

Formulación mediante el método de los elementos finitos de la teoría membranar de las láminas en coordenadas relativas y deformaciones proyectadas

Miguel Ángel Martínez

Universidad Central de Las Villas (UCLV)
Carretera a Camajuaní, km 5 1/2, Santa Clara
Villaclara, Cuba
Tel.: 53-42-281 076, Fax: 53-42-281 608
e-mail: ane@uclv.edu.cu

Resumen

Se presenta un procedimiento para el cálculo de las solicitaciones, deformaciones y desplazamientos en la superficie media de una lámina que funciona esencialmente en el estado membranar. Se hace la formulación mediante el MEF a partir de un enfoque que introduce una superficie de referencia S como superficie de cálculo y una ecuación relativa que relaciona la superficie real S^* con la de referencia. Por consiguiente, la discretización se realiza sobre la superficie de referencia y esto ofrece ventajas. En este primer trabajo se le brinda al analista cuatro superficies de referencia: la propia superficie media de la lámina, el plano cartesiano, el plano polar y un cilindro coaxial en el caso en que la superficie media sea también de revolución. Lo anterior equivale, en definitiva, a una formulación mediante el MEF de la citada teoría en, respectivamente, coordenadas curvilíneas, cartesianas, cilíndricas e intrínseco-cartesianas.

Palabras clave:

Láminas, MEF

FORMULATION BY MEANS OF THE FINITE ELEMENT METHOD OF THE SHELL MEMBRANE THEORY IN RELATIVE COORDINATES AND PROYECTED DEFORMATIONS

Summary

A procedure is presented for the calculation of the solicitations, deformations and displacement on the middle surface of a shell that functions essentially in membrane state. The formulation is done through the FEM from an approach that introduces an S -reference surface as calculation surface and a relative equation that relates the S^* real surface with the S -reference one. Consequently, the discretization is carried out on the reference surface, which offers certain advantages. In this first work, the analyst is offered four reference surfaces: the very middle surface of the shell, the Cartesian plane, the polar plane and a coaxial cylinder in the case the middle surface is also a revolution surface. All this is definitely equivalent to a formulation through the FEM of the said theory in curvilinear, Cartesian, cylindrical and intrinsic-Cartesian coordinates, respectively.

Keywords:

Shell, FEM

INTRODUCCIÓN

Se presenta un método de cálculo de láminas sobre superficies de referencia basado en el enfoque unificado de análisis de las láminas, desarrollado por Hernández^{1,2} y en la introducción de las deformaciones proyectadas y corrimientos transformados para la teoría de la membrana. Se utiliza para ello el método de los elementos finitos. Se recuerda que en esta teoría se admiten las condiciones de Goldenveiser, suficientes, aunque no necesarias, para que una lámina funcione esencialmente en el estado membranar.

Una superficie puede quedar definida por su ecuación cartesiana $z = f(x, y)$. Para nuestros propósitos es más conveniente definir una superficie en coordenadas curvilíneas de Gauss, o en coordenadas relativas. En las primeras se define por el conjunto de tres ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\alpha_1, \alpha_2) \\ x_2 &= x_2(\alpha_1, \alpha_2), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathfrak{R} \\ x_3 &= x_3(\alpha_1, \alpha_2) \end{aligned} \quad (1)$$

Las x_1 , x_2 y x_3 son las coordenadas cartesianas de un punto genérico P de la superficie (Figura 1), expresadas como funciones de los parámetros α_1 y α_2 . Estos últimos se denominan coordenadas curvilíneas de P. Las funciones x_1 , x_2 y x_3 deben ser definidas, continuas y unievaluadas en sus dos variables α_1 y α_2 ; los valores de estas últimas deben limitarse, pues, para que a cada par de valores corresponda un punto P y solamente uno.

Figura 1. Sistema de coordenadas cartesianas

Las curvas descritas por el extremo P del vector \vec{r} cuando α_1 (o α_2) se mantienen constantes, se denominan curvas paramétricas o coordenadas. Se sabe del análisis vectorial que la derivada de un vector \vec{r} en la dirección de la curva paramétrica $\alpha_2 = \text{cte}$ (respectivamente $\alpha_1 = \text{cte}$) es un vector tangente a la superficie en la dirección de α_1 (de α_2). Por definición, los parámetros de Lamé A_1 , A_2 viene dados por

$$A_1 = A_1(\alpha_1, \alpha_2) = \left| \frac{\partial \vec{r}(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} \right| \quad A_2 = A_2(\alpha_1, \alpha_2) = \left| \frac{\partial \vec{r}(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} \right|$$

Los vectores unitarios en la dirección de las curvas paramétricas son, respectivamente

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_1(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial x_1}{A_1 \partial \alpha_1} \vec{i} + \frac{\partial x_2}{A_1 \partial \alpha_1} \vec{j} + \frac{\partial x_3}{A_1 \partial \alpha_1} \vec{k} \quad (2)$$

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_2(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial x_1}{A_2 \partial \alpha_2} \vec{i} + \frac{\partial x_2}{A_2 \partial \alpha_2} \vec{j} + \frac{\partial x_3}{A_2 \partial \alpha_2} \vec{k}$$

y el vector unitario normal

$$\vec{e}_n = \vec{e}_n(\alpha_1, \alpha_2) = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \quad (3)$$

Se supondrá que las curvas coordenadas son ortogonales, para lo cual la condición necesaria y suficiente es que $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$. Para los radios de curvatura geodésicos se tienen las relaciones

$$\rho_1 = \rho_1(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{A_1 A_2}{\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}}, \quad \rho_2 = \rho_2(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{A_1 A_2}{\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}}$$

y para los radios de curvatura principales

$$R_1 = R_1(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{A_1 A_1}{\vec{e}_n \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha_1^2}}, \quad R_2 = R_2(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{A_2 A_2}{\vec{e}_n \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha_2^2}}$$

Se admitirá además, que las curvas coordenadas coinciden con las líneas de curvatura de la superficie.

Para definir la superficie media S^* de una lámina en coordenadas relativas, se define previamente una superficie de referencia S mediante un sistema de coordenadas curvilíneas de Gauss α_1, α_2 (Figura 2). Se considera que las curvas paramétricas coinciden con las líneas de curvatura de la superficie de referencia.

Figura 2. Sistema de coordenadas relativas

Se denomina ecuación relativa de S^* a la ecuación $f = f(\alpha_1, \alpha_2)$, donde f es la distancia PP^* de un punto genérico P^* de la superficie media a la superficie de referencia, medida por tanto según una normal a la superficie de referencia. Si f es igual a cero, la superficie media coincide con la de referencia. Para f distinto de cero, se obtienen distintos casos importantes en la práctica.

De acuerdo con la definición de coordenadas relativas, la ecuación vectorial de S^* es $\vec{r}^* = \vec{r}(\alpha_1, \alpha_2) + f(\alpha_1, \alpha_2)\vec{e}_n$, en la que $\vec{r} = \vec{r}(\alpha_1, \alpha_2)$ es la ecuación vectorial de la superficie de referencia S . Diferenciando la ecuación anterior, el vector elemental tangente a la superficie media es

$$d\vec{r}^* = \left[A_1 \left(1 + \frac{f}{R_1} \right) \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \vec{e}_n \right] d\alpha_1 + \left[A_2 \left(1 + \frac{f}{R_2} \right) \vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \vec{e}_n \right] d\alpha_2$$

Si solamente una de las dos coordenadas varía, $d\vec{r}^*$ es tangente a la correspondiente curva paramétrica, obteniéndose

$$d\vec{r}_1^* = \left[\left(1 + \frac{f}{R_1} \right) \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{A_1 \partial \alpha_1} \vec{e}_n \right] A_1 d\alpha_1 \quad d\vec{r}_2^* = \left[\left(1 + \frac{f}{R_2} \right) \vec{e}_2 + \frac{\partial f}{A_2 \partial \alpha_2} \vec{e}_n \right] A_2 d\alpha_2$$

Los módulos de estos vectores, es decir, las longitudes de los elementos de arco de la superficie media son

$$|d\vec{r}_1^*| = ds_1^* = K_1 A_1 d\alpha_1 = K_1 ds_1, \quad |d\vec{r}_2^*| = ds_2^* = K_2 A_2 d\alpha_2 = K_2 ds_2$$

siendo

$$K_1 = \sqrt{\left[\left(1 + \frac{f}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{A_1 \partial \alpha_1} \right)^2 \right]}, \quad K_2 = \sqrt{\left[\left(1 + \frac{f}{R_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{A_2 \partial \alpha_2} \right)^2 \right]}$$

Los ángulos β_1 y β_2 pueden calcularse por las fórmulas

$$B_1 = \tan \beta_1 = \frac{\frac{\partial f}{A_1 \partial \alpha_1}}{1 + \frac{f}{R_1}}, \quad B_2 = \tan \beta_2 = \frac{\frac{\partial f}{A_2 \partial \alpha_2}}{1 + \frac{f}{R_2}} \quad (4)$$

Los vectores unitarios de la superficie media se pueden entonces escribir en la forma

$$\vec{e}_1^* = \vec{e}_1 \cos \beta_1 + \vec{e}_n \sin \beta_1, \quad \vec{e}_2^* = \vec{e}_2 \cos \beta_2 + \vec{e}_n \sin \beta_2$$

El ángulo ω se obtiene por

$$\cos \omega = \sin \beta_1 \sin \beta_2$$

El vector unitario normal a la superficie media de la lámina vale

$$\vec{e}_n^* = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{\sin \omega} = -\frac{\sin \beta_1 \cos \beta_2}{\sin \omega} \vec{e}_1 - \frac{\cos \beta_1 \sin \beta_2}{\sin \omega} \vec{e}_2 + \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{\sin \omega} \vec{e}_n$$

ECUACIONES BÁSICAS

Sea P' un punto genérico de la superficie media deformada (Figura 3).

Figura 3. Vector de desplazamientos

El vector de posición \vec{r}' de P' vale $\vec{r}' = \vec{r}^* + \vec{u}$, donde $\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_n\vec{e}_n$ es el vector de los desplazamientos de un punto de la superficie media pero expresado como combinación lineal de los vectores ortonormales de la superficie de referencia. Por esto se le llama vector de desplazamientos proyectado y se denota por

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1(\alpha_1, \alpha_2) \\ u_2(\alpha_1, \alpha_2) \\ u_n(\alpha_1, \alpha_2) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Si representamos este vector como combinación lineal de los vectores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ y tenemos en cuenta (2) y (3), se obtiene la relación entre las componentes en el sistema local $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_n$ y el sistema cartesiano global $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_n \end{Bmatrix}^{\text{global}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{A_1 \partial \alpha_1} & \frac{\partial x_1}{A_2 \partial \alpha_2} & \frac{\partial x_2}{A_1 \partial \alpha_1} & \frac{\partial x_3}{A_2 \partial \alpha_2} & -\frac{\partial x_2}{A_2 \partial \alpha_2} & \frac{\partial x_3}{A_1 \partial \alpha_1} \\ \frac{\partial x_2}{A_1 \partial \alpha_1} & \frac{\partial x_2}{A_2 \partial \alpha_2} & \frac{\partial x_3}{A_1 \partial \alpha_1} & \frac{\partial x_1}{A_2 \partial \alpha_2} & -\frac{\partial x_3}{A_2 \partial \alpha_2} & \frac{\partial x_1}{A_1 \partial \alpha_1} \\ \frac{\partial x_3}{A_1 \partial \alpha_1} & \frac{\partial x_3}{A_2 \partial \alpha_2} & \frac{\partial x_1}{A_1 \partial \alpha_1} & \frac{\partial x_2}{A_2 \partial \alpha_2} & -\frac{\partial x_1}{A_2 \partial \alpha_2} & \frac{\partial x_2}{A_1 \partial \alpha_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_n \end{Bmatrix}^{\text{local}} = (\mathbf{T})^T \mathbf{u} \quad (6)$$

(el superíndice T indica transpuesta.)

Por conveniencia, como se verá más adelante, se define un vector de desplazamientos transformado de componentes \bar{u}_1 , \bar{u}_2 y \bar{u}_n , por

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & B_1 \\ 0 & 1 & B_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (7)$$

donde B_1 y B_2 son los conocidos parámetros que relacionan la superficie real y la de referencia dados en (4).

Si ε_1^* , ε_2^* , ε_3^* son las deformaciones de la superficie media, es decir, ε_i^* , $i = 1, 2$, es la elongación relativa de la superficie media en dirección de la curva α_i^* ; ε_{12}^* es el deslizamiento, igual al cambio en el ángulo comprendido entre las curvas coordenadas, y σ_1^* , σ_2^* , σ_{12}^* son las correspondientes tensiones. Se sabe de la teoría de la elasticidad que se verifica la ley de Hooke generalizada^{14,15}

$$\varepsilon_1^* = \frac{1}{E}(\sigma_1^* - \nu\sigma_2^*) + \alpha T, \quad \varepsilon_2^* = \frac{1}{E}(\sigma_2^* - \nu\sigma_1^*) + \alpha T, \quad \varepsilon_{12}^* = \frac{2(1+\nu)}{E}\sigma_{12}^* \quad (8)$$

siendo E y ν las constantes elásticas del material; el término αT tiene en cuenta las posibles deformaciones térmicas. Las ecuaciones (8) implican la suposición de que el ángulo ω que forman los vectores \bar{e}_1^* y \bar{e}_2^* de la superficie media vale $\frac{\pi}{2}$ (si $\omega \neq \frac{\pi}{2}$ se verifican otras ecuaciones más complicadas). Asimismo las ecuaciones (8) suponen que el estado tensional de la lámina es plano. Se admite además la hipótesis de la conservación del elemento normal.³

Por hipótesis, las tensiones están uniformemente distribuidas en el espesor de la lámina y por tanto

$$\sigma_1^* = \frac{N_1^*}{h}, \quad \sigma_2^* = \frac{N_2^*}{h}, \quad \sigma_{12}^* = \frac{N_{12}^*}{h} \quad (9)$$

donde N_1^* , N_2^* , N_{12}^* son las sollicitaciones reales y h es el espesor de la lámina. Sustituyendo (9) en (8) se obtienen las relaciones entre las deformaciones reales y las acciones interiores reales. En el caso general de $\omega \neq \frac{\pi}{2}$ viene dada por⁴

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{F}^* \mathbf{N}^* \quad (10)$$

siendo $\boldsymbol{\varepsilon}^* = [\varepsilon_1^* \varepsilon_2^* \varepsilon_{12}^*]^T$, $\mathbf{N}^* = [N_1^* N_2^* N_{12}^*]^T$, respectivamente, el vector de deformaciones reales y el vector de sollicitaciones reales.

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^*(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{Eh} \begin{bmatrix} \csc \omega & (\cot^2 \omega - \nu) \sin \omega & 2 \cot \omega \\ (\cot^2 \omega - \nu) \sin \omega & \csc \omega & 2 \cot \omega \\ (1 + \nu) \cos \omega & (1 + \nu) \cos \omega & 2(1 + \nu) \end{bmatrix}$$

Se define el vector de deformaciones proyectadas $\boldsymbol{\varepsilon}$ mediante

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}^* = \begin{bmatrix} K_1 \sec \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 \sec \beta_2 & 0 \\ K_1 K_2 \cos \omega & K_1 K_2 \cos \omega & K_1 K_2 \sin \omega \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (11)$$

y las sollicitaciones proyectadas por las relaciones

$$N_1 = K_2 \cos \beta_1 N_1^*, \quad N_2 = K_1 \cos \beta_2 N_2^*, \quad N_{12} = K_2 \cos \beta_2 N_{12}^*, \quad N_{21} = K_1 \cos \beta_1 N_{21}^*$$

El vector de acciones interiores proyectadas \mathbf{N} por

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ S]^T$$

donde $S = \frac{N_{12}}{\lambda_2} = \frac{N_{21}}{\lambda_1}$, $\lambda_1 = 1 + \frac{f}{R_1}$, $\lambda_2 = 1 + \frac{f}{R_2}$

La relación entre \mathbf{N}^* y \mathbf{N} se puede escribir en la forma

$$\mathbf{N}^* = \begin{bmatrix} \frac{\sec \beta_1}{K_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sec \beta_2}{K_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{N} = \mathbf{C}\mathbf{N} \quad (12)$$

Combinando (10),(11) y (12) se obtiene

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{A}\mathbf{F}^*\mathbf{N}^* = \mathbf{A}\mathbf{F}^*\mathbf{C}\mathbf{N} = \mathbf{F}\mathbf{N}$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{Eh} \begin{bmatrix} \frac{K_1}{K_2} \sec^2 \beta_1 \csc \omega & \sec \beta_1 \sec \beta_2 (\cot^2 \omega - \nu) \sin \omega & 2K_1 \sec \beta_1 \cot \omega \\ \sec \beta_1 \sec \beta_2 (\cot^2 \omega - \nu) \sin \omega & \frac{K_2}{K_1} \sec^2 \beta_2 \csc \omega & 2K_2 \sec \beta_2 \cot \omega \\ 2K_1 \sec \beta_1 \cot \omega & 2K_2 \sec \beta_2 \cot \omega & 2K_1 K_2 [\cos \omega \cot \omega + (1 + \nu) \sin \omega] \end{bmatrix}$$

o también

$$\mathbf{N} = \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (13)$$

Las relaciones entre las componentes del vector de deformaciones reales y las componentes del vector de desplazamientos proyectado ya fueron obtenidas² para el caso $\omega = \frac{\pi}{2}$. Ellas presentan varias incongruencias, por ejemplo, figuran las derivadas parciales de los tres desplazamientos u_1 , u_2 y u_n y en la teoría membranar los desplazamientos sólo pueden cumplir dos condiciones de contorno, correspondientes a sus componentes en el plano tangente a la lámina. Estos inconvenientes se solucionan expresando las ecuaciones geométricas en función de las deformaciones proyectadas y de los desplazamientos transformados que toman la forma, para el caso general, $\omega \neq \frac{\pi}{2}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{G}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{u}} \quad (14)$$

donde \mathbf{G} es la matriz

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{bmatrix} -\frac{B_1}{R_1} & \frac{1}{\rho_1} & C_1 \\ \frac{1}{\rho_2} & -\frac{B_2}{R_2} & C_2 \\ -\lambda_2 \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{B_2}{R_1} \right) & -\lambda_1 \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{B_1}{R_2} \right) & 2C \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$C_1 = \frac{1 + B_1^2}{R_1} - \frac{B_2}{\rho_1} - \frac{\partial B_1}{A_1 \partial \alpha_1}; \quad C_{21} = \frac{B_1 B_2}{R_2} + \frac{B_2}{\rho_2} - \frac{\partial B_1}{A_2 \partial \alpha_2}; \quad C_{22} = \frac{1 + B_2^2}{R_2} - \frac{B_1}{\rho_2} - \frac{\partial B_2}{A_2 \partial \alpha_2}$$

$$C = \lambda_1 C_{21} = \lambda_2 C_{12}; \quad C_{12} = \frac{B_1 B_2}{R_1} + \frac{B_1}{\rho_1} - \frac{\partial B_2}{A_1 \partial \alpha_1}$$

y \mathbf{L} es la matriz de operadores

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{A_1 \partial \alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{A_2 \partial \alpha_2} & 0 \\ \lambda_1 \frac{\partial}{A_2 \partial \alpha_2} & \lambda_2 \frac{\partial}{A_1 \partial \alpha_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Sustituyendo (14) en (13) se verifica

$$\mathbf{N} = \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}(\mathbf{G}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{u}}) = (\mathbf{D}\mathbf{G} + \mathbf{D}\mathbf{L})\bar{\mathbf{u}}$$

Se obtienen las ecuaciones de equilibrio haciendo uso del Principio de los Trabajos Virtuales (PTV). Este principio, en su forma general, puede expresarse en la forma $\delta\omega_I^* = \delta\omega_C^* + \delta\omega_B^*$, donde $\delta\omega_I^*$, $\delta\omega_C^*$ y $\delta\omega_B^*$ son, respectivamente, los trabajos virtuales de las acciones interiores reales, de las cargas de superficie (o volumen) reales y de las fuerzas en el contorno. Representando por $\delta\omega_I$, $\delta\omega_C$ y $\delta\omega_B$, respectivamente, los trabajos virtuales de las acciones interiores proyectadas a través de las deformaciones virtuales proyectadas, de las cargas de superficie (o volumen) proyectadas y de las fuerzas en el contorno proyectadas a través de los desplazamientos virtuales proyectados, se obtiene que⁵

$$\begin{aligned} \delta\omega_I &= \iint [N_1 \delta\varepsilon_1 + N_2 \delta\varepsilon_2 + S \delta\gamma] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ &= \iint [\delta\varepsilon_1, \delta\varepsilon_2, \delta\gamma] \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ S \end{Bmatrix} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \iint [\delta\boldsymbol{\varepsilon}]^T \mathbf{N} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \delta\omega_I^* \\ \delta\omega_C &= \iint [q_1 \delta u_1 + q_2 \delta u_2 + q_n \delta u_n] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ &= \iint [\bar{q}_1 \delta u_1 + \bar{q}_2 \delta u_2 + (\bar{q}_n + B_1 \bar{q}_1 + B_2 \bar{q}_2) \delta u_n] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ &= \iint [\bar{q}_1 \delta \bar{u}_1 + \bar{q}_2 \delta \bar{u}_2 + \bar{q}_n \delta \bar{u}_n] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ &= \iint [\delta \bar{\mathbf{u}}_1, \delta \bar{\mathbf{u}}_2, \delta \bar{\mathbf{u}}_n] \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_n \end{Bmatrix} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \iint [\delta \bar{\mathbf{u}}]^T \bar{\mathbf{b}} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \delta\omega_C^* \end{aligned}$$

siendo q_1 , q_2 y q_n las componentes de la carga distribuida, medida por unidad de área de superficie de referencia y siguiendo, respectivamente, las direcciones de los tres vectores unitarios \vec{e}_1 , \vec{e}_2 y \vec{e}_n y que llamaremos cargas proyectadas. Por conveniencia se han definido las cargas transformadas por

$$\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}}(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -B_1 & -B_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_n \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Los valores de q_1 , q_2 y q_n se calculan según las igualdades

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(\alpha_1, \alpha_2) = K_1 K_2 q \sin \omega \left(a \frac{\partial x_1}{A_1 \partial \alpha_1} + b \frac{\partial x_2}{A_1 \partial \alpha_1} + c \frac{\partial x_3}{A_1 \partial \alpha_1} \right) \\ q_2 &= q_2(\alpha_1, \alpha_2) = K_1 K_2 q \sin \omega \left(a \frac{\partial x_1}{A_2 \partial \alpha_2} + b \frac{\partial x_2}{A_2 \partial \alpha_2} + c \frac{\partial x_3}{A_2 \partial \alpha_2} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$q_n = q_n(\alpha_1, \alpha_2) = K_1 K_2 q \sin \omega \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial x_1}{A_1 \partial \alpha_1} & \frac{\partial x_2}{A_1 \partial \alpha_1} & \frac{\partial x_3}{A_1 \partial \alpha_1} \\ \frac{\partial x_1}{A_2 \partial \alpha_2} & \frac{\partial x_2}{A_2 \partial \alpha_2} & \frac{\partial x_3}{A_2 \partial \alpha_2} \end{vmatrix}$$

en las que q es la carga distribuida por unidad de superficie media, de manera que el vector carga elemental

$$d\vec{q} = |d\vec{q}| \vec{e}_3 = q dA^* \vec{e}_3 = K_1 K_2 q dA \sin \omega \vec{e}_3$$

a , b y c son los cosenos directores de \vec{e}_3 (se suponen conocidos).

Finalmente, el trabajo virtual de las cargadas de borde viene dado por

$$\begin{aligned} \delta\omega_B &= \oint [p_1 \delta u_1 + p_2 \delta u_2 + p_n \delta u_n] ds = \oint [p_1 \delta u_1 + p_2 \delta u_2 + (B_1 p_1 + B_2 p_2) \delta u_n] ds = \\ &= \oint [p_1 \delta \bar{u}_1 + p_2 \delta \bar{u}_2] ds = \oint [\delta \bar{\mathbf{u}}_1, \delta \bar{\mathbf{u}}_2, \delta \bar{\mathbf{u}}_n] \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{Bmatrix} ds = \oint [\delta \bar{\mathbf{u}}]^T \mathbf{t} ds = \delta\omega_B^* \end{aligned}$$

en las que p_1 , p_2 y p_n son las componentes de la carga de borde, medida por unidad de longitud de superficie de referencia y siguiendo, respectivamente, las direcciones de los vectores unitarios \vec{e}_1 , \vec{e}_2 y \vec{e}_n , que llamaremos cargas de borde proyectadas. Ellas están relacionadas con las cargas de borde reales p_1^* y p_2^* por

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_\alpha \cos \beta_1 & 0 \\ 0 & K_\alpha \cos \beta_2 \\ K_\alpha \sin \beta_1 & K_\alpha \sin \beta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{Bmatrix} \quad (19)$$

en las que $K_\alpha = \frac{ds^*}{ds}$. Obsérvese que si $\alpha = 0$, entonces $K_\alpha = K_2$ y si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, entonces $K_\alpha = K_1$ (Figura 4). Estos casos particulares son los más frecuentes, pues el contorno coincide en ellos con una curva paramétrica, ds es un elemento de arco de la superficie de referencia. Nótese además que p_1 , p_2 y p_n no son independientes, pues se verifica que $p_n = B_1 p_1 + B_2 p_2$. Por tanto la expresión integral de equilibrio toma la forma

$$\iint [\delta \boldsymbol{\epsilon}]^T \mathbf{N} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \iint [\delta \bar{\mathbf{u}}]^T \bar{\mathbf{b}} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \oint [\delta \bar{\mathbf{u}}]^T \mathbf{t} ds$$

Figura 4. Cargas reales en el contorno y cargas proyectadas

FORMULACIÓN MEDIANTE EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Se considera inicialmente una discretización de la superficie de referencia en elementos finitos de m nodos cada uno, para después, en dependencia de la superficie de referencia elegida, particularizar para distintos valores de m .

De (14), (15) y (16) se deduce que en las integrales del PTV sólo intervienen primeras derivadas de los desplazamientos, lo que exige continuidad de clase C_0 a la aproximación de elementos finitos, es decir, campo de desplazamientos continuos. Obtendremos las expresiones básicas de la formulación de elementos finitos para un elemento de lámina curvo isoparamétrico de m nodos y mas adelante se particularizará para el de cuatro nodos.

Se supone que se ha discretizado la superficie de referencia S en elementos finitos de m nodos cada uno de manera que los lados de los elementos están situados sobre las curvas paramétricas (Figura 5). Para un elemento finito genérico (e), dado en el espacio de coordenadas cartesianas globales x_1, x_2, x_3 por las ecuaciones paramétricas (1), se define un sistema de coordenadas curvilíneas local normalizado ξ y η por las ecuaciones

$$\xi = \frac{R_1(\alpha_1^{(e)} - \alpha_{1c}^{(e)})}{\frac{1}{2}ds_1}; \quad \eta = \frac{R_2(\alpha_2^{(e)} - \alpha_{2c}^{(e)})}{\frac{1}{2}ds_2}$$

donde $\alpha_{1c}^{(e)}$ y $\alpha_{2c}^{(e)}$ son las coordenadas curvilíneas del centro del elemento. Obsérvese que esta transformación garantiza que sobre los lados del elemento ξ y η valen ± 1 y en el interior están entre -1 y $+1$. Además, sobre cada elemento las curvas paramétricas ξ cte (respectivamente η cte) siguen siendo líneas de curvatura de la superficie de referencia (Figura 6).

Figura 5. Sistema de coordenadas curvilíneas normalizado

Figura 6. Geometría real. Geometría normalizada. Elemento isoparamétrico de cuatro nodos

Interpolando las componentes del vector de desplazamientos proyectado dadas en (5) en función de los correspondientes desplazamientos de los nodos en la forma usual, se obtiene

$$u_1(\xi, \eta) = u = N_1(\xi, \eta)u_1^{(e)} + \dots + N_m(\xi, \eta)u_m^{(e)}$$

$$u_2(\xi, \eta) = v = N_1(\xi, \eta)v_1^{(e)} + \dots + N_m(\xi, \eta)v_m^{(e)}$$

$$u_n(\xi, \eta) = w = N_1(\xi, \eta)w_1^{(e)} + \dots + N_m(\xi, \eta)w_m^{(e)}$$

que se escribe en forma matricial por

$$\mathbf{u} = [\mathbf{N}_1 \dots \mathbf{N}_m] \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^{(e)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^{(e)} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_a^{(e)}$$

donde \mathbf{u} es el vector de desplazamientos proyectado local de un punto del elemento;

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_i^{(e)} \\ v_i^{(e)} \\ w_i^{(e)} \end{Bmatrix}$$

son, respectivamente, la matriz de funciones de forma y el vector de movimientos nodales

locales del nodo i y $\mathbf{N} = [N_1 \dots N_m]$ y $\mathbf{a}^{(e)} = \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ \vdots \\ a_m^{(e)} \end{Bmatrix}$ son la matriz de funciones de forma

y el vector de movimientos nodales locales del elemento (e) . $N_i = N_i(\xi, \eta)$, $i = 1, 2, \dots, m$ es la función de forma del nodo i , que como se sabe es un polinomio interpolador de Lagrange.

Teniendo en cuenta (6) se obtiene

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1^{(e)})^{\text{global}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{A_1 \partial \alpha_1} & \frac{\partial x_1}{A_2 \partial \alpha_2} & \frac{\partial x_2}{A_1 \partial \alpha_1} & \frac{\partial x_3}{A_2 \partial \alpha_2} & -\frac{\partial x_2}{A_2 \partial \alpha_2} & \frac{\partial x_3}{A_1 \partial \alpha_1} \\ \frac{\partial x_2}{A_1 \partial \alpha_1} & \frac{\partial x_2}{A_2 \partial \alpha_2} & \frac{\partial x_3}{A_1 \partial \alpha_1} & \frac{\partial x_1}{A_2 \partial \alpha_2} & -\frac{\partial x_3}{A_2 \partial \alpha_2} & \frac{\partial x_1}{A_1 \partial \alpha_1} \\ \frac{\partial x_3}{A_1 \partial \alpha_1} & \frac{\partial x_3}{A_2 \partial \alpha_2} & \frac{\partial x_1}{A_1 \partial \alpha_1} & \frac{\partial x_2}{A_2 \partial \alpha_2} & -\frac{\partial x_1}{A_2 \partial \alpha_2} & \frac{\partial x_2}{A_1 \partial \alpha_1} \end{bmatrix} & (\mathbf{a}_1^{(e)})^{\text{local}} = \\ &= (\mathbf{T}(\alpha_1, \alpha_2))^T \Big|_{\substack{\alpha_1 = \alpha_{1c} \\ \alpha_2 = \alpha_{2c}}} (\mathbf{a}_1^{(e)})^{\text{local}} = (\mathbf{T}(\xi, \eta))^T \Big|_{\substack{\xi = 0 \\ \eta = 0}} (\mathbf{a}_1^{(e)})^{\text{local}} \end{aligned} \quad (20)$$

y considerando (7), para el vector de desplazamientos transformados $\bar{\mathbf{u}}$ resulta la aproximación

$$\bar{\mathbf{u}} = [\bar{\mathbf{N}}_1 \dots \bar{\mathbf{N}}_m] \mathbf{a}^{(e)} = \bar{\mathbf{N}}_a^{(e)} \quad (21)$$

en la que

$$\bar{\mathbf{N}}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & B_1(\xi, \eta)N_i \\ 0 & N_i & B_2(\xi, \eta)N_i \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}$$

Sustituyendo (21) en (14) se obtiene la expresión del vector de deformaciones proyectadas locales en la discretización

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{G}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{G}\bar{\mathbf{N}}\mathbf{a}^{(e)} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{N}}\mathbf{a}^{(e)} = (\mathbf{G}\bar{\mathbf{N}} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{N}})\mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{B}(\xi, \eta)\mathbf{a}^{(e)} \quad (22)$$

De acuerdo con (11), la relación entre el vector de deformaciones proyectadas locales $\boldsymbol{\varepsilon}$ y el vector de deformaciones reales locales $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ se escribe ahora en la forma

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{G}\bar{\mathbf{N}} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{N}})\mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{a}^{(e)}$$

en la cual

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \beta_1}{K_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cos \beta_2}{K_2} & 0 \\ -\frac{\cos \omega \cos \beta_1}{K_1 \sin \omega} & -\frac{\cos \omega \cos \beta_2}{K_2 \sin \omega} & \frac{1}{K_1 K_2 \sin \omega} \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta (13) y (22) se obtiene la relación entre el vector de deformaciones proyectadas locales y el vector de acciones interiores proyectada locales en la discretización

$$\mathbf{N} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}(\mathbf{G}\bar{\mathbf{N}} + \mathbf{L}\bar{\mathbf{N}})\mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a}^{(e)} \quad (23)$$

Como es sabido, a partir de aquí, se puede obtener el vector de acciones interiores reales utilizando (12), esto es

$$\mathbf{N}^* = \mathbf{C}\mathbf{N} = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a}^{(e)} \quad (24)$$

En todas las igualdades anteriores las matrices que intervienen deben ser expresadas en las coordenadas ξ y η .

Como es usual, se establece primero la ecuación de equilibrio para un elemento genérico (e) de la superficie de referencia, para después llegar a la ecuación de equilibrio de toda la malla. Para ello se hace uso del PTV.

Se supone que sobre el elemento de la superficie de referencia actúan las correspondientes representaciones de las fuerzas reales que actúan en la superficie media y que son debidas a:

1. Fuerzas distribuidas, medidas por unidad de área de la superficie de referencia S y siguiendo las direcciones de los tres vectores unitarios cuyas componentes se han representado por q_1 , q_2 y q_n y que se calculan según (18). Ellas están relacionadas con las cargas transformadas por (17).
2. Fuerzas repartidas por unidad de longitud del contorno de (e) en sus lados. Estas pueden ser de dos tipos:
 - a) Debidas a fuerzas exteriores que actúan sobre los lados del elemento que forma parte del contorno exterior de la superficie media S^* , cuyas componentes respecto a los vectores \vec{e}_1 , \vec{e}_2 y \vec{e}_n de la superficie S , se han representado por p_1 , p_2 y p_n y que están relacionadas con las cargas de borde reales mediante (19).

- b) Debidas a las fuerzas de interacción entre elementos que se transmiten a través de sus lados comunes en la superficie media. Estas últimas pueden ignorarse desde un principio, pues se anulan en el ensamblaje.

Supondremos ahora que el equilibrio del elemento se establece únicamente en los nodos. Podemos entonces definir unas fuerzas puntuales que actúen sobre los nodos y que equilibren las fuerzas debidas a la deformación del elemento y al resto de las fuerzas actuantes sobre el mismo. Al vector de estas fuerzas que actúa sobre el nodo i se le representa por

$$\mathbf{q}_i = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

El trabajo virtual de estas fuerzas sobre los desplazamientos virtuales δu_{1i} , δu_{2i} y δu_{ni} viene dado por

$$\sum_i (\delta u_{1i} U_i + \delta u_{2i} V_i + \delta u_{ni} W_i) = [\delta \mathbf{a}^{(e)}]^T \mathbf{q}^{(e)}$$

Así, teniendo en cuenta las acciones y deformaciones que contribuyen al trabajo virtual de la estructura, la expresión del PTV puede escribirse por $\delta \omega_I = \delta \omega_C + \delta \omega_B + \delta \omega_P$, siendo $\delta \omega_P$ el trabajo virtual de las fuerzas puntuales.

Sustituyendo en la expresión obtenida para el PTV, teniendo en consideración que los desplazamientos virtuales son arbitrarios y que todos los términos que dependen de α_1 y α_2 deben expresarse en función de ξ y η , se obtiene la ecuación de equilibrio del elemento

$$\iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}^{(e)} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \iint_{A^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{b}} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \oint_{l^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{t} ds = \mathbf{q}^{(e)}$$

o lo que es lo mismo

$$\left(\iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \right) \mathbf{a}^{(e)} - \iint_{A^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{b}} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \oint_{l^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{t} ds = \mathbf{q}^{(e)}$$

que es usual escribir en la forma

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)} \quad (25)$$

en la que

$$\mathbf{K}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (26)$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{b}} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \oint_{l^{(e)}} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{t} ds \quad (27)$$

La ecuación de equilibrio global de la malla se obtiene, como es habitual en el MEF, estableciendo simplemente que la suma de las fuerzas nodales de equilibrio en cada nodo debe ser igual a la fuerza nodal exterior. Así pues, tras el ensamblaje, la ecuación matricial global se puede escribir como

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}$$

donde \mathbf{K} \mathbf{a} y \mathbf{f} son, respectivamente, la matriz de rigidez, el vector de desplazamientos nodales y el vector de fuerzas nodales equivalentes de toda la malla.

Para poder sumar las fuerzas nodales en el ensamblaje de las ecuaciones de rigidez es esencial que todas las fuerzas estén definidas con respecto al mismo sistema de referencia. Por tanto, en los nodos comunes a elementos que están referidos a ejes locales distintos es obligatoria una transformación de fuerzas y movimientos a un sistema de ejes globales antes del ensamblaje. Así pues, la relación entre componentes locales y globales de movimientos y fuerzas debe escribirse como^{7,8}

$$\mathbf{a}_i^{(e)} = \mathbf{T}_i^{(e)} \mathbf{a}'_i^{(e)}, \quad \mathbf{f}_i^{(e)} = \mathbf{T}_i^{(e)} \mathbf{f}'_i^{(e)}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (28)$$

donde

$$\mathbf{a}'_i^{(e)} = [u_i^{(e)} \ v_i^{(e)} \ w_i^{(e)}]^T, \quad \mathbf{f}'_i^{(e)} = [f_{11}^{(e)} \ f_{21}^{(e)} \ f_{31}^{(e)}]^T$$

son, respectivamente, los vectores de movimientos y fuerzas del nodo i en ejes globales y $\mathbf{T}_i^{(e)}$ es la matriz de transformación del nodo i de ejes locales a globales x_1, x_2 y x_3 . De (28) se deduce que

$$\mathbf{a}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_1 \mathbf{a}'_1 \\ \mathbf{T}_2 \mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{T}_m \mathbf{a}'_m \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_m \end{Bmatrix}^{(e)} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_m \end{Bmatrix}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)}$$

y de forma análoga

$$\mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)} \mathbf{f}'^{(e)}, \quad \mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{T}^{(e)} \mathbf{q}'^{(e)} \quad (29)$$

Haciendo uso de (24) y (29) se obtiene

$$\mathbf{q}'^{(e)} = \mathbf{K}'^{(e)} \mathbf{a}'^{(e)} - \mathbf{f}'^{(e)}$$

que es la nueva ecuación matricial de equilibrio del elemento en ejes globales. En la relación anterior se ha hecho

$$\mathbf{K}'^{(e)} = [\mathbf{T}^{(e)}]^T \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{T}^{(e)} \quad \mathbf{f}'^{(e)} = [\mathbf{T}^{(e)}]^{(T)} \mathbf{f}^{(e)}$$

que son la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales equivalentes del elemento en ejes globales. En la práctica no es necesario efectuar el triple producto anterior. Así, operando con (26) se deduce que una submatriz típica $\mathbf{K}'_{ij}^{(e)}$ puede obtenerse por

$$\mathbf{K}'_{ij}^{(e)} = [\mathbf{T}_i^{(e)}]^T \mathbf{K}_{ij}^{(e)} [\mathbf{T}_j^{(e)}] = \int \int_{A^{(e)}} [\mathbf{B}'_i^{(e)}]^T \mathbf{D} \mathbf{B}'_j^{(e)} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (30)$$

donde

$$\mathbf{B}'_i^{(e)} = \mathbf{B}_i^{(e)} \mathbf{T}_i^{(e)} \quad (31)$$

es la matriz de deformación del nodo i del elemento en ejes globales y

$$\begin{aligned}\mathbf{f}'^{(e)} &= [\mathbf{T}_i^{(e)}]^T \mathbf{f}_i^{(e)} = [\mathbf{T}_i^{(e)}]^T (\mathbf{f}_b^{(e)})_i + (\mathbf{f}_t^{(e)})_i = \\ &= \iint_{A^{(e)}} N_i [\mathbf{T}_i^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_n \end{Bmatrix} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \oint_{l^{(e)}} N_i [\mathbf{T}_i^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_n \end{Bmatrix} ds = \\ &= \iint_{A^{(e)}} N_i \begin{Bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_n \end{Bmatrix} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \oint_{l^{(e)}} N_i \begin{Bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_n \end{Bmatrix} ds\end{aligned}$$

En el cálculo de una lámina el interés se centra en la obtención de movimientos globales y de esfuerzos en ejes locales de cada elemento. Los esfuerzos locales pueden calcularse en función de los movimientos globales utilizando directamente la nueva matriz $\mathbf{B}'_{ij}^{(e)}$. Así, de (23) y (24) se deduce que

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{T}^{(e)}\mathbf{a}'^{(e)} = \mathbf{D}\mathbf{B}'^{(e)}\mathbf{a}'^{(e)} \\ \mathbf{N}^* &= \mathbf{C}\mathbf{N} = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a}^{(e)} = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{B}'^{(e)}\mathbf{a}'^{(e)}\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (20) resulta que

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_1^{(e)} &= \mathbf{T}_2^{(e)} = \dots = \mathbf{T}_m^{(e)} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{A_1 \partial \alpha_1} & & \frac{\partial x_2}{A_1 \partial \alpha_1} & & \frac{\partial x_3}{A_1 \partial \alpha_1} \\ \frac{\partial x_1}{A_2 \partial \alpha_2} & & \frac{\partial x_2}{A_2 \partial \alpha_2} & & \frac{\partial x_3}{A_2 \partial \alpha_2} \\ \frac{\partial x_2}{A_1 \partial \alpha_1} \frac{\partial x_3}{A_2 \partial \alpha_2} & \frac{\partial x_2}{A_2 \partial \alpha_2} \frac{\partial x_3}{A_1 \partial \alpha_1} & \frac{\partial x_3}{A_1 \partial \alpha_1} \frac{\partial x_1}{A_2 \partial \alpha_2} & \frac{\partial x_3}{A_2 \partial \alpha_2} \frac{\partial x_1}{A_1 \partial \alpha_1} & \frac{\partial x_1}{A_1 \partial \alpha_1} \frac{\partial x_2}{A_2 \partial \alpha_2} & \frac{\partial x_1}{A_2 \partial \alpha_2} \frac{\partial x_2}{A_1 \partial \alpha_1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

evaluada en el centro del elemento.

ALGUNOS CASOS PARTICULARES

La superficie media de la lámina coincide con la superficie de referencia

Como en este caso $f = 0$, las ecuaciones paramétricas de la superficie real y la de referencia coinciden y vienen expresadas por (1). De aquí que

$$B_1 = B_2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad C_1 = \frac{1}{R_1}, \quad C_2 = \frac{1}{R_2}, \quad C = 0$$

y con ello $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$, $\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N}$. Para un elemento isoparamétrico de cuatro nodos (Figura 6) se tiene

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha_1(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) (\alpha_1)_i^{(e)} = (\alpha_1)_c^{(e)} + \frac{1}{2} [(\alpha_1)_2^{(e)} - (\alpha_1)_1^{(e)}] \xi \\ \alpha_2 &= \alpha_2(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) (\alpha_2)_i^{(e)} = (\alpha_2)_c^{(e)} + \frac{1}{2} [(\alpha_2)_4^{(e)} - (\alpha_2)_1^{(e)}] \eta\end{aligned}\tag{32}$$

donde $N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ es el conocido polinomio interpolador de Lagrange.

La matriz de deformación \mathbf{B} toma la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= (\mathbf{G} + \mathbf{L})\bar{\mathbf{N}} = (\mathbf{G} + \mathbf{L})\mathbf{N} = \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\rho_1} & \frac{1}{R_1} \\ \frac{1}{\rho_2} & 0 & \frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{\rho_1} & -\frac{1}{\rho_2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{A_1 \partial \alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{A_2 \partial \alpha_2} & 0 \\ \frac{\partial}{A_2 \partial \alpha_2} & \frac{\partial}{A_1 \partial \alpha_1} & 0 \end{bmatrix} \right) [\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_3 \mathbf{N}_4] = \quad (33) \\ &= [\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_4] \end{aligned}$$

Para obtener las derivadas parciales con respecto a α_1 y α_2 de las funciones de forma hacemos uso de la regla de derivación en cadena

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{(e)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} \end{Bmatrix}$$

de donde

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}^{(e)}]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}^{(e)}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \eta} & -\frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial \alpha_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

Aquí $\mathbf{J}^{(e)}$ es la matriz jacobiana de la transformación de coordenadas naturales a intrínsecas. Para calcular los términos de esta matriz hacemos uso de (32) obteniendo

$$\mathbf{J}^{(e)} = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}(\alpha_1)_i^{(e)} & \frac{\partial N_i}{\partial \xi}(\alpha_2)_i^{(e)} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta}(\alpha_1)_i^{(e)} & \frac{\partial N_i}{\partial \eta}(\alpha_2)_i^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(\alpha_1)_2^{(e)} - (\alpha_1)_1^{(e)}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(\alpha_2)_4^{(e)} - (\alpha_2)_1^{(e)}}{2} \end{bmatrix}$$

y con ello

$$|\mathbf{J}^{(e)}| = \left[\frac{(\alpha_1)_2^{(e)} - (\alpha_1)_1^{(e)}}{2} \right] \left[\frac{(\alpha_2)_4^{(e)} - (\alpha_2)_1^{(e)}}{2} \right]$$

$$[\mathbf{J}^{(e)}]^{-1} = \frac{4}{[(\alpha_1)_2^{(e)} - (\alpha_1)_1^{(e)}][(\alpha_2)_4^{(e)} - (\alpha_2)_1^{(e)}]} \begin{bmatrix} \frac{(\alpha_2)_4^{(e)} - (\alpha_2)_1^{(e)}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(\alpha_1)_2^{(e)} - (\alpha_1)_1^{(e)}}{2} \end{bmatrix}^{(e)}$$

y finalmente

$$\frac{\partial N_i}{\partial \alpha_1} = \frac{(1 + \eta \eta_i) \xi_i}{2[(\alpha_1)_2^{(e)} - (\alpha_1)_1^{(e)}]}, \quad \frac{\partial N_i}{\partial \alpha_2} = \frac{(1 + \xi \xi_i) \eta_i}{2[(\alpha_2)_4^{(e)} - (\alpha_2)_1^{(e)}]}$$

Volviendo a (33) se obtiene

$$\mathbf{B}_i(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{N_i(\xi, \eta)}{\rho_1(\xi, \eta)} & \frac{N_i(\xi, \eta)}{R_1(\xi, \eta)} \\ \frac{N_i(\xi, \eta)}{\rho_2(\xi, \eta)} & 0 & \frac{N_i(\xi, \eta)}{R_2(\xi, \eta)} \\ -\frac{N_i(\xi, \eta)}{\rho_1(\xi, \eta)} & -\frac{N_i(\xi, \eta)}{\rho_2(\xi, \eta)} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{A_1(\xi, \eta) \partial \alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{A_2(\xi, \eta) \partial \alpha_2} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{A_2(\xi, \eta) \partial \alpha_2} & \frac{\partial N_i}{A_2(\xi, \eta) \partial \alpha_1} & 0 \end{bmatrix}$$

donde se ha destacado que A_1 , A_2 , ρ_1 , ρ_2 , R_1 y R_2 deben ser expresadas en función de ξ, η utilizando (32). La matriz de deformación del nodo i en ejes globales se obtiene haciendo uso de (31). Como además $K_1 = K_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ y $\omega = \frac{\pi}{2}$ (las curvas paramétricas son líneas de curvatura), se obtiene la conocida matriz constitutiva

$$\mathbf{D} = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$

Por otra parte $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$, $\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ 0 \end{Bmatrix}$ o sea, las cargas distribuidas transformadas

coinciden con las cargas distribuidas proyectadas que coinciden a su vez con las reales, las cargas de borde proyectadas coinciden con las reales. Teniendo en cuenta la interpolación isoparamétrica de la geometría, (30) puede escribirse en la forma

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}'_{ij}{}^{(e)}(\xi, \eta)]^T \mathbf{D} \mathbf{B}'_{ij}{}^{(e)}(\xi, \eta) A_1(\xi, \eta) A_2(\xi, \eta) |\mathbf{J}^{(e)}| d\xi d\eta, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

y el vector de fuerzas nodales equivalentes del nodo i del elemento en ejes globales en la forma

$$\mathbf{f}'_i{}^{(e)} = [\mathbf{T}_i^{(e)}]^T \mathbf{f}_i^{(e)} = [\mathbf{T}_i^{(e)}]^T \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\bar{\mathbf{N}}_i(\xi, \eta)]^T \bar{\mathbf{b}}(\xi, \eta) A_1(\xi, \eta) A_2(\xi, \eta) |\mathbf{J}^{(e)}| d\xi d\eta + \oint_{J_i^{(e)}} [\bar{\mathbf{N}}_i(\xi, \eta)]^T \mathbf{t}(\xi, \eta) ds^{(e)} \right\}$$

la última integral sólo tiene sentido en aquellos lados del elemento situados en el contorno sobre el que actúan fuerzas exteriores (proyectadas).

Si el plano de referencia es cartesiano

Haciendo $\alpha_1 = x$ y $\alpha_2 = y$, las ecuaciones paramétricas de la superficie de referencia S y de la superficie real S^* son, respectivamente

$$S : \begin{cases} x_1 = x_1(x, y) = x \\ x_2 = x_2(x, y) = y \\ x_3 = \text{cte} \end{cases} \quad S^* : \begin{cases} x_1^* = x \\ x_2^* = y \\ x_3^* = \text{cte} + f(x, y) \end{cases}$$

De aquí se obtienen los parámetros característicos de S , es decir $A_1 = A_2 = 1$, $R_1 = R_2 = \infty$ y $\rho_1 = \rho_2 = \infty$ y los que relacionan S con S^*

$$B_1 = \frac{\partial f}{\partial x} = \tan \beta_1, \quad B_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = \tan \beta_2$$

$$K_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2} = \sec \beta_1, \quad K_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sec \beta_2$$

Como además

$$C_1 = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad C_2 = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad C = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

se obtiene, para un elemento isoparamétrico de cuatro nodos (Figura 7) en el que

$$x^{(e)} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i^{(e)} = x_c^{(e)} + \frac{1}{2}(x_2^{(e)} - x_1^{(e)})\xi$$

$$y^{(e)} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i^{(e)} = y_c^{(e)} + \frac{1}{2}(y_4^{(e)} - y_1^{(e)})\eta$$

Figura 7. El plano cartesiano como superficie de referencia

que

$$\bar{\mathbf{N}} = [\bar{\mathbf{N}}_1 \dots \bar{\mathbf{N}}_4] \quad \text{donde } \bar{\mathbf{N}}_1 = \begin{bmatrix} N_i & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} N_i \\ 0 & N_i & \frac{\partial f}{\partial y} N_i \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}_{\xi, \eta}$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4]$$

con

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & -2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}_{\xi, \eta} \bar{\mathbf{N}}_i + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}_{\xi, \eta} \bar{\mathbf{N}}_i =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} N_i \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} N_i \\ 0 & 0 & -2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} N_i \end{bmatrix}_{\xi, \eta} + \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial(B_1 N_i)}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial(B_2 N_i)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial(B_1 N_i)}{\partial y} + \frac{\partial(B_2 N_i)}{\partial x} \end{bmatrix}_{\xi, \eta}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{(1 + \eta \eta_i) \xi_i}{2[x_2^{(e)} - x_1^{(e)}]}, \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{(1 + \xi \xi_i) \eta_i}{2[y_4^{(e)} - y_1^{(e)}]}$$

$$\frac{\partial(B_1 N_i)}{\partial x} = N_i \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right]_{\xi, \eta} + B_1(\xi, \eta) + \frac{\partial N_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial(B_2 N_i)}{\partial y} = N_i \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_{\xi, \eta} + B_2(\xi, \eta) + \frac{\partial N_i}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(B_1 N_i)}{\partial y} = N_i \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right]_{\xi, \eta} + B_1(\xi, \eta) + \frac{\partial N_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial(B_2 N_i)}{\partial x} = N_i \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right]_{\xi, \eta} + B_2(\xi, \eta) + \frac{\partial N_i}{\partial x}$$

y con ello $\mathbf{B}'_i^{(e)} = \mathbf{B}_i^{(e)} \mathbf{T}_i^{(e)} = \mathbf{B}_i^{(e)}$, pues en este caso $\mathbf{T}_i^{(e)}$ coincide con la matriz identidad. La matriz constitutiva del elemento se puede obtener invirtiendo la matriz

$$\mathbf{F} = \frac{1}{Eh} \begin{bmatrix} \frac{K_1}{K_2} \sec^2 \beta_1 \csc \omega & (\cot^2 \omega - \nu) \sec \beta_1 \sec \beta_2 \sin \omega & 2K_1 \sec \beta_1 \cot \omega \\ (\cot^2 \omega - \nu) \sec \beta_1 \sec \beta_2 \sin \omega & \frac{K_2}{K_1} \sec^2 \beta_2 \csc \omega & 2K_2 \sec \beta_2 \cot \omega \\ 2K_1 \sec \beta_1 \cot \omega & 2K_2 \sec \beta_2 \cot \omega & 2(1+\nu)K_1 K_2 \cos \omega \cot \omega \sin \omega \end{bmatrix}_{\xi, \eta}$$

Una submatriz típica de la matriz de rigidez del elemento en ejes globales toma entonces la forma

$$\mathbf{K}'_{ij}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}'_{ij}^{(e)}(\xi, \eta)]^T \mathbf{D} \mathbf{B}'_j^{(e)}(\xi, \eta) |\mathbf{J}^{(e)}| d\xi d\eta, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

y el vector de fuerzas nodales equivalentes en ejes globales del nodo i del elemento debido a, por ejemplo, fuerzas repartidas en la superficie y en el contorno, la forma

$$\mathbf{f}'_{ij}^{(e)} = (\mathbf{f}'_b^{(e)})_i + (\mathbf{f}'_t^{(e)})_i = (\mathbf{f}_b^{(e)})_i + (\mathbf{f}_t^{(e)})_i = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_n \end{Bmatrix} |\mathbf{J}^{(e)}| d\xi d\eta + \oint_{l^{(e)}} N_i \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_n \end{Bmatrix} ds$$

La última integral debe evaluarse en aquel lado del contorno donde actúan las cargas, que corresponde en el dominio normalizado con uno de los segmentos $\xi \pm 1$ o $\eta \pm 1$. Las componentes q_1 , q_2 y q_n se calculan según (18) y toman la forma

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(x, y) = aK_1K_2q \sin \omega, & q_1(\xi, \eta) &= q_1(x, y)]_{\xi, \eta} \\ q_2 &= q_2(x, y) = bK_1K_2q \sin \omega, & q_2(\xi, \eta) &= q_2(x, y)]_{\xi, \eta} \\ q_n &= q_n(x, y) = cK_1K_2q \sin \omega, & q_n(\xi, \eta) &= q_n(x, y)]_{\xi, \eta} \end{aligned}$$

a , b y c son los conocidos cosenos directores y p_1 , p_2 y p_n por

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1(x, y) = K_\alpha p_1^* \cos \beta_1, & p_1(\xi, \eta) &= p_1(x, y)]_{\xi, \eta} \\ p_2 &= p_2(x, y) = K_\alpha p_2^* \cos \beta_2, & p_2(\xi, \eta) &= p_2(x, y)]_{\xi, \eta} \\ p_n &= p_n(x, y) = K_\alpha p_1^* \sin \beta_1 + K_\alpha p_2^* \sin \beta_2, & p_n(\xi, \eta) &= p_n(x, y)]_{\xi, \eta} \end{aligned}$$

Si el plano de referencia es polar (coordenadas cilíndricas)

Haciendo $\alpha_1 = \rho$ y $\alpha_2 = \theta$, las ecuaciones paramétricas de la superficie de referencia S y de la superficie S^* son, respectivamente

$$S : \begin{cases} x_1 = x_1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta \\ x_2 = x_2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta \\ x_3 = \text{cte} \end{cases} \quad S^* : \begin{cases} x_1^* = \rho \cos \theta \\ x_2^* = \rho \sin \theta \\ x_3^* = \text{cte} + f(\rho, \theta) \end{cases}$$

De aquí se obtienen los parámetros característicos de S , es decir

$A_1 = 1$, $A_2 = \rho$, $R_1 = R_2 = \infty$ y $\rho_1 = \infty$ y $\rho_2 = \rho$ y los que relacionan S con S^*

$$B_1 = \frac{\partial f}{\partial \rho} = \tan \beta_1, \quad B_2 = \frac{\partial f}{\rho \partial \theta} = \tan \beta_2$$

$$K_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2} = \sec \beta_1, \quad K_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\rho \partial \theta}\right)^2} = \sec \beta_2$$

Como además

$$C_1 = -\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}, \quad C_2 = -\frac{\partial^2 f}{\rho \partial \rho} - \frac{\partial^2 f}{\rho^2 \partial \theta^2}, \quad C = -\frac{\partial^2 f}{\rho^2 \partial \theta} - \frac{\partial^2 f}{\rho \partial \rho \partial \theta}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

se obtiene, para un elemento isoparamétrico de cuatro nodos (Figura 8), en el que

$$\rho^{(e)} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \rho_i^{(e)} = \rho_c^{(e)} + \frac{1}{2}(\rho_2^{(e)} - \rho_1^{(e)})\xi$$

$$\theta^{(e)} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \theta_i^{(e)} = \theta_c^{(e)} + \frac{1}{2}(\theta_4^{(e)} - \theta_1^{(e)})\eta$$

Figura 8. El plano polar como superficie de referencia

$$\bar{\mathbf{N}} = [\bar{\mathbf{N}}_1 \dots \bar{\mathbf{N}}_4] \quad \text{donde } \bar{\mathbf{N}}_1 = \begin{bmatrix} N_i & 0 & \frac{\partial f}{\partial \rho} N_i \\ 0 & N_i & \frac{\partial f}{\rho \partial \theta} N_i \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}_{\xi, \eta}$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4]$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} \\ \frac{1}{\rho} & 0 & -\frac{\partial f}{\rho \partial \rho} - \frac{\partial^2 f}{\rho^2 \partial \theta^2} \\ 0 & -\frac{1}{\rho} & 2 \left(\frac{\partial f}{\rho^2 \partial \theta} - \frac{\partial^2 f}{\rho \partial \rho \partial \theta} \right) \end{bmatrix}_{\xi, \eta} \bar{\mathbf{N}}_i + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\rho \partial \theta} & 0 \\ \frac{\partial}{\rho \partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \rho} & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{N}}_i = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} N_i \\ \frac{N_i}{\rho} & 0 & \frac{B_1 N_i}{\rho} - \left(\frac{\partial f}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2 f}{\rho^2 \partial \theta^2} \right) N_i \\ 0 & -\frac{N_i}{\rho} & -\frac{B_2 N_i}{\rho} + 2 \left(\frac{\partial f}{\rho^2 \partial \theta} - \frac{\partial^2 f}{\rho \partial \rho \partial \theta} \right) N_i \end{bmatrix}_{\xi, \eta} + \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \rho} & 0 & \frac{\partial(B_1 N_i)}{\partial \rho} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\rho \partial \theta} & \frac{\partial(B_2 N_i)}{\rho \partial \theta} \\ \frac{\partial N_i}{\rho \partial \theta} & \frac{\partial N_i}{\rho \partial \rho} & \frac{\partial(B_1 N_i)}{\rho \partial \theta} + \frac{\partial(B_2 N_i)}{\partial \rho} \end{bmatrix}_{\xi, \eta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \rho} = \frac{1 + \eta \eta_i \xi_i}{2[\rho_2^{(e)} - \rho_1^{(e)}]}, \quad \frac{\partial N_i}{\rho \partial \theta} = \frac{1 + \xi \xi_i \eta_i}{2\rho[\theta_4^{(e)} - \theta_1^{(e)}]}$$

$$\frac{\partial(B_1 N_i)}{\partial \rho} = N_i \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} \right]_{\xi, \eta} + B_1(\xi, \eta) + \frac{\partial N_i}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial(B_2 N_i)}{\partial \rho} = N_i \left(-\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial \theta} \right) \Big|_{\xi, \eta} + B_2(\xi, \eta) + \frac{\partial N_i}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial(B_1 N_i)}{\rho \partial \theta} = \frac{1}{\rho} \left(N_i \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial \rho} \right) \Big|_{\xi, \eta} + B_1(\xi, \eta) + \frac{\partial N_i}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial(B_2 N_i)}{\rho \partial \theta} = \frac{1}{\rho} \left(N_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) \Big|_{\xi, \eta} + B_2(\xi, \eta) + \frac{\partial N_i}{\partial \theta}$$

y con ello

$$\mathbf{B}'_i^{(e)} = \mathbf{B}_i^{(e)} \mathbf{T}_i^{(e)} = \mathbf{B}_i^{(e)} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\theta=\theta_c}$$

La matriz constitutiva del elemento se puede obtener invirtiendo la matriz

$$\mathbf{F} = \frac{1}{Eh} \begin{bmatrix} \frac{K_1}{K_2} \sec^2 \beta_1 \csc \omega & (\cot^2 \omega - \nu) \sec \beta_1 \sec \beta_2 \sin \omega & 2K_1 \sec \beta_1 \cot \omega \\ (\cot^2 \omega - \nu) \sec \beta_1 \sec \beta_2 \sin \omega & \frac{K_2}{K_1} \sec^2 \beta_2 \csc \omega & 2K_2 \sec \beta_2 \cot \omega \\ 2K_1 \sec \beta_1 \cot \omega & 2K_2 \sec \beta_2 \cot \omega & 2(1 + \nu) K_1 K_2 \cos \omega \cot \omega \sin \omega \end{bmatrix}_{\xi, \eta}$$

Una submatriz típica de la matriz de rigidez del elemento en ejes globales toma entonces la forma

$$\mathbf{K}'_{ij}{}^{(e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}'_i^{(e)}(\xi, \eta)]^T \mathbf{D} \mathbf{B}'_j{}^{(e)}(\xi, \eta) |\mathbf{J}^{(e)}| \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

y el vector de fuerzas nodales equivalentes en ejes globales del nodo i del elemento debido a, por ejemplo, fuerzas repartidas en la superficie y en el contorno, la forma

$$\mathbf{f}'_i{}^{(e)} = (\mathbf{f}'_{\mathbf{b}}{}^{(e)})_i + (\mathbf{f}'_{\mathbf{t}}{}^{(e)})_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_c & -\sin \theta_c & 0 \\ \sin \theta_c & \cos \theta_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_n \end{Bmatrix}_{\xi \eta} |\mathbf{J}^{(e)}| \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ + \oint_{l^{(e)}} N_i \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_n \end{Bmatrix} \end{array} \right) ds$$

La última integral debe evaluarse en aquel lado del contorno donde actúan las cargas, que corresponde en el dominio normalizado con uno de los segmentos $\xi \pm 1$ o $\eta \pm 1$. Las componentes q_1 , q_2 y q_n se calculan según las fórmulas

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(\rho, \theta) = K_1 K_2 q \sin \omega (a \cos \theta + b \sin \theta), & q_1(\xi, \eta) &= q_1(\rho, \theta)]_{\xi, \eta} \\ q_2 &= q_2(\rho, \theta) = K_1 K_2 q \sin \omega (-a \sin \theta + b \cos \theta), & q_2(\xi, \eta) &= q_2(\rho, \theta)]_{\xi, \eta} \\ q_n &= q_n(\rho, \theta) = c K_1 K_2 q \sin \omega, & q_n(\xi, \eta) &= q_n(\rho, \theta)]_{\xi, \eta} \end{aligned}$$

a , b y c son los conocidos cosenos directores y p_1 , p_2 y p_n por

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1(\rho, \theta) = K_\alpha p_1^* \cos \beta_1, & p_1(\xi, \eta) &= p_1(\rho, \theta)]_{\xi, \eta} \\ p_2 &= p_2(\rho, \theta) = K_\alpha p_2^* \cos \beta_2, & p_2(\xi, \eta) &= p_2(\rho, \theta)]_{\xi, \eta} \\ p_n &= p_n(\rho, \theta) = K_\alpha p_1^* \sin \beta_1 + K_\alpha p_2^* \sin \beta_2, & p_n(\xi, \eta) &= p_n(\rho, \theta)]_{\xi, \eta} \end{aligned}$$

La superficie de referencia es un cilindro coaxial de radio r_0 (coordenadas intrínseco-cartesianas) y la superficie media es de revolución

Haciendo $\alpha_1 = t$ y $\alpha_2 = z$, las ecuaciones paramétricas de la superficie de referencia S y de la superficie S^* son, respectivamente

$$S : \begin{cases} x_1 = x_1(t, z) = r_0 \cos t \\ x_2 = x_2(t, z) = r_0 \sin t \\ x_3(t, z) = z \end{cases} \quad S^* : \begin{cases} x_1^* = r_0 \cos t + f(z) \cos t \\ x_2^* = r_0 \sin t - f(z) \sin t \\ x_3^* = z \end{cases}$$

De aquí se obtienen los parámetros característicos de S , es decir, $A_1 = r_0$, $A_2 = 1$, $R_1 = r_0$, $R_2 = \infty$, $\rho_1 = \infty$ y $\rho_2 = \infty$, y los que relacionan S con S^*

$$B_1 = 0 = \tan \beta_1, \quad B_2 = \frac{\partial f}{\partial z} = \tan \beta_2, \quad K_1 = 1 + \frac{f}{\partial r_0} \quad K_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = \sec \beta_2$$

Como además, $C_1 = \frac{1}{r_0^2}$, $C_2 = \frac{\partial^2 f}{-\partial z^2}$ y $C = 0$, se obtiene, para un elemento isoparamétrico de cuatro nodos (Figura 9), en el que

$$t^{(e)} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) t_i^{(e)} = t_c^{(e)} + \frac{1}{2}(t_2^{(e)} - t_1^{(e)})\xi$$

$$z^{(e)} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) z_i^{(e)} = z_c^{(e)} + \frac{1}{2}(z_4^{(e)} - z_1^{(e)})\eta$$

$$\bar{\mathbf{N}} = [\bar{\mathbf{N}}_1 \dots \bar{\mathbf{N}}_4] \quad \text{donde } \bar{\mathbf{N}}_1 = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & \frac{\partial f}{\partial z} N_i \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}_{\xi, \eta}$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4]$$

Figura 9. Un cilindro coaxial de radio r_0 como superficie de referencia

con

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{r_0^2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ -\frac{\partial f}{r_0 \partial z} & -\left(1 + \frac{f}{r_0}\right) & 0 \end{bmatrix}_{\xi, \eta} \quad \bar{\mathbf{N}}_i + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{r_0 \partial t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{r_0 \partial t} & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{N}}_i =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{N_i}{r_0^2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} N_i \\ -\frac{N_i}{r_0} \frac{\partial}{\partial z} & -\left(1 + \frac{f(z)}{r_0}\right) N_i & -\left(1 + \frac{f}{r_0}\right) N_i \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}_{\xi, \eta} + \begin{bmatrix} \frac{1}{r_0} \frac{\partial N_i}{\partial t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial(B_2 N_i)}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{1}{r_0} & \frac{\partial N_i}{\partial t} & \frac{\partial(B_2 N_i)}{r_0 \partial t} \end{bmatrix}_{\xi, \eta}$$

$$\frac{1}{r_0} \frac{\partial N_i}{\partial t} = \frac{(1 + \eta \eta_i) \xi_i}{2[t_2^{(e)} - t_1^{(e)}]}, \quad \frac{\partial N_i}{\partial z} = \frac{(1 + \xi \xi_i) \eta_i}{2[z_4^{(e)} - z_1^{(e)}]}$$

$$\frac{\partial(B_2 N_i)}{\partial z} = N_i \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right]_{\xi, \eta} + \left[\frac{\partial f}{\partial z} \right]_{\xi, \eta} \frac{\partial N_i}{\partial z}, \quad \frac{\partial(B_2 N_i)}{r_0 \partial t} = \frac{1}{r_0} \left[\frac{\partial N_i}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial z} \right]_{\xi, \eta}$$

y con ello

$$\mathbf{B}'_i^{(e)} = \mathbf{B}_i^{(e)} \mathbf{T}_i^{(e)} = \mathbf{B}_i^{(e)} \begin{bmatrix} -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos t & \sin t & 0 \end{bmatrix}_{t=t_c}$$

La matriz constitutiva del elemento se puede obtener invirtiendo la matriz

$$\mathbf{F} = \frac{1}{Eh} \begin{bmatrix} 0 & -\nu \sec \beta_2 & 0 \\ -\nu \sec \beta_2 & \frac{K_2}{K_1} \sec^2 \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \nu)K_1K_2 \end{bmatrix}_{\xi, \eta}$$

Una submatriz típica de la matriz de rigidez del elemento en ejes globales toma entonces la forma

$$\mathbf{K}'_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}'_i^{(e)}(\xi, \eta)]^T \mathbf{D} \mathbf{B}'_j^{(e)}(\xi, \eta) |\mathbf{J}^{(e)}| r_0 d\xi d\eta, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

y el vector de fuerzas nodales equivalentes en ejes globales del nodo i del elemento debido a, por ejemplo, fuerzas repartidas en la superficie y en el contorno, la forma

$$\mathbf{f}'_i^{(e)} = (\mathbf{f}'_{\bar{b}}^{(e)})_i + (\mathbf{f}'_t^{(e)})_i = \begin{bmatrix} -\sin t_c & 0 & \cos t_c \\ \cos t_c & 0 & \sin t_c \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_n \end{Bmatrix}_{\xi, \eta} |\mathbf{J}^{(e)}| r_0 d\xi d\eta + \\ + \oint_{l^{(e)}} N_i \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_n \end{Bmatrix} \end{array} \right)$$

La última integral debe evaluarse en aquel lado del contorno donde actúan las cargas, que corresponde en el dominio normalizado con uno de los segmentos $\xi \pm 1$ o $\eta \pm 1$. Las componentes q_1 , q_2 y q_n se calculan según

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(t, z) = K_1 K_2 q \sin \omega (-a \sin t + b \cos t), & q_1(\xi, \eta) &= q_1(t, z)]_{\xi, \eta} \\ q_2 &= q_2(t, z) = c K_1 K_2 q \sin \omega, & q_2(\xi, \eta) &= q_2(t, z)]_{\xi, \eta} \\ q_n &= q_n(t, z) = c K_1 K_2 q \sin \omega (a \cos t + b \sin t), & q_n(\xi, \eta) &= q_n(t, z)]_{\xi, \eta} \end{aligned}$$

a , b y c son los conocidos cosenos directores y p_1 , p_2 y p_n por

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1(t, z) = K_\alpha p_1^*, & p_1(\xi, \eta) &= p_1(t, z)]_{\xi, \eta} \\ p_2 &= p_2(t, z) = K_\alpha p_2^* \cos \beta_2, & p_2(\xi, \eta) &= p_2(t, z)]_{\xi, \eta} \\ p_n &= p_n(t, z) = K_\alpha p_2^* \sin \beta_2, & p_n(\xi, \eta) &= p_n(t, z)]_{\xi, \eta} \end{aligned}$$

CONCLUSIONES

Con este trabajo ha quedado completamente concluida la formulación mediante el MEF del mencionado enfoque de la teoría membranar de las láminas para cuatro superficies de referencia distintas, una de las cuales es la propia superficie media. Ello posibilita el análisis de varios sistemas de referencia antes de abordar el cálculo de una lámina dada y escoger aquel que con mayor facilidad y profundidad pueda conducirnos a la obtención de la solución buscada. Puesto que, teóricamente, para una misma superficie media de una lámina existen innumerables superficies de referencia, o lo que es equivalente, diferentes sistemas de coordenadas, se puede continuar realizando las correspondientes formulaciones para otras superficies. En un próximo trabajo se mostrarán los resultados obtenidos con el correspondiente programa de cálculo en la solución de diversos problemas prácticos.

REFERENCIAS

- 1 J. Hernández, "Unified approach to the membrane theory of shells", *Madrid IASS Colloquium*, (1969).
- 2 J. Hernández, "Unified approach to the membrane deformations of shells", *Calgary IASS Congress*, (1972).
- 3 A.L. Goldenveiser, "*Teoría de los cascarones elásticos delgados*", Cía. Editorial Continental, S.A., México, (1963).
- 4 M. Soare, "*Aplicarea ecuatiilor cu diferente finite la calculul placilor curbe subtiri*", Editura Academiei RSR, (1968).
- 5 J. Hernández, "Estructuras laminares: teoría y aplicaciones", *Ingeniería Civil*, N° 5, (1982).
- 6 J. Hernández, "Unified approach to the general theory of shells", *Kielce Symposium*, (1973).
- 7 E. Oñate, "*Cálculo de estructuras por el Método de los Elementos Finitos*", CIMNE, (1992).
- 8 O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor, "*The finite element method*", McGraw Hill, Vol. I, (1989), Vol. II, (1991).
- 9 L.S.D. Morley, "Finite element criteria for some shells", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 20, (1984).
- 10 M.L. Bucalem y K.J. Bathe, "Finite element analysis of shell structures", *ARCME*, Vol. 4, (1997).
- 11 D.G. Ashwell y R.H. Gallagher, "*Finite element method for the thin shells and curved members*", J. Willy, (1976).
- 12 P.L. Gould, "*Finite element analysis of shells of revolution*", Pistman Pub. Co., Marsfield, MA, (1985).
- 13 P.E. Grafton y B.R. Strome, "Analysis of axi-symmetric shells by the direct stiffness method", *A.I.A.A.J.*, Vol. 1, pp. 2342-2347, (1963).
- 14 S.P. Timoshenko, "*Resistencia de materiales*", Parte I y II, Espasa-Calpe, (1970).
- 15 S.P. Timoshenko y S. Woinowsky-Krieger, "*Theory of plates and shells*", McGraw-Hill Book Co., (1959).
- 16 L.P. Eisenhart, "*Differential geometry of curves and surfaces*", Dover, N.Y., (1960).