m \quad (\text{AIII.77})$$

que equivalen a las dos relaciones (II.61) y (II.34) del capítulo II, si bien éstas se han obtenido ahora de forma directa.

#### AIII.8 –Diferencial del tensor $\mathbf{G}$ en el sistema paramétrico de Rodrigues

La matriz  $\mathbf{G}$  en el sistema paramétrico de Rodrigues adopta la forma:

$$\mathbf{G}(\underline{\mathbf{v}}) = 2\mu \left[ \mathbf{I} + \tilde{\underline{\mathbf{v}}} \right] \quad \text{con} \quad \mu = \frac{1}{1 + \underline{\mathbf{v}}^2}$$

y sus diferenciales en las direcciones  $d\boldsymbol{\theta}$  y  $\delta\boldsymbol{\theta}$  valen:

$$d\mu = -2 (\underline{\mathbf{v}} \cdot d\underline{\mathbf{v}}) \mu^2$$

$$d\mathbf{G} = D\mathbf{G} \cdot d\boldsymbol{\theta} = -2 \mu \left[ (\underline{\mathbf{v}} \cdot d\underline{\mathbf{v}}) \mathbf{G} + d\tilde{\underline{\mathbf{v}}} \right] \quad (\text{AIII.78.a})$$

$$\delta\mathbf{G} = D\mathbf{G} \cdot \delta\boldsymbol{\theta} = -2 \mu \left[ (\underline{\mathbf{v}} \cdot \delta\underline{\mathbf{v}}) \mathbf{G} + \delta\tilde{\underline{\mathbf{v}}} \right] \quad (\text{AIII.78.b})$$

de donde,

$$d\mathbf{G} \delta\underline{\mathbf{v}} - \delta\mathbf{G} d\underline{\mathbf{v}} = 2\mu \left[ (\underline{\mathbf{v}} \cdot \delta\underline{\mathbf{v}}) \mathbf{G} d\underline{\mathbf{v}} - (\underline{\mathbf{v}} \cdot d\underline{\mathbf{v}}) \mathbf{G} \delta\underline{\mathbf{v}} + \delta\tilde{\underline{\mathbf{v}}} d\underline{\mathbf{v}} - d\tilde{\underline{\mathbf{v}}} \delta\underline{\mathbf{v}} \right]$$

Por otra parte, se tiene:

$$\tilde{\mathbf{G}} \delta \underline{\mathbf{v}} = 2\mu [ \delta \tilde{\underline{\mathbf{v}}} + \tilde{\underline{\mathbf{v}}} \delta \underline{\mathbf{v}} ] = 2\mu [ \delta \tilde{\underline{\mathbf{v}}} + \tilde{\underline{\mathbf{v}}} \delta \tilde{\underline{\mathbf{v}}} - \delta \tilde{\underline{\mathbf{v}}} \tilde{\underline{\mathbf{v}}} ]$$

y en consecuencia,

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{G}} \delta \underline{\mathbf{v}}] \mathbf{G} d\underline{\mathbf{v}} &= 4\mu^2 [ \delta \tilde{\underline{\mathbf{v}}} + \tilde{\underline{\mathbf{v}}} \delta \tilde{\underline{\mathbf{v}}} - \delta \tilde{\underline{\mathbf{v}}} \tilde{\underline{\mathbf{v}}} ] [ \mathbf{I} + \tilde{\underline{\mathbf{v}}} ] d\underline{\mathbf{v}} = \\ &4\mu^2 [ \delta \tilde{\underline{\mathbf{v}}} d\underline{\mathbf{v}} + \tilde{\underline{\mathbf{v}}} \delta \tilde{\underline{\mathbf{v}}} d\underline{\mathbf{v}} + \tilde{\underline{\mathbf{v}}} \delta \tilde{\underline{\mathbf{v}}} \tilde{\underline{\mathbf{v}}} d\underline{\mathbf{v}} - \delta \tilde{\underline{\mathbf{v}}} \tilde{\underline{\mathbf{v}}}^2 d\underline{\mathbf{v}} ] \end{aligned} \quad (\text{AIII.79})$$

Ahora bien, en esta expresión los tres últimos términos encerrados dentro del paréntesis se pueden desarrollar del siguiente modo:

$$\tilde{\underline{\mathbf{v}}} \delta \tilde{\underline{\mathbf{v}}} d\underline{\mathbf{v}} = (\underline{\mathbf{v}} \cdot d\underline{\mathbf{v}}) \delta \underline{\mathbf{v}} - (\underline{\mathbf{v}} \cdot \delta \underline{\mathbf{v}}) d\underline{\mathbf{v}}$$

$$\delta \tilde{\underline{\mathbf{v}}} \tilde{\underline{\mathbf{v}}}^2 d\underline{\mathbf{v}} = -(\underline{\mathbf{v}} \cdot d\underline{\mathbf{v}}) \tilde{\underline{\mathbf{v}}} \delta \underline{\mathbf{v}} + v^2 \delta \tilde{\underline{\mathbf{v}}} d\underline{\mathbf{v}}$$

$$\tilde{\underline{\mathbf{v}}} \delta \tilde{\underline{\mathbf{v}}} \tilde{\underline{\mathbf{v}}} d\underline{\mathbf{v}} = -(\underline{\mathbf{v}} \cdot \delta \underline{\mathbf{v}}) \tilde{\underline{\mathbf{v}}} d\underline{\mathbf{v}}$$

Llevando éstos de nuevo a (AIII.79), se obtiene:

$$[\tilde{\mathbf{G}} \delta \underline{\mathbf{v}}] \mathbf{G} d\underline{\mathbf{v}} = 2\mu [ 2 \delta \tilde{\underline{\mathbf{v}}} d\underline{\mathbf{v}} + (\underline{\mathbf{v}} \cdot d\underline{\mathbf{v}}) \mathbf{G} \delta \underline{\mathbf{v}} - (\underline{\mathbf{v}} \cdot \delta \underline{\mathbf{v}}) \mathbf{G} d\underline{\mathbf{v}} ]$$

y como  $\delta \tilde{\underline{\mathbf{v}}} d\underline{\mathbf{v}} - d \tilde{\underline{\mathbf{v}}} \delta \underline{\mathbf{v}} = 2 \delta \tilde{\underline{\mathbf{v}}} d\underline{\mathbf{v}}$ , puede asegurarse que:

$$d\mathbf{G} \delta \underline{\mathbf{v}} - \delta \mathbf{G} d\underline{\mathbf{v}} = [\tilde{\mathbf{G}} \delta \underline{\mathbf{v}}] \mathbf{G} d\underline{\mathbf{v}} \quad (\text{AIII.80})$$

Haciendo ahora  $\delta \underline{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\varepsilon}_j \delta t$  y  $d\underline{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\varepsilon}_i dt$  en (AII.13), y eliminando el factor común  $dt \delta t$ , se llega de nuevo a la relación (II.64) del capítulo II:

$$[D\mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j] \boldsymbol{\varepsilon}_i - [D\mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i] \boldsymbol{\varepsilon}_j = [\tilde{\mathbf{G}} \boldsymbol{\varepsilon}_i] \mathbf{G} \boldsymbol{\varepsilon}_j \quad (\text{AIII.81})$$



## APÉNDICE IV

### **DEMOSTRACIONES COMPLEMENTARIAS**

Este Apéndice recoge una serie de demostraciones y desarrollos de interés que no se incluyeron en los capítulos III y IV. Aun cuando de ellos no se extraigan resultados enteramente nuevos, suponen un enfoque distinto de algunas cuestiones importantes tratadas en dichos capítulos y contribuyen a esclarecerlas.

#### AIV.1 –Demostración general de las fórmulas (II.101) y (II.102)

A partir de la figura II.7 podemos establecer las siguientes relaciones generales:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(t, s + ds) &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha} + d\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{R}(\boldsymbol{\tau}_0 ds) \mathbf{R}_0 \\
 \mathbf{R}(t, s + ds) &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\tau}_0 ds) \mathbf{R}_0 \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}^* + d\boldsymbol{\alpha}^*) \\
 \mathbf{R}(t, s + ds) &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{R}_0 \mathbf{R}(\boldsymbol{\tau}^* ds) \\
 \mathbf{R}(t, s + ds) &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\tau} ds) \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{R}_0
 \end{aligned}
 \tag{AIV.1}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha} + d\boldsymbol{\alpha}) &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) [ \mathbf{I} + \widetilde{\mathbf{G}}^*(\boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} ] \\
 \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}^* + d\boldsymbol{\alpha}^*) &= [ \mathbf{I} + \widetilde{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\alpha}^*) d\boldsymbol{\alpha}^* ] \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}^*)
 \end{aligned}
 \tag{AIV.2}$$

Llevando estos resultados a (AIV.1) e igualando la primera fila con la tercera y la segunda con la cuarta, se obtienen estas dos relaciones:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) [ \widetilde{\boldsymbol{\tau}}_0 ds + \widetilde{\mathbf{G}}^*(\boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} ] \mathbf{R}_0 &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{R}_0 \widetilde{\boldsymbol{\tau}}^* ds \\
 [ \widetilde{\boldsymbol{\tau}}_0 ds \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_0 \widetilde{\mathbf{G}}(\boldsymbol{\alpha}^*) d\boldsymbol{\alpha}^* ] \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}^*) &= \widetilde{\boldsymbol{\tau}} ds \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{R}_0
 \end{aligned}$$

como además,

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{R}_o = \mathbf{R}_o\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}^*)$$

y también

$$\mathbf{R}_o[\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}^*)d\boldsymbol{\alpha}^*]\mathbf{R}_o^T = \mathbf{R}_o\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}^*)d\boldsymbol{\alpha}^* ,$$

la segunda igualdad puede simplificarse así:

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_o ds + \mathbf{R}_o\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}^*)d\boldsymbol{\alpha}^* = \tilde{\boldsymbol{\tau}} ds \quad (\text{AIV.3})$$

y la primera, teniendo en cuenta que  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_o^* = \mathbf{R}_o^T \tilde{\boldsymbol{\tau}}_o \mathbf{R}_o$ , de esta otra forma:

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_o^* ds + \mathbf{R}_o^T \mathbf{G}^* d\boldsymbol{\alpha} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}^* ds \quad (\text{AIV.4})$$

Luego, (AIV.3) y (AIV.4) equivalen a las formas vectoriales siguientes:

$$\Delta\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}_o\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}^*)\boldsymbol{\alpha}^*_{,s}$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\tau}^* - \boldsymbol{\tau}_o^* = \mathbf{R}_o^T \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}_{,s}$$

que es lo que deseábamos demostrar.

#### AIV.2 – Demostración directa de las fórmulas (II.109)–(II.110)

Admitiendo que  $\mathbf{R}_o = \mathbf{I}$ , y resolviendo en el sistema de Rodrigues las cuatro sumas o composiciones (II.99), se obtiene:

$$\boldsymbol{\tau}_o ds \oplus_{\text{F}}(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) = \frac{1}{1 - \boldsymbol{\tau}_o(\mathbf{v} + d\mathbf{v})ds} [\boldsymbol{\tau}_o ds + \mathbf{v} + d\mathbf{v} - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_o(\mathbf{v} + d\mathbf{v})ds] \quad (\text{AIV.5.a})$$

$$\boldsymbol{\tau}_o ds \oplus_{\text{M}}(\mathbf{v} + d\mathbf{v}^*) = \frac{1}{1 - \boldsymbol{\tau}_o(\mathbf{v} + d\mathbf{v}^*)ds} [\boldsymbol{\tau}_o ds + \mathbf{v} + d\mathbf{v}^* + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_o(\mathbf{v} + d\mathbf{v}^*)ds] \quad (\text{AIV.5.b})$$

$$\underline{\tau}^* ds \oplus_M \underline{\mathbf{v}} = \frac{1}{1 - \underline{\tau}^* \underline{\mathbf{v}} ds} [\underline{\tau}^* ds + \underline{\mathbf{v}} + \tilde{\underline{\tau}}^* \underline{\mathbf{v}} ds] \quad (\text{AIV.5.c})$$

$$\underline{\tau} ds \oplus_F \underline{\mathbf{v}} = \frac{1}{1 - \underline{\tau} \underline{\mathbf{v}} ds} [\underline{\tau} ds + \underline{\mathbf{v}} - \tilde{\underline{\tau}} \underline{\mathbf{v}} ds] \quad (\text{AIV.5.d})$$

Las aproximaciones de primer orden de estas cuatro sumas son:

$$\underline{\tau}_o ds \oplus_F (\underline{\mathbf{v}} + d\underline{\mathbf{v}}) \stackrel{(1)}{=} \underline{\mathbf{v}} + \underline{\tau}_o ds + d\underline{\mathbf{v}} - \tilde{\underline{\tau}}_o \underline{\mathbf{v}} ds + \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{v}} \underline{\tau}_o ds \quad (\text{AIV.6.a})$$

$$\underline{\tau}_o ds \oplus_M (\underline{\mathbf{v}} + d\underline{\mathbf{v}}^*) \stackrel{(1)}{=} \underline{\mathbf{v}} + \underline{\tau}_o ds + d\underline{\mathbf{v}}^* + \tilde{\underline{\tau}}_o \underline{\mathbf{v}} ds + \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{v}} \underline{\tau}_o ds \quad (\text{AIV.6.b})$$

$$\underline{\tau}^* ds \oplus_M \underline{\mathbf{v}} \stackrel{(1)}{=} \underline{\tau}^* ds + \underline{\mathbf{v}} + \tilde{\underline{\tau}}^* \underline{\mathbf{v}} ds + \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{v}} \underline{\tau}^* ds \quad (\text{AIII.6.c})$$

$$\underline{\tau} ds \oplus_F \underline{\mathbf{v}} \stackrel{(1)}{=} \underline{\tau} ds + \underline{\mathbf{v}} - \tilde{\underline{\tau}} \underline{\mathbf{v}} ds + \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{v}} \underline{\tau} ds \quad (\text{AIII.6.d})$$

Igualando ahora (AIV.6.a) con (AIV.6.d) y (AIV.6.b), por un lado; y por otro, (AIV.6.b) con (AIV.6.c) y (AIV.6.d), se llega a:

$$d\underline{\mathbf{v}} = (\underline{\tau} - \underline{\tau}_o) ds - (\tilde{\underline{\tau}} - \tilde{\underline{\tau}}_o) \underline{\mathbf{v}} ds + \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{v}} (\underline{\tau} - \underline{\tau}_o) ds \quad (\text{AIV.7.a})$$

$$d\underline{\mathbf{v}} - 2\tilde{\underline{\tau}}_o \underline{\mathbf{v}} ds = (\underline{\tau}^* - \underline{\tau}_o) ds + (\tilde{\underline{\tau}}^* - \tilde{\underline{\tau}}_o) \underline{\mathbf{v}} ds + \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{v}} (\underline{\tau}^* - \underline{\tau}_o) ds \quad (\text{AIV.7.b})$$

$$d\underline{\mathbf{v}}^* = (\underline{\tau}^* - \underline{\tau}_o) ds + (\tilde{\underline{\tau}}^* - \tilde{\underline{\tau}}_o) \underline{\mathbf{v}} ds + \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{v}} (\underline{\tau}^* - \underline{\tau}_o) ds \quad (\text{AIV.7.c})$$

$$d\underline{\mathbf{v}}^* + 2\tilde{\underline{\tau}}_o \underline{\mathbf{v}} ds = (\underline{\tau} - \underline{\tau}_o) ds - (\tilde{\underline{\tau}} - \tilde{\underline{\tau}}_o) \underline{\mathbf{v}} ds + \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{v}} (\underline{\tau} - \underline{\tau}_o) ds \quad (\text{AIV.7.d})$$

Si se tiene ahora en cuenta que  $2\underline{\tau}_o ds = \underline{\tau}_o ds$  y  $\underline{\tau}_o ds = \underline{\tau}_o^* ds$ , y convenimos en denotar  $\Delta\underline{\tau}^*$  a  $(\underline{\tau}^* - \underline{\tau}_o)$  y  $\Delta\underline{\tau}$  a  $(\underline{\tau} - \underline{\tau}_o)$  –considerando además que  $d\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}}_{,s} ds$  y  $d\underline{\mathbf{v}}^* = \underline{\mathbf{v}}^*_{,s} ds$ , y también que  $\Delta\underline{\tau}^* = 2\Delta\underline{\tau}^*$  y  $\Delta\underline{\tau} = 2\Delta\underline{\tau}$ –, podemos escribir de nuevo (AIV.7) así:

$$2 \underline{\mathbf{v}}_{,s} = [\mathbf{I} + \underline{\tilde{\mathbf{v}}} + \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{v}}] \Delta \boldsymbol{\tau} \quad (\text{AIV.8.a})$$

$$2 [\underline{\mathbf{v}}_{,s} - \underline{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_o \underline{\mathbf{v}}] = [\mathbf{I} - \underline{\tilde{\mathbf{v}}} + \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{v}}] \Delta \boldsymbol{\tau}^* \quad (\text{AIV.8.b})$$

$$2 \underline{\mathbf{v}}^*_{,s} = [\mathbf{I} - \underline{\tilde{\mathbf{v}}} + \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{v}}] \Delta \boldsymbol{\tau}^* \quad (\text{AIV.8.c})$$

$$2 [\underline{\mathbf{v}}^*_{,s} + \underline{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_o \underline{\mathbf{v}}] = [\mathbf{I} + \underline{\tilde{\mathbf{v}}} + \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{v}}] \Delta \boldsymbol{\tau} \quad (\text{AIV.8.d})$$

Invirtiendo ahora los operadores  $\mathbf{I} + \underline{\tilde{\mathbf{v}}} + \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{v}}$  y  $\mathbf{I} - \underline{\tilde{\mathbf{v}}} + \underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{v}}$ , aplicando la regla (AI.19) del Apéndice I, y despejando en (AIV.8) los incrementos de curvatura a flexotorsión  $\Delta \boldsymbol{\tau}$  y  $\Delta \boldsymbol{\tau}^*$ , se llega finalmente a los siguientes resultados:

$$\Delta \boldsymbol{\tau} = \frac{2}{1 + \underline{\mathbf{v}}^2} [\mathbf{I} + \underline{\tilde{\mathbf{v}}}] [\underline{\mathbf{v}}_{,s} - \underline{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_o \underline{\mathbf{v}}] \quad (\text{AIV.9.a})$$

$$\Delta \boldsymbol{\tau} = \frac{2}{1 + \underline{\mathbf{v}}^2} [\mathbf{I} + \underline{\tilde{\mathbf{v}}}] \underline{\mathbf{v}}^*_{,s} \quad (\text{AIV.9.b})$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{2}{1 + \underline{\mathbf{v}}^2} [\mathbf{I} - \underline{\tilde{\mathbf{v}}}] [\underline{\mathbf{v}}^*_{,s} + \underline{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}_o \underline{\mathbf{v}}] \quad (\text{AIV.9.c})$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{2}{1 + \underline{\mathbf{v}}^2} [\mathbf{I} - \underline{\tilde{\mathbf{v}}}] \underline{\mathbf{v}}_{,s} \quad (\text{AIV.9.d})$$

Nótese que los primeros factores dentro de las expresiones (AIV.9) son precisamente los operadores  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^*$  del sistema de Rodrigues.

Ahora bien, estos resultados se han deducido suponiendo  $\mathbf{R}_o = \mathbf{I}$ . Si no fuera éste el caso, efectuando un cambio de base en el espacio para que se cumpla esta hipótesis y teniendo en cuenta que los operadores  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}^*$  del sistema de Rodrigues son isótropos –propiedad (AI.24) del Apéndice I–:

$$\mathbf{R}\mathbf{G}(\mathbf{v})\mathbf{R}^T = \mathbf{G}(\mathbf{R}\mathbf{v}) \quad \text{y} \quad \mathbf{R}\mathbf{G}^*(\mathbf{v})\mathbf{R}^T = \mathbf{G}^*(\mathbf{R}\mathbf{v})$$

se obtendría:

$$\Delta \boldsymbol{\tau} = \frac{2}{1 + \underline{\mathbf{v}}^2} [ \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{v}} ] [ \underline{\mathbf{v}} ,_s - \tilde{\boldsymbol{\tau}}_o \underline{\mathbf{v}} ] \quad (\text{AIV.10.a})$$

$$\Delta \boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}_o \frac{2}{1 + \underline{\mathbf{v}}^{*2}} [ \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{v}}^* ] \underline{\mathbf{v}}^* ,_s \quad (\text{AIV.10.b})$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{2}{1 + \underline{\mathbf{v}}^{*2}} [ \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{v}}^* ] [ \underline{\mathbf{v}}^* ,_s + \tilde{\boldsymbol{\tau}}_o^* \underline{\mathbf{v}}^* ] \quad (\text{AIV.10.c})$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{R}_o^T \frac{2}{1 + \underline{\mathbf{v}}^2} [ \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{v}} ] \underline{\mathbf{v}} ,_s \quad (\text{AIV.10.d})$$

que es lo que pretendíamos demostrar

AIV.3 – Nueva demostración de las relaciones (IV.52) y (IV.58)

En el apartado II.10 del capítulo II introdujimos una *derivada objetiva* de los giros que relacionaba las derivadas segundas  $\partial^2 U / \partial \mathbf{q} \partial \mathbf{q}$  de la energía elástica U con sus derivadas direccionales  $[DU \cdot \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j]$ ; pues bien, generalizando aquella relación, podemos escribir sin más comentarios para cada nodo k del sistema estructural:

$$[DU \cdot \mathbf{a}_{k i}, \mathbf{a}_{k j}] = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{q}_{k l} \partial \mathbf{q}_{k m}} \frac{\partial \mathbf{q}_{k l}}{\partial \mathbf{a}_{k i}} \frac{\partial \mathbf{q}_{k m}}{\partial \mathbf{a}_{k j}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_{k m}} [D\mathbf{q}_{k m} \cdot \mathbf{a}_{k i}, \mathbf{a}_{k j}]$$

Recuérdese que la energía elástica U es función de los parámetros rotacionales  $\boldsymbol{\alpha}$  de  $\mathbf{q}$ , pero no de los giros elementales  $\boldsymbol{\theta}$  de  $\mathbf{a}$ , de modo que las derivadas con relación a  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{a}$  tienen sentidos diferentes: en el primer caso se trata de derivadas en el sentido pleno del término, y en el segundo, de derivadas direccionales. Hecha esta aclaración y adoptando en lo sucesivo, por sencillez, la misma notación para ambas derivadas, la expresión anterior se puede escribir matricialmente como sigue:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{a}_k \partial \mathbf{a}_k} = \left[ \frac{\partial \mathbf{q}_k}{\partial \mathbf{a}_k} \right]^T \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{q}_k \partial \mathbf{q}_k} \frac{\partial \mathbf{q}_k}{\partial \mathbf{a}_k} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_k} \frac{\partial^2 \mathbf{q}_k}{\partial \mathbf{a}_k \partial \mathbf{a}_k} \quad (\text{AIV.11})$$



que coincide con la clásica forma de derivación de una función compuesta.

Nótese que el subíndice “k” que aparece en (AIV.11) es fijo y no mudo, pues se refiere al nodo k del sistema discretizado; para que no haya confusión, este subíndice se destaca en adelante con letra negrita.

Ahora bien, teniendo en cuenta (III.110),

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{a}_k \partial \mathbf{q}_k} = \int \left[ \frac{\partial \mathbf{q}^\vee}{\partial \mathbf{q}_k} \right]^T \mathbf{K}^N \frac{\partial \mathbf{q}^\vee}{\partial \mathbf{q}_k} ds \quad (\text{AIV.12})$$

además, por definición,

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{a}_k} = -\mathbf{P}_k^i \quad \therefore \quad \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_k} = \mathbf{P}_{qk}^i \quad \therefore \quad \frac{\partial \mathbf{q}_k}{\partial \mathbf{a}_k} = \mathbf{\Theta}^{-1} \quad \therefore \quad \frac{\partial^2 \mathbf{q}_k}{\partial \mathbf{a}_k \partial \mathbf{a}_k} = \frac{\partial \mathbf{\Theta}^{-1}}{\partial \mathbf{q}_k} \mathbf{\Theta}^{-1} \quad (\text{AIV.13})$$

luego –téngase en cuenta que  $d\mathbf{q}^\vee = \mathbf{\Sigma}_k d\mathbf{q}_k$  y  $d\mathbf{q} = \mathbf{\Sigma}'_k d\mathbf{q}_k$ –,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{a}_k \partial \mathbf{a}_k} &= \mathbf{\Theta}^{-T} \left[ \int \mathbf{\Sigma}_k^T \mathbf{K}^N \mathbf{\Sigma}_k ds \right] \mathbf{\Theta}^{-1} - \mathbf{P}_{qk}^{iT} \frac{\partial \mathbf{\Theta}^{-1}}{\partial \mathbf{q}_k} \mathbf{\Theta}^{-1} = \\ &= \mathbf{\Theta}^{-T} \left[ \int \mathbf{\Sigma}_k^T \mathbf{K}^N \mathbf{\Sigma}_k ds + \mathcal{T}_k(\mathbf{P}_k^i) \right] \mathbf{\Theta}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{AIV.14})$$

esto es, 
$$\frac{\partial \mathbf{P}_k^i}{\partial \mathbf{a}_k} = -\mathbf{\Theta}_k^{-T} \left[ \int \mathbf{\Sigma}'_k{}^T \mathbf{K}^N \mathbf{\Sigma}'_k ds + \mathcal{T}_k(\mathbf{P}_k^i) \right] \mathbf{\Theta}_k^{-1} \quad (\text{AIV.15})$$

El último paso en (AIV.14) se justifica del siguiente modo –en esta ocasión el índice k se suprime para evitar confusiones–:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{qr}^{iT} \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial \mathbf{a}_i \partial \mathbf{a}_j} &= \mathbf{P}_{qr}^{iT} \frac{\partial \mathbf{\Theta}_{ri}^{-1}}{\partial \mathbf{q}_s} \mathbf{\Theta}_{sj}^{-1} = -\mathbf{P}_{qr}^{iT} \mathbf{\Theta}_{rm}^{-1} \frac{\partial \mathbf{\Theta}_{mn}}{\partial \mathbf{q}_s} \mathbf{\Theta}_{ni}^{-1} \mathbf{\Theta}_{sj}^{-1} = \\ &= -\mathbf{P}_m^{iT} \frac{\partial \mathbf{\Theta}_{mn}}{\partial \mathbf{q}_s} \mathbf{\Theta}_{ni}^{-1} \mathbf{\Theta}_{sj}^{-1} = -\mathcal{T}_{ns} \mathbf{\Theta}_{ni}^{-1} \mathbf{\Theta}_{sj}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{AIV.16})$$

Por otra parte, para las cargas exteriores se obtiene de forma análoga:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{P}_k^e}{\partial \mathbf{a}_k} &= \boldsymbol{\Theta}^{-T} \frac{\partial \mathbf{P}_{qk}^e}{\partial \mathbf{q}_k} \boldsymbol{\Theta}^{-1} + \mathbf{P}_{qk}^e \frac{\partial \boldsymbol{\Theta}^{-1}}{\partial \mathbf{q}_k} \boldsymbol{\Theta}^{-1} = \\
 &= \boldsymbol{\Theta}^{-T} [ \mathbf{X}_k - \mathcal{T}_k(\mathbf{P}_k^e) ] \boldsymbol{\Theta}^{-1}
 \end{aligned} \tag{AIV.17}$$

y sumando (AIV.15) y (AIV.17), y teniendo en cuenta que  $\mathcal{T}(\mathbf{v})$  es por definición lineal en  $\mathbf{v}$ , se llega a la expresión:

$$\frac{\partial \mathbf{P}_k^i}{\partial \mathbf{a}_k} + \frac{\partial \mathbf{P}_k^e}{\partial \mathbf{a}_k} = -\boldsymbol{\Theta}_k^{-T} \left[ \int \boldsymbol{\Sigma}_k^T \mathbf{K}^N \boldsymbol{\Sigma}_k ds - \mathbf{X}_k + \mathbf{T}_k(\mathbf{P}_k^i + \mathbf{P}_k^e) \right] \boldsymbol{\Theta}_k^{-1} \tag{AIV.18}$$

que, sustituyendo  $\mathbf{P}_k^i - \mathbf{P}_k^e$  por  $\mathbf{R}_k$ , equivale a la ecuación (IV.58) del Capítulo IV, a la que pretendíamos llegar.

Para demostrar (IV.52), sustituyamos ahora en (AIV.11) U por  $\Psi$ :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{a}^\nabla \partial \mathbf{a}^\nabla} = \frac{\partial \mathbf{q}^\nabla}{\partial \mathbf{a}^\nabla} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{q}^\nabla \partial \mathbf{q}^\nabla} \frac{\partial \mathbf{q}^\nabla}{\partial \mathbf{a}^\nabla} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}^\nabla} \frac{\partial^2 \mathbf{q}^\nabla}{\partial \mathbf{a}^\nabla \partial \mathbf{a}^\nabla} \tag{AIV.19}$$

Partiendo de esta relación escrita del siguiente modo:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{a}^\nabla \partial \mathbf{a}^\nabla} = \boldsymbol{\Xi}^{-T} \mathbf{K}^N \boldsymbol{\Xi}^{-1} + \mathbf{P}_q^{\nabla T} \frac{\partial \boldsymbol{\Xi}^{-1}}{\partial \mathbf{q}^\nabla} \frac{\partial \mathbf{q}^\nabla}{\partial \mathbf{a}^\nabla} \tag{AIV.20}$$

e interpolando  $\mathbf{da}$  y  $\mathbf{da}^\nabla$  ( $\mathbf{da}^\nabla = \boldsymbol{\Sigma}_k \mathbf{da}_k$  y  $\mathbf{da} = \boldsymbol{\Sigma}'_k \mathbf{da}_k$ ), se tiene:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{a}_k \partial \mathbf{a}_k} = \int \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{q}^\nabla \partial \mathbf{q}^\nabla} \boldsymbol{\Sigma}'_k ds = \int \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \left[ \boldsymbol{\Xi}^{-T} \mathbf{K}^N \boldsymbol{\Xi}^{-1} + \mathbf{P}_q^{\nabla T} \frac{\partial \boldsymbol{\Xi}^{-1}}{\partial \mathbf{q}^\nabla} \boldsymbol{\Xi}^{-1} \right] \boldsymbol{\Sigma}'_k ds \tag{AIV.21}$$

(el papel que juega el vector  $\mathbf{q}$  en la relación (IV.58) lo desempeña ahora el vector  $\mathbf{a}$ ).

Ahora bien, si se tiene en cuenta además la definición (IV.48) del tensor  $\mathcal{U}$ , el segundo término en la última integral valdrá:

$$\begin{aligned}
\left[ \mathbf{P}_q^{\vee T} \frac{\partial \Xi^{-1}}{\partial \mathbf{q}^\vee} \Xi^{-1} \right]_{ij} &= \mathbf{P}_{qr}^{\vee T} \frac{\partial \Xi_{ri}^{-1}}{\partial \mathbf{q}_l^\vee} \Xi_{lj}^{-1} = \mathbf{P}_{mr}^{\vee T} \Xi_{mr} \frac{\partial \Xi_{ri}^{-1}}{\partial \mathbf{q}_l^\vee} \Xi_{lj}^{-1} = \\
&= - \left[ \mathbf{P}_m^{\vee T} \frac{\partial \Xi_{mr}}{\partial \mathbf{q}_l^\vee} \right] \Xi_{ri}^{-1} \Xi_{lj}^{-1} = -\mathcal{U}_{rl}(\mathbf{P}^\vee) \Xi_{ri}^{-1} \Xi_{lj}^{-1}
\end{aligned} \tag{AIV.22}$$

y llevando este resultado a (AIV.21), esta ecuación se transforma en:

$$\frac{\partial \mathbf{P}_k^i}{\partial \mathbf{a}_k} = - \int \boldsymbol{\Sigma}'_k{}^T \Xi^{-T} [\mathbf{K}^N - \mathcal{U}(\mathbf{P}^\vee)] \Xi^{-1} \boldsymbol{\Sigma}'_k ds \tag{AIV.23}$$

Añadiendo ahora a esta derivada la correspondiente a la carga exterior  $\mathbf{P}_k^e$ , que se dedujo en el capítulo IV, se llega al resultado final (IV.52), que deseábamos probar.

**APÉNDICE V****INTERPOLACIONES NO LINEALES**

En este Apéndice se presentan y describen los dos campos de deformación constante más importantes en la teoría de vigas: el campo de curvatura constante y el campo de deformación helicoidal. Se calculan las coordenadas y giros de una sección cualquiera, juntamente con sus derivadas, y se extraen las correspondientes matrices de interpolación no lineal  $\mathbf{\Gamma}$  descritas en el Capítulo IV.

**AV.1.– Campo de curvatura constante**

Sean  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  y  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  las posiciones y sistemas de referencia de las secciones extremas de un elemento lineal de longitud  $L$ . Supongamos que estas secciones se desplazan con traslaciones y giros respectivos  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  y  $\boldsymbol{\alpha}_1$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_2$ . Con estos datos, vamos a determinar el giro y el desplazamiento de una sección arbitraria  $S$  del elemento, admitiendo que la curvatura se mantiene constante y los desplazamientos varían linealmente a lo largo del elemento.

Sea  $s$  la distancia de la sección  $S$  al extremo  $\mathbf{r}_1$  y  $\lambda = s/L$  su coordenada curvilínea normalizada ( $0 < \lambda < 1$ ). Con la condición de linealidad impuesta, la posición en el espacio absoluto de esta sección se calcula de inmediato:

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{x} \quad ; \quad \mathbf{x} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (\text{AV.1})$$

No ocurre lo mismo con los giros, ya que una variación lineal de los parámetros  $\boldsymbol{\alpha}$  no implica que la barra se deforme con curvatura constante, como se ha supuesto.

Admitamos que  $\boldsymbol{\tau}_0$  y  $\boldsymbol{\tau}$  son las curvaturas del elemento referidas al sistema global  $\mathbf{n}$  del espacio, antes y después de deformarse éste –instantes  $t_0$  y  $t$ – y que  $\boldsymbol{\tau}_0^*$  y  $\boldsymbol{\tau}^*$  son las mismas curvaturas referidas a las bases locales  $\mathbf{e}_1(t_0)$  y  $\mathbf{e}_1(t)$ . Supongamos, además,

que  $\mathbf{R}_0$  es el giro que transforma la base absoluta  $\mathbf{n}$  del espacio en la local  $\mathbf{e}_1(t_0)$  de la sección  $S$  – ver figura AV.1–. En estas condiciones, denotando  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha}_1)$ , se tendrá:

$$\boldsymbol{\tau}_0 = \mathbf{R}_0 \boldsymbol{\tau}_0^* \quad \therefore \quad \hat{\boldsymbol{\tau}} := \mathbf{R}_0 \boldsymbol{\tau}^* \quad \therefore \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}_1 \hat{\boldsymbol{\tau}} \quad (\text{AV.2})$$

$$\boldsymbol{\tau} L = -\boldsymbol{\alpha}_1 \oplus (\boldsymbol{\tau}_0 L \oplus \boldsymbol{\alpha}_2) \quad (\text{AV.3})$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} L = (\boldsymbol{\tau}_0 L \oplus \boldsymbol{\alpha}_2) \oplus (-\boldsymbol{\alpha}_1) \quad (\text{AV.4})$$

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = -s \boldsymbol{\tau}_0 \oplus (s \hat{\boldsymbol{\tau}} \oplus \boldsymbol{\alpha}_1) \quad (\text{AV.5})$$

Como además, en virtud de (II.101), se cumple  $\boldsymbol{\tau}^* - \boldsymbol{\tau}_0^* = \mathbf{R}_0^T(s) \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\alpha}_s$ , con  $\mathbf{R}_0(s) = \mathbf{R}(s \boldsymbol{\tau}_0) \mathbf{R}_0$ , y de este modo,  $\hat{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau}_0 = \mathbf{R}^T(s \boldsymbol{\tau}_0) \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\alpha}_s$ , se cumplirá también:

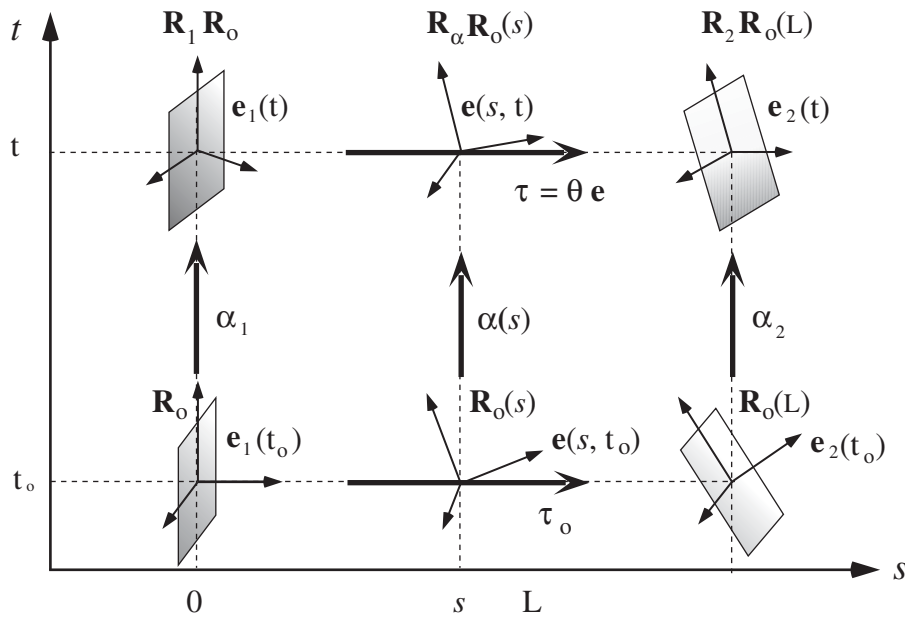


Figura AV.1.

*Deformación con curvatura constante. Variación de la base local  $\mathbf{e}$*

$$\boxed{\alpha_{,s}(s) = \mathbf{F}^*(\alpha)\mathbf{R}(s\tau_0)(\hat{\tau} - \tau_0)} \quad (\text{AV.6})$$

Determinados así el giro  $\alpha(s)$  y la derivada  $\alpha_{,s}(s)$  en la sección  $S$  cuando la curvatura es constante, podemos pasar a calcular las variaciones  $\delta\alpha$  y  $\delta\alpha_{,s}$  en función de las variaciones  $\delta\alpha_1$  y  $\delta\alpha_2$  de los giros de las secciones extremas. Antes, no obstante, es necesario hallar las variaciones de las curvaturas  $\tau$ ,  $\hat{\tau}$  y  $\tau^*$ . De la definición (II.24) se extrae directamente  $\delta\tau^*$  en función de los giros diferenciales relativos de las secciones extremas del elemento  $\delta\theta_2^*$  y  $\delta\theta_1^*$ :

$$\mathbf{L}\delta\tau^* = \mathbf{F}(\mathbf{L}\tau^*)(\delta\theta_2^* - \delta\theta_1^*) \quad (\text{AV.7})$$

y de aquí, teniendo en cuenta que  $\delta\theta^* = \mathbf{R}_0^T\mathbf{R}_1^T\delta\theta$ , se extrae  $\delta\hat{\tau}$ ,

$$\mathbf{L}\delta\hat{\tau} = \mathbf{R}_0\mathbf{F}(\mathbf{L}\tau^*)\mathbf{R}_0^T\mathbf{R}_1^T(\delta\theta_2 - \delta\theta_1)$$

siendo ahora  $\delta\theta_2$  y  $\delta\theta_1$  los giros absolutos de las secciones extremas:

$$\delta\theta_2 = \mathbf{G}(\alpha_2)\delta\alpha_2 \quad \therefore \quad \delta\theta_1 = \mathbf{G}(\alpha_1)\delta\alpha_1 \quad (\text{AV.8})$$

En los sistemas paramétricos vectoriales, al cumplirse (AI.24), esta expresión de  $\delta\hat{\tau}$  se reduce a:

$$\boxed{\delta\hat{\tau} = \mathbf{F}(\mathbf{L}\hat{\tau})\mathbf{R}_1^T(\delta\theta_2 - \delta\theta_1)/\mathbf{L}} \quad (\text{AV.9})$$

Finalmente, de la tercera relación (AV.2) se deduce que  $\delta\tau = \mathbf{R}_1\delta\hat{\tau} - \tilde{\tau}\delta\theta_1$ , y por tanto que,

$$\boxed{\delta\tau = \mathbf{F}(\mathbf{L}\tau)(\delta\theta_2 - \delta\theta_1)/\mathbf{L} - \tilde{\tau}\delta\theta_1} \quad (\text{AV.10})$$

Pasando al cálculo de  $\delta\alpha$  y  $\delta\alpha_{,s}$ , si hacemos coincidir el extremo  $\mathbf{x}_2$  del elemento con la sección  $S$ , el giro elemental  $\delta\theta$  de esta sección se deduce de (AV.9):

$$\delta\theta = \delta\theta_1 + \mathbf{R}_1\mathbf{G}(s\hat{\tau})(s\delta\hat{\tau})$$

con lo cual, 
$$\delta\boldsymbol{\theta} = \delta\boldsymbol{\theta}_1 + \lambda \mathbf{R}_1 \mathbf{G}(s\hat{\boldsymbol{\tau}}) \mathbf{F}(\mathbf{L}\hat{\boldsymbol{\tau}}) \mathbf{R}_1^T (\delta\boldsymbol{\theta}_2 - \delta\boldsymbol{\theta}_1)$$

Este resultado en un sistema vectorial se puede escribir también así:

$$\delta\boldsymbol{\theta} = \delta\boldsymbol{\theta}_1 + \lambda \mathbf{G}(s\boldsymbol{\tau}) \mathbf{F}(\mathbf{L}\boldsymbol{\tau}) (\delta\boldsymbol{\theta}_2 - \delta\boldsymbol{\theta}_1)$$

y de aquí, por aplicación directa de (II.24),

$$\boxed{\delta\boldsymbol{\alpha}(s) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) [\delta\boldsymbol{\theta}_1 + \lambda \mathbf{G}(s\boldsymbol{\tau}) \mathbf{F}(\mathbf{L}\boldsymbol{\tau}) (\delta\boldsymbol{\theta}_2 - \delta\boldsymbol{\theta}_1)]} \quad (\text{AV.11})$$

Normalmente, para integrar la energía elástica de un elemento de viga se recurre al método aproximado de integración por puntos de Gauss. En nuestro caso, al suponer la curvatura constante, basta tomar un solo punto ( $\lambda=1/2$ ) para hallar de forma exacta la energía de flexión y obtener una buena aproximación de la energía de deformación por cortante, si el tamaño del elemento no es muy grande. Pues bien, la expresión (AV.11) se simplifica bastante al particularizarla para este punto, como vamos a comprobar. En efecto, escribiendo el giro relativo entre los triedros  $\mathbf{e}_1$  y  $\mathbf{e}_2$  en la forma  $\mathbf{L}\boldsymbol{\tau} = \phi \mathbf{e}$ , separando el módulo y la dirección del giro, y teniendo en cuenta que en el sistema natural  $\mathbf{G}[\mathbf{L}\boldsymbol{\tau}/2] \mathbf{F}[\mathbf{L}\boldsymbol{\tau}] = \mathbf{I} + \tan(\phi/4) \tilde{\mathbf{e}}$ , (AV.11) se reduce a:

$$\boxed{\delta\boldsymbol{\alpha}_{1/2} = \frac{1}{2} \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) [(\delta\boldsymbol{\theta}_1 + \delta\boldsymbol{\theta}_2) + \tan(\phi/4) \tilde{\mathbf{e}} (\delta\boldsymbol{\theta}_2 - \delta\boldsymbol{\theta}_1)]} \quad (\text{AV.12})$$

El cálculo de  $\delta\boldsymbol{\alpha}_{,s}$  es más sencillo, pues recordando (III.7.b), se tiene,

$$\delta\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{R}^T(s\boldsymbol{\tau}_o) [\mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}_{,s}; \boldsymbol{\alpha}) \delta\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\alpha}) \delta\boldsymbol{\alpha}_{,s}]$$

y por tanto, 
$$\delta\boldsymbol{\alpha}_{,s}(s) = \mathbf{F}^*(\boldsymbol{\alpha}) [\mathbf{R}(s\boldsymbol{\tau}_o) \delta\hat{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}_{,s}; \boldsymbol{\alpha}) \delta\boldsymbol{\alpha}(s)]$$

En un sistema vectorial, además,  $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^T$ , y así,

$$\boxed{\delta\boldsymbol{\alpha}_{,s}(s) = \mathbf{F}^T(\boldsymbol{\alpha}) [\mathbf{R}(s\boldsymbol{\tau}_o) \delta\hat{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}_{,s}; \boldsymbol{\alpha}) \delta\boldsymbol{\alpha}(s)]} \quad (\text{AV.13})$$

viniendo dadas  $\delta\hat{\boldsymbol{\tau}}$  y  $\delta\boldsymbol{\alpha}(s)$  por (AV.9) y (AV.11).

AV. 2.– Interpolación Helicoidal

Si además de la curvatura  $\kappa$  suponemos también constante la deformación transversal  $\gamma$ , la directriz de la pieza se transformará en una hélice y las expresiones del apartado anterior seguirán siendo válidas con la única excepción de la (AV.1), que debe modificarse por dejar de ser recta la directriz. Ahora bien, denotando  $\pi$  al plano normal al eje  $\mathbf{e}$  de la hélice –figura AV.2–, C al punto de intersección de  $\pi$  con  $\mathbf{e}$ , y  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r}_C$  a los vectores de posición de los dos extremos de la hélice y del punto C, la posición  $\mathbf{x}(s)$  de una sección genérica S del elemento valdrá:

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_C + \lambda(\mathbf{x}^T \mathbf{e})\mathbf{e} + \mathbf{R}(s\boldsymbol{\tau})(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_C); \quad \lambda = s/L \quad (\text{AV.14})$$

siendo 
$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_1 + \frac{1}{2} [\mathbf{I} + \cot g(\phi/2)\tilde{\mathbf{e}}] \mathbf{x} \quad \text{y} \quad L\boldsymbol{\tau} = \phi \mathbf{e} \quad (\text{AV.15})$$

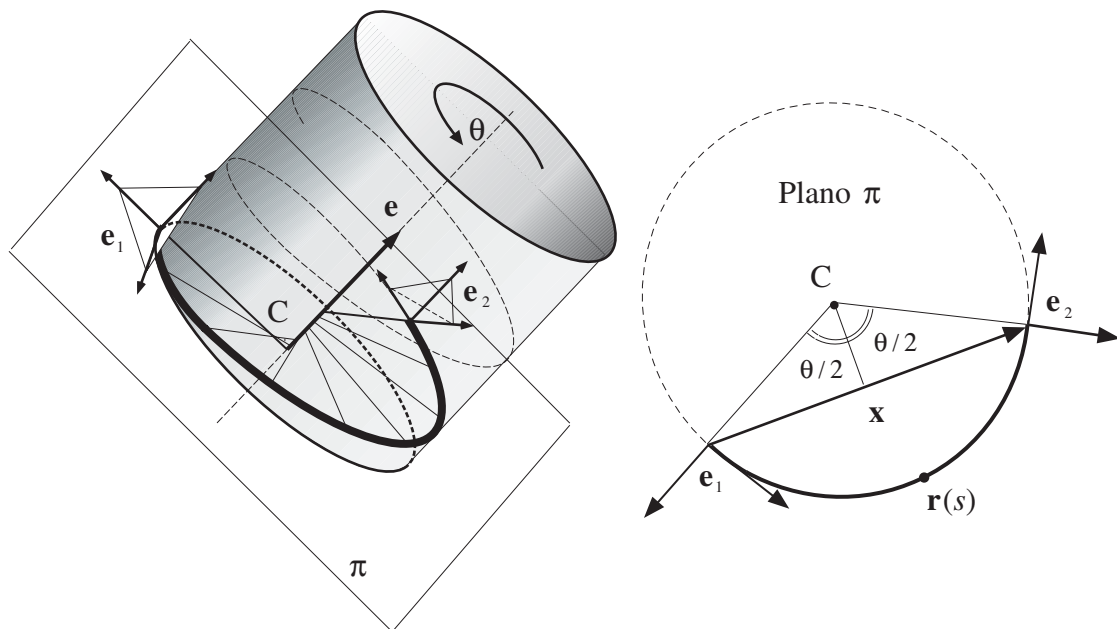


Figura AV.2.

*Deformación helicoidal de un elemento y proyección del mismo sobre el plano  $\pi$*



y en consecuencia, 
$$\mathbf{r}_{,s}(s) = \frac{1}{L} (\mathbf{x}^T \mathbf{e}) \mathbf{e} + \tilde{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{R}(s\boldsymbol{\tau})(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c) \quad (\text{AV.16})$$

Concretamente, en el sistema de parametrización natural, introduciendo (AV.15) en (AV.14), el vector de posición  $\mathbf{x}$  adopta la forma siguiente:

$$\mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}_1 + [\lambda \mathbf{I} + f(\phi, \lambda) \tilde{\mathbf{e}} + g(\phi, \lambda) \tilde{\mathbf{e}}^2] \mathbf{x} \quad (\text{AV.17})$$

con: 
$$f(\phi, \lambda) = \cotag(\phi/2) - \frac{\cos(1/2 - \lambda)\phi}{2 \text{sen}(\phi/2)} \quad (\text{AV.18})$$

$$g(\phi, \lambda) = \lambda - \frac{1}{2} + \frac{\text{sen}(1/2 - \lambda)\phi}{2 \text{sen}(\phi/2)}$$

y así, 
$$\mathbf{r}_{,s}(\lambda) = \frac{1}{L} [\mathbf{I} + h(\phi, \lambda) \tilde{\mathbf{e}} + k(\phi, \lambda) \tilde{\mathbf{e}}^2] \mathbf{x} \quad (\text{AV.19})$$

con 
$$h(\phi, \lambda) = -\phi \frac{\text{sen}(1/2 - \lambda)\phi}{2 \text{sen}(\phi/2)} \quad \therefore \quad k(\phi, \lambda) = 1 - \phi \frac{\cos(1/2 - \lambda)\phi}{2 \text{sen}(\phi/2)} \quad (\text{AV.20})$$

Ahora bien, como al suponer constantes la curvatura y la deformación transversal, la energía elástica y sus derivadas se integran de forma exacta con un solo punto de Gauss, sólo se necesita calcular los valores de  $\mathbf{r}_{,s}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\boldsymbol{\alpha}_{,s}$  en el punto central del elemento  $\lambda = 1/2$ . En este punto, las funciones  $g$  y  $h$  se anulan, quedando  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}_{,s}$  así:

$$\mathbf{r}_{1/2} = \mathbf{r}_1 + [1/2 \mathbf{I} + p(\phi) \tilde{\mathbf{e}}] \mathbf{x} \quad (\text{AV.21})$$

$$\mathbf{r}_{1/2,s} = \frac{1}{L} [\mathbf{I} + q(\phi) \tilde{\mathbf{e}}^2] \mathbf{x} \quad (\text{AV.22})$$

con 
$$p(\phi) = \frac{\cos(\phi/2) - 1}{2 \text{sen}(\phi/2)} \quad \therefore \quad q(\phi) = 1 - \frac{\phi}{2 \text{sen}(\phi/2)} \quad (\text{AV.23})$$

Para calcular  $\delta \mathbf{r}$  y  $\delta \mathbf{r}_{,s}$  es necesario hallar antes la variación  $\delta \mathbf{e}$ . Ésta se obtiene de la curvatura  $L\boldsymbol{\tau} = \phi \mathbf{e}$ , que diferenciada vale  $L\delta \boldsymbol{\tau} = \delta \phi \mathbf{e} + \phi \delta \mathbf{e}$ , y como  $\mathbf{e}$  y  $\delta \mathbf{e}$  son

ortogonales, por ser  $|\mathbf{e}|=1$ , permite escribir:

$$\delta\phi = \mathbf{L} \mathbf{e}^T \delta\tau \quad (\text{AV.24})$$

$$\delta\mathbf{e} = \mathbf{L} \phi^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}] \delta\tau \quad (\text{AV.25})$$

Determinada  $\delta\mathbf{e}$ , las variaciones  $\delta\mathbf{r}$  y  $\delta\mathbf{r}_s$  en la sección  $S$  se calculan sin dificultad diferenciando (AV.14) y (AV.16), de las que se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{r}(s) &= \delta\mathbf{r}_1 + \widehat{\mathbf{A}}(s)\delta\mathbf{x} + \mathbf{L}\widehat{\mathbf{B}}(s)\delta\tau \\ \delta\mathbf{r}_s(s) &= \frac{1}{\mathbf{L}} [\widehat{\mathbf{C}}(s)\delta\mathbf{x} + \mathbf{L}\widehat{\mathbf{D}}(s)\delta\tau] \end{aligned} \quad (\text{AV.26})$$

con:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{A}} &= \lambda\mathbf{I} + f(\phi, \lambda)\tilde{\mathbf{e}} + g(\phi, \lambda)\tilde{\mathbf{e}}^2 \\ \widehat{\mathbf{B}} &= \phi^{-1} \left[ \tilde{\mathbf{x}} [f(\phi, \lambda)\tilde{\mathbf{e}}^2 - l(\phi, \lambda)\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}] + \right. \\ &\quad g(\phi, \lambda)[(\mathbf{e}^T \mathbf{x})\mathbf{I} + \mathbf{e} \otimes \mathbf{x} - 2\mathbf{x} \otimes \mathbf{e}] + \\ &\quad \left. (\phi^{-1}n(\phi, \lambda) - 2g(\phi, \lambda))[(\mathbf{e}^T \mathbf{x})\mathbf{e} \otimes \mathbf{e} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{e}] \right] \\ \widehat{\mathbf{C}} &= \mathbf{I} + h(\phi, \lambda)\tilde{\mathbf{e}} + k(\phi, \lambda)\tilde{\mathbf{e}}^2 \\ \widehat{\mathbf{D}} &= \phi^{-1} [(m(\phi, \lambda) - 2k(\phi, \lambda))\mathbf{x} \otimes \mathbf{e} - h(\phi, \lambda)\tilde{\mathbf{x}} + \\ &\quad k(\phi, \lambda)[\mathbf{e} \otimes \mathbf{x} + (\mathbf{e}^T \mathbf{x})\mathbf{I}] + \\ &\quad (n(\phi, \lambda)\tilde{\mathbf{x}} - m(\phi, \lambda)(\mathbf{e}^T \mathbf{x})\mathbf{I})\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}] \end{aligned} \quad (\text{AV.27})$$

$$2l(\phi, \lambda) = (2\lambda - 1)h(\phi, \lambda) + \cotg(\phi/2)[1 - k(\phi, \lambda)] - (\phi/2)\text{cosec}^2(\phi/2)$$

$$2m(\phi, \lambda) = 2 + 2k(\phi, \lambda) + (1 - 2\lambda)\phi h(\phi, \lambda) - \phi \cotg(\phi/2)[1 - k(\phi, \lambda)]$$

$$2n(\phi, \lambda) = (1 - 2\lambda)\phi[1 - k(\phi, \lambda)] + \phi \cotg(\phi/2)h(\phi, \lambda)$$

viniedo además  $\delta\tau$  dado por (AV.10) o, si se prefiere,

$$\mathbf{L} \delta\tau = \mathbf{F}(\mathbf{L}\tau)\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}_2)\delta\boldsymbol{\alpha}_2 - [\mathbf{F}(\mathbf{L}\tau) + \mathbf{L}\tilde{\boldsymbol{\tau}}]\mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}_1)\delta\boldsymbol{\alpha}_1$$

En el punto de Gauss,  $\lambda = 1/2$ , las expresiones de estos operadores se reducen a:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{A}} &= 1/2 \mathbf{I} + p(\phi) \tilde{\mathbf{e}} \\ \widehat{\mathbf{B}} &= \tilde{\mathbf{x}} [ \phi^{-1} p(\phi) \tilde{\mathbf{e}}^2 - u(\phi) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} ] \mathbf{c} \\ \widehat{\mathbf{C}} &= \mathbf{I} + q(\phi) \tilde{\mathbf{e}}^2 \\ \widehat{\mathbf{D}} &= \phi^{-1} [ v(\phi) [ \mathbf{x} \otimes \mathbf{e} - (\mathbf{e}^T \mathbf{x}) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} ] + \\ &\quad q(\phi) [ \mathbf{e} \otimes \mathbf{x} - 2 \mathbf{x} \otimes \mathbf{e} + (\mathbf{e}^T \mathbf{x}) \mathbf{I} ] ]\end{aligned}\tag{AV.28}$$

con 
$$u(\phi) = \frac{\cos(\phi/2) - 1}{4 \text{sen}^2(\phi/2)} \quad \therefore \quad v(\phi) = 2 - \frac{\phi}{2 \text{sen}(\phi/2)} \left[ 1 + \frac{\phi}{2 \text{tag}(\phi/2)} \right]$$

Nótese que al haber supuesto constantes la curvatura y la deformación transversal en el elemento, la energía elástica no varía a lo largo de él y se puede tomar como punto de integración de Gauss uno cualquiera distinto del punto central  $\lambda = 1/2$ ; por ejemplo, el extremo inicial  $\lambda = 0$ . Si las cargas son puntuales y están aplicadas en los nodos, con este cambio se puede simplificar la forma de los operadores (AV.27) y reducir el tiempo de cálculo de la matriz de rigidez. Sin embargo, si las cargas están repartidas, este cambio no representa ninguna ventaja, ya que para calcular el trabajo exterior de estas cargas se necesita conocer al menos el desplazamiento y el giro del punto central.

Finalmente, de los resultados obtenidos en este apartado se extrae la variación del vector ampliado de derivadas  $\delta \mathbf{q}^\nabla(s) = [\delta \mathbf{r}_{,s}; \delta \boldsymbol{\alpha}; \delta \boldsymbol{\alpha}_{,s}]^T(s)$  en una sección arbitraria del elemento. En concreto, en la sección central este vector puede escribirse en función de las variaciones  $\delta \mathbf{q}$  de los nodos extremos del siguiente modo.

$$\delta \mathbf{q}_{1/2}^\nabla = \Gamma'_1 \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_1 \\ \delta \boldsymbol{\alpha}_1 \end{bmatrix} + \Gamma'_2 \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_2 \\ \delta \boldsymbol{\alpha}_2 \end{bmatrix}\tag{AV.29}$$

siendo  $\Gamma'_1$  y  $\Gamma'_2$  las matrices de interpolación que se introdujeron en el apartado IV.14. Para el estado de deformación helicoidal supuesto, estas matrices valen:

$$\Gamma'_1 = -\frac{1}{L} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{C}} & \widehat{\mathbf{D}} [\mathbf{F}(\mathbf{L}\boldsymbol{\tau}) + \mathbf{L}\tilde{\boldsymbol{\tau}}] \\ \mathbf{0} & -\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\widehat{\mathbf{E}}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^T(\boldsymbol{\alpha})[\mathbf{R}(\mathbf{L}\boldsymbol{\tau}_o/2)\mathbf{R}_1^T \mathbf{F}(\mathbf{L}\boldsymbol{\tau}) + \mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}, s; \boldsymbol{\alpha})\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\widehat{\mathbf{E}}^T] \end{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_1 \quad (\text{AV.30})$$

$$\Gamma'_2 = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{C}} & \widehat{\mathbf{D}}\mathbf{F}(\mathbf{L}\boldsymbol{\tau}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\widehat{\mathbf{E}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^T(\boldsymbol{\alpha})[\mathbf{R}(\mathbf{L}\boldsymbol{\tau}_o/2)\mathbf{R}_1^T \mathbf{F}(\mathbf{L}\boldsymbol{\tau}) - \mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}, s; \boldsymbol{\alpha})\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\widehat{\mathbf{E}}] \end{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_2 \quad (\text{AV.31})$$

debiendo tomarse los parámetros  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\boldsymbol{\alpha}_s$  en la sección central, siendo  $\widehat{\mathbf{C}}$  y  $\widehat{\mathbf{D}}$  los operadores (AV.28) y viniendo definidos  $\widehat{\mathbf{E}}$ ,  $\boldsymbol{\Theta}_1$  y  $\boldsymbol{\Theta}_2$  del siguiente modo:

$$\widehat{\mathbf{E}} := \frac{L}{2} [\mathbf{I} + \text{tag}(\phi/4) \tilde{\mathbf{e}}] \quad (\text{AV.32})$$

$$\boldsymbol{\Theta}_1 := \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}_1) \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \boldsymbol{\Theta}_2 := \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}(\boldsymbol{\alpha}_2) \end{bmatrix} \quad (\text{AV.33})$$

Por otra parte, si el estado de deformación es un campo de desplazamientos lineales y curvatura constante, estas matrices se reducen a:

$$\Gamma'_1 = -\frac{1}{L} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\widehat{\mathbf{E}}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^T(\boldsymbol{\alpha})[\mathbf{R}(\mathbf{L}\boldsymbol{\tau}_o/2)\mathbf{R}_1^T \mathbf{F}(\mathbf{L}\boldsymbol{\tau}) + \mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}, s; \boldsymbol{\alpha})\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\widehat{\mathbf{E}}^T] \end{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_1 \quad (\text{AV.34})$$

$$\Gamma'_2 = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\widehat{\mathbf{E}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^T(\boldsymbol{\alpha})[\mathbf{R}(\mathbf{L}\boldsymbol{\tau}_o/2)\mathbf{R}_1^T \mathbf{F}(\mathbf{L}\boldsymbol{\tau}) - \mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}, s; \boldsymbol{\alpha})\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})\widehat{\mathbf{E}}] \end{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_2 \quad (\text{AV.35})$$