

Análisis de vibración libre de una viga Timoshenko escalonada, centrífugamente rigidizada, mediante el método de cuadratura diferencial

Daniel H. Felix, Raúl E. Rossi

Instituto de Mecánica Aplicada
Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur
Alem 1253, 8000 – Bahía Blanca, Argentina

Diana V. Bambill

Instituto de Mecánica Aplicada
Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur
Miembro de la Carrera del Investigador Científico, CONICET
Alem 1253, 8000 – Bahía Blanca, Argentina
Tel.: 54-291-459 5100/01; Fax.: 54-291-459 5657
e-mail: dbambill@criba.edu.ar

Resumen

Este artículo trata sobre las vibraciones transversales de una viga rotante de sección no uniforme, utilizando el método de cuadratura diferencial (MCD).

La formulación se basa en la teoría de Timoshenko, que considera las fuerzas de inercia debidas a la traslación lateral junto con las contribuciones de la deformación por corte y de la inercia rotatoria. En este trabajo el método de cuadratura diferencial se aplica al cálculo de las frecuencias naturales. Los resultados obtenidos son comparados con resultados publicados en la literatura abierta y con valores calculados por los autores con un código de elementos finitos. El método propuesto ofrece un procedimiento directo y eficiente para analizar con muy buena precisión las vibraciones naturales de vigas rotantes de sección no uniforme.

Palabras clave: *Vibraciones libres, viga rotante, método de cuadratura diferencial, sección no uniforme.*

FREE VIBRATION ANALYSIS OF A CENTRIFUGALLY STIFFENED TIMOSHENKO NON-UNIFORM BEAM USING THE DIFFERENTIAL QUADRATURE METHOD

Summary

This paper deals with the transverse vibration of non-uniform rotating beams, by means of the differential quadrature method (DQM).

The formulation is based on the Timoshenko beam theory, which takes into account the inertia forces due to the transverse translation together with the contributions of shear deformation and rotatory inertia. The application of the differential quadrature method is demonstrated by investigating the natural frequencies. The results are compared with published results given in the open literature and with values obtained by the authors using a finite element code. The proposed method offers a direct and efficient procedure to analyze the natural vibration of non-uniform rotating beams with very good accuracy.

Keywords: *Free vibrations, rotating beam, differential quadrature method, non-uniform beam.*

INTRODUCCIÓN

En el campo de la ingeniería, hay una gran variedad de estructuras que pueden modelarse como vigas cantilever rotantes con vibración transversal, tales como hélices, aspas de helicópteros, álabes de turbinas, brazos de robot, entre otros.

Existen diversas teorías y una gran variedad de técnicas analíticas y numéricas para estudiar el problema de la vibración transversal de vigas rotantes. Este estudio presenta el método de cuadratura diferencial como procedimiento de cálculo de las frecuencias naturales de vigas cantilever que rotan alrededor de un eje, y se analiza la influencia de la variación de la sección de la viga en forma escalonada, como asimismo de los dos parámetros más importantes como son la velocidad de rotación y la esbeltez de la viga rotante. La formulación del problema propuesto se basa en la teoría de vigas de Timoshenko^{1,2}, que da mejores resultados en vigas de poca esbeltez y especialmente para los modos de vibración correspondientes a las frecuencias superiores, en comparación con la teoría elemental de Bernoulli-Euler que sólo tiene en cuenta la deformación por flexión.

Se considera que el tema es tanto de interés práctico como académico. Muchos investigadores se han dedicado a su estudio, y en la literatura científica se encuentran numerosas publicaciones sobre el tema. Entre los métodos utilizados para resolverlo el más difundido y utilizado es quizás el método de elementos finitos³⁻⁷. Además pueden citarse entre otros: el método de matriz de rigidez dinámica^{1,8}, el método de Ritz^{9,10}, el método de Galerkin¹¹ y el de serie de potencias¹².

En años recientes el método de cuadratura diferencial¹³⁻¹⁹, reaparece como una herramienta útil para resolver ecuaciones diferenciales relacionadas con aplicaciones a problemas de ingeniería. Este método permite modelar numéricamente el problema del título y obtener valores de las frecuencias con un alto grado de precisión y un gasto trivial en tiempo de computación, tanto en la introducción de los datos como en la obtención de los resultados que demanda unos pocos segundos²⁰. El algoritmo del MCD se desarrolló en lenguaje Mathematica²¹. Si bien en este trabajo se resuelven, a modo de ejemplo, vigas rotantes escalonadas con uno, dos y tres tramos, el planteo es aplicable a una viga con cualquier número de tramos.

A fin de brindar una confirmación de los buenos resultados logrados se los compara con valores presentes en la literatura (Banerjee¹), y con los obtenidos utilizando el método de elementos finitos (MEF), cuya aplicación se explica más adelante. Cabe mencionar que al utilizar un software profesional de uso general para problemas de Mecánica de Sólidos, la carga de los datos, muy numerosos aun para el caso de modelos con pocos elementos finitos, resulta tediosa, con el consiguiente riesgo de cometer errores difícilmente detectables. Por otra parte, al utilizar rutinas de cálculo de uso general, los tiempos de resolución son considerablemente mayores que con el algoritmo desarrollado con MCD.

DESCRIPCIÓN DEL MODELO DE VIGA ROTANTE

En la Figura 1 se presenta un esquema de la viga cantilever rotante de sección escalonada, dividida en tramos de sección constante, que rota con velocidad angular constante $\bar{\eta}$ con eje de rotación \bar{Y} , perpendicular al eje de la viga \bar{X} . El subíndice k designa al tramo genérico k -ésimo de la viga, cuya longitud es \bar{l}_k . La posición de la sección de cada tramo más cercana al eje de rotación queda definida por la coordenada \bar{X}_{0k} . En particular la coordenada \bar{X}_{01} corresponde al radio del eje material de rotación. En este estudio dicho radio se ha considerado nulo ($\bar{X}_{01} = 0$).

Los ejes \bar{X} e \bar{Y} son los ejes del plano de vibración transversal de la viga cantilever, y el plano de rotación de la viga resulta normal al eje \bar{Y} .

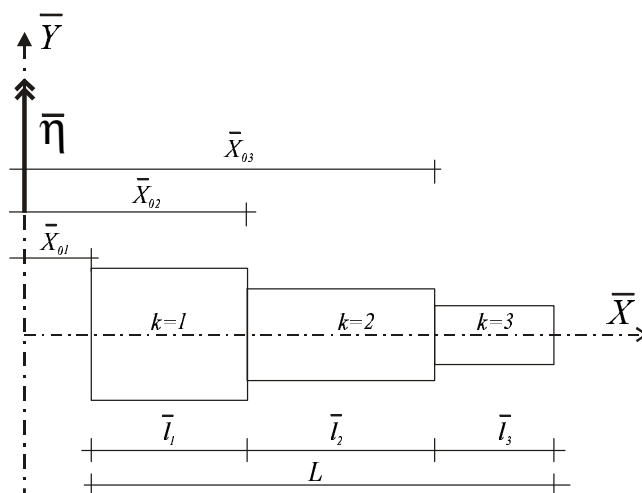
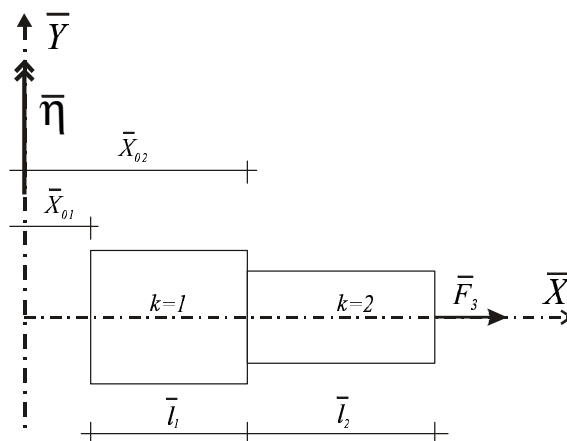
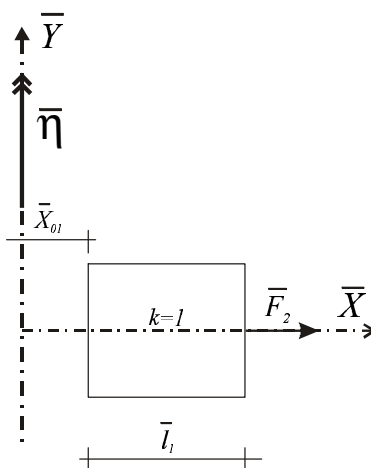


Figura 1. Modelo esquemático de una viga cantilever rotante compuesta por 3 tramos de sección constante



a



b

Figura 2. Modelo esquemático de la viga cantilever rotante, en el que se pone en evidencia la fuerza centrífuga F_{k+1} , que actúa sobre el elemento k -ésimo: a) para $k = 2$, b) para $k = 1$

Al producirse la rotación se genera una fuerza centrífuga, indicada con \bar{F}_k , producida por la masa del tramo k -ésimo y de los sucesivos tramos hasta el extremo libre de la viga rotante. En las Figuras 2a y 2b se muestran las fuerzas \bar{F}_3 y \bar{F}_2 en el caso particular de la viga escalonada de tres tramos de la Figura 1.

En las Figuras 3a, 3b y 3c se muestran los distintos casos de viga elegidos para el análisis numérico. La Figura 3a corresponde a la viga de un tramo y las Figuras 3b y 3c a las vigas escalonadas de dos y tres tramos, respectivamente. Puede suponerse que los casos mostrados en las Figuras 3b y 3c se generan al remover parte del material de la viga de un solo tramo, buscando un efecto de alivianamiento y al mismo tiempo de mayor rigidez dinámica.

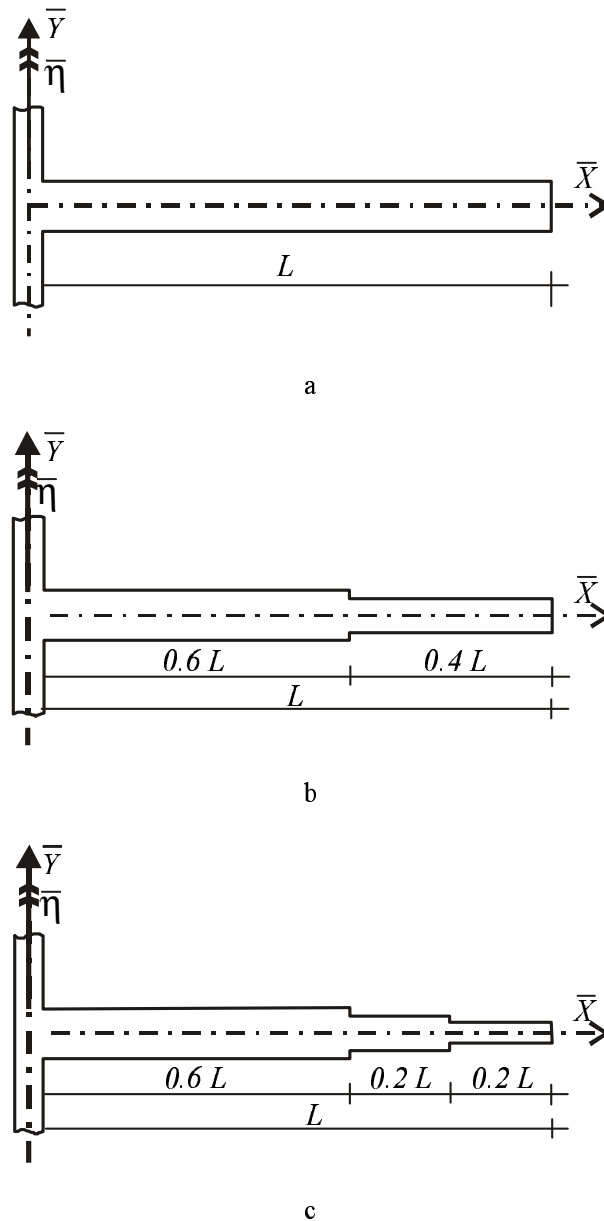


Figura 3. Modelos resueltos de viga cantilever rotante: a) de un tramo, b) de sección escalonada de dos tramos, c) de sección escalonada de 3 tramos.

ECUACIONES DIFERENCIALES GOBERNANTES

Utilizando la teoría de Timoshenko para vigas, las dos ecuaciones de movimiento de un elemento k -ésimo de viga que rota alrededor de un eje con velocidad $\bar{\eta}$, se expresan:

$$\frac{\partial \bar{Q}_k(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} = \rho A_k \frac{\partial^2 \bar{w}_k(\bar{x}, t)}{\partial t^2} \quad (1a)$$

$$\bar{Q}_k(\bar{x}, t) - \bar{N}_k(\bar{x}) \frac{\partial \bar{w}_k(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{M}_k(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} + \rho I_k \bar{\eta}^2 \bar{\psi}_k(\bar{x}, t) = \rho I_k \frac{\partial^2 \bar{\psi}_k(\bar{x}, t)}{\partial t^2} \quad (1b)$$

donde A_k es el área e I_k es el momento de inercia de la sección transversal constante; ρ es la densidad del material.

Con $\bar{w}_k(\bar{x}, t)$ se indica al desplazamiento transversal y con $\bar{\psi}_k(\bar{x}, t)$ al giro de una sección de la viga ubicada en la posición \bar{x} ($0 \leq \bar{x} \leq \bar{l}_k$) del k -ésimo tramo. En tanto que los esfuerzos internos en la sección analizada son el esfuerzo de corte $\bar{Q}_k(\bar{x}, t)$ y momento flector $\bar{M}_k(\bar{x}, t)$, que expresados en función de $\bar{w}_k(\bar{x}, t)$ y $\bar{\psi}_k(\bar{x}, t)$, resultan:

$$\bar{Q}_k(\bar{x}, t) = \bar{N}_k(\bar{x}) \frac{\partial \bar{w}_k(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} + \kappa G A_k \left(\frac{\partial \bar{w}_k(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} - \bar{\psi}_k(\bar{x}, t) \right) \quad (2a)$$

$$\bar{M}_k(\bar{x}, t) = E I_k \frac{\partial \bar{\psi}_k(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} \quad (2b)$$

donde G es el módulo de elasticidad transversal, E el de elasticidad longitudinal y κ el factor de corte utilizado para definir el área de corte efectiva de la sección.

La fuerza centrífuga $\bar{N}_k(\bar{x})$ se expresa como:

$$\bar{N}_k(\bar{x}) = \bar{\eta}^2 \rho A_k \left(\bar{X}_{0k} l_k + \frac{1}{2} l_k^2 - \bar{X}_{0k} \bar{x} - \frac{1}{2} \bar{x}^2 \right) + \bar{F}_{k+1} \quad , \quad 0 \leq \bar{x} \leq \bar{l}_k \quad (3)$$

donde \bar{F}_{k+1} es la fuerza centrífuga que actúa sobre el k -ésimo tramo, en la sección del mismo más alejada del eje de rotación. Obviamente, para el último tramo ($k = u$) es $\bar{F}_{k+1} = \bar{F}_{u+1} = 0$.

Al reemplazar las ecuaciones constitutivas (2a, b) en las ecuaciones de movimiento (1a, b) se tiene:

$$\frac{d\bar{N}_k(\bar{x})}{d\bar{x}} \frac{\partial \bar{w}_k(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} + \bar{N}_k(\bar{x}) \frac{\partial^2 \bar{w}_k(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}^2} \quad (4a)$$

$$+ \kappa A_k G \left(\frac{\partial^2 \bar{w}_k(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial \bar{\psi}_k(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} \right) = \rho A_k \frac{\partial^2 \bar{w}_k(\bar{x}, t)}{\partial t^2}$$

$$\kappa A_k G \left(\frac{\partial \bar{w}_k(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} - \bar{\psi}_k(\bar{x}, t) \right) + E I_k \frac{\partial^2 \bar{\psi}_k(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}^2} + \rho I_k \bar{\eta}^2 \bar{\psi}_k(\bar{x}, t) = \rho I_k \frac{\partial^2 \bar{\psi}_k(\bar{x}, t)}{\partial t^2} \quad (4b)$$

Un desarrollo detallado que muestra la obtención de las ecuaciones diferenciales gobernantes aplicando el principio de Hamilton, fue presentado por Banerjee¹, quien también puso de relieve la importancia de incluir en la ecuación (1b) el término en el que interviene el cuadrado de la velocidad angular, para obtener resultados más cercanos al comportamiento dinámico real de la viga, especialmente en el caso de altas velocidades de rotación.

Asumiendo una oscilación armónica simple, $\bar{w}(\bar{x}, t)$ y $\bar{\psi}(\bar{x}, t)$ se pueden escribir como:

$$\bar{w}(\bar{x}, t) = \bar{W}_k(\bar{x}) . e^{i\omega t}; \quad \bar{\psi}(\bar{x}, t) = \bar{\Psi}_k(\bar{x}) . e^{i\omega t}$$

donde ω es la frecuencia de vibración natural del sistema para el modo normal correspondiente. Al ser sustituidas en las ecuaciones (4a, b), resultan:

$$\bar{\eta}^2 \rho A_k (\bar{X}_{0k} + \bar{x}) \frac{d\bar{W}_k(\bar{x})}{d\bar{x}} - \bar{N}_k(\bar{x}) \frac{d^2\bar{W}_k(\bar{x})}{d\bar{x}^2} - \kappa A_k G \left(\frac{d^2\bar{W}_k(\bar{x})}{d\bar{x}^2} - \frac{d\bar{\Psi}_k(\bar{x})}{d\bar{x}} \right) = \rho A_k \omega^2 \bar{W}_k(\bar{x}) \quad (5a)$$

$$-\kappa A_k G \left(\frac{d\bar{W}_k(\bar{x})}{d\bar{x}} - \bar{\Psi}_k(\bar{x}) \right) - E I_k \frac{d^2\bar{\Psi}_k(\bar{x})}{d\bar{x}^2} - \rho I_k \bar{\eta}^2 \bar{\Psi}_k(\bar{x}) = \rho I_k \omega^2 \bar{\Psi}_k(\bar{x}) \quad (5b)$$

Introduciendo un formato adimensional, se pueden escribir las siguientes ecuaciones para cada tramo k -ésimo de viga:

$$\eta^2 (X_{0k} + x) \frac{dW_k}{dx} - \frac{s_1^2}{l_k^2} N_k \frac{d^2W_k}{dx^2} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{s_1^2}{l_k^2} \left(\frac{d^2W_k}{dx^2} - \frac{d\Psi_k}{dx} \right) = \Omega^2 W_k \quad (6a)$$

$$-\frac{\kappa}{2(1+\nu)} s_1^2 s_k^2 \frac{dW_k}{dx} - \frac{s_1^2}{l_k^2} \frac{d^2\Psi_k}{dx^2} + \left(\frac{\kappa}{2(1+\nu)} s_1^2 s_k^2 - \eta^2 \right) \Psi_k = \Omega^2 \Psi_k \quad (6b)$$

donde ν es el coeficiente de Poisson, y además se han definido las siguientes magnitudes adimensionales:

$l_k = \frac{\bar{l}_k}{L}$: Longitud del tramo.

$x = \frac{\bar{x}}{l_k}$: Coordenada espacial sobre el eje de la viga, local de cada tramo; $0 \leq x \leq 1$.

$X_{0k} = \frac{\bar{X}_{0k}}{l_k}$: Coordenada global del extremo más cercano al eje \bar{Y} , del tramo k -ésimo.

$W_k = \frac{\bar{W}_k(\bar{x})}{l_k}$: Amplitud de desplazamiento de la sección.

$\Psi_k = \bar{\Psi}_k(\bar{x})$: Amplitud de giro de la sección.

$N_k = \frac{\bar{N}_k(\bar{x})}{EA_k}$: Esfuerzo normal o axil en la sección.

$s_k = \frac{L}{l_k} \frac{l_k}{\sqrt{I_k/A_k}}$: Factor de esbeltez del tramo k -ésimo.

$\eta = \sqrt{\frac{\rho A_1}{E I_1}} L^2 \bar{\eta}$: Coeficiente de velocidad de rotación de la viga.

$\Omega = \sqrt{\frac{\rho A_1}{E I_1}} L^2 \omega$: Coeficiente de frecuencia natural de vibración transversal.

En la viga compuesta por más de un tramo (viga escalonada), deben considerarse las ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos y esfuerzos entre tramos adyacentes. En el caso de los desplazamientos deben satisfacerse:

$$-\bar{W}_{(k-1)} \Big|_{\bar{x}=\bar{l}_{(k-1)}} + \bar{W}_k \Big|_{\bar{x}=0} = 0 \quad (7a)$$

$$-\bar{\Psi}_{(k-1)} \Big|_{\bar{x}=\bar{l}_{(k-1)}} + \bar{\Psi}_k \Big|_{\bar{x}=0} = 0 \quad (7b)$$

que en forma adimensional se escriben:

$$-l_{(k-1)} W_{(k-1)} \Big|_{x=1} + l_k W_k \Big|_{x=0} = 0 \quad (8a)$$

$$-\Psi_{(k-1)} \Big|_{x=1} + \Psi_k \Big|_{x=0} = 0 \quad (8b)$$

De modo similar, se impone la compatibilidad de esfuerzos internos en las secciones que limitan tramos contiguos:

$$-\bar{Q}_{(k-1)}\big|_{\bar{x}=\bar{l}_{(k-1)}} + \bar{Q}_k\big|_{\bar{x}=0} = 0 \quad (9a)$$

$$-\bar{M}_{(k-1)}\big|_{\bar{x}=\bar{l}_{(k-1)}} + \bar{M}_k\big|_{\bar{x}=0} = 0 \quad (9b)$$

cuya forma adimensional resulta:

$$-\alpha_{(k-1)} Q_{(k-1)}\big|_{x=1} + \alpha_k Q_k\big|_{x=0} = 0 \quad (10a)$$

$$-\frac{\alpha_{(k-1)}}{l_{(k-1)}} M_{(k-1)}\big|_{x=1} + \frac{\alpha_k}{l_k} M_k\big|_{x=0} = 0 \quad (10b)$$

donde $\alpha_k = A_k/A_1$ es la relación entre el área de la sección transversal del tramo k -ésimo y el área de la sección transversal del tramo 1 más cercano al eje \bar{Y} ; $Q_k = \frac{\bar{Q}_k(\bar{x})}{EA_k}$ es el esfuerzo de corte y $M_k = \frac{\bar{l}_k}{EI_k} \bar{M}_k(\bar{x})$ el momento flector, expresados en forma adimensional. Si se indican los esfuerzos en función de los desplazamientos, las ecuaciones (10a, b) resultan:

$$-\alpha_{(k-1)} \left(\left(N_{(k-1)} + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \right) \frac{dW_{(k-1)}}{dx} - \frac{\kappa \Psi_{(k-1)}}{2(1+\nu)} \right) \bigg|_{x=1} + \alpha_k \left(\left(N_k + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \right) \frac{dW_k}{dx} - \frac{\kappa \Psi_k}{2(1+\nu)} \right) \bigg|_{x=0} = 0 \quad (11a)$$

$$-\frac{\alpha_{(k-1)}}{l_{(k-1)}} \frac{d\Psi_{(k-1)}}{dx} \bigg|_{x=1} + \frac{\alpha_k}{l_k} \frac{d\Psi_k}{dx} \bigg|_{x=0} = 0 \quad (11b)$$

Las condiciones de borde del primer tramo ($k = 1$, en $\bar{x} = 0$, borde empotrado):

$$\bar{W}_1\big|_{\bar{x}=0} = 0 \quad (12a)$$

$$\bar{\Psi}_1\big|_{\bar{x}=0} = 0 \quad (12b)$$

y en forma adimensional:

$$W_1\big|_{x=0} = 0 \quad (13a)$$

$$\Psi_1\big|_{x=0} = 0 \quad (13b)$$

En tanto las condiciones de borde para el último tramo ($k = u$, en $\bar{x} = \bar{l}_u$, borde libre), son:

$$\bar{Q}_u\big|_{\bar{x}=\bar{l}_u} = 0 \quad (14a)$$

$$\bar{M}_u\big|_{\bar{x}=\bar{l}_u} = 0 \quad (14b)$$

en forma adimensional se tiene:

$$Q_u\big|_{x=1} = 0 \quad (15a)$$

$$M_u\big|_{x=1} = 0 \quad (15b)$$

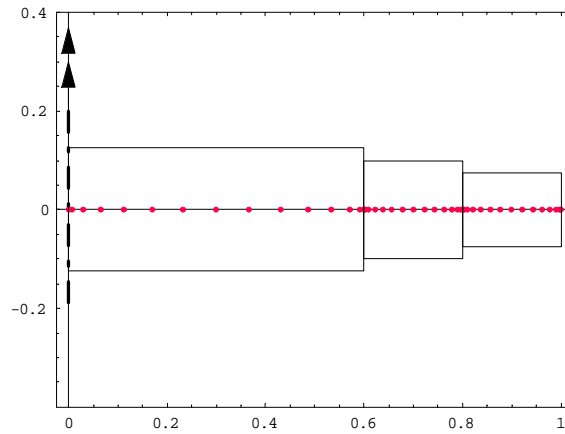


Figura 4. Distribución irregular de nodos sobre una viga escalonada de 3 tramos

y expresando las ecuaciones (15) en función de los corrimientos resultan:

$$\left[\left(N_u + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \right) \frac{dW_u}{dx} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \Psi_u \right]_{x=1} = 0 \quad (16a)$$

$$\frac{d\Psi_u}{dx} \Big|_{x=1} = 0 \quad (16b)$$

EL MÉTODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL

El método de cuadratura diferencial fue inicialmente propuesto en 1971 por Bellman¹³, como una técnica numérica destinada a resolver ecuaciones diferenciales.

Una excelente revisión del tema, que abarca el período comprendido entre sus comienzos y mediados de los 90, fue publicado en 1996 por Bert y Malik¹⁴.

En las últimas dos décadas la popularidad del MCD fue creciendo y actualmente están disponibles, en la extensa literatura existente, diversas variantes de la metodología original. En este trabajo se aplica a la resolución del problema de vibraciones enunciado. Cada tramo continuo de viga fue reemplazado por un mallado de puntos o nodos a lo largo de su eje. Los puntos adoptados se distribuyen en forma irregular utilizando la expresión formulada por Chebyshev–Gauss–Lobato¹⁸:

$$x_i = \frac{1 - \cos [(i-1)\pi/(n-1)]}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

donde n es el número de nodos que se adopta en el tramo y x_i la coordenada espacial adimensional del nodo i . La Figura 4 muestra el mallado de puntos generado al utilizar la expresión (17) en cada tramo de una viga escalonada de tres tramos.

Según lo indicado por Bert y Malik¹⁴, en cada punto i del mallado se aproximan las derivadas de las funciones W_k y Ψ_k mediante la aplicación de las denominadas *ecuaciones análogas de cuadratura*:

$$\frac{d^{(q)}W_k}{dx^q} \Big|_{x_i} = \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(q)} W_{kj} \quad (18a)$$

$$\frac{d^{(q)}\Psi_k}{dx^q} \Big|_{x_i} = \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(q)} \Psi_{kj} \quad (18b)$$

donde q indica el orden de derivación; n es el número de puntos del mallado en cada tramo; i, j son subíndices que se refieren a los puntos de la malla; y el subíndice k identifica al tramo de la viga. Con W_{kj} y Ψ_{kj} se indican el desplazamiento y el giro, adimensionales, en el punto j del tramo k -ésimo.

Los factores $A_{ij}^{(q)}$ son los coeficientes de ponderación relacionados con los valores de las funciones en los n puntos del mallado. Para su cálculo se siguieron las referencias ^{14,15,18}, como se describe a continuación. Como primer paso, asociado a cada punto i del mallado se calcula un *polinomio de Lagrange* cuyas raíces son las coordenadas de los restantes puntos del tramo, según la expresión:

$$\prod (x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^n (x_i - x_j) \quad (19)$$

Seguidamente, en base a los polinomios de Lagrange, se determinan los coeficientes $A_{ij}^{(1)}$, correspondientes a las derivadas de primer orden, $q = 1$, según las siguientes expresiones:

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{\prod (x_i)}{(x_i - x_j) \prod (x_j)} \quad \text{con } i, j = 1, 2, \dots, n \text{ para } j \neq i \quad (20a)$$

$$A_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ij}^{(1)} \quad \text{con } i, j = 1, 2, \dots, n \text{ para } j = i \quad (20b)$$

Finalmente, los coeficientes correspondientes a las derivadas de segundo orden y superiores, $q > 1$, se obtienen mediante expresiones recursivas de la forma:

$$A_{ij}^{(q)} = A_{ii}^{(q-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(q-1)}}{x_i - x_j} \quad \text{con } i, j = 1, 2, \dots, n \text{ para } j \neq i \quad (21a)$$

$$A_{ii}^{(q)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ij}^{(q)} \quad \text{con } i, j = 1, 2, \dots, n \text{ para } j = i \quad (21b)$$

Ecuaciones análogas de cuadratura del sistema

Las ecuaciones diferenciales de movimiento (6a, b), junto con las de compatibilidad (8a, b) y (11a, b), y las condiciones de borde (13a, b) y (16a, b), quedan reemplazadas por un conjunto de ecuaciones lineales algebraicas. Tales expresiones se obtienen mediante la aplicación de las reglas de cuadratura diferencial dadas por las ecuaciones (18a, b).

De esta forma, las ecuaciones análogas de cuadratura correspondientes al sistema de ecuaciones diferenciales (6a, b) resultan:

$$\begin{aligned} & \eta^2 (X_{0k} + x_i) \sum_{j=1}^n (A_{ij}^{(1)}) W_{kj} - \frac{s_1^2}{l_k^2} N_{ki} \sum_{j=1}^n (A_{ij}^{(2)}) W_{kj} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{s_1^2}{l_k^2} \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(2)} W_{kj} \\ & + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{s_1^2}{l_k^2} \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(1)} \Psi_{kj} = \Omega^2 W_{ki} \end{aligned} \quad (22a)$$

$$- \frac{\kappa}{2(1+\nu)} s_1^2 s_k^2 \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(1)} W_{kj} - \frac{s_1^2}{l_k^2} \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(2)} \Psi_{kj} + \left(\frac{\kappa}{2(1+\nu)} s_1^2 s_k^2 - \eta^2 \right) \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(0)} \Psi_{kj} = \Omega^2 \Psi_{ki} \quad (22b)$$

donde la fuerza centrífuga N_{ki} , de acuerdo a la ecuación (3), queda expresada:

$$N_{ki} = N_k|_{x=x_i} = \eta^2 \frac{l_k^2}{s_1^2} \left(X_{0k} + \frac{1}{2} - X_{0k} x_i - \frac{1}{2} x_i^2 \right) + F_{k+1}$$

Las ecuaciones análogas de cuadratura correspondientes a las ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos (8a, b) son:

$$-l_{(k-1)} \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(0)} W_{(k-1)j} + l_k \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(0)} W_{kj} = 0 \quad (23a)$$

$$- \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(0)} \Psi_{(k-1)j} + \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(0)} \Psi_{kj} = 0 \quad (23b)$$

mientras que las correspondientes a las de compatibilidad de esfuerzos internos (11a, b) son:

$$\begin{aligned} & -\alpha_{(k-1)} \left(\left(N_{(k-1)n_{(k-1)}} + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \right) \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(1)} W_{(k-1)j} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(0)} \Psi_{(k-1)j} \right) \\ & + \alpha_k \left(\left(N_{k1} + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \right) \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(1)} W_{kj} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(0)} \Psi_{kj} \right) = 0 \end{aligned} \quad (24a)$$

$$-\frac{\alpha_{(k-1)}}{l_{(k-1)}} \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(1)} \Psi_{(k-1)j} + \frac{\alpha_k}{l_k} \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(1)} \Psi_{kj} = 0 \quad (24b)$$

Las ecuaciones análogas de cuadratura de las condiciones de borde para el extremo empotrado, ecuaciones (13a, b) resultan:

$$\sum_{j=1}^n A_{1j}^{(0)} W_{1j} = 0 \quad (25a)$$

$$\sum_{j=1}^n A_{1j}^{(0)} \Psi_{1j} = 0 \quad (25b)$$

y para el extremo libre, ecuaciones (16a, b) se tiene:

$$\left(N_u|_{x=1} + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \right) \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(1)} W_{uj} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(0)} \Psi_{uj} = 0 \quad (26a)$$

$$\sum_{j=1}^n A_{nj}^{(1)} \Psi_{uj} = 0 \quad (26b)$$

El conjunto de ecuaciones análogas de cuadratura diferencial, ecuaciones (22) a (26), conforma un sistema lineal, cuyos autovalores son los coeficientes de frecuencia de la viga rotante a ser determinados.

RESULTADOS NUMÉRICOS

Los resultados numéricos que se presentan corresponden a las primeras frecuencias naturales de vibración de una viga Timoshenko, empotrada en uno de sus extremos a un eje que gira con velocidad angular constante.

Para elegir la cantidad conveniente de puntos (n) a adoptar en el mallado de cada tramo de sección constante se realizó un análisis de convergencia. Esto permitió determinar que es suficiente utilizar un mallado con 15 puntos en el tramo, ya que adoptar mallas más densas conduce a valores que coinciden con cinco dígitos significativos, para todas las frecuencias y velocidades de rotación adoptadas en este estudio.

Por otra parte, con el fin de corroborar el correcto diseño y desarrollo del algoritmo basado en el MCD, algunos casos también fueron resueltos mediante el método de elementos finitos. Para ello se recurrió al software profesional ALGOR²² utilizando el elemento-viga disponible de dos nodos, con seis grados de libertad en cada nodo, con el cual se contempla la deformación axial y su efecto rigidizante. Para la construcción de los modelos se utilizó una misma malla rectilínea con mil elementos-viga de igual longitud, la cual se comprobó que resultaba suficientemente precisa, mediante un análisis previo de convergencia. Los valores obtenidos para el caso de la viga escalonada en dos y tres tramos son mostrados en las Tablas VI y VII.

La Tabla I muestra los coeficientes de frecuencia fundamental, calculados con el MCD, de la viga rotante de un tramo en toda su longitud L , en función del parámetro de velocidad de rotación η . En el cálculo se utilizaron las relaciones $E/\kappa G = 3,059$ y $s = 30$, que fueron tomadas de la referencia¹ para realizar la primera comprobación de los resultados. Los valores de frecuencia fundamental $\Omega_1 = \sqrt{\rho A/EI} L^2 \omega_1$ coinciden en todas las cifras significativas con los calculados por el método de la matriz de rigidez dinámica de la citada referencia.

η	MCD	Ref. ¹
0	3.4798	3.4798
1	3.6445	3.6445
2	4.0971	4.0971
3	4.7516	4.7516
4	5.5314	5.5314
5	6.3858	6.3858

Tabla I. Coeficientes de frecuencia fundamental $\Omega_1 = \sqrt{\rho A/EI} L^2 \omega_1$ de una viga cantilever rotante de un tramo, en función de η , con $E/\kappa G = 3,059$; $\nu = 0,30$; $s = 30$

En las Tablas II a V se muestran los resultados obtenidos con el MCD de los coeficientes Ω_i (con $i = 1, 2, 3, 4$) para la viga de un tramo, en función del parámetro de Timoshenko r , definido como la inversa del factor de esbeltez s . La Tabla II muestra los coeficientes de la frecuencia fundamental en función de la velocidad de rotación η , del parámetro de Timoshenko r , y del factor de corte κ . La incorporación del valor $r = 0,15$, aunque sin mucha aplicación práctica, permite mostrar la estabilidad numérica del método. Para cada par de valores η y r se presentan tres coeficientes Ω_1 , el primero corresponde a una viga de sección rectangular ($\kappa = 0.8457$), el segundo a una de sección circular ($\kappa = 0.8864$) y el tercero, en letra itálica, corresponde al de una viga rotante en que no se considera en el cálculo el efecto de la deformación por corte.

Las Tablas III, IV y V, análogas a la Tabla II, muestran los coeficientes de las frecuencias superiores Ω_2 , Ω_3 y Ω_4 , respectivamente, para el mismo caso de viga de un tramo.

η	$r = 1/s$						
	0.01	0.02	0.03	0.05	0.08	0.10	0.15
0	3,5127	3,5028	3,4866	3,4364	3,3240	3,2309	2,9655
	3.5128	3.5032	3.4875	3.4388	3.3295	3.2388	2.9791
	<i>3.5152</i>	<i>3.5128</i>	<i>3.5087</i>	<i>3.4958</i>	<i>3.4648</i>	<i>3.4368</i>	<i>3.3444</i>
1	3.6782	3.6681	3.6515	3.6000	3.4853	3.3908	3.1242
	3.6784	3.6685	3.6524	3.6024	3.4908	3.3985	3.1372
	<i>3.6807</i>	<i>3.6780</i>	<i>3.6734</i>	<i>3.6590</i>	<i>3.6242</i>	<i>3.5928</i>	<i>3.4889</i>
2	4.1336	4.1226	4.1046	4.0492	3.9270	3.8277	3.5545
	4.1337	4.1231	4.1055	4.0516	3.9323	3.8350	3.5661
	<i>4.1362</i>	<i>4.1327</i>	<i>4.1268</i>	<i>4.1083</i>	<i>4.0639</i>	<i>4.0237</i>	<i>3.8895</i>
3	4.7931	4.7806	4.7601	4.6976	4.5620	4.4541	4.1665
	4.7932	4.7810	4.7610	4.7001	4.5674	4.4613	4.1766
	<i>4.7958</i>	<i>4.7913</i>	<i>4.7838</i>	<i>4.7601</i>	<i>4.7028</i>	<i>4.6508</i>	<i>4.4762</i>
4	5.5800	5.5653	5.5413	5.4688	5.3150	5.1955	4.8863
	5.5802	5.5658	5.5424	5.4716	5.3206	5.2027	4.8952
	<i>5.5832</i>	<i>5.5776</i>	<i>5.5684</i>	<i>5.5389</i>	<i>5.4678</i>	<i>5.4030</i>	<i>5.1839</i>
5	6.4436	6.4260	6.3976	6.3126	6.1371	6.0045	5.6687
	6.4438	6.4266	6.3989	6.3157	6.1431	6.0119	5.6765
	<i>6.4473</i>	<i>6.4407</i>	<i>6.4297</i>	<i>6.3946</i>	<i>6.3095</i>	<i>6.2318</i>	<i>5.9672</i>
6	7.3533	7.3323	7.2985	7.1992	7.0004	6.8544	6.4878
	7.3534	7.3330	7.3000	7.2028	7.0069	6.8620	6.4947
	<i>7.3578</i>	<i>7.3502</i>	<i>7.3374</i>	<i>7.2968</i>	<i>7.1981</i>	<i>7.1077</i>	<i>6.7980</i>
7	8.2911	8.2662	8.2264	8.1115	7.8893	7.7304	7.3276
	8.2914	8.2671	8.2283	8.1158	7.8963	7.7381	7.3339
	<i>8.2968</i>	<i>8.2881</i>	<i>8.2737</i>	<i>8.2277</i>	<i>8.1159</i>	<i>8.0130</i>	<i>7.6589</i>
8	9.2468	9.2174	9.1710	9.0399	8.7951	8.6238	8.1775
	9.2471	9.2185	9.1732	9.0447	8.8025	8.6316	8.1835
	<i>9.2536</i>	<i>9.2440</i>	<i>9.2280</i>	<i>9.1768</i>	<i>9.0521</i>	<i>8.9372</i>	<i>8.5393</i>
9	10.214	10.180	10.126	9.9786	9.7125	9.5297	9.0291
	10.214	10.181	10.129	9.9840	9.7202	9.5374	9.0354
	<i>10.222</i>	<i>10.212</i>	<i>10.194</i>	<i>10.138</i>	<i>10.001</i>	<i>9.8738</i>	<i>9.4327</i>
10	11.189	11.149	11.088	10.924	10.639	10.445	9.8745
	11.189	11.151	11.091	10.930	10.647	10.452	9.8821
	<i>11.198</i>	<i>11.187</i>	<i>11.168</i>	<i>11.107</i>	<i>10.957</i>	<i>10.819</i>	<i>10.335</i>

Tabla II. Coeficientes de frecuencia fundamental $\Omega_1 = \sqrt{\rho A/EI} L^2 \omega_1$ de una viga cantilever rotante de un tramo, en función de η y r , ($\nu = 0,30$)

η	$r = 1/s$						
	0.01	0.02	0.03	0.05	0.08	0.10	0.15
0	21.891	21.478	20.841	19.138	16.288	14.530	11.036
	21.895	21.495	20.875	19.213	16.406	14.661	11.165
	<i>21.999</i>	<i>21.893</i>	<i>21.720</i>	<i>21.191</i>	<i>20.045</i>	<i>19.136</i>	<i>16.748</i>
1	22.038	21.625	20.989	19.290	16.452	14.704	11.235
	22.042	21.642	21.023	19.364	16.568	14.833	11.360
	<i>22.145</i>	<i>22.038</i>	<i>21.863</i>	<i>21.329</i>	<i>20.172</i>	<i>19.254</i>	<i>16.841</i>
2	22.472	22.060	21.426	19.739	16.932	15.212	11.799
	22.476	22.077	21.460	19.811	17.044	15.335	11.915
	<i>22.578</i>	<i>22.468</i>	<i>22.288</i>	<i>21.739</i>	<i>20.548</i>	<i>19.604</i>	<i>17.118</i>
3	23.178	22.767	22.137	20.464	17.702	16.018	12.651
	23.182	22.783	22.169	20.533	17.808	16.132	12.754
	<i>23.282</i>	<i>23.167</i>	<i>22.979</i>	<i>22.405</i>	<i>21.161</i>	<i>20.172</i>	<i>17.568</i>
4	24.131	23.721	23.093	21.436	18.722	17.072	13.692
	24.135	23.737	23.125	21.503	18.820	17.176	13.784
	<i>24.233</i>	<i>24.111</i>	<i>23.913</i>	<i>23.306</i>	<i>21.988</i>	<i>20.940</i>	<i>18.177</i>
5	25.303	24.893	24.267	22.623	19.950	18.321	14.829
	25.307	24.909	24.298	22.686	20.040	18.414	14.914
	<i>25.403</i>	<i>25.273</i>	<i>25.062</i>	<i>24.414</i>	<i>23.007</i>	<i>21.886</i>	<i>18.924</i>
6	26.665	26.254	25.626	23.989	21.344	19.717	15.979
	26.669	26.268	25.656	24.049	21.426	19.801	16.064
	<i>26.763</i>	<i>26.624</i>	<i>26.397</i>	<i>25.703</i>	<i>24.191</i>	<i>22.984</i>	<i>19.792</i>
7	28.189	27.773	27.141	25.505	22.870	21.221	17.075
	28.193	27.787	27.170	25.561	22.944	21.296	17.167
	<i>28.284</i>	<i>28.135</i>	<i>27.892</i>	<i>27.145</i>	<i>25.515</i>	<i>24.213</i>	<i>20.761</i>
8	29.847	29.425	28.787	27.143	24.497	22.797	18.061
	29.851	29.440	28.815	27.196	24.565	22.866	18.170
	<i>29.942</i>	<i>29.782</i>	<i>29.520</i>	<i>28.716</i>	<i>26.958</i>	<i>25.551</i>	<i>21.812</i>
9	31.619	31.189	30.540	28.880	26.202	24.420	18.899
	31.623	31.202	30.567	28.930	26.264	24.483	19.033
	<i>31.713</i>	<i>31.541</i>	<i>31.259</i>	<i>30.394</i>	<i>28.499</i>	<i>26.978</i>	<i>22.929</i>
10	33.485	33.043	32.381	30.699	27.966	26.066	19.568
	33.489	33.057	32.408	30.746	28.023	26.127	19.735
	<i>33.578</i>	<i>33.394</i>	<i>33.091</i>	<i>32.162</i>	<i>30.120</i>	<i>28.479</i>	<i>24.099</i>

Tabla III. Coeficientes de la segunda frecuencia natural $\Omega_2 = \sqrt{\rho A/EI} L^2 \omega_2$ de una viga cantilever rotante de un tramo, en función de η y r , ($\nu = 0,30$)

η	$r = 1/s$						
	0.01	0.02	0.03	0.05	0.08	0.10	0.15
0	60.755	58.197	54.638	46.749	36.704	31.667	22.993
	60.783	58.297	54.821	47.059	37.071	32.025	23.301
	<i>61.460</i>	<i>60.765</i>	<i>59.657</i>	<i>56.486</i>	<i>50.528</i>	<i>46.493</i>	<i>37.807</i>
1	60.900	58.345	54.790	46.917	36.910	31.899	23.268
	60.928	58.445	54.973	47.226	37.273	32.252	23.571
	<i>61.604</i>	<i>60.907</i>	<i>59.796</i>	<i>56.616</i>	<i>50.640</i>	<i>46.595</i>	<i>37.885</i>
2	61.333	58.785	55.244	47.419	37.516	32.578	24.043
	61.362	58.884	55.426	47.723	37.870	32.918	24.334
	<i>62.033</i>	<i>61.330</i>	<i>60.209</i>	<i>57.002</i>	<i>50.976</i>	<i>46.897</i>	<i>38.119</i>
3	62.048	59.511	55.991	48.241	38.496	33.661	25.183
	62.077	59.609	56.170	48.538	38.835	33.983	25.464
	<i>62.742</i>	<i>62.029</i>	<i>60.892</i>	<i>57.639</i>	<i>51.530</i>	<i>47.395</i>	<i>38.504</i>
4	63.034	60.511	57.018	49.363	39.812	35.088	26.514
	63.062	60.608	57.194	49.651	40.132	35.086	26.800
	<i>63.719</i>	<i>62.992</i>	<i>61.834</i>	<i>58.518</i>	<i>52.292</i>	<i>48.082</i>	<i>39.036</i>
5	64.277	61.770	58.308	50.761	41.415	36.788	27.865
	64.304	61.864	58.479	51.038	41.714	37.063	28.178
	<i>64.951</i>	<i>64.207</i>	<i>63.021</i>	<i>59.626</i>	<i>53.253</i>	<i>48.947</i>	<i>39.707</i>
6	65.760	63.269	59.840	52.407	43.259	38.695	29.125
	65.787	63.362	60.006	52.672	43.537	38.947	29.483
	<i>66.423</i>	<i>65.658</i>	<i>64.438</i>	<i>60.948</i>	<i>54.399</i>	<i>49.978</i>	<i>40.506</i>
7	67.466	64.990	61.593	54.274	45.298	40.747	30.274
	67.493	65.080	61.755	54.525	45.554	40.979	30.675
	<i>68.117</i>	<i>67.327</i>	<i>66.069</i>	<i>62.469</i>	<i>55.716</i>	<i>51.162</i>	<i>41.426</i>
8	69.376	66.913	63.546	56.332	47.490	42.889	31.351
	69.402	67.001	63.702	56.570	47.726	43.106	31.775
	<i>70.015</i>	<i>69.198</i>	<i>67.896</i>	<i>64.171</i>	<i>57.188</i>	<i>52.486</i>	<i>42.454</i>
9	71.472	69.019	65.677	58.557	49.799	45.074	32.384
	71.497	69.104	65.828	58.782	50.016	45.281	32.805
	<i>72.098</i>	<i>71.251</i>	<i>69.901</i>	<i>66.038</i>	<i>58.801</i>	<i>53.934</i>	<i>43.580</i>
10	73.734	71.287	67.967	60.924	52.193	47.261	33.341
	73.759	71.371	68.113	61.136	52.394	47.466	33.734
	<i>74.349</i>	<i>73.470</i>	<i>72.067</i>	<i>68.053</i>	<i>60.538</i>	<i>55.494</i>	<i>44.794</i>

Tabla IV. Coeficientes de la tercera frecuencia natural $\Omega_3 = \sqrt{\rho A/EI} L^2 \omega_3$ de una viga cantilever rotante de un tramo, en función de η y r , ($\nu = 0,30$)

η	$r = 1/s$						
	0.01	0.02	0.03	0.05	0.08	0.10	0.15
0	117.56	109.18	98.779	79.233	58.272	48.222	29.327
	117.66	109.49	99.293	79.944	58.989	48.902	29.935
	<i>120.05</i>	<i>117.59</i>	<i>113.81</i>	<i>103.82</i>	<i>87.710</i>	<i>78.213</i>	<i>60.200</i>
1	117.71	109.33	98.947	79.433	58.528	48.486	29.272
	117.81	109.65	99.459	80.142	59.240	49.162	29.977
	<i>120.20</i>	<i>117.73</i>	<i>113.95</i>	<i>103.95</i>	<i>87.815</i>	<i>78.306</i>	<i>60.271</i>
2	118.17	109.80	99.447	80.030	59.283	49.253	29.877
	118.26	110.11	99.956	80.731	59.982	49.919	30.369
	<i>120.64</i>	<i>118.16</i>	<i>114.36</i>	<i>104.33</i>	<i>88.130</i>	<i>78.586</i>	<i>60.484</i>
3	118.91	110.58	100.27	81.013	60.505	50.450	30.477
	119.01	110.89	100.78	81.701	61.183	51.104	30.945
	<i>121.37</i>	<i>118.88</i>	<i>115.05</i>	<i>104.95</i>	<i>88.650</i>	<i>79.048</i>	<i>60.836</i>
4	119.95	111.65	101.42	82.362	62.144	51.966	31.229
	120.05	111.96	101.91	83.032	62.796	52.615	31.655
	<i>122.39</i>	<i>119.88</i>	<i>116.01</i>	<i>105.82</i>	<i>89.373</i>	<i>79.690</i>	<i>61.325</i>
5	121.27	113.02	102.86	84.053	64.138	53.664	32.116
	121.37	113.32	103.35	84.703	64.764	54.322	32.476
	<i>123.68</i>	<i>121.14</i>	<i>117.23</i>	<i>106.92</i>	<i>90.292</i>	<i>80.507</i>	<i>61.949</i>
6	122.86	114.66	104.60	86.058	66.422	55.394	33.103
	122.95	114.96	105.08	86.685	67.022	56.081	33.384
	<i>125.25</i>	<i>122.67</i>	<i>118.70</i>	<i>108.24</i>	<i>91.400</i>	<i>81.492</i>	<i>62.701</i>
7	124.71	116.56	106.61	88.349	68.927	57.016	34.113
	124.80	116.85	107.07	88.951	69.506	57.755	34.325
	<i>127.06</i>	<i>124.44</i>	<i>120.71</i>	<i>109.79</i>	<i>92.688</i>	<i>82.638</i>	<i>63.578</i>
8	126.80	118.71	108.86	90.894	71.585	58.432	35.064
	126.89	119.00	109.32	91.470	72.150	59.236	35.234
	<i>129.12</i>	<i>126.45</i>	<i>122.35</i>	<i>111.54</i>	<i>94.148</i>	<i>83.937</i>	<i>64.574</i>
9	129.12	121.10	111.35	93.665	74.327	59.608	35.935
	129.22	121.38	111.79	94.214	74.891	60.474	36.097
	<i>131.41</i>	<i>128.69</i>	<i>124.51</i>	<i>113.48</i>	<i>95.769</i>	<i>85.381</i>	<i>65.683</i>
10	131.67	123.69	114.06	96.633	77.083	60.562	36.798
	131.76	123.97	114.48	97.156	77.662	61.477	36.980
	<i>133.92</i>	<i>131.14</i>	<i>126.86</i>	<i>115.60</i>	<i>97.541</i>	<i>86.959</i>	<i>66.897</i>

Tabla V. Coeficientes de la cuarta frecuencia natural $\Omega_4 = \sqrt{\rho A/EI} L^2 \omega_4$ de una viga cantilever rotante de un tramo, en función de η y r , ($\nu = 0,30$)

η	Método	Ω_1	$\Delta \%$	Ω_2	$\Delta \%$	Ω_3	$\Delta \%$	Ω_4	$\Delta \%$
0	MCD	3.9554	0.000	12.854	0.000	37.850	0.000	63.293	-0.003
	MEF	3.9554		12.854		37.850		63.291	
1	MCD	4.1199	-	13.085	-	38.024	-	63.499	-
2	MCD	4.5701	-	13.752	-	38.539	-	64.113	-
3	MCD	5.2171	-	14.795	-	39.383	-	65.123	-
4	MCD	5.9836	-	16.136	-	40.536	-	66.507	-
5	MCD	6.8208	0.136	17.697	0.119	41.973	0.076	68.240	0.064
	MEF	6.8301		17.718		42.005		68.284	
6	MCD	7.7012	-	19.416	-	43.666	-	70.292	-
7	MCD	8.6092	-	21.246	-	45.587	-	72.632	-
8	MCD	9.5355	-	23.152	-	47.709	-	75.229	-
9	MCD	10.475	-	25.110	-	50.005	-	78.051	-
10	MCD	11.423	0.184	27.105	0.203	52.452	0.215	81.071	0.196
	MEF	11.444		27.160		52.565		81.230	

Tabla VI. Coeficientes de las primeras 4 frecuencias $\Omega_i = \sqrt{\rho A/EI} L^2 \omega_i$ de una viga escalonada de 2 tramos, calculados con MCD y MEF, en función de η (Fig. 3b), con $E/\kappa G = 3,059$; $\nu = 0,30$; $\alpha_2 = 0,6$; $l_1 = 0,6$; $l_2 = 0,4$; $s_1 = 30$; $s_2 = 83,333$

η	Método	Ω_1	$\Delta \%$	Ω_2	$\Delta \%$	Ω_3	$\Delta \%$	Ω_4	$\Delta \%$
0	MCD	4.3874	-0.002	11.861	0.000	29.468	-0.007	51.791	-0.004
	MEF	4.3873		11.861		29.466		51.789	
1	MCD	4.5389	-	12.110	-	29.709	-	51.994	-
2	MCD	4.9571	-	12.824	-	30.419	-	52.600	-
3	MCD	5.5655	-	13.924	-	31.559	-	53.601	-
4	MCD	6.2953	-	15.313	-	33.074	-	54.981	-
5	MCD	7.1012	0.138	16.904	0.142	34.902	0.103	56.721	0.076
	MEF	7.1110		16.928		34.938		56.764	
6	MCD	7.9561	-	18.632	-	36.981	-	58.797	-
7	MCD	8.8438	-	20.451	-	39.258	-	61.179	-
8	MCD	9.7541	-	22.330	-	41.687	-	63.836	-
9	MCD	10.680	-	24.250	-	44.236	-	66.737	-
10	MCD	11.618	0.198	26.198	0.210	46.878	0.241	69.849	0.222
	MEF	11.641		26.253		46.991		70.004	

Tabla VII. Coeficientes de las primeras 4 frecuencias $\Omega_i = \sqrt{\rho A/EI} L^2 \omega_i$ de una viga escalonada de 3 tramos, calculados con MCD y MEF, para diferentes valores del parámetro de velocidad de rotación η (Fig. 3c), con $E/\kappa G = 3,059$; $\nu = 0,30$; $\alpha_2 = 0,6$; $\alpha_3 = 0,4$; $l_1 = 0,6$; $l_2 = 0,2$; $s_1 = 30$; $s_2 = 83,333$; $s_3 = 187,5$

A continuación, en las Tablas VI y VII se presentan valores $\Omega_i = \sqrt{\rho A_1/EI_1} L^2 \omega_i$ calculados para vigas rotantes de sección no uniforme, con $E/\kappa G = 3,059$. Las vigas analizadas son las que se muestran en los modelos de las figuras 3b y 3c. $r = \sqrt{I_1/A_1}/L$. Las tablas contienen los coeficientes de las cuatro primeras frecuencias naturales calculados por los métodos de cuadratura diferencial y de elementos finitos.

La diferencia entre ambos grupos de resultados es mínima y se indica en la columna $\Delta \%$. Para la viga en reposo ($\eta = 0$) los valores son casi totalmente coincidentes. Para valores de $\eta > 0$ aparecen pequeñas diferencias que se incrementan con el aumento de η . En particular,

para un parámetro alto de la velocidad de rotación, $\eta = 10$, las diferencias mayores son del orden del 0.241 % para Ω_3 . Los autores atribuyen esta diferencia a la menor precisión del algoritmo de rigidización que utiliza el método de elementos finitos. No obstante, se destaca el muy buen acuerdo de los resultados obtenidos por el MCD con los hallados con el MEF.

En las Tablas VIII a XI se muestran los coeficientes de las cuatro primeras frecuencias calculados con el MCD para vigas de sección escalonada de dos y tres tramos, en función de r y de la velocidad η . Las relaciones de longitud para los tramos de viga son las graficadas en las Figuras 3b y 3c. De cada coeficiente se presentan dos valores, el primero corresponde a una viga de sección rectangular con $\kappa = 0.8457$ en la que se considera el efecto de corte y el segundo valor, a una viga en la que este efecto ha sido despreciado en el cálculo.

η	Número de tramos	$r = \sqrt{I_1/A_1}/L$						
		0.01	0.02	0.03	0.05	0.08	0.10	0.15
0	2	4.2469	4.2348	4.2149	4.1534	4.0151	3.9003	3.5716
		4,2501	4,2478	4,2439	4,2314	4,2015	4,1744	4,0843
	3	4.7232	4.7086	4.6845	4.6102	4.4442	4.3072	3.9200
		4,7272	4,7244	4,7197	4,7049	4,6693	4,6371	4,5302
5	2	6.9223	6.9041	6.8745	6.7854	6.5981	6.4546	6.0934
		6,9265	6,9209	6,9115	6,8816	6,8094	6,7439	6,5233
	3	7.2236	7.2030	7.1696	7.0688	6.8570	6.6946	6.2873
		7,2284	7,2221	7,2117	7,1785	7,0986	7,0261	6,7831
10	2	11.542	11.504	11.445	11.280	10.985	10.789	10.329
		11,552	11,542	11,524	11,469	11,336	11,214	10,803
	3	11.749	11.708	11.644	11.466	11.144	10.928	10.427
		11,759	11,747	11,728	11,666	11,518	11,382	10,925

Tabla VIII. Coeficiente de frecuencia fundamental $\Omega_1 = \sqrt{\rho A/EI} L^2 \omega_1$ de una viga cantilever rotante de sección escalonada, de 2 y 3 escalones, calculado con MCD, en función de η y r , con $\nu = 0,30$; $\alpha_2 = 0,6$; $\alpha_3 = 0,4$; $s_2 = 1,667/r$; $s_3 = 2,5/r$

η	Número de tramos	$r = \sqrt{I_1/A_1}/L$						
		0.01	0.02	0.03	0.05	0.08	0.10	0.15
0	2	10.084	17.874	17.543	16.603	14.851	13.661	11.056
		18,140	18,094	18,019	17,784	17,243	16,782	15,414
	3	18.741	18.543	18.228	17.321	15.594	14.394	11.712
		18,798	18,764	18,708	18,533	18,125	17,770	16,680
5	2	21.574	21.357	21.016	20.071	18.392	17.309	15.049
		21,629	21,573	21,480	21,189	20,517	19,941	18,213
	3	21.857	21.654	21.335	20.436	18.799	17.719	15.438
		21,912	21,871	21,804	21,591	21,096	20,665	19,334
10	2	29.551	29.297	28.907	27.884	26.221	25.196	22.644
		29,613	29,534	29,404	28,996	28,048	27,227	24,715
	3	29.186	28.958	28.607	27.671	26.124	25.176	22.975
		29,246	29,189	29,095	28,800	28,111	27,509	25,640

Tabla IX. Coeficiente de la segunda frecuencia natural $\Omega_2 = \sqrt{\rho A/EI} L^2 \omega_2$ de una viga cantilever rotante de sección escalonada, de 2 y 3 escalones, calculado con MCD, en función de η y r , con $\nu = 0,30$; $\alpha_2 = 0,6$; $\alpha_3 = 0,4$; $s_2 = 1,667/r$; $s_3 = 2,5/r$

η	Número de tramos	$r = \sqrt{I_1/A_1}/L$						
		0.01	0.02	0.03	0.05	0.08	0.10	0.15
0	2	49.116	47.534	45.237	39.777	32.198	28.201	21.266
		49,557	49,182	48,575	46,781	43,155	40,494	34,176
	3	45.939	44.689	42.836	38.258	31.566	27.907	21.369
		46,292	46,027	45,595	44,287	41,512	39,363	33,879
5	2	52.565	51.014	48.778	43.541	36.461	32.790	26.158
		52,985	52,577	51,917	49,964	46,017	43,119	36,241
	3	49.101	47.872	46.062	41.661	35.410	32.064	25.831
		49,441	49,154	48,685	47,266	44,252	41,915	35,944
10	2	61.784	60.270	58.121	53.230	46.727	43.048	30.733
		62,167	61,672	60,871	58,499	53,697	50,168	41,794
	3	57.582	56.378	54.634	50.538	44.925	41.735	30.492
		57,899	57,552	56,987	55,276	51,632	48,797	41,526

Tabla X. Coeficiente de la tercera frecuencia natural $\Omega_3 = \sqrt{\rho A/EI} L^2 \omega_3$ de una viga cantilever rotante de sección escalonada, de 2 y 3 escalones, calculado con MCD, en función de η y r , con $\nu = 0,30$; $\alpha_2 = 0,6$; $\alpha_3 = 0,4$; $s_2 = 1,667/r$; $s_3 = 2,5/r$

η	Número de tramos	$r = \sqrt{I_1/A_1}/L$						
		0.01	0.02	0.03	0.05	0.08	0.10	0.15
0	2	95.072	90.332	83.910	70.283	53.857	45.830	31.141
		96,442	95,250	93,355	87,953	77,873	71,088	56,630
	3	83.320	79.959	75.279	64.875	51.506	44.722	32.486
		84,262	83,384	81,980	77,917	70,081	64,610	52,398
5	2	98.452	93.772	87.476	74.306	58.779	51.141	33.066
		99,791	98,554	96,587	90,978	80,507	73,458	58,436
	3	86.750	83.415	78.802	68.687	56.038	49.743	34.664
		87,673	86,760	85,298	81,065	72,894	67,183	54,416
10	2	107.92	103.36	97.332	85.113	70.870	61.484	37.639
		109,18	107,82	105,65	99,457	87,887	80,095	63,499
	3	96.266	92.969	88.484	78.974	67.546	61.004	40.449
		97,153	96,140	94,518	89,817	80,721	74,345	60,041

Tabla XI. Coeficiente de la cuarta frecuencia natural $\Omega_4 = \sqrt{\rho A/EI} L^2 \omega_4$ de una viga cantilever rotante de sección escalonada, de 2 y 3 escalones, calculado con MCD, en función de η y r , con $\nu = 0,30$; $\alpha_2 = 0,6$; $\alpha_3 = 0,4$; $s_2 = 1,667/r$; $s_3 = 2,5/r$

En la Figura 5 están graficadas las tendencias de variación de las cuatro primeras frecuencias de una viga de un tramo, al aumentar la velocidad de rotación y variar el valor del parámetro de Timoshenko. Para todas las frecuencias, las vigas de mayor esbeltez son las que tienen los coeficientes de frecuencia más altos. Por otra parte, se observa que la rigidización de la viga a causa del aumento de la velocidad es mucho más importante para la frecuencia fundamental que para las frecuencias superiores.

En la Figura 6 se muestran cómo varían los coeficientes de frecuencia Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 y Ω_4 en función de la velocidad de rotación η , para vigas con $r = 1/30$, de sección rectangular de uno, dos y tres tramos. Las relaciones geométricas adimensionales adoptadas en cada caso

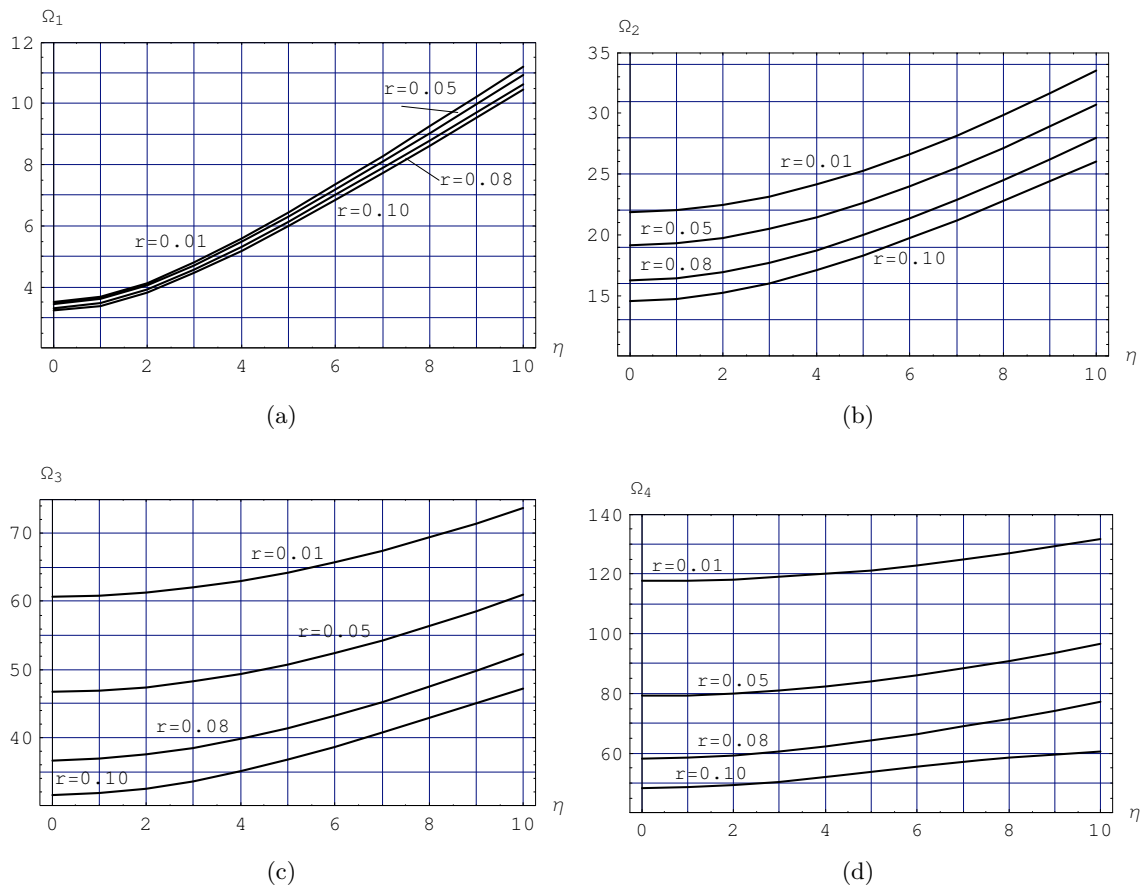


Figura 5. Coeficientes de las cuatro primeras frecuencias $\Omega_i = \sqrt{\rho A/EI} L^2 \omega_i$ de una viga cantilever rotante, de sección transversal uniforme, en función de η , para diferentes valores del parámetro de Timoshenko r , con $E/\kappa G = 3,059$; $\nu = 0,30$

analizado son:

- Viga de un tramo: $l_1 = 1$; $\alpha_1 = 1$.
- Viga de dos tramos: $l_1 = 0,60$; $l_2 = 0,40$; $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 0,6$.
- Viga de tres tramos: $l_1 = 0,60$; $l_2 = 0,20$; $l_3 = 0,20$; $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 0,6$; $\alpha_3 = 0,4$.

Como comentario puede remarcarse que los coeficientes de frecuencia fundamental de las vigas más livianas, según se observa en la Figura 6, en todos los casos son más altos para la misma velocidad de rotación (rigidización). Sin embargo, para las frecuencias superiores Ω_2 , Ω_3 y Ω_4 se presenta la relación inversa (flexibilización).

CONCLUSIONES

El método es aplicable a la resolución de ecuaciones diferenciales como las que gobiernan el problema propuesto. Con él se logran muy buenos resultados para los valores de frecuencia, tal como puede apreciarse de las comparaciones presentadas. Aun para el caso en que la viga varíe su sección en forma escalonada, el modelado de la misma es sencillo. La formulación mediante las ecuaciones de cuadratura es relativamente simple de desarrollar, fácil de programar y calcular con una computadora de características estándar. Los tiempos de carga de datos son extremadamente breves y es muy corto también el tiempo que insume el cálculo de las frecuencias.

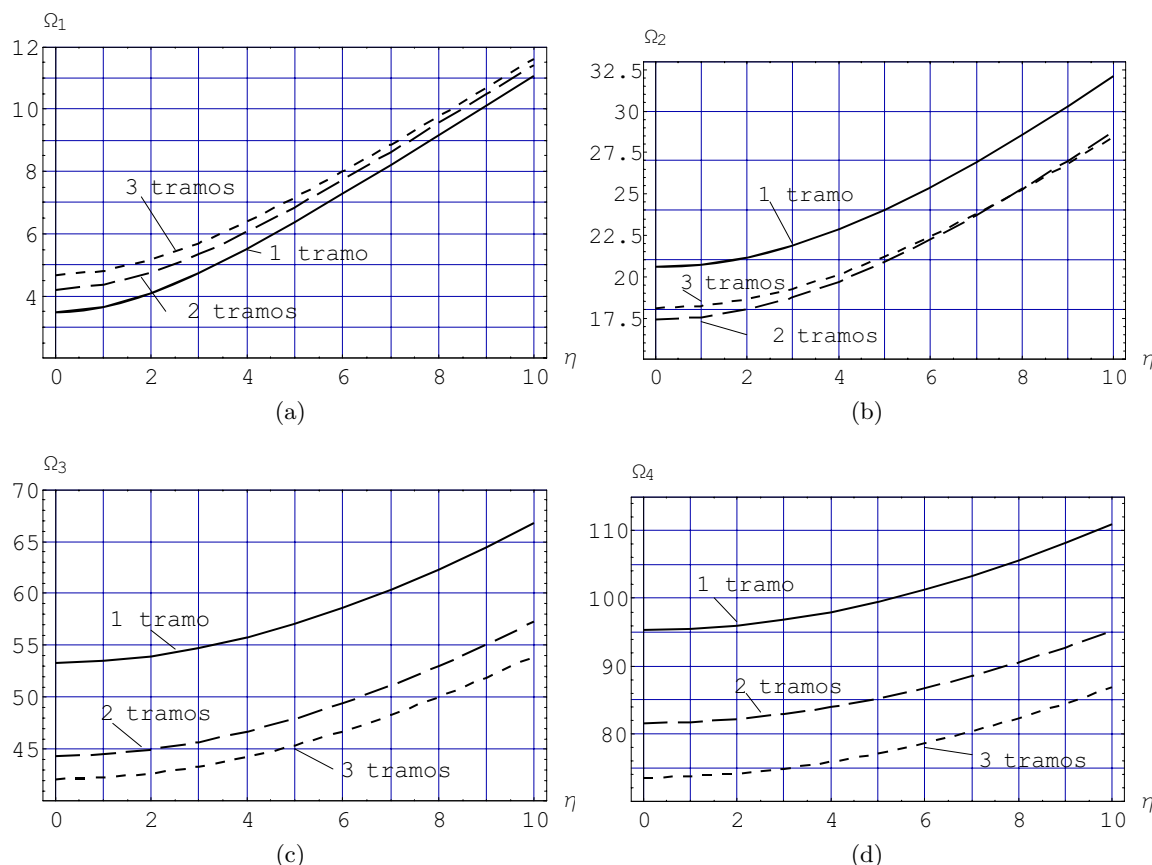


Figura 6. Coeficientes de las primeras cuatro frecuencias $\Omega_i = \sqrt{\rho A/EI} L^2 \omega_i$ de una viga cantilever rotante, de sección escalonada, en función de η , con $\nu = 0,30$; $\alpha_2 = 0,6$; $\alpha_3 = 0,4$; $s_1 = 30$; $s_2 = 50$; $s_3 = 75$

El objetivo del trabajo es realizar un aporte, mostrando las ventajas que brinda este procedimiento y sin pretender generar una discusión sobre el método de cálculo más adecuado a utilizar por el ingeniero de diseño. Los autores esperan que otros investigadores se sientan estimulados a desarrollar el método de cuadratura diferencial para resolver estructuras más complejas.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer a los revisores del trabajo que con sus sugerencias y atinadas observaciones han permitido enriquecerlo.

Este estudio fue desarrollado en el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur, patrocinado por el Programa de Investigación y Desarrollo del CONICET, por la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica, y por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la citada universidad.

REFERENCIAS

- 1 J.R. Banerjee, "Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of centrifugally stiffened Timoshenko beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **247**, pp. 97-115, (2001).
- 2 M.H. Seon, H. Benaroya y T. Wei, "Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **225**, pp. 935-988, (1999).

- 3 R.E. Rossi, R.H. Gutiérrez y P.A.A. Laura, "Transverse vibrations of a Timoshenko beam of non uniform cross section elastically restrained at one end and carrying a concentrated mass at the other", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. **89**, pp. 2456-2458, (1991).
- 4 J.Chung y H.H. Yoo, "Dynamic analysis of a rotating cantilever beam by using the finite element method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **249**, pp. 147-164, (2002).
- 5 K.G.Vinod, S. Gopalakrishnan y R. Gangul, "Free vibration and wave propagation analysis of uniform and tapered rotating beams using spectrally formulated finite elements", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. **44**, pp. 5875-5893, (2007).
- 6 R.E. Rossi, "Introducción al análisis de Vibraciones con el Método de Elementos Finitos", Editorial EdiUNS, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina. ISBN 978-987-1171-71-2, (2007).
- 7 S.S. Rao y R.S. Gupta, "Finite element vibration analysis of rotating Timoshenko beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **242**, pp. 103-124, (2001).
- 8 J.R. Banerjee, "Free vibration of centrifugally stiffened uniform and tapered beams using the dynamic stiffness method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **233**, pp. 857-875, (2000).
- 9 S.K. Sinha, "Non-Linear dynamic response of a rotating radial Timoshenko beam with periodic pulse loading at the free end", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. **40**, pp. 113-149, (2005).
- 10 S.Y. Lee y Y.H. Kuo, "Bending frequency of a rotating Timoshenko beam with general elastically restrained root", *Journal of Sound and Vibrations*, Vol. **162**, pp. 243-250, (1993).
- 11 M.D. Al-Ansary, "Flexural vibrations of rotating beams considering rotary inertia", *Computers & Structures*, Vol. **69**, pp. 321-328, (1998).
- 12 S.C. Lin y K.M. Hsiao, "Vibration analysis of a rotating Timoshenko beam", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **240**, pp. 303-322, (2001).
- 13 R. Bellman y J. Casti, "Differential quadrature and long-term integration", *J. Math. Anal. App.*, Vol. **34**, pp. 235-238, (1971).
- 14 C.W. Bert y M. Malik, "Differential quadrature method in computational mechanics: A review", *Applied Mechanics Review*, Vol. **49**, pp. 1-28, (1996).
- 15 G. Karami, P. Malekzadeh y S.A. Shahpari, "A DQEM for vibration of shear deformable nonuniform beams with general boundary conditions", *Engineering Structures*, Vol. **25**, pp. 1169-1178, (2003).
- 16 S.T. Choi, J.D. Wu y Y.T. Chou, "Dynamic analysis of a spinning Timoshenko beam by the differential quadrature method", *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. **38**, pp. 851-856, (2000).
- 17 G.R. Liu y T.Y. Wu, "Vibration analysis of beams using the generalized differential quadrature rule and domain decomposition", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **246**, pp. 461-481, (2001).
- 18 C. Shu y W. Chen, "On optimal selection of interior points for applying discretized boundary conditions in DQ vibration analysis of beams and plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **222**, pp. 239-257, (1999).
- 19 S.J. Escanes, D.V. Bambill y D.H. Felix, "El método de cuadratura diferencial generalizado: estudio de arcos circulares delgados vibrantes", *Rev. Internac. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.*, Vol. **24**, pp. 93-100, (2008).
- 20 D.V. Bambill, D.H. Felix y R.E. Rossi, "The differential quadrature method in the free vibration analysis of uniform rotating beams", Enviado a publicación.

- 21 S. Wolfram, "*Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*", Third Edition, Addison-Wesley, (1996).
- 22 ALGOR Professional Software V21.3, "*Linear Stress and Dynamics Analysis*", Algor Inc., Pittsburgh, PA, USA, (2007).