

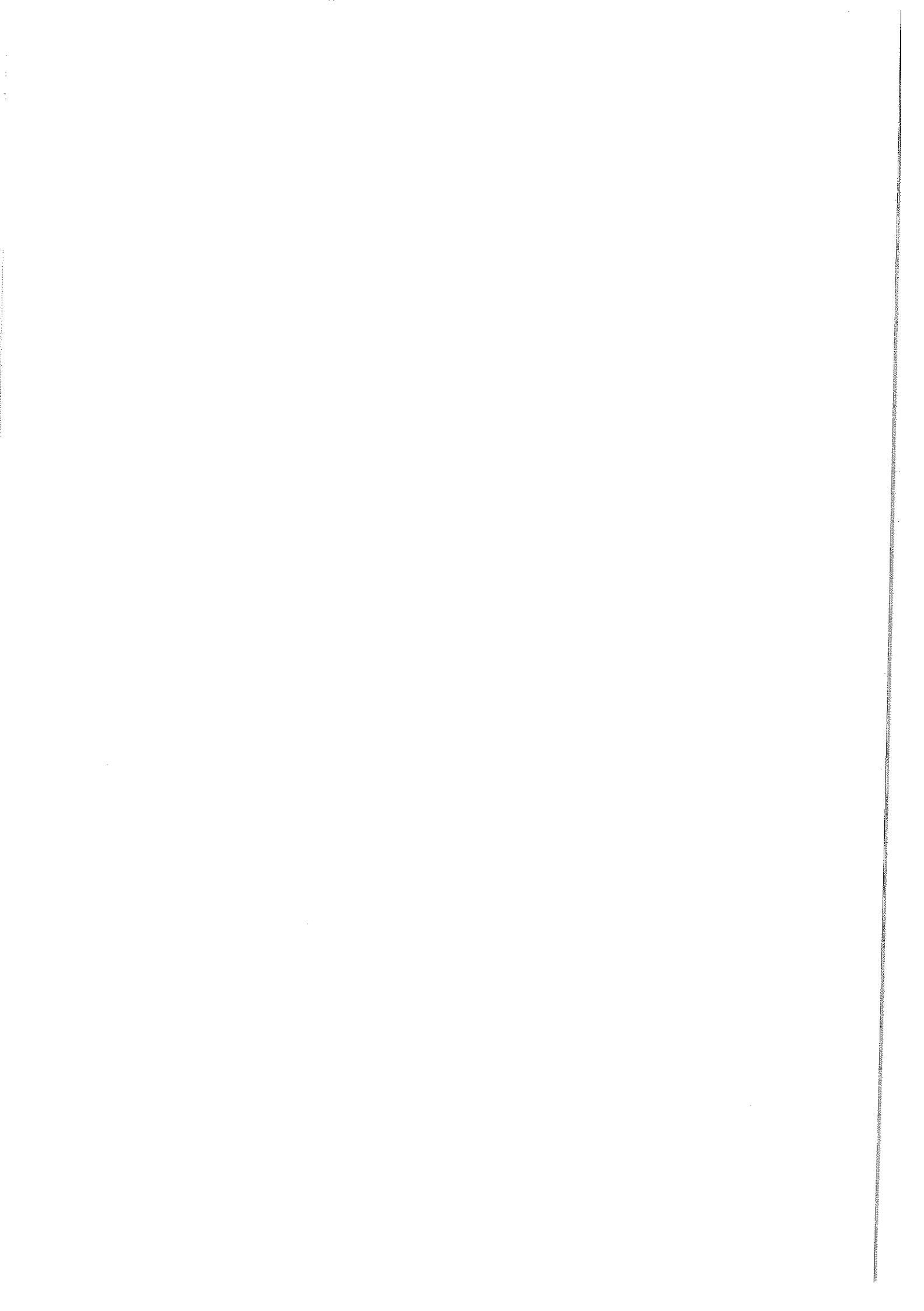
**Monografías de Ingeniería Sísmica**

Editor A. H. Barbat

**Simulación numérica del  
comportamiento no lineal  
de presas de hormigón  
ante acciones sísmicas**

M. Galindo  
J. Oliver  
M. Cervera

**Monografía CIMNE IS-3 1993**



**Monografías de Ingeniería Sísmica**

Editor A. H. Barbat

**Simulación numérica del  
comportamiento no lineal  
de presas de hormigón  
ante acciones sísmicas**

M. Galindo  
J. Oliver  
M. Cervera

**Monografía CIMNE IS-3 1993**

CENTRO INTERNACIONAL DE METODOS NUMERICOS EN INGENIERIA  
Edificio C1, Campus Norte UPC  
C/ Gran Capitán, s/n  
08034 Barcelona, España.

**MONOGRAFIAS DE INGENIERIA SISMICA**  
Editor A.H. Barbat

**ISSN: 1134-3249**

**SIMULACION NUMERICA DEL COMPORTAMIENTO NO LINEAL DE PRESAS DE HORMIGON ANTE  
ACCIONES SISMICAS**  
Monografia CIMNE IS-8  
© Los Autores

**ISBN: 84-87867-38-3**  
**Depósito Legal: B-34520-94**

**IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN**

# ÍNDICE

	<u>página</u>
<b>1. Capítulo I: Introducción</b>	1
1. Generalidades	1
2. Breve reseña histórica y estado del arte	3
2.1. Métodos de cálculo	3
2.2. Seguridad ante acciones sísmicas	6
<b>2. Capítulo II: Análisis del sólido</b>	9
1. Introducción	9
2. Ecuaciones del problema estático lineal	9
3. Planteamiento numérico	14
3.1. Ecuaciones discretizadas de equilibrio	14
3.2. Ensamblaje por elementos finitos	16
3.3. Estrategias de solución	16
4. Ecuación constitutiva no lineal del hormigón	18
4.1. Introducción	18
4.2. Modelo de daño continuo	19
5. Ecuaciones del problema dinámico no lineal	23
6. Discretización	25
7. Algoritmo predictor multi-corrector	29
7.1. Método implícito basado en desplazamientos	30
7.2. Método explícito basado en aceleraciones	30
8. Ensayos numéricos	30
8.1. Comparación del modelo de degradación isotrópica con modelos de fisuración anisotrópica	30
8.3. Comportamiento dinámico. Transmisión de ondas	37
9. Consideraciones finales	43
<b>3. Capítulo III: Análisis del fluido</b>	45
1. Introducción	45
2. Hipótesis iniciales	45
3. Ecuaciones de conservación	46
3.1. Ecuación de continuidad	46

3.2. Ecuación del movimiento	46
4. Formulación en presiones	47
4.1. Ecuación constitutiva	47
4.2. Ecuación de onda	48
4.3. Ecuación cinética de estado	49
5. Ecuación integral	50
6. Condiciones de contorno	51
6.1. Superficie libre	51
6.2. Contorno móvil	53
6.3. Contorno transparente	53
7. Estado hidrostático	54
8. Planteamiento numérico	56
9. Otras formulaciones equivalentes	57
9.1. Formulación en potencial de velocidades	58
9.1.1. Ecuación diferencial	58
9.1.2. Condiciones de contorno	59
9.1.3. Discretización	60
9.2. Formulación en potencial de desplazamientos	61
9.2.1. Ecuación diferencial	61
9.2.2. Condiciones de contorno	61
9.2.3. Discretización	62
9.3. Formulación en desplazamientos	62
9.3.1. Ecuación constitutiva en forma matricial	62
9.3.2. Condiciones de contorno	63
9.3.3. Planteamiento numérico	64
9.3.4. Condición de irrotacionalidad	64
10. Ensayo numérico	65
11. Consideraciones finales	68
 4. Capítulo IV: Condiciones de contorno	 71
1. Introducción	71
2. Prescripción de grados de libertad	72
3. Contornos transparentes	75
3.1. Introducción	75
3.2. Solución unidimensional de la ecuación de onda	75
3.3. Generalización a varias dimensiones	78
3.4. Extensión al problema elástico	79
3.5. Discretización por elementos finitos	81
3.5.1. Inclusión del contorno transparente en el sólido	82
3.5.2. Inclusión del contorno transparente en el fluido	82
3.6. Condición de repetitividad	83
4. Excitación sísmica	84

4.1. Introducción	84
4.2. Caracterización de la excitación sísmica	85
4.3. Alternativas de generación de registros	88
4.3.1. Métodos aleatorios compatibles con el espectro de diseño	88
4.3.2. Métodos aleatorios no compatibles con el espectro de diseño	89
4.3.3. Métodos simplificados quasi-compatibles con el espectro de diseño	90
4.4. Modelo aleatorio compatible con el espectro de diseño	92
4.5. Cálculo de las amplitudes	93
4.6. Generación de la función de densidad espectral de potencia (FDEP)	95
4.7. Mejora de la señal artificial	98
4.7.1. Ajuste de línea base	98
4.7.2. Ajuste de la aceleración máxima	99
4.7.3. Ajuste de la respuesta espectral	99
5. Ensayos numéricos	100
5.1. Eficiencia de los contornos transparentes	100
5.1.1. Ángulo de incidencia	100
5.1.2. Onda no plana	101
5.2. Excitación sísmica compatible con un espectro dado	104
6. Consideraciones finales	108
 5. Capítulo V: Solución modular de sistemas acoplados	111
1. Introducción	111
2. Formulación teórica del sistema acoplado	115
3. Interacción Fluido-Estructura	116
3.1. Ecuaciones desacopladas del fluido y del sólido	116
3.2. Términos de interacción	117
3.3. Sistema acoplado fluido-estructura	118
3.3.1. Estructura infinitamente rígida y fluido compresible	118
3.3.2. Estructura flexible y fluido incompresible	119
3.3.3. Estructura infinitamente rígida y fluido incompresible	119
3.4. Otras formulaciones equivalentes para el fluido	120
4. Algoritmos de solución para el problema acoplado	121
4.1. Solución Directa	121
4.2. Solución iterativa por bloques	123
4.3. Estabilidad de los algoritmos de solución	126
4.4. Análisis de convergencia	129
5. Implementación del algoritmo iterativo por bloques	133

5.1. Importación y exportación	135
5.2. Programa SHUTTLE	136
5.3. Eficiencia del procesamiento paralelo	138
6. Ensayo numérico	141
7. Consideraciones finales	149
<b>6. Capítulo VI: Concepto de seguridad en presas de hormigón</b>	<b>151</b>
1. Introducción	151
2. El concepto de deterioro	153
3. Expresión analítica del deterioro	154
4. Definición del colapso estructural	155
<b>7. Capítulo VII: Aplicación al análisis de seguridad en presas de gravedad</b>	<b>157</b>
1. Introducción	157
2. Datos geométricos	158
2.1. Presa de Koyna	158
2.2. Presa de Mequinenza	160
3. Excitación sísmica	162
4. Descripción del análisis tipo	166
5. Resultados	168
5.1. Resultados cualitativos	169
5.1.1. Análisis cuasiestático RFD y dinámico a intensidad $\alpha$	169
5.1.2. Análisis a intensidad $\beta$	170
5.2. Resultados cuantitativos	179
5.2.1. Análisis RFD. Cuasiestático de incremento de la densidad relativa del agua	179
5.2.2. Análisis dinámico. Existación sísmica	180
5.2.3. Influencia de la no-linealidad del material en el comportamiento estructural de la presa	186
6. Consideraciones finales	191
<b>8. Capítulo VII: Aplicación al análisis de seguridad en presas bóveda</b>	<b>193</b>
1. Introducción	193
2. Datos geométricos	193
3. Exitación sísmica y descripción del análisis tipo	197
4. Resultados	198

4.1. Resultados cualitativos	198
4.1.1. Análisis cuasiestático RFD y dinámico a intensidad $\alpha$	198
4.1.2. Análisis a intensidad $\beta$ y $\gamma$	204
4.2. Resultados cuantitativos	204
4.2.1. Análisis cuasiestático RFD. y dinámico a intensidad $\alpha$	217
4.2.2. Análisis dinámico. Existación sísmica	219
4.2.3. Influencia de la no-linealidad del material en el comportamiento estructural de la presa	219
5. Consideraciones finales	223
9. Capítulo VIII: Conclusión	225
1. Introducción	225
2. Consideraciones sobre el modelo numérico	226
2.1. Sobre la formulación del fluido	227
2.2. Sobre la paralelización del modelo de interacción	227
2.3. Sobre la modelización de las condiciones de contorno	228
2.4. Sobre el rendimiento del método de iteración por bloques	228
2.5. Sobre la determinación del input sísmico	231
3. Consideraciones sobre la metodología de análisis de seguridad	231
3.1. Sobre el procedimiento de análisis	231
3.2. Sobre la definición del deterioro	234
3.3. Sobre la definición del colapso	234
10. Referencias	237



# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN

### 1. GENERALIDADES

Las grandes presas están, sin lugar a dudas, entre las estructuras de hormigón más costosas y seguras construidas por el hombre. En efecto, los ingenieros estructurales no escatiman esfuerzo alguno para garantizar que cada presa es concebida, diseñada, construida y mantenida de acuerdo con los mejores criterios, utilizando la mejor tecnología y con el máximo nivel de conocimientos. Todos estos esfuerzos han tenido y tienen, por descontado, un balance extremadamente positivo.

Por ello, todo intento dirigido a mejorar –lo que de alguna forma implica cambiar– las herramientas de diseño y análisis estructural, que han sido utilizadas con tanto éxito en este área, constituye un desafío. Sin embargo, es indudable que el estado del conocimiento humano en numerosos temas relacionados con el análisis del comportamiento resistente de presas de hormigón bajo cargas estáticas y dinámicas está todavía en desarrollo y los avances que se consigan en este área se reflejarán, ciertamente, en una mejora directa en la seguridad de las presas.

Por otro lado, es notoria la influencia creciente que hoy por hoy tiene la informática en todos los campos de la ciencia y la tecnología. Los ordenadores cada vez son más potentes y accesibles, poniendo al alcance de nuestras manos la posibilidad de resolver problemas insolubles pocos años atrás. Por su parte, los logros alcanzados en los últimos años por los métodos numéricos han hecho del ordenador una herramienta insustituible a la hora de diseñar o verificar una estructura de responsabilidad. La introducción del diseño estructural por ordenador ha generando en la actualidad una revolución en las técnicas de diseño estructural al posibilitar la realización de cálculos inabordables con anterioridad, al mismo tiempo que, al facilitar las tareas más tediosas, ha permitido automatizar notablemente los procesos de análisis y abordar problemas de complejidad creciente.

En términos matemático-numéricos, se formula el problema del análisis de presas como la determinación del estado tenso-deformacional en cada punto de una presa de hormigón para cada instante de la vida útil de la

estructura. Todo ello, con el propósito final de decidir sobre la seguridad de la estructura en su conjunto. Dicho así, parece un problema relativamente sencillo. Sin embargo, inmediatamente se plantean una serie de problemas secundarios, tales como el ser capaz de reproducir aspectos teóricos como el comportamiento real de los materiales constitutivos, o aspectos prácticos como el modelar adecuadamente la geometría de la estructura. Geometría que inevitablemente incluye una serie de detalles como son las juntas constructivas, las galerías, los drenes, la sala de máquinas, las compuertas, los desagües, el aliviadero, etc. Detalles, todos ellos de difícil representación, ya que sus dimensiones normalmente son pequeñas comparadas con las de la presa misma. Aunque, algunos de ellos pueden tener influencia significativa en el comportamiento estructural de la presa.

El modelo analítico es aún más complejo, ya que las presas no son estructuras aisladas, sino que están en íntima relación con el terreno y el agua del embalse, por lo que el problema se extiende a uno de interacción fluido-presa-terreno. Se plantea la necesidad de tener que modelar también estos otros medios (ecuaciones de gabinete, comportamiento de sus materiales, geometría, etc.). Ambos son, prácticamente, medios abiertos semi-infinitos, cuya representación completa es inviable. En consecuencia, se deben considerar unos contornos ficticios del modelo de análisis que, a menos que se adopten las medidas oportunas, perturbarán los resultados del análisis y por tanto las conclusiones que de él se puedan obtener.

El problema se puede ver como uno en el que intervienen diferentes escalas geométricas; una de pequeñas dimensiones como la necesidad de representar adecuadamente el estado de micro-fisuración del hormigón o los drenes en el interior de la presa; una intermedia que incluye a la presa misma, las juntas, el aliviadero, etc.; y otra de grandes dimensiones al tener que representar una buena porción del terreno o del embalse. A su vez, el problema también puede verse como uno de interacción de tres medios físicos (fluido-presa-terreno), que podría verse ampliado a uno de cinco medios, si se tiene en cuenta la filtración del agua o la transmisión del calor en el interior de la presa y que tienen influencia en el estado tenso-deformacional.

Por otra parte, la representación de las cargas que actúan sobre una presa tampoco es trivial. Las cargas de peso propio o de presión hidrostática están muy bien establecidas. Aquéllas que provienen del proceso constructivo son más difíciles de determinar. Sin embargo, la carga más importante que puede actuar sobre cualquier estructura, y definitivamente la más complicada de analizar, es la excitación que sufre por causas sísmicas. Así, el problema se ve extendido una vez más con una serie de incógnitas propias de la ingeniería sísmica, ya que es necesario investigar las causas que producen los terremotos, su probabilidad de ocurrencia en frecuencia e intensidad, el tipo de ondas que éstos producen, la transmisión de las mismas a través del terreno (incluido

o no en el modelo de análisis), etc.; o de la ingeniería geotécnica, ya que es importante la determinación de los parámetros que describen el terreno, la existencia de fallas geológicas, y una larga serie de etcéteras.

De cualquier forma, todas las indeterminaciones que rodean el estudio del comportamiento estructural de las presas hacen imposible pretender hacer un análisis completo. Consecuentemente, se deben aceptar algunas simplificaciones que permitan obtener respuestas razonables en tiempos reales al utilizar los ordenadores existentes en la actualidad. Desde el punto de vista del desarrollo de una metodología de análisis, el desafío consiste en encontrar el justo equilibrio entre el coste numérico asociado a la representación de cada uno de los fenómenos físicos involucrados y, el "error" que conlleva cualquier simplificación introducida en la misma.

Desde una perspectiva metodológica general, el presente estudio pretende desarrollar una herramienta basada en la utilización del diseño asistido por ordenador para el análisis numérico del comportamiento resistente de presas de hormigón, a la vez que una metodología de aplicación de la misma para el análisis de seguridad de las presas. Para este propósito, se ha intentado desarrollar un sistema genérico, modular y unificador, que permita tener en cuenta los más diversos factores como el comportamiento no-lineal del material, la interacción con el terreno y el fluido del embalse, la acción de cargas estáticas y dinámicas o la excitación sísmica.

## 2. BREVE RESEÑA HISTÓRICA Y ESTADO DEL ARTE

### 2.1. Métodos de cálculo

La construcción de presas se remonta a tiempos inmemoriales. Sin embargo, los avances más significativos en el diseño, análisis y verificación de presas se han producido en el último siglo y, en particular, en las últimas tres décadas. En los apartados que siguen se presenta, en una breve reseña histórica desde principios de siglo hasta la actualidad, la evolución de los métodos de cálculo que se han utilizando para el análisis de presas.

#### • Análisis estático

Hasta bien entrado este siglo, las presas de gravedad eran diseñadas haciendo un análisis estático de fuerzas. Posteriormente se verificaban frente a las acciones sísmicas –en forma aproximada– utilizando cargas estáticas nominales. Esta verificación típicamente consistía en cálculos pseudo-estáticos con "coeficientes sísmicos" del 0.1, o menores, del peso propio y asumiendo una distribución uniforme de la aceleración en la altura de la presa. Por su parte, los efectos hidrodinámicos no eran considerados o, en el mejor de los casos, se

utilizaban fórmulas basadas en las acciones de un fluido incompresible sobre presas rígidas<sup>[We]</sup>. El buen comportamiento estructural en general se garantizaba a través de altos coeficientes de seguridad contra el deslizamiento o el vuelco.

La aparición de los primeros ordenadores a principios de los años sesenta, junto con el desarrollo y aplicación de métodos numéricos como el Método de los Elementos Finitos (MEF)<sup>[Ba][Zie1]</sup>, hizo que el análisis tenso-deformacional de estructuras tridimensionales empezara a tener relevancia. Esta potente técnica numérica ha permitido desarrollar estudios más realistas sobre el comportamiento de las estructuras que los llevados a cabo en el pasado por medio de simplificaciones necesarias debido a razones prácticas. Por ello, hoy por hoy el MEF es, para algunos casos de diseño y verificación estructural, una necesidad de uso más que una alternativa.

#### • *Análisis dinámico lineal*

Los avances más importantes del análisis dinámico de presas de hormigón, teniendo en cuenta la excitación sísmica, se han hecho en las últimas tres décadas. Primero se empezaron a considerar los efectos tanto de la flexibilidad de las presas como de la compresibilidad del agua. Más tarde, se incluyeron los efectos de la interacción presa-fluido y presa-terreno, al mismo tiempo que los efectos debidos al asentamiento de la cimentación, el amortiguamiento y la absorción de las ondas por los materiales depositados en el fondo del embalse<sup>[FaS][FeC1]</sup>. Sin embargo, no fue hasta 1967, a raíz de los daños considerables que sufrió la presa de Koyna (situada en India con 107[m] de altura) por un terremoto (M6.5) ocurrido el 11 de Diciembre de dicho año, que las fuerzas sísmicas empezaron a ser evaluadas de forma realista.

Hasta mediados de los ochenta, la mayor parte de los análisis se hacían en el dominio de la frecuencia, ya que resultan baratos y sencillos, aunque también se propusieron procedimientos de análisis dinámico simplificados<sup>[FeC2]</sup> basados en la información generada por estudios paramétricos extensivos utilizando el MEF con cálculos en el dominio del tiempo. Para incluir la fuerzas sísmicas se construían espectros de diseño siguiendo procedimientos estándar tales como el propuesto por Newmark y Hall<sup>[NeH]</sup>. Este método tiene la ventaja de ser extremadamente simple, ya que puede ser construido utilizando de 1 a 3 parámetros sísmicos y los factores de amplificación usados en su construcción están generalmente basados en un conjunto arbitrario de registros.

Incluso en la actualidad, el estudio de la distribución de las respuestas máximas de sistemas lineales requiere simplificaciones drásticas<sup>[NeR]</sup>. Con objeto de evaluar estas aproximaciones en el estudio de los efectos sísmicos

en estructuras complicadas es conveniente calcular las respuestas de las estructuras en cuestión ante un gran número de movimientos reales del terreno. Pero no se dispone del número enorme de registros necesarios para este procedimiento, ni es probable que se alcance tal situación en muchos años. En los últimos años se está dedicado mucho esfuerzo a la creación de programas que permitan simular los movimientos sísmicos en un ordenador y verificar los registros obtenidos de esta manera<sup>[H.oJ][PSE][SIM]</sup>, para comprobar que sean realmente representativos de los sismos verdaderos.

#### • Análisis no-lineal

El comportamiento no-lineal en la respuesta dinámica de las presas de hormigón empezó a atraer el interés de los investigadores a mediados de los años sesenta<sup>[TxN]</sup>. Posteriormente se propusieron diversas ecuaciones constitutivas para modelar el comportamiento tenso-deformacional de materiales friccionales como el hormigón<sup>[BaK]</sup>. A mediados de los ochenta, por el avance de la informática, los análisis en el dominio del tiempo empezaron a ser cada vez más viables, lo que impulsó fuertemente el desarrollo de nuevas ecuaciones constitutivas<sup>[BuS][ChS][ChT]</sup> pudiéndose encontrar un buen estado del arte al respecto en la referencia [AC].

En los últimos años, los modelos constitutivos destinados a simular el comportamiento de los materiales friccionales han tenido un marcado desarrollo. En general se han formulado diversos tipos de modelos constitutivos<sup>†</sup> que van desde reproducir procesos elásticos lineales o no-lineales, a inelásticos dependientes (o no) del tiempo. Además, estos modelos también han sido formulados considerando leyes de compatibilidad en pequeñas y/o grandes deformaciones, y en configuraciones de equilibrio para pequeños y/o grandes desplazamientos, introduciendo así la no-linealidad geométrica.

Por su parte, también se han desarrollado técnicas numéricas que permiten resolver problemas no-lineales, basados en modificaciones del método de Newton-Raphson<sup>‡</sup>, así como métodos que introducen una modificación iterativa del nivel de carga<sup>[R1][Cr2][Cr3]</sup>, permitiendo analizar situaciones no-lineales muy complejas.

---

<sup>†</sup> [BuS][ChS][ChT][JaH][KrF][Kr][LC1][LOOO][LeP][LoL][Lo][MaL][Ol][Ro]

<sup>‡</sup> [Br][Fl][Go][Sh][Cr1][Ab]

- *Interacción presa-fluido y presa-terreno*

Los primeros intentos de tener en cuenta los efectos que tiene el agua del embalse sobre la presa en un análisis dinámico se hicieron considerando al fluido como incompresible, lo que reduce su efecto al de una masa añadida<sup>[Zie1]</sup>. El desarrollo posterior de las técnicas numéricas aplicables a problemas acoplados ha sido impulsado principalmente por la industria nuclear, tanto en problemas de interacción fluido-estructura como terreno-estructura bajo excitación sísmica. La solución de un problema dinámico acoplado es naturalmente laboriosa, involucrando, por tanto, procesos de cálculo computacionalmente costosos. Esta circunstancia ha originado que en los últimos años se haya dedicado mucho esfuerzo a estudiar técnicas de solución eficiente que permitan disminuir el costo computacional asociado.

Un primer gran paso en esta dirección ha constituido el método de integración combinado implícito-explicito propuesto por Belytschko y Mullen<sup>†</sup>. A este trabajo le siguieron otros desarrollos<sup>‡</sup> que mostraron a los métodos de programación modulares como la alternativa de solución a este problema.

## 2.2. Seguridad ante acciones sísmicas

En el diseño de grandes presas la consideración de los efectos sísmicos constituye una parte fundamental dado por las consecuencias desastrosas que tendría un fallo en un gran presa. Afortunadamente hasta la fecha no se han producido colapsos en presas de hormigón por causas sísmicas, sin embargo, es importante reconocer que nunca se ha producido un terremoto fuerte en las cercanías de una presa con su embalse lleno. Los mayores registros corresponden a los terremotos ocurridos en las cercanías de la presa de contrafuertes de Hsinfengkiang (China) en 1962 y la presa de gravedad de Koyna (India) en 1967 con magnitudes próximas a los 6.5[M]. Ambas presas resultaron dañadas hasta incluso niveles alarmantes, indicando que las presas de hormigón no son inmunes a los terremotos, tal como se presumía comúnmente.

Estudios recientes indican que el 46% de las presas de hormigón con alturas superiores a los 100[m] son presas bóveda, donde el problema es aún más acusado ya que éstas además son construidas, con cierta frecuencia, en zonas de sismicidad media o alta. En este sentido es interesante tener en cuenta que en los últimos años, al menos diecisiete presas bóveda de nueve países han sido sometidas a sacudidas con aceleraciones superiores a 0.10[g].

<sup>†</sup> [BeM1][BeM2][BYM][BeL]

<sup>‡</sup> [HuLi][HuL2][PaF1][PaF2][Pa]

A continuación se citan referencias<sup>[Mo]</sup> de algunas presas bóveda que han soportado con éxito terremotos de cierta consideración.

- *Chile*

La presa de Rapel ( $H = 111[m]$ ), que fue diseñada por métodos pseudo-estáticos para resistir aceleraciones de  $0.12[g]$  en su base, no sufrió daños significativos tras el terremoto de 1985 de  $7.7[M]$ . Los daños más importantes se produjeron en la zona de unión con los aliviaderos, así como en los elementos superiores de las estructuras de toma, consistentes en losas de unión con la coronación de la presa.

- *Estados Unidos*

Una de las pocas presas que ha sufrido daños serios es la presa de Pacima ( $H = 115[m]$ ) que fue sometida al terremoto de San Fernando en 1971 de magnitud  $6.6[M]$ . De los registros realizados en la Presa se pudieron estimar unas aceleraciones, en la roca base, del orden de  $0.6[g]$  a  $0.8[g]$ . El daño principal consistió en una separación de la presa de su estribo izquierdo de alrededor de  $1[cm]$  y extensión hacia abajo unos diecisésis metros desde la coronación; además se registró un ligero cabeceo de la presa.

La presa arco-gravedad de Lower Crystal Springs ( $H = 47[m]$ ), cercana a la falla de San Andrés, soportó sin daños aparentes el terremoto de San Francisco de 1906 de magnitud  $8.3[M]$ .

Otras presas que han soportado terremotos sin presentar daños son las de Gibraltar, Big Tujunga ( $H = 76[m]$ ) y Santa Anita ( $H = 76[m]$ ), en las que se llegaron a medir aceleraciones de  $0.17[g]$ .

- *Italia*

Las presas bóveda de Lumiei, Pieve di Cadore y Val Gallina, que fueron diseñadas para resistir terremotos de intensidad media, soportaron sin daños considerables un terremoto de intensidad VIII en la escala de Mercalli Modificada.

La presa de Ambiesta ( $H = 54[m]$ ), que se diseño específicamente para resistir terremotos severos, sufrió dos terremotos cuyos epicentros se encontraban aproximadamente a quince kilómetros de la misma (Carnia) de magnitudes  $6[M]$  y  $5.9[M]$  que tuvieron lugar el mismo día. Asimismo, soportó el terremoto de Friuli, de magnitud  $6.5[M]$ , del que se medieron aceleraciones de  $0.3[g]$  en el estribo derecho. Durante un periodo de cuatro meses se registraron sacudidas de magnitudes comprendidas entre  $5.0[M]$  y  $6.5[M]$ . Ni la presa de Ambiesta ni otras trece presas arco de la región sufrieron daños severos.

La presa de Corfino ( $H = 40[m]$ ) soportó un terremoto severo. Las presas de Maina de Sauris ( $H = 136[m]$ ) y Barcis ( $H = 50[m]$ ) fueron sometidas en 1952 a terremotos de magnitudes comprendidas entre 5.0[M] y 6.5[M] sin sufrir daño alguno.

La presa de Vajont sufrió el tremendo impacto de una onda asimétrica de agua, suelo y roca, originado por un gran deslizamiento en la ladera izquierda que provocó un rebosamiento súbito sobre la coronación de unos treinta metros de altura, sin perder su integridad estructural.

- *Japón*

La intensidad de los terremotos ocurridos en las zonas donde se encuentran ubicadas las presas japonesas ha sido moderada en general. Kamishiiba ( $H = 110[m]$ ) y Ayakita ( $H = 75[m]$ ) no sufrieron daños en el sismo de 1961. A su vez, durante la construcción de la presa de Kurobe ( $H = 180[m]$ ) tuvo lugar un terremoto, cuya aceleración máxima fue de 0.18[g], y la presa no sufrió daños significativos, aunque se apreciaron deslizamientos y fisuraciones del macizo rocoso.

En la presa bóveda de Nagawado ( $H = 155[m]$ ) se registraron aceleraciones de alrededor de 0.2[g] en coronación durante el terremoto de Naganoken Seibu de magnitud 6.8[M] que pudo soportar sin que se produjeran daños. Este es un caso interesante pues los registros de desplazamientos realizados sirvieron para constatar la concordancia con los resultados de un análisis mediante elementos finitos<sup>[FEK]</sup>.

- *Rumanía*

En el terremoto ocurrido en Marzo de 1977 no se registraron daños en la presa de Vidraru-Argeș ( $H = 167[m]$ ) ni en la de Paltinul-Doftana ( $H = 108[m]$ ), cuyo nivel de embalse estaba unos cincuenta metros por debajo de la coronación. La intensidad en ambos casos fue de VII y VI[MM], respectivamente. Tampoco se registraron daños en las presas de Negovanu-Sadu ( $H = 62[m]$ ) y Tarnita-Somes ( $H = 98[m]$ ), a terremotos de intensidad IV-V[MM].

- *Otros casos*

Las presas de Grankarevo, Makata ( $H = 30[m]$ ) y Lipkovo ( $H = 38[m]$ ) en Yugoslavia soportaron sin daños un terremoto muy fuerte en 1963; la presa de Kariba ( $H = 128[m]$ ) en Rhodesia fue sometida a un terremoto de magnitud 6.1[M] sin sufrir daños; igualmente resultaron indemnes la presa de Canelles construida en España y las de Monteynard y Grandval ( $H = 88[m]$ ) de arcos múltiples en Francia.

# CAPÍTULO II

## ANÁLISIS DEL SÓLIDO

### 1. INTRODUCCIÓN

Muchos problemas en ingeniería involucran la solución de estructuras donde el único dominio a analizar es sólido. Por esto, en los últimos años el análisis de la mecánica de sólidos ha tenido un gran impulso. Desde la llegada de los ordenadores se han desarrollado innumerables herramientas numéricas. Evidentemente, es imposible describir aquí todas ellas. La intención de este capítulo es presentar un esquema general del análisis de sólidos, haciendo hincapié en aquellas herramientas que tengan especial importancia para el análisis de presas o que sean un aporte del presente trabajo.

Finalmente, se presentan algunos ensayos numéricos que se reflejan aquí por su interés académico en cuanto que ayudan a comprender mejor los elementos del modelo de análisis, además de servir para verificar los programas desarrollados.

### 2. ECUACIONES DEL PROBLEMA ESTÁTICO NO-LINEAL

En este apartado se presentan las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que rigen el comportamiento de los sólidos no-lineales bajo estados de carga estática o quasi-estática<sup>[Mal][Lu2][Zi]</sup>. En el apartado 4 se presenta la ecuación constitutiva que tiene en cuenta la no linealidad del material y en el apartado 5 la extensión necesaria para la consideración de los efectos dinámicos.

En la figura 2.2.1 se observa el esquema de un sólido de referencia donde se muestra: Su volumen  $\Omega$ ; su contorno  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ ; el sistema de coordenadas  $x, y, z$ ; el vector de desplazamientos  $u(x, y, z) = \{u_x, u_y, u_z\}^T$ ; las fuerzas por unidad de masa  $b(x, y, z) = \{b_x, b_y, b_z\}^T$  y las fuerzas por unidad de superficie  $t(x, y, z) = \{t_x, t_y, t_z\}^T$ .

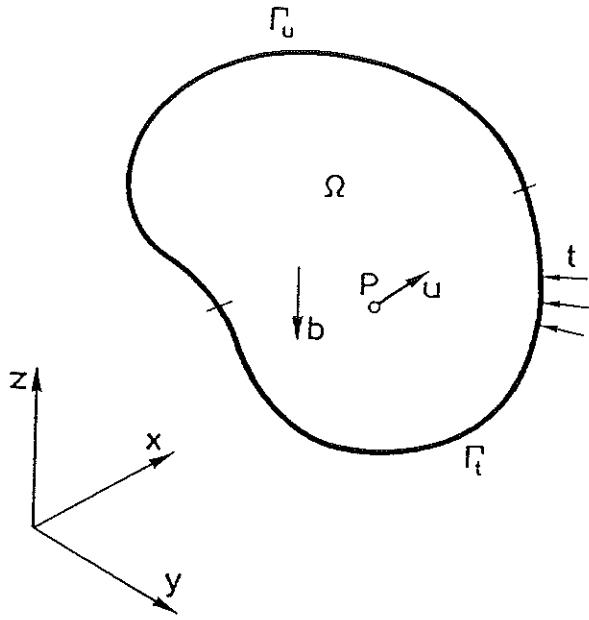


Figura 2.2.1 Sólido de referencia en el espacio.

- **Campo de desplazamientos:**

Las ecuaciones se plantean de forma que la incógnita sea el vector de desplazamientos de cada punto del sólido, denotado por:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (2.2.1)$$

- **Campo de deformaciones:**

El tensor de pequeñas deformaciones está definido por el gradiente simétrico de los desplazamientos:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

• Campo de tensiones:

El tensor de tensiones  $\sigma$  está definido de forma que relaciona el vector de tensiones sobre una superficie ( $t$ ) con el vector ( $n$ ) normal a ésta:

$$t = \sigma \cdot n \quad (2.2.3)$$

Aplicando el principio de la conservación del momento angular, es fácil demostrar<sup>[Mal]</sup> que el tensor de tensiones  $\sigma$ , definido de esta forma, es simétrico.

• Ecuación constitutiva:

La ecuación constitutiva expresa el tensor de tensiones en función del tensor de deformaciones  $\sigma = \sigma(\epsilon)$ . Esta ecuación puede ser tan compleja como se quiera con el objeto de modelar un material determinado. Por simplicidad, ahora usaremos la ecuación constitutiva más sencilla que es la elástica lineal dada por:

$$\sigma = D : (\epsilon - \epsilon_0) + \sigma_0 \quad (2.2.4)$$

siendo  $D$  el tensor constitutivo elástico de cuarto orden,  $\epsilon_0$  el tensor de deformaciones iniciales y  $\sigma_0$  el tensor de estado tensional inicial. En el apartado 4 se ampliará esta ecuación a la ecuación constitutiva no-lineal de daño desarrollada para modelar el hormigón.

• Ecuación del movimiento:

El principio de conservación de la cantidad del movimiento establece que el incremento por unidad de tiempo de la cantidad de movimiento de un conjunto de partículas es igual a la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre éstas. El postulado básico de la mecánica del medio continuo es la forma continua de esta tercera ley de Newton:

$$\int_{\Gamma} t \, d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b \, d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho v \, d\Omega \quad (2.2.5)$$

donde  $t$  es el vector de fuerzas por unidad de superficie,  $b$  es el vector de fuerzas por unidad de masa,  $\rho$  es la densidad y  $v$  es el vector de velocidad.

En (5): reemplazando (3), transformando la integral de superficie a integral de volumen con el teorema de la divergencia y sacando la derivada material al término de la derecha se tiene:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \sigma + \rho b) \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \frac{dv}{dt} \, d\Omega \quad (2.2.6)$$

por lo que la ecuación de la conservación del momento, para un volumen arbitrario, queda:

$$\int_{\Omega} \left( \nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{b} - \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) d\Omega = 0 \quad (2.2.7)$$

Tomando como volumen arbitrario un diferencial, se obtiene la ecuación diferencial del movimiento<sup>†</sup>:

$$\nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2.2.8)$$

En el caso estático o quasi-estático la velocidad de todos los puntos del sólido es despreciable  $\mathbf{v} \approx 0$  por lo que la ecuación del movimiento se reduce a:

$$\nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (2.2.9)$$

- **Condiciones de contorno:**

El contorno  $\Gamma$  se divide en dos partes:  $\Gamma_u$  en las que se prescriben los desplazamientos (condición de Dirichlet) y  $\Gamma_t$  en las que se prescriben las tensiones (condición de Newman):

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}^* = 0 \quad \text{en } \Gamma_u \quad (2.2.10)$$

$$\mathbf{t} - \mathbf{t}^* = 0 \quad \text{en } \Gamma_t \quad (2.2.11)$$

substituyendo (3) en (11):

$$\sigma \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}^* = 0 \quad \text{en } \Gamma_t \quad (2.2.12)$$

- **Residuos ponderados:**

La solución de la ecuación diferencial (9) debe satisfacer las condiciones de contorno (10) y (12). Las condiciones de Dirichlet (10) se impondrán a la solución de forma forzada y consecuentemente no se considerarán en la ecuación de residuos ponderados. Así, la integral de (9) sobre todo el volumen  $\Omega$  debe ser nula al igual que la integral de (12) sobre todo el contorno  $\Gamma_t$ . Aplicando residuos ponderados a la suma de estas integrales se tiene:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot (\nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{b}) d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{w}} \cdot (\sigma \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}^*) d\Gamma = 0 \quad (2.2.13)$$

siendo  $\mathbf{w}$  y  $\bar{\mathbf{w}}$  dos residuos fijos y arbitrarios sujetos a  $\mathbf{w} = \bar{\mathbf{w}} = 0$  en  $\Gamma_u$ .

<sup>†</sup> Esta es la primera ley del movimiento de Cauchy (1827).

En consecuencia:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot (\cdot) d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \mathbf{w} \cdot (\cdot) d\Gamma \quad (2.2.14)$$

Usando el teorema de la divergencia:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_t} (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{w}) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\Omega \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

se obtiene:

$$\int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\Omega = \int_{\Gamma_t} (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{w}) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (2.2.16)$$

Reemplazando (16) en (13) y con  $\bar{\mathbf{w}} = -\mathbf{w}$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_t} (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{w}) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{w} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma + \\ + \int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{w} \cdot \mathbf{t}^* d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Al ser:

$$\begin{aligned} (\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{w} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \quad \text{y} \\ (\nabla \cdot \mathbf{w}) : \boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \nabla) : \boldsymbol{\sigma} \end{aligned}$$

se tiene:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \nabla) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{w} \cdot \mathbf{t}^* d\Gamma \quad (2.2.18)$$

El vector de ponderación  $\mathbf{w}$  se puede interpretar como un desplazamiento virtual  $\delta \mathbf{u}$  al ser compatible con las condiciones de contorno  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{w} = \mathbf{0}$  en  $\Gamma_u$  como se exigió en (13). Reemplazando  $\mathbf{w}$  por  $\delta \mathbf{u}$  y  $\frac{1}{2} (\nabla \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u} \nabla)$  por  $\delta \boldsymbol{\epsilon}$  según (2), se obtiene la forma débil de la ecuación del movimiento. En el cálculo estructural esta expresión variacional es conocida como el Principio de los Trabajos Virtuales (PTV):

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^* d\Gamma \quad (2.2.19)$$

Con el objeto de simplificar la notación, al ser  $\boldsymbol{\epsilon}$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  dos tensores simétricos, se utilizan en su lugar dos vectores<sup>†</sup> definidos como:

<sup>†</sup> Se utilizan los vectores como una forma algorítmica que simplifica la notación y el tratamiento de los problemas numéricos. Sin embargo, no se hace distinción en el símbolo que los denota ya que, según el contexto (tipo de producto empleado), es fácil distinguir si una expresión fue escrita utilizando tensores o vectores.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (2.2.20)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}\}^T$$

Además, la notación del producto escalar se reemplaza por el producto matricial de un vector fila por un vector columna:  $(\cdot) \cdot (\cdot) \equiv (\cdot)^T(\cdot)$ , con lo que el principio de los trabajos virtuales se escribe:

$$\int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\epsilon})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \rho (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{t}^* d\Gamma \quad (2.2.21)$$

### 3. PLANTEAMIENTO NUMÉRICO

En las últimas tres décadas el Método de los Elementos Finitos (MEF) se ha convertido en el procedimiento más poderoso utilizado en análisis de estructuras. Existen muchos tratados<sup>†</sup> que versan sobre el análisis profundo, incluyendo todas las derivaciones de las hipótesis adoptadas a las aplicaciones estructurales del método, y por lo tanto en esta sección sólo se dará una breve descripción.

#### 3.1. Ecuaciones discretizadas de equilibrio

El concepto básico de la discretización es aproximar una función continua  $\mathbf{u}(x)$  por la sumatoria de un número finito y arbitrario  $n$  de funciones de base  $N_i(x)$  multiplicadas cada una por un parámetro distinto  $a_i$ :

$$\mathbf{u}(x) \simeq \hat{\mathbf{u}}(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) a_i = \mathbf{N} \mathbf{a} \quad (2.3.1.1)$$

De esta forma, el problema se reduce a calcular el valor de los  $n$  parámetros  $a_i$  que satisfacen una forma integral de la ecuación diferencial. En el análisis estructural la forma integral que normalmente se elige es el Principio de los Trabajos Virtuales, que como se vio, es la forma débil de la ecuación del movimiento.

<sup>†</sup> [Ba][Co][OH][Oña][Ziel][Zie2]

Discretizando con la ecuación (1) los vectores de deformaciones y tensiones (2.2.20) se tiene:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} \simeq \mathbf{L} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{L} \mathbf{N} \mathbf{a} = \mathbf{B} \mathbf{a} \quad \text{con } \mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N} \quad (2.3.1.2)$$

y:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})) \simeq \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}(\hat{\mathbf{u}})) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{a}) \quad (2.3.1.3)$$

que en el caso lineal (2.2.4) sera:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\mathbf{B} \mathbf{a} - \boldsymbol{\epsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (2.3.1.4)$$

Reemplazando (1), (2) y (3) en (2.2.21) se obtiene:

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{a}^T \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{a}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{a}^T \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{a}^T \mathbf{N}^T \mathbf{t}^* d\Gamma \quad (2.3.1.5)$$

Al ser  $\delta \mathbf{a}^T$  un vector de constantes numéricas independientes de  $\mathbf{x}$ , éste puede salir de las integrales y simplificarse quedando:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{a}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^* d\Gamma \quad (2.3.1.6)$$

que en general se puede escribir:

$$\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \mathbf{f} \quad (2.3.1.7)$$

donde:

$$\mathbf{g}(\mathbf{a}) = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{a}) d\Omega \quad (2.3.1.8)$$

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^* d\Gamma \quad (2.3.1.9)$$

son los vectores de fuerzas internas y externas respectivamente. Ésta es la expresión general para un problema estático o cuasi-estático materialmente no-lineal.

Todavía hace falta definir la ecuación constitutiva que relaciona las tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  en función de las incógnitas  $\mathbf{a}$ . En el apartado 4 se propone una ecuación constitutiva no-lineal orientada a representar las características fundamentales del hormigón. El caso más simple de (7) se encuentra cuando la ecuación constitutiva es lineal (4) y se tiene:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T (\mathbf{D}(\mathbf{B} \mathbf{a} - \boldsymbol{\epsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0) d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^* d\Gamma \quad (2.3.1.10)$$

que en notación matricial se puede escribir como:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (2.3.1.11)$$

siendo:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (2.3.1.12)$$

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega \quad (2.3.1.13)$$

la matriz de rigidez y el vector de fuerzas respectivamente. Con esto, la solución del problema estático lineal formalmente se escribe:

$$\mathbf{a} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \quad (2.3.1.14)$$

### 3.2. Ensamblaje por elementos finitos

En el MEF el continuo debe ser analizado numéricamente subdividiéndolo en regiones no solapadas (elementos finitos) interconectadas entre sí a través de  $n$  puntos nodales que se denominan nodos. Por otra parte, se eligen  $n$  funciones de base  $N_i$  de forma tal que tengan valor distinto de cero sólo en los elementos a los que pertenece el nodo  $i$ . De esta forma, cualquiera de las integrales sobre todo el dominio, se convierte en la suma de integrales sobre los elementos y sólo para las funciones de base que tienen valor distinto de cero en cada elemento. Así por ejemplo, el cálculo de la matriz de rigidez será:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega = \sum_{e=1}^{nelem} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega_e = \mathbb{E}_e \mathbf{K}_e \quad (2.3.2.1)$$

siendo  $\mathbb{E}_e$  el operador de “ensamblaje”.

Es importante notar que normalmente se eligen las funciones de base  $\mathbf{N}$  de manera tal que que los parámetros a puedan ser interpretados como los desplazamientos de los puntos nodales.

### 3.3. Estrategias de solución

El sistema no-lineal de ecuaciones (2.3.1.7) se puede escribir como un vector de fuerzas residuales  $\Psi$  que debería ser idénticamente nulo:

$$\Psi(\mathbf{a}) = \mathbf{f} - \mathbf{g}(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad (2.3.3.1)$$

Si se tiene una solución aproximada  $\mathbf{a}_i$  a la solución exacta  $\mathbf{a}$ , se puede implementar un procedimiento iterativo de corrección para obtener una solución *mejorada* de forma que las fuerzas residuales sean más próximas a cero:

$$\Psi(\mathbf{a}_i + \delta \mathbf{a}_i) = \Psi(\mathbf{a}_{i+1}) = \mathbf{0} \quad (2.3.3.2)$$

Para esto, se desarrollan las fuerzas residuales en serie de Taylor truncada sólo a los términos de primer orden y se obtiene:

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{a}_{i+1}) &= \Psi(\mathbf{a}_i) + \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{a}} \right]_{\mathbf{a}_i} \delta \mathbf{a}_i \\ &= \Psi(\mathbf{a}_i) - \left[ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{a}} \right]_{\mathbf{a}_i} \delta \mathbf{a}_i \\ &= \Psi(\mathbf{a}_i) - [\tilde{\mathbf{K}}]_i \delta \mathbf{a}_i\end{aligned}\quad (2.3.3.3)$$

donde se define la matriz de rigidez tangente  $[\tilde{\mathbf{K}}]_i = \left[ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{a}} \right]_{\mathbf{a}_i}$  como la matriz jacobiana de las fuerzas internas evaluadas con  $\mathbf{a}_i$ .

Substituyendo la nueva aproximación  $\Psi(\mathbf{a}_{i+1})$  en (2) e igualando a cero se tiene:

$$\Psi(\mathbf{a}_i) - \tilde{\mathbf{K}}_i \delta \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \quad (2.3.3.4)$$

La ecuación (4) se puede resolver para luego actualizar la solución de la forma:

$$\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{a}_i + \eta_i \delta \mathbf{a}_i \quad (2.3.3.5)$$

donde  $\eta_i$  es un parámetro escalar que se puede calcular para que  $\Psi(\mathbf{a}_{i+1})$  sea mínimo<sup>[Cr1]</sup>, o bien simplemente, tomarlo igual a la unidad.

El procedimiento iterativo continúa, y para cada iteración se resuelve un nuevo sistema de ecuaciones linealizadas, hasta que un cierto criterio de convergencia, previamente seleccionado, se ve satisfecho.

El procedimiento incremental/iterativo arriba descrito es el conocido procedimiento de Newton-Raphson para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Normalmente, este método resulta caro de usar, debido al coste computacional necesario para el cálculo y factorización de la matriz tangente en cada iteración. Para evitar esta dificultad existen muchas modificaciones del método de Newton-Raphson. Algunas técnicas muy usadas son las siguientes:

- (a) *Métodos de Newton-Raphson modificado* (NRm), en los cuales el procedimiento es similar al descrito anteriormente, pero la matriz tangente sólo se actualiza ocasionalmente, con frecuencia previamente seleccionada o calculada automáticamente. La velocidad de convergencia es más baja, pero combinados con aceleradores de convergencia resultan de una considerable eficiencia.
- (b) *Métodos quasi-Newton* (QN), en los cuales la matriz tangente se actualiza por medio de una corrección simple, en vez de recalcularla y refactorizarla completamente. El método QN más po-

pular es el de *actualización inversa de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno*<sup>[Br][Fl][Go][Sh]</sup>, conocido comúnmente como método *BFGS*. Consiste en una corrección aditiva de rango dos de la matriz  $\tilde{\mathbf{K}}^{-1}$ , y puede ser formulado en forma de producto vectorial, muy adecuado para su implementación por ordenador.

- (c) *Métodos secant-Newton* (SN), desarrollados originalmente por Crisfield<sup>[Cr3]</sup> como una versión *sin memoria* (de un solo ciclo) de los métodos QN. Estos métodos evitan el almacenaje de los pares de vectores de actualización necesario en los métodos QN.

Una exposición de los métodos QN y SN más efectivos se puede encontrar en las referencias [Ab] y [Ma].

## 4. ECUACIÓN CONSTITUTIVA NO LINEAL DEL HORMIGÓN

### 4.1. Introducción

A pesar del uso cotidiano del hormigón como material de construcción, el conocimiento actual sobre su comportamiento mecánico en situaciones generales de tensión es bastante deficiente. El comportamiento ante cargas quasi-estáticas de corta duración presenta un carácter claramente no lineal, tanto en situaciones de compresión como de tracción, en las que su relativamente baja resistencia produce rotura frágil. Ante cargas de larga duración el hormigón presenta deformaciones diferidas que se manifiestan en los fenómenos de relajación y fluencia. Bajo carga dinámica, el hormigón presenta dependencia con la velocidad de carga y acumulación de daño en carga cíclica.

Muchos de estos fenómenos característicos se deben a la compleja microestructura del material. El hormigón es un material compuesto fundamentalmente de partículas de diferentes tamaños (áridos), aglomeradas por una pasta de cemento. Además, la pasta de cemento presenta una porosidad apreciable, conteniendo sus poros agua y aire. La mayor parte de la deformación inelástica del hormigón es debida a microfisuración y deslizamientos fricionales internos, fenómenos cuya mecánica está obviamente relacionada con la naturaleza compuesta del material.

La consideración de la microestructura interna del hormigón es esencial para proporcionar explicaciones físicas a los fenómenos observados en los ensayos de laboratorio. Sin embargo, de estos ensayos se deben extraer conclusiones a nivel macroscópico si se quieren derivar modelos constitutivos utilizables en la práctica. Debido a la importancia del hormigón como material estructural, se han propuesto muchos modelos de este tipo en las últimas décadas, la inmensa mayoría de ellos caracterizando al hormigón como un

material homogéneo a nivel macroscópico. Revisiones de dichos modelos se pueden encontrar en las referencias [AC] y [ChS], y una descripción de muchos modelos computacionales y su aplicación en el contexto de los elementos finitos se puede hallar en la referencia [BuS]. Prueba de que el tema está lejos de estar agotado, y que este campo es un área activa de investigación son las múltiples conferencias internacionales que se organizan periódicamente sobre el tema<sup>[DHOB][EFM][BiM]</sup>. En la literatura especializada se pueden encontrar sucesivas generaciones de modelos encuadrados dentro de las teorías generales de la elasticidad no lineal, la plasticidad, la visco-plasticidad y la teoría endocrónica y, más recientemente, de la teoría de modelos de daño continuo.

Probablemente, el aspecto más sobresaliente del comportamiento mecánico del hormigón es su baja resistencia a tracción, que provoca fisuración a tensiones muy bajas en comparación con las tensiones de rotura a compresión. En el contexto del MEF, el problema de la fisuración a tracción ha recibido considerable atención, utilizándose dos formas principales de simulación: los modelos de fisura discreta y los de fisura distribuida<sup>[DHOB][EFM][BiM]</sup>. Las dos alternativas cuentan con argumentos a favor y en contra, que se esgrimen por parte de los defensores de una y otra en publicaciones y comunicaciones. Existe un cierto consenso en que la primera alternativa es más adecuada para la simulación de fisuras singulares claramente definidas, mientras que la segunda resulta más adecuada para representar estados de fisuración o microfisuración más o menos generalizados en una estructura. En el presente, el debate sigue abierto, probablemente por la falta de total transparencia y consistencia en la formulación de ambas alternativas. No obstante, sí puede decirse que los modelos de tipo distribuido encajan en el marco general de la Mecánica de los Medios Continuos y de la Teoría General de Ecuaciones Constitutivas; esto hace que sean más fáciles de implementar en la práctica, y están por lo tanto mucho más estudiados y se usan en la mayoría de las aplicaciones.

Por todo lo expuesto, a continuación se plantea un modelo constitutivo para el hormigón dirigido a modelar adecuadamente sólo aquellos aspectos fundamentales que se consideran relevantes para el análisis dinámico de presas. Es importante resaltar que este modelo tiene una evaluación e integración en el tiempo cerrada, lo cual lo hace especialmente indicado para problemas de gran volumen de cálculo.

#### 4.2. Modelo de daño continuo

En los últimos años, los llamados *modelos de daño continuo* han sido ampliamente aceptados como alternativa para simular comportamientos constitutivos complejos caracterizados por la progresiva degradación que sufren las propiedades mecánicas de los materiales en la fase previa a la iniciación de

macrofisuras<sup>†</sup>. Aunque inicialmente desarrollados para materiales dúctiles como los metales, recientemente se han aplicado a materiales frágiles, tales como el hormigón y rocas<sup>‡</sup>.

La teoría de daño continuo está basada en la termodinámica de procesos irreversibles y en la teoría general de variables internas de estado<sup>§</sup>. Se puede modelar daño anisótropo a través de variables tensoriales de daño<sup>¶</sup>, reduciéndose en su versión más simple a modelos de daño isótropo<sup>[Re][Le3]</sup>, con una única variable escalar de daño. Las formulaciones de daño isótropo gozan de creciente aceptación debido a su simplicidad, eficiencia y aplicabilidad en multitud de casos prácticos.

Físicamente, la degradación de las propiedades mecánicas del material es el resultado de la iniciación y crecimiento de microdefectos, tales como microporos o microfisuras. En el contexto de la mecánica del continuo, este proceso puede ser modelado introduciendo variables internas que sean magnitudes escalares o tensoriales. En el caso de daño isótropo, se supone el comportamiento mecánico de las microfisuras o microporos independiente de la orientación, y dependiente únicamente de una variable escalar llamada parámetro de daño (o de degradación),  $d^t$ . Así, se puede escribir:

$$\bar{\sigma}^t = \frac{\sigma^t}{1 - d^t} \quad (2.4.2.1)$$

donde  $\sigma^t$  es el tensor de tensiones de Cauchy, a tiempo  $t$  y  $\bar{\sigma}^t$  es el denominado *tensor de tensiones efectivas*. El parámetro de daño es una variable escalar normalizada ( $0 \leq d^t \leq d_c \leq 1$ ). El valor  $d = 0$  corresponde a un estado inalterado del material, mientras que valores  $d^t \leq d_c$  no nulos corresponden a estados degradados. Un valor  $d^t = d_c$ , igual a un cierto valor crítico, define un colapso completo a nivel local.

El parámetro de daño puede interpretarse físicamente como la relación local entre la superficie dañada y la superficie total (nominal) de material<sup>[Ka2]</sup>. Según esta interpretación, Lemaitre<sup>[Le1][LC2]</sup> introdujo la *hipótesis de equivalencia de deformaciones* (ver figura 2.4.2.1 (a)): “la deformación asociada a un estado dañado bajo la tensión aplicada es equivalente a la deformación asociada al estado inalterado bajo la tensión efectiva”.

De forma alternativa, se puede definir el concepto de *deformación efectiva*:

$$\bar{\epsilon}^t = (1 - d^t) \epsilon^t \quad (2.4.2.2)$$

<sup>†</sup> [Ch1] [Dr] [DrC] [Hu] [JaH] [Ka2] [Le1] [Le2] [LeH] [LeP] [LeD] [LC1] [Mar] [Ra]

<sup>‡</sup> [Fr] [Kr] [KrF] [Lo] [LoL] [Maz] [MaL] [Re]

<sup>§</sup> [Ch6] [CoS1] [Kr] [LC2] [Mu]

<sup>¶</sup> [Ch4] [Ch5] [CoS1] [CoS2] [Ka1]

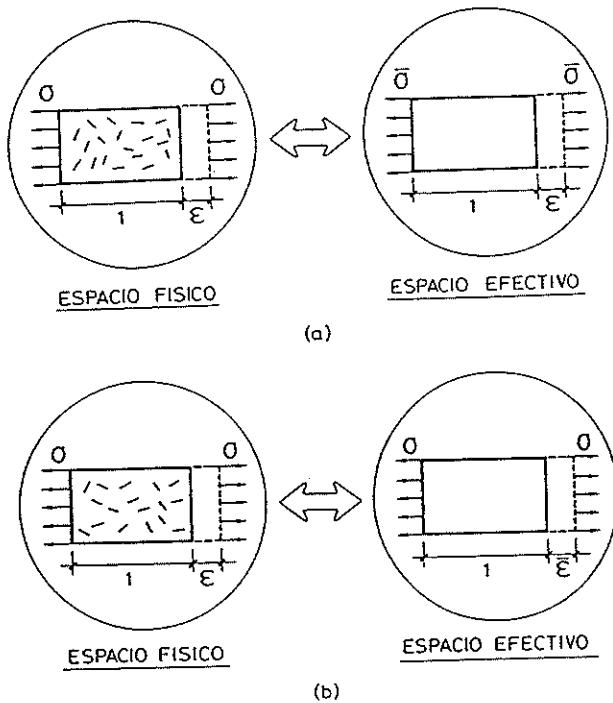


Figura 2.4.2.1 (a) Representación esquemática de la hipótesis de equivalencia de deformaciones, (b) Representación esquemática de la hipótesis de equivalencia de tensiones.

donde  $\epsilon^t$  es el tensor de deformación a tiempo  $t$ , y  $\bar{\epsilon}^t$  es el tensor de deformaciones efectivas<sup>[CoS2]</sup>. Puede entonces proponerse la *hipótesis de equivalencia de tensiones*<sup>[Si1]</sup> (ver figura 2.4.2.1 (b)): “la tensión asociada a un estado dañado bajo la deformación aplicada es igual a la tensión asociada al estado inalterado bajo la deformación efectiva”.

Como puede verse, la base de los modelos de daño consiste en definir una transformación entre el espacio físico y un espacio ficticio llamado espacio efectivo en el que el material está inalterado, y en el que, por lo tanto, se comporta según modelos simples, por ejemplo, elásticamente. La transformación entre uno y otro espacio se hace a través de las mencionadas hipótesis de equivalencia. El concepto de *deformación efectiva* y la *hipótesis de equivalencia de tensiones* son la base de los modelos de daño formulados en deformaciones, que resultan particularmente adecuadas para su utilización en el MEF planteado en desplazamientos, en los que éstos son las variables independientes.

La ecuación constitutiva para un modelo de daño isótropo tiene la forma:

$$\begin{aligned}\sigma^t &= D : \bar{\epsilon}^t \\ &= D : (1 - d^t) \epsilon^t \\ &= (1 - d^t) D : \epsilon^t\end{aligned}\quad (2.4.2.3)$$

donde  $\sigma^t$  y  $\epsilon^t$  son los tensores de tensión y deformación reales, a tiempo  $t$  respectivamente;  $\bar{\epsilon}^t$  es el tensor de deformación efectiva;  $D$  es el tensor constitutivo elástico-lineal inalterado y  $d^t$  es la variable de daño. La ecuación (3) pone de manifiesto algunos aspectos básicos del modelo:

- (1) La isotropía del material se conserva, ya que la rigidez material sólo se ve afectada por un factor escalar,  $(1 - d^t)$ ;
- (2) Las tensiones pueden evaluarse explícitamente, con sólo conocer el valor de las deformaciones  $\epsilon^t$  totales y del parámetro de daño  $d^t$ ;
- (3) La ecuación (3) puede interpretarse como una descomposición aditiva estándar de la tensión en dos partes, una elástica y otra inelástica:

$$\begin{aligned}\sigma^t &= (1 - d^t) D : \epsilon^t = D : \epsilon^t - d^t D : \epsilon^t = \sigma_e^t - \sigma_i^t \\ \sigma_e^t &= D : \epsilon^t = \sigma^t \\ \sigma_i^t &= d^t \sigma_e^t = d^t D : \epsilon^t\end{aligned}\quad (2.4.2.4)$$

El modelo constitutivo definido por la ecuación (3) queda totalmente determinado si el valor del parámetro de daño  $d^t$  puede calcularse para cada tiempo del proceso de deformación. A tal efecto, el modelo consta de los siguientes elementos<sup>[OCOL]</sup>:

- (a) Una *norma escalar*,  $\tau^t$ , del tensor de deformaciones,  $\epsilon^t$ , o alternativamente, del tensor de tensiones elásticas o efectivas,  $\sigma_e^t$ . Esta norma recibe el nombre de *deformación equivalente*, y se usa para comparar diferentes estados de deformación, de forma que sea posible definir conceptos como “carga”, “descarga” y “recarga”.
- (b) Un *criterio de daño* formulado en el espacio de deformaciones, o en el de tensiones efectivas. El criterio de daño permite definir la iniciación del proceso de deformación inelástica. Matemáticamente, este criterio se escribe como una función  $F(\tau^t, r^t) \leq 0$ , donde  $\tau^t$  es la *deformación equivalente*, y  $r^t$  un valor denominado *umbral de daño*. El valor inicial del umbral es una propiedad del material que se define en función de la resistencia característica.
- (c) *Leyes de evolución* para el parámetro de daño  $d^t$ , y el valor umbral,  $r^t$ . Dichas leyes pueden escribirse en forma incremental o integrada, y permiten definir el proceso de evolución de la deformación inelástica.

En la referencia [Ga] se detalla la formulación de estos elementos para el modelo de daño utilizado en este trabajo, y se discuten algunas

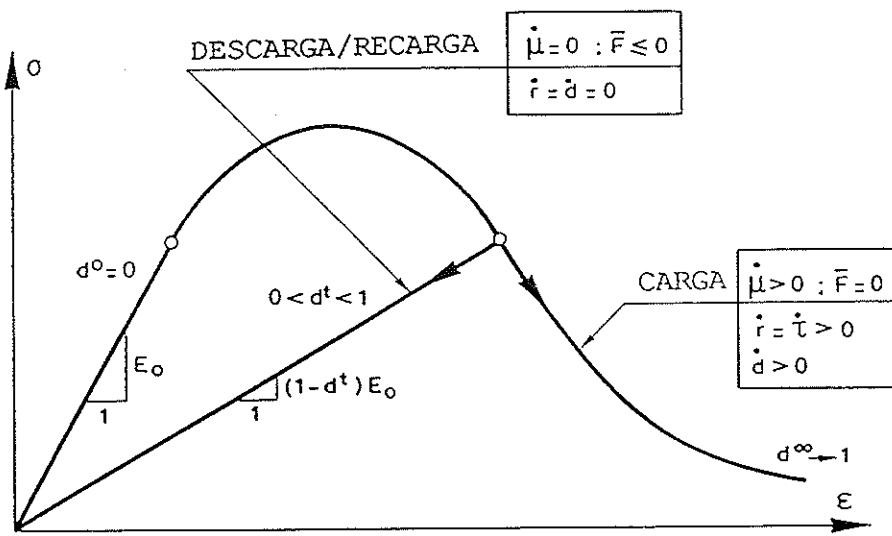


Figura 2.4.2.2 Curva uniaxial tensión-deformación en un modelo de degradación.

alternativas. En la figura 2.4.2.2 se muestra esquemáticamente el tipo de curva uniaxial de tensión-deformación que puede simularse con un modelo de este tipo. Se observa cómo el factor  $(1 - d^t)$  puede interpretarse también como un *factor de reducción* de la rigidez secante instantánea del material. Este factor define la rama de descarga/recarga de la curva uniaxial.

## 5. ECUACIONES DEL PROBLEMA DINÁMICO NO-LINEAL

En los apartados anteriores se han descrito las ecuaciones que rigen el comportamiento de los sólidos lineales o materialmente no lineales bajo estados de carga estática o quasi-estática. En este apartado se presentan las extensiones necesarias cuando se debe tener en cuenta las fuerzas de inercia.

- **Campo de desplazamientos, velocidades y aceleraciones:**

Las ecuaciones se plantean de forma que las incógnitas sean el vector de desplazamiento de cada punto del sólido y sus derivadas<sup>†</sup> con respecto al tiempo:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (2.5.1)$$

<sup>†</sup> Las derivadas con respecto al tiempo  $\frac{du}{dt}$  y  $\frac{d^2u}{dt^2}$  se denotan con un punto  $\dot{u}$  y dos puntos  $\ddot{u}$  respectivamente.

• Ecuación del movimiento:

En el apartado 2 se llegó a la ecuación diferencial del movimiento de Cauchy (2.2.8):

$$\nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2.5.2)$$

La diferencia, ahora, es que la velocidad ya no es despreciable.

• Condiciones iniciales y de contorno:

Para que el problema esté bien planteado, en el caso dinámico, se deben prescribir dos tipos de condiciones:

(a) Iniciales ( $t^0 = 0$ ):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t^0) - \mathbf{u}^0 = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (2.5.3)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t^0) - \mathbf{v}^0 = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (2.5.4)$$

(b) De contorno ( $\forall t$ ):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_u \quad (2.5.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}^* = \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_t \quad (2.5.6)$$

Es interesante apuntar que en el contorno, la condición de Dirichlet (5) se puede imponer de tres formas distintas: ya sea prescribiendo los desplazamientos  $\mathbf{u}^*$ , las velocidades  $\dot{\mathbf{u}}^*$  o las aceleraciones  $\ddot{\mathbf{u}}^*$ . Esto es así ya que si se conoce uno de ellos, por simple derivación o integración, se pueden determinar los otros dos. Sin embargo, en el Capítulo IV se verá que, numéricamente y dependiendo del problema, tiene ventaja imponer uno de ellos con respecto a los otros dos.

• Residuos ponderados:

En la solución de la ecuación diferencial (2), las condiciones iniciales (3 y 4) y de contorno (5) se impondrán a la solución de forma forzada, por lo que, al igual que en el caso quasi-estático, sólo debemos ocuparnos de la condición de Newman (6) en el contorno. Por consiguiente, para la solución, se siguen los mismos pasos (2.2.13) a (2.2.21) que se detallaron en el apartado 2, salvo que esta vez se tiene presente que la velocidad no es cero, con lo que se llega a la misma expresión de los trabajos virtuales (2.2.21) con un término agregado que tiene en cuenta las fuerzas de inercia:

$$\int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\epsilon})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \rho (\delta \mathbf{u})^T \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\Omega = \int_{\Omega} \rho (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{t}^* d\Gamma \quad (2.5.7)$$

## 6. DISCRETIZACIÓN

La ecuación (2.5.7) es una ecuación integral planteada en cuatro dimensiones:  $(x, y, z, t)$ . Se podría discretizar, exactamente en la misma forma que se hizo con la ecuación (2.2.21), pero esta vez tomando funciones de base  $N$  de cuatro dimensiones  $N(x, y, z, t)$ . Sin embargo, este procedimiento produce un sistema de ecuaciones muy grande porque resuelve el problema para todo el tiempo simultáneamente. Conceptualmente, esta cuarta dimensión  $t$  es diferente. Tiene la ventaja de que los resultados en un cierto instante de tiempo dependen exclusivamente de los resultados del pasado y, nunca un resultado de un instante puede ser modificado por algo que "ocurre" en el futuro. No sucede lo mismo con la dimensión  $x$ , por ejemplo, donde los resultados en una coordenada dependen tanto de valores en coordenadas mayores como menores. Por esto, normalmente se recurre a discretizar de forma distinta el espacio que el tiempo.

- **Discretización espacial:**

Discretizando los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en función de un conjunto de parámetros que, esta vez, son función del tiempo (aún no discretizado), se puede escribir:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \simeq \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) \mathbf{a}_i(t) = \mathbf{N} \mathbf{a}^t \quad (2.6.1)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \simeq \hat{\dot{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{a}}_i(t) = \mathbf{N} \dot{\mathbf{a}}^t \quad (2.6.2)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \simeq \hat{\ddot{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{a}}_i(t) = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{a}}^t \quad (2.6.3)$$

Siguiendo los mismos pasos que se detallaron en el apartado 3.1, en lugar de la expresión (2.3.1.6) se obtiene ahora:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{a}^t) d\Omega + \ddot{\mathbf{a}} \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{b}^t d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^{*t} d\Gamma \quad (2.6.4)$$

que en general se escribe:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}^t + \mathbf{g}(\mathbf{a}^t) = \mathbf{f}^t \quad (2.6.5)$$

donde:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad (2.6.6)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{a}^t) = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{a}^t) d\Omega \quad (2.6.7)$$

$$\mathbf{f}^t = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{b}^t d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^{*t} d\Gamma \quad (2.6.8)$$

son la matriz de masa, el vector de fuerzas internas y el vector de fuerzas externas respectivamente.

En esta ecuación todavía hace falta reemplazar la ecuación constitutiva  $\sigma = \sigma(a)$ . En el caso particular de que ésta ecuación sea lineal dada por (2.3.1.4), se obtiene:

$$M\ddot{a}^t + K a^t = f \quad (2.6.9)$$

siendo:

$$K = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega \quad (2.6.10)$$

la matriz de rigidez.

Por experimentación se sabe que ante un impulso dinámico las estructuras sufren un amortiguamiento que es proporcional a la velocidad de las partículas del sólido. Este amortiguamiento se debe fundamentalmente a la disipación de energía por efecto de fricción interna. Para modelar este tipo de disipación energética se aumenta a la ecuación dinámica (9) un término disipativo proporcional a la velocidad. Así se tiene:

$$M\ddot{a}^t + C\dot{a}^t + g(a^t) = f \quad (2.6.11)$$

donde  $C$  es una matriz elegida adecuadamente para producir amortiguamientos que se ajusten a valores medidos experimentalmente. Un método muy usado, por sus ventajas numéricas, es el dado por el amortiguamiento de Rayleigh definido como una combinación lineal de las matrices de masa y rigidez  $C = \alpha M + \beta K$ . Los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  deben ser calibrados con mediciones experimentales o por experiencias anteriores.

Es importante notar que pueden existir otros mecanismos que aporten amortiguamiento a la estructura. Así por ejemplo, un método para tratar los contornos ficticios en dominios semi-infinitos, como el suelo, consiste en colocar unos amortiguadores adecuados en dichos contornos para representar el resto del dominio no discretizado. Como se verá en el Capítulo IV, esto conduce a agregar términos adicionales a la matriz de amortiguamiento  $C$ .

#### • Discretización temporal:

La ecuación (11) es conocida como la “ecuación semi-discreta del movimiento” y es la expresión general que se debe resolver en un problema dinámico no-lineal.

El problema de valor inicial planteado para esta ecuación consiste en encontrar un vector  $a^t = a(t)$  tal que satisfaga la ecuación (11) y las condiciones de contorno inicial derivadas de (2.5.3) y (2.5.4):

$$M\ddot{a}^t + C\dot{a}^t + g(a^t) = f^t \quad (2.6.12)$$

Sujeta a:

$$\mathbf{a}(t^0) - \mathbf{a}^0 = \mathbf{0} \quad (2.6.13)$$

$$\dot{\mathbf{a}}(t^0) - \dot{\mathbf{a}}^0 = \mathbf{0} \quad (2.6.14)$$

donde  $\mathbf{f}^t$  es el vector de cargas aplicadas que puede ser función del tiempo. Además, la condición inicial para las aceleraciones  $\ddot{\mathbf{a}}(t^0)$  se conoce directamente al reemplazar (13) y (14) en (12) para  $t = t^0$ .

Se supone conocida la solución de (12) hasta un instante dado  $t$  (que al comienzo será:  $t^0$ ). Para resolver la ecuación, se plantea un algoritmo incremental paso a paso. De esta forma, el objetivo se centra en hallar la solución para el instante siguiente  $t + \Delta t$ :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} + \mathbf{g}(\mathbf{a}^{t+\Delta t}) = \mathbf{f}^{t+\Delta t} \quad (2.6.15)$$

donde  $\Delta t$  es el incremento de tiempo.

Quizás el método directo más ampliamente utilizado para resolver el sistema (12) a (14) sea el propuesto por Newmark<sup>[Ne]</sup>, que parte de las siguientes ecuaciones de extrapolación:

$$\mathbf{a}^{t+\Delta t} = \mathbf{a}^t + \Delta t \dot{\mathbf{a}}^t + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{a}}^t + 2\beta\ddot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t}] \quad (2.6.16)$$

$$\dot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{a}}^t + \Delta t [(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{a}}^t + \gamma\ddot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t}] \quad (2.6.17)$$

donde  $\beta$  y  $\gamma$  son parámetros del modelo numérico.

#### (a) Implementación en aceleraciones:

Al ser (15) en general una ecuación no-lineal, es necesario implementar un algoritmo incremental iterativo, es decir, que permita iterar hasta converger a la solución. Para esto, se pueden escribir las ecuaciones (16) y (17) en base a un incremento  $\Delta \ddot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t}$  de aceleraciones:

$$\Delta \ddot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} = \ddot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{a}}^t \quad (2.6.18)$$

$$\mathbf{a}^{t+\Delta t} = \tilde{\mathbf{d}} + \Delta t^2 \beta \Delta \ddot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} \quad (2.6.19)$$

$$\dot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} = \tilde{\mathbf{v}} + \Delta t \gamma \Delta \ddot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} \quad (2.6.20)$$

$$\ddot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} = \ddot{\mathbf{a}}^t + \Delta \ddot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} \quad (2.6.21)$$

siendo:

$$\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{a}^t + \Delta t \dot{\mathbf{a}}^t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{a}}^t \quad (2.6.22)$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{a}}^t + \Delta t \ddot{\mathbf{a}}^t \quad (2.6.23)$$

valores conocidos en el instante  $t + \Delta t$ .

Reemplazando (19), (20) y (21) en (15) se obtiene la forma en aceleraciones de la ecuación no-lineal que se debe resolver iterativamente:

$$[\mathbf{M} + \Delta t \gamma \mathbf{C}] \Delta \ddot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} + \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{d}} + \Delta t^2 \beta \Delta \ddot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t}) = \mathbf{f}^{t+\Delta t} - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}^t - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{v}} \quad (2.6.24)$$

Que simbólicamente se escribe:

$$\bar{g}(\tilde{d}, \Delta \ddot{a}^{t+\Delta t}) = \bar{f}(\tilde{v}, \ddot{a}^t) \quad (2.6.25)$$

Una vez encontrado  $\Delta \ddot{a}^{t+\Delta t}$ , por simple reemplazo en (19), (20) y (21) se encuentran  $a^{t+\Delta t}$ ,  $\dot{a}^{t+\Delta t}$  y  $\ddot{a}^{t+\Delta t}$  respectivamente.

El algoritmo de solución basado en aceleraciones es muy popular, ya que tiene la ventaja de que si se utiliza  $\beta = 0$  y matrices de masa y amortiguamiento diagonales, se obtiene un sistema de ecuaciones de resolución trivial. Por otro lado, tiene dos grandes desventajas: Primero, no se reduce a un problema estático cuando las matrices  $M$  y  $C$  son nulas. Como se verá más adelante esta es una desventaja a la hora de hacer una implementación general. Segundo, el término no-lineal  $g(\cdot)$  depende del valor  $\tilde{d}$ . De esta forma, incluso para  $\Delta \ddot{a}^{t+\Delta t} = 0$ , las variables internas de la ecuación constitutiva se ven modificadas, respecto al valor previamente convergido en  $t$ . Esto, dependiendo del predictor que se use, puede conducir a problemas de convergencia.

### (b) Implementación en desplazamientos:

Para evitar las desventajas señaladas de la implementación en aceleraciones se puede utilizar un algoritmo basado en desplazamientos. Para esto, simplemente se despeja  $\ddot{a}^{t+\Delta t}$  de (16) y se reemplaza en (17), con lo que se obtienen las siguientes ecuaciones de extrapolación:

$$\dot{a}^{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (a^{t+\Delta t} - a^t) - (\frac{\gamma}{\beta} - 1) \dot{a}^t - \Delta t (\frac{\gamma}{2\beta} - 1) \ddot{a}^t \quad (2.6.26)$$

$$\ddot{a}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (a^{t+\Delta t} - a^t) - \frac{\dot{a}^t}{\beta \Delta t} - (\frac{1}{2\beta} - 1) \ddot{a}^t \quad (2.6.27)$$

Nuevamente, estas ecuaciones se pueden escribir en base a un incremento, esta vez, de desplazamientos  $\Delta a^{t+\Delta t}$ :

$$\Delta a^{t+\Delta t} = a^{t+\Delta t} - a^t \quad (2.6.28)$$

$$a^{t+\Delta t} = a^t + \Delta a^{t+\Delta t} \quad (2.6.29)$$

$$\dot{a}^{t+\Delta t} = \tilde{v} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta a^{t+\Delta t} \quad (2.6.30)$$

$$\ddot{a}^{t+\Delta t} = \tilde{a} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta a^{t+\Delta t} \quad (2.6.31)$$

siendo:

$$\tilde{v} = -(\frac{\gamma}{\beta} - 1) \dot{a}^t - \Delta t (\frac{\gamma}{2\beta} - 1) \ddot{a}^t \quad (2.6.32)$$

$$\tilde{a} = -\frac{\dot{a}^t}{\beta \Delta t} - (\frac{1}{2\beta} - 1) \ddot{a}^t \quad (2.6.33)$$

valores conocidos en el instante  $t + \Delta t$ .

Reemplazando (29), (30) y (31) en (15) se obtiene:

$$\left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} C \right] \Delta a^{t+\Delta t} + g(a^t + \Delta a^{t+\Delta t}) = f^{t+\Delta t} - M \ddot{a} - C \ddot{v} \quad (2.6.34)$$

Que simbólicamente se escribe:

$$\bar{g}(a^t, \Delta a^{t+\Delta t}) = \bar{f}(\ddot{v}, \ddot{a}) \quad (2.6.35)$$

Este algoritmo de solución, basado en desplazamientos, aparte de reducirse a un problema estático cuando las matrices  $M$  y  $C$  son nulas, tiene la ventaja de que en el término no-lineal  $g(\cdot)$  las variables internas de la ecuación constitutiva mantienen los valores previamente convergidos  $g(a^t)$  cuando  $\Delta a^{t+\Delta t} = 0$ . Esto ayuda a evitar problemas de convergencia. Sin embargo, ya no se puede utilizar el parámetro  $\beta = 0$  para obtener un sistema de ecuaciones explícito. Esto último es una desventaja relativa pues, como es conocido, los algoritmos explícitos son condicionalmente estables requiriendo que  $\Delta t$  sea menor a un valor crítico que depende de la malla y de las propiedades del material. Por otro lado, los algoritmos implícitos suelen ser incondicionalmente estables, y por tanto permiten utilizar cualquier  $\Delta t$ , estando éste último limitado únicamente por razones de exactitud. En particular, el método de Newmark es incondicionalmente estable para  $\gamma \geq 0.5$  y  $\beta \geq (\gamma + 0.5)^2/4$ . Sin embargo, sólo para  $\gamma = 0.5$  y  $\beta = 0.25$  no presenta ningún amortiguamiento numérico inducido, por lo que se acostumbra elegir valores algo superiores a éstos, que representan el límite estricto de estabilidad, con objeto de filtrar las frecuencias espúreas altas<sup>[Ba][CaB][Hug][OH][Zie3]</sup>.

## 7. ALGORITMO PREDICTOR MULTI-CORRECTOR

En este apartado se muestra el algoritmo incremental predictor multi-corrector del método de Newton-Raphson para resolver la ecuación semi-discreta del movimiento, utilizando la extrapolación de Newmark escrita en dos formas: implícita en desplazamientos y explícita en aceleraciones. Para esto, si se define el vector de fuerzas residuales  $\Psi$  como:

$$\Psi(\Delta a^{t+\Delta t}) = \bar{f}^{t+\Delta t} - \bar{g}(\Delta a^{t+\Delta t}) = 0 \quad (2.7.1)$$

se encuentra que, según se vio en el apartado 3.3, la matriz tangente efectiva vale:

$$[\tilde{K}] = - \left[ \frac{\partial \Psi(\Delta a)}{\partial \Delta a} \right] = \left[ \frac{\partial \bar{g}}{\partial \Delta a} \right] \quad (2.7.2)$$

con lo que queda definido el algoritmo.

### 7.1. Método implícito basado en desplazamientos

La ecuación no-lineal (2.3.1.7) deducida para el caso estático es un caso particular de (2.6.35) ya que si las matrices  $M$  y  $C$  son nulas, entonces los vectores  $\bar{g}$  y  $\bar{f}$  son idénticos a  $g$  y  $f$  de dicha ecuación (2.3.1.7), respectivamente. Consecuentemente, es posible implementar un único algoritmo predictor multi-corrector que permite resolver problemas estáticos, quasi-estáticos o dinámicos, con la consiguiente ventaja computacional. El algoritmo se puede resumir en los pasos mostrados en la figura 2.7.1.1, en los que se debe tomar  $M = 0$  y  $C = 0$  si el problema es estático.

### 7.2. Método explícito basado en aceleraciones

A veces es preferible implementar un algoritmo basado en aceleraciones, para así poder utilizar  $\beta = 0$  obteniéndose un algoritmo explícito. De todas formas, en un programa general siempre convendrá disponer de ambas posibilidades, siendo interesante notar la gran similitud que tienen ambos con vistas a su implementación computacional. En la figura 2.7.2.1 se muestran los pasos de este algoritmo con  $\beta = 0$  y suponiendo que  $M$  y  $C$  son matrices diagonales.

## 8. ENSAYOS NUMÉRICOS

### 8.1. Comparación del modelo de degradación isotrópica con modelos de fisuración anisotrópica

El modelo de daño continuo isotrópico descrito en este capítulo (apartado 4.1) y cuya descripción detallada se puede encontrar en la referencia [Ga], puede representar, de una forma simple y eficiente, la característica básicas del comportamiento mecánico del hormigón: degradación (ablandamiento por deformación) bajo estados de tracción, de compresión y estados mixtos tracción-compresión.

Consideremos ahora el conjunto de modelos desarrollados por diversos investigadores ([Bo2][Ce][CHH][Oll][RNKB][Ro] entre otros) que podrían agruparse bajo la denominación genérica de *modelos anisotrópicos de fisuración distribuida*. Estos modelos han sido extensivamente utilizados en los últimos años y han constituido la herramienta básica para el análisis de estructuras de hormigón en masa y armado. En dichos modelos la ecuación constitutiva del hormigón, que inicialmente es elástica lineal e isótropa, se modifica de acuerdo con criterios específicos para tener en cuenta los efectos de la fisuración (o microfisuración) con una orientación predominante. El comportamiento del material después de la fisuración es fuertemente dependiente de la dirección de las fisuras y, por consiguiente, el modelo es típicamente

- (1) Se inicializan todas las variables y se calculan aquellas matrices que son constantes durante el proceso de cálculo:

$$t := t^0, \quad \Delta t := \Delta t^0, \quad M, \quad C.$$

- (2) Si el tiempo  $t$  ha llegado al tiempo final, entonces el análisis ha concluido.

- (3) Se calculan los vectores que son constantes durante el proceso iterativo:

$$\mathbf{f}^{t+\Delta t} := \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{b}^{t+\Delta t} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^{t+\Delta t} d\Gamma$$

- (4) Se inicializa el contador de iteraciones:  $i := 1$  y se realiza una predicción para el incremento de desplazamientos  $\Delta \mathbf{a}_{i=1}^{t+\Delta t}$ . Como ejemplo, se presentan cuatro posibles predictores:

$$(a_d) \Delta \mathbf{a}_{i=1}^{t+\Delta t} := 0$$

$$(b_d) \Delta \mathbf{a}_{i=1}^{t+\Delta t} := \Delta \mathbf{a}^t$$

$$(c_d) \Delta \mathbf{a}_{i=1}^{t+\Delta t} := \Delta t \dot{\mathbf{a}}^t + \frac{1}{2}(1 - 2\beta)\Delta t^2 \ddot{\mathbf{a}}^t, \quad \text{para que } \ddot{\mathbf{a}}_{i=1}^{t+\Delta t} = 0$$

$$(d_d) \Delta \mathbf{a}_{i=1}^{t+\Delta t} := \Delta t \dot{\mathbf{a}}^t + \frac{1}{2}\Delta t^2 \ddot{\mathbf{a}}^t, \quad \text{para que } \ddot{\mathbf{a}}_{i=1}^{t+\Delta t} = \ddot{\mathbf{a}}^t$$

- (5) Se corrigen los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones:

$$\mathbf{a}_i^{t+\Delta t} := \mathbf{a}^t + \Delta \mathbf{a}_i^{t+\Delta t}$$

$$\dot{\mathbf{a}}_i^{t+\Delta t} := \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{a}_i^{t+\Delta t} - \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{a}}^t - \Delta t \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{a}}^t$$

$$\ddot{\mathbf{a}}_i^{t+\Delta t} := \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{a}_i^{t+\Delta t} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{a}}^t - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{a}}^t$$

- (6) Se calcula el vector de fuerzas residuales:

$$\Psi_i := \mathbf{f}^{t+\Delta t} - M \dot{\mathbf{a}}_i^{t+\Delta t} - C \ddot{\mathbf{a}}_i^{t+\Delta t} - g(\mathbf{a}_i^{t+\Delta t})$$

- (7) Si la norma preestablecida del vector de fuerzas residuales es suficientemente pequeña  $\|\Psi_i\| \leq \epsilon$ , entonces se ha convergido; se actualiza el tiempo  $t := t + \Delta t$  y se continúa con el paso (2).

- (8) Si es necesario, según el algoritmo empleado, se ensambla y factoriza la matriz efectiva:

$$[\tilde{K}] := \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} C \right] + \left[ \frac{\partial g}{\partial \Delta a} \right]_{\Delta a_i^{t+\Delta t}}$$

- (9) Se actualiza el incremento de desplazamientos:

$$\Delta \mathbf{a}_{i+1}^{t+\Delta t} := \Delta \mathbf{a}_i^{t+\Delta t} + [\tilde{K}]^{-1} \Psi_i$$

- (10) Se incrementa el contador de iteraciones:  $i := i + 1$  y se continúa con el paso (5).

Figura 2.7.1.1 Método implícito basado en desplazamientos.

- (1) Se inicializan todas las variables y se calculan aquellas matrices que son constantes durante el proceso de cálculo:

$$t := t^0, \quad \Delta t := \Delta t^0, \quad M, \quad C.$$

- (2) Si el tiempo  $t$  ha llegado al tiempo final, entonces el análisis ha concluido.

- (3) Se calculan los vectores que son constantes durante el proceso iterativo:

$$\begin{aligned} f^{t+\Delta t} &:= \int_{\Omega} \rho N^T b^{t+\Delta t} d\Omega + \int_{\Gamma_t} N^T t^{t+\Delta t} d\Gamma \\ a^{t+\Delta t} &:= a^t + \Delta t \dot{a}^t + \left( \frac{\Delta t^2}{2} \right) \ddot{a}^t \\ g(a^{t+\Delta t}) &:= \int_{\Omega} B^T \sigma(a^{t+\Delta t}) d\Omega \end{aligned}$$

- (4) Se inicializa el contador de iteraciones:  $i := 1$  y se realiza una predicción para el incremento de aceleraciones  $\Delta \ddot{a}_{i=1}^{t+\Delta t}$ . Como ejemplo, se presentan cuatro posibles predictores:

$$\begin{aligned} (a_a) \Delta \ddot{a}_{i=1}^{t+\Delta t} &:= 0 \\ (b_a) \Delta \ddot{a}_{i=1}^{t+\Delta t} &:= \Delta \ddot{a}^t \\ (c_a) \Delta \ddot{a}_{i=1}^{t+\Delta t} &:= -\frac{1}{\Delta t \gamma} \dot{a}^t - \frac{1}{\gamma} \ddot{a}^t \quad \text{para que } \dot{a}_{i=1}^{t+\Delta t} = 0 \\ (d_a) \Delta \ddot{a}_{i=1}^{t+\Delta t} &:= -\frac{1}{\gamma} \ddot{a}^t \quad \text{para que } \dot{a}_{i=1}^{t+\Delta t} = \dot{a}^t \end{aligned}$$

- (5) Se corrigen las velocidades y las aceleraciones:

$$\begin{aligned} \dot{a}_i^{t+\Delta t} &:= \dot{a}^t + \Delta t \ddot{a}^t + \Delta t \gamma \Delta \ddot{a}_i^{t+\Delta t} \\ \ddot{a}_i^{t+\Delta t} &:= \ddot{a}^t + \Delta \ddot{a}_i^{t+\Delta t} \end{aligned}$$

- (6) Se calcula el vector de fuerzas residuales:

$$\Psi_i := f^{t+\Delta t} - M \ddot{a}_i^{t+\Delta t} - C \dot{a}_i^{t+\Delta t} - g(a^{t+\Delta t})$$

- (7) Si la norma preestablecida del vector de fuerzas residuales es suficientemente pequeña  $\|\Psi_i\| \leq \epsilon$ , entonces se ha convergido; se actualiza el tiempo  $t := t + \Delta t$  y se continúa con el paso (2).

- (8) Sólo la primera vez, o cuando cambia  $\Delta t$ , se ensambla e invierte la matriz diagonal efectiva:

$$[\tilde{K}] := [M + \Delta t \gamma C]$$

- (9) Se actualiza el incremento de aceleraciones:

$$\Delta \ddot{a}_{i+1}^{t+\Delta t} := \Delta \ddot{a}_i^{t+\Delta t} + [\tilde{K}]^{-1} \Psi_i$$

- (10) Se incrementa el contador de iteraciones:  $i := i + 1$  y se continúa con el paso (5).

Figura 2.7.2.1 Método explícito basado en aceleraciones.

anisotrópico. Los diversos modelos pueden rotar la dirección de fisuración a medida que la carga evoluciona o mantenerla fija, conduciendo a los denominados modelos de *fisura rotante o fisura fija*, respectivamente.

La ecuación constitutiva para los modelos de fisuración anisotrópica se establece normalmente a partir de elaborados razonamientos físicos basados en una visualización macroscópica del fenómeno de la fisuración. En consecuencia, estos modelos, si bien son capaces de representar los procesos para los que fueron diseñados, contienen ciertas inconsistencias y factores *mágicos* (por ejemplo, el controvertido *factor de retención de tensiones tangenciales* en los modelos de fisura fija, y el no menos empírico *ángulo umbral* en los modelos de fisura rotante, así como el desacoplamiento del efecto Poisson). Estos inconvenientes teóricos normalmente se ven reflejados en dificultades computacionales y en la necesidad de ajustar los parámetros empíricos para obtener respuestas correctas.

Por otra parte, la mayoría de los usuarios de dichos modelos identificarían la simulación numérica de la degradación del módulo elástico en tracción como el principal objetivo de cualquier modelo constitutivo del hormigón. Por consiguiente, parece pertinente una comparación entre el modelo de daño isotrópico desarrollado y los modelos de fisura distribuida anisotrópica utilizados previamente, con el fin de obtener conclusiones sobre su rendimiento. Un elemento esencial en tales comparaciones es la diferencia entre el comportamiento local (microscópico) y la respuesta global (macroscópica). A este respecto, la anisotropía global asociada a la fisuración localizada puede ser bien representada por modelos que son localmente isotrópicos. La fisuración es entonces interpretada como el lugar geométrico de los puntos isotrópicamente dañados<sup>[Oll]</sup>.

Con respecto a las conocidas dificultades, teóricas y computacionales, asociadas a los fenómenos de ablandamiento por deformación y localización de deformaciones<sup>[BFE][CD][CrW][OLN]</sup>, éstas son comunes a ambas familias de modelos y no serán estudiadas aquí.

El modelo isotrópico utilizado es aquél (ver referencia [Ga]) que considera únicamente la degradación a tracción. Como modelo de fisuración de comparación se ha considerado un modelo de fisuración fija desarrollado en la referencia [Ce]. Para problemas en dos dimensiones, como los presentados a continuación, dicho modelo permite la aparición de un conjunto de dos fisuras ortogonales en cada punto de integración.

### 8.1.1. Comportamiento local. Ensayo de tracción-corte

Este ejemplo está tomado de la referencia [Ro], donde fue usado para comparar el comportamiento de un modelo de *fisura fija* con el de un modelo de *fisura rotante*. Se trata de un problema de tensión plana en el que un elemento de cuatro nodos se ve sometido a un estado de deformación constante con vistas a estudiar la respuesta de la ecuación constitutiva.

En la figura 2.8.1.1.1 se presentan las características más importantes del ensayo:

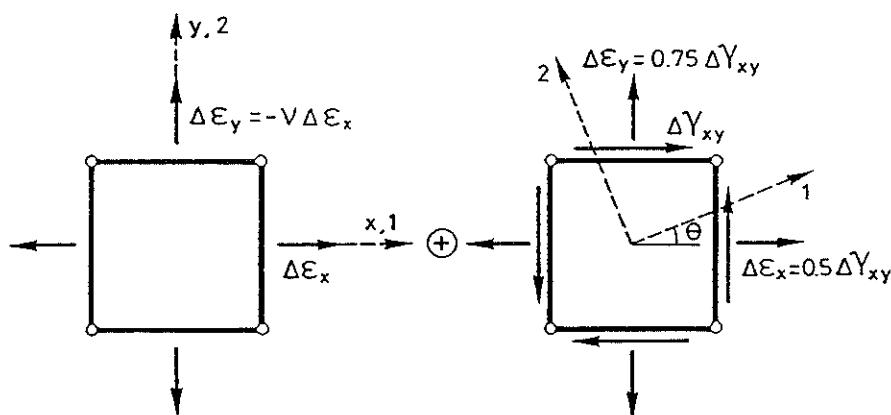


Figura 2.8.1.1.1 Características del ensayo de tracción-corte.

Las propiedades del material son las siguientes: Módulo de Young  $E = 10 \text{ [GPa]}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0.2$ , máxima resistencia a tracción  $f_t^l = 1.0 \text{ [MPa]}$ , energía de fractura  $G_f = 150 \text{ [J/m}^2]$ . La longitud característica es  $l^* = 1.0 \text{ [mm]}$ . Inicialmente se somete al elemento a un estiramiento en la dirección  $x$  junto con una contracción debida al efecto Poisson en la dirección  $y$  ( $\Delta\epsilon_{xx} : \Delta\epsilon_{yy} : \Delta\gamma_{xy} = 1 : -\nu : 0$ ). Inmediatamente después de que la máxima resistencia a tracción es alcanzada, se impone un estado combinado de tracción y deformación tangencial definido por  $\Delta\epsilon_{xx} : \Delta\epsilon_{yy} : \Delta\gamma_{xy} = 0.5 : 0.75 : 1$ . Este estado de deformación produce una rotación continua de las direcciones de deformación principal tal como se muestra en la figura 2.8.1.1.1.

En la figura 2.8.1.1.2-a se presentan las curvas  $\sigma_1 - \epsilon_1$  resultantes ( $\sigma_1$  tensión principal mayor,  $\epsilon_1$  deformación principal mayor). El modelo de daño presenta la rama de ablandamiento por deformación, tal como era esperable, mientras que el modelo de fisura fija presenta un curioso comportamiento mixto de ablandamiento-endurecimiento. La razón para ello puede encontrarse en la figura 2.8.1.1.2-b; mientras el modelo de daño es

corrotacional (es decir las direcciones de tensión principal coinciden con las direcciones de deformación principal), no ocurre así en el modelo de fisura fija. En particular, la curva obtenida para un factor de retención de tensiones tangenciales muy pequeño ( $\beta = 0.005$ ) presenta un salto brusco de casi  $90^\circ$ , que corresponde a un giro repentino de las direcciones de tensión principal. La curva  $\sigma_1 - \varepsilon_1$ , para el modelo de fisura fija, no tiene un sentido específico puesto que las direcciones principales de ambas magnitudes no coinciden. En la figura 2.8.1.1.2-c se presenta la evolución del valor aparente del factor de retención de tensiones tangenciales evaluado como  $\beta_{xy}^* = [\tau_{xy}/\gamma_{xy}]/G$  ( $G$  es el módulo de deformación transversal  $G = E/2(1 + \nu)$ ). Puede observarse la progresiva disminución de dicho factor que se obtiene con el modelo de daño. Nótese también que, para el modelo de fisura fija,  $\beta_{xy}^* \neq \beta$  a causa de haber despreciado el valor del coeficiente de Poisson después de la fisuración ( $\beta_{xy}^* = \beta(1 + \nu)$ ). En la figura 2.8.1.1.2-d se presenta la evolución del factor de retención de tensiones tangenciales, evaluándolo ahora como  $\beta_{12}^* = [(\sigma_1 - \sigma_2)/2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)]/G$ . El modelo de daño presenta el mismo comportamiento que en la figura 2.8.1.1.2-c (isotropía), mientras que el modelo de fisura fija se comporta bastante extrañamente a causa de la no coaxialidad ya mencionada. Es interesante mencionar que el comportamiento anómalo del modelo de fisuración fija puede evitarse, en gran parte, si se permite el giro de las fisuras forzando entonces la coaxialidad<sup>[Ro]</sup>. Sin embargo, todavía permanecen algunos problemas sin resolver, como por ejemplo, los valores negativos obtenidos para el módulo de deformación por cortante. Por el contrario, el modelo de daño continuo desarrollado aquí no presenta ninguna de las mencionadas inconsistencias.

### 8.1.2. Comportamiento global. Ensayo de fractura en Modo I.

En la figura 2.8.1.2.1 se presentan las características del segundo problema considerado: una probeta de hormigón entallada sometida a la acción de un par de fuerzas autoequilibradas que tienden a abrir la entalla. La propagación de la fractura se produce en un Modo I puro, mediante la aparición de una fisura vertical. Los objetivos del análisis numérico son: (a) poner de manifiesto que un modelo localmente isotrópico es capaz de reproducir el comportamiento anisotrópico asociado a la fisuración; (b) analizar la influencia de la orientación de la malla en la dirección de propagación de la fractura; y (c), comparar la calidad de los resultados obtenidos usando el modelo de daño y el modelo de fisura fija.

Las propiedades del material consideradas son:  $E = 30 [GPa]$ ;  $\nu = 0.2$ ;  $f'_t = 3.0 [MPa]$ ;  $G_f = 70 [J/m^2]$ . La longitud característica  $l^*$ , se calcula aproximadamente como la raíz cuadrada del área de cada elemento. El espesor de la probeta es de  $50.8 [mm]$ . Los elementos utilizados son elementos triangulares de tres nodos con un punto de integración por elemento. En

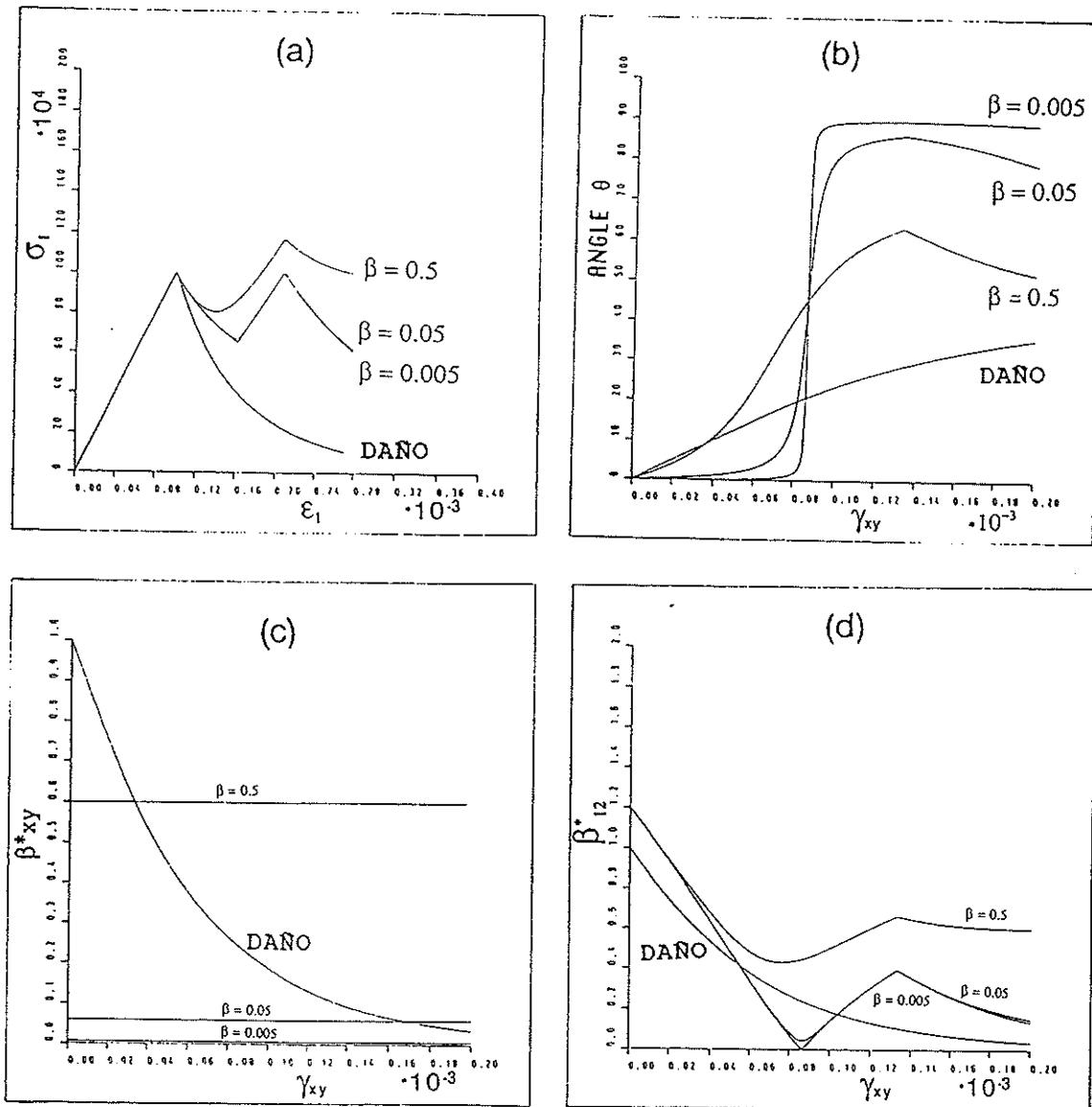


Figura 2.8.1.1.2 Resultados del ensayo de tracción-corte.

la figura 2.8.1.2.2 se presentan dos mallas diferentes de elementos finitos utilizadas en el análisis. Dichas mallas son no estructuradas<sup>[Bu]</sup>, aunque se han introducido un par de líneas paralelas con pendientes  $\alpha = 0^\circ$  y  $\alpha = 30^\circ$ , respectivamente. El objetivo de estas bandas de elementos es proporcionar un camino de propagación natural de la fisuración contra el cual el modelo debe luchar para proporcionar el correcto modo de propagación vertical.

En la parte inferior de la figura 2.8.1.2.2, se presentan también las deformadas de la malla obtenidas con el modelo de daño isotrópico al final del análisis, en las que puede verse la correspondiente zona de localización en

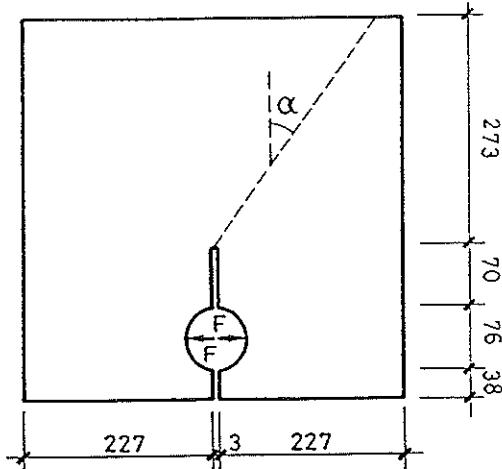


Figura 2.8.1.2.1 Características del ensayo de fractura en Modo I.

una banda de elementos. Para ángulos de desviación de la malla inferiores a  $20^\circ$  la fisura sigue la banda de elementos predefinida. Por el contrario, para ángulos de desviación superiores, la solución es capaz de zigzaguear a lo largo de la malla tratando de conseguir la dirección de fisuración correcta. La experimentación numérica parece indicar una capacidad limitada del modelo para propagar la fractura, sin seguir necesariamente las líneas de la malla. En la referencia [Ro] se presentan resultados similares pero para mallas estructuradas.

En la figura 2.8.1.2.3 se presenta la distribución de tensiones principales para los casos  $\alpha = 0^\circ$  y  $\alpha = 30^\circ$ , utilizando el modelo de daño (figuras 2.8.1.2.3-a y 2.8.1.2.3-b) y el modelo de fisura fija (figura 2.8.1.2.3-c y 2.8.1.2.3-d). Puede observarse como el modelo de daño presenta una total relajación de las tensiones en el interior de los elementos de la banda de localización. Los elementos contiguos a dicha banda presentan un estado de tensión correcta, con la tensión principal  $\sigma_1$  paralela a la banda y valores nulos de la tensión  $\sigma_2$ . Por otra parte, el modelo de fisura fija muestra una distribución de tensiones principales caótica, debido al fenómeno bien conocido de *bloqueo de tensiones* producido por dicho tipo de modelos<sup>[Ro]</sup>.

## 8.2. Comportamiento dinámico. Transmisión de ondas

En los ensayos anteriores se presentaron ejemplos en los que las cargas actúan muy lentamente y, por esto, las fuerzas de inercia son despreciables. Ante cargas de corta duración, esta simplificación no es válida y se deben tener en cuenta las extensiones presentadas en el apartado 5. En este apartado se presenta un ejemplo que tiene el propósito de estudiar el comportamiento de un sólido como un medio transmisor de ondas. Para esto, se ha utilizado una barra de hormigón de 100 metros de longitud con

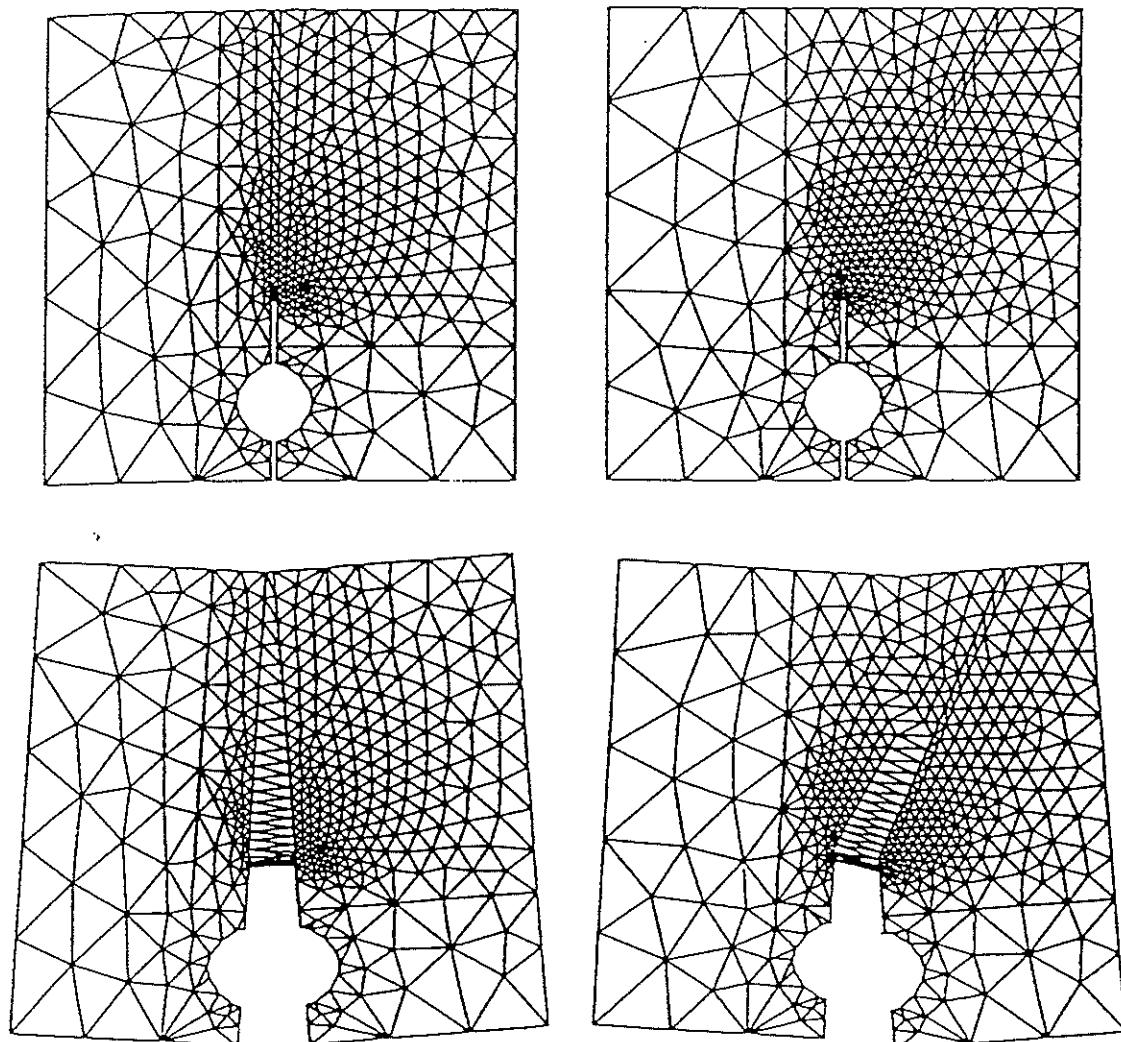


Figura 2.8.1.2.2 Resultado del ensayo de fractura. Modelo de degradación.

una sección cuadrada de 1 metro por un metro. La barra se idealiza sujetada solamente por el extremo izquierdo.

En la figura 2.8.3.1 se presenta la discretización de la barra empleada consistente en 100 elementos finitos de cuatro nodos en deformación plana de un metro de ancho, un metro de longitud y un metro de espesor.

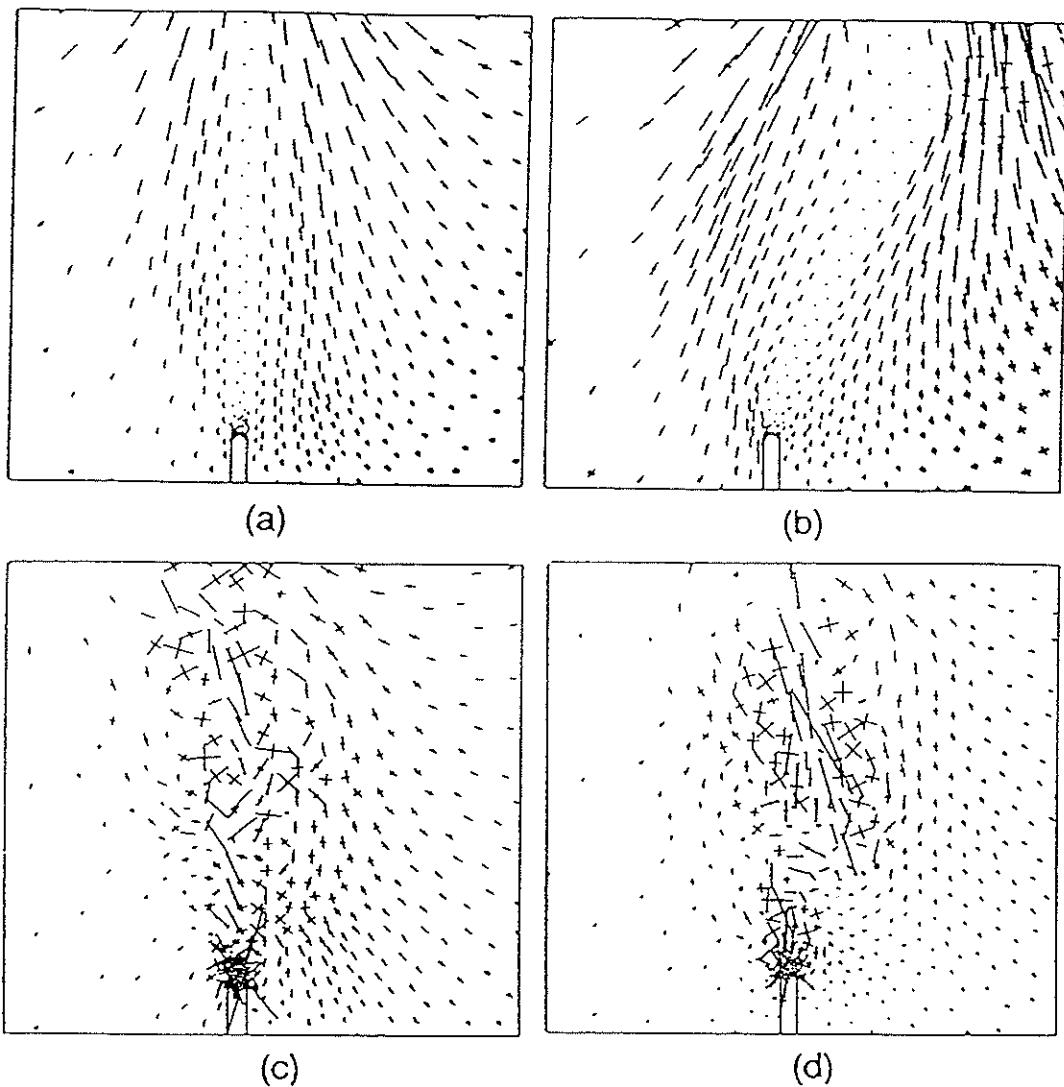


Figura 2.8.1.2.3 Resultados del ensayo de fractura. Comparación entre los modelos de fisura fija y de degradación.

El material empleado tiene un módulo de Young  $E$  de  $25[GPa]$ , un coeficiente de Poisson  $\nu$  de  $0.2$  y una densidad  $\rho$  de  $2500[Kg/m^3]$ . Como se verá en el Capítulo IV (ecuación 4.3.4.12), la velocidad de una onda de presión  $c$  en un sólido es:

$$c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1 - \nu)}{\rho(1 + \nu)(1 - 2\nu)}}$$

que en este caso vale:  $c = 3333.333[m/s]$ .

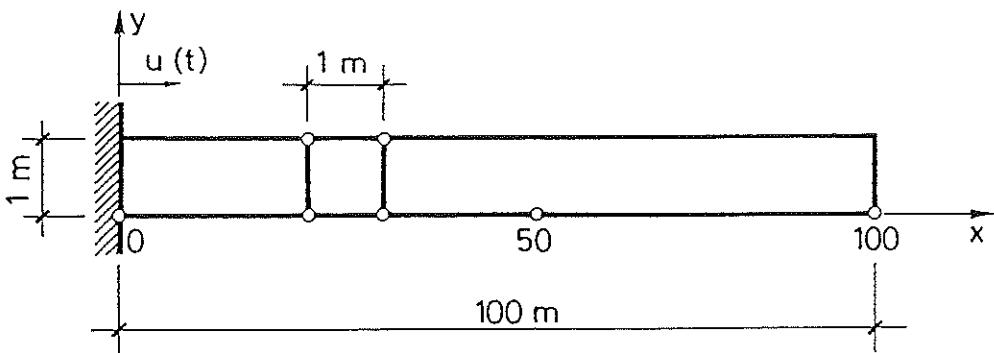


Figura 2.8.3.1 Características del ensayo de transmisión de ondas.

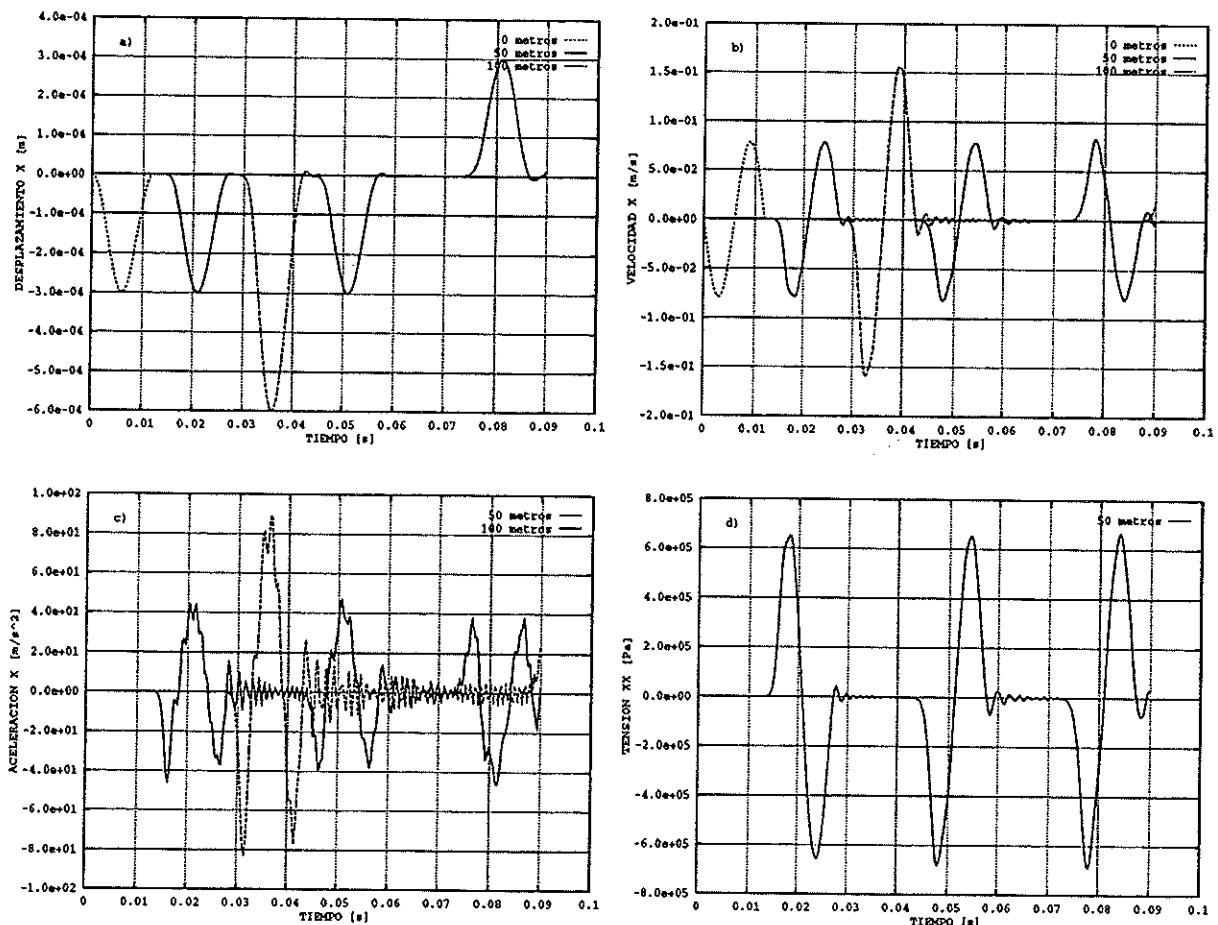


Figura 2.8.3.2 Ondas resultantes para ( $\gamma = 0.5, \beta = 0.25$ ).

- a) Desplazamientos,
- b) Velocidades,
- c) Aceleraciones y d) Tensiones.

El ensayo consiste en imponer a la izquierda de la barra ( $x = 0[m]$ ) un desplazamiento forzado dado por:

$$u_x(t) = \begin{cases} -1.5 * 10^{-3}(1 + \sin(2\pi t/0.012 - \pi/2))[m] & \text{para } 0 \leq t \leq 0.012[s] \\ 0 & \text{para } 0.012[s] < t \end{cases}$$

Este desplazamiento impuesto produce una onda de periodo  $0.012[s]$  y amplitud  $0.003[m/s]$  en desplazamiento  $x$  con una tracción máxima de aproximadamente  $\sigma_{xx} = 0.65[MPa]$  que viaja de izquierda a derecha a una velocidad de  $3333.333[m]$ . La onda se refleja al alcanzar el extremo final derecho, retornando otra vez hasta el extremo izquierdo donde vuelve a reflejarse en una serie indefinida.

En la figura 2.8.3.2 se presentan a) los desplazamientos, b) las velocidades, c) las aceleraciones y d) las tensiones en función del tiempo calculadas en  $x = 0[m]$ ,  $x = 50[m]$  y  $x = 100[m]$  de la barra utilizando el método de Newmark con  $\gamma = 0.5$  y  $\beta = 0.25$ . Algunos puntos que se deben hacer notar son:

- a) La curva de desplazamientos no sufre ningún amortiguamiento y, las ondas espúreas que se producen en la cola de la onda principal son casi despreciables. Cuando la onda en desplazamiento se refleja en un borde libre (derecha) no se invierte, pero si lo hace en un borde restringido (izquierda). Finalmente, se aprecia que los desplazamientos medidos en un borde libre  $x = 100[m]$  son el doble de los desplazamiento medidos en el interior del medio.
- b) La curva de velocidades tampoco sufre amortiguamiento aunque las ondas espúreas que se producen en la cola de la onda principal son algo más importantes. Cuando la onda en velocidades se refleja en un borde libre sí se invierte y no lo hace en un borde coartado. Nuevamente, las velocidades medidas en un borde libre son el doble de las medidas en el interior del dominio.
- c) En las curvas de aceleraciones, inmediatamente se observa la presencia de ondas espúreas de alta frecuencia. Las ondas en aceleraciones sufren ligeras modificaciones durante el tiempo. Se puede observar que estas ondas no se invierten al reflejarse en un borde libre pero sí lo hacen en un borde coartado. También la aceleración medida en un borde libre es el doble de la que se mide en el interior del dominio.
- d) Finalmente se puede ver que la onda de tensión tampoco presenta amortiguamiento para estas constantes de Newmark. Las ondas espúreas son pequeñas aunque sería deseable filtrarlas. Finalmente,

se debe indicar<sup>†</sup> que esta onda al reflejarse en un borde libre se invierte y no lo hace en un borde coartado.

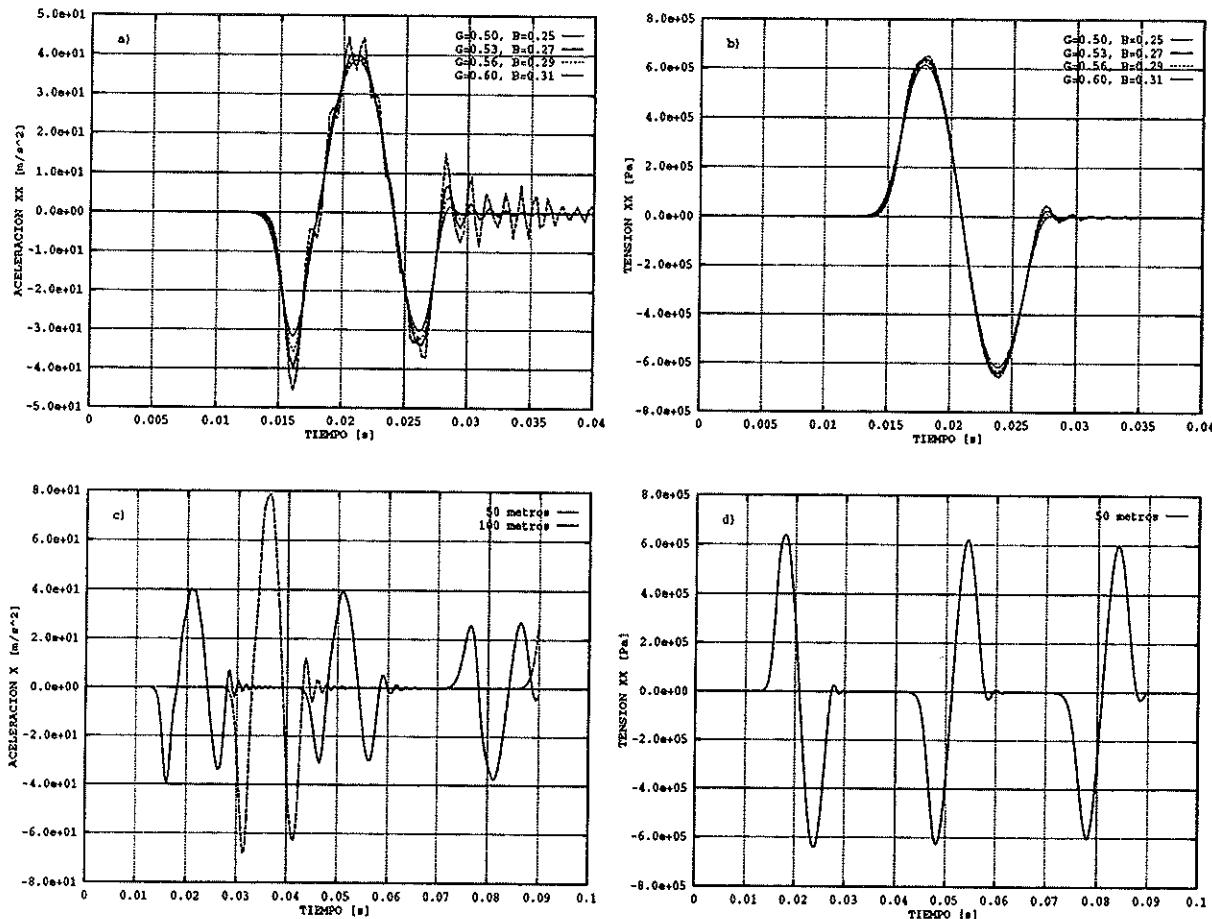


Figura 2.8.3.3 Influencia de las constantes del método de Newmark.

- a) Comparación en aceleraciones, b) Comparación en tensiones, c) Aceleraciones para  $\gamma = 0.53, \beta = 0.27$
- y d) Tensiones para  $\gamma = 0.53, \beta = 0.27$ .

Con objeto de filtrar la ondas espúreas de alta frecuencia, utilizando el método de Newmark, normalmente se usan valores algo superiores a los estrictamente dados por el límite de estabilidad<sup>[Ne][Hu][Zie3]</sup>  $\gamma = 0.5$  y  $\beta = 0.25$ . En la figura 2.8.3.3 se presenta la comparación de las ondas de aceleraciones y tensiones para distintos valores de los parámetros  $\gamma$  y  $\beta$ . Es interesante notar como con un ligero incremento de estas constantes  $\gamma = 0.53$  y  $\beta = 0.27$

<sup>†</sup> Para que se puedan observar claramente la ondas espúreas, en la figura 2.9.3.2-d sólo se ha representado la onda de tensión correspondiente a  $x = 50[m]$ .

se consigue filtrar, a valores admisibles, las ondas espúreas de alta frecuencia. En aceleraciones, que es donde más se observa la presencia de ondas espúreas, éstas casi desaparecen (comparar figuras 2.8.3.3-c y 2.8.3.2-c). Por último, se puede observar que para estos valores el amortiguamiento numérico en presiones es casi despreciable (comparar figuras 2.8.3.3-d y 2.8.3.2-d).

## 9. CONSIDERACIONES FINALES

La principal conclusión de este capítulo es que el modelo de daño isotrópico presentado reúne interesantes características con vistas a su utilización en la simulación numérica de procesos de fisuración en el hormigón. Por una parte, la simplicidad de la formulación y el hecho de que la integración de la ecuación constitutiva sea totalmente cerrada lo hacen especialmente conveniente para cálculos a gran escala como los realizados en presas de hormigón. Por otra parte, el modelo está firmemente fundamentado en la teoría de ecuaciones constitutivas, y no presenta factores empíricos propios de otro tipo de modelos con una interpretación física complicada.

A modo de resumen se puede indicar que el modelo de ecuación constitutiva de daño continuo propuesto posee las siguientes características:

- Modela adecuadamente aquellos aspectos fundamentales del comportamiento del hormigón que se consideran relevantes en un análisis dinámico.
- Tiene una formulación simple y consistente dentro de la Teoría General de Ecuaciones Constitutivas.
- Es sencillo de implementar en un esquema estándar de análisis por elementos finitos.
- Su evaluación y su integración en el tiempo es directa, lo cual lo hace especialmente indicado para problemas de gran volumen de cálculo.

Finalmente se ha presentado el conocido método de integración de Newmark en dos formas: implícito en desplazamientos y explícito en aceleraciones. Como resulta evidente del apartado 7, se pueden implementar fácilmente ambos algoritmos en un mismo programa de elementos finitos. Así, cada problema podrá ser abordado con la mejor estrategia de acuerdo a sus características propias.



## CAPÍTULO III

# ANÁLISIS DEL FLUIDO

### 1. INTRODUCCIÓN

El principal objetivo de este capítulo es presentar la teoría necesaria para la solución de un dominio fluido independiente de otros dominios. El análisis de un dominio fluido será necesario cuando se quiera abordar el problema acoplado de interacción fluido-estructura. Sin embargo, en dicho problema de interacción nuestro interés estará centrado en la respuesta de la estructura. Consecuentemente, todos los fenómenos que pueden presentarse en el fluido pero que no afecten de forma directa a la estructura serán susceptibles de ser simplificados.

### 2. HIPÓTESIS INICIALES

En las ecuaciones básicas que gobiernan el comportamiento de los fluidos, para modelar el comportamiento del agua de un embalse, se pueden admitir las siguientes hipótesis:

- La compresibilidad del fluido es importante, aunque sus valores son pequeños.
- Las velocidades y los desplazamientos del fluido son pequeños.
- El fluido es no viscoso.
- El flujo es barotrópico e irrotacional.

Todas estas hipótesis permiten hacer las siguientes simplificaciones iniciales:

- (1) Al ser pequeñas las velocidades se pueden omitir los términos convectivos de las ecuaciones correspondientes.
- (2) Al ser pequeños los desplazamientos, las formulaciones Material y Espacial coinciden, por lo que las derivadas con respecto al tiempo se denotarán simplemente con un punto sobre la variable correspondiente ( $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}$ ).

- (3) Al ser el fluido no viscoso, en la ecuación constitutiva se anularán las tensiones de corte, quedando así dicha ecuación sólo en función de las deformaciones volumétricas.
- (4) Al ser pequeñas las variaciones de volumen, lo son también las variaciones de la densidad por lo que en los términos de peso propio o de inercia se utilizará directamente la densidad inicial dada por ( $\rho = \rho_0 + d\rho \simeq \rho_0$ ).
- (5) Al ser un flujo barotrópico<sup>[Mal]</sup>, la ecuación cinética de estado no dependerá de la temperatura.

Finalmente, se admite un estado de referencia inicial para el fluido con densidad  $\rho_0$ , presión nula  $P_0 = 0$ , temperatura  $T_0$  (que se mantendrá constante), velocidad nula  $v_0 = 0$  y desplazamientos nulos  $u_0 = 0$ . A partir de dicho estado se calculará la diferencia de presiones, para cada punto del fluido, debidas a las cargas de peso propio, excitación sísmica e interacción con la estructura.

### 3. ECUACIONES DE CONSERVACIÓN

En este apartado se introducen las ecuaciones generales de conservación<sup>[Mal]</sup> de los Medios Continuos de acuerdo a las hipótesis y simplificaciones admitidas en el apartado anterior.

#### 3.1. Ecuación de continuidad

Considerando un cierto volumen de control, el principio de conservación de la masa se expresa<sup>[Mal]</sup> como:

$$\dot{\rho} + \rho_0 \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.3.1.1)$$

en la que  $\mathbf{u}$  es el desplazamiento del fluido,  $\rho$  es la densidad en cada instante de tiempo y  $\rho_0$  es la densidad inicial.

#### 3.2. Ecuación del movimiento

Utilizando el principio de la conservación del movimiento se obtiene la primera ley de Cauchy (ver ecuación 2.2.8) dada por:

$$\nabla \cdot \sigma + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.3.2.1)$$

donde  $\sigma$  es el tensor de tensiones y  $\mathbf{b}$  son las fuerzas por unidad de masa. Sin embargo, en esta ecuación se debe distinguir el hecho de que dichas fuerzas por unidad de masa ( $\mathbf{b}$ ), en el problema de interacción fluido-presa se reducen al peso propio, por lo que deben aplicarse en forma quasi-estática.

Consecuentemente, en la ecuación (1) y para el análisis dinámico, se debe prescindir de dichas fuerzas:

$$\nabla \cdot \sigma = \rho_0 \ddot{u} \quad (3.3.2.2)$$

ya que éstas serán tratadas por separado (ver apartado 7).

## 4. FORMULACIÓN EN PRESIONES

Existen diversas alternativas posibles para abordar el problema descrito. Aunque en el apartado 9 se hace referencia a otras formulaciones posibles, en este trabajo se ha elegido la formulación en presiones, ya que parece ser la más adecuada al problema de interacción presa-embalse. La idea fundamental es escribir el tensor de tensiones únicamente en función de las presiones y, a través de la ecuación constitutiva, reemplazar el vector de desplazamientos por esta única variable escalar. Así se consigue disminuir el número de incógnitas al reemplazar las tres componentes del desplazamiento por una única variable de presión.

### 4.1. Ecuación constitutiva

La ecuación constitutiva expresa las tensiones en función de las deformaciones  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ . En ausencia de viscosidad en un flujo barotrópico, las tensiones vienen expresadas<sup>[Mal][LL]</sup> por:

$$\sigma = K \varepsilon_v \mathbf{I} \quad (3.4.1.1)$$

siendo  $\mathbf{I}$  el tensor identidad,  $K$  el módulo de deformación volumétrica y  $\varepsilon_v$  la deformación volumétrica dada por:

$$\nabla \cdot u = \varepsilon_v = -\frac{P}{K} \quad (3.4.1.2)$$

donde  $P$  es la presión del fluido. Reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\sigma = -P \mathbf{I} \quad (3.4.1.3)$$

que es el tensor de tensiones escrito en función de una única variable escalar de presión  $P$ .

#### 4.2. Ecuación de onda

La ecuaciones (3.3.2.2) y (3.4.1.2) definen completamente el comportamiento del fluido, por lo que se pueden simplificar para reducirlas a una única ecuación. Para esto, si se reemplaza la expresión (3.4.1.3) en (3.3.2.2) se obtiene la ecuación dinámica del fluido (que de hecho es una forma simplificada de la ecuación más general de Navier-Stokes<sup>[LL]</sup>):

$$\nabla P = -\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.4.2.1)$$

Al aplicar el operador divergencia ( $\nabla$ ) a ambos lados de la expresión anterior resulta:

$$\nabla^2 P = -\rho_0 \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.4.2.2)$$

donde el operador diferencial  $\nabla^2$  vale:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{x^2} + \frac{\partial^2}{y^2} + \frac{\partial^2}{z^2} \quad (3.4.2.3)$$

Por otro lado, derivando dos veces con respecto al tiempo la ecuación (3.4.1.2) se obtiene:

$$\nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} = -\frac{\ddot{P}}{K} \quad (3.4.2.4)$$

expresión que al ser reemplazada en (2) resulta en:

$$\nabla^2 P - \frac{\rho_0}{K} \ddot{P} = 0 \quad (3.4.2.5)$$

Definiendo la constante  $c = \sqrt{K/\rho_0}$ , la ecuación (5) se puede reescribir como:

$$\nabla^2 P - \frac{1}{c^2} \ddot{P} = 0 \quad (3.4.2.6)$$

que es la ecuación diferencial que gobierna el problema en función de las presiones. Esta ecuación diferencial es la conocida ecuación de onda<sup>[LL]</sup> en la que la constante  $c$  se interpreta como la velocidad de las ondas de presión en el medio.

### 4.3. Ecuación cinética de estado

La ecuación cinética de estado relaciona las variables termodinámicas: presión, temperatura y densidad. Sin embargo, al definir la ecuación constitutiva (3.4.1.2) no se ha incluido ningún término de temperatura, por lo que el proceso es barotrópico y esto hace que la ecuación cinética de estado deba ser independiente de la temperatura. Consecuentemente, la ecuación de estado deberá ser de la forma:

$$\rho = f(P, T) = f(P) \quad (3.4.3.1)$$

Para deducir dicha relación simplemente se debe derivar con respecto al tiempo la ecuación (3.4.1.2) y se obtiene:

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = -\frac{\dot{P}}{K} \quad (3.4.3.2)$$

que reemplazada en la ecuación del principio de conservación de la masa (3.3.1.1) da:

$$\dot{\rho} = \rho_0 \frac{\dot{P}}{K} \quad (3.4.3.3)$$

Integrando esta expresión se obtiene:

$$\rho = \frac{\rho_0}{K} P + \rho_0 = \rho_0 \left(1 + \frac{P}{K}\right) \quad (3.4.3.4)$$

que es la relación buscada entre la densidad y la presión.

La ecuación (3) muestra que el incremento de densidad  $d\rho$ , respecto al estado hidrostático dado por el peso propio, es igual al incremento de presión hidrodinámico  $dP$  multiplicado por la constante  $\rho_0/K$ . En el Capítulo VII se puede observar que para una presa de 100[m] de altura, la presión en el fondo del embalse —que vale 1000[KPa]—, ante la excitación de un sismo (lo suficientemente intenso como para provocar el colapso de la presa) puede oscilar entre 550[KPa] y 1350[KPa] (ver figura 7.5.2.2). Consecuentemente y como un orden de magnitud, se puede aceptar que el incremento de presión  $dP$  en un problema de interacción presa-embalse puede llegar a valer unos 1000[KPa]. Si se tiene en cuenta, además, que la densidad inicial del agua vale  $\rho_0 = 1000[Kg/m^3]$  y el módulo de deformación volumétrica aproximadamente vale  $K = 2*10^6[KPa]$ , se puede concluir que el incremento de densidad hidrodinámica  $d\rho$  puede ser de  $0.5[Kg/m^3]$  (del orden del 0.05% de  $\rho_0$ ). El presente análisis permite constatar que la hipótesis inicial de suponer pequeñas las variaciones de la densidad, en los términos de peso propio o de inercia es, desde todo punto de vista práctico, adecuado para el problema de interacción presa-embalse.

## 5. ECUACIÓN INTEGRAL

Para resolver la ecuación diferencial (3.4.2.6) por el método de los elementos finitos, primero es necesario obtener una ecuación integral equivalente. Si se utiliza el método de los residuos ponderados de acuerdo con el procedimiento estándar de Galerkin se tiene:

$$\int_{\Omega} \hat{N}^T \left[ \nabla^2 P - \frac{1}{c^2} \ddot{P} \right] d\Omega = 0 \quad (3.5.1)$$

o bien:

$$\int_{\Omega} \hat{N}^T \nabla^2 P d\Omega - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \hat{N}^T \ddot{P} d\Omega = 0 \quad (3.5.2)$$

siendo  $\Omega$  el dominio y  $\hat{N}$  la matriz de residuos coincidente con la matriz de funciones de base.

El primer término de (2) se puede escribir como:

$$\int_{\Omega} \hat{N}^T \nabla^2 P d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\hat{N}^T \nabla P) d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \hat{N}^T) \cdot (\nabla P) d\Omega \quad (3.5.3)$$

y aplicando el teorema de la divergencia se obtiene:

$$\int_{\Omega} \hat{N}^T \nabla^2 P d\Omega = \int_{\Gamma} \hat{N}^T (\nabla P \cdot n) d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla \hat{N}^T) \cdot (\nabla P) d\Omega \quad (3.5.4)$$

siendo  $n$  un vector unitario normal al contorno  $\Gamma$  y saliente del dominio  $\Omega$  (ver figura 3.5.1).

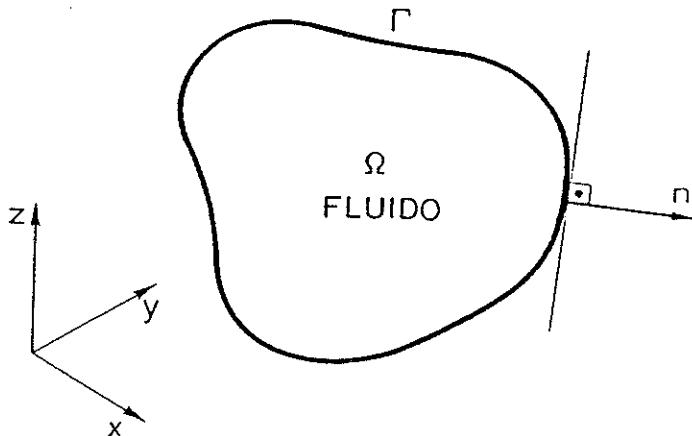


Figura 3.5.1 Dominio de referencia en el espacio.

Reemplazando la ecuación (4) en (2) se obtiene finalmente la ecuación integral buscada:

$$\int_{\Gamma} \hat{N}^T (\nabla P \cdot n) d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla \hat{N}^T) \cdot (\nabla P) d\Omega - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \hat{N}^T \ddot{P} d\Omega = 0 \quad (3.5.5)$$

## 6. CONDICIONES DE CONTORNO

Todos los términos de (3.5.5) están definidos en el interior del dominio  $\Omega$  a excepción del término:

$$\int_{\Gamma} \hat{\mathbf{N}}^T (\nabla P \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (3.6.1)$$

que debe ser analizado para cada una de las partes del contorno que limitan al fluido  $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_l + \Gamma_{tr}$  (ver figura 3.6.1). Como es bien sabido, en dichos contornos se deben especificar ya sea el gradiente  $\nabla P$  (condición de Newman) o el valor de  $P$  (condición de Dirichlet).

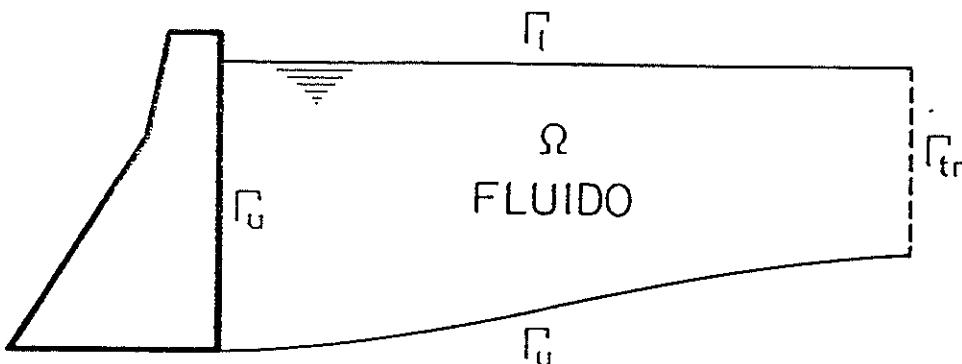


Figura 3.6.1 Condiciones de contorno en el fluido.

### 6.1. Superficie libre $\Gamma_l$

Desde el punto de vista de la formulación Material –en la que las coordenadas  $\mathbf{x}$  se refieren a las partículas–, la condición de superficie libre simplemente se reduce a imponer directamente la presión atmosférica (normalmente cero) en este contorno.

$$P(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_l \quad (3.6.1.1)$$

Por otro lado, en la formulación Espacial –en la que se supone un volumen de control–, debido al desplazamiento del fluido aparecen pequeñas ondas superficiales que generan una variación de la presión en los puntos del contorno de dicho volumen de control dada por:

$$P = \rho_0 g \eta \quad (3.6.1.2)$$

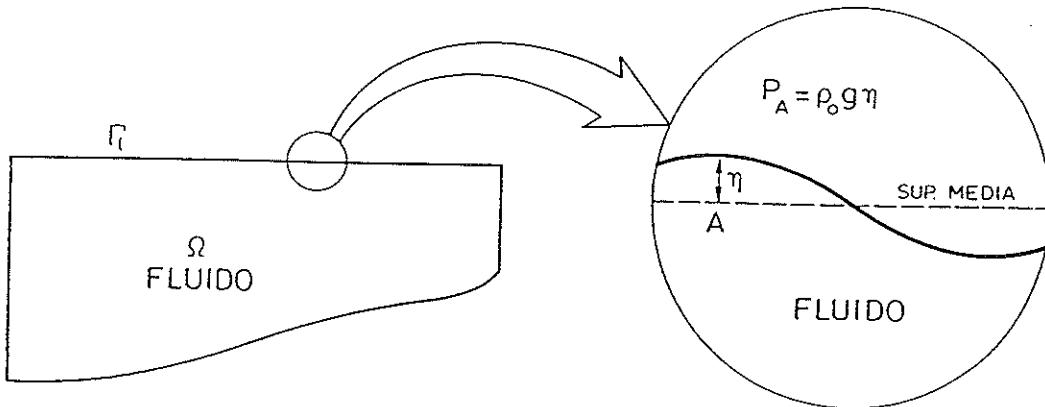


Figura 3.6.1.1 Ondas en la superficie libre.

siendo  $g$  la aceleración de la gravedad y  $\eta$  la elevación de la onda sobre la superficie media (ver figura 3.6.1.1).

De acuerdo con la ecuación (3.4.2.1) y notando que  $\tilde{u}_z = \tilde{\eta}$  se tiene que:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho_0 \tilde{\eta} \quad (3.6.1.3)$$

Reemplazando (2) en (3) para eliminar  $\eta$ , la condición de superficie libre se reduce a:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{1}{g} \tilde{P} \quad (3.6.1.4)$$

que, para ser impuesta directamente en el término dado por (3.6.1), se puede escribir como:

$$\nabla P \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{g} \tilde{P} \quad (3.6.1.5)$$

siendo  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$  el vector unitario normal a la superficie libre.

Sin embargo, como ya se ha dicho en este problema ambas formulaciones (Material y Espacial) están muy próximas a coincidir, ya que la altura  $\eta$  de las ondas de superficie es muy pequeña<sup>†</sup>. Consecuentemente y sobre todo desde el punto de vista de la interacción fluido-estructura<sup>[Pa]</sup>, es indiferente utilizar cualquiera de las dos alternativas.

<sup>†</sup> No confundir estas ondas con las olas en la superficie. Las ondas aquí descritas son de pequeña amplitud y se mueven a la velocidad del sonido. Para tener en cuenta las olas en la superficie sería necesario utilizar una formulación que considerara grandes desplazamientos del contorno [Hue], lo que desde todo punto de vista práctico es innecesario en el presente trabajo.

## 6.2. Contorno móvil $\Gamma_u$

En este tipo de contorno se agrupan el contorno que está en contacto con la presa y aquél que está en contacto con el terreno en el fondo del embalse. Debido a que el fluido es no viscoso, cualquier movimiento tangencial relativo entre el fluido y el contorno se produce sin restricción alguna. Sin embargo, la condición de impenetrabilidad de dicho contorno establece que los desplazamientos (y por tanto las velocidades y aceleraciones) normales al mismo deben ser idénticos para el fluido y el contorno móvil. Consecuentemente, en este contorno  $\Gamma_u$  se tiene que la aceleración del fluido normal al contorno  $a_n$  (positiva cuando el desplazamiento es en la dirección saliente del dominio) debe valer:

$$a_n = \dot{v} \cdot n = \ddot{u} \cdot n \quad (3.6.2.1)$$

donde  $v$  es la velocidad del fluido,  $u$  es el desplazamiento del contorno y  $n$  es el vector unitario normal al contorno y saliente del dominio.

Teniendo en cuenta la ecuación (3.4.2.1), esta condición de contorno móvil se puede escribir como:

$$\nabla P \cdot n = -\rho_0 \ddot{u} \cdot n \quad (3.6.2.2)$$

expresión que se puede imponer directamente en el término dado por (3.6.1).

## 6.3. Contorno transparente $\Gamma_{tr}$

Existen algunos problemas en el que el interés está centrado en el comportamiento de una pequeña zona del fluido total. Tal es el caso de la interacción fluido-presa, en el cual es prácticamente imposible realizar la discretización de todo el embalse debido al gran número de elementos finitos que ello implicaría. Por ello, una aproximación comúnmente usada consiste en discretizar sólo una pequeña zona del embalse suponiendo que el resto del fluido se extiende hasta el infinito. Para esto es necesario crear un contorno artificial que sea transparente a la propagación de ondas sonoras permitiendo que éstas se irradién hacia el exterior, en la misma forma que lo harían si se hubiera discretizado el resto del fluido.

El tratamiento detallado de este tipo de contornos incluyendo la imposición de una onda entrante dada, se describe en el Capítulo IV (apartado 3), tanto para el fluido como para el sólido. Por completitud y sin mayor deducción se presenta aquí la condición que se debe imponer en estos contornos (ver ecuación 4.3.3.3):

$$\nabla P \cdot n = -\frac{1}{c} \dot{P} \quad (3.6.3.1)$$

donde  $c$  es la velocidad del sonido en el fluido. Nótese que este término también puede ser incluido directamente en (3.6.1).

## 7. ESTADO HIDROSTÁTICO

El estado de referencia inicial (ver apartado 2) presupone un fluido sobre el que no actúa el peso propio ni existen perturbaciones exteriores, por lo que las presiones en todas partes del fluido son nulas. A consecuencia de esto, en un análisis de interacción fluido-presa, deberán existir dos fases: una primera quasi-estática en la que, a partir de este estado de referencia, se apliquen las cargas de peso propio; seguida de una segunda fase dinámica en la que, ya con las presiones debidas al peso propio, se aplica la excitación sísmica o cualquier otro tipo de carga dinámica.

Por ello, para calcular las presiones que originan las fuerzas de peso propio primero se supone un estado quasi-estático en que el término de inercia  $\rho_0 \ddot{\mathbf{u}}$  de la ecuación (3.3.2.1) es nulo, con lo que dicha ecuación del movimiento se reduce a:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{b} = 0 \quad (3.7.1)$$

Si en esta ecuación se reemplaza  $\boldsymbol{\sigma} = -P \mathbf{I}$  según (3.4.1.3) se obtiene:

$$\nabla P = \rho_0 \mathbf{b} \quad (3.7.2)$$

Si ahora se reemplaza  $\mathbf{b}$  por  $(0, 0, -g)$ , siendo  $g$  la aceleración de la gravedad, esta ecuación (2) se puede escribir como:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho_0 g \quad (3.7.3)$$

cuya solución es:

$$P = \rho_0 g(h - z) \quad (3.7.4)$$

en la que  $h$  es la altura total de la columna de fluido y se ha impuesto que la presión sea nula  $P = 0$  en  $z = h$ .

En estas condiciones, también se puede calcular la densidad inicial del fluido (antes de aplicar cualquier carga dinámica) para cada punto del dominio como (ver ecuación 3.4.3.4):

$$\rho = \rho_0 \left[ 1 + \frac{\rho_0 g(h - z)}{K} \right] \quad (3.7.5)$$

Sin embargo, y de acuerdo a un análisis de orden de magnitud, similar al presentado en el apartado 4.3, se puede concluir que, desde un punto de vista práctico, es posible suponer que la densidad inicial es constante en todo el embalse.

Por todo ello, la ecuación (4) es suficiente para describir completamente el estado hidrostático del agua en un embalse que, en el cálculo numérico, es necesario alcanzar antes de proceder con el análisis dinámico. Con este propósito, se podría imponer un estado inicial que tenga como presión la que da dicha ecuación (4). Sin embargo, se puede conseguir este estado inicial a través de un análisis cuasi-estático. Así, de la ecuación (2) (válida en todo  $\Omega$ ), se observa que para el contorno  $\Gamma$  se cumple:

$$\nabla P \cdot \mathbf{n} = \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \quad (3.7.6)$$

que es una condición que se puede imponer en (3.6.1) en la misma forma que cualquier condición de contorno:

$$\int_{\Gamma} \hat{\mathbf{N}}^T (\nabla P \cdot \mathbf{n}) d\Gamma = \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{N}}^T (\rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (3.7.7)$$

en la que si se aplica el teorema de la divergencia, se puede escribir como una integral sobre todo el dominio:

$$\int_{\Gamma} \hat{\mathbf{N}}^T (\nabla P \cdot \mathbf{n}) d\Gamma = \int_{\Omega} \rho_0 \nabla \hat{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{b} d\Omega \quad (3.7.8)$$

Consecuentemente, el estado de presión hidrostática se obtendrá cuando se resuelva la ecuación integral (3.5.5) en la que se reemplace la ecuación (8) y se tenga en cuenta que  $\vec{P} = 0$  y  $\ddot{P} = 0$ . Así se obtiene:

$$\int_{\Omega} (\nabla \hat{\mathbf{N}}^T) \cdot (\nabla P) d\Omega = \int_{\Omega} \rho_0 \nabla \hat{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{b} d\Omega \quad (3.7.9)$$

en la que además se debe imponer  $P = 0$  en la superficie libre (ver ecuación 3.6.1.1).

## 8. PLANTEAMIENTO NUMÉRICO

La ecuación dinámica que se debe resolver está dada por la ecuación integral (3.5.5) junto con las condiciones de contorno (3.6.1.1), (3.6.2.2) y (3.6.3.1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \hat{\mathbf{N}}^T \ddot{P} d\Omega + \frac{1}{c} \int_{\Gamma_{tr}} \hat{\mathbf{N}}^T \dot{P} d\Gamma + \int_{\Omega} (\nabla \hat{\mathbf{N}}^T) \cdot (\nabla P) d\Omega = \\ = - \int_{\Gamma_u} \rho_0 \hat{\mathbf{N}}^T \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.8.1)$$

en la que es necesario imponer  $P = 0$  en la superficie libre (ecuación 3.6.1.1).

Siguiendo el mismo procedimiento descrito en el Capítulo II (apartado 6), para resolver la ecuación integral (1), primero se hace una discretización espacial de la presión  $P(\mathbf{x}, t)$  dada por:

$$P(\mathbf{x}, t) \simeq \hat{P}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n \hat{N}_i(\mathbf{x}) p_i(t) = \hat{\mathbf{N}} \mathbf{p}^t \quad (3.8.2)$$

$$\dot{P}(\mathbf{x}, t) \simeq \hat{\dot{P}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n \hat{N}_i(\mathbf{x}) \dot{p}_i(t) = \hat{\mathbf{N}} \dot{\mathbf{p}}^t \quad (3.8.3)$$

$$\ddot{P}(\mathbf{x}, t) \simeq \hat{\ddot{P}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n \hat{N}_i(\mathbf{x}) \ddot{p}_i(t) = \hat{\mathbf{N}} \ddot{\mathbf{p}}^t \quad (3.8.4)$$

expresiones en las que, de acuerdo al método estándar de Galerkin, la matriz de funciones de base  $\hat{\mathbf{N}}$  coincide con la matriz de residuos dada en el apartado 5.

Reemplazando (2), (3) y (4) en la ecuación integral (1) se obtiene la ecuación semi-discreta siguiente:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \hat{\mathbf{N}}^T \hat{\mathbf{N}} d\Omega \right] \ddot{\mathbf{p}}^t + \left[ \frac{1}{c} \int_{\Gamma_{tr}} \hat{\mathbf{N}}^T \hat{\mathbf{N}} d\Gamma \right] \dot{\mathbf{p}}^t + \left[ \int_{\Omega} (\nabla \hat{\mathbf{N}}^T) \cdot (\nabla \hat{\mathbf{N}}) d\Omega \right] \mathbf{p}^t = \\ = - \int_{\Gamma_u} \rho_0 \hat{\mathbf{N}}^T \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.8.5)$$

en la que se debe imponer  $\mathbf{p}^t = 0$  para todos los puntos que estén en la superficie libre. Esta ecuación en general se puede escribir como:

$$\hat{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{p}}^t + \hat{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{p}}^t + \hat{\mathbf{K}} \mathbf{p}^t = \hat{\mathbf{f}}^t \quad (3.8.6)$$

donde evidentemente:

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \hat{\mathbf{N}}^T \hat{\mathbf{N}} d\Omega \quad (3.8.7)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \frac{1}{c} \int_{\Gamma_{tr}} \hat{\mathbf{N}}^T \hat{\mathbf{N}} d\Gamma \quad (3.8.8)$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \int_{\Omega} (\nabla \hat{\mathbf{N}}^T) \cdot (\nabla \hat{\mathbf{N}}) d\Omega \quad (3.8.9)$$

$$\hat{\mathbf{f}}^t = - \int_{\Gamma_u} \rho_0 \hat{\mathbf{N}}^T \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (3.8.10)$$

son las pseudo-matrices de masa, amortiguamiento, rigidez y el vector de pseudo-fuerzas, respectivamente. La ecuación semi-discreta (6) puede ser resuelta, tras una discretización en el tiempo, en la misma forma en que se describió en el Capítulo II (apartado 7), por lo que no se repetirá aquí dicha descripción.

Por otro lado, para calcular el estado hidrostático inicial, la ecuación estática que se debe resolver está dada por la ecuación integral (3.7.9) en la que al utilizar (2) se obtiene:

$$\hat{\mathbf{K}} \mathbf{p}^t = \hat{\mathbf{f}}_e \quad (3.8.11)$$

con:

$$\hat{\mathbf{f}}_e = \int_{\Omega} \rho_0 \nabla \hat{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{b} d\Omega \quad (3.8.12)$$

estando la matrix  $\hat{\mathbf{K}}$  dada en (9) y con  $\mathbf{b} = (0, 0, -g)$ . En esta ecuación, también se debe imponer  $\mathbf{p}^t = 0$  en la superficie libre. Evidentemente, la solución de este sistema de ecuaciones conduce a la solución dada por (3.7.4), pero en la que no es necesario seguir un procedimiento especial que imponga las presiones hidrostáticas antes de proceder con un análisis dinámico. En un análisis de interacción, el hecho de que las presiones hidrostáticas se obtengan a través de un análisis estático presenta la ventaja de simplificar el código. Así por ejemplo, las fuerzas hidrostáticas que el fluido ejerce sobre la estructura no tienen que ser calculadas por separado, sino que surgen automáticamente con el mismo procedimiento que se emplea en el análisis dinámico.

## 9. OTRAS FORMULACIONES EQUIVALENTES

En los apartados anteriores se ha presentado la formulación denominada en presiones. Sin embargo, existen otras posibles alternativas<sup>[ZiB]</sup> para modelar la transmisión de ondas sonoras en un fluido no viscoso. Entre estas otras las más comunes son las formulaciones en: desplazamientos, potencial de desplazamientos y potencial de velocidades. Aunque muchas veces se ha preferido la formulación en desplazamientos<sup>[BaH][Pa][Wil]</sup> (por su similitud con el análisis de un sólido), ésta tiene la gran desventaja de tener tres grados de libertad por nudo. En contraposición, las otras formulaciones mencionadas sólo tienen un grado de libertad por nudo lo que las hace notablemente

más baratas y mucho más competitivas. El propósito de este apartado es el de describir brevemente estas otras alternativas. Consideremos primero las formulaciones en potencial de velocidades y potencial de desplazamientos (en las que se observará la gran similitud que tienen con la formulación en presiones) para luego ocuparnos de la formulación en desplazamientos.

### 9.1. Formulación en potencial de velocidades

#### 9.1.1. Ecuación diferencial

Se puede demostrar<sup>[Ma]</sup> que si el flujo barotrópico de un fluido perfecto es en algún momento irrotacional, permanecerá irrotacional indefinidamente. Esto se puede mostrar aplicando el rotacional a la ecuación (3.4.2.1) para encontrar que:

$$\nabla \times \ddot{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.9.1.1.1)$$

ya que  $\nabla \times \nabla P = 0$ . Si esta expresión es integrada en el tiempo, teniendo presente que  $\nabla \times \dot{\mathbf{u}}^{t=0} = 0$ , se obtiene:

$$\nabla \times \dot{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.9.1.1.2)$$

Este hecho motivó el estudio de flujos irrotacionales, también llamados flujos potenciales ya que (2) es la condición necesaria y suficiente para que exista una función escalar  $\psi$  tal que

$$\dot{\mathbf{u}} = \nabla \psi \quad (3.9.1.1.3)$$

La idea anterior nos permite introducir una variable escalar cualquiera  $\varphi$  tal que se cumpla que:

$$\nabla \varphi = -\rho_0 \dot{\mathbf{u}} \quad (3.9.1.1.4)$$

o bien que:

$$\nabla \dot{\varphi} = -\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.9.1.1.5)$$

Si se iguala esta expresión con (3.4.2.1), se tiene que:

$$\nabla P = \nabla \dot{\varphi} \quad (3.9.1.1.6)$$

por lo que:

$$P = \dot{\varphi} \quad (3.9.1.1.7)$$

y derivando con respecto al tiempo se tiene:

$$\dot{P} = \ddot{\varphi} \quad (3.9.1.1.8)$$

Por otro lado, aplicando el operador divergencia ( $\nabla$ ) a ambos lados de la expresión (4), se obtiene:

$$\nabla^2 \varphi = -\rho_0 \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} \quad (3.9.1.1.9)$$

además, la derivada con respecto al tiempo de (3.4.1.2) es:

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = -\frac{\dot{P}}{K} \quad (3.9.1.1.10)$$

Reemplazando (10) en (9) se tiene:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\rho_0}{K} \dot{P} = 0 \quad (3.9.1.1.11)$$

que, de acuerdo con (8) y definiendo  $c = \sqrt{K/\rho_0}$ , esta ecuación se puede escribir como:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \ddot{\varphi} = 0 \quad (3.9.1.1.12)$$

que es la misma ecuación de onda de la formulación en presiones, pero en la que esta vez la incógnita es la función de potencial de velocidades. Evidentemente nuestro objetivo final es calcular las presiones para todos los puntos del dominio necesarias para determinar las fuerzas que el fluido ejerce sobre una estructura. Con esta formulación, al resolver la ecuación de onda (12) (que es una ecuación diferencial de segundo orden), obtendremos  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$  y  $\ddot{\varphi}$ ; y de acuerdo a la ecuación (7) tendremos:

$$P = \dot{\varphi} \quad (3.9.1.1.13)$$

que es nuestra incógnita original.

### 9.1.2. Condiciones de contorno

Como se verá en este apartado, las tres condiciones de contorno descritas en el apartado 6 son prácticamente idénticas para la formulación en potencial de velocidades:

- (1) La condición de superficie libre expresada por (3.6.1.1) se reduce a imponer  $P = 0$  en la superficie libre. En este caso la condición que se debe imponer es idéntica, desde el punto de vista de la ecuación diferencial, ya que imponiendo:

$$\varphi = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_l \quad (3.9.1.2.1)$$

también se impone  $\dot{\varphi} = P = 0$  en dicho contorno.

- (2) La condición de contorno móvil dada por la ecuación (3.6.2.2) es la única que se modifica, ya que ahora se debe imponer que:

$$\nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = -\rho_0 \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \quad (3.9.1.2.2)$$

pues de esta forma se tiene:

$$\nabla \dot{\varphi} \cdot \mathbf{n} = \nabla P \cdot \mathbf{n} = -\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \quad (3.9.1.2.3)$$

que es la condición de contorno original.

- (3) La condición de contorno transparente (3.6.3.1), de acuerdo a la ecuación (3.9.1.1.8), se escribe como:

$$\nabla \dot{\varphi} \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{c} \ddot{\varphi} \quad (3.9.1.2.4)$$

lo que se consigue si se impone:

$$\nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{c} \dot{\varphi} \quad (3.9.1.2.5)$$

que, desde el punto de vista de la ecuación diferencial, es exactamente la misma condición (3.6.3.1) dada en la formulación en presiones.

### 9.1.3. Discretización

La discretización de la ecuación diferencial (3.9.1.1.12) sujeta a las condiciones de contorno (3.9.1.2.1), (3.9.1.2.3) y (3.9.1.2.5) de acuerdo con expresiones similares a (3.8.2), (3.8.3) y (3.8.4) conduce a las mismas matrices y vectores que se dedujeron en el apartado 8 para la formulación en presiones, salvo para aquél que expresa la condición de contorno móvil (ver ecuación 3.8.10) que ahora debe escribirse como:

$$\hat{\mathbf{f}}_v = - \int_{\Gamma_u} \rho_0 \hat{\mathbf{N}}^T \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (3.9.1.3.1)$$

Consecuentemente, se obtiene una ecuación semidiscreta similar a (3.8.6) dada por:

$$\hat{\mathbf{M}} \ddot{\varphi}^t + \hat{\mathbf{C}} \dot{\varphi}^t + \hat{\mathbf{K}} \varphi^t = \hat{\mathbf{f}}_v^t \quad (3.9.1.3.2)$$

siendo  $\hat{\mathbf{f}}_v^t$  el vector de cargas y  $\dot{\varphi} = \mathbf{p}$  las únicas diferencias a tener en cuenta con respecto a la formulación en presiones. Sin embargo, es importante notar que con esta formulación sólo se pueden resolver problemas hidrodinámicos en sobre-presiones, ya que no es posible representar un estado hidrostático distinto de cero. Adviértase que cuando  $\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ , las ecuaciones (3.9.1.1.5) y (3.9.1.2.1) implican que  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  en todo el dominio. Por otro lado, tampoco se puede resolver un problema en el que se suponga un fluido incompresible ya que, en dicho caso, la velocidad del sonido en el fluido tiende a infinito y esto implica que las matrices  $\hat{\mathbf{M}}$  y  $\hat{\mathbf{C}}$  se anulan (ver ecuaciones 3.8.7 y 3.8.8).

## 9.2. Formulación en potencial de desplazamientos

### 9.2.1. Ecuación diferencial

Basándonos en la expresión (3.9.1.1.1) y siguiendo la misma idea descrita en la formulación en potencial de velocidades, se puede introducir una función escalar  $\phi$  tal que  $\dot{\phi} = \varphi$ , por lo que se cumple (ver ecuación 3.9.1.1.4) que:

$$\nabla\phi = -\rho_0 \mathbf{u} \quad (3.9.2.1.1)$$

o bien que:

$$\nabla\ddot{\phi} = -\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.9.2.1.2)$$

y al igualarse con la expresión (3.4.2.1), se tiene:

$$\nabla P = \nabla\ddot{\phi} \quad (3.9.2.1.3)$$

por lo que:

$$P = \ddot{\phi} \quad (3.9.2.1.4)$$

Siguiendo el mismo procedimiento del apartado 9.1.1, es decir, aplicando el operador divergencia ( $\nabla$ ) a ambos lados de la expresión (1), reemplazando la ecuación (3.4.1.2) y definiendo  $c = \sqrt{K/\rho_0}$ , con (4) se obtiene:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} = 0 \quad (3.9.2.1.5)$$

que es la misma ecuación de onda de las formulaciones anteriores, con la única diferencia que la presión está dada en la derivada segunda con respecto al tiempo de la variable principal ( $P = \ddot{\phi}$ ).

### 9.2.2. Condiciones de contorno

Por los mismos razonamientos expresados en la formulación en potencial de velocidades, las condiciones de superficie libre y de contorno transparente son similares. Por otro lado, la condición de contorno móvil se expresa ahora (ver ecuaciones 3.6.2.2 y 3.9.1.2.2) como:

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = -\rho_0 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad (3.9.2.2.1)$$

ya que de esta forma se tiene:

$$\nabla\ddot{\phi} \cdot \mathbf{n} = \nabla P \cdot \mathbf{n} = -\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \quad (3.9.2.2.2)$$

que es la condición de contorno original.

### 9.2.3. Discretización

La discretización para esta formulación en potencial de desplazamientos sigue los mismos pasos de la formulación en presiones o en potencial de velocidades obteniéndose idénticas matrices y vectores, salvo el caso de aquélla que expresa la condición de contorno móvil que ahora se expresa como:

$$\hat{\mathbf{f}}_d = - \int_{\Gamma_u} \rho_0 \hat{\mathbf{N}}^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (3.9.2.3.1)$$

Nuevamente, se obtiene una ecuación semidiscreta similar a (3.8.6) esta vez dada por:

$$\hat{\mathbf{M}} \ddot{\phi}^t + \hat{\mathbf{C}} \dot{\phi}^t + \hat{\mathbf{K}} \phi^t = \hat{\mathbf{f}}_d \quad (3.9.2.3.2)$$

siendo  $\hat{\mathbf{f}}_d^t$  el vector de cargas y  $\dot{\phi} = \mathbf{p}$  las únicas diferencias a tener en cuenta con respecto a la formulación en presiones. Nuevamente y por los mismos motivos expuestos en la formulación en potencial de velocidades, se debe notar que con esta formulación sólo se pueden resolver problemas hidrodinámicos en sobre-presiones.

Es interesante notar que las tres formulaciones (a saber: en presiones, en potencial de velocidades y en potencial de desplazamientos) son muy similares desde el punto de vista del código de análisis, estando su principal diferencia en la forma de imponer los términos de interacción provenientes del contorno móvil.

## 9.3. Formulación en desplazamientos

A diferencia de las anteriores formulaciones, que son equivalentes desde el punto de vista del código de análisis y del coste computacional, la formulación en desplazamientos conduce a un código que es muy similar al del análisis de un sólido. Esto último puede presentar alguna ventaja al permitir resolver dos problemas diferentes (sólido versus fluido) con un mismo código de análisis.

### 9.3.1. Ecuación constitutiva en forma matricial

Como se vio en el apartado 3.3, la ecuación constitutiva que define el comportamiento de un fluido no viscoso (ver ecuación 3.4.1.1) está dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = K \boldsymbol{\epsilon}_v \mathbf{I} \quad (3.9.3.1.1)$$

siendo  $K$  el módulo de deformación volumétrica y  $\boldsymbol{\epsilon}_v$  la deformación volumétrica dada por:

$$\boldsymbol{\epsilon}_v = \nabla \cdot \mathbf{u} = \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.9.3.1.2)$$

La ecuación constitutiva (1) así definida se puede escribir matricialmente como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{D}} \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.9.3.1.3)$$

en la que (para dos dimensiones por ejemplo):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon} &= \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\}^T \\ \boldsymbol{\sigma} &= \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}^T\end{aligned} \quad (3.9.3.1.4)$$

donde la matriz constitutiva  $\hat{\mathbf{D}}$  está dada por:

$$\hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} K & K & 0 \\ K & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9.3.1.5)$$

### 9.3.2. Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno, descritas para la formulación en presiones en el apartado 6, para la formulación en desplazamientos se reducen a:

- (1) La condición de superficie libre expresada por (3.6.1.1) esta vez se expresa imponiendo que las tracciones normales a dicha superficie sean nulas:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{0} \quad (3.9.3.2.1)$$

- (2) La condición de contorno móvil simplemente está dada por imponer en el fluido los desplazamientos normales  $\mathbf{d}_n$  de dicho contorno:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{d}_n \quad (3.9.3.2.2)$$

- (3) La condición de contorno de radiación se describe en el Capítulo IV. Sin mayor deducción se presenta aquí la condición que se debe imponer en dicho contorno (ver ecuación 4.3.4.14):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{u} \quad (3.9.3.2.3)$$

donde  $c$  es la velocidad del sonido.

### 9.3.3. Planteamiento numérico

La ecuación del movimiento (3.3.2.1) junto con las condiciones de contorno (3.9.3.2.1), (3.9.3.2.2) y (3.9.3.2.3) definen un problema similar al descrito en el Capítulo II, en el que, tras una discretización adecuada (ver ecuaciones 2.6.1, 2.6.2 y 2.6.3), se llega a una ecuación semi-discreta dada por:

$$\hat{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{a}}^t + \hat{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{a}}^t + \hat{\mathbf{K}} \mathbf{a}^t = \hat{\mathbf{f}}^t \quad (3.8.3.3.1)$$

siendo:

$$\hat{\mathbf{M}} = \int_{\Omega} \rho_0 \hat{\mathbf{N}}^T \hat{\mathbf{N}} d\Omega \quad (3.8.3.3.2)$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{B}}^T \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{B}} d\Omega \quad (3.8.3.3.3)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \int_{\Gamma_{tr}} \hat{\mathbf{N}}^T \mathbf{T}^T \mathbf{Q}_r \mathbf{T} \hat{\mathbf{N}} d\Gamma \quad (3.8.3.3.4)$$

$$\hat{\mathbf{f}}^t = \int_{\Omega} \rho \hat{\mathbf{N}}^T \mathbf{b}^t d\Omega \quad (3.8.3.3.5)$$

la matriz de masa, la matriz de amortiguamiento, la matriz de rigidez y el vector de fuerzas externas, respectivamente. A su vez, la matriz  $\mathbf{Q}_r$  está dada por:

$$\mathbf{Q}_r = \begin{bmatrix} \sqrt{\rho_0 K} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.4.19)$$

y  $\mathbf{T}$  es una matriz de transformación adecuada dada por el vector normal  $\mathbf{n}$  al contorno transparente (ver ecuación 4.3.4.19).

### 9.3.4. Condición de irrotacionalidad

Como ya se ha mostrado en el apartado 9.1.1, el flujo de un fluido barotrópico es irrotacional si, como en este caso, las condiciones iniciales son irrotacionales. En principio, esta condición natural también se cumple para la formulación en desplazamientos. Sin embargo, por errores numéricos introducidos por la discretización y por la integración en el tiempo de la ecuación del movimiento, se puede desarrollar un movimiento de vorticidad en la solución numérica<sup>[Gr]</sup>. Por ello, para satisfacer numéricamente la condición de irrotacionalidad, al hacer el planteamiento numérico, puede ser necesario aumentar un término de penalización a la forma débil de la ecuación del movimiento (ver ecuación 2.5.7). El término de penalización que se debe aumentar a dicha ecuación integral viene dado por<sup>[HOV][WiK][Sa]</sup>:

$$\alpha \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} d\Omega \quad (3.9.3.4.1)$$

donde  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  y  $\alpha$  es un parámetro de penalización.

Al aumentar el término dado por (1) a la forma débil se añade un término de rigidez a la ecuación del movimiento para el fluido, por lo que la expresión dada por (3.8.3.3.3) para la matriz de rigidez es ahora:

$$\hat{\mathbf{K}} = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{B}}^T \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{B}} d\Omega + \alpha \int_{\Omega} \mathbf{W}^T \mathbf{W} d\Omega \quad (3.9.3.4.2)$$

con  $\mathbf{W} = \nabla \times \hat{\mathbf{N}}$ .

El parámetro  $\alpha$  debe ser lo suficientemente grande como para forzar la irrotacionalidad y por ello, la ecuación (2) normalmente debe ser evaluada con un número reducido de puntos de integración para evitar la sobre-rigidización (“locking”) del elemento<sup>[WiK]</sup>. El estudio de esta problemática que la formulación en desplazamientos presenta para el fluido se puede encontrar en la referencia [Sa]. En este trabajo se ha utilizado la formulación en presiones, por lo que aquí no se hace más referencia a este problema. Sin embargo, es interesante observar la similitud entre esta formulación y aquélla descrita en el Capítulo II para el sólido, por lo que se puede utilizar el mismo código para analizar ambos dominios, con la única diferencia de cambiar la matriz constitutiva según (3.9.3.1.5) y agregar el término de irrotacionalidad dado por (2). Desde el punto de vista de programación esto es una ventaja. Sin embargo, esta formulación utiliza tres grados de libertad por nudo (los tres desplazamientos) en contraposición a cualquiera de las formulaciones mencionadas anteriormente que sólo utilizan un grado de libertad por nudo. En grandes problemas de interacción –tal como el caso que nos ocupa al analizar una presa con material no lineal e interacción fluido-estructura ante excitaciones sísmicas–, esta circunstancia puede hacer que la formulación en desplazamientos sea demasiado costosa.

## 10. ENSAYO NUMÉRICO

A continuación se presenta un ejemplo numérico con la intención de comparar las formulaciones en presiones, en potencial de velocidades y en potencial de desplazamientos. El ejemplo comparativo que se ha utilizado consiste de un tanque paralelepípedico infinitamente rígido lleno de agua que es excitado por una aceleración horizontal constante. El tanque es de 300[m] de longitud por 99.8[m] de altura, la densidad del agua se ha estimado en  $\rho_0 = 1019[Kg/m^3]$  y la velocidad del sonido en el agua en  $c = 1439[m/s]$ . La superficie superior se supone libre, mientras que las demás superficies se han idealizado como infinitamente rígidas y sujetas, todas ellas, a una aceleración horizontal constante de  $a = \ddot{u}_x = 0.1[m/s^2]$ . En la figura 3.10.1 se presenta la malla de elementos finitos utilizada, que está constituida por 168 elementos finitos de cuatro nodos y tiene un total de 165 nudos. En la misma figura se ha representado la distribución de presiones hidrostáticas que alcanza una presión de 997.63972[KPa] en el fondo del tanque.

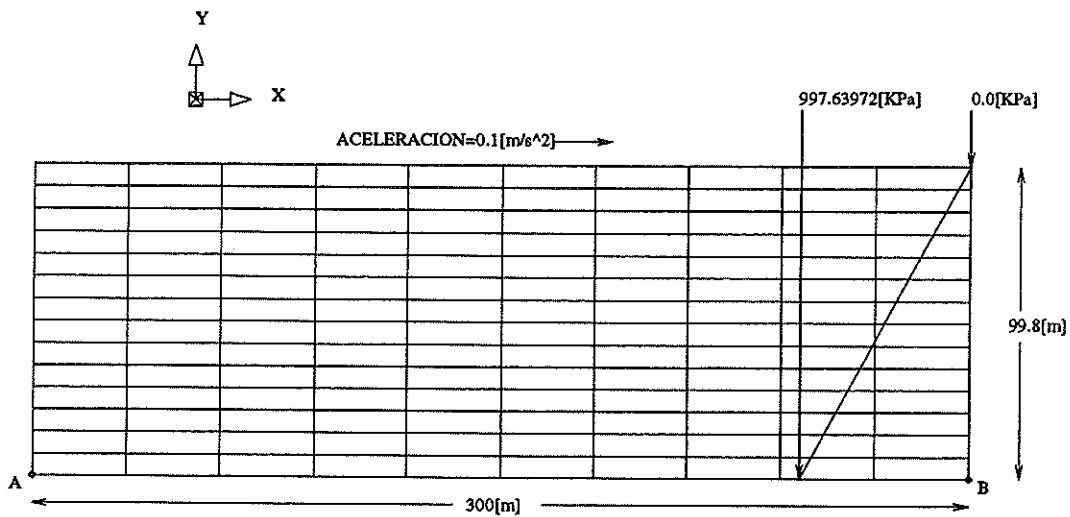


Figura 3.10.1 Características del modelo del tanque de agua.

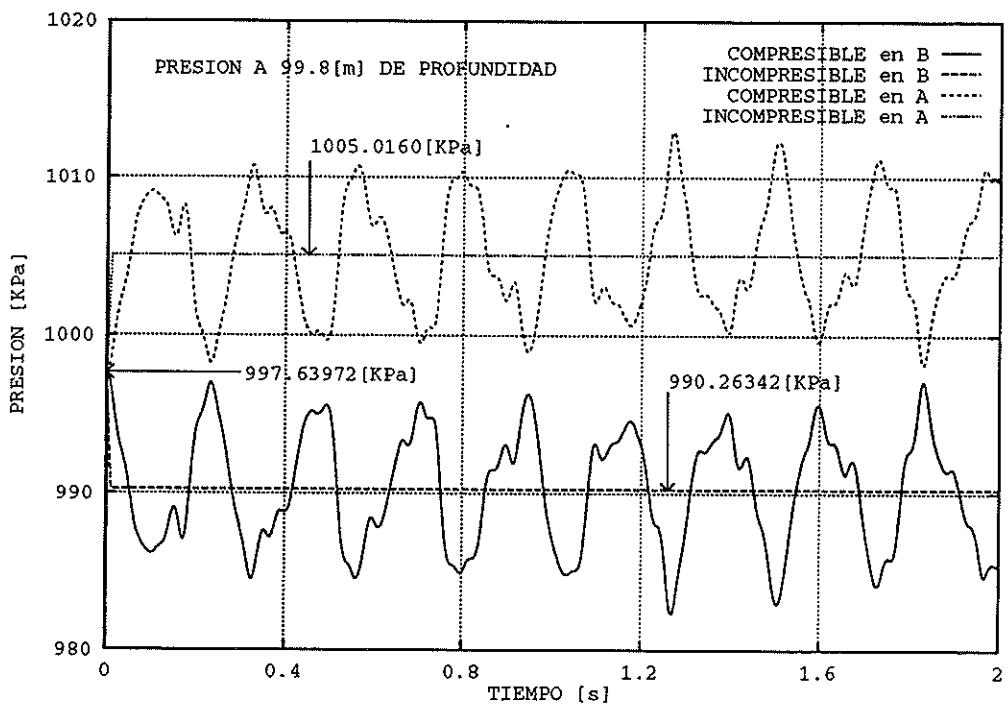


Figura 3.10.2 Historia de presiones en los puntos inferiores A izquierdo y B derecho del tanque, para los casos de fluido compresible e incompresible.

El ensayo consiste en aplicar primero el peso propio en forma cuasiestática (con  $g = 9.81[m/s^2]$ ). A continuación se aplica una aceleración horizontal creciente en forma lineal empezando por  $0.0[m/s^2]$  hasta alcanzar el valor de  $0.1[m/s^2]$  en  $0.001[s]$ . Dicho valor de la aceleración se mantiene constante durante  $2[s]$ , que es cuando el análisis concluye. En la figura 3.10.2 se presentan los valores de presión alcanzados, para todos los instantes de tiempo que dura el ensayo, en la parte inferior del tanque a derecha (pto. B) e izquierda (pto. A), respectivamente. Es interesante notar la simetría que existe en el valor de las presiones medidas en dichos puntos. Obsérvese que el valor de la presión hidrostática ( $997.63972[KPa]$ ) justamente se encuentra en el eje de simetría de dichos valores.

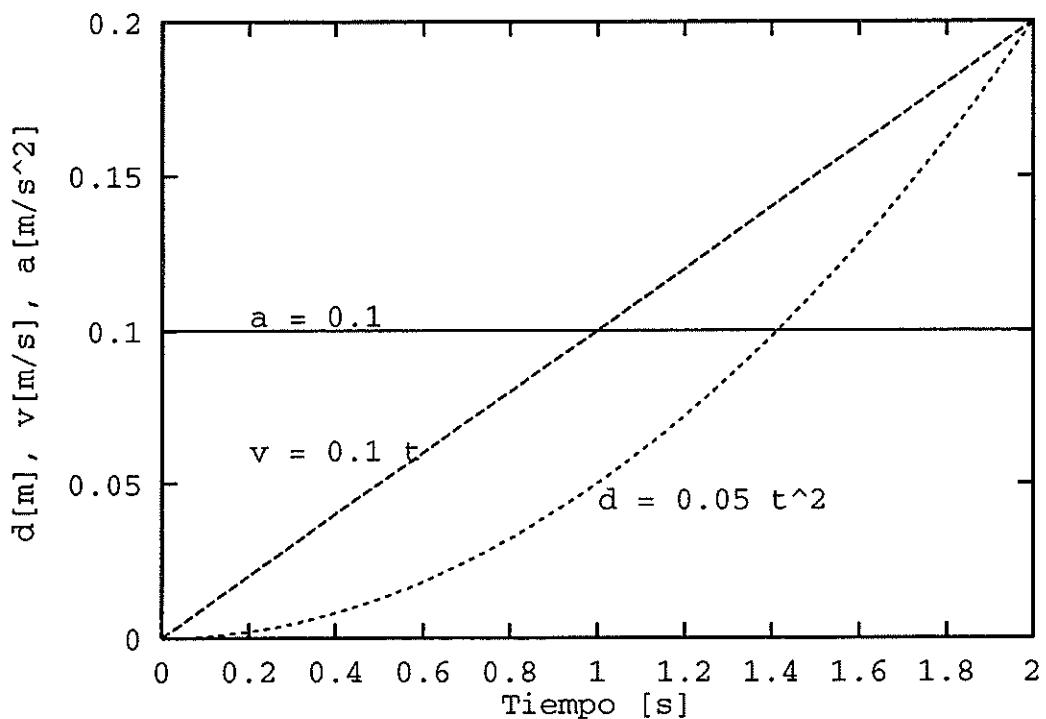


Figura 3.10.3 Funciones de aceleración, velocidad y desplazamientos prescritas en el contorno.

El presente ejemplo también se ha resuelto en sobre presiones dinámicas utilizando las formulaciones en potencial de velocidades y en potencial de desplazamientos, para luego sumar el estado de presión hidrostática. Para tal efecto se ha impuesto la velocidad  $v = \dot{u}_x = 0.1t$  o el desplazamiento  $d = u_x = 0.05t^2$  en los pseudo-vectores de fuerzas correspondientes (ver figura 3.10.3). Es interesante notar que la solución numérica obtenida con las tres formulaciones ha sido exactamente igual (con nueve cifras significativas), lo que muestra que ninguna de ellas es especial desde el punto de vista de la precisión de los resultados obtenidos.

Finalmente, se ha resuelto el mismo problema con la formulación en presiones, pero esta vez suponiendo un fluido incompresible, esto es, suponiendo que la velocidad de propagación del sonido es infinita. En estas circunstancias, los términos de masa (3.8.7) y amortiguamiento (3.8.8) de la ecuación (3.8.6) son nulos, por lo que el sistema que se debe resolver se reduce a:

$$\hat{\mathbf{K}} \mathbf{p}^t = \hat{\mathbf{f}}^t \quad (3.10.1)$$

estando los términos de esta ecuación definidos en (3.8.9) y (3.8.10), respectivamente. Nótese que esta ecuación es de orden cero por lo que no requiere ser integrada en el tiempo. Además, si como en este caso la aceleración impuesta es constante, la solución no varía en el tiempo. La solución de este ensayo también se encuentra representada en la figura 3.10.2 y se puede ver que las presiones correspondientes al caso de fluido incompresible son justamente la media de las presiones hidrodinámicas encontradas para el caso de fluido compresible. Esta solución numérica se puede comparar con la solución analítica<sup>[NeR]</sup> para un tanque de longitud infinita y fluido incompresible dada por:

$$p = (g \pm 0.743\ddot{u})h\rho_0 \quad (3.10.2)$$

siendo  $h$  la altura del tanque. Así se tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} p_A &= 1005.1957 \simeq 1005.0160[KPa] \\ p_B &= 990.0837 \simeq 990.2634[KPa] \end{aligned} \quad (3.10.3)$$

que muestran una gran concordancia entre los resultados numéricos obtenidos y los valores teóricos para un tanque de longitud infinita.

## 11. CONSIDERACIONES FINALES

En este capítulo se han presentado cuatro formulaciones posibles para modelar la transmisión de ondas en un fluido (a saber: en presiones, en potencial de velocidades, en potencial de desplazamientos y en desplazamientos). Sin embargo, es importante resaltar que todas ellas dan, aparte de los posibles errores de redondeo del ordenador, la misma respuesta (en presiones) para el fluido, ya que todas ellas están basadas en las mismas hipótesis. Por ello, no es menester decidir, desde el punto de vista de los resultados obtenidos, cual de las cuatro formulaciones es preferible. Por otra parte, respecto a su implementación numérica existen algunos factores que deben ser considerados para elegir la formulación más adecuada:

- Sobre la formulación en desplazamientos se debe indicar que dicha formulación tiene la ventaja de poder utilizar el mismo código que aquél que sirve para analizar un sólido y, además, en los resultados no sólo se obtiene el valor de las presiones, sino que también los desplazamientos, las velocidades y aceleraciones de cada punto del fluido. Pese a ello, esta formulación no es la más adecuada pues tiene el triple de incógnitas (para un mismo grado de discretización) lo que la hace generalmente demasiado cara<sup>†</sup>. Es importante resaltar además que los desplazamientos, las velocidades y aceleraciones en el fluido obtenidas con esta formulación son valores innecesarios desde todo punto de vista práctico en un problema de interacción presa-embalse.
- El resto de las formulaciones: presiones, potencial de velocidades y potencial de desplazamientos, son similares desde el punto de vista de su implementación y del coste computacional asociado. Es decir, una vez que se tiene un código que permite hacer el análisis de una de ellas, se tiene al mismo tiempo la posibilidad de utilizar cualquiera de las otras. Para esto, en los contornos móviles es suficiente especificar el desplazamiento, la velocidad o la aceleración, dependiendo de la formulación que se quiera utilizar. Sin embargo, las formulaciones en potencial de velocidades o en potencial de desplazamientos tienen la desventaja de ser incapaces de representar un estado hidrostático distinto de cero. Es decir, con dichas formulaciones se puede obtener el incremento de presión hidrodinámica para cada punto del fluido, pero es necesario sumar *artificialmente* la presión hidrostática calculada según la expresión (3.7.4). Esto tiene la desventaja de complicar el código de análisis sin que se obtenga ningún beneficio por ello. Además, el problema se malcondiciona a medida que el fluido es más incompresible, ya que en el límite (con fluido incompresible), estas formulaciones en potencial no se pueden utilizar.

Por todo lo expresado, nos vemos forzados a concluir que la formulación en presiones es la más adecuada para modelar el fluido en un problema de interacción presa-embalse, siendo notablemente sencilla y de fácil implementación con respecto a otras alternativas posibles.

---

<sup>†</sup> A grosso modo, el costo computacional crece con el cuadrado del número de incógnitas.



# CAPÍTULO IV

## CONDICIONES DE CONTORNO

### 1. INTRODUCCIÓN

Como se ha descrito en el Capítulo II (apartado 5) las condiciones que deben prescribirse para cada instante de tiempo en todos los puntos del contorno  $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t$  en un problema dinámico son de dos tipos:

- (a) Aquéllas en que se prescriben desplazamientos (condición de Dirichlet) en algunos puntos del contorno.

$$u(x, t) - u^* = 0 \quad \text{en } \Gamma_u$$

- (b) Aquéllas en que se prescriben fuerzas (condición de Newman) en los puntos restantes del contorno.

$$\sigma(x, t) \cdot n - t^* = 0 \quad \text{en } \Gamma_t$$

En la mayoría de los problemas lineales con estructuras de dominios finitos sujetas a cargas estáticas, la imposición de las condiciones de contorno es un problema relativamente sencillo; sin embargo, en un problema dinámico no-lineal con contornos semi-infinitos y cargas sísmicas –que es el caso que nos ocupa–, la imposición de cada una las condiciones de contorno requiere un estudio detallado.

En este capítulo se analiza la imposición de ambos tipos de condiciones de contorno (Dirichlet y Newman) en tres bloques claramente diferenciados:

- (1) Se hace referencia al algoritmo de imposición de grados de libertad prescritos en un problema con material no-lineal.
- (2) Se presenta un tipo de elemento finito utilizado en el contorno con el propósito de imponer las “fuerzas sísmicas” a través de un contorno ficticio que tiene en cuenta el hecho de que el terreno o el fluido son medios abiertos semi-infinitos.
- (3) Se describe un modelo estocástico que permite generar señales sísmicas artificiales con características similares a registros existentes de terremotos reales.

## 2. PRESCRIPCIÓN DE GRADOS DE LIBERTAD

Como es bien sabido, en el análisis estático lineal de estructuras la imposición de grados de libertad prescritos  $\underline{a}_j$ ,<sup>†</sup> se realiza directamente al resolver el sistema de ecuaciones  $Ka = f$ . Para esto, se eliminan las filas y las columnas de los grados de libertad prescritos  $j$  y, en el resto, se substituyen los términos  $f_i$  del vector de fuerzas por:  $f_i - \sum_j k_{ij}a_j$ . Además, "a posteriori" se pueden calcular las reacciones  $r_j$  con:  $r_j = \sum_i k_{ji}a_i$ .

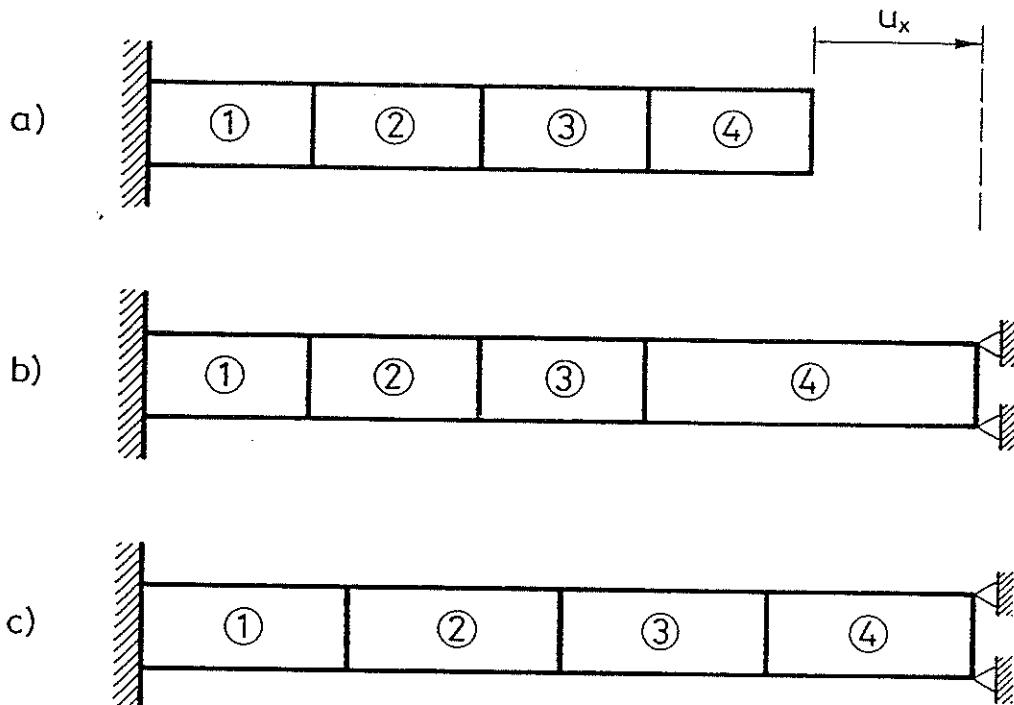


Figura 4.2.1 Problemas numéricos al imponer desplazamientos, en un problema no-lineal, en la predicción inicial antes del primer cálculo de fuerzas residuales. a) Geometría inicial, b) Deformada en el primer cálculo de fuerzas residuales y c) Solución buscada.

El procedimiento descrito no presenta ningún inconveniente en el caso lineal. No obstante, cuando el problema que se quiere resolver es no-

<sup>†</sup> Se ha denotado la letra  $a$  con una barra debajo para indicar que es un dato y no una incógnita del problema.

lineal, se debe tener especial cuidado en hacerlo en la misma forma, es decir, imponiendo los grados de libertad prescritos al resolver el sistema de ecuaciones y no al calcular fuerzas residuales. Como se explicó en el apartado 7.1 del Capítulo II (ver figura 2.7.1.1), en los pasos que se siguen en el algoritmo predictor multi-corrector descrito, cronológicamente primero se calcula el vector de fuerzas residuales –paso (6)– y luego se resuelve el sistema de ecuaciones –paso (9)–.

A modo de ejemplo, en la figura 4.2.1 se muestra una barra en la que en uno de sus extremos se impone un desplazamiento forzado mientras el otro permanece fijo. Si se imponen los grados de libertad prescritos al comienzo –en el paso (4) de la primera iteración–, cuando se calculan las fuerzas residuales –en el paso 6– se obtiene una respuesta inicial que es muy distinta de la solución. Consecuentemente, el proceso iterativo empieza con una predicción muy mala lo que ocasiona que se requiera un mayor número de iteraciones para resolver el problema no-lineal, pudiéndose llegar incluso a soluciones equivocadas.

Para subsanar este problema numérico se pueden usar dos alternativas:

- (a) Avanzar con incrementos de carga (desplazamientos forzados) muy pequeños de manera tal que al imponer los desplazamientos prescritos en la predicción –paso 4–, ésta no sea muy distinta de la solución buscada (ver figura 2.7.1.1).
- (b) Aumentar en la estrategia de solución una iteración inicial de predicción (iteración 0) de manera tal de imponer los grados de libertad prescritos al resolver el sistema de ecuaciones –paso 9–, en lugar de hacerlo al calcular las fuerzas residuales. De esta forma se obtiene una predicción (para la siguiente iteración) que es función de la matriz de rigidez, por lo que ésta está mucho más cerca de la solución buscada, con el consiguiente ahorro en el número de iteraciones totales.

En la figura 4.2.2 se presenta el algoritmo predictor multi-corrector basado en desplazamientos modificado para imponer los grados de libertad prescritos a al resolver el sistema de ecuaciones en la iteración 0. Obsérvese que la “modificación” de la alternativa (a) respecto a la (b) consiste en hacer la distinción entre los grados de libertad libres y los prescritos en el paso 9, en lugar de hacerlo en el paso 4. Consecuentemente y desde el punto de vista de la implementación del algoritmo iterativo, la alternativa (b) es una ligera modificación de la (a), sin embargo, el ahorro en el número de iteraciones de un problema no-lineal puede llegar a ser significativo. Lamentablemente la estrategia (a) es la única que se puede utilizar en el método explícito basado en aceleraciones que se describió en el apartado 7.2 del Capítulo II (ver figura 2.7.2.1), por lo que ésta es una desventaja más del método explícito.

- (1) Se inicializan todas las variables y se calculan aquellas matrices que son constantes durante el proceso de cálculo:

$$t := t^0, \quad \Delta t := \Delta t^0, \quad M, \quad C.$$

- (2) Si el tiempo  $t$  ha llegado al tiempo final, entonces el análisis ha concluido.

- (3) Se calculan los vectores que son constantes durante el proceso iterativo:

$$\mathbf{f}^{t+\Delta t} := \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{b}^{t+\Delta t} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^{t+\Delta t} d\Gamma$$

- (4) Se inicializa el contador de iteraciones:  $i := 0$  y se realiza una predicción para el incremento de desplazamientos  $\Delta \mathbf{a}_{i=0}^{t+\Delta t}$ . Es importante notar que esta predicción se hace para todos los grados de libertad sin diferenciar los prescritos.

$$\Delta \mathbf{a}_{i=0}^{t+\Delta t} := 0 \quad \text{por ejemplo}$$

- (5) Se corrigen los desplazamientos, las velocidades y las aceleraciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i^{t+\Delta t} &:= \mathbf{a}^t + \Delta \mathbf{a}_i^{t+\Delta t} \\ \dot{\mathbf{a}}_i^{t+\Delta t} &:= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{a}_i^{t+\Delta t} - \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{a}}^t - \Delta t \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{a}}^t \\ \ddot{\mathbf{a}}_i^{t+\Delta t} &:= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{a}_i^{t+\Delta t} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{a}}^t - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{a}}^t \end{aligned}$$

- (6) Se calcula el vector de fuerzas residuales:

$$\Psi_i := \mathbf{f}^{t+\Delta t} - M \ddot{\mathbf{a}}_i^{t+\Delta t} - C \dot{\mathbf{a}}_i^{t+\Delta t} - g(\mathbf{a}_i^{t+\Delta t})$$

- (7) Sólo si  $i > 0$  y si la norma preestablecida del vector de fuerzas residuales es suficientemente pequeña  $\|\Psi_i\| \leq \epsilon$ , entonces se ha convergido; se actualiza el tiempo  $t := t + \Delta t$  y se continúa con el paso (2).

- (8) Si es necesario, según el algoritmo empleado, se ensambla y factoriza la matriz efectiva:

$$[\tilde{K}] := \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} C \right] + \left[ \frac{\partial g}{\partial \Delta a} \right]_{\Delta a_i^{t+\Delta t}}$$

- (9) Se actualiza el incremento de desplazamientos. En los grados de libertad prescritos se impone: si  $i = 0$ :  $(\underline{\Delta a}_i^{t+\Delta t} - \Delta a_{i=0}^{t+\Delta t})$ , si  $i \neq 0$ : (0).

$$\Delta \mathbf{a}_{i+1}^{t+\Delta t} := \Delta \mathbf{a}_i^{t+\Delta t} + [\tilde{K}]^{-1} \Psi_i$$

- (10) Se incrementa el contador de iteraciones:  $i := i + 1$  y se continúa con el paso (5).

Figura 4.2.2 Algoritmo predictor multi-corrector con iteración inicial.

### 3. CONTORNOS TRANSPARENTES

#### 3.1. Introducción

Generalmente, el terreno y el fluido desde un punto de vista práctico se pueden considerar como medios abiertos semi-infinitos. Existen numerosos trabajos dedicados a la generación de soluciones para problemas de este tipo, en los que el dominio de análisis es ilimitado.<sup>†</sup>

Si se quiere que el dominio analizado tenga dimensiones finitas, una posible opción es “cortar” el dominio (fluido y/o terreno) a una distancia apropiada para que las condiciones de contorno de la estructura no queden sensiblemente alteradas. En el caso de que las cargas que actúan tengan carácter dinámico, el contorno por muy lejos que se encuentre, reflejará ondas originadas por vibración de la estructura a la zona discretizada del terreno, en lugar de dejarlas pasar hacia el infinito, alterando así los resultados.

En este trabajo, y con el fin de reproducir lo más fielmente posible los efectos de un sismo real en el que las ondas viajan desde y hacia el exterior del dominio finito considerado en el análisis, se proponen unos elementos de contorno ficticio, transparentes a la propagación de ondas, constituidos por amortiguadores viscosos para ser utilizados tanto en el fluido como en el terreno. Estos elementos han sido desarrollados con el fin de permitir que las ondas que “viajan” por el dominio puedan salir de él sin reflejarse en el contorno y, a su vez, se pueda imponer una onda entrante procedente del exterior del dominio.

#### 3.2. Solución unidimensional de la ecuación de onda

En el Capítulo III se dedujo la ecuación de onda que gobierna el problema en presiones (3.4.2.6):

$$\nabla^2 P = \frac{1}{c^2} \ddot{P} \quad (4.3.2.1)$$

donde  $P = P(x, y, z, t)$  es la presión del fluido y  $c = \sqrt{K/\rho}$  es la velocidad del sonido en el medio, siendo  $K$  el módulo de deformación volumétrica y  $\rho$  la densidad.

---

<sup>†</sup> [AA][Be1][Be2][BEC][BeM][BZ][Ca][CMC][Ku][LH][LK][She][SBZ][ZBBS][ZBS1][ZBS2][ZEB][ZKB]

En el caso unidimensional se tiene  $P = P(x, t)$  y la expresión (1) se reduce a:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (4.3.2.2)$$

que es la ecuación diferencial de onda unidimensional, cuya solución general<sup>[HS][LL]</sup> viene dada por:

$$P = f(x - ct) + g(x + ct) = f(\xi) + g(\eta) \quad (4.3.2.3)$$

con:

$$\xi = x - ct \quad y \quad \eta = x + ct \quad (4.3.2.4)$$

Para mostrar que ésta es la solución, sólo hace falta observar que:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = f'' + g'' \quad (4.3.2.5)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2(f'' + g'') \quad (4.3.2.6)$$

siendo:

$$f'' = \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} \quad y \quad g'' = \frac{d^2 g(\eta)}{d\eta^2} \quad (4.3.2.7)$$

por lo que:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (4.3.2.8)$$

La solución (3) de la ecuación diferencial (2) se puede interpretar (ver figura 4.3.2.1) como la superposición de dos ondas: "f" con velocidad  $c$  viajando hacia  $+\infty$  y, "g" con velocidad  $-c$  viajando hacia  $-\infty$ .

Supongamos que se quiere imponer el valor de una onda entrante dada  $v(t) \forall t$  en el punto del contorno  $x = x^+$ . Para esto se requiere un elemento transparente de contorno unidimensional en  $x^+$  que deje pasar cualquier onda  $f(x^+ - ct)$ , pero que imponga una onda prescrita  $g(x^+ + ct) \forall t$ .

Consecuentemente, debe cumplirse que:

$$g(x^+ + ct) = v(t) \quad \forall t \quad (4.3.2.9)$$

entonces la onda "g" puede escribirse como:

$$\begin{aligned} g(x + ct) &= g(x^+ + c\left(\frac{x - x^+}{c} + t\right)) \\ &= g(x^+ + ct^*) = v(t^*) \\ &= v\left(\frac{x - x^+}{c} + t\right) \end{aligned} \quad (4.3.2.10)$$

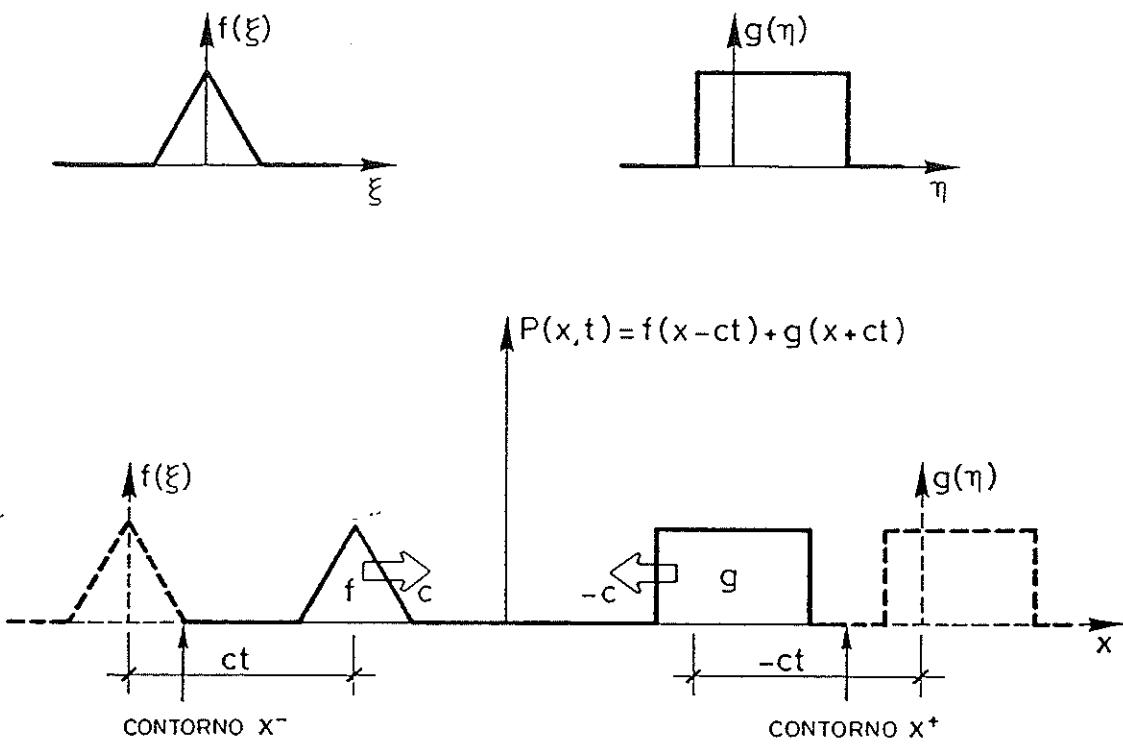


Figura 4.3.2.1 Solución de la ecuación de onda unidimensional.

por lo que la solución de (2) sujeta a  $g(x^+ + ct) = v(t)$  es:

$$\begin{aligned} P(x, t) &= f(x - ct) + g(x + ct) \\ &= f(x - ct) + v\left(\frac{x - x^+}{c} + t\right) \end{aligned} \quad (4.3.2.11)$$

Para encontrar la condición que se debe imponer en el contorno  $x^+$  se deriva (11) con respecto a  $t$  y  $x$ :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -cf' + \dot{v} \Rightarrow f' = -\frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{c} \dot{v} \quad (4.3.2.12)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = f' + \frac{1}{c} \dot{v} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{2}{c} \dot{v} \quad (4.3.2.13)$$

siendo:

$$\dot{v} = \frac{dv(t)}{dt} \quad \text{y} \quad f' = \frac{df(\xi)}{d\xi} \quad (4.3.2.14)$$

Así, la condición de contorno transparente con onda entrante impuesta en  $x^+$  se reduce de la ecuación (13) a:

$$\frac{\partial P(x^+, t)}{\partial x} = -\frac{1}{c} \left[ \frac{\partial P(x^+, t)}{\partial t} - 2\dot{v}(t) \right] \quad (4.3.2.15)$$

Cuando  $\dot{v}(t) = 0$  se tiene el caso particular de contorno de radiación en el que la onda entrante es nula y que deja pasar las ondas provenientes del interior del dominio, sin reflexión.

### 3.3. Generalización a varias dimensiones

El resultado dado por (4.3.2.15) se puede extender a varias dimensiones para onda entrante y de radiación saliente normal al contorno. Para esto, se utiliza el operador gradiente  $\nabla$  y un vector  $n$  normal exterior al contorno  $\Gamma_{tr}$  (ver figura 4.3.3.1), de tal forma que el término:

$$\frac{\partial P(x^+, t)}{\partial x} \quad (4.3.3.1)$$

del problema unidimensional se puede reemplazar, en el contorno del problema multidimensional, por:

$$\nabla P(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \quad (4.3.3.2)$$

Consecuentemente, la condición general sobre el contorno transparente  $\Gamma_{tr}$  es:

$$\nabla P \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{c} [\dot{P} - 2\dot{v}(t)] \quad (4.3.3.3)$$

siendo:

$$\dot{P} = \frac{\partial P(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (4.3.3.4)$$

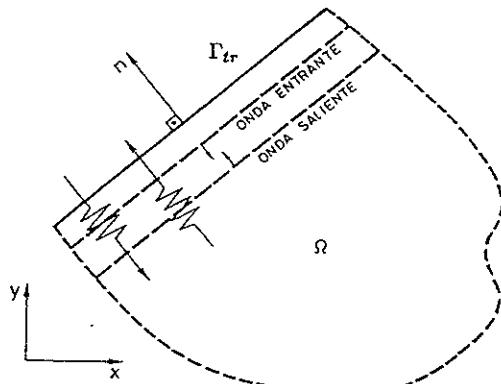


Figura 4.3.3.1 Normal exterior al contorno  $\Gamma_{tr}$ .

### 3.4. Extensión al problema elástico

La solución obtenida en el apartado anterior se puede extender a un problema elástico lineal cuando las ondas que se transmiten por el medio elástico son planas, esto es, cuando el campo de desplazamientos en cada instante de tiempo se puede escribir –usando una rotación de coordenadas adecuada– en función de una única coordenada espacial  $x_{\underline{k}}$ .

Usando notación tensorial<sup>†</sup> se tiene:

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = u_i(x_{\underline{k}}, t) \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.3.4.1)$$

que corresponde a una onda plana que viaja en la dirección del eje  $x_{\underline{k}}$ .

En estas circunstancias, el tensor de pequeñas deformaciones (2.2.2) dado por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.3.4.2)$$

al tener en cuenta que:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_{\underline{k}}} \delta_{j\underline{k}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial u_j}{\partial x_{\underline{k}}} \delta_{i\underline{k}} \quad (4.3.4.3)$$

siendo  $\delta_{ij}$  la delta de Kronecker, se reduce a:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_{\underline{k}}} \delta_{j\underline{k}} + \frac{\partial u_j}{\partial x_{\underline{k}}} \delta_{i\underline{k}} \right) \quad (4.3.4.4)$$

La ecuación constitutiva elástica lineal (2.2.4) en notación tensorial se escribe<sup>[Mal]</sup>:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (4.3.4.5)$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé.

Usando (4) se tiene:

$$\varepsilon_{ll} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_{\underline{k}}} \delta_{l\underline{k}} + \frac{\partial u_l}{\partial x_{\underline{k}}} \delta_{l\underline{k}} \right) = \frac{\partial u_{\underline{k}}}{\partial x_{\underline{k}}} \quad (4.3.4.6)$$

reemplazando (4) y (6) en (5) se obtiene el tensor de tensiones  $\sigma$  de un medio elástico en el que “viaja” una onda plana en la dirección del eje  $x_{\underline{k}}$ :

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_{\underline{k}}}{\partial x_{\underline{k}}} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_{\underline{k}}} \delta_{j\underline{k}} + \frac{\partial u_j}{\partial x_{\underline{k}}} \delta_{i\underline{k}} \right) \quad (4.3.4.7)$$

<sup>†</sup> Se usa la convención de suma en índices repetidos dada por Einstein, excepto en los índices denotados con una barra debajo como  $\underline{k}$  que, en este apartado, corresponde a la dirección fija y arbitraria en la que viaja la onda plana.

Prescindiendo de las fuerzas de volumen, la ecuación del movimiento (2.5.2) en notación tensorial se escribe:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (4.3.4.8)$$

si se deriva (7) con respecto a  $x_j$  se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= \lambda \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_j} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} \delta_{jk} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_j} \delta_{ik} \right) \\ &= \lambda \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2} \delta_{ik} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2} \delta_{ik} \right) \\ &= (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2} \delta_{ik} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \end{aligned} \quad (4.3.4.9)$$

que al reemplazar en (8) resulta en:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2} \delta_{ik} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (4.3.4.10)$$

Esto último es un sistema de tres ecuaciones de onda:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} = \frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.3.4.11)$$

con:

$$c_i = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} & \text{para } i = k \\ \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} & \text{para } i \neq k \end{cases} \quad (4.3.4.12)$$

Según lo visto en el apartado (3.2) ecuación (4.3.2.3), la solución general de (11) es:

$$u_i = u_i^+(x_k - c_i t) + u_i^-(x_k + c_i t) \quad (4.3.4.13)$$

y de esta forma, la condición de contorno transparente con onda entrante impuesta (4.3.2.15) y de radiación saliente, encontrada en el apartado 3.2, se puede extender inmediatamente a la ecuación elástica con ondas planas:

$$\frac{\partial u_i(x_k, t)}{\partial x_k} = -\frac{1}{c_i} \left[ \frac{\partial u_i(x_k, t)}{\partial t} - 2 \dot{v}_i(t) \right] \quad (4.3.4.14)$$

para todo  $x_k$  que pertenezca al contorno transparente y siendo  $\dot{v}_i(t)$  el vector velocidad de onda entrante prescrito.

Multiplicando el tensor de tensiones (7) por un vector  $\mathbf{n}$  normal al contorno, que a su vez es perpendicular a la dirección de la onda  $n_j = \delta_{jk}$ , se encuentra:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \sigma_{ij} \delta_{jk} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ik} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \delta_{ik} \right) \quad (4.3.4.15)$$

reemplazando (14) en (15) se obtiene el vector de fuerzas que se debe imponer en el contorno transparente:

$$t_i = - \left[ \frac{\lambda + \mu}{c_k} \delta_{ik} + \frac{\mu}{c_i} \right] \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} - 2 \dot{v}_i \right] \quad (4.3.4.16)$$

que al reemplazar  $c_i$  según (12) queda:

$$t_i = \begin{cases} -\sqrt{\rho(\lambda + 2\mu)} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} - 2 \dot{v}_i \right] & \text{para } i = k \\ -\sqrt{\rho\mu} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} - 2 \dot{v}_i \right] & \text{para } i \neq k \end{cases} \quad (4.3.4.17)$$

Matricialmente esta ecuación se escribe:

$$\mathbf{t}_r = -\mathbf{T}^T \mathbf{Q}_r \mathbf{T} [\dot{\mathbf{u}} - 2 \dot{\mathbf{v}}] \quad (4.3.4.18)$$

con:

$$\mathbf{Q}_r = \begin{bmatrix} \sqrt{\rho(\lambda + 2\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\rho\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\rho\mu} \end{bmatrix} \quad (4.3.4.19)$$

y  $\mathbf{T}$  una matriz de transformación adecuada dada por el vector  $\mathbf{n}$  normal al contorno transparente. De esta forma el eje  $x_k$ , y por tanto el vector  $\mathbf{n}$ , puede estar orientado arbitrariamente en cualquier dirección del espacio.

### 3.5. Discretización por elementos finitos

Las condiciones de contorno transparente: (4.3.3.3) en el fluido y (4.3.4.18) en el sólido se pueden incluir fácilmente en las ecuaciones discretizadas por elementos finitos encontradas en los Capítulos II y III, respectivamente. A continuación se presentan los términos que se deben añadir a las ecuaciones de residuos ponderados y las correspondientes ecuaciones semi-discretas para incluir dichos contornos.

### 3.5.1. Inclusión del contorno transparente en el sólido

La ecuación de residuos ponderados (2.2.1) incluyendo las fuerzas de inercia conduce a al Principio de los Trabajos Virtuales (2.5.7). Al incluir el contorno transparente  $\Gamma_{tr}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\epsilon})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \rho (\delta \mathbf{u})^T \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \rho (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{t}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{tr}} (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{t}_r d\Gamma \end{aligned} \quad (4.3.5.1.1)$$

y discretizando según (2.6.1) a (2.6.3) se obtiene la expresión general:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}^t + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}^t + \mathbf{g}(\mathbf{a}^t) = \mathbf{f}^t \quad (4.3.5.1.2)$$

donde:

$$\mathbf{C} = \int_{\Gamma_{tr}} \mathbf{N}^T \mathbf{T}^T \mathbf{Q}_r \mathbf{T} \mathbf{N} d\Gamma \quad (4.3.5.1.3)$$

$$\mathbf{f}^t = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{b}^t d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^{*t} d\Gamma + 2 \int_{\Gamma_{tr}} \mathbf{N}^T \mathbf{T}^T \mathbf{Q}_r \mathbf{T} \dot{\mathbf{v}}^t d\Gamma \quad (4.3.5.1.4)$$

son la matriz de amortiguamiento y el vector de fuerzas externas modificados para tener en cuenta el contorno transparente  $\Gamma_{tr}$ , respectivamente. La matriz de masa  $\mathbf{M}$  y el vector de fuerzas internas  $\mathbf{g}(\mathbf{a}^t)$  se mantienen exactamente igual a como se definieron en el Capítulo II.

### 3.5.2. Inclusión del contorno transparente en el fluido

Para incluir contornos transparentes  $\Gamma_{tr}$  a un fluido, simplemente se debe imponer la condición general dada por (4.3.3.3) en la integral (3.6.1) (ver Capítulo III apartado 6):

$$\int_{\Gamma_{tr}} \hat{N}_i \nabla P \cdot \mathbf{n} d\Gamma = -\frac{1}{c} \int_{\Gamma_{tr}} \hat{N}_i \dot{P} d\Gamma + \frac{2}{c} \int_{\Gamma_{tr}} \hat{N}_i \dot{v} d\Gamma \quad (4.3.5.2.1)$$

que al discretizar según (3.8.2) a (3.8.4) conduce a la expresión general:

$$\hat{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{p}}^t + \hat{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{p}}^t + \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{p}^t) = \hat{\mathbf{f}}^t \quad (4.3.5.2.2)$$

donde:

$$\hat{\mathbf{f}}^t = - \int_{\Gamma_u} \rho \hat{\mathbf{N}}^T \ddot{\mathbf{u}}^t \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \frac{2}{c} \int_{\Gamma_{tr}} \hat{\mathbf{N}}^T \dot{\mathbf{v}}^t d\Gamma \quad (4.3.5.2.3)$$

es el vector de fuerzas externas modificado para tener en cuenta contornos transparentes que incluyen la imposición de una onda entrante dada por  $\dot{\mathbf{v}}^t$ . Las matrices de (2):  $\hat{\mathbf{M}}$ ,  $\hat{\mathbf{C}}$  y  $\hat{\mathbf{K}}$ , permanecen igual a como se definieron en el Capítulo III.

### 3.6. Condición de repetitividad

La extensión de la solución de la ecuación de onda unidimensional a dominios bidimensionales o tridimensionales requiere que la onda entrante y de radiación saliente sean normales al contorno. Cuando se considera un dominio prismático excitado por una onda sísmica plana que se propaga verticalmente –que es el caso que nos ocupa–, se podría pensar que los contornos laterales no presentan ningún problema debido a que la onda no entra ni sale por ellos. Sin embargo cualquier perturbación en la superficie del terreno, ya sea en forma de estructura o de excavación, originará ondas de reflexión en todas direcciones que llegarán a los contornos laterales. Por lo que éstos deben ser capaces de irradiar ondas.

Una primera solución, para los contornos laterales, es imponerles la condición de contorno transparente desarrollada en este capítulo. Sin embargo, las ondas no incidirán normalmente a dichos contornos y, como se mostrará en el apartado 5.1.1, los contornos transparentes presentan un error cuando la onda que viaja por el medio no incide perpendicularmente a ellos. Como alternativa, para el tratamiento de dichos contornos, se puede utilizar la denominada condición de repetitividad que ha mostrado dar buenos resultados en análisis dinámicos no-lineales<sup>[ZBS3]</sup> a un costo numérico relativamente bajo.

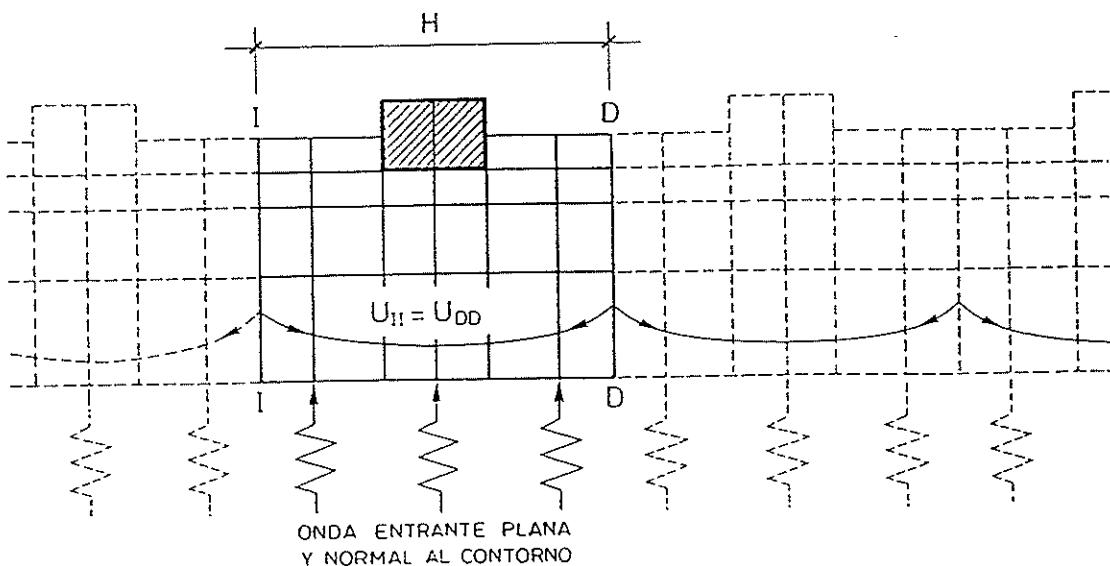


Figura 4.3.6.1 Condición de repetitividad para los contornos laterales.

La condición de repetitividad consiste en imponer que los grados de libertad de las secciones II y DD estén “ligadas” (ver figura 4.3.6.1), es decir, que los desplazamientos de los nudos situados en el contorno de la izquierda sean iguales a los de la derecha. Esto implica un carácter periódico

en la perturbación de la superficie, como si la misma estructura o excavación existiera en forma cíclica. Desde un punto de vista físico, es evidente que se obtendrán resultados cada vez más cercanos a la realidad, a medida que la longitud  $H$  de la zona discretizada sea mayor. Sin embargo, numéricamente se puede constatar que se obtienen resultados adecuados incluso para longitudes de  $H$  relativamente pequeñas. Finalmente se debe añadir que la condición de repetitividad es la única alternativa coherente que permite que las ondas que ingresan por el contorno inferior sean efectivamente planas.

## 4. EXCITACIÓN SÍSMICA

### 4.1. Introducción

Probablemente la carga más importante que puede actuar sobre una presa, y definitivamente la más complicada de analizar, es la excitación debida a causas sísmicas. Los terremotos son causados por movimientos de placas tectónicas. El lento movimiento de las placas litosféricas produce acumulación de tensiones –esfuerzos– en la litosfera frágil y fría y en sus zonas más duras, llamadas asperezas. Estos esfuerzos se liberan bruscamente cuando se sobrepasa la resistencia máxima y las rocas se rompen –en un lugar muy localizado del terreno al que se denomina hipocentro o foco<sup>[C a B]</sup>–, transmitiéndose la rotura a una parte o a toda la falla. Éste es el terremoto. La vibración desencadenada con la ruptura genera ondas elásticas internas que se propagan en todas direcciones. Estas ondas, al “viajar” por la Tierra debido a sus cambios de densidad, se dividen, reflejan, refractan y difractan en las diferentes discontinuidades que encuentran a su paso, siguiendo trayectos en general curvos (de acuerdo al principio de Fermat de propagarse por el camino que la perturbación puede recorrer en el menor tiempo). Cuando las ondas internas alcanzan la superficie de la Tierra vuelven a dividirse formando, esta vez, ondas superficiales. Tanto las ondas internas como las superficiales se propagan por todo el planeta. Así, en el caso de sismos muy fuertes las ondas superficiales pueden llegar a dar vueltas varias veces a toda la Tierra<sup>[Pay]</sup>.

El proceso descrito es muy complejo, sin embargo, incluso si se conocieran todos los detalles de cómo se produce un terremoto y las propiedades del terreno por donde viajan las ondas sísmicas hasta el lugar de la estructura (lo cual no es el caso), sería imposible modelar todos los aspectos del fenómeno debido a las dimensiones físicas de la Tierra comparadas con las de la estructura. En cualquier caso, todas las indeterminaciones que rodean el fenómeno hacen imposible pretender hacer un análisis completo del problema. Consecuentemente, se deben aceptar algunas hipótesis simplificativas que permitan caracterizar o tipificar la excitación sísmica probable a través de un conjunto de parámetros tales como la aceleración máxima del terreno, duración del sismo, contenido de frecuencias, espectro de diseño, etc. Todos éstos basados

en información existente tal como: el tipo de terreno y grado de sismicidad del lugar, distancia focal y magnitud probables, registros de terremotos en la misma zona o zonas similares, tipo de estructura, características propias del modelo a utilizar, etc. El propósito de los apartados que siguen es el de describir un modelo estocástico que permita, utilizando dichos parámetros, generar señales sísmicas artificiales de desplazamiento, velocidad y aceleración con características similares a registros existentes de terremotos reales.

#### 4.2. Caracterización de la excitación sísmica

Las fluctuaciones aleatorias observadas en registros de terremotos con grandes intensidades siguen patrones generales que pueden ser usados para el diseño de un modelo estocástico que simule sus efectos. Los terremotos empiezan con pequeñas amplitudes que se van incrementando en el tiempo hasta que se alcanza una intensidad máxima, ésta se mantiene por algunos segundos y, luego disminuye paulatinamente hasta que el movimiento termina. También se puede observar que los terremotos reales no excitan todas las frecuencias de una estructura, sino que presentan frecuencias predominantes en una banda relativamente pequeña. Así por ejemplo, terremotos registrados en terrenos rocosos a distancias cercanas al epicentro<sup>†</sup> muestran frecuencias dominantes entre 10 y 30[rad/s]<sup>[ArP][Ras]</sup>. Esto se debe a que el terreno hace de "filtro" de las ondas que, inicialmente (en el hipocentro), contienen un amplio rango de frecuencias.

Los procedimientos actuales de cálculo numérico de la respuesta sísmica permiten considerar solamente las condiciones locales del terreno que rodea a la estructura. El procedimiento que se sigue es el siguiente: dependiendo de la zona sísmica, y ya sea de la normativa vigente<sup>[NS]</sup> o de experiencias en estructuras similares, se establece la probabilidad de que el sismo utilizado para el análisis sea superado durante un periodo de retorno especificado en función de la vida útil de la estructura. Para esto, el tipo de estructura desempeña un papel importante. En una estructura que tiene un alto riesgo potencial (como una presa o una central nuclear), esta probabilidad será pequeña. Se pueden elegir probabilidades algo mayores, pero aún pequeñas, para estructuras especiales como hospitales o estaciones de bomberos y serán mayores en estructuras menos delicadas. Una vez establecida la probabilidad, se determina la aceleración máxima del terreno  $\ddot{x}_{max}^g$ , que es el parámetro escalar más importante para caracterizar la excitación sísmica que se usará en el diseño. Los otros parámetros, tales como la duración del sismo o el contenido de frecuencias, son seleccionados –un tanto empíricamente– basándose en registros de terremotos (si se disponen) ocurridos en la región o (como es normal) en lugares con características sísmicas similares.

<sup>†</sup> Se denomina epicentro a la proyección vertical del hipocentro o foco en la superficie terrestre

Con todo esto se tiene en cuenta, con relativa aproximación, el mecanismo de generación del sismo, las características de los suelos por los que se transmiten las ondas, las condiciones geológicas, y las condiciones locales del terreno en el que se fundará la estructura. Todas estas actividades de definición de la excitación sísmica preceden a cualquier análisis y, la gran cantidad de incertidumbres provienen de esta fase.

El proceso descrito concluye especificando un espectro de desplazamientos en el punto de control<sup>[NeR][Wi][CIP]</sup>. Este “punto de control” se entiende que es un punto libre de la superficie del terreno (antes de la construcción de la estructura o excavación de ningún tipo). Esto quiere decir que se especifica el desplazamiento máximo relativo  $S_u$  de sistemas de un solo grado de libertad –de masa  $m$ , rigidez  $k$  y amortiguamiento  $c$ – colocados en la superficie libre del terreno cubriendo toda la gama de frecuencias  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  para una fracción dada  $\xi = c/c_c$  del amortiguamiento crítico  $c_c = 2m\omega_n$  (ver figura 4.4.2.1). Este “desplazamiento espectral” se usa para definir otras dos medidas: la “velocidad pseudo-espectral”  $S_{\dot{u}} = \omega_n S_u$ , que aproximadamente está muy cerca de la máxima velocidad relativa (excepto a muy bajas frecuencias) y la “aceleración pseudo-espectral”  $S_{\ddot{u}} = \omega_n^2 S_u$  que, desde un punto de vista práctico, es igual a la aceleración total máxima:

$$S_u(\omega_n, \xi) = |u(t)|_{max} \quad (4.4.2.1)$$

$$S_{\dot{u}}(\omega_n, \xi) = \omega_n S_u \simeq |\dot{u}(t)|_{max} \quad (4.4.2.2)$$

$$S_{\ddot{u}}(\omega_n, \xi) = \omega_n^2 S_u \simeq |\ddot{u}(t)|_{max} \quad (4.4.2.3)$$

La información necesaria para el análisis se debe suministrar en la base del modelo. Sin embargo, el espectro de respuesta está dado en el “punto de control”. Por esto, lo primero que se hace es calcular el espectro de la excitación que, impuesta al terreno en la base del modelo tendrá, cuando llegue a la superficie, el espectro de respuesta especificado en el punto de control –procedimiento denominado deconvolución-. Es aquí donde se tienen en cuenta, con mucha precisión, las condiciones locales del terreno. A este nuevo espectro dado en la base del modelo se le denominará aquí “espectro de diseño” (ver figura 4.4.2.2).

Una vez conocido el espectro de diseño, se puede calcular la fuerza máxima a la que se verá solicitado un sistema lineal de un solo grado de libertad con  $ku_{max} = kS_u$  o simplemente con  $mS_{\ddot{u}}$ . También se puede calcular la respuesta máxima, para un sistema lineal de muchos grados de libertad, haciendo uso del análisis modal clásico<sup>[CaB]</sup>.

Como es conocido, para el análisis no-lineal de una estructura, en la que se puede tener en cuenta la interacción con el terreno o el fluido, la descom-

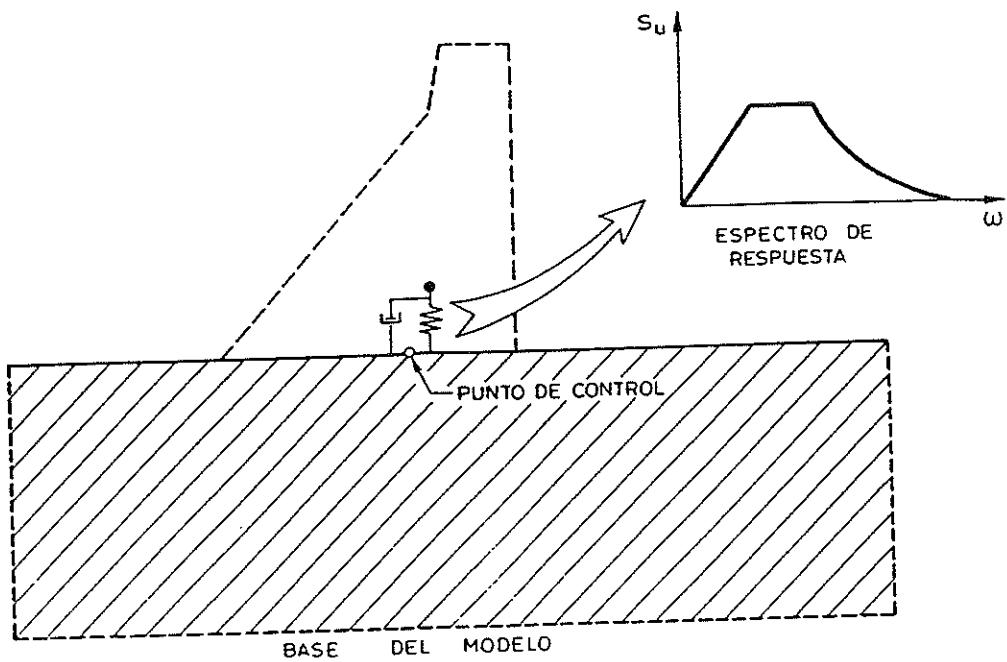


Figura 4.4.2.1 Sistema dinámico de un solo grado de libertad en el punto de control.

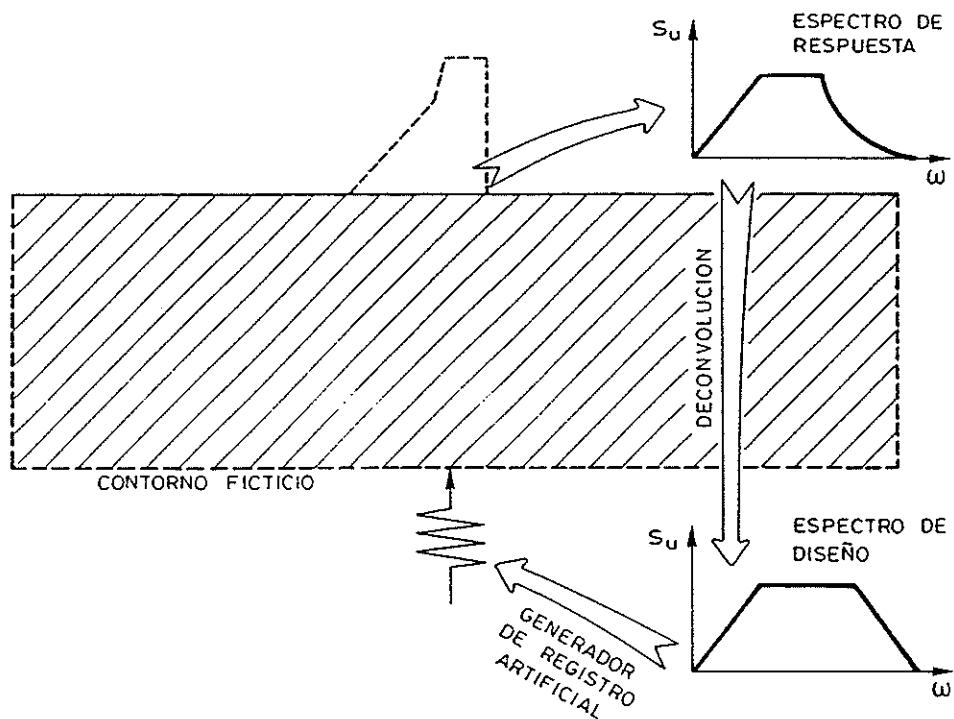


Figura 4.4.2.2 Contorno ficticio donde se interrumpe el modelo.

posición modal no es aplicable. Es necesario hacer un análisis en el dominio del tiempo (paso a paso) imponiendo una excitación sísmica en la base del modelo. Consecuentemente, es necesario disponer de un registro (velocidades, según el modelo descrito anteriormente) en función del tiempo en el contorno del modelo. Con este propósito, se utilizan generadores de registros artificiales que están basados en la teoría de vibraciones aleatorias<sup>†</sup> considerando las características estadísticas generales de los registros sísmicos<sup>[GaV][Ho]</sup> y que pueden ajustarse en la base del modelo a espectros obtenidos por deconvolución de los correspondientes espectros en la superficie.

### 4.3. Alternativas de generación de registros

Existen numerosos procedimientos desarrollados con el objeto de generar registros sísmicos artificiales<sup>‡</sup>. De acuerdo con la forma de generar la señal y su compatibilidad con el espectro de diseño destacan tres grandes métodos: 1) Métodos aleatorios compatibles, 2) Métodos aleatorios no compatibles y 3) Métodos simplificados cuasi-compatibles.

#### 4.3.1. Métodos aleatorios compatibles con el espectro de diseño

Entre estos métodos se encuadran aquellos generadores de señales basados en el hecho de que cualquier función periódica puede ser expandida en una serie de ondas sinusoidales:

$$\ddot{x}(t) = \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_i t + \phi_i) \quad (4.4.3.1.1)$$

donde  $\phi_i$ ,  $\omega_i$  y  $A_i$  son un conjunto de ángulos de fase, frecuencias y amplitudes, respectivamente.

Fijando un número  $n$  de frecuencias  $\omega_i$ , equi-espaciadas en el rango de interés, y generando aleatoriamente el mismo número  $n$  de ángulos de fase  $\phi_i$ , se pueden elegir adecuadamente  $n$  amplitudes  $A_i$  para que el espectro de la señal  $\ddot{x}(t)$  sea compatible con el espectro de diseño. Evidentemente, a medida que el número  $n$  sea mayor, la compatibilidad será tanto mejor, hasta alcanzar el grado de precisión deseado.

Basándose en el trabajo desarrollado en la referencia [SIM], para este trabajo se ha escrito un programa de generación de señales artificiales<sup>[BOG]</sup> que utiliza dicho desarrollo en serie. En el apartado 4.4 se da una descripción detallada de este método.

<sup>†</sup> Una descripción adecuada de la teoría de vibraciones aleatorias se puede encontrar en las siguientes referencias: [Be][Cra1][CrM][Dar][Li][Rob].

<sup>‡</sup> [BOG][PSE][BGB][GBS][Ras][ArP][Bi][JE][WG].

#### 4.3.2. Métodos aleatorios no compatibles con el espectro de diseño

En este método<sup>[PSE]</sup> se inscriben aquellos generadores en los que la señal sísmica artificial se consigue a través de filtrar un ruido blanco ideal<sup>†</sup>. Haciendo una interpretación física del ruido blanco<sup>[Dar]</sup>, diversos autores usan una serie de pulsos generados aleatoriamente en el tiempo para simular ruido blanco de banda ancha<sup>[BGB][GBS]</sup>. Otros han llegado incluso a generar ruidos no estacionarios de distribución Gaussiana<sup>[SS]</sup>. Luego, el filtro es seleccionado de manera tal que, en media, las señales artificiales generadas con este modelo simulen las propiedades más significativas de registros existentes. Una restricción del modelo es que su uso sólo es válido para simular terremotos producidos en terrenos firmes y relativamente próximos al epicentro<sup>[Ras]</sup>.

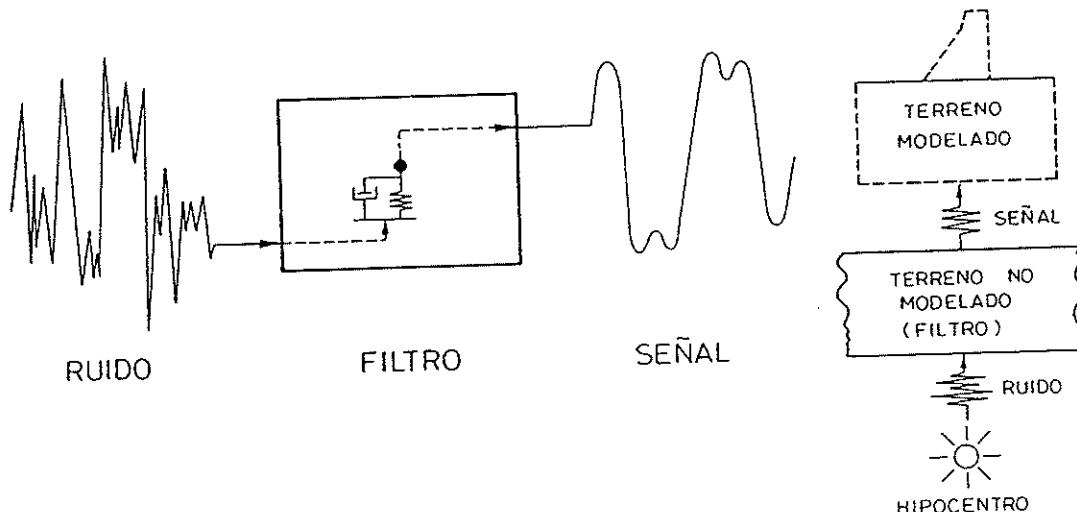


Figura 4.4.3.2.1 Acelerograma generado a través de filtrar un ruido.

De esta forma, el modelo está constituido por un generador aleatorio de ruido y un filtro. El ruido que, como ya se ha dicho, puede estar constituido por pulsos generados utilizando un conjunto independiente de números aleatorios de distribución gausiana con media nula y varianza unitaria, representa las aceleraciones de la roca de base "base rock" durante un terremoto. El filtro, del que existen diversos modelos<sup>[ArP][PSE]</sup>, representa el terreno no discretizado entre la roca de base y el inicio del modelo. El más simple de ellos consiste de un sistema de un solo grado de libertad formado por un amortiguador, un resorte y una masa<sup>[PSE]</sup>. Las aceleraciones de la roca de base —el ruido— se imponen al soporte y las aceleraciones absolutas de la masa —obtenidas a través del filtro— son el acelerograma deseado (ver

<sup>†</sup> Se dice que un proceso aleatorio constituye un ruido blanco ideal si su función de densidad espectral de potencia es constante en el intervalo de frecuencias que se extiende de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

figura 4.4.3.2.1). El modelo queda definido al fijar las constantes que definen el filtro. Por ejemplo, Tajimi<sup>[Ta1]</sup> propone, para terrenos firmes, los valores de  $\xi = c/2m\omega_n = 0.6$  y  $\omega_n = \sqrt{k/m} = 5\pi$ , aunque advierte que éstos pueden ser sensiblemente afectados por las condiciones locales del terreno, la distancia al epicentro y otros parámetros significativos. Como se verá en el apartado 4.5, este modelo, con un filtro de segundo orden, puede ser considerado como un caso particular del que se menciona en 4.3.1.

#### 4.3.3. Métodos simplificados quasi-compatibles con el espectro de diseño

Enmarcados dentro de estos métodos se encuentran aquellos generadores en los que la señal artificial es un acelerograma de corta duración constituida por una función simple y cuyo espectro es –de alguna forma– compatible con el espectro de diseño. La idea básica consiste en elegir como acelerograma una función sencilla y ajustar –por algún método– el espectro calculado al del espectro de diseño<sup>[Bi]</sup>. El propósito general es el de obtener un acelerograma que, aunque no se ajuste perfectamente al espectro de diseño, sea simple y de corta duración. A modo de ejemplo se describen dos modelos<sup>[JE][WG]</sup>.

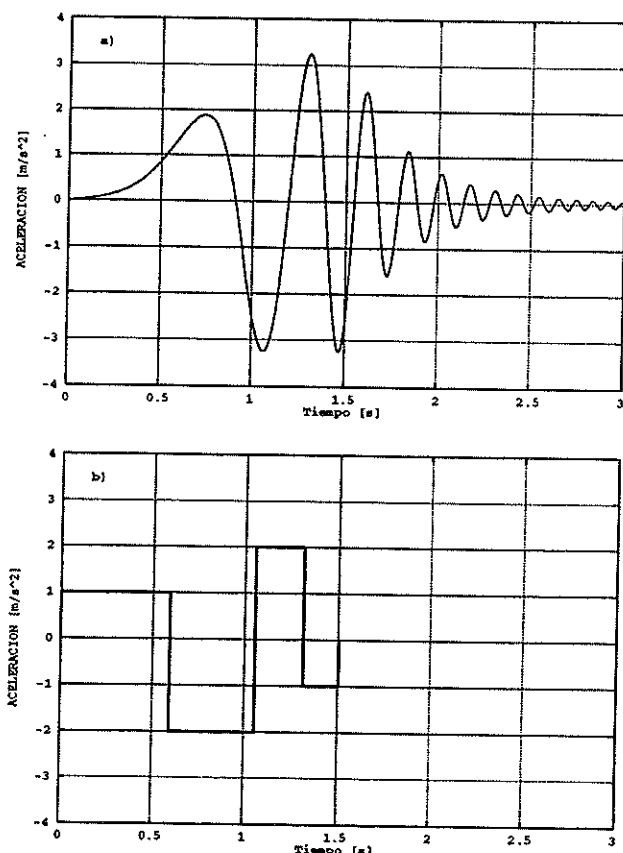


Figura 4.4.3.3.1 a) Acelerograma de Johnson/Epstein,  
b) Acelerograma de Wang/Goel.

- Función sinusoidal

El modelo presentado por Johnson y Epstein en la referencia [JE] usa como función una señal de la forma:

$$\ddot{x} = \ddot{x}_{max}^g(\bar{f}) \sin \theta(t) \quad (4.4.3.3.1)$$

con:

$$\bar{f} = \dot{\theta}(t)/2\pi \quad (4.4.3.3.2)$$

$$\theta(t) = At + Bt^N \quad (4.4.3.3.3)$$

donde  $\ddot{x}$  es el acelerograma buscado,  $\bar{f}$  es una frecuencia dada en [Hz],  $\theta$  es la frecuencia,  $\ddot{x}_{max}^g(\bar{f})$  es la aceleración máxima del terreno dada en función de  $\bar{f}$ ,  $\sin \theta(t)$  es la frecuencia sinusoidal variable y  $A, B, N$  son las incógnitas.

Esta función fue ajustada para aproximar el registro del terremoto de El Centro NS, dando como resultado una relación entre  $\ddot{x}_{max}^g$  (en unidades de la aceleración terrestre  $g$ ) y  $\bar{f}$  (en cps) definida por:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{max}^g &= 0.22\bar{f} & \bar{f} &< 1.5 \\ \ddot{x}_{max}^g &= 0.33 & 1.5 \leq \bar{f} &\leq 3.5 \\ \ddot{x}_{max}^g &= \sqrt{200.16/\bar{f}^3} & 3.5 < \bar{f} \end{aligned}$$

y las constantes:

$$A = 1.0, \quad B = 3.0, \quad N = 3.0$$

La función así definida, tiene una coincidencia aceptable con el espectro de respuesta del terremoto. El acelerograma se muestra en la figura 4.4.3.3.1-a.

- Serie de pulsos

Por otra parte, el modelo presentado por Wang y Goel en la referencia [WG] usa como función una señal formada por una serie de pulsos. El espectro calculado es ajustado al espectro de diseño minimizando una función objetivo que es definida como:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ S_u^d(\omega_i) - S_u(\omega_i, P_j, T_j) \right]^2} \quad j = 1 \dots np \quad (4.4.3.3.4)$$

donde  $n$  es un número fijo de frecuencias,  $np$  es el número de pulsos,  $S_u^d(\omega_i)$  es el espectro de diseño,  $S_u(\omega_i, P_j, T_j)$  es el espectro calculado,  $P_j$  y  $T_j$  son los valores incógnita que proporcionan las amplitudes y duraciones de los pulsos, respectivamente.

Wang y Goel ajustaron este modelo al acelerograma del El Centro NS usando cuatro pulsos ( $np = 4$ ) y encontraron como resultado:  $T_1 = 0.594$ ,  $T_2 = 0.463$ ,  $T_3 = 0.257$ ,  $T_4 = 0.189$ ,  $P_1 = 1$ ,  $P_2 = -2$ ,  $P_3 = 2$ ,  $P_4 = -1$ . Con estos valores, se obtiene una buena coincidencia con el espectro de respuesta del terremoto real. El acelerograma se puede ver en la figura 4.4.3.3.1-b.

Lamentablemente, este tipo de modelos basados en acelerogramas de corta duración no parecen ser muy apropiados para el cálculo materialmente no-lineal ya que justamente por su extremada corta duración no permiten la acumulación de daño<sup>[Bi]</sup>. Sin embargo, pueden ser aceptables para análisis preliminares<sup>[Bi]</sup> donde el modelo de Johnson y Epstein ha demostrado dar mejores resultados que el de Wang y Goel.

#### 4.4. Modelo aleatorio compatible con el espectro de diseño

Como ya se dijo en el apartado 4.3.1, en este método las señales artificiales se definen como una superposición de ondas sinusoidales:

$$\ddot{x}(t) = I(t) \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_i t + \phi_i) \quad (4.4.4.1)$$

donde  $\ddot{x}(t)$  es el acelerograma buscado.

El modelo queda definido cuando se conocen: el número de sinusoides  $n$ , la función envolvente  $I(t)$ , los ángulos de fase  $\phi_i$ , las frecuencias  $\omega_i$  y las amplitudes  $A_i$ :

$n$ : Es un número dado (del orden de 1000) que, al aumentar, mejora la compatibilidad del espectro al dar más “riqueza” en frecuencias a la señal.

$I(t)$ : Para simular el carácter transitorio de los terremotos reales, se utiliza una función de intensidad envolvente determinista  $I(t)$  predefinida. En la figura 4.4.4.1 se muestran algunos ejemplos de funciones obtenidas en base a la observación de registros reales.

$\phi_i$ : El carácter aleatorio de la señal está representado en los ángulos de fase  $\phi_i$  que, son generados aleatoriamente (entre 0 y  $2\pi$ ). Para distintos ángulos de fase y con un espectro de diseño dado, se obtienen diferentes registros artificiales que son similares en su aspecto general (contenido de frecuencias) pero diferentes en el detalle.

$\omega_i$ : Las frecuencias  $\omega_i$  se eligen a intervalos regulares dentro de un rango especificado, de manera tal que el registro contenga todo el rango de frecuencias deseado.

$A_i$ : La señal artificial  $\ddot{x}(t)$  es compatible con el espectro de diseño debido a que las amplitudes  $A_i$  se calculan a partir de la función estacionaria de densidad espectral de potencia  $G_{\ddot{x}}(\omega_n)$  que se obtiene

aproximadamente a partir del espectro de diseño  $S_u(\omega_n)$ . Además, las amplitudes  $A_i$  así obtenidas se pueden modificar adecuadamente "intentando" mejorar el ajuste entre el espectro de la señal y el espectro de diseño.

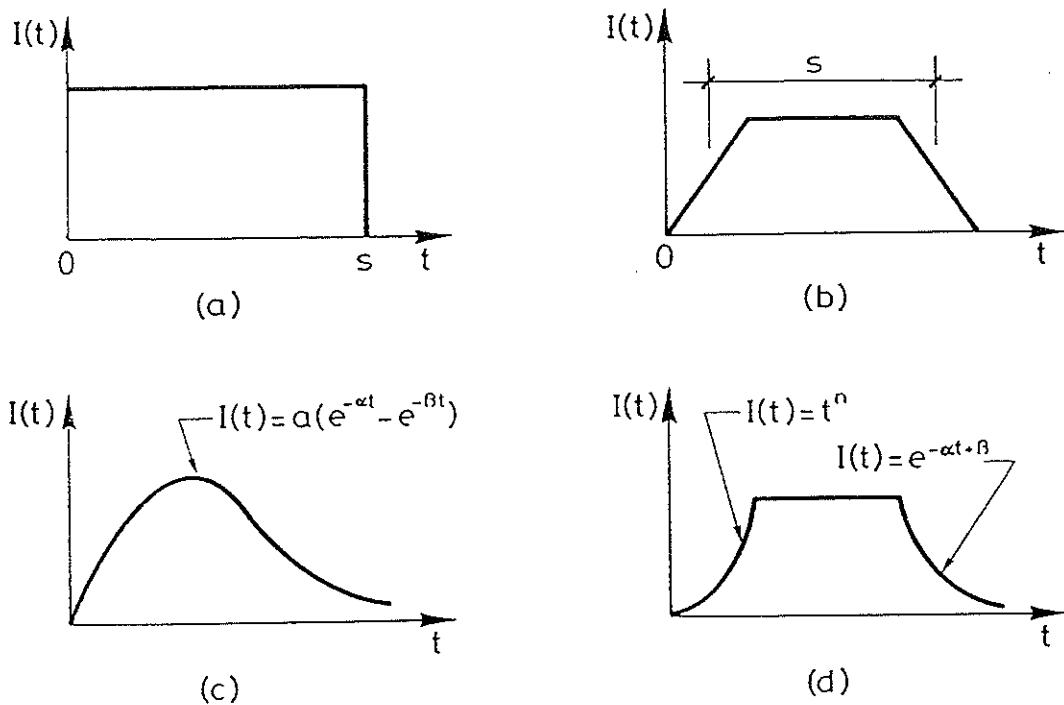


Figura 4.4.4.1 Funciones de intensidad utilizadas para simular el carácter transitorio de los terremotos reales.

#### 4.5. Cálculo de las amplitudes

La función de densidad espectral de potencia (FDEP)  $G_{\tilde{x}}(\omega)$  de un proceso estocástico aleatorio estacionario y ergódico  $\tilde{x}(t)$  se define<sup>[NeR][CaB]</sup> como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación  $R_{\tilde{x}}(\tau)$  de una función muestra  $\tilde{x}_1(t)$  del proceso:

$$G_{\tilde{x}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\tilde{x}}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (4.4.5.1)$$

siendo la función de autocorrelación  $R_{\tilde{x}}(\tau)$  el valor medio del producto  $\tilde{x}_1(t)\tilde{x}_1(t + \tau)$ :

$$R_{\tilde{x}}(\tau) = \overline{\tilde{x}_1(t)\tilde{x}_1(t + \tau)} \quad (4.4.5.2)$$

que, al ser el proceso estacionario y ergódico, es independiente de  $t$  y presenta los mismos valores para cualquier función muestra  $\tilde{x}_1(t)$  de éste.

La función de densidad espectral de potencia (FDEP) representa la contribución relativa de cada frecuencia  $\omega_i$  al valor cuadrático medio del proceso. Definiciones formales de ésta se pueden encontrar en muchos tratados<sup>[CrM][Li]</sup>.

Es sabido que en un proceso dado por una función aleatoria estacionaria con media nula, la varianza de la función es igual a la potencia total<sup>[CrM][CaB]</sup> de su FDEP:

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \int_0^\infty G_{\ddot{x}}(\omega) d\omega \quad (4.4.5.3)$$

Por otra parte, la varianza de una función sinusoidal dada por:

$$\ddot{y}(t) = A \sin(t) \quad (4.4.5.4)$$

vale:

$$\sigma_{\ddot{y}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A^2 \sin^2(t) dt = \frac{A^2}{2} \quad (4.4.5.5)$$

Consecuentemente, la potencia total del proceso definido por la ecuación (4.4.4.1) de acuerdo con (5) y (3) es:

$$\int_0^\infty G_{\ddot{x}}(\omega) d\omega = \sigma_{\ddot{x}}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{A_i^2}{2} \quad (4.4.5.6)$$

Aproximando la potencia total como la integral numérica del área debajo de la curva  $G_{\ddot{x}}(\omega)$ , se tiene:

$$\sum_{i=1}^n G_{\ddot{x}}(\omega_i) \Delta\omega_i = \sum_{i=1}^n \frac{A_i^2}{2} \quad (4.4.5.7)$$

expresión que será válida sólo cuando el número de sinusoides  $n$  en la función que define el proceso  $\ddot{x}(t)$  sea alto.

Dado que la FDEP representa la contribución relativa de cada frecuencia  $\omega_i$ , se puede aceptar la hipótesis (bastante precisa, aunque no exacta) de la igualdad de sumandos en (7):

$$G_{\ddot{x}}(\omega_i) \Delta\omega_i \approx \frac{A_i^2}{2} \quad (4.4.5.8)$$

por lo que, dada la FDEP, se pueden calcular las amplitudes que definen la ecuación (4.4.4.1) como:

$$A_i \approx \sqrt{2G_{\ddot{x}}(\omega_i) \Delta\omega_i} \quad (4.4.5.9)$$

Es interesante notar que la FDEP de un filtro de segundo orden, con un coeficiente de amortiguamiento  $\xi$  y frecuencia principal  $\omega_0$  excitado por un ruido blanco, está dada por<sup>[Ta2][NeR][HoJ]</sup>:

$$G_{\ddot{x}}(\omega_i) = G_0 \frac{1 + 4\xi^2 \frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}} \quad (4.4.5.10)$$

donde  $G_0$  es, a su vez, la FDEP del ruido blanco ideal que, como ya se dijo, es una constante. Así, cuando se usa la ecuación (10), en el presente modelo, se reproduce el caso particular del modelo descrito en el apartado 4.3.2 consistente en un generador de ruido y un filtro de segundo orden.

#### 4.6. Generación de la función de densidad espectral de potencia (FDEP)

La determinación de la función de densidad espectral de potencia a partir de un espectro dado<sup>[GaV]</sup> ha sido objeto de un considerable esfuerzo. El objetivo es calcular la FDEP de una señal desconocida  $\ddot{x}(t)$  cuando se conoce la velocidad máxima relativa  $S_{\dot{u}}$  en función de la frecuencia  $\omega_n$  para una fracción del amortiguamiento crítico dada  $\xi$  de un sistema de un grado de libertad que es excitado por dicha señal desconocida  $\ddot{x}(t)$  (ver figura 4.4.6.1)

$$G_{\ddot{x}}(\omega_n) = G_{\ddot{x}}(S_{\dot{u}}(\omega_n)) = ? \quad (4.4.6.1)$$

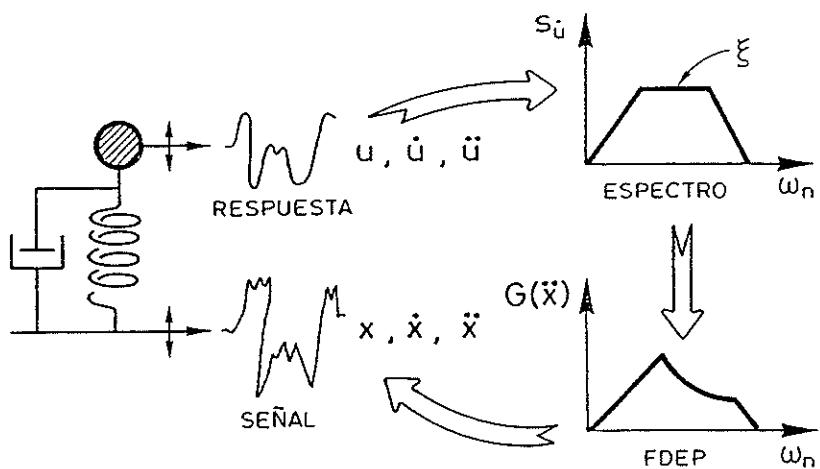


Figura 4.4.6.1 Respuesta  $u$ ,  $\dot{u}$  y  $\ddot{u}$  de un sistema de un grado de libertad excitado por una señal  $x$ ,  $\dot{x}$  y  $\ddot{x}$ .

El procedimiento que se sigue, dentro de la teoría de vibraciones aleatorias, empieza definiendo en términos probabilísticos el espectro de pseudo-aceleraciones espectrales  $S_{\ddot{u}}$  del sistema de un grado de libertad (ver ecuación (4.4.2.3)) en función de la desviación estándar de las aceleraciones totales medidas en el sistema:

$$S_{\ddot{u}_{s,p}} = r_{s,p} \sigma_{\ddot{u}}(\omega_n) \quad (4.4.6.2)$$

donde  $S_{\ddot{u}_{s,p}}$  es el nivel de aceleración bajo el cual el valor absoluto de la respuesta  $\ddot{u}(t)$  del sistema permanecerá con probabilidad  $p$  cuando es excitado por una señal estacionaria  $\ddot{z}$  de duración  $s$ ;  $\sigma_{\ddot{u}}(\omega_n)$  es la desviación estándar de las aceleraciones totales del sistema lineal con frecuencia natural  $\omega_n$ , evaluada en el instante  $s$ , y  $r_{s,p}$  es un factor pico que es función de la probabilidad  $p$  y la duración  $s$ .

El problema de la determinación del factor de pico  $r_{s,p}$  es conocido como el “problema del primer sobrepaso” y, aunque aún no se ha resuelto, existen soluciones prácticas aproximadas. En la referencia [Cra2] se incluye un excelente estado del arte sobre la solución de éste. Por otra parte, en las referencias [Va][CVC] se da un procedimiento aproximado, relativamente simple, para predecir la respuesta máxima de un sistema lineal general expuesto, violentamente y por un tiempo limitado  $s$ , a una excitación no estacionaria. Considerando un sistema de un grado de libertad y una excitación estacionaria, la expresión general aproximada se simplifica en el siguiente factor de pico  $r_{s,p}$ :

$$r_{s,p} \approx \sqrt{2 \ln \left( -\frac{\omega_n s}{\pi \ln p} \left[ 1 - e^{-\sqrt{4\xi_s \ln \left( -\frac{\omega_n s}{\pi \ln p} \right)}} \right] \right)} \quad (4.4.6.3)$$

donde:  $\xi_s$  es un amortiguamiento ficticio dependiente de la duración  $s$  de la señal dado por:

$$\xi_s = \frac{\xi}{1 - e^{-2\xi \omega_n s}} \quad (4.4.6.4)$$

que desde un punto de vista práctico se puede tomar igual al amortiguamiento real.

Un resultado básico de la teoría de vibraciones aleatorias de sistemas lineales<sup>[CrM]</sup>, en el campo de las frecuencias, establece la siguiente relación entre las funciones de densidad espectral de potencia a la entrada y a la salida del sistema:

$$G_u(\omega, \omega_n) = G_{\ddot{z}}(\omega) |H_u^{\ddot{z}}(\omega, \omega_n)|^2 \quad (4.4.6.5)$$

donde  $G_u(\omega, \omega_n)$  es la FDEP de los desplazamientos relativos del sistema lineal con frecuencia natural  $\omega_n$ ,  $G_{\ddot{z}}(\omega)$  es la FDEP del acelerograma de

excitación y  $|H_u^{\ddot{z}}(\omega, \omega_n)|$  es la función de transferencia del sistema lineal que relaciona las transformadas de Fourier del desplazamiento relativo del sistema con la de la aceleración de excitación. Para un tiempo de excitación  $s$  grande, ésta vale<sup>[CaS][Ham][CVC][GaV]</sup>:

$$|H_u^{\ddot{z}}(\omega, \omega_n)|^2 = [(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_s^2\omega_n^2\omega^2]^{-1} \quad (4.4.6.6)$$

De acuerdo con la expresión (4.4.5.3), la desviación estándar de los desplazamientos relativos del sistema se escribe:

$$\sigma_u^2(\omega_n) = \int_0^\infty G_u(\omega, \omega_n) d\omega = \int_0^\infty G_{\ddot{z}}(\omega) |H_u^{\ddot{z}}(\omega, \omega_n)|^2 d\omega \quad (4.4.6.7)$$

Además, utilizando la expresión (4.4.2.3), se establece la siguiente relación entre las desviaciones estándar del desplazamiento y de la aceleración:

$$\sigma_{\ddot{u}}(\omega_n) = \omega_n^2 \sigma_u(\omega_n) \quad (4.4.6.8)$$

por lo que se tiene:

$$\sigma_{\ddot{u}}^2(\omega_n) = \omega_n^4 \int_0^\infty G_{\ddot{z}}(\omega) |H_u^{\ddot{z}}(\omega, \omega_n)|^2 d\omega \quad (4.4.6.9)$$

Reemplazando (6) en (9), operando y simplificando, se obtiene:

$$\sigma_{\ddot{u}}^2(\omega_n) \approx G_{\ddot{z}}(\omega_n) \omega_n \left( \frac{\pi}{4\xi_s} - 1 \right) + \int_0^{\omega_n} G_{\ddot{z}}(\omega) d\omega \quad (4.4.6.10)$$

Finalmente, reemplazando la expresión (10) en (2), utilizando la relación  $S_{\ddot{u}}(\omega_n) = \omega_n S_{\dot{u}}(\omega_n)$  y despejando  $G_{\ddot{z}}(\omega_n)$  se obtiene:

$$G_{\ddot{z}}(\omega_n) \approx \frac{1}{\omega_n \left( \frac{\pi}{4\xi_s} - 1 \right)} \left[ \frac{\omega_n^2 S_{\dot{u}}^2(\omega_n)}{r_{s,p}^2} - \int_0^{\omega_n} G_{\ddot{z}}(\omega) d\omega \right] \quad (4.4.6.11)$$

que es la función buscada definida recursivamente. Para evaluarla, se empieza por la frecuencia natural más baja  $\omega_1$ , donde la contribución del término integral de la derecha es nula. En una frecuencia arbitraria  $\omega_i$ , la integral numérica de  $G_{\ddot{z}}(\omega)$  hasta  $\omega_i$  se conoce y, por tanto, se puede evaluar  $G_{\ddot{z}}(\omega_{i+1})$ .

Se puede ver que esta expresión no es única. Depende de la duración del proceso  $s$  y del nivel de probabilidad  $p$  asignado. El ajuste entre el espectro de diseño y el espectro calculado será tanto mejor cuanto más grande sea la duración de la señal  $s$ . Por su parte, haciendo ensayos numéricos se encuentra que con  $p = 0.367$  (para que  $\ln p = -1$ ) se obtienen excelentes resultados incluso para señales relativamente cortas.

#### 4.7. Mejora de la señal artificial

Una vez calculada la FDEP según la expresión (4.4.6.11), se puede generar una señal de excitación –compatible con el espectro de diseño– usando las expresiones (4.4.5.9) y (4.4.4.1). Sin embargo, la señal así generada presenta algunas deficiencias que fácilmente pueden ser eliminadas o atenuadas. Así por ejemplo, normalmente se desea especificar la aceleración máxima que tendrá la señal  $\ddot{x}(t)$  siendo importante además que tanto la velocidad como el desplazamiento final sean prácticamente nulos. En el proceso descrito hasta el momento, no se han tenido en cuenta todos estos detalles que son tema de los apartados que siguen.

##### 4.7.1. Ajuste de Línea base

El acelerograma  $\ddot{x}(t)$  generado puede ser procesado en la misma forma que se hace con un acelerograma registrado de un terremoto real. Así, la corrección de línea de base se puede hacer en la misma forma que fue descrita por Berg y Housner en la referencia [BH] (cf. [PSE]) para intentar que tanto la velocidad como el desplazamiento de la señal tiendan a cero al final del terremoto. Esto se consigue con una corrección parabólica a la línea de base del acelerograma, donde los coeficientes de la corrección son elegidos de manera tal que minimicen el valor cuadrático medio de la velocidad.

Si  $\ddot{x}(t)$  es un acelerograma obtenido con el procedimiento descrito, el acelerograma corregido  $\ddot{x}'(t)$ , tiene la forma:

$$\ddot{x}'(t) = \ddot{x}(t) + c_0 + c_1 \frac{t}{s} + c_2 \left(\frac{t}{s}\right)^2 \quad (4.4.7.1.1)$$

donde  $s$  es la duración de la señal.

La velocidad se obtiene integrando la ecuación (1) con condiciones iniciales nulas, y los coeficientes  $c_0$ ,  $c_1$  y  $c_2$  se seleccionan de manera tal que el valor cuadrático medio de ésta sea mínimo en el intervalo  $[0, s]$ . Con lo que se llega a la relación:

$$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -300 & 900 & -630 \\ 1800 & -5760 & 4200 \\ -1890 & 6300 & -4725 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (4.4.7.1.2)$$

donde:

$$b_k = s^{-k-3} \int_0^s \dot{x}(t) t^{k+1} dt \quad k = 0, 1, 2 \quad (4.4.7.1.3)$$

y donde  $\dot{x}(t)$  es la velocidad correspondiente a  $\ddot{x}(t)$ .

Las integrales de la ecuación (3) se pueden evaluar numéricamente, bajo el supuesto de que la aceleración  $\ddot{x}(t)$  varía linealmente entre dos instantes

de tiempo consecutivos. Después de esta corrección, la doble integración de  $\ddot{x}'(t)$  da las velocidades y desplazamientos, respectivamente. Es de notar que normalmente las funciones  $\ddot{x}(t)$  y  $\ddot{x}'(t)$  son muy similares. Sin embargo, la importancia de la modificación tanto en la velocidad  $\dot{x}(t)$  como en el desplazamiento  $x(t)$  es crucial.

#### 4.7.2. Ajuste de la aceleración máxima

Se debe notar que la aceleración máxima resultante del algoritmo descrito es una variable aleatoria y aunque el espectro de diseño fue adecuadamente escalado según una aceleración máxima, el procedimiento descrito no garantiza que el resultado final de exactamente ésta. Sin embargo, es de esperar que la diferencia entre la obtenida y la especificada sea relativamente pequeña. Por esto, se puede imponer directamente dicha aceleración máxima teniendo en cuenta las dos alternativas posibles:

- (1) Si el valor absoluto de la aceleración máxima encontrada es menor que la especificada, simplemente se modifica su valor absoluto al valor deseado.
- (2) Si este valor absoluto es mayor, se escalan todas aquellas aceleraciones cuyo valor absoluto sobrepase el especificado.

El procedimiento descrito garantiza que sólo existe una aceleración máxima de valor absoluto igual al especificado. Finalmente, se debe notar que esta modificación artificial solamente afecta a la respuesta de valores espectrales en el rango de frecuencias muy altas, por lo que no tiene mayor incidencia.

#### 4.7.3. Ajuste de la respuesta espectral

El carácter aproximado de las expresiones descritas en 4.6 y los ajustes de línea de base y aceleración pico descritos, hacen que el espectro de respuesta de la señal artificial –aunque compatible– no sea exactamente igual al especificado. Consecuentemente, se puede mejorar el ajuste entre ambos espectros. Para esto, se utiliza un procedimiento cíclico en el que se compara el espectro de respuesta con el especificado en un conjunto de frecuencias de control  $j = 1, \dots, m$ . En cada frecuencia de control  $j$  se obtiene la relación entre la respuesta deseada y la calculada. Para mejorar el ajuste, se modifica el valor correspondiente de la FDEP en proporción al cuadrado de esta relación (ver ecuación 4.4.6.11):

$$G(\omega_j)_{i+1} = G(\omega_j)_i \left[ \frac{S_u(\omega_j)}{S_u^i(\omega_j)} \right]^2 \quad j = 1, \dots, m \quad (4.4.7.3.1)$$

con la que se genera una nueva señal de excitación.

Este procedimiento no se espera que sea convergente en todas las frecuencias de control. El proceso iterativo descrito se basa en la hipótesis de que

el valor de la FDEP en una frecuencia dada depende exclusivamente de esa frecuencia. Sin embargo, ésta depende también de los valores de la FDEP en frecuencias cercanas<sup>[GaV]</sup>. Por esta razón, el algoritmo iterativo descrito mejora el ajuste, sólo en las primeras iteraciones en las que el efecto de las frecuencias lejanas es aún despreciable.

## 5. ENSAYOS NUMÉRICOS

### 5.1. Eficiencia de los contornos transparentes

El modelo de contornos transparentes descrito en el apartado 3 es válido exactamente sólo cuando la onda que incide en el contorno es plana y con dirección normal al contorno. En un caso general, en que la onda no es plana e incide con un ángulo distinto de cero, dicho contorno se comporta como una aproximación del que sería “perfecto” ya que permite la reflexión de una fracción de la onda incidente. Con el fin de valorar la eficiencia de dichos contornos se presentan a continuación dos ensayos que intentan valorar –de alguna forma– el error producido por ángulo de incidencia y por la no planaridad de la onda.

#### 5.1.1. Ángulo de incidencia

Este ejercicio numérico tiene el propósito de evaluar el error producido en el contorno cuando la dirección de la onda incidente no coincide con la normal a éste. Para esto se ha idealizado una barra elástica empotrada en el extremo izquierdo de longitud infinita con 5[m] de ancho y 1[m] de espesor. La barra se discretizó utilizando un modelo de 100[m] de longitud que tiene un contorno transparente en el extremo derecho inclinado según el eje de la barra.



Figura 4.5.1.1.1 Barra elástica con borde transparente a  $65^\circ$ .

En la figura 4.5.1.1.1 se presenta la discretización empleada para un ángulo de incidencia de  $65^\circ$  consistente en 500 elementos finitos de cuatro nodos en deformación constante y 5 elementos transparentes de 2 nodos

en el extremo derecho. El material empleado tiene un módulo de Young  $E$  de  $25[GPa]$ , un coeficiente de Poisson  $\nu$  de 0.2 y una densidad  $\rho$  de  $2500[Kg/m^3]$ . La velocidad de la onda de presión es  $c = 3333.333[m/s]$  (ver ecuación 4.3.4.12). Para este ensayo se ha utilizado la misma onda que en el apartado 8.3 del Capítulo II que consiste en imponer a la izquierda de la barra ( $y = 0[m]$ ) un desplazamiento forzado dado por:

$$u_x(t) = \begin{cases} -1.5 * 10^{-3}(1 + \sin(2\pi t/0.012 - \pi/2))[m] & \text{para } 0 \leq t \leq 0.012[s] \\ 0 & \text{para } 0.012[s] < t \end{cases}$$

Este desplazamiento impuesto produce una onda de periodo  $0.012[s]$  y amplitud  $0.003[m/s]$  en desplazamiento  $x$  con una tracción máxima de aproximadamente  $\sigma_{xx} = 0.65[MPa]$  que viaja de izquierda a derecha a una velocidad de  $3333.333[m]$ . La onda debe desaparecer al alcanzar el extremo final derecho. Sin embargo, cuando el ángulo de incidencia no es cero, se produce una reflexión espúrea. En la figura 4.5.1.1.2 se presenta la historia de desplazamientos en un punto situado a  $50[m]$  del origen para ángulos de incidencia con el contorno radiante de  $0^\circ$  y  $65^\circ$ , respectivamente. Como puede observarse, la reflexión espúrea producida alcanza hasta un 16% del valor máximo para un ángulo de incidencia tan exagerado como es el de  $65^\circ$ . Se debe hacer notar que se alcanzan valores notablemente menores para ángulos de incidencia inferiores a  $45^\circ$ , donde la energía reflejada es sólo una pequeña parte de la energía total.

### 5.1.2. Onda no plana

Es difícil evaluar en forma general el error que se produce cuando la onda incidente no es plana. Como caso particular se plantea a continuación el análisis de la radiación de una onda cilíndrica que se transmite a través de un fluido e incide normalmente al contorno. El ensayo busca representar una onda que nunca sea plana y que, para eliminar otras fuentes de error, siempre incida normalmente al contorno. El dominio utilizado consiste en un anillo de  $100[m]$  de radio (ver figura 4.5.1.2.1) con un agujero interior de  $10[m]$  de radio en cuyo contorno interior se prescribe una onda en presiones dada por:

$$p(t) = \begin{cases} 50(1 + \sin(2\pi t/50 - \pi/2))[N/m^2] & \text{para } 0 \leq t \leq 50[s] \\ 0 & \text{para } 50[s] < t \end{cases}$$

El anillo es de un metro de espesor constante. La velocidad de la onda es  $c = 1.0[m/s]$ . En el contorno exterior se han colocado los elementos transparentes de onda plana descritos. Para la discretización se han aprovechado las condiciones de simetría, por lo que se ha representado solamente una cuarta parte del círculo con 2036 elementos triangulares y 52 elementos transparentes.

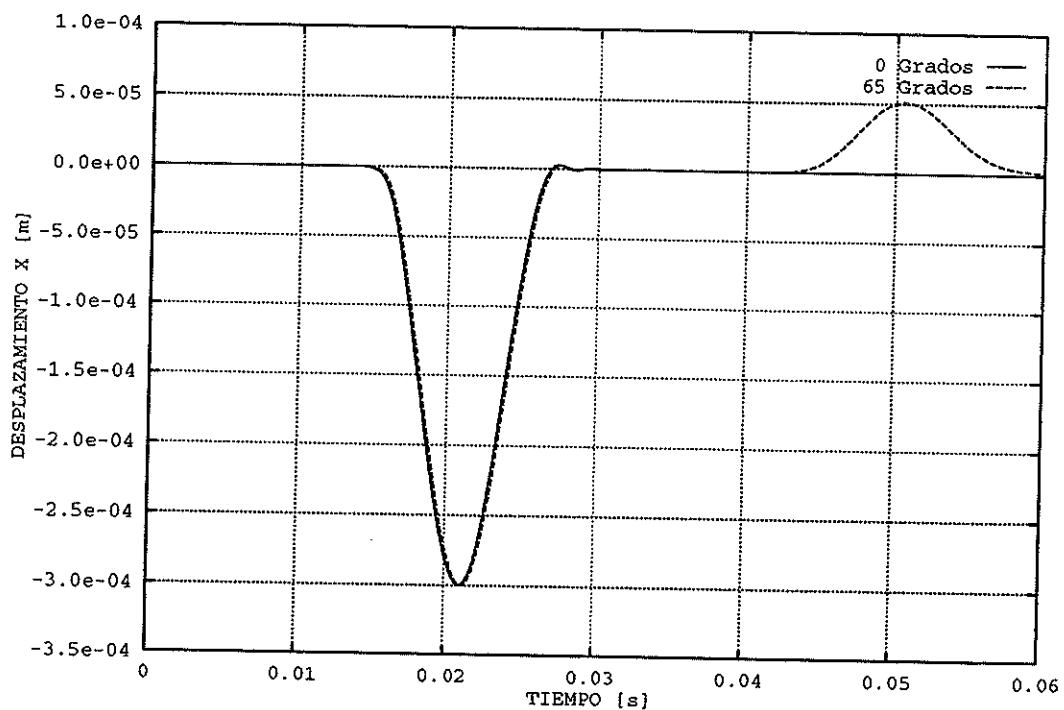


Figura 4.5.1.1.2 Influencia del ángulo de incidencia en el contorno transparente. Diagrama desplazamiento-tiempo a 50[m].

En la figura 4.5.1.2.1 se presenta la malla deformada según el valor de la presión para el instante de  $t = 57.5[s]$ . Con el objeto de valorar la reflexión producida en el contorno se ha analizado una segunda geometría con la única diferencia de tener un radio exterior de 200[m]. Los resultados de esta segunda malla sirven de comparación ya que la onda tarda 100[s] más en alcanzar el contorno exterior, por lo que cualquier reflexión estará retrasada 200[s] con respecto a la primera malla. En la figuras 4.5.1.2.2 se presenta esta segunda malla constituida por 8096 elementos triangulares y 100 elementos transparentes deformada según el valor de la presión para el mismo instante de tiempo  $t = 57.5[s]$ .

En la figura 4.5.1.2.3 se presenta la historia de presiones medida en un punto de control que se encuentra situado a una distancia de 32.5[m] del centro. Claramente pueden apreciarse las ondas de reflejadas en ambas mallas. Se observa que para la primera malla la reflexión alcanza hasta un 10% del pico máximo y hasta un 6% para la segunda. Es interesante notar que si bien la reflexión producida en la malla grande, como era de esperarse, aparece retrasada 200[s] con respecto a la de la primera, el valor máximo de ésta (del orden de  $2.5[N/m^2]$ ) es inferior al que presenta la malla pequeña (del orden de  $5.6[N/m^2]$ ). Así pues, el error producido por la reflexión espúrea disminuye a medida que el contorno se encuentra más alejado del punto

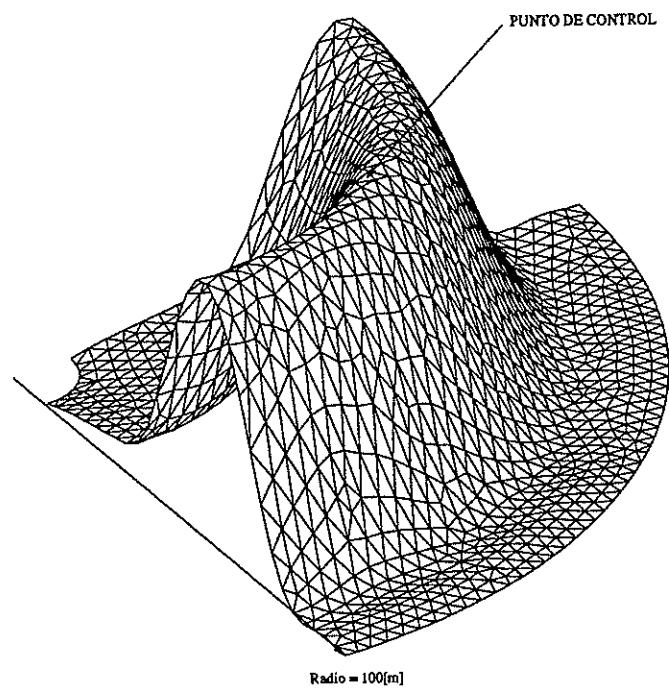


Figura 4.5.1.2.1 Onda cilíndrica. Malla deformada según la presión.

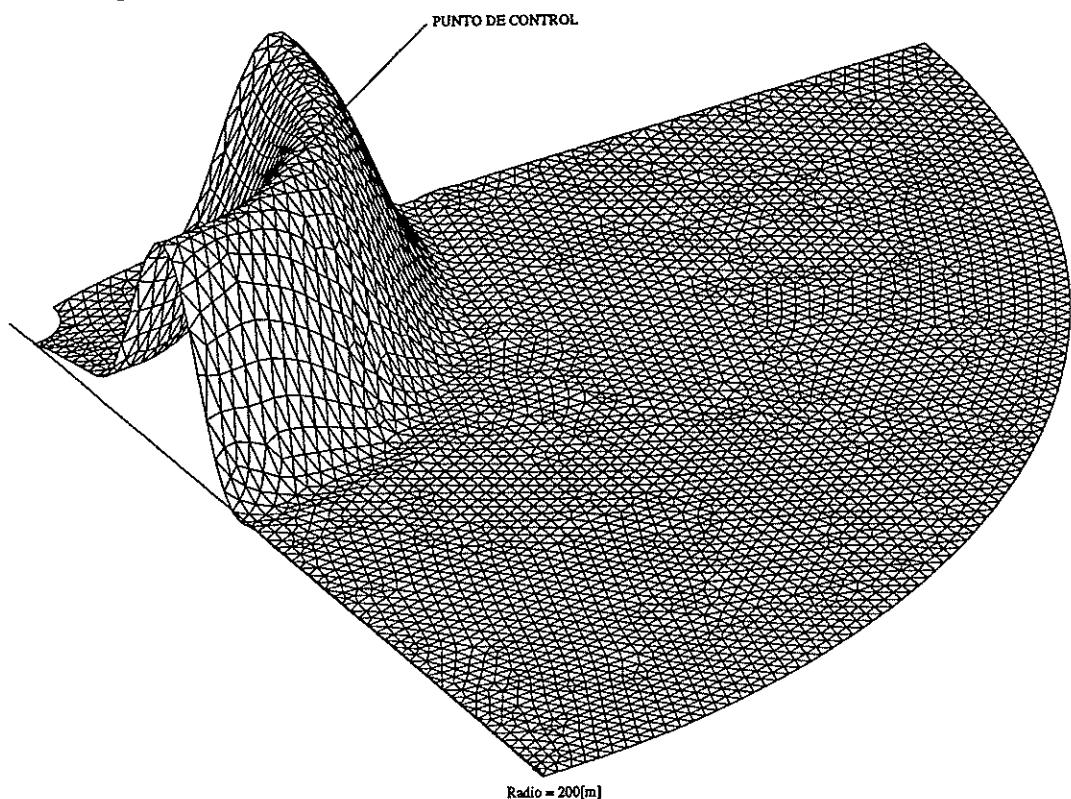


Figura 4.5.1.2.2 Onda cilíndrica. Malla grande de comparación deformada según la presión.

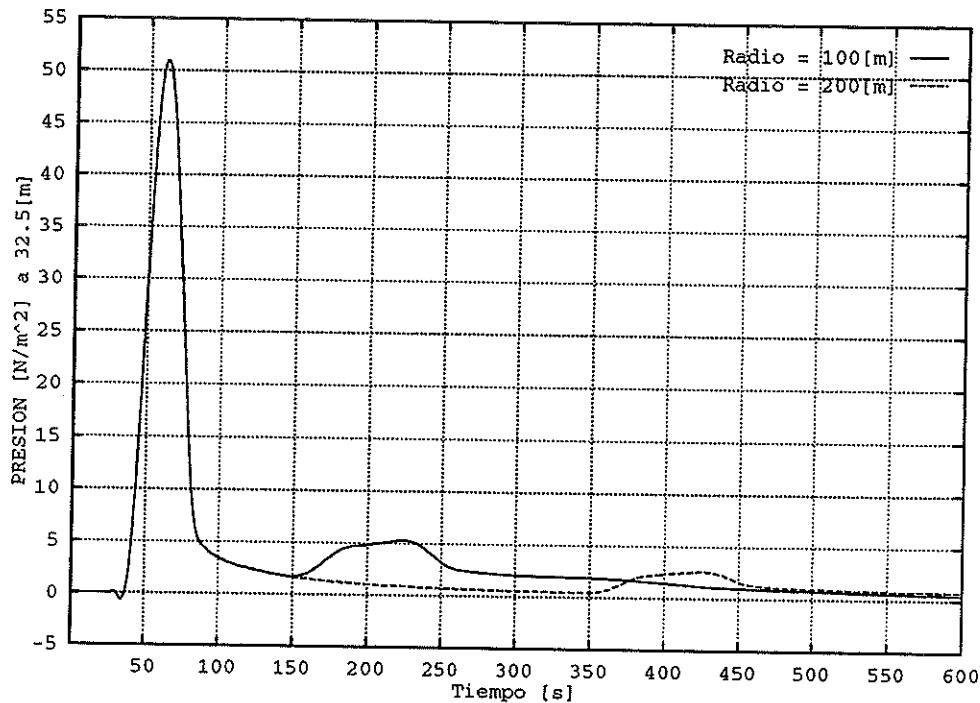


Figura 4.5.1.2.3 Influencia de la no-planaridad de la onda en el contorno transparente. Diagrama presión-tiempo a  $32.5[m]$  del centro.

observado. Se puede concluir que para puntos más próximos al centro esta reflexión es aún de menor importancia relativa.

## 5.2. Excitación sísmica compatible con un espectro dado

El procedimiento para generar señales sísmicas artificiales introducido en el apartado 4.3.1 y descrito en 4.4 permite que se especifique una FDEP directamente. Por ejemplo, se puede especificar la FDEP de un filtro de segundo orden dado por la ecuación (4.4.5.10) y generar así señales artificiales similares a las que se obtienen con el modelo descrito en el apartado 4.3.2. Sin embargo, el método descrito es mucho más general ya que, utilizando la expresión (4.4.6.11), se pueden generar señales artificiales compatibles con un espectro dado  $S_{\dot{u}}(\omega_n)$ . Este método, al permitir mejorar el ajuste entre el espectro calculado y el espectro especificado, también incluye –de alguna forma– el método descrito en el apartado 4.3.3 que se obtiene cuando se utiliza un número pequeño de funciones sinusoidales.

Como ejemplo de generación de una señal artificial, se ha utilizado un espectro de diseño en velocidades proveniente del suavizado realizado sobre los espectros de respuesta de 39 registros de terremotos reales dados en la referencia [VBF], para una fracción del amortiguamiento crítico  $\xi = 0.02$ . Dicho espectro de diseño está definido por los 11 valores dados en la tabla 4.5.2.1.

T	$S_u [cm/s]$	T	$S_u [cm/s]$
0.001	0.457	0.300	43.180
0.025	1.524	0.400	50.800
0.060	4.191	1.000	50.800
0.105	7.620	2.000	48.260
0.190	25.400	3.500	44.450
		4.000	30.000

Tabla 4.5.2.1 Espectro de diseño dado en velocidades.

También se ha especificado: la aceleración máxima del terreno de  $\ddot{x}_{max} = 0.26g = 255[cm/s^2]$ ; el contenido de frecuencias de la señal dada por un periodo mínimo de  $0.005[s]$  y un periodo máximo de  $4.0[s]$ ; la duración total de la señal de  $s = 15[s]$ ; y una función de intensidad  $I(t)$  que aumenta linealmente de 0 a 1 en 3 segundos, se mantiene constante en 1 durante 9 segundos y disminuye linealmente a 0 en los 3 segundos restantes (ver figura 4.4.4.1-b). La señal artificial se ha generado con intervalos de tiempo entre valores de  $0.01[s]$  lo que proporciona 1501 valores de desplazamiento, velocidad y aceleración equiespaciados en el tiempo. La señal fue generada utilizando una serie de 1675 senos con sus correspondientes frecuencias, amplitudes y ángulos de fase. Finalmente, se hicieron los ajustes de línea base, de aceleración máxima y de respuesta espectral con 6 ciclos iterativos como se describió en los apartados 4.7.1, 4.7.2 y 4.7.3, respectivamente.

En la figura 4.5.2.1 se comparan los espectros de velocidad obtenidos para diferentes relaciones de amortiguamiento con el espectro de diseño. Se debe hacer notar que la diferencia entre el espectro de diseño y el calculado ya era pequeña (del orden del 22% en media) antes del ajuste de respuesta espectral y, con las seis iteraciones, ésta mejoró ligeramente (hasta situarse en una media del orden de 6.1%). En la figura 4.5.2.2 se presenta la FDEP evaluada según la expresión (4.4.6.11) a partir del espectro de diseño especificado. Notablemente, esta FDEP es muy similar en forma a la descrita por Kanai-Tajimi en la referencia [KaK] (cf. [Gav]) en base al estudio del contenido de frecuencias de un gran número de registros reales. Como es de esperar, la FDEP presenta un pico para el periodo ( $T = 0.4[s]$ ) donde el espectro de diseño presenta una variación significativa de pendiente.

En las figuras 4.5.2.3 (a), (b) y (c) se presenta la historia de aceleraciones, velocidades y desplazamientos, respectivamente. En el gráfico de aceleraciones se observa un único pico algo pronunciado a los tres segundos y esto se debe a que antes de corregir la aceleración máxima, ésta valía  $223.5[cm]$ . La corrección simplemente se ha limitado a modificar este valor a  $255[cm/s]$ . La pequeña diferencia entre estos valores es aceptable ya que, aunque el espectro de diseño está escalado según la aceleración máxima especificada, el método

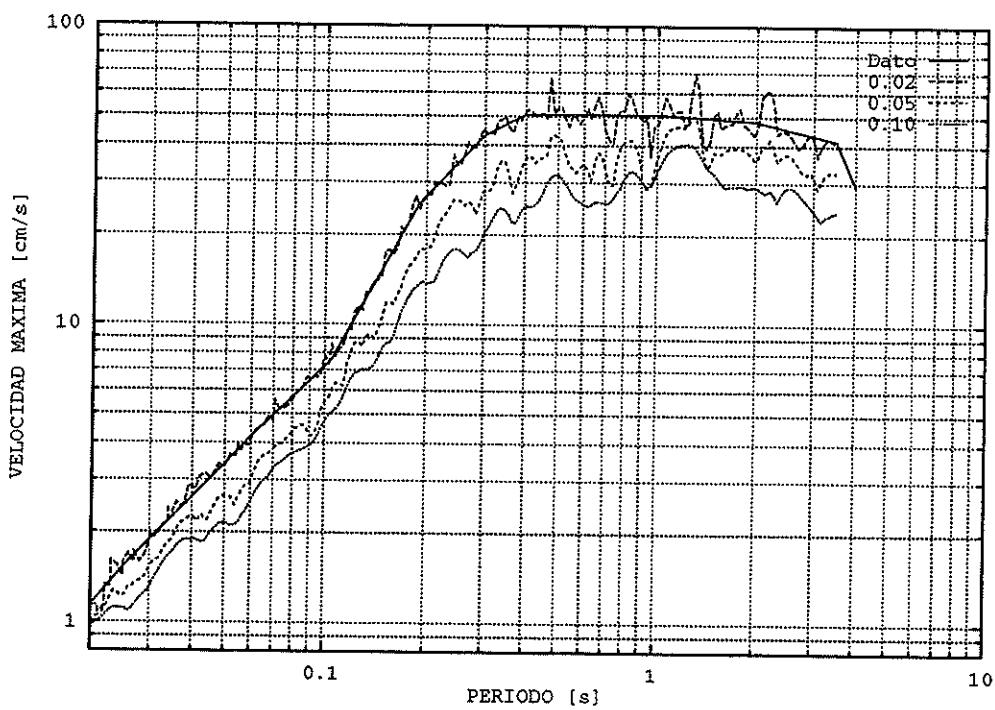


Figura 4.5.2.1 Espectro de velocidades.

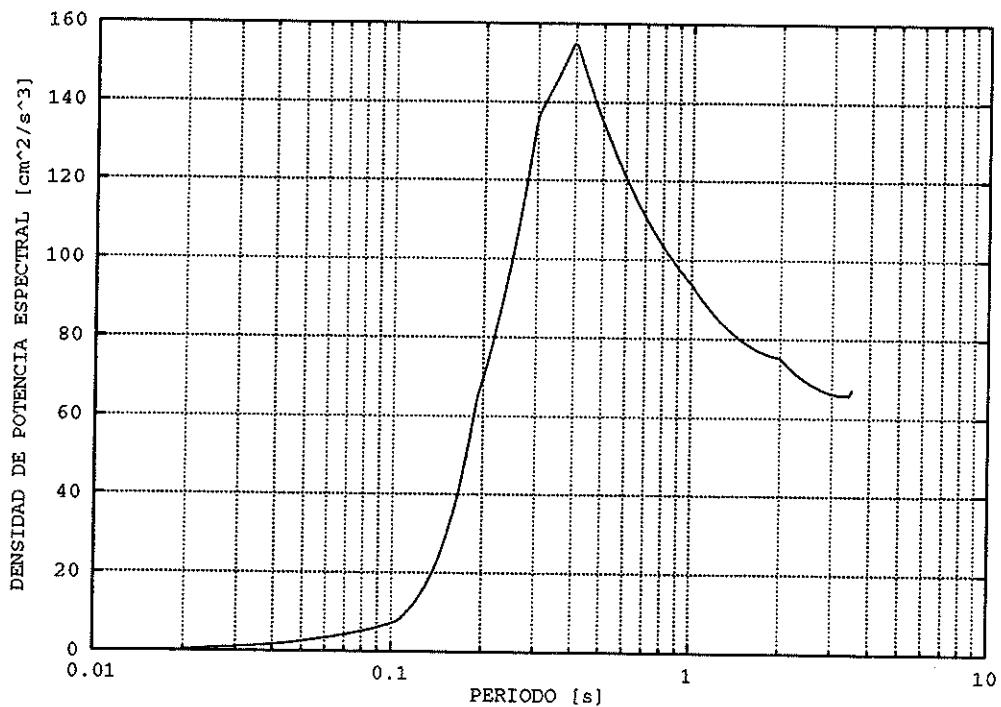


Figura 4.5.2.2 Función de densidad espectral de potencia (FDEP).

## Condiciones de contorno

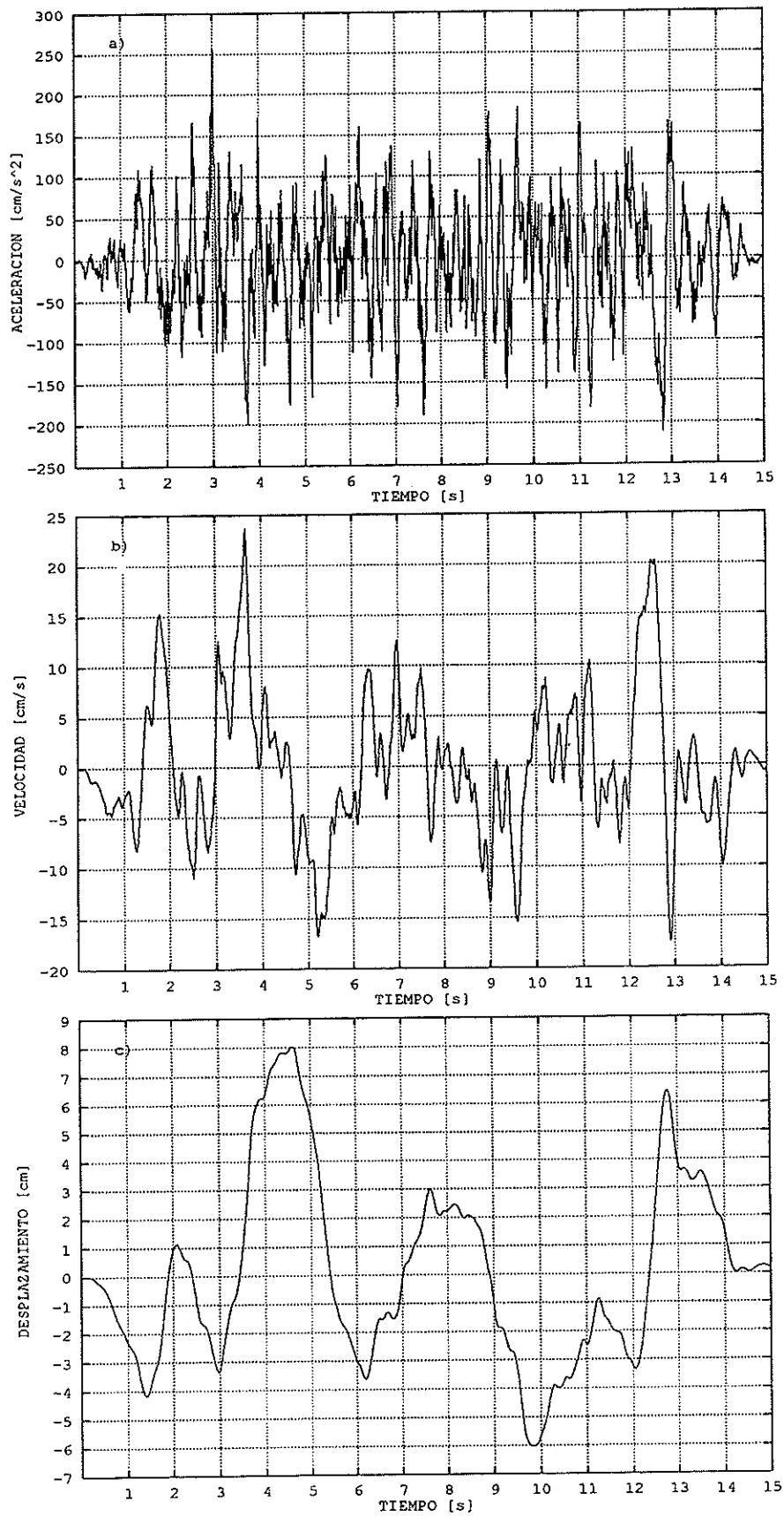


Figura 4.5.2.3 a) Aceleración, b) Velocidad y c) Desplazamiento del terreno en función del tiempo.

de generación descrito no garantiza obtener el valor exacto, siendo esperable un valor aproximado. Finalmente se debe resaltar el hecho de que las aceleraciones, velocidades y desplazamientos finales son prácticamente nulos debidos a la corrección de línea de base.

## 6. CONSIDERACIONES FINALES

Los contornos transparentes descritos en este capítulo son una solución simple al problema de los contornos ficticios del problema discreto. Si bien existen diversos trabajos relacionados con este tema, no se ha encontrado todavía una solución definitiva. En este trabajo se ha preferido desarrollar una solución simple que presenta un grado de precisión elevado, en lugar de utilizar otros modelos<sup>[ZBS1]</sup> que lamentablemente conducen a formulaciones no-lineales y/o con matrices de amortiguamiento o rigidez no simétricas<sup>[CMC]</sup> que inmediatamente complican substancialmente la solución numérica y no aportan una mejora notable.

La precisión alcanzada por los contornos transparentes se puso en evidencia en los ensayos numéricos, en los que se encontró que en condiciones desfavorables este modelo presenta una pequeña onda reflejada espúrea. Por otra parte, con un cierto grado de amortiguamiento en el medio transmisor, dicha reflexión es aún de menor importancia relativa. Finalmente, el grado de indeterminación general de todo el modelo (propiedades de los materiales, errores propios de la discretización, desconocimiento de la señal de excitación real, etc.) hacen que esta pequeña reflexión sea comparativamente despreciable.

El procedimiento descrito para generar una señal sísmica es consistente con el estado actual del conocimiento<sup>[Wo1][Wo2]</sup>. El punto más importante a tener en cuenta es que la señal que se usa como excitación sísmica no es el registro de un sismo cualquiera, sino que es una señal generada artificialmente en correspondencia con un espectro de diseño previamente establecido. Algunas de las ventajas que tiene el uso de una señal artificial como excitación sísmica en lugar del registro de un sismo arbitrario son:

- Una señal artificial está basada en un espectro de diseño, que a su vez se basa en los máximos valores de muchos sismos, en el lugar en estudio o en lugares con propiedades sísmicas similares. Un sismo cualquiera, por el contrario, sólo es un dato puntual y nunca puede representar las pésimas condiciones adversas que se pueden producir.
- Para generar una señal artificial se utilizan una serie de parámetros que se pueden fijar con cierta libertad. Así, por ejemplo, en el modelo descrito se puede variar en rango y número el contenido de frecuencias de la señal. Normalmente, estos parámetros de libre

elección se seleccionan de forma adecuada al modelo de la estructura que se va a analizar. Esto quiere decir que la señal artificial será distinta y adecuada no sólo a la estructura sino al modelo que se esté utilizando.

- Se pueden utilizar todas las señales artificiales que se deseé y aunque todas ellas tienen espectros de respuesta similares, puntualmente serán diferentes, teniéndose así mayor confianza en los resultados obtenidos. Por otro lado, es muy difícil tener muchos registros de sismos que sean aplicables a la estructura en estudio.
- Una señal artificial se genera con la menor duración necesaria. De esta forma, siempre que se hace un análisis paso a paso en el tiempo, es computacionalmente favorable usar una señal artificial en lugar de un registro real.
- En el espectro de diseño y, por tanto, en las señales artificiales generadas a partir de éste, se tienen en cuenta (aunque aproximadamente) las condiciones y características locales del lugar. Consecuentemente, las señales artificiales son adecuadas a la zona donde estará la estructura, a diferencia de un sismo arbitrario, a menos que se pueda obtener el registro de uno de ellos exactamente del lugar en estudio, lo que parece improbable.
- Se debe notar que para hacer un análisis adecuado de una estructura se deben utilizar una serie de señales artificiales con las que se estudiará la importancia de las diversas características sísmicas como son la magnitud, la distancia focal, las características de atenuación, el contenido de frecuencias, etc. Siendo todo ello imposible de hacer con registros reales previamente obtenidos.

Quizás la única desventaja del método descrito en el apartado 4.4 para generar señales sísmicas artificiales compatibles con el espectro de diseño pueda ser que éste genera acelerogramas que presentan numerosos picos, en comparación con el método descrito en el apartado 4.3.3 de señales cortas quasi-compatibles, lo que hace que sea relativamente más difícil su utilización numérica. Sin embargo, el modelo de elementos de contornos transparentes descrito en este capítulo utiliza la velocidad como señal de entrada, y como se puede observar en el ejemplo desarrollado, el velocígrama generado siempre es mucho más suave que el correspondiente acelerograma.



# CAPÍTULO V

## SOLUCIÓN MODULAR DE SISTEMAS ACOPLADOS

### 1. INTRODUCCIÓN

Frecuentemente en Ingeniería se presentan problemas cuyos modelos físico-matemáticos corresponden a sistemas acoplados. Como define Zienkiewicz<sup>[Zie3]</sup>, un sistema acoplado es aquél en el que intervienen múltiples dominios, asociado cada uno de ellos a variables dependientes que describen diferentes fenómenos físicos, y en el que: (a) Ninguno de los conjuntos de variables asociados a cada dominio puede ser resuelto sin resolver simultáneamente los demás y (b) A nivel de las ecuaciones diferenciales del sistema no se puede eliminar ningún conjunto de variables dependientes.

Los sistemas acoplados se pueden clasificar en dos Tipos: (I) Problemas en los cuales el acoplamiento entre dominios ocurre a través de los contornos que los separan, debido a las condiciones de continuidad allí impuestas, y (II) Problemas en los que el acoplamiento proviene de la interacción de distintos fenómenos físicos que ocurren en la zona donde los dominios se superponen (total o parcialmente). La interacción fluido-estructura es un ejemplo típico del sistema acoplado Tipo I y los problemas termomecánicos (en sólidos o fluidos) del Tipo II. La aplicación de métodos numéricos de discretización espacial o temporal –tales como los elementos finitos, las diferencias finitas o los elementos de contorno– a estos problemas acoplados conduce a un sistema de ecuaciones algebraico que necesariamente involucra las variables (nodales) correspondientes a los diferentes dominios (para sistemas Tipo I) o a los diferentes fenómenos físicos (para sistemas Tipo II).

En consecuencia, se plantean dos estrategias para resolver un problema acoplado genérico:

- (a) Abordar la solución de todos los dominios simultáneamente. Esto conduce a un único sistema de ecuaciones algebraicas que involucra todas las variables relevantes. En general, estas variables no serán homogéneas, ya que provienen de la discretización de dominios diferentes y/o de fenómenos físicos distintos.

- (b) Abordar la resolución de cada dominio por separado, considerando los términos de acoplamiento al lado derecho de cada sistema de ecuaciones. Esto conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas para cada dominio, que debe ser resuelto para las variables relacionadas con el mismo, pero con los términos “de fuerza” dependiendo de variables relacionadas con otros dominios.

Tradicionalmente, para resolver problemas acoplados se suele emplear la estrategia (a), también llamada solución directa ya que conduce a un único sistema de ecuaciones, por lo que se utiliza un programa capaz de analizar todos los dominios a la vez. Sin embargo, este método presenta las siguientes desventajas:

- Requiere que se desarrolle un programa específico para la resolución de cada caso de problema acoplado en particular, para lo cual puede ser necesaria la coordinación de varios expertos en la resolución de los problemas correspondientes a cada uno de los dominios.
- Al escribir dicho programa resulta de poca ayuda la existencia de programas estándar que sirven para resolver cada uno de los dominios desacoplados. Normalmente estos programas presentan una serie de ventajas (tales como: disponer de más algoritmos de solución, estar verificados, ser de fácil utilización, capacidad de pre y post-proceso, etc.) que son por tanto desaprovechadas.
- Debido a su estructura particular, este programa tiende a volverse largo y poco manejable, pudiendo llegar a ser difícil realizar modificaciones o actualizaciones del mismo.
- Es muy difícil utilizar métodos, algoritmos o estrategias diferentes para los distintos dominios al ser tratados todos ellos simultáneamente.
- Debido a las exigencias propias del acoplamiento, el programa puede ser ineficiente para resolver casos particulares de problemas no acoplados de interés práctico.
- Este programa podría ser paralelizado sólo al nivel de las instrucciones básicas (lazos do-endo). Aparte de la complicación en la programación que esto puede conllevar, los beneficios de la paralelización sólo se ven recompensados en máquinas paralelas.
- El sistema de ecuaciones que el programa debe resolver es en general “heterogéneo”, ya que sus términos provienen de la discretización de diferentes dominios y/o diferentes fenómenos físicos. Esto puede conducir a matrices mal-condicionadas y por consiguiente, a problemas en su manipulación computacional.

Para resolver el sistema acoplado fluido-presa, a lo largo de la presente investigación se ha utilizado la estrategia (b). En contraposición con la solución directa, la estrategia (b), también llamada de iteración por bloques, presenta las siguientes ventajas:

- Pueden utilizarse diferentes códigos para cada dominio y estos pueden ser desarrollados independientemente por expertos en la resolución de cada uno de los problemas desacoplados.
- Es posible aprovechar programas existentes, a los que sólo se debe modificar ligeramente para incluir de forma adecuada los términos de acoplamiento.
- Los programas independientes son más cortos y de fácil modificación y/o actualización.
- Se pueden utilizar métodos diferentes en cada dominio (elementos finitos, diferencias finitas, elementos de contorno, etc), así como los algoritmos o estrategias óptimas para cada uno de ellos.
- Cada programa puede utilizarse independientemente de forma natural y eficiente para resolver problemas no acoplados de interés práctico.
- Esta estrategia de resolución es inherentemente paralela a nivel modular por lo que aprovecha adecuadamente los recursos de un ordenador con procesadores paralelos. Por otra parte, en máquinas de un solo procesador, se pueden utilizar los recursos de multiusuario del sistema operativo para simular un sistema paralelo. También, es posible utilizar varios ordenadores conectados a través de una red, estando cada uno de ellos abocado a un único dominio en particular.
- Los diversos sistemas de ecuaciones que deben resolverse son más pequeños (y por lo general mejor condicionados) que un único sistema de ecuaciones acoplado.

Desde luego, la estrategia (b) presenta algunas dificultades que pueden hacer que esta alternativa sea inviable para algunos problemas específicos. La principal desventaja es que, incluso con problemas lineales, en general será necesario iterar en cada paso de tiempo hasta encontrar la solución del sistema acoplado. Sin embargo, esto no es un gran inconveniente si el acoplamiento no es demasiado fuerte o si el problema es no-lineal, ya que, en este caso, será necesario iterar igualmente.

En todo caso, si se tiene la intención de aprovechar las ventajas descritas del método (entre las que destacan la modularidad de los programas de análisis y la paralelización de los cálculos de resolución), un elemento importante de tal estrategia es el desarrollar un *código principal* que deberá realizar, al menos, tres tareas:

- Comunicar a todos los *códigos secundarios* (uno por dominio) entre sí, transfiriendo información de uno a otro.
- Controlar la convergencia global del sistema acoplado obligando a cada uno de los *códigos secundarios* a iterar el número de veces que sea necesario.
- Sincronizar la ejecución de los *códigos secundarios* de forma que cada proceso espere el menor tiempo posible pero garantizando que todos iteran y/o avanzan en el tiempo simultáneamente.

La intención de este capítulo es ahondar en la estrategia (b) planteada como un esquema general de comunicación sincronizada de procesos para resolver problemas acoplados, haciendo hincapié en las particularidades del problema de interacción fluido-presa. En este problema, el movimiento de la estructura depende de las presiones que el fluido ejerce sobre ella y las presiones del fluido dependen de las aceleraciones de la estructura en la cara mojada. Si además se quiere considerar el caso de excitación sísmica, este problema puede verse extendido a uno de interacción fluido-estructura-terreno, ya que dichas excitaciones llegan a la estructura a través la cimentación que debe, por tanto, ser modelada adecuadamente (ver figura 5.1.1).

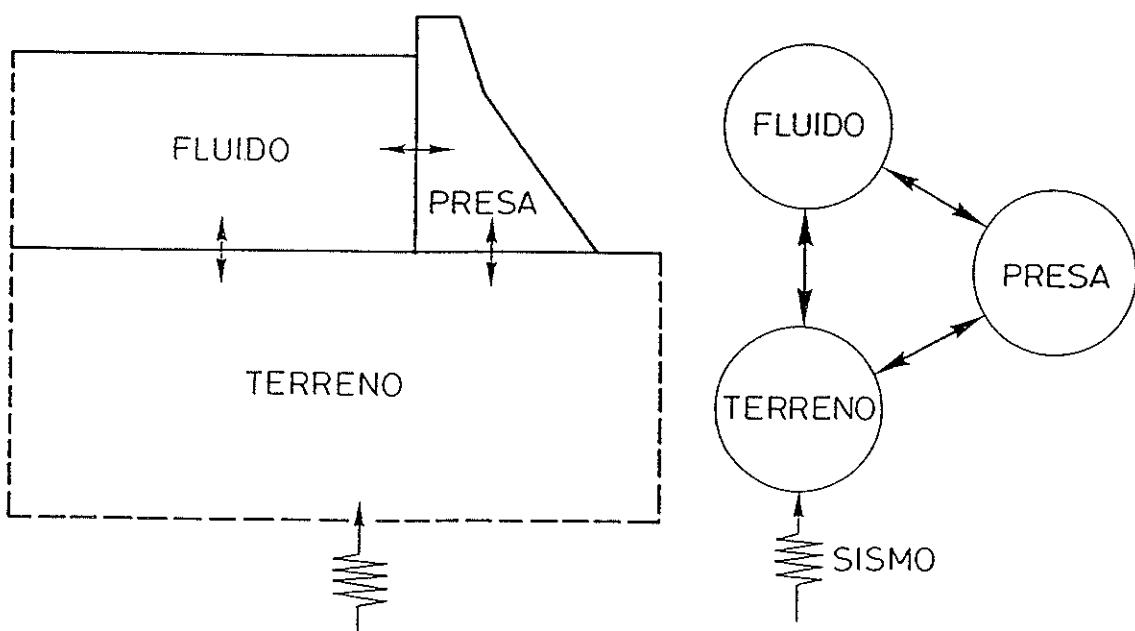


Figura 5.1.1 Problema de interacción fluido-presa-terreno.

Este capítulo se ha dividido en cuatro bloques, que corresponden a cuatro niveles de resolución del problema planteado claramente diferenciados:

- (1) *Teórico.* En el que se describe la formulación matemática de un sistema acoplado (apartado 2) y se muestran las expresiones particulares adecuadas al problema de interacción fluido-estructura (apartado 3).
- (2) *Algorítmico.* En el que se presentan los algoritmos de solución para resolver un sistema acoplado no-lineal (apartado 4).
- (3) *Implementación.* En el que se discuten distintas alternativas de implementación del algoritmo de solución propuesto (apartado 5).
- (4) *Práctico.* En el que se presenta un ensayo numérico orientado a determinar la estabilidad numérica del algoritmo (apartado 6).

## 2. FORMULACIÓN TEÓRICA DEL SISTEMA ACOPLADO

Por simplicidad, la discusión en este capítulo se ha restringido a un problema acoplado que incluye sólo dos dominios, estando el comportamiento de cada uno de ellos gobernado por ecuaciones diferenciales que incluyen derivadas en el tiempo hasta de segundo orden. Sin embargo, las ideas que se presentan aquí pueden ser fácilmente extendidas a otras situaciones. Para este tipo de problemas, cualquier método de discretización espacial (tales como los elementos finitos, las diferencias finitas o los elementos de contorno) conduce a un sistema de ecuaciones semi-discretas que matricialmente se puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (5.2.1.1)$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  son los vectores de incógnitas nodales en cada uno de los dominios,  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$ ,  $\ddot{x}_1$ ,  $\ddot{x}_2$  son los vectores de sus primeras y segundas derivadas temporales;  $f_1$  y  $f_2$  representan los términos de carga; y  $M_{ij}$ ,  $C_{ij}$  y  $K_{ij}$  son las matrices de "masa", "amortiguamiento" y "rigidez", respectivamente.

Explicitando los términos de interacción, la ecuación (1) se puede expresar separada en dos ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} M_{11}\ddot{x}_1 + C_{11}\dot{x}_1 + K_{11}x_1 &= f_1 - f_{c1} \\ M_{22}\ddot{x}_2 + C_{22}\dot{x}_2 + K_{22}x_2 &= f_2 - f_{c2} \end{aligned} \quad (5.2.1.2)$$

en las que los términos de interacción  $f_{c1}$  y  $f_{c2}$  se expresan como:

$$\begin{aligned} f_{c1} &= M_{12}\ddot{x}_2 + C_{12}\dot{x}_2 + K_{12}x_2 \\ f_{c2} &= M_{21}\ddot{x}_1 + C_{21}\dot{x}_1 + K_{21}x_1 \end{aligned} \quad (5.2.1.3)$$

Consecuentemente, la solución del problema acoplado se puede hacer, "directamente" (ambos dominios simultáneamente) resolviendo el sistema (1) o, "por bloques" (cada dominio por separado) resolviendo iterativamente las ecuaciones (2) y (3).

### 3. INTERACCIÓN FLUIDO-ESTRUCTURA

En general, el término "interacción fluido-estructura" engloba una amplia gama de problemas, dependiendo de diversos factores tales como la importancia que tenga la compresibilidad del fluido, la magnitud de su velocidad o, por ejemplo, el grado de deformabilidad de la estructura. En este apartado se hace referencia sólo a aquellos problemas en los que sean admisibles las siguientes hipótesis:

(a) Para el fluido:

- Las velocidades y los desplazamientos son pequeños.
- El fluido es compresible, no viscoso e irrotacional.

(b) Para la estructura:

- Los desplazamientos y las deformaciones son pequeñas.
- El material constitutivo puede tener un comportamiento no-lineal.

#### 3.1. Ecuaciones desacopladas del Fluido y del Sólido

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los sólidos y de los fluidos, teniendo en cuenta las hipótesis anteriormente citadas, han sido deducidas en los Capítulos II y III, respectivamente. Las ecuaciones semi-discretas de cada uno de los problemas desacoplados (ver ecuaciones 2.6.11 y 3.8.6) son:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad \text{para el sólido y} \quad (5.3.1.1)$$

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{p} = \hat{\mathbf{f}} \quad \text{para el fluido.} \quad (5.3.1.2)$$

estando todos los términos definidos en los capítulos respectivos, a diferencia de que en la ecuación (2.6.11), con objeto de utilizar la notación matricial, se ha substituido el término  $\mathbf{g}(\mathbf{a})$  por el producto matricial  $\mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{a}$ , como forma algorítmica de expresar el carácter no-lineal de la ecuación constitutiva del sólido (ver ecuación 2.3.1.8):

$$\mathbf{K}(\mathbf{a})\mathbf{a} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{a}) = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{a}) d\Omega \quad (5.3.1.3)$$

### 3.2. Términos de interacción

En el problema de interacción fluido-estructura el acoplamiento se produce a través de la superficie de contacto denominada aquí  $\Gamma_{sf}$  y  $\Gamma_{fs}$ , según se consideran pertenecientes al sólido o al fluido, respectivamente. En este trabajo se ha tomado la convención de que el vector unitario  $n$  normal a dicha superficie de contacto siempre está orientado en dirección saliente del sólido y por tanto entrante al fluido (ver figura 5.3.2.1)

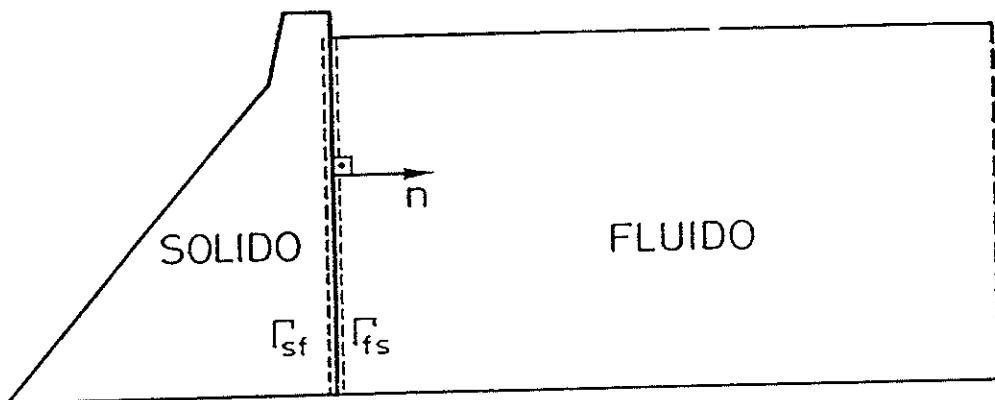


Figura 5.3.2.1 Normal unitaria en la superficie de contacto fluido-estructura.

Utilizando el vector  $n$  así definido, las fuerzas que el fluido ejerce sobre el sólido  $f_{sf}$ , en función de las presiones que actúan sobre la superficie de contacto, se pueden escribir como:

$$\mathbf{f}_{sf} = \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{N}^T \mathbf{n} \mathbf{P} d\Gamma = \int_{\Gamma_{sf}} \mathbf{N}^T \mathbf{n} \hat{\mathbf{N}} \mathbf{p} d\Gamma = \mathbf{Q} \mathbf{p} \quad (5.3.2.1)$$

Por su parte, las pseudo-fuerzas  $\hat{\mathbf{f}}_{fs}$ , que el sólido ejerce sobre el fluido, en función de las aceleraciones  $\ddot{\mathbf{a}}$  de los puntos de la superficie de contacto (para la formulación en presiones y considerando que éstas son positivas cuando el desplazamiento es entrante al fluido), se pueden escribir como (ver

ecuación 3.8.10):

$$\hat{\mathbf{f}}_{fs} = -\rho_0 \int_{\Gamma_{fs}} \hat{\mathbf{N}}^T \mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{u}} d\Gamma = -\rho_0 \int_{\Gamma_{fs}} \hat{\mathbf{N}}^T \mathbf{n} \mathbf{N} \ddot{\mathbf{a}} d\Gamma = -\rho_f \mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{a}} \quad (5.3.2.2)$$

En las ecuaciones anteriores,  $\mathbf{Q}$  es una matriz rectangular de interacción dada por la expresión:

$$\mathbf{Q} = \int_{\Gamma_{fs}} \mathbf{N}^T \mathbf{n} \hat{\mathbf{N}} d\Gamma \quad (5.3.2.3)$$

siendo  $\mathbf{N}$  y  $\hat{\mathbf{N}}$  las funciones de base utilizadas para discretizar los desplazamientos  $\mathbf{u}$  del sólido y las presiones  $P$  del fluido, respectivamente. La matriz  $\mathbf{Q}$  así definida, tiene valores distintos de cero sólo en los nudos situados en la superficie de interacción.

### 3.3. Sistema acoplado fluido-estructura

El sistema acoplado semi-discreto dado por las ecuaciones (5.3.1.1) y (5.3.1.2) y por los términos de interacción (5.3.2.1) y (5.3.2.2) en los que se ha considerado la formulación en presiones para el fluido, se puede escribir matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \rho_f \mathbf{Q}^T & \hat{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{a}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{a}) & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \hat{\mathbf{f}} \end{Bmatrix} \quad (5.3.3.1)$$

estando todos los términos definidos previamente en los Capítulos II y III, respectivamente.

Este sistema de ecuaciones corresponde al caso general en que la estructura es flexible y el fluido compresible. Sin embargo, dependiendo del grado de flexibilidad de la estructura y de la compresibilidad del fluido se tienen los siguientes casos particulares:

#### 3.3.1. Estructura infinitamente rígida y fluido compresible

La hipótesis de una estructura infinitamente rígida implica que en la ecuación (5.3.1.1) la matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  tiende a infinito y por tanto dicha ecuación carece de sentido. De esta forma, el sistema de ecuaciones (5.3.3.1) se reduce a:

$$[\hat{\mathbf{M}}] \{ \ddot{\mathbf{p}} \} + [\hat{\mathbf{C}}] \{ \dot{\mathbf{p}} \} + [\hat{\mathbf{K}}] \{ \mathbf{p} \} = \{ \hat{\mathbf{f}} - \rho_f \mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{a}} \} \quad (5.3.3.1.1)$$

donde  $\ddot{\mathbf{a}}$  es la aceleración prescrita en el contorno del fluido. La solución de esta ecuación fue discutida en el Capítulo III (ver ecuación 3.8.6).

### 3.3.2. Estructura flexible y fluido incompresible

A medida que el fluido se hace más incompresible, la velocidad del sonido  $c$  en el fluido crece, tendiendo a infinito en el límite. Consecuentemente, las matrices de masa  $\hat{M}$  y de amortiguamiento  $\hat{C}$  tienden a cero (ver ecuaciones 3.8.7 y 3.8.8), por lo que el sistema de ecuaciones (5.3.3.1) tiende a:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ \rho_f Q^T & 0 \end{bmatrix} \{ \ddot{a} \} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \{ \dot{p} \} + \begin{bmatrix} K(a) & -Q \\ 0 & \hat{K} \end{bmatrix} \{ a \} = \{ f \} \quad (5.3.3.2.1)$$

La segunda ecuación de este nuevo sistema se puede resolver para  $p$ , con lo que se obtiene:

$$p = -\rho_f \hat{K}^{-1} Q^T \ddot{a} + \hat{K}^{-1} \hat{f} \quad (5.3.3.2.2)$$

expresión que substituida en la primera ecuación, reduce el sistema de ecuaciones (5.3.3.1) a:

$$[M + \rho_f Q \hat{K}^{-1} Q^T] \{ \ddot{a} \} + [C] \{ \dot{a} \} + [K(a)] \{ a \} = \{ f + Q \hat{K}^{-1} \hat{f} \} \quad (5.3.3.2.3)$$

Así, el efecto de tener un fluido incompresible en interacción con una estructura flexible es equivalente a una estructura con una masa adicional (comúnmente denominada *masa añadida*<sup>[Zie1]</sup>). La solución de la ecuación (3) se discute en el Capítulo II, con la única diferencia de que ahora al calcular la matriz de masa se debe agregar el término  $\rho_f Q \hat{K}^{-1} Q^T$  como masa añadida y, al vector de fuerzas se le debe agregar el término  $Q \hat{K}^{-1} \hat{f}$  correspondiente a las pseudo-fuerzas aplicadas al fluido. Esta alternativa es interesante porque puede usarse como una primera aproximación en un análisis de una presa a embalse lleno en la que se evita el resolver un problema de interacción. Sin embargo, exige el cálculo de la inversa de la matriz  $\hat{K}$  y además, el término  $\rho_f Q \hat{K}^{-1} Q^T$ , que se suma a la masa del sólido, representa una matriz llena (sólo en los grados de libertad correspondientes al contorno de interacción), lo que altera considerablemente el perfil de la matriz efectiva de la estructura. Todo esto puede ser de un costo numérico elevado haciendo que esta alternativa no sea muchas veces adecuada.

### 3.3.3. Estructura infinitamente rígida y fluido incompresible

Este es el caso más simple ya que la ecuación (5.3.3.1) simplemente se reduce a:

$$\hat{K} p = \hat{f} - \rho_f Q^T \ddot{a} \quad (5.3.3.3.1)$$

La solución de esta ecuación es inmediata (dada por 5.3.3.2.2) y fue discutida en el Capítulo III (ver ecuación 3.10.1).

### 3.4. Otras formulaciones equivalentes para el fluido

Cuando en un problema de interacción fluido-estructura se utiliza la formulación en presiones para modelar al fluido, (ver Capítulo III, apartado 4), de acuerdo a lo visto en el apartado anterior, al considerar el sistema acoplado fluido-estructura, se llega a la expresión dada por (5.3.3.1):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \rho_f \mathbf{Q}^T & \hat{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{a}} \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K(a)} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \hat{\mathbf{f}} \end{Bmatrix} \quad (5.3.4.1)$$

Sin embargo, es posible utilizar otras posibles alternativas para modelar el fluido. Según lo visto en el apartado 9 del Capítulo III, las formulaciones en potencial de velocidades y en potencial de desplazamientos, desde el punto de vista de su implementación, son similares a la formulación en presiones. Consecuentemente, es interesante observar que al utilizar para el fluido la formulación en potencial de velocidades ( $\nabla \varphi = -\rho_0 \dot{\mathbf{u}}$ ), en el sistema acoplado fluido-estructura se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones semi-discretas:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{a}} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{Q} \\ \rho_f \mathbf{Q}^T & \hat{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K(a)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \hat{\mathbf{f}} \end{Bmatrix} \quad (5.3.4.2)$$

donde según (3.9.1.1.6) el vector de presiones nodales  $\mathbf{p}$  está dado por  $\varphi$ .

Por su parte, si para el fluido se utiliza la formulación de potencial de desplazamientos ( $\nabla \phi = -\rho_0 \mathbf{u}$ ), al considerar el sistema acoplado se llega al siguiente sistema de ecuaciones semi-discretas:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{a}} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K(a)} & \mathbf{0} \\ \rho_f \mathbf{Q}^T & \hat{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \hat{\mathbf{f}} \end{Bmatrix} \quad (5.3.4.3)$$

donde esta vez y según (3.9.2.1.4) el vector de presiones nodales  $\mathbf{p}$  está dado por  $\phi$ .

Finalmente se debe indicar que si se utilizara la formulación en desplazamientos para el fluido, el sistema de ecuaciones semi-discreto sería completamente diferente. Por otro lado, es importante recordar que, según se discute en el Capítulo III, la formulación en presiones para el fluido tiene algunas ventajas con respecto a las demás alternativas –tales como su menor coste computacional asociado y el hecho de ser capaz de representar adecuadamente un estado hidrostático–. Consecuentemente, en este trabajo se ha elegido la formulación en presiones y es a la que se hace referencia en el resto del capítulo. Sin embargo, es interesante apuntar que las otras formulaciones podrían tener algunas ventajas o desventajas en relación a problemas tales como convergencia o estabilidad del algoritmo iterativo por bloques o, respecto a la precisión de los resultados obtenidos por efecto del error numérico asociado a cada formulación.

#### 4. ALGORITMOS DE SOLUCIÓN PARA EL PROBLEMA ACOPLADO

En este apartado se presentan los algoritmos de solución para resolver un sistema acoplado no-lineal, tanto para la estrategia (a) -solución Directa- como para la estrategia (b) -solución Iterativa por Bloques-.

##### 4.1. Solución Directa

El sistema de ecuaciones semi-discretas correspondiente a un problema no-lineal acoplado de dos dominios cuyo comportamiento está gobernado por ecuaciones diferenciales con derivadas temporales hasta de segundo orden, se puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (5.4.1.1)$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  son los vectores de incógnitas nodales de cada uno de los dominios,  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$ ,  $\ddot{x}_1$ ,  $\ddot{x}_2$  son sus primeras y segundas derivadas temporales;  $f_1$  y  $f_2$  representan los términos de carga; y  $M_{ij}$ ,  $C_{ij}$  y  $K_{ij}$  son las matrices de "masa", "amortiguamiento" y "rigidez", respectivamente. Es importante indicar que, aunque aquí no se ha explicitado ninguna dependencia, este sistema puede ser no-lineal, es decir que todas o algunas de estas matrices pueden depender de los valores de las variables incógnita.

De una forma compacta, el sistema de ecuaciones semi-discretas (1) se puede reescribir como:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f \quad (5.4.1.2)$$

donde  $M$ ,  $C$  y  $K$  son las matrices de "masa", "amortiguamiento" y "rigidez" del sistema acoplado; y los términos  $f$ ,  $x$ ,  $\dot{x}$  y  $\ddot{x}$  representan las "fuerzas", las incógnitas, y sus primeras y segundas derivadas del sistema acoplado, respectivamente.

La ecuación (2) se puede resolver utilizando el mismo algoritmo incremental predictor multi-corrector del método de Newton-Raphson que se ha presentado en el Capítulo II. En éste se supone conocida la solución en el instante  $t$  y se busca iterativamente la solución para el instante  $t + \Delta t$ :

$$x_i^{t+\Delta t} := x^t + \Delta x_i^{t+\Delta t} \quad (5.4.1.3)$$

donde  $\Delta x_i^{t+\Delta t}$  es el incremento de las variables incógnita para la iteración  $i$  que, a partir de una predicción inicial, se va corrigiendo iterativamente:

$$\Delta x_{i+1}^{t+\Delta t} := \Delta x_i^{t+\Delta t} + [\tilde{K}]_i^{-1} \Psi_i \quad (5.4.1.4)$$

siendo  $\Psi_i$  el vector de fuerzas residuales definido como:

$$\Psi_i := \mathbf{f}^{t+\Delta t} - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}_i^{t+\Delta t} - \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}_i^{t+\Delta t} - \mathbf{K} \mathbf{x}_i^{t+\Delta t} \quad (5.4.1.5)$$

y  $[\tilde{\mathbf{K}}]_{ij} = -\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}$  la matriz tangente efectiva. En cada paso de tiempo, las derivadas  $\dot{\mathbf{x}}$  y  $\ddot{\mathbf{x}}$  se obtienen de las fórmulas de extrapolación usadas. Una opción común y muy eficiente para ecuaciones de segundo orden viene dada por las fórmulas de extrapolación de Newmark (ver ecuaciones 2.6.16 y 2.6.17).

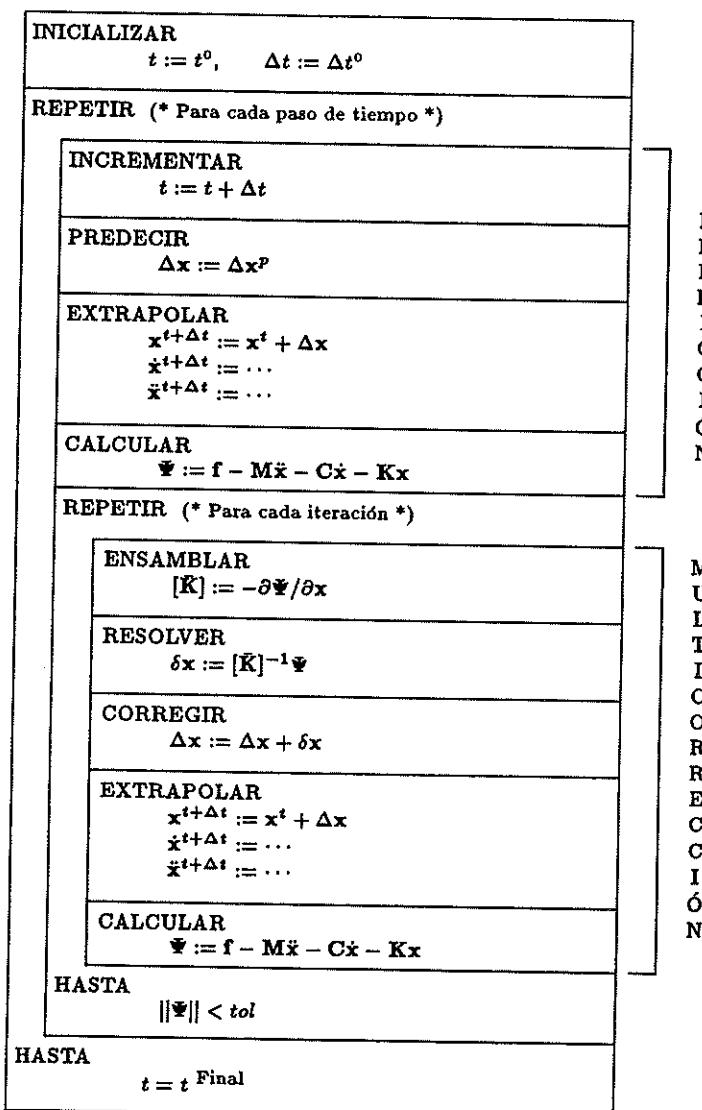


Figura 5.4.1.1 Algoritmo Directo -Estrategia (a)-

El algoritmo correspondiente a la solución Directa -Estrategia (a)- está representado en la figura 5.4.1.1. Nótese que éste sigue exactamente el mismo procedimiento que se utiliza para resolver un problema no acoplado (ver Capítulo II, apartado 7.1 y Capítulo IV, figura 4.2.2).

La desventaja de este algoritmo es que, en general, las matrices resultantes son grandes y heterogéneas ya que representan la discretización de diferentes dominios y/o diferentes fenómenos físicos. Además, aunque en la formulación de las ecuaciones semi-discretas de cada dominio se obtengan matrices simétricas definidas positivas y diagonalmente dominantes, en general, las matrices del sistema de ecuaciones semi-discretas de (2) no tendrán necesariamente dichas condiciones. Así por ejemplo, en el problema de interacción fluido-presa, el sistema de ecuaciones semi-discretas resultante no es simétrico (ver ecuación 5.3.3.1). En la referencia [Zie3] se sugiere un método por el que se puede obtener un sistema semi-discreto simétrico, aunque éste parece ser válido sólo cuando el problema es lineal y no presenta amortiguamiento. Lamentablemente, dicho procedimiento involucra la inversión de la matriz de masa  $\hat{M}$ , por lo que computacionalmente resulta ineficiente. Sin embargo, si en este problema se utiliza el algoritmo de Newmark (con parámetros  $\beta$  y  $\gamma$ ) para llegar a las ecuaciones discretas, se puede obtener una matriz efectiva simétrica simplemente premultiplicando primero la segunda ecuación por el coeficiente  $-\beta\Delta t^2/\rho_f$ .

Por otro lado, el algoritmo final está definido de forma similar al que se utiliza para resolver un problema no acoplado y esto es una ventaja, por ejemplo, a la hora de abordar el análisis de estabilidad.

#### 4.2. Solución Iterativa por Bloques

El sistema de ecuaciones (5.4.1.1) se puede expresar en dos ecuaciones semi-discretas, cada una de las cuales correspondiente a uno de los dominios:

$$\mathbf{M}_{11}\ddot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{C}_{11}\dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{K}_{11}\mathbf{x}_1 = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_{c1} \quad (5.4.2.1)$$

$$\mathbf{M}_{22}\ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{C}_{22}\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{K}_{22}\mathbf{x}_2 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_{c2} \quad (5.4.2.2)$$

donde  $\mathbf{f}_{c1}$  y  $\mathbf{f}_{c2}$  representan los términos de interacción que se expresan como:

$$\mathbf{f}_{c1} = \mathbf{M}_{12}\ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{C}_{12}\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{K}_{12}\mathbf{x}_2 \quad (5.4.2.3)$$

$$\mathbf{f}_{c2} = \mathbf{M}_{21}\ddot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{C}_{21}\dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{K}_{21}\mathbf{x}_1 \quad (5.4.2.4)$$

El algoritmo Iterativo por Bloques -Estrategia (b)- consiste en resolver el primer sistema (ecuación 1) utilizando alguna predicción para las variables del segundo (ecuación 2) que aparecen en el término de interacción. Una vez que se ha obtenido las solución del primer sistema, sus valores pueden ser substituidos en los términos de interacción del segundo, permitiendo

nuevamente un tratamiento independiente de éste. Finalmente, se compara la respuesta del segundo sistema con la predicción que se hizo de ésta para resolver el primero. Si la diferencia entre estos valores es mayor que una tolerancia especificada, se debe volver a resolver la primera ecuación utilizando ahora la respuesta del segundo en el cálculo de los términos de interacción. El proceso iterativo debe continuar hasta conseguir que los valores de los términos de interacción (comparados entre dos iteraciones sucesivas) no varíen una cantidad superior a la tolerancia especificada.

El algoritmo de solución correspondiente al dominio 1 viene representado en la figura 5.4.2.1. Obviamente, el dominio 2 sigue un procedimiento idéntico. Obsérvese que éste sigue muy de cerca el proceso descrito en la figura 5.4.1.1 (para la estrategia a), excepto por las operaciones de exportación/importación, la evaluación de los términos de interacción y de los pasos de restitución/modificación que ahoran innecesarias re-evaluaciones del vector de fuerzas residuales. En esta figura, la denominación *SHUTTLE* representa el *código principal* responsable de transmitir la información entre los *códigos secundarios* responsables, a su vez, de analizar cada uno de los dominios por separado. En los apartados que siguen se discuten alternativas posibles para la implementación de este código principal denominado *SHUTTLE*. Por el momento consideremos las ventajas y desventajas que presenta este algoritmo iterativo de solución.

La ventaja, ahora, es que las matrices del lado izquierdo de las ecuaciones (1) y (2) provienen sólo del dominio en consideración. Por tanto, éstas representan magnitudes físicas homogéneas. Además son más pequeñas que la correspondiente al algoritmo Directo y, en muchos casos prácticos, simétricas definidas positivas y diagonalmente dominantes. Por otro lado, las dificultades asociadas al cálculo de los términos de interacción, dados por las ecuaciones (3) y (4), son dependientes del problema. Así, para los problemas del Tipo I –como los de interacción fluido-presa–, estos términos dependen exclusivamente de la geometría y discretización espacial utilizada en los contornos de interacción que “pertenecen” a ambos dominios, por lo que pueden calcularse fácilmente y por separado en ambos dominios. Por su parte, para los problemas de Tipo II, dichos términos dependen de la zona en la que ambos dominios se superpongan y ésta también “pertenece” a ambos. Por tanto, sólo pueden presentarse dificultades cuando se utilicen diferentes mallas o interpolaciones en los distintos dominios.

La gran desventaja, sin embargo, es que el algoritmo final es intrínsecamente iterativo, y consecuentemente es necesario iterar incluso cuando los problemas a resolver son lineales (véase, en la figura 5.3.2.1, la necesidad de importar el estado de convergencia global). Sin embargo, esto puede no ser especialmente inconveniente; así por ejemplo, si el problema es no-lineal de cualquier forma se requerirá iterar para alcanzar la solución y,

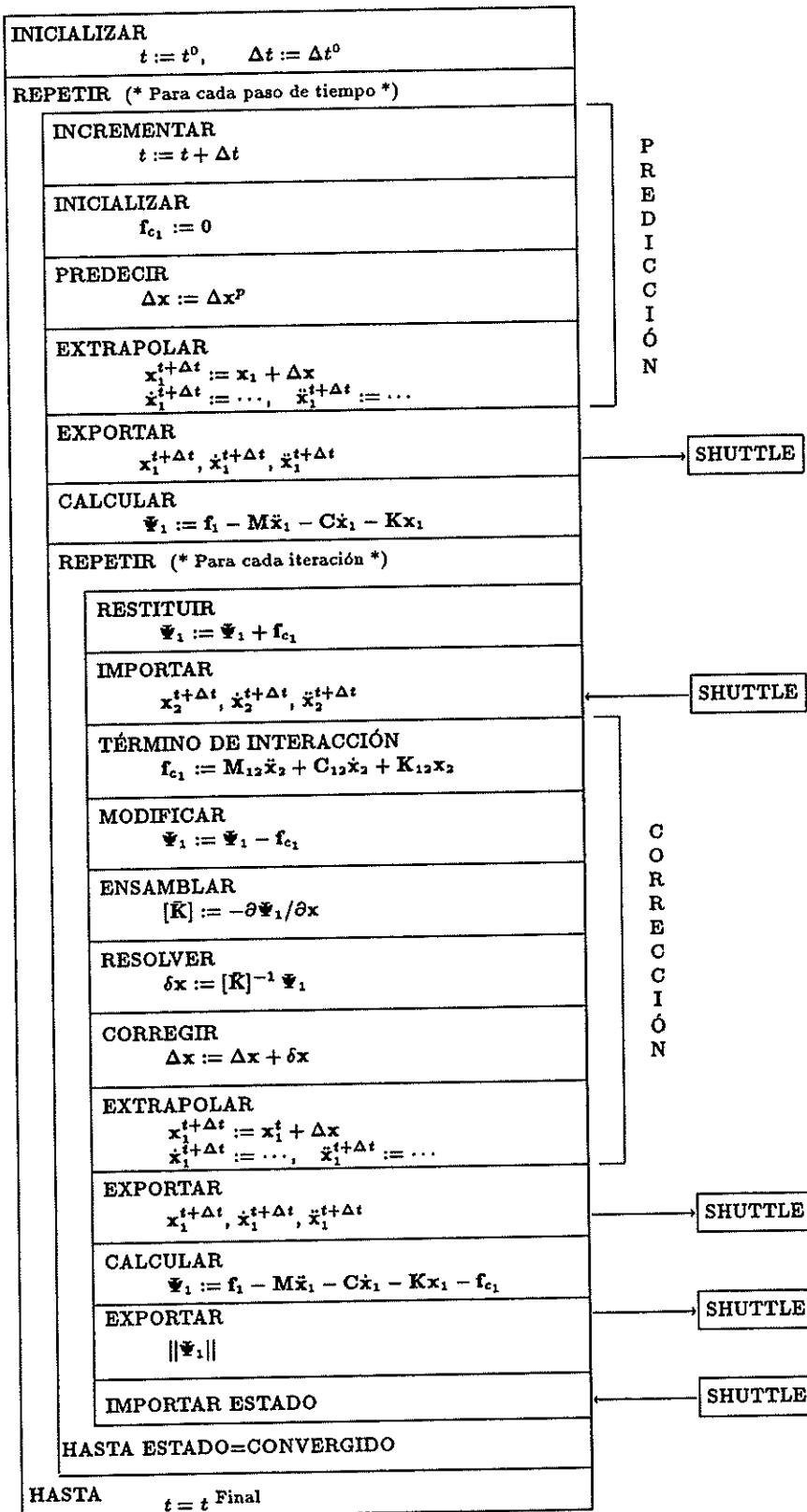


Figura 5.4.2.1 Algoritmo Iterativo por Bloques -Estrategia (b)-

por el contrario, si el problema es lineal pero el acoplamiento no es demasiado fuerte, tampoco serán necesarias demasiadas iteraciones por efecto de la interacción. Algunas veces es posible resolver un problema acoplado por bloques pero sin iterar; en la literatura<sup>[Zie3]</sup> a este algoritmo (no iterativo) se lo ha denominado "staggered". En el apartado que sigue se presentan algunas consideraciones al respecto.

#### 4.3. Estabilidad de los algoritmos de solución

El algoritmo Directo -Estrategia (a)- está definido de una forma similar al que se utiliza para resolver un problema no acoplado. Consecuentemente, las ecuaciones semi-discretas (5.4.1.1) se pueden discretizar en el tiempo utilizando las fórmulas de extrapolación de Newmark -en la misma forma en que se hizo en el Capítulo II (apartado 6) con la ecuación semi-discreta del movimiento-. El análisis de estabilidad de este algoritmo está perfectamente establecido<sup>[BeH][Hug][Zie1]</sup>, siendo incondicionalmente estable para  $\gamma \geq 0.5$  y  $\beta \geq (\gamma + 0.5)^2/4$  y no presentando ningún amortiguamiento numérico inducido para los valores de estabilidad estricta  $\gamma = 0.5$  y  $\beta = 0.25$ <sup>[Ba][Hug][Zie1]</sup>.

Por su parte, el algoritmo Iterativo por Bloques -Estrategia (b)- es, en el límite, exactamente igual al algoritmo Directo; es decir, si en el algoritmo Iterativo por Bloques se itera hasta que los términos de interacción sean iguales en dos iteraciones sucesivas, entonces la solución obtenida es idéntica a la solución directa (adviértase que para alcanzar este punto no es necesario iterar hasta el infinito, sino solamente hasta alcanzar la precisión de la máquina). En esta situación, la estabilidad del algoritmo Iterativo es similar a la del algoritmo Directo. Consecuentemente, este algoritmo es incondicionalmente estable cuando se utilizan los valores adecuados de los parámetros  $\gamma$  y  $\beta$  en cada uno de los dominios por separado.

Sin embargo y desde el punto de vista práctico, no se puede iterar hasta que los términos de interacción no varíen y, en consecuencia, en el algoritmo Iterativo se introduce una fuente adicional de inestabilidad (el producido por el "error" que se admite en los términos de interacción). De esta forma, incluso si se utilizan algoritmos incondicionalmente estables para cada dominio, el algoritmo acoplado resultante puede ser condicionalmente estable (ya que depende de la tolerancia especificada para la variación en los términos de interacción). El análisis de la sensibilidad de este parámetro depende de las condiciones propias de cada problema. Así por ejemplo, para el problema de interacción fluido-estructura, en los ensayos analizados para este trabajo (ver Capítulo VII), no se ha encontrado ningún tipo de inestabilidad, incluso con valores altos de dicho parámetro. Por otro lado, la dependencia de la estabilidad con el parámetro de tolerancia global ha sido puesta de manifiesto en un problema de flujo incompresible con acoplamiento térmico en la referencia [Cod]. A su vez, en la referencia [WTSS] se estudia

el efecto que tiene el “error” iterativo producido en la estabilidad de un algoritmo iterativo asociado al problema acoplado de consolidación de medios porosos con flujo intersticial. En ella se muestra que, evidentemente, el algoritmo Iterativo será tanto más estable cuanto menor sea la tolerancia global admitida en la variación de los términos de interacción.

Debido a este “error” en la evaluación de los términos de interacción, la estabilidad del algoritmo Iterativo por Bloques depende, también, de la fórmula utilizada para hacer la predicción inicial de la respuesta (ver el término  $\Delta x^p$  en la figura 5.4.2.1). Esta dependencia será tanto menor cuanto más iteraciones se hagan. Sin embargo, si se quiere hacer pocas iteraciones, se debe poner especial cuidado en la elección de dicha fórmula. En el apartado 6 de este capítulo se presenta un ensayo numérico orientado a estudiar la influencia de dicha fórmula en la estabilidad del algoritmo.

Consecuentemente, en función de una medida del “error” en los términos de interacción o, equivalentemente, del número de iteraciones hechas en cada paso de tiempo, la estabilidad del algoritmo Iterativo por Bloques –Estrategia (b)– depende:

- (a) Del problema que se esté resolviendo (la estructura propia de las matrices).
- (b) Del algoritmo de discretización en el tiempo y los parámetros que lo definen (Newmark:  $\gamma$ ,  $\beta$ ).
- (c) Del incremento de tiempo que se hace por paso de tiempo ( $\Delta t$ ).
- (d) Del orden en que se resuelven los dominios (primero el sólido, el fluido o ambos simultáneamente).
- (e) De la fórmula de predicción inicial ( $\Delta x^p$ ).

El estudio detallado de la estabilidad de todas estas dependencias es evidentemente complicado incluso en problemas lineales<sup>†</sup>. La mayor dificultad de éste es que no se dispone, en general, de ecuaciones modales en forma explícita –máxime si el problema es no-lineal– y que los polinomios característicos que aparecen en tal análisis son de alto orden. De todas formas, el objetivo del análisis de estabilidad es determinar si el algoritmo es condicional o incondicionalmente estable y, en el caso de ser condicionalmente estable, establecer una expresión que permita calcular el número de iteraciones necesarias por paso de tiempo o, equivalentemente, la tolerancia mínima necesaria para garantizar la estabilidad. Dicha expresión dependería de todos los elementos que definen el algoritmo tales como: el incremento de tiempo utilizado, el orden en que se resuelven los dominios, las fórmulas de predicción, los parámetros del esquema de discretización temporal, etc.

---

<sup>†</sup> [FeP][Par][PaF1][PaF2][FeG][BeH][SKK]

Basándonos en la información disponible<sup>[SKK]</sup> y en los resultados numérico-experimentales obtenidos (ver Capítulo VII y [GCO1][GCO2]) se puede concluir que para el problema de interacción presa-embalse con los parámetros físicos adecuadamente asociados al mismo, el algoritmo Iterativo por Bloques es muy estable incluso con un pequeño número de iteraciones por paso de tiempo (del orden de dos o tres). Es decir, en problemas lineales se obtiene estabilidad para incrementos de tiempo mayores a los que en la práctica exige la exactitud y, en problemas no-lineales, el número de iteraciones por paso de tiempo viene dado fundamentalmente por el grado de no-linealidad antes que por el acoplamiento.

Un algoritmo óptimo sería aquél en el que no fuese necesario iterar pero que conservara la estabilidad del algoritmo Iterativo. Lamentablemente, este algoritmo (denominado<sup>[Zie3]</sup> "staggered") es condicionalmente estable para la mayoría de los problemas. Las particularidades propias del mismo han sido discutidas en diversos tratados<sup>[FeP][Par][PaF1][PaF2]</sup> en los que para algunos problemas lineales se encuentra estabilidad incondicional o se proponen modificaciones substanciales tendientes a conseguir dicha estabilidad. Así por ejemplo, en el problema fluido-estructura en régimen lineal, en que el algoritmo "staggered" es condicionalmente estable, en la referencia [Zie3] se indica que el límite de estabilidad es el mismo que si se usara un algoritmo explícito para el fluido. Además, en dicha referencia, se propone una alternativa de estabilización que consiste en agregar a la ecuación (5.3.1.1), correspondiente al sólido, un término auxiliar a ambos lados<sup>[ZiC]</sup>. En este caso, el algoritmo de solución se puede escribir como:

- a) En base a una predicción de  $\ddot{\mathbf{a}} = \ddot{\mathbf{a}}^p$  se resuelve el estado de presiones en el fluido:

$$[\hat{\mathbf{M}}] \ddot{\mathbf{p}} + [\hat{\mathbf{C}}] \dot{\mathbf{p}} + [\hat{\mathbf{K}}] \mathbf{p} = \hat{\mathbf{f}} - \rho_f \mathbf{Q}^T \ddot{\mathbf{a}}^p \quad (5.4.3.1)$$

- b) Con la solución de  $\mathbf{p}$  se calculan los valores correctos de  $\ddot{\mathbf{a}}$ , pero agregando un término auxiliar a ambos lados de la ecuación (5.3.1.1):

$$[\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{a}} + [\mathbf{C}] \dot{\mathbf{a}} + [\mathbf{K} + \rho_f \mathbf{Q} \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{Q}^T] \mathbf{a} = \mathbf{f} + \mathbf{Q} \mathbf{p} + [\rho_f \mathbf{Q} \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{Q}^T] \mathbf{a}^p \quad (5.4.3.2)$$

De acuerdo con el análisis de estabilidad presentado en la referencia [Cha] para un algoritmo de solución muy similar al anterior en el que se utiliza el mismo término de estabilización, esta modificación hace que el algoritmo "staggered" sea incondicionalmente estable cuando los parámetros ( $\gamma$  y  $\beta$ ) del método de Newmark implican que cada dominio por separado lo sea y además, cuando se verifica que  $\gamma_{solido} \geq 2\beta_{fluido}$ . Lamentablemente, dicha estabilización requiere la inversión de la matriz  $\hat{\mathbf{M}}$ , que al ser ensamblada, modifica el perfil de la matriz efectiva y, lo que es peor, destruye la modularidad en la programación.

#### 4.4. Análisis de convergencia

En el apartado anterior se ha indicado que el algoritmo Iterativo por Bloques, tanto en cuanto a la solución numérica como al análisis de estabilidad, es idéntico al algoritmo Directo siempre y cuando se alcance la convergencia. Esto es, cuando en dos iteraciones consecutivas los términos de interacción no varían. Por otro lado, cuando no se converge a la solución exacta, el algoritmo presenta una fuente de inestabilidad cuyo efecto, se supone, puede ser minimizado incrementando el número de iteraciones. Sin embargo, el procedimiento iterativo podría no ser convergente (no disminuir el error en cada iteración) o, por el contrario, el orden de convergencia podría ser lo suficientemente alto como para exigir un número pequeño de iteraciones para alcanzar dicha convergencia. Consecuentemente es necesario hacer algunas consideraciones respecto a la velocidad de convergencia de este procedimiento de solución.

La convergencia de un procedimiento iterativo lineal se encuentra muy bien estudiada en numerosos tratados<sup>†</sup>. En ellos se observa que la solución iterativa de cualquier sistema lineal de ecuaciones se puede escribir de la forma:

$$\mathbf{N} \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{P} \mathbf{x}_i + \mathbf{b} \quad (5.4.4.1)$$

donde  $\mathbf{x}_i$  es la secuencia de aproximaciones sucesivas a la solución buscada,  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{P}$  son las matrices y  $\mathbf{b}$  el vector asociado que definen el algoritmo de solución. Así, si  $\mathbf{x}_0$  es una predicción inicial, la convergencia de la secuencia  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$  a la solución  $\mathbf{x}$  está sujeta –como condición suficiente– a que la matriz  $\mathbf{J}$  que define el proceso iterativo, dada por:

$$\mathbf{J} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{P} \quad (5.4.4.2)$$

tenga todos los valores absolutos de sus auto-valores menores que uno, es decir, que el radiopectral de  $\mathbf{J}$  sea inferior a uno ( $\rho(\mathbf{J}) < 1$ ). De esta forma, para analizar la convergencia de un algoritmo iterativo, es necesario escribirlo de acuerdo con la ecuación (1), explicitar la matriz  $\mathbf{J}$  y calcular su radiopectral. El algoritmo iterativo será convergente si y sólo si dicho radiopectral es menor que uno. Además, a medida que éste sea menor el orden de convergencia será mayor.

Cuando se discretiza en el tiempo el sistema de ecuaciones semi-discretas (5.4.1.1) se llega a un sistema de ecuaciones algebraico del tipo:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{11} & \tilde{\mathbf{K}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{21} & \tilde{\mathbf{K}}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{Bmatrix} \quad (5.4.4.3)$$

---

<sup>†</sup> [StB][IsB][Var][Yo]

donde  $p$  y  $a$  representan las incógnitas;  $K_{ij}$  son matrices que se obtienen con las fórmulas de extrapolación adecuadas (ver Capítulo II, apartado 6);  $g$  y  $h$  son los vectores de fuerzas equivalentes. Todos ellos en función de los valores convergidos para el paso de tiempo anterior.

El algoritmo Iterativo por Bloques recibe este nombre porque puede ser identificado con el método de solución por bloques de Gauss-Seidel. Así, si suponemos que se resuelve el sistema de ecuaciones (2) iterativamente para  $a$  se tiene el siguiente procedimiento:

- En base a una predicción de  $a = a^p$  se resuelve la primera ecuación para  $p$ :

$$\tilde{K}_{11} p = g - \tilde{K}_{12} a^p \quad (5.4.4.4)$$

- Con la solución de  $p$  se calculan los nuevos valores de  $a$ :

$$\tilde{K}_{22} a = h - \tilde{K}_{21} p \quad (5.4.4.5)$$

Reemplazando (4) en (5), el procedimiento iterativo anterior se puede reescribir como:

$$\tilde{K}_{22} a_{i+1} = \tilde{K}_{21} \tilde{K}_{11}^{-1} \tilde{K}_{12} a_i + h - \tilde{K}_{21} \tilde{K}_{11}^{-1} g \quad (5.4.4.6)$$

Identificando (6) con (1) se tiene:

$$N = \tilde{K}_{22}, \quad P = \tilde{K}_{21} \tilde{K}_{11}^{-1} \tilde{K}_{12} \quad y \quad b = h - \tilde{K}_{21} \tilde{K}_{11}^{-1} g \quad (5.4.4.7)$$

Por lo que la matriz que define el proceso iterativo es:

$$J = N^{-1}P = \tilde{K}_{22}^{-1} \tilde{K}_{21} \tilde{K}_{11}^{-1} \tilde{K}_{12} \quad (5.4.4.8)$$

Esta matriz  $J$  a su vez está compuesta por matrices que provienen de las fórmulas de extrapolación utilizadas (dependientes del incremento de tiempo usado, por ejemplo). Para constatar que el método es convergente sería necesario calcular el radiopectral de la matriz  $J$  y verificar que éste es inferior a 1. Sin embargo esta tarea es, cuando menos, muy laboriosa y dependiente de la formulación particular de cada problema. Además, cuando el problema es no-lineal –como es el caso que nos ocupa–, ya no se puede aplicar este procedimiento. Sin embargo, y nuevamente basándonos en la información disponible y en los resultados numérico-experimentales obtenidos (ver apartado 6), se puede concluir que para el problema de interacción presa-embalse, el algoritmo iterativo por bloques es convergente para los casos de interés práctico; por lo que no es necesario calcular efectivamente este radiopectral para cada problema que se quiera resolver.

Por otro lado, es bien sabido que a medida que el radio espectral de  $\mathbf{J}$  es menor, la velocidad de convergencia del algoritmo iterativo es mayor. Basándose en este hecho, se puede proponer algún método que, evitando cualquier cálculo laborioso, permita fijar libremente el radio espectral de la matriz  $\mathbf{J}$ . Una idea posible<sup>[SaV]</sup> consiste en agregar un término auxiliar  $\mathbf{E}$  a a ambos lados de la ecuación (5), con lo que se obtiene:

$$[\tilde{\mathbf{K}}_{22} + \mathbf{E}] \mathbf{a} = \mathbf{h} - \tilde{\mathbf{K}}_{21} \mathbf{p} + \mathbf{E} \mathbf{a}^p \quad (5.4.4.9)$$

Tras reemplazar (4) en (9), el procedimiento iterativo se puede reescribir como:

$$[\tilde{\mathbf{K}}_{22} + \mathbf{E}] \mathbf{a}_{i+1} = [\tilde{\mathbf{K}}_{21} \tilde{\mathbf{K}}_{11}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{12} + \mathbf{E}] \mathbf{a}_i + \mathbf{h} - \tilde{\mathbf{K}}_{21} \tilde{\mathbf{K}}_{11}^{-1} \mathbf{g} \quad (5.4.4.10)$$

Identificando, esta vez, (10) con (1) se tiene:

$$\mathbf{N} = [\tilde{\mathbf{K}}_{22} + \mathbf{E}], \quad \mathbf{P} = [\tilde{\mathbf{K}}_{21} \tilde{\mathbf{K}}_{11}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{12} + \mathbf{E}] \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \mathbf{h} - \tilde{\mathbf{K}}_{21} \tilde{\mathbf{K}}_{11}^{-1} \mathbf{g} \quad (5.4.4.11)$$

Por lo que la matriz que define el sistema iterativo ahora es:

$$\mathbf{J} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{P} = [\tilde{\mathbf{K}}_{22} + \mathbf{E}]^{-1} [\tilde{\mathbf{K}}_{21} \tilde{\mathbf{K}}_{11}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{12} + \mathbf{E}] \quad (5.4.4.12)$$

En este esquema de solución, la matriz  $\mathbf{E}$  se elige de manera tal que todos los auto-valores de  $\mathbf{J}$  sean iguales a un valor dado  $\lambda$ , con  $\lambda < 1$ . De esta forma se tiene que:

$$\mathbf{J} = \lambda \mathbf{I} = [\tilde{\mathbf{K}}_{22} + \mathbf{E}]^{-1} [\tilde{\mathbf{K}}_{21} \tilde{\mathbf{K}}_{11}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{12} + \mathbf{E}] \quad (5.4.4.13)$$

de donde se obtiene la siguiente expresión para la matriz auxiliar:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{1 - \lambda} [\lambda \tilde{\mathbf{K}}_{22} - \tilde{\mathbf{K}}_{21} \tilde{\mathbf{K}}_{11}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{12}] \quad (5.4.4.14)$$

De esta forma, se puede fijar cualquier valor que se desee para el radio espectral de la matriz  $\mathbf{J}$  que define el algoritmo iterativo. En el límite, se puede fijar el valor de  $\lambda = 0$ , lo que conduce a un sistema de solución que no requiere iterar para encontrar el valor exacto, ya que al valer la matriz:

$$\mathbf{E} = -\tilde{\mathbf{K}}_{21} \tilde{\mathbf{K}}_{11}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{12} \quad (5.4.4.15)$$

la matriz  $\mathbf{J}$  es idéntica a cero y el procedimiento iterativo ya no depende de la predicción, pues se tiene que la expresión (10) se reduce a:

$$[\tilde{\mathbf{K}}_{22} - \tilde{\mathbf{K}}_{21} \tilde{\mathbf{K}}_{11}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{12}] \mathbf{a} = \mathbf{h} - \tilde{\mathbf{K}}_{21} \tilde{\mathbf{K}}_{11}^{-1} \mathbf{g} \quad (5.4.4.16)$$

lo que da la respuesta exacta de  $\mathbf{a}$  sin necesidad de iterar.

En el problema de interacción fluido-estructura, reordenando la ecuación semi-discreta (5.3.3.1) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}} & \rho_f \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{p}} \\ \ddot{\mathbf{a}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{a}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q} & \mathbf{K}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \hat{\mathbf{f}} \end{Bmatrix} \quad (5.4.4.17)$$

Esta expresión en forma compacta se puede reescribir como:

$$\bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{K}} \mathbf{x} = \bar{\mathbf{f}} \quad (5.4.4.18)$$

donde  $\bar{\mathbf{M}}$ ,  $\bar{\mathbf{C}}$  y  $\bar{\mathbf{K}}$  son las matrices de “masa”, “amortiguamiento” y “rigidez” del sistema acoplado; y los términos  $\bar{\mathbf{f}}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$  y  $\ddot{\mathbf{x}}$  representan las “fuerzas”, las incógnitas, y sus primeras y segundas derivadas del sistema acoplado, respectivamente.

En estas condiciones, la matriz efectiva  $\tilde{\mathbf{K}}$  de la expresión (5.4.4.3) está dada por (ver Capítulo II ecuación 2.7.2 y figura 2.7.1.1):

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{K}}] &= \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} \bar{\mathbf{M}} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{K}} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta \Delta t^2} \hat{\mathbf{M}} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{K}} & \frac{1}{\beta \Delta t^2} \rho_f \mathbf{Q}^T \\ -\mathbf{Q} & \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.4.4.19)$$

De acuerdo a la expresión (15), la matriz auxiliar  $\mathbf{E}$  vale:

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}] &= -[\tilde{\mathbf{K}}_{21}] [\tilde{\mathbf{K}}_{11}^{-1}] [\tilde{\mathbf{K}}_{12}] \\ &= [\mathbf{Q}] \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} \hat{\mathbf{M}} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{K}} \right]^{-1} \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} \rho_f \mathbf{Q}^T \right] \\ &= \rho_f [\mathbf{Q}] [\hat{\mathbf{M}} + \gamma \Delta t \hat{\mathbf{C}} + \beta \Delta t^2 \hat{\mathbf{K}}]^{-1} [\mathbf{Q}^T] \end{aligned} \quad (5.4.4.20)$$

que para  $\Delta t$  pequeño se puede aproximar por:

$$\mathbf{E} \simeq \rho_f \mathbf{Q} \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{Q}^T \quad (5.4.4.21)$$

que es, precisamente, la matriz de estabilización propuesta en la referencia [Zie3] para el problema de interacción fluido-estructura (ver ecuación 5.4.3.2).

Es interesante notar que tanto el procedimiento que permite aumentar la estabilidad del algoritmo (ver apartado 4.3), como el presentado en este párrafo que busca mejorar la convergencia del mismo –ambos con el propósito final de iterar menos– conducen a agregar exactamente la misma matriz auxiliar  $\mathbf{E}$  a la ecuación del sólido. Lamentablemente, esta matriz auxiliar que se debe agregar a un dominio, requiere la inversa de la matriz de “masa” correspondiente al otro y, al estar esta matriz dada en función de

las magnitudes y propiedades del otro dominio, destroza la modularidad del algoritmo. De todas formas el desarrollo presentado muestra que el problema de estabilidad en el tiempo del sistema acoplado resuelto iterativamente por bloques se puede interpretar como un problema de convergencia para cada paso de tiempo. En el caso particular que nos ocupa –interacción fluido-estructura– en el que además se tiene en cuenta el comportamiento no-lineal del material, numéricamente se ha encontrado que no es necesario recurrir a esta matriz auxiliar ya que el sistema es altamente convergente, o lo que es lo mismo, muy estable en el tiempo, para los incrementos de tiempo y número de iteraciones aceptables desde un punto de vista práctico.

## 5. IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO ITERATIVO POR BLOQUES

Desde el punto de vista del desarrollo de programas de cálculo, quizás la ventaja más importante del algoritmo Iterativo por Bloques sea el hecho de que se puedan utilizar códigos independientes para analizar cada uno de los dominios. De esta forma se pueden aprovechar programas existentes que fueron desarrollados y verificados en óptimas condiciones por expertos para resolver los problemas particulares de cada uno de los dominios, utilizando incluso métodos numéricos distintos para cada uno de ellos. Sin embargo, desde el punto de vista de la ejecución de los programas, la ventaja más importante radica en el hecho de que dichos programas pueden ser procesados en ciertos casos en paralelo e incluso en diferentes máquinas, lo que contribuye a optimizar los recursos informáticos disponibles en la resolución de problemas acoplados.

Una primera alternativa para implementar el algoritmo Iterativo por Bloques consiste en escribir un único programa en el que se va llamando a los códigos de análisis de los diferentes dominios (ahora convertidos en módulos de un programa más general) secuencialmente –uno a continuación del otro-. Desde el punto de vista de la programación, esta alternativa parece ser la más simple; sin embargo, se pueden presentar diversas dificultades prácticas. Así por ejemplo, será necesario coordinar los archivos de datos de los distintos “módulos” para que puedan ser leídos a través de diferentes unidades o, creando un único archivo con toda la información pertinente adecuadamente ordenada. Además, un programa creado de esta forma inmediatamente se vuelve largo y podrían presentarse problemas, por ejemplo, de duplicidad en el nombre de subrutinas o variables que fueron utilizadas en cada uno de los programas por separado con propósitos distintos. Por otro lado, pueden aparecer problemas en el manejo de la memoria ya que, por ejemplo, será necesario “archivar” adecuadamente la información de cada uno de los dominios mientras se está haciendo el análisis de otro de ellos. De todas

formas, la desventaja más importante de esta alternativa de implementación es que se pierde cualquier posibilidad de hacer cálculos en paralelo o utilizar distintas máquinas al mismo tiempo.

Una segunda alternativa consiste en ejecutar los procesos por separado de forma que cada uno escriba sus resultados en archivos asignados a él y sea a su vez capaz de leer la información de los otros dominios en los archivos correspondientes. Esta alternativa permite la ejecución en paralelo pero presenta dificultades a la hora de coordinar los procesos. Así, mientras un código, que va a escribir sus resultados en un archivo –A por ejemplo–, está calculando, los otros procesos deben estar leyendo reiteradamente del archivo A en espera de que aparezcan en él los resultados que ellos esperan. De esta forma, el ordenador se ve sobrecargado por una serie de procesos que leen de disco permanentemente sólo para ver si ya tienen allí la información que necesitan para proseguir.

A lo largo de la presente investigación se ha desarrollado una metodología<sup>[GCO1]</sup> –de carácter general– que permite interconectar diferentes *códigos secundarios* a través de un *código principal* que es responsable de sincronizar y comunicar a los distintos procesos, controlando la convergencia global del sistema para cada paso de tiempo. La idea está basada en aprovechar las facilidades de comunicación entre procesos que tiene el sistema operativo *UNIX*. En este sistema cualquier proceso puede crear un *socket* (“enchufe”) que inmediatamente es puesto a disposición del resto de los procesos. Cuando un proceso crea un *socket*, el sistema detiene dicho proceso entre tanto otro proceso no se conecte con él. En el momento en que otro proceso se conecta al mismo *socket*, el sistema arranca ambos procesos y establece una comunicación entre ellos de forma tal que cualquier información que uno escriba en el *socket* puede ser leída por el otro.

Para este trabajo se ha desarrollado una librería<sup>[GCO2]</sup> denominada *PSYCO* (Parallel SYnchronized COmmunication). Esta librería contiene principalmente dos sub-rutinas que permiten que un proceso pueda importar o exportar cualquier información que requiera en cualquier instante de tiempo. De esta forma, es suficiente con escribir una línea de código, en el lugar adecuado de un programa, para que éste envíe o reciba información a otro proceso que está siendo ejecutado simultáneamente.

Para que la metodología de interconexión entre procesos quede establecida es necesario:

- (a) Desarrollar un único programa principal (denominado *SHUTTLE*) con el que todos los programas secundarios de cálculo establezcan contacto. *SHUTTLE* se ocupa de sincronizar y comunicar a todos los procesos que intervienen en el análisis, al mismo tiempo que de controlar la convergencia global del algoritmo iterativo.

- (b) En los programas secundarios de cálculo se debe especificar claramente en que lugar del código y qué variables se deben exportar o importar a través de *SHUTTLE*. Además, se deben escribir las subroutines necesarias para que cada código secundario pueda evaluar los correspondientes términos de interacción.

### 5.1. Importación y exportación

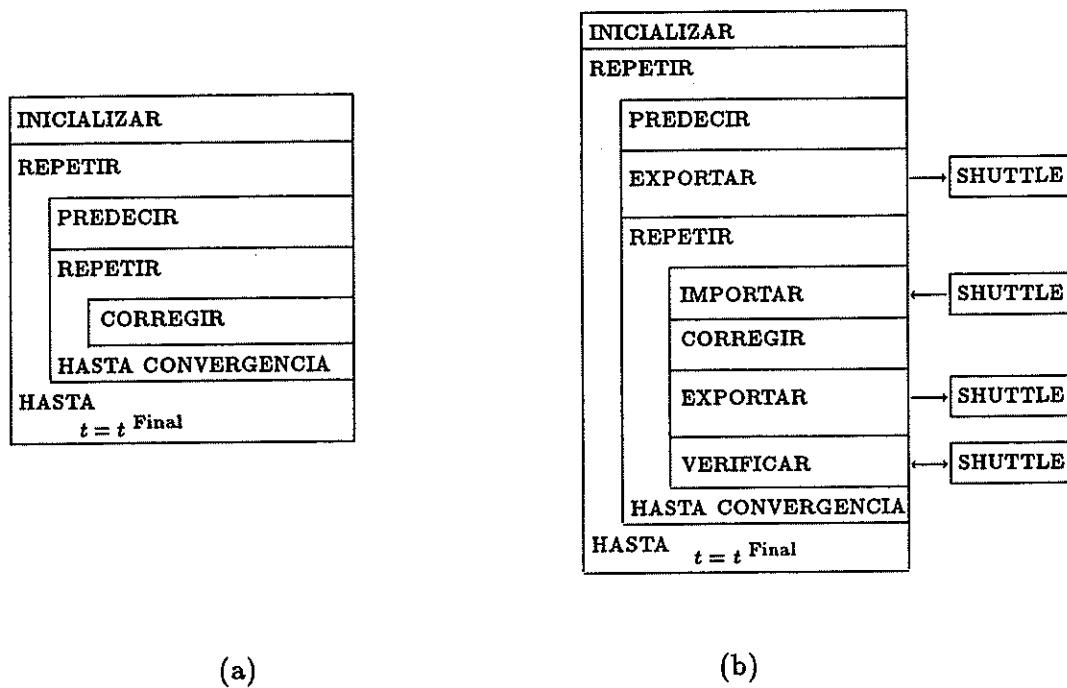


Figura 5.5.1.1 Esquema de programación para:  
 (a) Un dominio en un problema no acoplado  
 (b) Un dominio en un problema acoplado

En la figura 5.4.2.1 se ha presentado el algoritmo de solución correspondiente a un dominio que interviene en un problema acoplado. En ella ha quedado claramente definido el lugar exacto y las variables que debe exportar o importar. Para mostrar las modificaciones que se deben hacer en un programa estándar, en la figura 5.5.1.1 (a) se presenta el esquema general de dicho programa que resuelve un problema no acoplado. A su vez, en la figura 5.5.1.1 (b) se presenta el esquema del programa correspondiente a un dominio que interviene (a través de *SHUTTLE*) en un problema acoplado según el algoritmo Iterativo por Bloques. Al comparar ambas figuras se puede observar que las modificaciones que se deben hacer a un código existente, correspondiente a un análisis no acoplado, para que pueda intervenir en un análisis acoplado se resumen en agregar las instrucciones de importación/exportación que están indicadas en la figura (b). En dicha figura,

se debe notar que el cuadro marcado con la etiqueta VERIFICAR realmente consiste en *exportar* a *SHUTTLE* la norma del vector de fuerzas residuales e *importar* del mismo el estado de convergencia global (ver figura 5.4.2.1).

## 5.2. Programa *SHUTTLE*

*SHUTTLE* es el *código principal* que controla el funcionamiento de todos los procesos en paralelo realizando las siguientes tareas:

- (a) *Comunicar* a todos los *códigos secundarios*, transfiriendo toda la información que sea necesaria entre los mismos.
- (b) *Controlar* que se cumplan todas las tolerancias especificadas antes de alcanzar la convergencia global del sistema.
- (c) *Sincronizar* todos los *códigos secundarios*, garantizando que todos iteran y/o avanzan simultáneamente en el tiempo.

En la figura 5.5.2.1 se presenta el diagrama de actividades que debe realizar el *código principal*. Como se puede observar, sigue muy de cerca el esquema de solución de cada uno de los procesos que participan en un problema no acoplado (ver figura 5.4.1.1). Nótese que el paso denominado *PREDICCIÓN* consiste en *importar* las predicciones de todos y cada uno de los *códigos secundarios*. El paso denominado *COMUNICAR* consiste en: (a) *Exportar* a todos los procesos las variables de la iteración anterior, y (b) *Importar* de los mismos las correcciones iterativas y la norma del vector de fuerzas residuales. El paso denominado *CONTROLAR* consiste en verificar que se cumplan las tolerancias especificadas para cada uno de los procesos, tanto en forma local (individualmente) como en forma global (colectivamente). Finalmente el paso denominado *SINCRONIZAR* consiste en *exportar* a cada proceso el estado –convergido o no convergido– de la iteración correspondiente.

El código ha sido programado de manera que sigue una jerarquía de objetivos a ser alcanzados en cada instante de tiempo de forma que cada uno de ellos se consigue a través de lograr objetivos menores. Así, el principal objetivo consiste en alcanzar el tiempo final del análisis, lo que se hace avanzando en el tiempo paso a paso. Para cada paso de tiempo, el objetivo es satisfacer los criterios de convergencia local y global, lo que se hace forzando a todos los procesos secundarios a realizar el número de correcciones iterativas necesarias. Durante cada iteración, el objetivo es “alimentar” a cada proceso secundario con la información que éste requiera para evaluar los términos de interacción, lo que se hace comunicando la información necesaria a través de los *sockets*. Finalmente, en cada comunicación, el objetivo es preservar el orden preestablecido de los procesos y las dependencias naturales del problema acoplado.

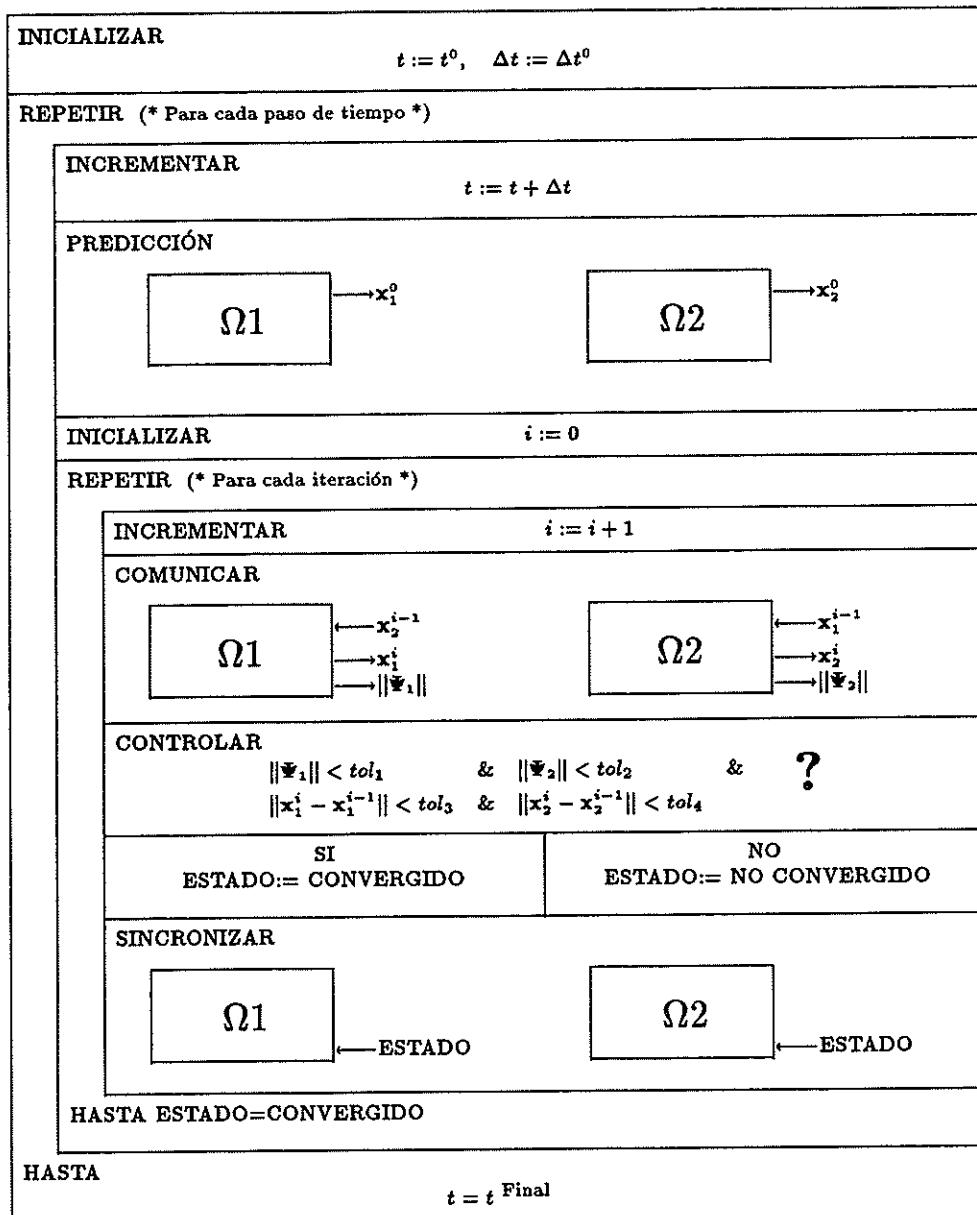


Figura 5.5.2.1 Diagrama de actividades del programa SHUTTLE

Este marco de trabajo, basado en una jerarquía de objetivos, puede ser representado como sigue:

- Alcanzar el tiempo final del análisis avanzando paso a paso.
- En cada paso: Satisfacer los criterios de convergencia local y global corrigiendo iterativamente si es necesario.
- En cada iteración: Alimentar los procesos comunicándoles la información que requieran a través de los sockets.
- En cada comunicación: Preservar el orden preestablecido y las dependencias naturales.

Con el programa construido de esta forma, aparte de cumplir con las tareas encomendadas –comunicar, controlar y sincronizar–, se consigue explotar los recursos informáticos óptimamente, forzando a que la ejecución de cada proceso secundario sea hecha en paralelo lo antes posible. Es decir, los procesos son puestos en marcha justo en el momento en que la información que necesitan para proseguir está disponible.

### 5.3. Eficiencia del procesamiento paralelo

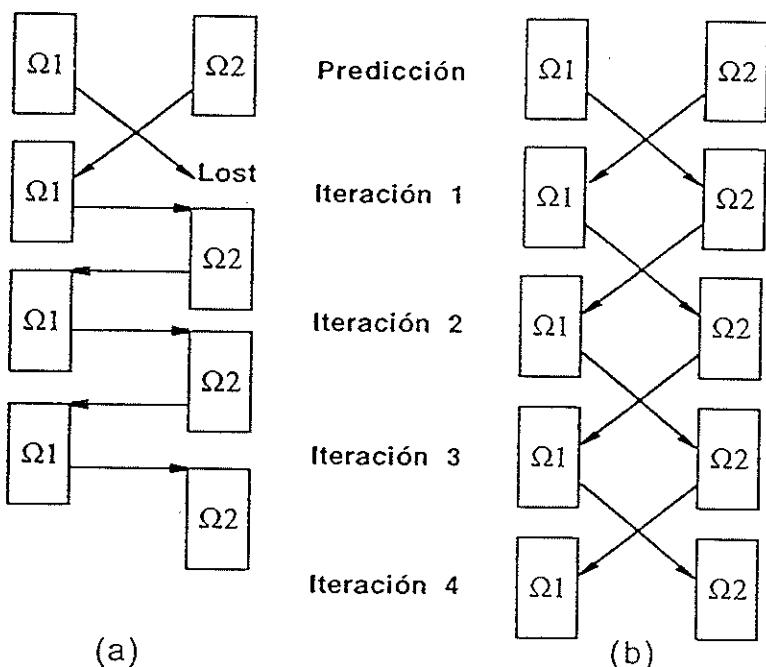


Figura 5.5.3.1 Esquemas alternativos de la corrección iterativa:  
 (a)  $\Omega_1$  corrige primero y  $\Omega_2$  después.  
 (b)  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  corrigen simultáneamente.

Aunque *SHUTTLE* permite la ejecución de diversos procesos secundarios en paralelo, ejecutar todos los procesos simultáneamente no siempre es la mejor alternativa. Algunas veces, incluso, es la peor de todas. Prestemos alguna atención a este asunto. Para un problema de dos dominios existen dos alternativas de ejecución (que se pueden ver en la figura 5.5.3.1):

- (a) Un proceso, denominado  $\Omega_1$ , itera en primer lugar, mientras que el otro,  $\Omega_2$ , itera a continuación.
- (b) Ambos procesos,  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , iteran simultáneamente.

La alternativa de ejecución (a) no parece ser la más expedita para el procesamiento paralelo. Sin embargo, como se puede ver en la figura 5.4.2.1,

cada proceso exporta sus variables tan pronto como le es posible, esto es, antes de empezar el laborioso trabajo de evaluar las fuerzas residuales. De esta forma, en cuanto  $\Omega_1$  ha exportado sus variables a *SHUTTLE*, éstas pueden ser importadas por  $\Omega_2$ , quien puede empezar a corregir mucho antes de que  $\Omega_1$  haya terminado de hacerlo. En diversos problemas no-lineales (dependiendo de la estrategia de cálculo), la evaluación de las fuerzas residuales puede llegar a tomar un alto porcentaje del tiempo total de CPU. En tal caso, esta alternativa ejecutaría ambos procesos,  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , casi en paralelo (ver figura 5.5.3.2).

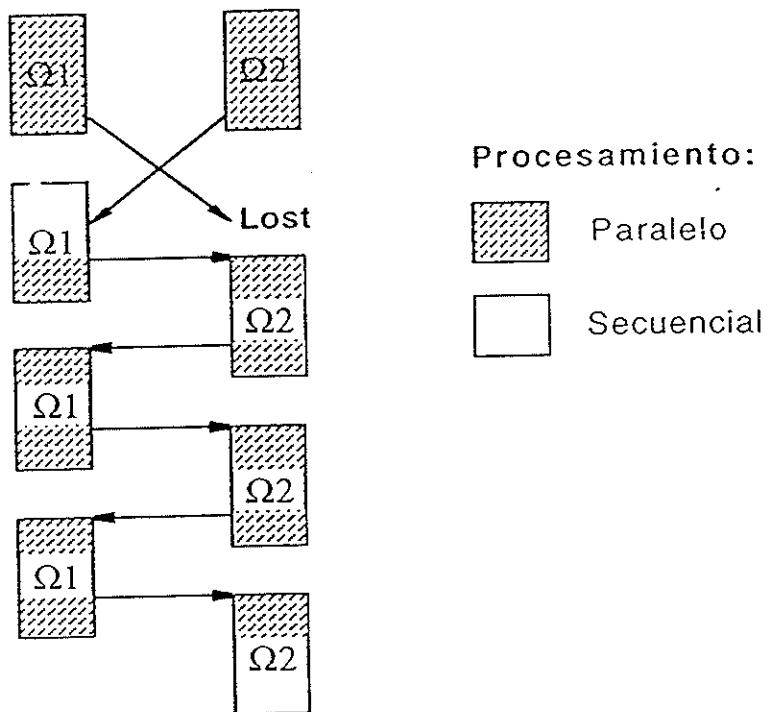


Figura 5.5.3.2 Procesamiento paralelo y secuencial para la alternativa de ejecución (a).

La alternativa de ejecución (b), por su parte, parece ser la opción idónea para el procesamiento paralelo, pero esta impresión puede ser errónea. Consideremos, por ejemplo, el caso en que ambos procesos son lineales y la iteración se debe exclusivamente a la exigencia de convergencia global del algoritmo Iterativo por Bloques. La situación descrita se ha representado en la figura 5.5.3.3. Nótese que la secuencia (en forma de S) marcada como A es la misma para ambas alternativas de ejecución, es decir, en ambos casos se obtiene exactamente la misma solución. Sin embargo, ¡la alternativa (b) requiere el doble número de iteraciones que la alternativa (a)!

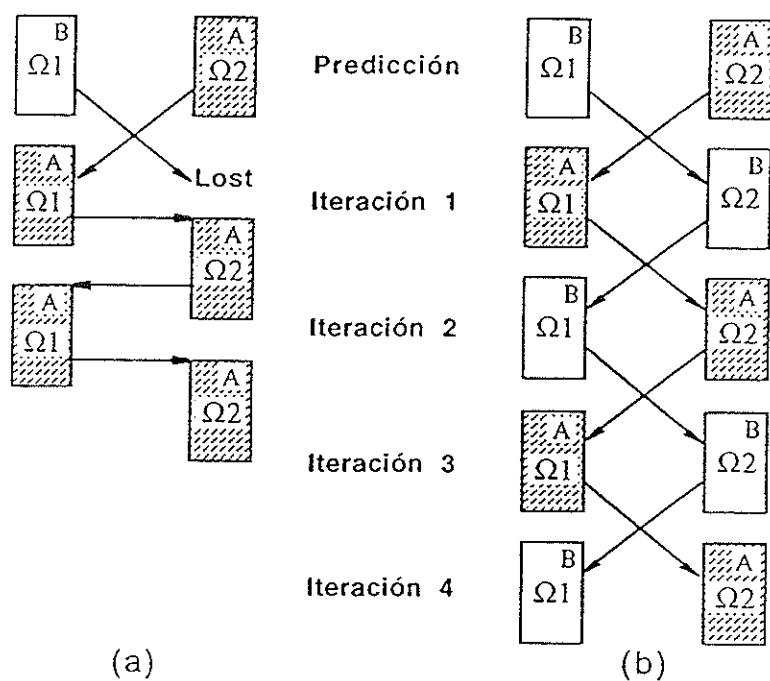


Figura 5.5.3.3 Alternativas de ejecución (a) y (b) aplicadas a dos sistemas acoplados lineales.

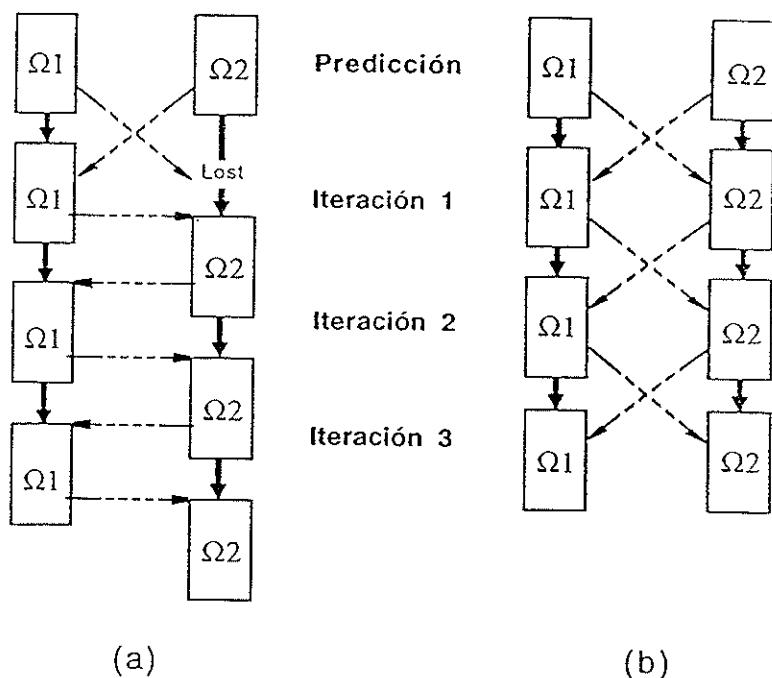


Figura 5.5.3.4 Alternativas de ejecución (a) y (b) aplicadas a dos sistemas acoplados altamente no-lineales.

De todas formas cuando el problema es no-lineal, la alternativa (b) puede ser eficiente. Consideremos ahora el caso en que ambos procesos son altamente no-lineales y los términos de interacción juegan un rol menor en el proceso iterativo (ver figura 5.5.3.4). En este caso, el número de iteraciones viene dado, casi exclusivamente, por la no-linealidad ya que la convergencia global se ve automáticamente satisfecha tan pronto como ambos procesos convergen localmente. Consecuentemente, ambas alternativas requieren el mismo número de iteraciones, sin embargo, la alternativa (b) permite una mejor paralelización en la ejecución de los procesos, por lo que consigue explotar al máximo los recursos informáticos.

## 6. ENSAYO NUMÉRICO

El presente ejemplo tiene el propósito de estudiar la influencia de la fórmula de predicción en la efectividad del algoritmo Iterativo por Bloques. Para esto, se ha analizado un problema de transmisión de ondas a través de dos medios acoplados utilizando la formulación de interacción fluido-estructura descrita. En la figura 5.6.1 se presenta el esquema del problema propuesto, que consiste en una barra en deformación plana coartada en su extremo izquierdo, e interaccionando con un dominio fluido por su extremo derecho.

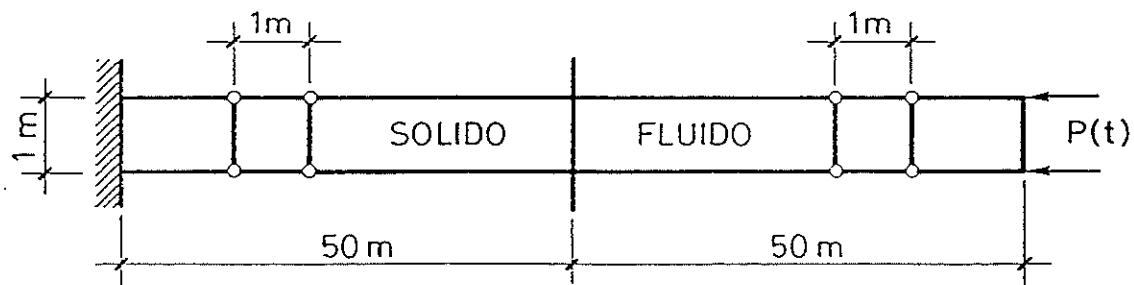


Figura 5.6.1 Características del ensayo de transmisión de ondas por dos medios: sólido-fluido.

El problema así formulado es unidimensional, aunque para su solución se han utilizado 100 elementos finitos bidimensionales de cuatro nodos (50 elementos de sólido y 50 elementos de fluido), de  $(1 \times 1 \times 1)$  unidades de longitud en el alto, ancho y largo. Las propiedades del sólido son:  $E = 1$ ,  $\nu = 1$  y  $\rho_s = 1$ , por lo que la velocidad de la onda de compresión es  $c_u = 1$  (ver ecuación 4.3.4.12). Por su parte, la densidad del fluido es:  $\rho_f = 1$  y la velocidad de la onda de presión en el mismo también es  $c_f = 1$ .

El ensayo consiste en excitar al sistema con una onda de presión prescrita en el extremo derecho del fluido expresada por la función:

$$P(t) = \begin{cases} 50(\sin(2\pi t/50 - \pi/2) + 1) & \text{para } t \leq 50 \\ 0 & \text{para } t > 50 \end{cases}$$

Generándose así una onda de compresión que viaja de derecha a izquierda con una velocidad de  $c = 1$  y, por tanto, avanza la longitud de un elemento finito por segundo. La onda viaja a lo largo de fluido, penetra en el sólido por la interface, viaja a través del sólido, se refleja en el extremo final izquierdo, regresa a través de ambos dominios, se refleja en el extremo derecho del fluido, empezando de nuevo la secuencia en una serie sin fin. El presente estudio se ha extendido sólo hasta los 500 segundos, durante los cuales la onda atraviesa la interface de interacción fluido-sólido cinco veces.

El análisis ha sido analizado resolviendo primero el sólido –utilizando, para el cálculo de los términos de interacción, una predicción en las presiones del fluido–, para luego resolver el fluido –utilizando esta vez, en el cálculo de los términos de interacción, las aceleraciones calculadas del sólido–. En este ejemplo se han ensayado cuatro fórmulas de predicción para las presiones del fluido (ver método implícito en la figura 2.7.1.1):

$$(a) \Delta p_{i=0}^{t+\Delta t} := 0$$

$$(b) \Delta p_{i=0}^{t+\Delta t} := \Delta p^t$$

$$(c) \Delta p_{i=0}^{t+\Delta t} := \Delta t \dot{p}^t + \frac{1}{2}(1 - 2\beta)\Delta t^2 \ddot{p}^t, \quad \text{para que } \ddot{p}_{i=0}^{t+\Delta t} = 0$$

$$(d) \Delta p_{i=0}^{t+\Delta t} := \Delta t \dot{p}^t + \frac{1}{2}\Delta t^2 \ddot{p}^t, \quad \text{para que } \ddot{p}_{i=0}^{t+\Delta t} = \ddot{p}^t$$

Con objeto de filtrar las ondas espúreas de alta frecuencia, para el método de Newmark se han utilizado los parámetros  $\gamma = 0.53$  y  $\beta = 0.27$ , que son algo superiores a los estrictamente dados por el límite de estabilidad<sup>[Ne][Hu][Zi3]</sup>  $\gamma = 0.5$  y  $\beta = 0.25$ . Aunque estos valores inducen un pequeño amortiguamiento numérico, en la práctica se ha podido observar que dicho amortiguamiento es casi despreciable pero que su efecto en la eliminación de las ondas de alta frecuencia es determinante (ver Capítulo II, apartado 8.3).

En principio, el problema se ha resuelto con una sola iteración por paso de tiempo, esto es, admitiendo una variación infinita en los términos de interacción (algoritmo denominado explícito o “staggered”<sup>[Zie3]</sup>). En estas condiciones, se ha encontrado que, con las fórmulas de predicción (a) y (b), el algoritmo es incondicionalmente inestable, es decir, que para dichas fórmulas no existe un incremento de tiempo (por muy pequeño que sea) con el que se puede encontrar una solución estable. Por su parte, las fórmulas de

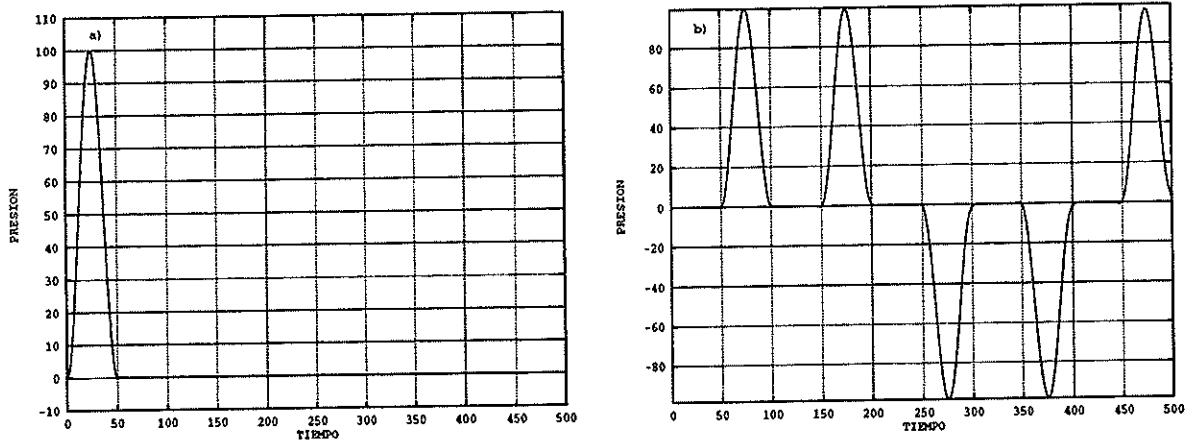


Figura 5.6.2 Presión en función del tiempo en el fluido calculada en a) el extremo derecho, b) el punto de interacción.

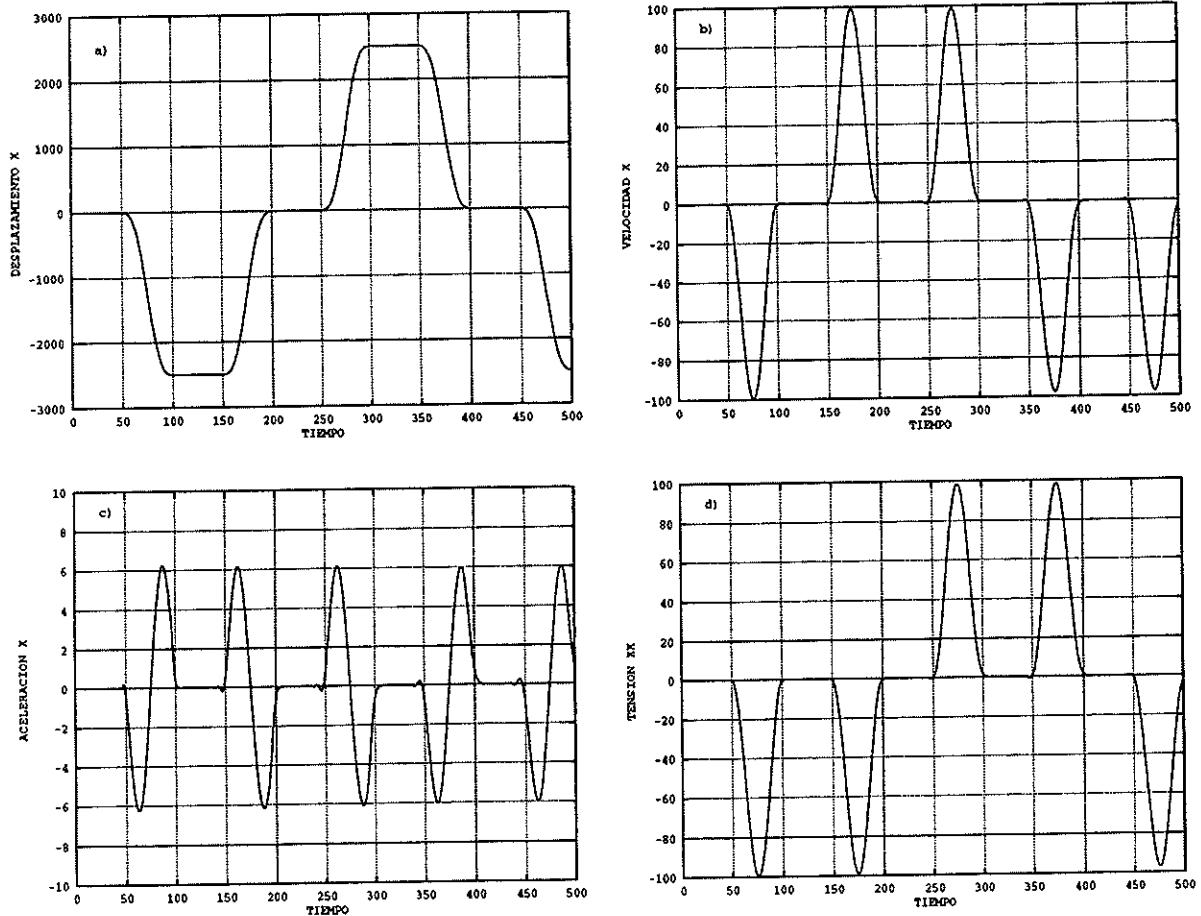


Figura 5.6.3 Ondas resultantes en el sólido calculadas en la interfaz de interacción. a) Desplazamiento, b) Velocidad, c) Aceleración y d) Tensión.

predicción (c) y (d) hacen que el algoritmo sea condicionalmente estable, y se ha podido constatar que para conseguir estabilidad se requieren incrementos de tiempo menores a la mitad del tamaño del elemento finito más pequeño dividido por la velocidad de la onda en el medio:  $\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{h}{c}$ , que en este caso resulta  $\Delta t \leq 0.5$ . En estas circunstancias, las respuestas obtenidas con ambas fórmulas de predicción tienen un error prácticamente nulo.

En la figura 5.6.2 para el fluido se presentan en función del tiempo: a) la presión prescrita en el extremo derecho y b) la presión calculada en la interface de interacción en la mitad del modelo. A su vez, en la figura 5.6.3 para el sólido se presentan en función del tiempo: a) el desplazamiento, b) la velocidad, c) la aceleración y d) la tensión, calculados todos ellos también en la interface de interacción sólido-fluido. Es interesante comparar la presión en el fluido con las tensiones en el sólido en el punto de interacción, mostrando como la onda es similar, con la única diferencia del cambio de signo ya que una presión positiva en un fluido indica un estado de compresión.

Posteriormente, el problema fue resuelto utilizando un incremento de tiempo de  $\Delta t = 1.0$  –inestable para el algoritmo “staggered” con todas las fórmulas de predicción– pero iterando hasta satisfacer las tolerancias de 10%, 1%, 0.1% y 0.01% en la variación iterativa del módulo de las presiones que el fluido ejerce sobre el sólido. En estas condiciones, no se ha detectado ningún indicio de inestabilidad incluso con tolerancias superiores a las indicadas. En la tabla 5.6.1 se han tabulado las fórmulas de predicción (PREDIC), la tolerancia exigida en la variación de las presiones del fluido (TOLER) y el número medio de iteraciones por paso de tiempo (NIPPT) necesarias en los diversos análisis realizados; todos ellos con 500 pasos de tiempo de  $\Delta t = 1.0$ .

PREDIC	TOLER	NIPPT	PREDIC	TOLER	NIPPT
(a)	10%	3.888	(a)	1%	7.946
(b)	10%	4.518	(b)	1%	5.886
(c)	10%	6.726	(c)	1%	6.624
(d)	10%	7.770	(d)	1%	8.428
(a)	0.1%	12.998	(a)	0.01%	19.330
(b)	0.1%	9.316	(b)	0.01%	15.100
(c)	0.1%	7.422	(c)	0.01%	12.266
(d)	0.1%	7.726	(d)	0.01%	9.888

Tabla 5.6.1 Número medio de iteraciones por paso en 500 pasos de tiempo de  $\Delta t = 1.0$ .

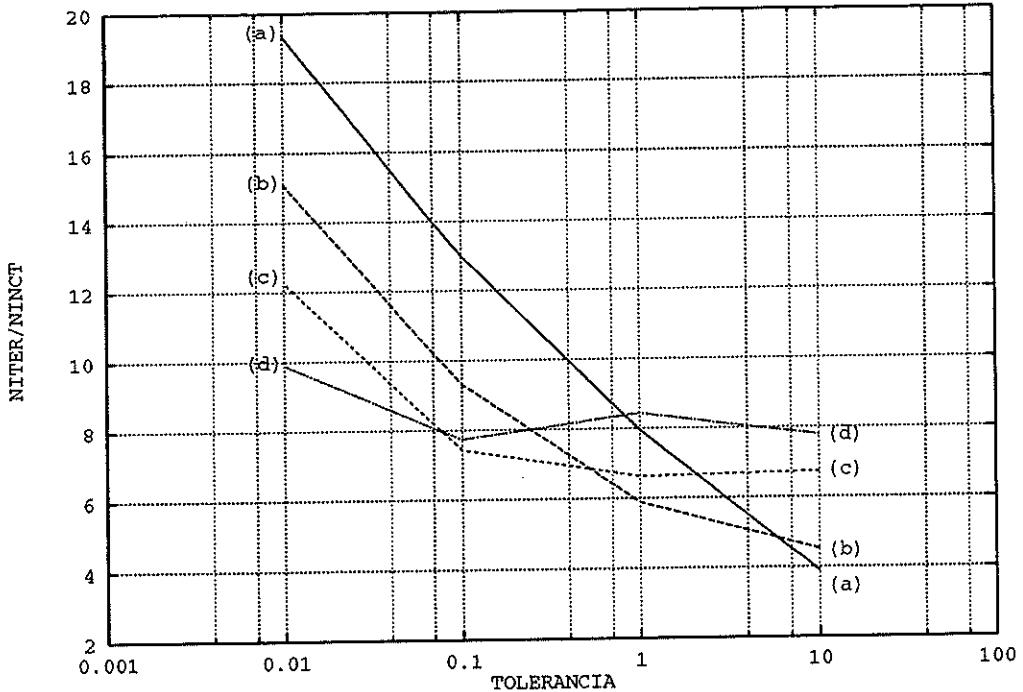


Figura 5.6.4 Número de iteraciones medio por incremento de tiempo para las distintas fórmulas de predicción.

En la figura 5.6.4 se han representado los valores medios del número de iteraciones “versus” las tolerancias exigidas (en escala logarítmica). Es interesante observar que las fórmulas de predicción (c) y (d) que permiten que el algoritmo sea condicionalmente estable sin iterar (con  $\Delta t \leq 0.5$ ) son las que mejor se comportan incluso para incrementos de tiempo mayores al crítico. Por su parte, las fórmulas de predicción (a) y (b) que son incondicionalmente inestables cuando el algoritmo no es iterativo se comportan relativamente bien con tolerancias altas ( $> 1.0\%$ ) ya que exigen un número de iteraciones pequeño; sin embargo en cuanto se exige una tolerancia mayor, dichas fórmulas requieren un alto número de iteraciones. Obsérvese que para tolerancias altas ( $\geq 10\%$ ) las fórmulas de predicción se pueden ordenar (de menor a mayor, según el número de iteraciones que requieren) como (a), (b), (c) y (d); mientras que para tolerancias bajas ( $\leq 0.01\%$ ) el orden es precisamente el contrario (d), (c), (b) y (a). Esto muestra que en un problema dado se debe elegir con mucho cuidado la fórmula de predicción para conseguir un balance adecuado entre precisión y coste computacional.

En referencia al coste numérico, se debe indicar que no siempre es más barato avanzar con incrementos de tiempo mayores. En este caso, las fórmulas de predicción (c) y (d) requieren sólo una solución del sistema de ecuaciones por paso de tiempo para incrementos de  $\Delta t < 0.5$ . Por su parte, la fórmula de predicción (a) con incrementos de tiempo de  $\Delta t = 1.0$  y

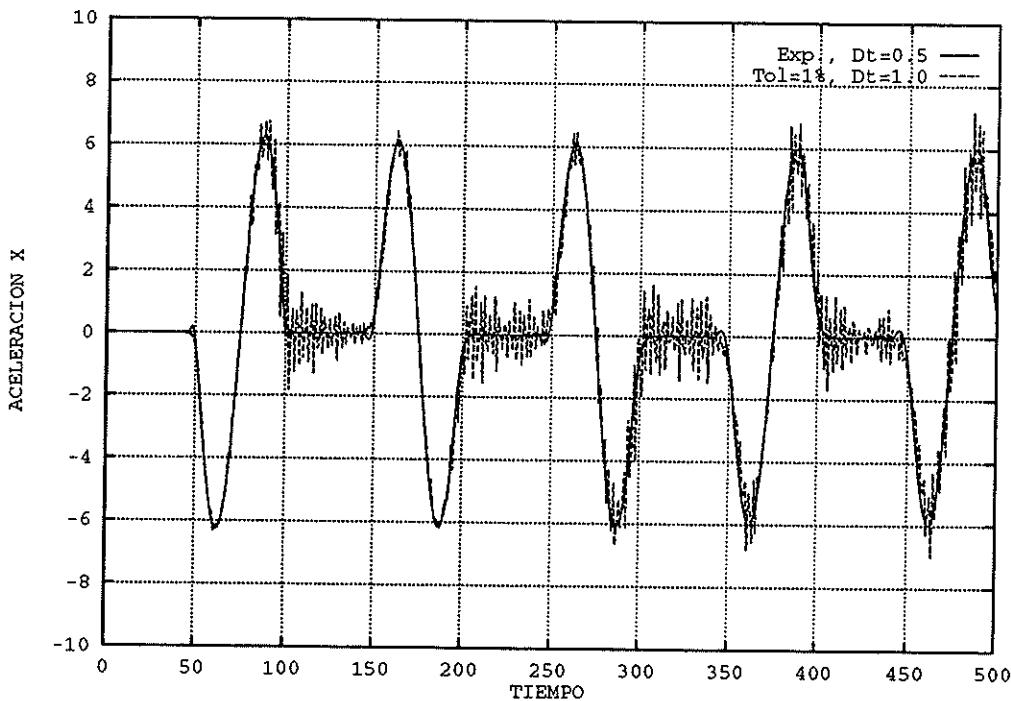


Figura 5.6.5 Comparación de la aceleración en el punto de interacción entre un análisis iterado (TOLER=1%) y uno explícito.

una tolerancia del 1%, por ejemplo, requiere una media de 7.946 iteraciones por paso de tiempo. De esta forma, para un análisis de 500 pasos de tiempo, con la fórmula (a) y  $\Delta t = 1.0$  se necesitarán 3973 resoluciones del sistema de ecuaciones, mientras que con la fórmula (d) y  $\Delta t = 0.5$  sólo son necesarias 1000 resoluciones. Además, la solución de menor coste resulta ser más precisa que la solución más cara. Para mostrar este hecho, en la figura 5.6.5 se han comparado las aceleraciones de ambos análisis calculados en el punto de interacción. Obsérvese que la solución iterada presenta un contenido de ondas de alta frecuencia y es aproximadamente 4 veces más cara. De todas formas, se debe indicar que estas ondas de alta frecuencia sólo aparecen en las cercanías de dicho punto de interacción y en el resto del dominio son filtradas por la propia malla de elementos finitos. Esto hace que las soluciones globales sean muy similares. Así, en la figura 5.6.6 se presentan los desplazamientos del punto de interacción entre el análisis explícito sin iterar –fórmula (d) y  $\Delta t = 0.5$ – y el análisis iterativo –fórmula (a) y  $\Delta t = 1.0$ – con una tolerancia de 10% (aún mayor que la anterior). Véase que ambas soluciones son muy similares, siendo prácticamente idénticas para tolerancias menores.

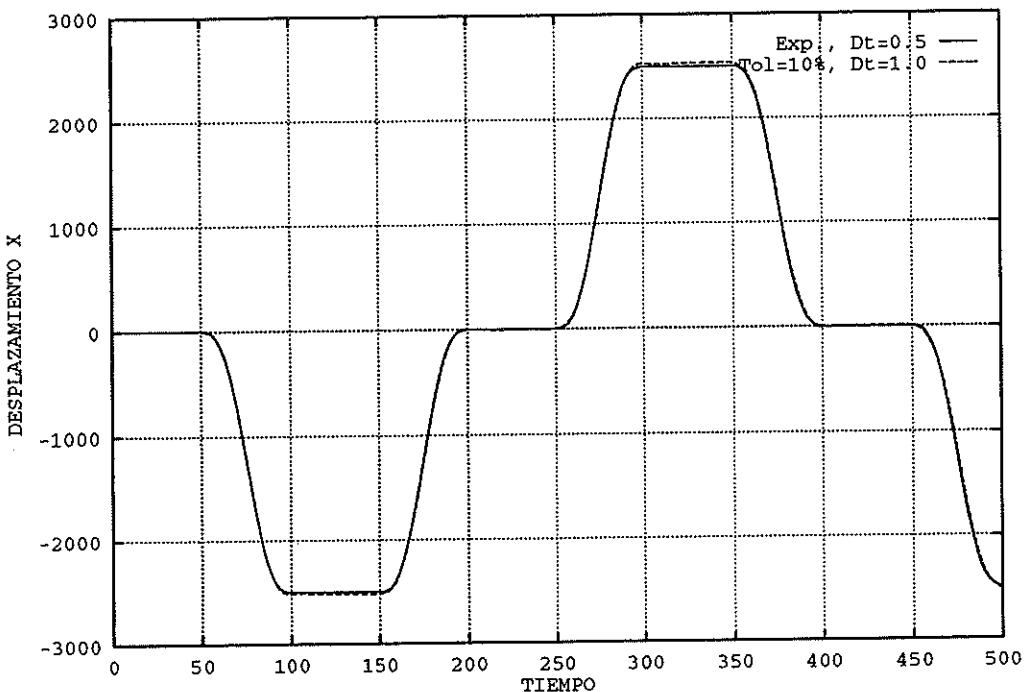


Figura 5.6.6 Comparación del desplazamiento en el punto de interacción entre un análisis iterado (TOLER=10%) y uno explícito.

Otro punto importante a observar en la figura 5.6.4 y sus valores correspondientes de la tabla 5.6.1 es que se puede obtener un número menor de iteraciones (en media) con tolerancias menores (comparar, por ejemplo, el número de iteraciones para la fórmula de predicción ( $d$ ) con tolerancia de 1% y 0.1%). Esto se debe a que cuando la tolerancia es grande, en un comienzo, el algoritmo itera poco, originándose —por error numérico— ondas de alta frecuencia. Más adelante estas ondas de alta frecuencia perjudican al propio algoritmo iterativo exigiéndole, para converger, un número de iteraciones superior. Consecuentemente, y en aparente contradicción, el número medio de iteraciones en todo el análisis puede ser mayor para una tolerancia más grande. Lo que en realidad ocurre es que una tolerancia menor provoca que las iteraciones se repartan adecuadamente a lo largo del tiempo sin necesidad de aumentar en número. Para resaltar este hecho, en las figuras 5.6.7 y 5.6.8 se presentan las aceleraciones del punto de interacción para dos análisis con la fórmula de predicción ( $d$ ). El análisis de la figura 5.6.7 que corresponde a una tolerancia de 0.1% requirió en media tan sólo 7.726 iteraciones por paso de tiempo, mientras que el análisis de la figura 5.6.8 que corresponde a una tolerancia de 1.0% requirió en media 8.428 iteraciones por paso de tiempo. Obsérvese que ambas soluciones tienen aproximadamente el mismo coste computacional, pero que aquélla que es ligeramente más barata es notablemente más precisa.

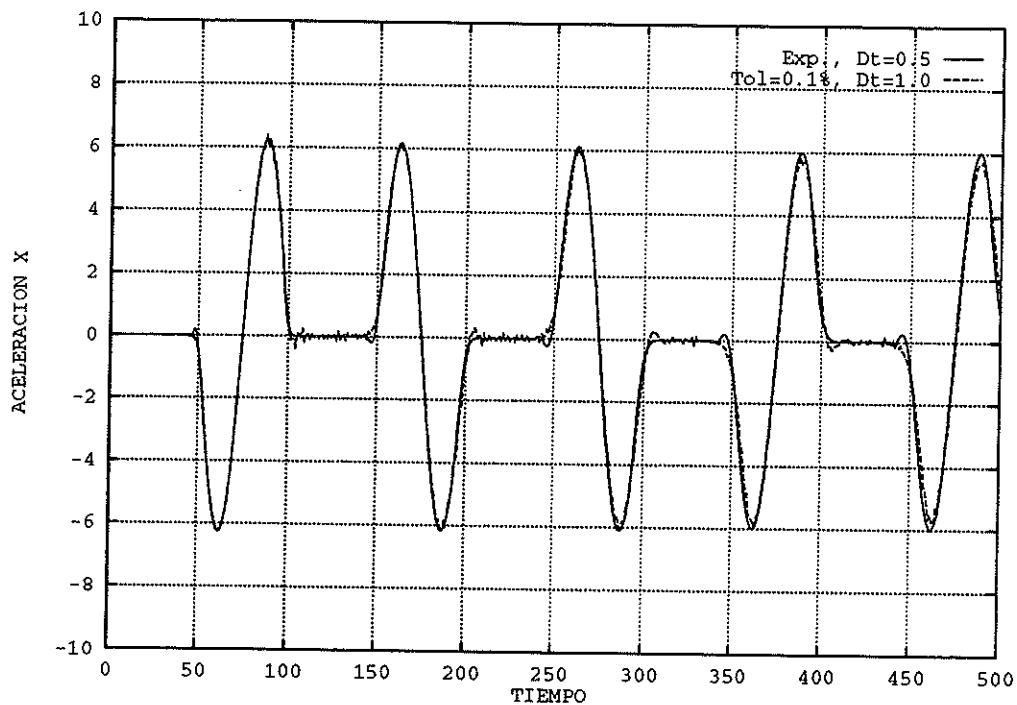


Figura 5.6.7 Comparación de la aceleración en el punto de interacción entre un análisis explícito y uno iterado (TOLER=0.1%, NIPPT=7.726).

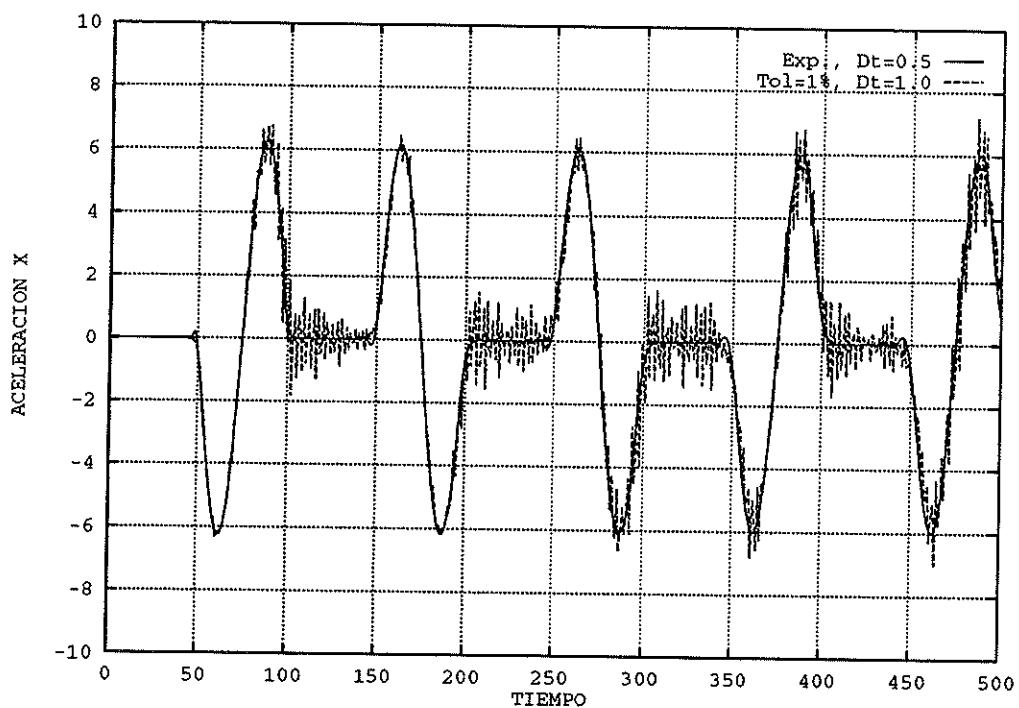


Figura 5.6.9 Comparación de la aceleración en el punto de interacción entre un análisis explícito y uno iterado (TOLER=1.0%, NIPPT=8.428).

## 7. CONSIDERACIONES FINALES

En este capítulo se ha presentado un algoritmo iterativo –de carácter general– para analizar problemas acoplados. Esta alternativa de solución se basa en resolver cada dominio por separado e introducir el acoplamiento a través de términos de interacción. De esta forma se obtiene el beneficio de la modularidad en la programación, y además, si esta técnica es usada junto con un programa que permita ejecutar diversos procesos en paralelo, se pueden aprovechar los recursos informáticos en forma óptima. La estrategia consiste en iterar hasta que los términos de interacción no varíen por encima de una tolerancia preestablecida en dos iteraciones consecutivas, por lo que, desde el punto de vista del sistema global acoplado, este algoritmo puede ser visto como una solución iterativa por bloques. Consecuentemente, la estabilidad del algoritmo es idéntica a la que se obtendría al resolver el sistema global acoplado. Por otro lado, el problema de la velocidad de convergencia, típica en los métodos iterativos de solución, para ciertos problemas podría llegar a ser una desventaja del método, por lo que se ha presentado una modificación (con sus problemas particulares) que permite controlar la velocidad de convergencia. De todas formas, el procedimiento iterativo ha sido exitosamente aplicado a la solución de diversos problemas acoplados<sup>†</sup> y en particular al problema de interacción fluido-estructura considerando incluso la no-linealidad del material (ver Capítulo VII), en el que en ciertas situaciones se pueden alcanzar índices de convergencia muy altos. En consecuencia, y aunque no se puede decir que esta estrategia iterativa sea la panacea de solución de todos los problemas acoplados, la misma se puede considerar no sólo posible, sino altamente competitiva con respecto a otras alternativas.

---

<sup>†</sup> [Ga][GCO1][GCO2][Pa][Cod][WTSS][SKK][SaV][ArS]



# CAPÍTULO VI

## CONCEPTO DE SEGURIDAD EN PRESAS DE HORMIGÓN

### 1. EL CONCEPTO DE SEGURIDAD ASOCIADO AL DETERIORO DE LA ESTRUCTURA

Cuando se realiza el análisis sísmico de una gran estructura (como es una presa), es importante cuantificar de alguna forma, un "factor de seguridad" que establezca una medida de la seguridad del conjunto ante la posibilidad de que se produzca el colapso. Para esto, primero se debe definir el significado preciso de factor de seguridad, estableciendo claramente la forma de calcularlo. Actualmente, existen numerosos trabajos encaminados a definir un factor de seguridad adecuado al cálculo estructural no-lineal<sup>[SBS][K-B][Du]</sup>; sin embargo, todavía existen grandes discrepancias al respecto y parece que aún falta mucho para que exista una definición adecuada. El problema ha sido expresado con claridad por Fanelli<sup>†</sup> en la referencia [Fa]: "las definiciones cuantitativas generalmente aceptadas del "factor de seguridad" de una presa son conceptos más bien difusos, abiertos a la crítica desde un punto de vista racional... En cada instante de la vida de una presa, de hecho existe una relación entre la "carga" que está actuando sobre ella y la "carga última" del mismo tipo que la presa es capaz de soportar. (Este concepto de "carga última" requiere que la "historia de cargas que conducen al colapso" y el "colapso" mismo sean conceptos definidos sin ninguna ambigüedad. Lo que no es nada trivial). El problema es que, esta relación, que podría ser identificada como un "factor de seguridad", es una función que cambia continuamente en el tiempo, a medida que las cargas varían y la estructura envejece; su valor instantáneo no puede ser calculado en una forma realista, debido a la falta de información sobre las propiedades del material, su distribución y las cargas que actúan en cada instante de tiempo. Por otro lado, los valores que esta relación puede tomar varían considerablemente de acuerdo con las posibles definiciones que se puedan dar de la "historia de carga que conduce al colapso" para cada situación. Por ejemplo, si suponemos que forzamos el colapso en la presa incrementando la carga hidrostática (aparte del significado

---

<sup>†</sup> Deputy Director, Centre for Hydraulic & Structural Research, ENEL (National Power Board of Italy).

físico que esto pueda tener), los resultados son muy distintos dependiendo de si incrementamos o no la carga de peso propio al mismo tiempo. De esta forma, estamos forzados a concluir que no existe, en cada instante de tiempo, un único valor para el factor de seguridad, sino que por el contrario existen un número indefinido de ellos, y que, todos los factores de seguridad posibles, están cambiando su valor en el tiempo...”.

Parece claro pues que un “factor de seguridad”, definido como la relación que existe entre la carga que actúa sobre una estructura y la carga última del mismo tipo que es capaz de soportar, no es concluyente. De todas formas, si se acepta la hipótesis de linealidad del material, es posible calcular un “factor de seguridad” instantáneamente como la relación que existe entre la tensión real del punto más solicitado de la estructura y una tensión máxima predefinida, suponiendo que, cuando se alcance dicha tensión máxima se producirá el colapso.

Por otro lado, existen estructuras en las que es inevitable la aparición del comportamiento no-lineal del material –tal es el caso de una presa sometida a una excitación sísmica importante en la que se admitirán diversos grados de fisuración, pero no el colapso global de la misma–. En esta situación, la aparición de una tensión máxima que produzca daño local en algún punto de la estructura no significa, ni mucho menos, que la estructura esté próxima al colapso. Si además la ecuación constitutiva depende de la historia de cargas (como es el caso del modelo de degradación presentado), la aparición prematura de daño en algunos puntos de la estructura no es necesariamente perjudicial, desde el punto de vista de la seguridad del conjunto (este hecho es analizado en el capítulo VII).

Por otra parte, el concepto de seguridad (o inseguridad) intuitivamente se encuentra ligado al “deterioro” que pueda sufrir una estructura al ser sometida a una acción externa. Así, una estructura podrá soportar una carga con mayor o menor “seguridad” dependiendo del “deterioro” que sufra por efecto de la carga. Parece evidente que una estructura se acerca tanto más al colapso cuanto más se va deteriorando; por tanto, la “carga última” que es capaz de soportar estará asociada a un alto grado de deterioro, mientras que una carga que produzca poco deterioro, estará muy lejos de ocasionar el colapso. Este hecho, por sí solo, tampoco puede ser utilizado para hacer una definición cuantitativa de “factor de seguridad”, ya que pueden existir mecanismos (tales como el pandeo) que pueden ocasionar el colapso repentino de una estructura sin que previamente se presente deterioro alguno. Sin embargo, la relación intuitiva que existe entre “deterioro” versus “seguridad” bien puede aportar elementos que permitan extender el concepto de “factor de seguridad”.

## 2. EL CONCEPTO DE DETERIORO

En la referencia [Ga] se define el concepto de *daño* en un punto de un sólido, determinado por una sola variable escalar denominada *variable de daño o de degradación*  $d^t$ . Esta variable proporciona una medida de la pérdida de rigidez secante local del material (varía desde el valor 0, para el material no dañado o intacto, hasta el valor  $d_{max} = 1$  para el material completamente degradado:  $0 \leq d^t \leq 1$ ). De esta forma, la variable  $d^t$  conceptualmente se puede entender como una medida del “daño local” en una estructura. Sin embargo, desde el punto de vista del comportamiento estructural, se requiere una variable que mida el “daño global” que presenta una estructura. De aquí que el propósito de este apartado es el de definir y proponer alternativas analíticas para una única variable escalar denominada *variable de deterioro*  $D^t$ , cuyo valor exprese una medida del “daño global” en una estructura, calculada en base a los daños locales.

Algunos aspectos importantes que se tendrán en cuenta al definir la variable de deterioro son: (1) La variable de deterioro tendrá el mismo valor para dos estructuras iguales con idénticos daños locales entre todos sus puntos (valor de sus variables internas), sin importar el instante o el tipo de carga que ocasionó cada uno de los daños locales. (2) Al igual que la variable de daño  $d^t$ , se quiere que la variable de deterioro  $D^t$ , tenga valores escalares no-dimensionales que varíen entre 0, para una estructura sin ningún deterioro, hasta 1, para una estructura completamente deteriorada. (3) Será requisito que la variable de deterioro valga cero ( $D^t = 0$ ) si y sólo si todos los puntos de la estructura tienen daño local cero ( $d^t = 0 \forall x \in \Omega$ ); por otro lado, el valor del deterioro será uno ( $D^t = 1$ ) si y sólo si todos los puntos tienen el máximo daño local que teóricamente pueden alcanzar ( $d^t = 1 \forall x \in \Omega$ ). (4) Si a una estructura con un cierto grado de deterioro se le aplica una carga, el efecto de ésta sólo podrá ser el de mantener o incrementar su grado de deterioro. Por esto, la evolución en el tiempo de la variable de deterioro  $D^t$  debe ser monótonamente creciente.

Así, se define el grado de deterioro de una estructura como una medida de su nivel de “daño global” en un instante determinado  $t$ , al valor de cualquier variable escalar  $D^t$  que cumpla con las siguientes condiciones:

- (1)  $D^t = D(d^t)$
- (2)  $0 \leq D^t \leq 1$
- (3)  $D^t = 0 \iff d^t = 0 \forall x \in \Omega$   
 $D^t = 1 \iff d^t = d_{max} \forall x \in \Omega$
- (4)  $D^{t_1} \leq D^{t_2} \iff t_1 \leq t_2$

### 3. EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL DETERIORO

En este trabajo se proponen dos expresiones ( $D_1^t$  y  $D_2^t$ ), de entre las muchas alternativas posibles, para expresar el deterioro de una estructura:

$$D_1^t = \frac{\|d^t\|_{L^1(\Omega)}}{\|d_{max}\|_{L^1(\Omega)}} = \frac{\int_{\Omega} d^t d\Omega}{\int_{\Omega} d_{max} d\Omega} \quad (6.3.1)$$

$$D_2^t = \frac{\|d^t\|_{L^2(\Omega)}}{\|d_{max}\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{\sqrt{\int_{\Omega} (d^t)^2 d\Omega}}{\sqrt{\int_{\Omega} (d_{max})^2 d\Omega}} \quad (6.3.2)$$

donde  $d^t$  es el daño,  $d_{max} = 1^\dagger$  y  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  la norma  $p$ -ésima. Es importante notar que ambas definiciones cumplen con todas las condiciones exigidas en el apartado 2.

La primera alternativa propuesta para la variable de deterioro  $D_1^t$  expresa el daño medio sobre toda la estructura y constituye la forma más simple de expresar una medida del daño global alcanzado. Sin embargo,  $D_1^t$  no tiene en cuenta la distribución del daño sobre el dominio, por lo que es insensible al efecto de la localización<sup>‡</sup> del daño que puede originar alteraciones significativas en el comportamiento mecánico de la estructura.

Por el contrario, la segunda alternativa propuesta para la variable de deterioro  $D_2^t$  pondera los mayores valores de daño, por lo que tiene en cuenta, de alguna forma, el efecto que puede producir la localización. Consecuentemente, para un mismo valor  $D_1^t$  de daño medio, el parámetro  $D_2^t$  tendrá distintos valores dependiendo del grado de localización.

En la figura 6.3.1 se presenta un ejemplo que pone de manifiesto la sensibilidad de esta segunda alternativa  $D_2$  a la localización del daño. Con tal propósito se muestra una barra de sección constante en la que se suponen tres distribuciones distintas de daño sobre el sólido pero, todas ellas, con un mismo daño medio  $D_1 = 0.2$ . Se puede observar como el valor de la variable  $D_2$  aumenta a medida que el daño se encuentra más localizado. Así, cuando el daño se encuentra distribuido uniformemente sobre toda la barra, la variable  $D_2$  toma el mismo valor de 0.2 que  $D_1$ ; a su vez, cuando el daño se encuentra totalmente localizado ( $d = 1$ ), la variable  $D_2$  llega a valer 0.447.

<sup>†</sup> Nótese que  $d_{max}$  es al máximo valor del daño que se puede alcanzar en cada punto de una estructura. Así,  $d_{max}$  valdrá 0 en las zonas en que esté definida una ecuación constitutiva elástica lineal.

<sup>‡</sup> La localización de deformaciones asociada a una ecuación constitutiva no-lineal con ablandamiento, como la propuesta en este trabajo, es un problema vigente en actual investigación[CD]. En este apartado se entiende por localización la concentración del daño, con valores significativos comparados con los del resto de la estructura, en una zona pequeña de la estructura.

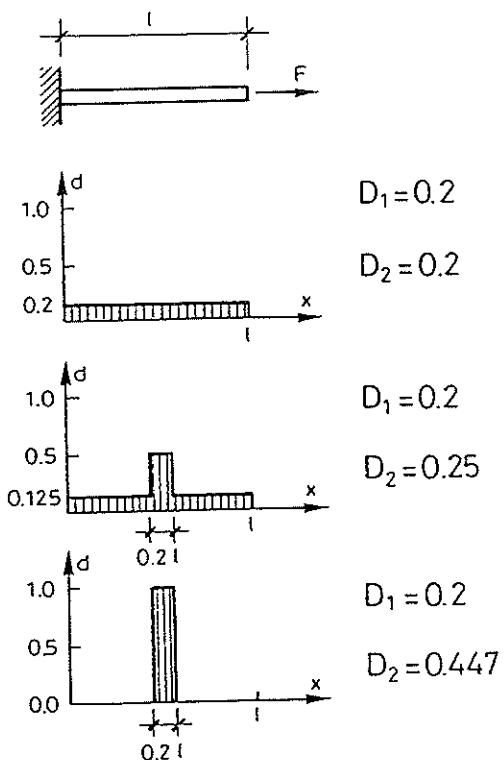


Figura 6.3.1 Variación de  $D_2$  según la localización del daño.

#### 4. DEFINICIÓN DEL COLAPSO ESTRUCTURAL

Para realizar un análisis de seguridad –frente al colapso– es importante establecer con precisión que condiciones deben presentarse en una estructura para decir que ésta ha colapsado. Desde un punto de vista intuitivo, parece evidente el momento en que una presa ha colapsado. Sin embargo, cuando intentamos ser precisos en la definición, la situación ya no es evidente. Así por ejemplo, si se define colapso como el momento en que una presa presenta daños severos, entonces será necesario indicar claramente que se entiende por “daños severos”. Si por el contrario se define al colapso como aquel momento en que el agua puede pasar libremente de aguas arriba hacia aguas abajo, en tal caso, un defecto en el funcionamiento de una compuerta podría considerarse como situación de colapso.

Desde un punto de vista numérico la definición de colapso presenta otro tipo de problemas conceptuales. Se podría definir como colapso a aquel

momento en que el modelo numérico no fuese capaz de encontrar una solución en equilibrio. Sin embargo esta definición estaría sujeta a las características propias del modelo tanto en su formulación como en la estrategia numérica empleada, por lo que con distintos programas se podrían obtener resultados diferentes, o incluso, con un mismo programa pero utilizando estrategias distintas se podría llegar a conclusiones contrapuestas. Más importante aún es el hecho de que esta definición puede producir situaciones que están en contradicción con el sentido intuitivo de lo que entendemos por colapso. Así por ejemplo, en un análisis en régimen dinámico se obtiene equilibrio dinámico con una estructura que se ha dividido en varios trozos e incluso cuando algunos de ellos están "flotando" en el espacio. Consecuentemente la definición de colapso debe ser hecha de otra forma. Cuando un programa es incapaz de encontrar equilibrio esto denotará una limitación del mismo o la posibilidad (en análisis estático) de que efectivamente se trate del colapso.

Por todo ello, en este trabajo se hacen dos definiciones de colapso para dos situaciones distintas dependiendo de si el análisis es estático o dinámico:

- (1) Colapso estático: En un análisis estático se entenderá que la estructura ha colapsado cuando la matriz de rigidez tangente efectiva tiene autovalores nulos o negativos.
- (2) Colapso dinámico: En un análisis dinámico se entenderá que la estructura ha colapsado cuando se obtienen desplazamientos monótonamente crecientes durante un periodo de tiempo tan largo como se quiera.

Ambas situaciones son la expresión de un mismo fenómeno físico: La incapacidad de la estructura de ofrecer fuerzas resistentes que puedan oponerse a las acciones exteriores que actúan sobre la misma.

Las definiciones anteriores aún presentan, en la práctica, la dificultad de establecer precisamente el momento exacto en que se ha producido el colapso. En el caso estático es relativamente sencillo si en cada iteración se calcula la matriz tangente y sus correspondientes autovalores. Evidentemente esta solución es costosa y muchas veces inviable. Este problema se puede subsanar haciendo un análisis de la matriz de rigidez sólo cuando aparecen problemas de convergencia, lo que disminuye el costo computacional dramáticamente. Por su parte cuando el análisis es dinámico, sólo después de muchos pasos de tiempo en que se observa un desplazamiento monótonamente creciente, se puede pensar que se han dado las condiciones necesarias para aceptar que la estructura está en colapso. Pero, ?en qué momento preciso se ha producido?. Evidentemente esta pregunta no tiene una respuesta única. Afortunadamente en el problema que nos ocupa, y como se verá en el Capítulo VII, cuando se trata de un análisis dinámico no es menester determinar el momento exacto del colapso.

# CAPÍTULO VII

## APLICACIÓN AL ANÁLISIS DE SEGURIDAD EN PRESAS DE GRAVEDAD

### 1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan los análisis bidimensionales de dos presas de gravedad, una que podría denominarse de gran tamaño y la otra mediana, en las que se han considerado los efectos de la interacción tanto con el fluido como con el terreno a la vez que el comportamiento no-lineal por fisuración del hormigón.

Con el propósito de poder validar la metodología de análisis propuesta, se han elegido dos problemas dinámicos de interacción en el que se utilicen todos los modelos descritos en los capítulos anteriores. Así, en cada análisis, para tener en cuenta la fisuración del hormigón de la presa, se ha empleado, como ecuación constitutiva no-lineal, el modelo de daño descrito en el Capítulo II. Para simular la interacción con el fluido, se ha discretizado un embalse según la formulación en presiones descrita en el Capítulo III en el que se simulan un contorno de superficie libre y un contorno transparente de radiación. También en cada problema se ha modelado una zona de terreno con contornos transparentes que permiten prescribir una onda sísmica entrante impuesta y radiar las ondas salientes, según se ha descrito en el Capítulo IV. Como excitación sísmica se han utilizado dos velocigramas compatibles con un espectro de diseño dado, generados según el modelo descrito en el Capítulo IV. Finalmente, la interacción fluido-estructura-terreno se ha resuelto utilizando el método de iteración por bloques descrito en el Capítulo V.

Para que los problemas elegidos tuvieran características reales se han seleccionado las geometrías de dos presas existentes: la presa de Koyna de 107[m] de altura situada en India y la presa de Mequinenza de 66[m] de altura situada en España. Estas presas son un buen ejemplo ya que de ambas se tienen estudios previos realizados en el pasado. Así, la presa de Koyna<sup>†</sup>

---

<sup>†</sup> [Pe][Jo][CIN][Bi]

sufrió daños considerables por un terremoto ocurrido el 11 de Diciembre de 1967 (con una magnitud de 6.7 en la escala de Richter). A su vez, la presa de Mequinenza ha sido especialmente estudiada por métodos numéricos en otros trabajos<sup>†</sup>. Consecuentemente en ambos casos la geometría, parámetros tales como las propiedades de los materiales, tanto de la presa como del terreno, o características dinámicas como las frecuencias principales, modos de vibración, etc. son conocidos, sirviendo todos ellos como punto de partida o como elemento de comparación.

## 2. DATOS GEOMÉTRICOS

### 2.1. Presa de Koyna

Se ha discretizado la presa de Koyna, el terreno y el fluido en dos dominios bidimensionales separados. En uno de ellos se han discretizado la Presa y el terreno conjuntamente mientras que en el otro se ha discretizado el fluido. En la figura 7.2.1.1 se presentan ambas mallas separadas ligeramente la una de la otra. La malla que representa a la Presa y al terreno tiene 451 nudos de dos grados de libertad cada uno y está formada por 400 elementos finitos de cuatro nodos bajo la hipótesis de deformación plana repartidos en la siguiente forma: 150 elementos forman la Presa y 250 elementos forman el terreno. La malla utilizada para discretizar el fluido del embalse está constituida por 140 elementos finitos de cuatro nodos teniendo un total de 165 nudos.

A continuación se da una descripción detallada de la geometría y de las propiedades de los materiales utilizados en la presa de Koyna, el terreno y el fluido, respectivamente:

- La presa de Koyna mide 107[m] de altura, el ancho en coronación es de 14[m], en la base tiene 73.5[m] de anchura y el punto de cambio de pendiente de la cara aguas abajo se encuentra a 71[m] de altura y a 21[m] de la cara vertical de aguas arriba. El módulo de elasticidad  $E$  del hormigón es de 31.64[GPa], el coeficiente de Poisson  $\nu$  vale 0.2 y la densidad  $\rho$  vale 2690[Kg/m<sup>3</sup>]. Para el modelo de daño continuo, en los análisis con material no-lineal (ver referencia [Ga]), se ha utilizado una resistencia máxima a tracción  $f'_t$  de 2.0[MPa], una resistencia máxima a compresión  $f'_c$  de 20.0[MPa] y una energía de fractura  $G_f$  de 250.0[J/m<sup>2</sup>].
- El terreno discretizado mide 200[m] de profundidad (1.87 veces la altura de la presa). Desde la base de la presa se han discretizado 300[m] de longitud hacia aguas arriba y 126.5[m] hacia aguas abajo, dando una longitud total de 500[m]. El material del terreno se ha considerado, en todos los análisis, elástico lineal con módulo de elasticidad  $E$  de 18[GPa] y coeficiente de Poisson  $\nu$  de 0.2. La densidad  $\rho$  se ha estimado en

<sup>†</sup> [COG1][COG2][PIE][Ga]

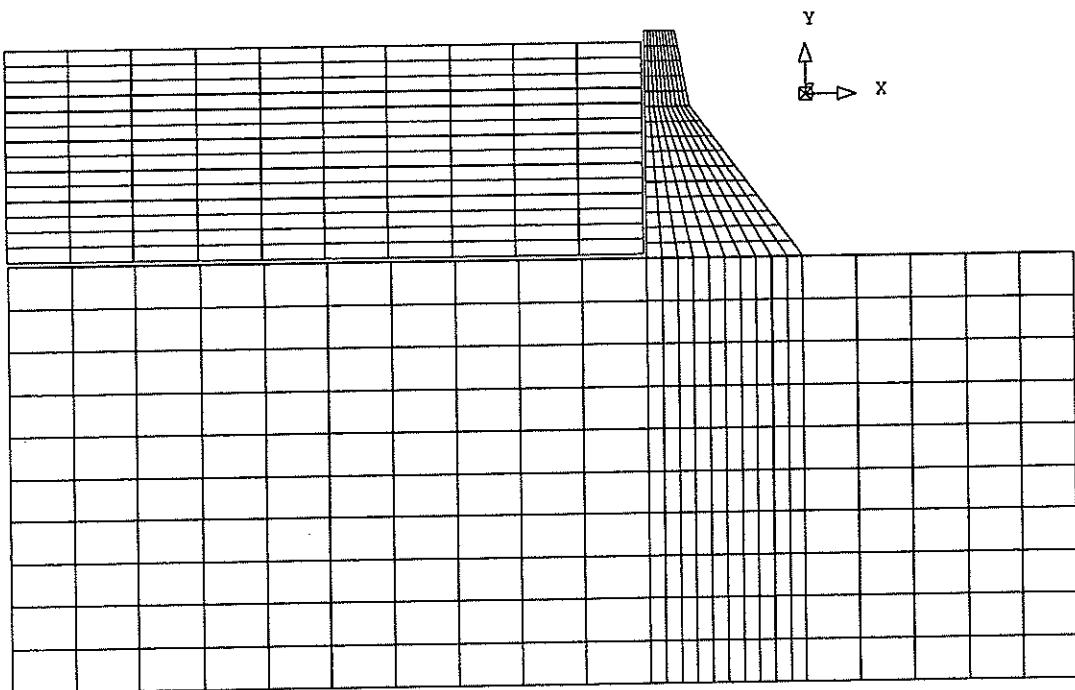


Figura 7.2.1.1 Discretización de presa de Koyna-terreno y fluido del embalse por separado.

$1830[Kg/m^3]$ . En el contorno inferior se han colocado 25 elementos transparentes unidimensionales de dos nodos (ver Capítulo IV) y se han ligado los 11 nudos del contorno derecho con los 11 nudos del contorno izquierdo para simular la condición de repetitividad en el dominio (ver Capítulo IV apartado 3.6).

- El dominio fluido alcanza los  $99.8[m]$  de altura y se han discretizado  $300[m]$  de longitud (2.80 veces la altura de la presa). En el extremo izquierdo se han colocado 14 elementos transparentes unidimensionales de dos nodos. La condición de superficie libre se ha establecido imponiendo una presión nula constante en el contorno superior. Para el agua se ha utilizado una densidad  $\rho$  de  $1019[Kg/m^3]$  y un módulo de deformación volumétrica  $K$  de  $2.11[GPa]$  dando una velocidad de transmisión del sonido en el medio  $c = \sqrt{K/\rho}$  de  $1439[m/s]$ .

Una información útil para un análisis paso a paso en el tiempo, son las frecuencias y periodos propios de la estructura a analizar. En la tabla 7.2.1.1 se listan los diez auto-valores principales con sus correspondientes frecuencias y periodos para el sistema presa-terreno de la presa de Koyna sin considerar la interacción con el fluido.

#	Auto-valor	Frecuencia [rad/s]	Periodo [s]
1	208.1285	14.4267	0.4355
2	314.4826	17.7337	0.3543
3	401.0830	20.0271	0.3137
4	942.5523	30.7010	0.2047
5	1275.1743	35.7096	0.1760
6	1419.3919	37.6748	0.1668
7	1605.1971	40.0649	0.1568
8	1722.3632	41.5014	0.1514
9	2130.5707	46.1581	0.1361
10	2149.5143	46.3629	0.1355

Tabla 7.2.1.1 Koyna: Principales valores propios del sistema presa-terreno.

## 2.2. Presa de Mequinenza

En igual forma al caso anterior, se ha discretizado la presa de Mequinenza, el terreno y el fluido en dos dominios bidimensionales separados. En uno de ellos se han discretizado la Presa y el terreno conjuntamente mientras que en el otro se ha discretizado el fluido. En la figura 7.2.2.1 se presentan ambas mallas separadas ligeramente la una de la otra. La malla que representa a la Presa y al terreno tiene 396 nudos de dos grados de libertad cada uno y está formada por 350 elementos finitos de cuatro nodos bajo la hipótesis de deformación plana repartidos en la siguiente forma: 100 elementos forman la Presa y 250 elementos forman el terreno. La malla utilizada para discretizar el fluido del embalse está constituida por 90 elementos finitos de cuatro nodos teniendo un total de 110 nudos.

A continuación se da una descripción detallada de la geometría y de las propiedades de los materiales utilizados en la presa de Mequinenza, el terreno y el fluido, respectivamente:

- La presa de Mequinenza mide 66[m] de altura, el ancho en coronación es de 8[m], en la base tiene 50[m] de anchura y el punto de cambio de pendiente de la cara aguas abajo se encuentra a 55.4[m] de altura y a 8[m] de la cara vertical de aguas arriba. El módulo de elasticidad  $E$  del hormigón es de 20.0[GPa], el coeficiente de Poisson  $\nu$  vale 0.15 y la densidad  $\rho$  vale 2400[Kg/m<sup>3</sup>]. Para el modelo de daño continuo, en los análisis con material no-lineal (ver referencia [Ga]), se ha utilizado una resistencia máxima a tracción  $f'_t$  de 2.5[MPa], una resistencia máxima a compresión  $f'_c$  de 25.0[MPa] y una energía de fractura  $G_f$  de 300.0[J/m<sup>2</sup>].

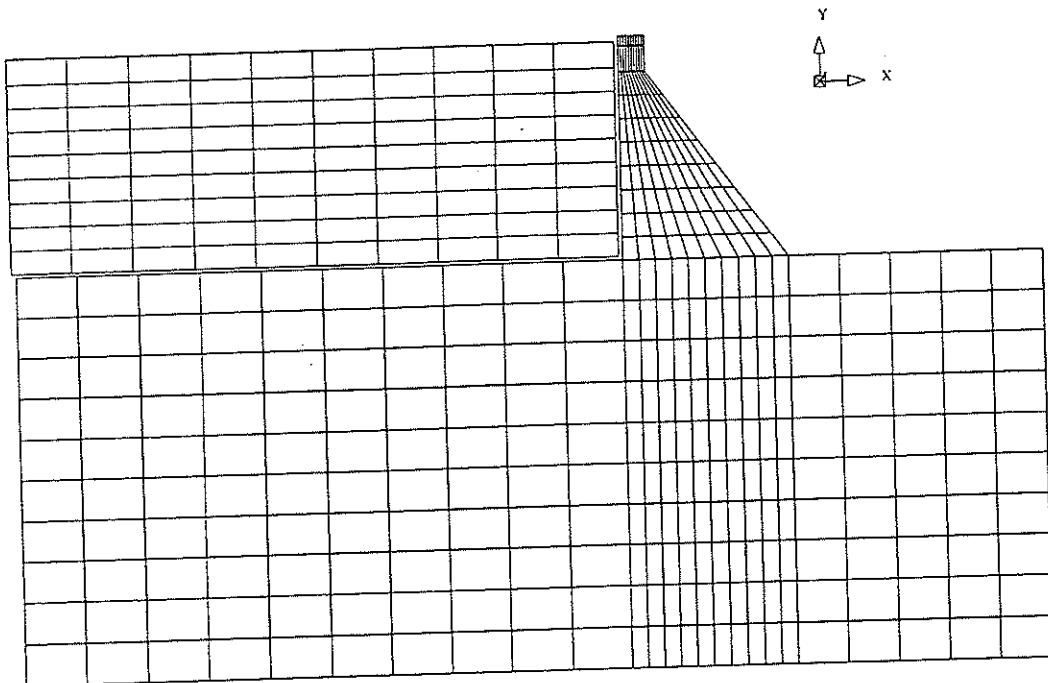


Figura 7.2.2.1 Discretización de presa de Mequinenza-terreno y fluido del embalse por separado.

- El terreno discretizado mide 120[m] de profundidad (1.82 veces la altura de la presa). Desde la base de la presa se han discretizado 180[m] de longitud hacia aguas arriba y 75[m] hacia aguas abajo, dando una longitud total de 305[m]. El material del terreno se ha considerado, en todos los análisis, elástico lineal con módulo de elasticidad  $E$  de 18[GPa] y coeficiente de Poisson  $\nu$  de 0.2. La densidad  $\rho$  se ha estimado en 1830[Kg/m<sup>3</sup>]. En el contorno inferior se han colocado 25 elementos transparentes unidimensionales de dos nodos (ver Capítulo IV) y se han ligado los 11 nudos del contorno derecho con los 11 nudos del contorno izquierdo para simular la condición de repetitividad en el dominio (ver Capítulo IV apartado 3.6).
- El dominio fluido alcanza los 63[m] de altura y se han discretizado 180[m] de longitud (2.73 veces la altura de la presa). En el extremo izquierdo se han colocado 14 elementos transparentes unidimensionales de dos nodos. La condición de superficie libre se ha establecido imponiendo una presión nula constante en el contorno superior. Para el agua se ha utilizado una densidad  $\rho$  de 1019[Kg/m<sup>3</sup>] y un módulo de deformación volumétrica  $K$  de 2.11[GPa] dando una velocidad de transmisión del sonido en el medio  $c = \sqrt{K/\rho}$  de 1439[m/s].

En la tabla 7.2.2.1 se listan los diez auto-valores principales con sus correspondientes frecuencias y períodos para el sistema presa-terreno de la presa de Mequinenza sin considerar la interacción con el fluido.

#	Auto-valor	Frecuencia [rad/s]	Periodo [s]
1	564.3305	23.7556	0.2645
2	816.1371	28.5681	0.2199
3	1081.1965	32.8816	0.1911
4	2568.1947	50.6774	0.1240
5	3388.5761	58.2114	0.1079
6	3800.9922	61.6522	0.1019
7	4316.1347	65.6973	0.0956
8	4558.0071	67.5130	0.0931
9	5646.3421	75.1421	0.0836
10	5713.1343	75.5853	0.0831

Tabla 7.2.2.1 Mequinenza: Principales valores propios del sistema presa-terreno.

### 3. EXCITACIÓN SÍSMICA

Para la excitación sísmica horizontal se han generado dos señales artificiales definidas para una fracción del amortiguamiento crítico  $\xi$  de 0.02. La primera de las señales se generó con el mismo espectro de velocidades utilizado en el ejemplo del Capítulo IV (apartado 5.2). Dicho espectro proviene del suavizado realizado sobre los espectros de respuesta de 39 registros de terremotos reales dados en la referencia [VBF]. Esta señal resultó teniendo un contenido de frecuencias dominantes correspondientes al periodo de 0.4[s]. Por su parte, la segunda señal artificial se generó con un espectro de respuesta adecuado para dar un contenido de frecuencias dominantes correspondientes al periodo de 0.2[s]. En lo sucesivo estas señales se identificarán de acuerdo a su periodo dominante como señal 0.4[s] o señal 0.2[s], respectivamente.

En la tabla 7.3.1 se presentan los 11 valores que definen el espectro de diseño de la señal 0.4[s] y, en la tabla 7.3.2 los valores correspondientes a la señal 0.2[s]. Dichos espectros junto con los espectros reales de las señales correspondientes se pueden observar en la figura 7.3.1 y 7.3.2, respectivamente.

En la figura 7.3.3 se presentan los acelerogramas, velocigramas y funciones de densidad espectral de potencia de las dos señales artificiales generadas. Estas señales fueron generadas a intervalos constantes de tiempo de 0.01[s]. En ambos casos la aceleración máxima se ha especificado en  $0.26g = 255[cm/s^2]$ . El contenido de frecuencias de las señales está dada por 1775 funciones sinusoidales equi-espaciadas logarítmicamente en frecuencia con un periodo mínimo de 0.01[s] y un periodo máximo de 4.0[s]. En la figura 7.3.3, donde se presentan las funciones de densidad espectral de po-

T	$S_u [cm/s]$	T	$S_u [cm/s]$
0.001	0.457	0.300	43.180
0.025	1.524	0.400	50.800
0.060	4.191	1.000	50.800
0.105	7.620	2.000	48.260
0.190	25.400	3.500	44.450
		4.000	30.000

Tabla 7.3.1 Señal 0.4[s]. Espectro de diseño dado en velocidades.

T	$S_u [cm/s]$	T	$S_u [cm/s]$
0.001	0.274	0.150	25.908
0.013	0.914	0.200	30.480
0.030	2.515	0.500	30.480
0.053	4.572	1.000	28.956
0.095	15.240	1.750	26.670
		4.000	10.000

Tabla 7.3.2 Señal 0.2[s]. Espectro de diseño dado en velocidades.

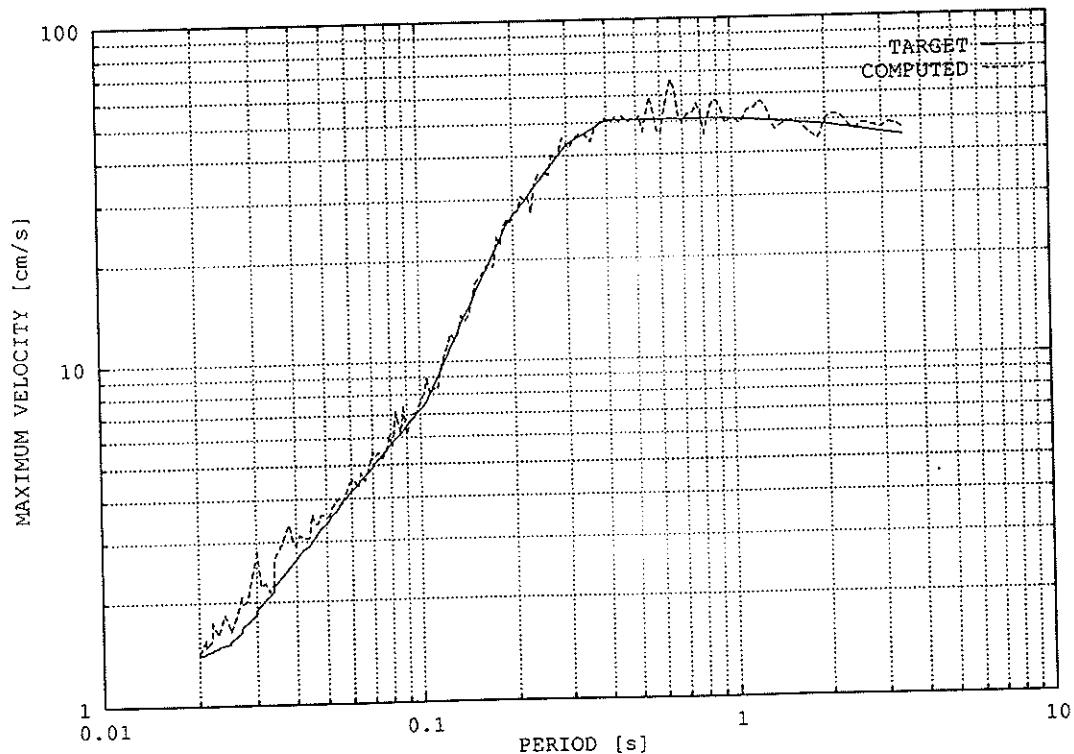


Figura 7.3.1 Señal 0.4[s]. Espectro de diseño dado en velocidades.

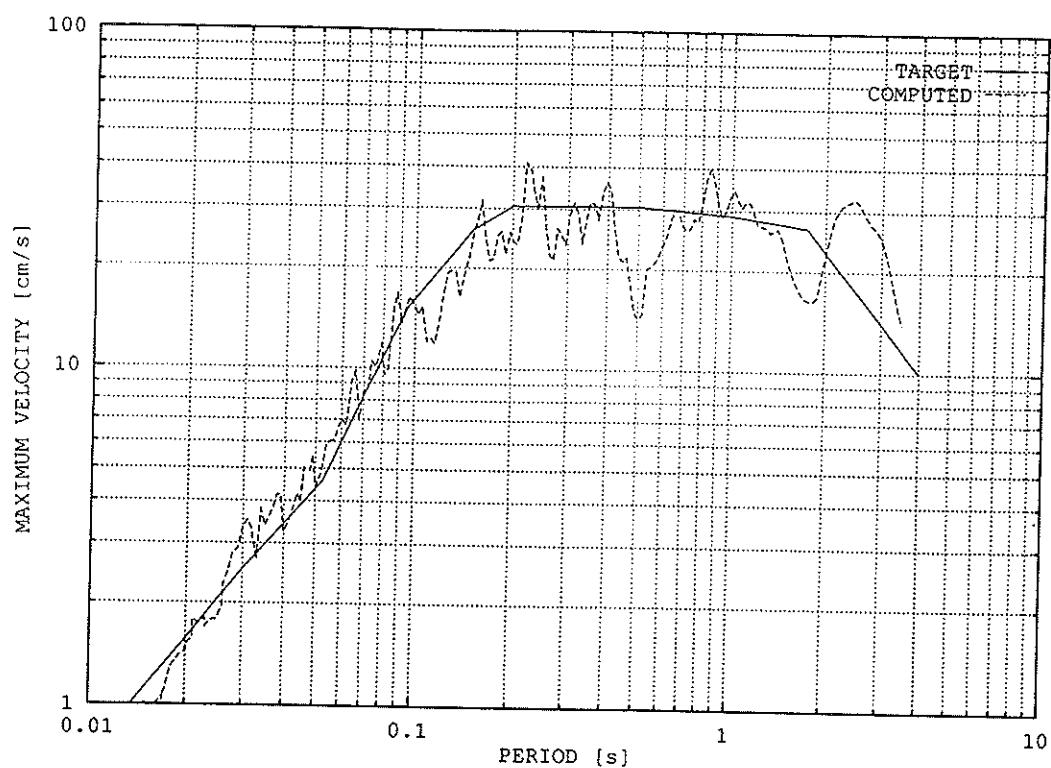


Figura 7.3.2 Señal 0.2[s]. Espectro de diseño dado en velocidades.

tencia (FDEP) de las señales, se puede observar un alto contenido de la función sinusoidal con periodo correspondiente a  $0.4[s]$  y a  $0.2[s]$ , respectivamente. La duración de las señales es de  $10[s]$ . La función de intensidad envolvente especificada (ver Capítulo IV apartado 4.4), que es la misma para ambas señales, aumenta linealmente de 0 a 1 en 1.5 segundos, se mantiene constante en 1 durante 6 segundos y disminuye linealmente hasta anularse en los 2.5 segundos restantes. Por otra parte, las aceleraciones máximas obtenidas tenían, antes de ser corregidas, una diferencia en media, respecto a los  $255[cm/s^2]$  ( $0.26[g]$ ) especificados, del orden del 9%. Al final se corrigieron estas aceleraciones, para posteriormente hacerse los ajustes de línea base y de respuesta espectral según se detalla en el Capítulo IV (apartado 4.7).

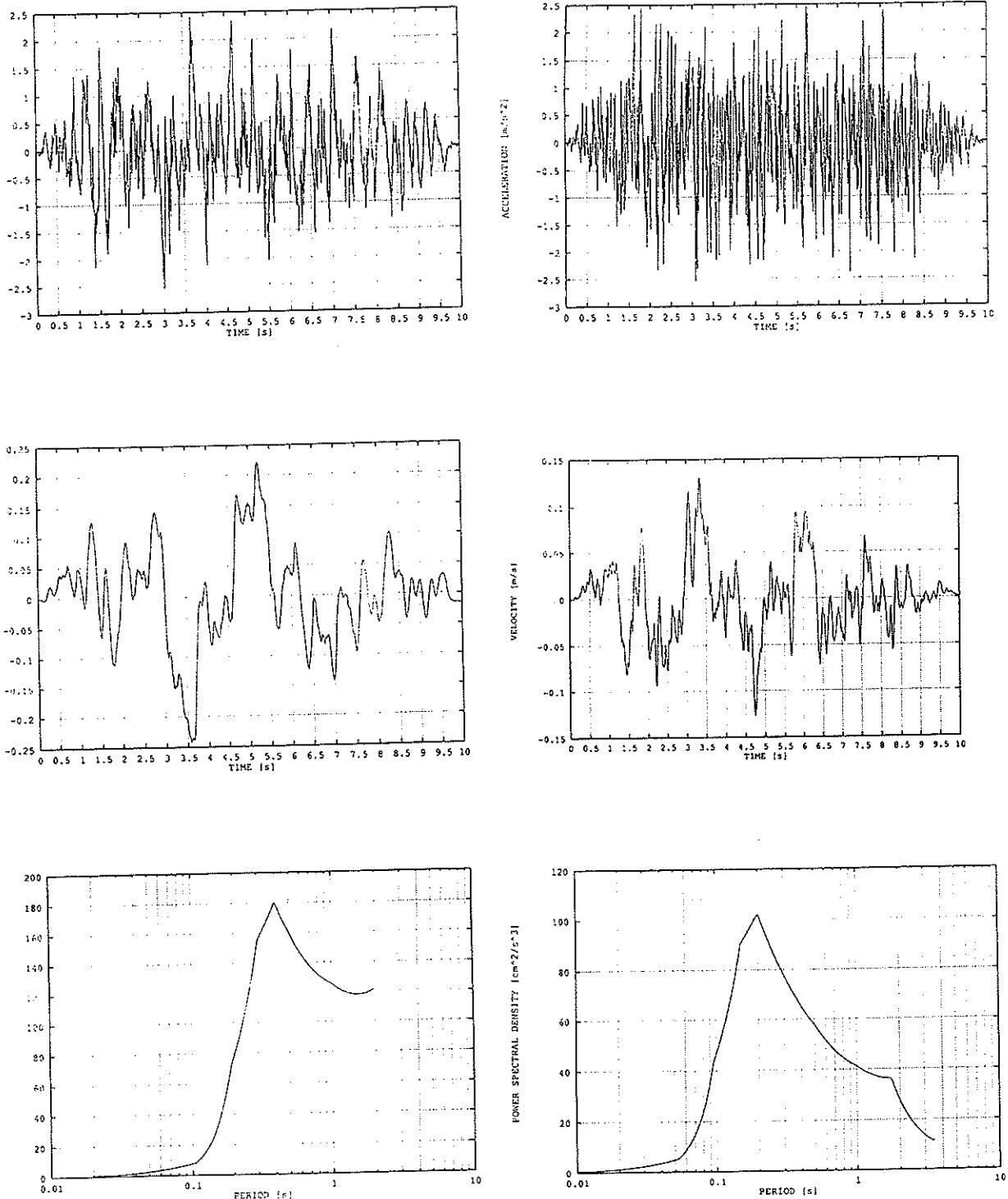


Figura 7.3.3 Señal 0.4[s]

Señal 0.2[s]

#### 4. DESCRIPCIÓN DEL ANÁLISIS TIPO

Todos los análisis realizados se han hecho en tres fases claramente diferenciadas:

Una primera fase quasi-estática de aplicación de las cargas de peso propio. En esta fase primero se han coartado los desplazamientos de todos los nudos en la base del terreno, luego se han aplicado las fuerzas de peso propio y presión hidrostática y finalmente se han liberado todos los nudos previamente coartados aplicándose las reacciones como fuerzas exteriores. De esta forma, se obtiene una estructura en equilibrio, sin coacción exterior alguna<sup>†</sup>, que tiene una deformada inicial y un estado tensional correspondiente a la situación de reposo bajo peso propio. Se debe notar que, al aplicar las cargas dinámicas, es importante que la estructura esté libre de coacciones exteriores, ya que de esta forma se consigue que funcionen correctamente los contornos transparentes descritos en el Capítulo IV.

La segunda fase consiste en el análisis dinámico de aplicación de la excitación sísmica como una onda que avanza de abajo hacia arriba entrando por la base del modelo y estando constituida por un movimiento de corte horizontal. En esta fase, en cada análisis, se ha utilizado alguna de las señales artificiales generadas (0.4[s] ó 0.2[s] ver figura 7.3.3) que se ha aplicado pre-multiplicada por un factor de intensidad dado y avanzando a intervalos regulares de tiempo de 0.01[s] hasta alcanzar los 12[s]. Se debe notar que intencionadamente no se ha agregado ningún tipo de amortiguamiento numérico adicional<sup>‡</sup>, por lo que, para el método de Newmark se han usado los valores estrictos del límite de estabilidad ( $\gamma = 0.5$  y  $\beta = 0.25$ ). Si bien la señal sísmica tiene una duración de 10[s] y los valores de daño máximo se alcanzan en los primeros 4[s], los análisis se extendieron hasta los 12[s] (1200 pasos de tiempo) para permitir que el modelo se amortigüe a la vez que los contornos transparentes irradian las ondas hacia el exterior del mismo.

Finalmente una tercera fase en la que se incrementa quasi-estáticamente la densidad del fluido hasta que se produzca el colapso de la estructura. Para ello primero se vuelven a coartar los desplazamientos de todos los nudos en la base del terreno y se fija el tiempo arbitrariamente en 21[s]. Seguidamente se incrementa quasi-estáticamente la densidad relativa del agua en incrementos de 0.01 avanzando a pseudo-intervalos de tiempo de 0.01[s]. De esta forma se consigue que la densidad relativa del fluido siempre valga  $\rho_r = t - 20$ , lo

<sup>†</sup> En los principales valores propios de los sistemas presa-terreno dados en las tablas 7.2.1.1 y 7.2.2.1, se han eliminado, adecuadamente, los dos primeros auto-valores que corresponden al movimiento de cuerpo rígido del sistema. Se debe notar además, que el movimiento de cuerpo rígido correspondiente a la rotación se encuentra restringido por efecto de la condición de repetitividad impuesta al dominio.

<sup>‡</sup> Desde el punto de vista de la estabilidad numérica, cualquier amortiguamiento adicional es ventajoso. Sin embargo, en este ejemplo se quería poner a prueba el modelo numérico bajo condiciones estrictas.

que se debe tener en cuenta en las gráficas correspondientes que se presentan más adelante.

Es importante notar que a lo largo de todos los análisis no-lineales realizados se ha exigido una tolerancia local —que se puede denominar estricta— del 0.01% de la norma de las fuerzas residuales sobre la norma de las fuerzas de peso propio. Por otra parte, en los análisis con interacción, en el proceso iterativo por bloques siempre se ha analizado primero el sistema presa-terreno y después el fluido. La convergencia global se ha controlado especificando una variación máxima permitida en el módulo de las presiones de interacción del fluido sobre la presa del 0.4% entre dos iteraciones consecutivas —valor que también puede ser considerado estricto—. Para el método iterativo por bloques, como predictor se ha utilizado un incremento nulo de presiones, esto es:  $\Delta p_{i=0}^{t+\Delta t} := 0$  (ver predictor (a) en el Capítulo V, apartado 6).

Un análisis de interés, que en cada caso también se ha realizado, es el que consiste en primero imponer el peso propio y la presión hidrostática —primera fase— e inmediatamente pasar a incrementar la densidad del fluido —tercera fase— hasta producir el colapso. A este análisis en lo sucesivo se lo denominara como RFD (“Relative Fluid Density”).

Nótese que, de acuerdo a lo descrito, en cualquier caso, un análisis siempre llega a su término después de producirse un colapso y únicamente en alguna de las dos formas siguientes: 1) Es posible que se produzca el colapso de la estructura en la segunda fase correspondiente al análisis dinámico de aplicación de la excitación sísmica —que aquí se denomina colapso dinámico—. Este colapso es detectado por la presencia de desplazamientos monótonamente crecientes de una parte o toda la estructura; 2) Por colapso inducido en la tercera fase por el aumento de las fuerzas hidrostáticas sobre la presa al aumentar la densidad relativa del agua —que aquí se denomina colapso estático—. Este colapso se detecta numéricamente cuando la matriz efectiva de la estructura se hace prácticamente singular y aparecen autovalores nulos o negativos en la misma.

Consecuentemente será posible diferenciar los resultados que se obtengan, desde el punto de vista de la seguridad de una presa, en tres grandes grupos:

- 1) Aquellos asociados con la seguridad de la presa antes de producirse un sismo. Ésta estaría referida a la máxima densidad relativa del agua que es capaz de soportar una presa previamente a cualquier acción sísmica.
- 2) Aquellos asociados con la seguridad de la presa durante un sismo. Ésta estaría referida a la máxima intensidad sísmica de un tipo dado (frecuencia dominante, duración, etc.) que es capaz de soportar una presa sin presentar colapso dinámico.

- 3) Aquellos asociados con la seguridad de la presa después de producirse un sismo. Ésta estaría referida a la máxima densidad relativa del agua que es capaz de soportar una presa después de alguna acción sísmica.

De esta forma se puede plantear la existencia de tres criterios de establecer la seguridad de una presa: uno antes, otro durante y un último después de la aplicación de una acción sísmica en particular. A priori no parece existir ninguna relación entre dichos criterios de seguridad ya que en principio representan conceptos diferentes y, por tanto, sus valoraciones podrán ser muy distintas. Para considerar estas circunstancias en el apartado siguiente se presentan los resultados obtenidos para los ejemplos propuestos.

## 5. RESULTADOS

Los resultados que se presentan a continuación han sido seleccionados de los diversos análisis realizados, cada uno de ellos consistente en utilizar una estructura (Koyna o Mequinenza) excitada con alguna de las dos señales artificiales generadas ( $0.4[s]$  ó  $0.2[s]$ ) previamente pre-multiplicada (escalada) por un factor. A este respecto es importante indicar que en este trabajo, en lugar de especificar el factor utilizado en un análisis en particular, se ha utilizado el término intensidad para especificar directamente la aceleración máxima que se mediría en la superficie libre del terreno en un análisis sin presa alguna<sup>†</sup>.

Para estudiar el comportamiento estructural de ambas presas se han utilizado diversas intensidades de las señales sísmicas. Las intensidades utilizadas se han seleccionado de manera que por lo menos se obtuvieran análisis con los siguientes resultados: un primer análisis en el que la estructura presentará un deterioro que fuese el mayor posible pero que no se produjera colapso dinámico –segunda fase–, un segundo análisis correspondiente a la mínima intensidad sísmica que produce colapso dinámico y finalmente un tercer análisis para una intensidad sísmica relativamente alta.

Estas tres intensidades (aceleraciones máximas del terreno) se han denominado como  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  definidas como:

<sup>†</sup> A partir de la aceleración máxima se puede estimar la intensidad sísmica  $I_{MM}$  de la escala de Mercalli Modificada (que prácticamente es independiente de cualquier característica física medible del movimiento sísmico) con la regla empírica proporcionada por Lomnitz [Lom] como  $I_{MM} = 1.5 + 3 * \log(a_{max})$  donde  $a_{max}$  viene dada en  $[cm/s^2]$ . A su vez, se han establecido varias relaciones entre la intensidad  $I_{MM}$  y la magnitud  $M$  de la escala de Richter, para diferentes regiones. Así por ejemplo, la relación [CaB]  $I_{MM} = 8.16 + 1.45M - 2.46\log R$  donde  $R$  es la distancia focal en  $Km$  es utilizada en Norteamérica, California y México.

- $\alpha$  es la intensidad máxima de una señal dada que se puede aplicar a una estructura sin que se produzca colapso dinámico.
- $\beta$  es la intensidad mínima de una señal dada que al aplicarse a una estructura produce colapso dinámico.
- $\gamma$  es una intensidad superior a la intensidad  $\beta$  y que además produce colapso dinámico en un instante de tiempo anterior al producido por dicha intensidad  $\beta$ .

Nótese que las intensidades  $\alpha$  y  $\beta$  en el límite coinciden. Sin embargo, los resultados cualitativos de un análisis en el que no se produce colapso dinámico comparados con aquél en el que si se produce son radicalmente diferentes. En este trabajo se han elegido para las intensidades  $\alpha$  y  $\beta$  intensidades próximas aunque ligeramente distintas a efectos de enfatizar las diferencias cualitativas de ambos análisis. Por otra parte, aunque la definición de la intensidad  $\gamma$  parece ser un tanto ambigua, es desde un punto de vista cualitativo que tiene sentido observar el comportamiento estructural para una señal con una intensidad relativamente alta.

### 5.1. Resultados cualitativos

El comportamiento no-lineal del sistema está dado por la fisuración del hormigón en la presa. Como ya se dijo, la fisuración del hormigón ha sido modelada utilizando la ecuación constitutiva de degradación de daño descrita en la referencia [Ga]. Entre las muchas ventajas que tiene este modelo destaca el hecho de que el grado de fisuración en un punto está dado exclusivamente por una variable escalar  $d$  –denominada daño–. De esta forma, observando la progresión del daño en la presa se puede comprender la evolución del mecanismo no-lineal en todo el sistema. Otra ayuda importante para comprender el comportamiento cualitativo de una estructura en un instante dado es la deformada de la misma. En el análisis de presas normalmente los desplazamientos y las deformaciones son valores de pequeña magnitud<sup>†</sup>. Por ello para enfatizar las deformaciones producidas, en las figuras que siguen, se ha utilizado un factor de amplificación de los desplazamientos de 100.

#### 5.1.1. Análisis cuasiestático RFD y dinámico a intensidad $\alpha$

En este apartado se presentan los resultados cualitativos obtenidos tanto para los análisis RFD de incremento de la densidad relativa del fluido sin aplicación de ninguna señal sísmica, así como de los análisis a intensidad  $\alpha$  en los que se aplica la máxima intensidad sísmica que no produce colapso dinámico y en los que posteriormente también se incrementa la densidad

---

<sup>†</sup> Motivo por el cual está plenamente justificado el utilizar modelos en pequeñas deformaciones y desplazamientos

relativa del fluido. Consecuentemente y al tener ambos análisis (RFD y  $\alpha$ ) un final similar –colapso en la tercera fase–, es interesante comparar los resultados obtenidos (máxima densidad relativa alcanzada y distribución del daño) en cada caso.

En las figuras 7.5.1.1.1 y 7.5.1.1.2 se presentan las isolíneas de daño sobre la deformada ampliada 100 veces para los análisis RFD y los correspondientes a la señal  $0.4[s]$  a intensidad  $\alpha$ , para las dos presas propuestas.

Obsérvese que la máxima densidad relativa del agua que ambas presas pueden soportar es idéntica tanto antes como después de producirse el sismo con la mayor intensidad que la estructura puede soportar (intensidad  $\alpha$ ). Y aún más, la distribución del daño que se obtiene en un momento muy próximo al colapso final es muy parecida<sup>†</sup>. Aunque a primera vista este hecho puede parecer sorprendente, su explicación se debe a que para una tipología estructural como la estudiada –presa de gravedad–, la resistencia a la acción del agua se debe prácticamente en exclusivo al peso propio de la presa (valor que no varía, claro está, por una acción sísmica cualquiera). Estos resultados permiten razonar en el hecho de que la resistencia a tracción del hormigón, en una presa de gravedad, constituye un efecto de segunda importancia respecto a la seguridad de la estructura en su conjunto. Evidentemente, la aparición de fisuras aumentará la filtración del agua a través del cuerpo de una presa. Sin embargo, parece claro que la seguridad de la misma en su conjunto no se ve disminuida por la acción de un sismo que no haya producido el colapso dinámico, por muy intenso que éste sea.

### 5.1.2. Análisis a intensidad $\beta$

En este apartado se presentan los resultados cualitativos de los análisis realizados en ambas presas con las dos señales generadas y para una intensidad  $\beta$ . Todos estos análisis concluyen con un colapso dinámico durante la aplicación de la señal sísmica –segunda fase–. Debe observarse (ver tablas 7.2.1.1 y 7.2.2.1) que el periodo fundamental de vibración de la presa de Koyna ( $0.4355[s]$ ) está muy próximo al periodo dominante de la señal  $0.4[s]$ . A su vez, el periodo de vibración principal de la presa de Mequinenza ( $0.2645[s]$ ) está muy proximo al periodo dominante de la señal  $0.2[s]$ . Por este motivo es de esperarse que la señal  $0.4[s]$  sea la que cause los mayores daños en la presa de Koyna a la vez que la señal  $0.2[s]$  en la presa de Mequinenza.

En las figuras 7.5.1.2.1 y 7.5.1.2.2 se presentan las isolíneas de daño sobre la deformada ampliada 100 veces para los análisis con las señales  $0.4[s]$  y  $0.2[s]$  a intensidad  $\beta$  en las presas de Koyna y Mequinenza, respectivamente.

---

<sup>†</sup> Debe destacarse que se encuentran exactamente los mismos resultados –por lo que no se presentan aquí– cuando se utiliza la señal  $0.2[s]$ .

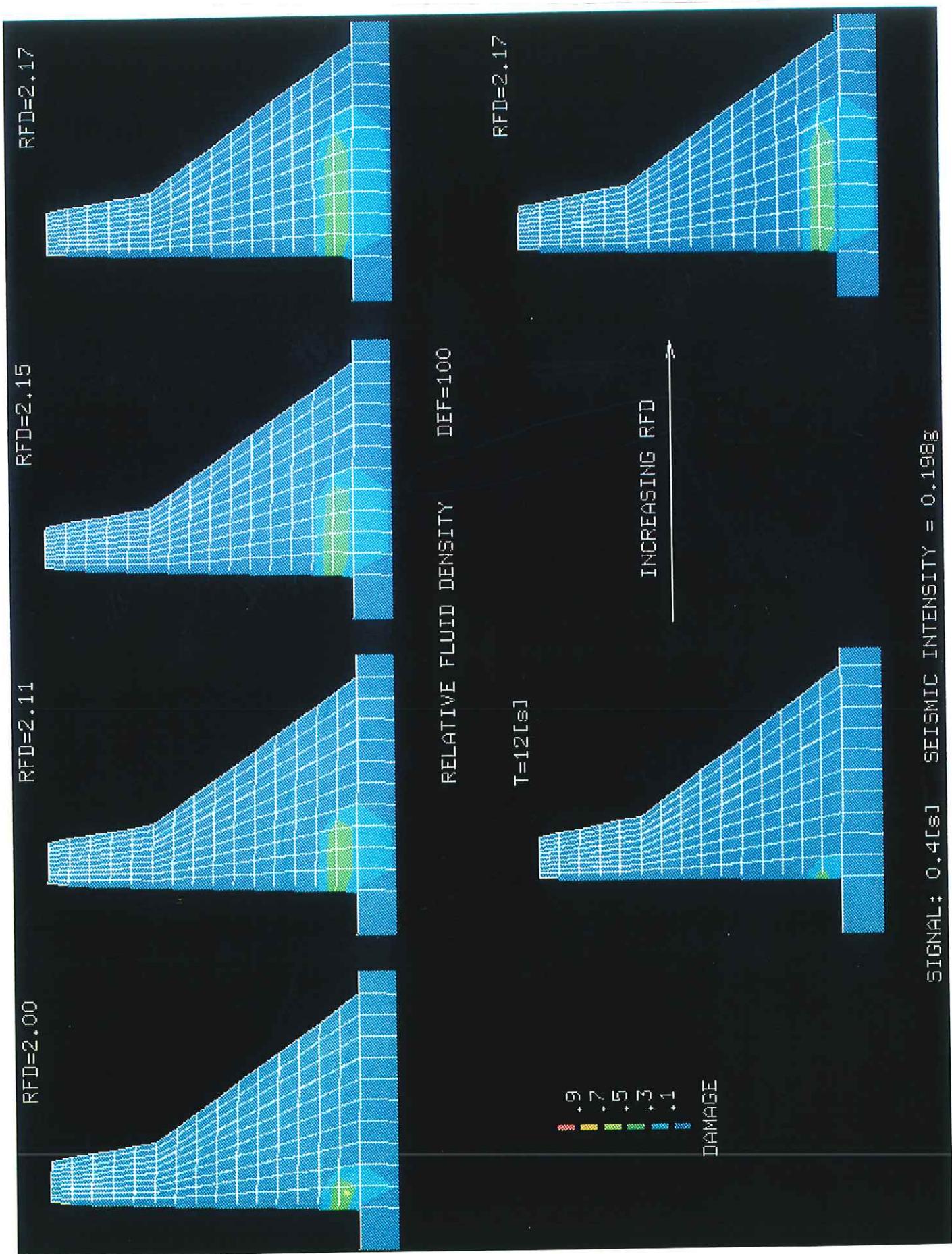


Figura 7.5.1.1.1 Presa de Koyna. Análisis RFD y dinámico a intensidad  $\alpha$ .



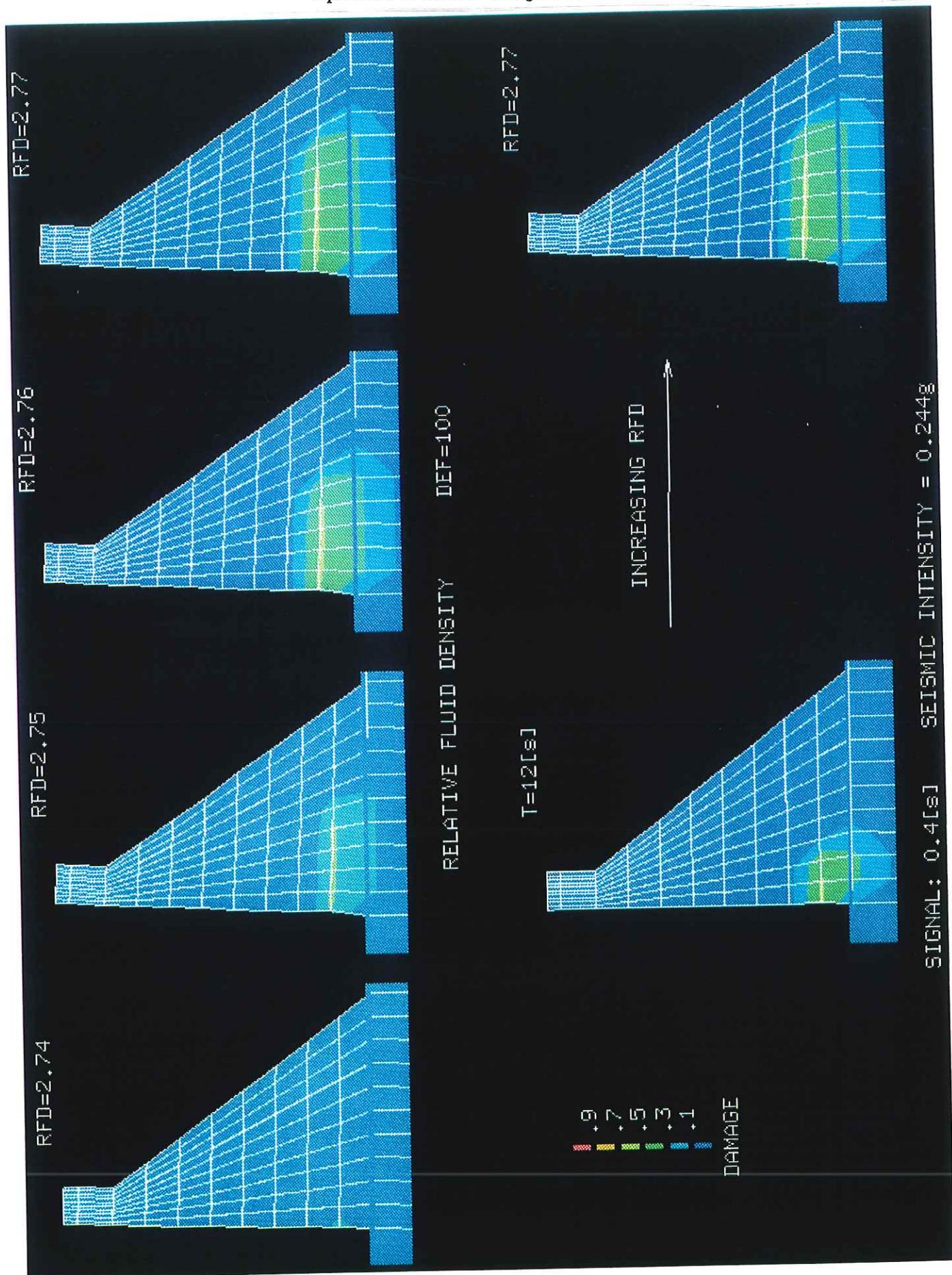


Figura 7.5.1.1.2 Presa de Mequinenza. Análisis RFD y dinámico a intensidad  $\alpha$ .



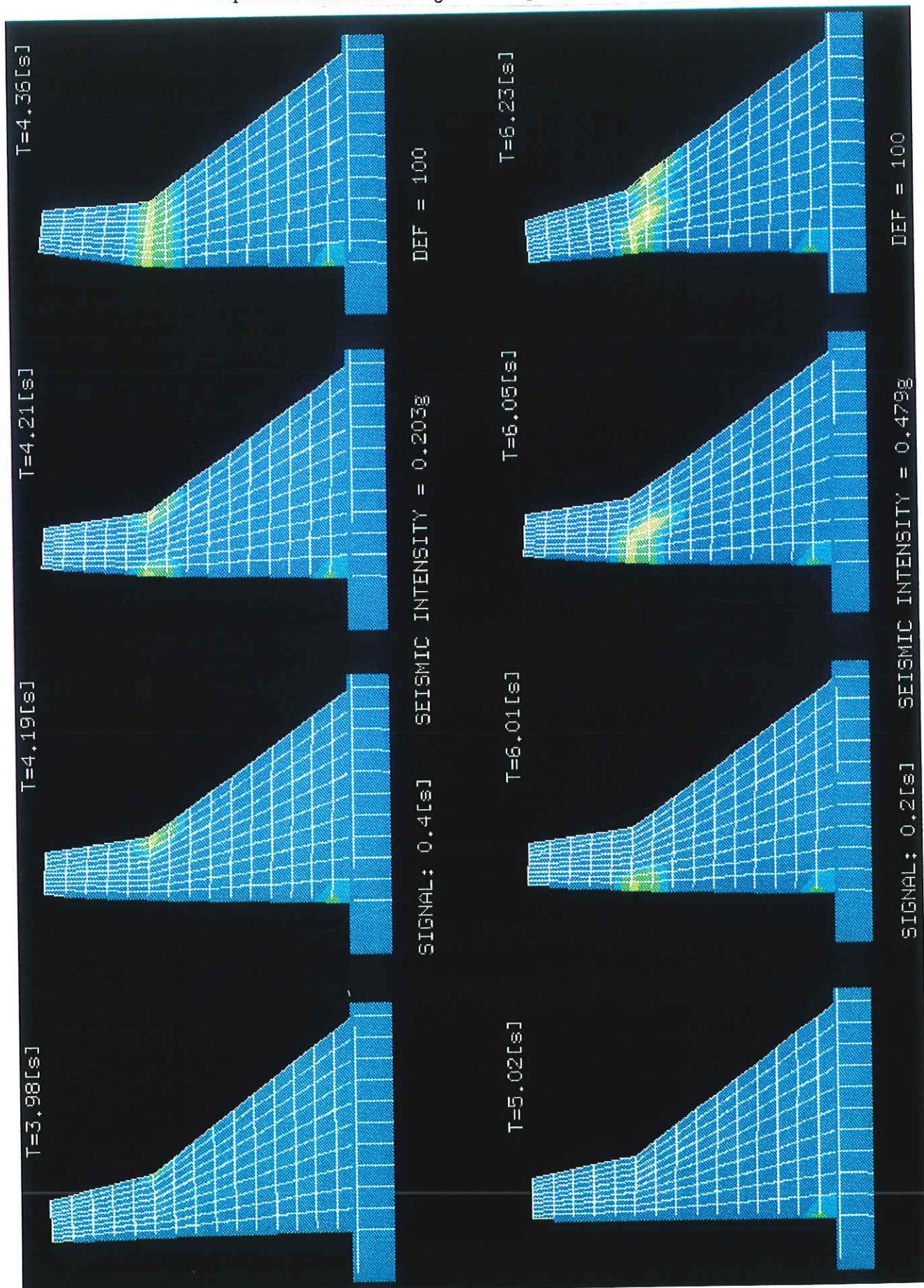


Figura 7.5.1.2.1 Presa de Koyna. Isolíneas de daño sobre la deformada ampliada 100 veces para los análisis con las señales  $0.4[s]$  y  $0.2[s]$  a intensidad  $\beta$ .



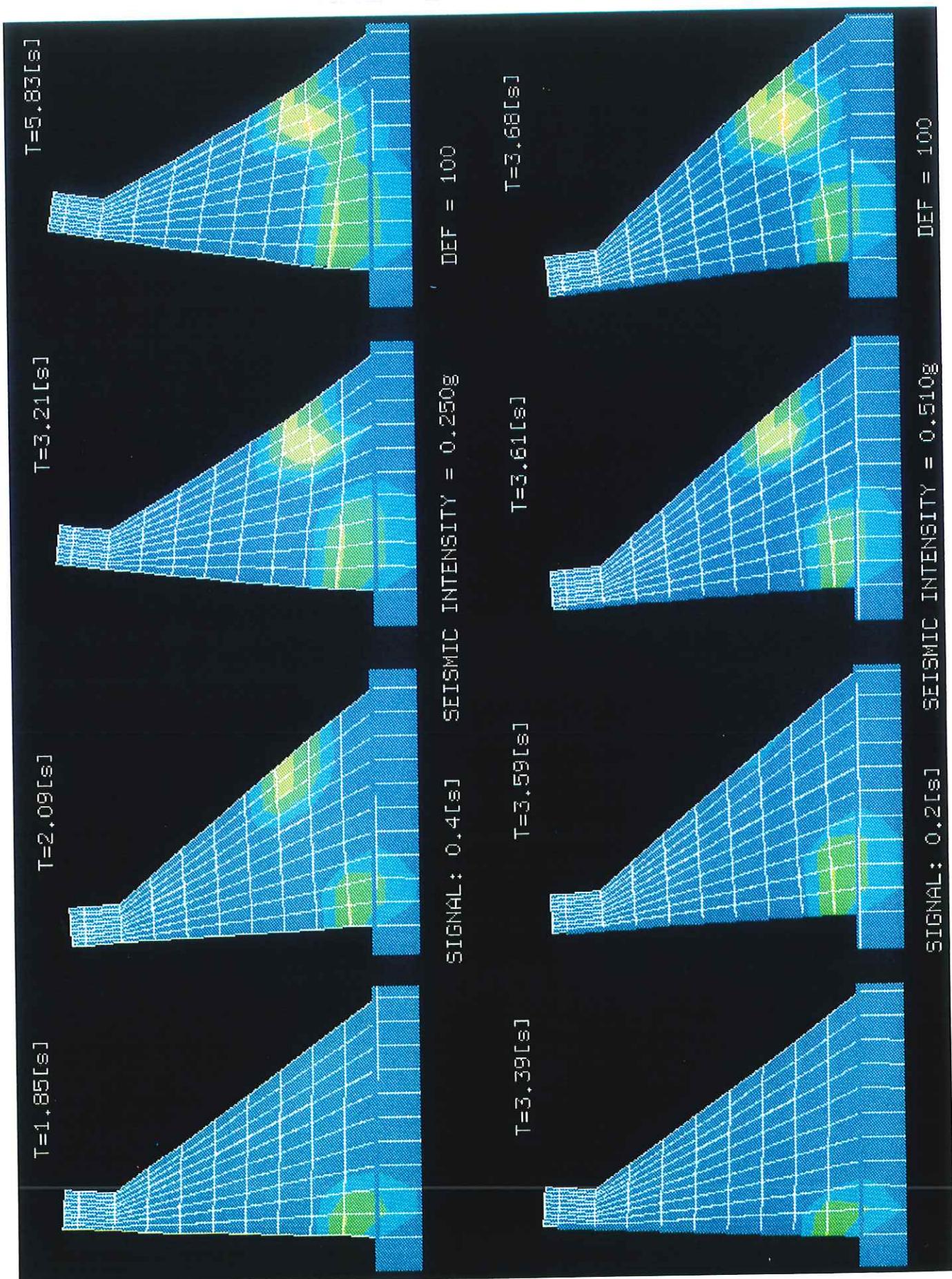


Figura 7.5.1.2.2 Presa de Mequinenza. Isolíneas de daño sobre la deformada ampliada 100 veces para los análisis con las señales 0.4[s] y 0.2[s] a intensidad  $\beta$ .



Es interesante observar en dichas figuras que efectivamente, y como era de esperarse, la señal  $0.4[s]$  es la que primero produce el colapso dinámico en la presa de Koyna (a los  $4.36[s]$  del inicio del sismo, frente a los  $6.23[s]$  de la señal  $0.2[s]$ ). Por su parte, es justamente la señal  $0.2[s]$  la que primero produce el colapso dinámico en la presa de Mequinenza (a los  $3.68[s]$  del inicio del sismo, frente a los  $5.83[s]$  de la señal  $0.4[s]$ ).

Se debe destacar la diferencia en el modo de colapso entre ambas presas. La presa de Mequinenza, cuya sección es prácticamente triangular, daña exclusivamente por la zona inferior, lo que previsiblemente provoca un cambio en el modo principal de vibración de la Presa. Por su parte en la presa de Koyna, si bien el daño comienza en la zona inferior de aguas arriba, finalmente se localiza en la zona superior "cortando la cabeza", provocando previsiblemente un cambio en el segundo modo de vibración de la estructura.

Cualitativamente se puede observar que el daño tiene una localización pronunciada en zonas concretas de la estructura, por lo que es de esperar que ambas presas cambian sensiblemente su comportamiento estructural mucho más que si el mismo daño estuviera repartido en todo el volumen de la estructura. Por tanto no es de extrañar que cambien significativamente sus modos y frecuencias propias a medida que se desarrolla el proceso no-lineal. En los apartados que siguen se hace referencia a este cambio.

## 5.2. Resultados cuantitativos

Como elemento de comparación entre los diferentes análisis realizados, en este apartado se utilizan los siguientes parámetros:

- DHC El desplazamiento horizontal en coronación, relativo a la base de la presa.
- DVC El desplazamiento vertical en coronación, relativo a la base de la presa.
- D2 La variable de deterioro  $D_2^t$

### 5.2.1. Análisis RFD. Cuasiestático de incremento de la densidad relativa del agua

En la figura 7.5.2.1.1 se presenta el DHC obtenido con el análisis RFD tanto para la presa de Koyna como la presa de Mequinenza. Los valores de densidad del fluido máxima alcanzada así como los correspondientes desplazamientos relativos se presentan en la tabla 7.5.2.1.1.

Los valores de densidad relativa máxima que producen el colapso se pueden interpretar como un coeficiente de seguridad antes de que se produzca un terremoto. En la figura 7.5.2.1.1 se puede observar como la presa de Koyna, que es la más alta es, también, la más flexible. Sin embargo, es ésta

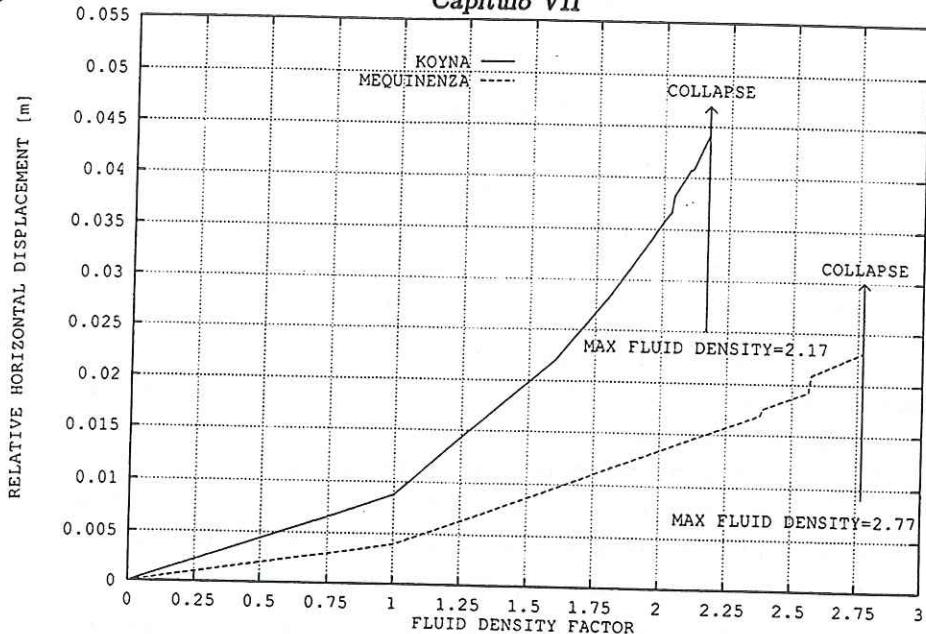


Figura 7.5.2.1.1 Incremento de la densidad relativa del agua

Presa	Densidad Max.	DHC
KOYNA	2.17	0.0441589[m]
MEQUINENZA	2.77	0.0231178[m]

Tabla 7.5.2.1.1 Densidad relativa del agua que produce el colapso estático y DHC correspondiente.

la que soporta una densidad relativa máxima menor. Parece evidente que si se desea incrementar este “coeficiente de seguridad” de la Presa de Koyna, es necesario hacerla mucho más rígida a efectos de disminuir el desplazamiento máximo que se produce. Nótese que estas conclusiones iniciales no tienen en cuenta factores tales como la frecuencia propia de vibración de la estructura ni la frecuencia dominante que tienen los sismos producidos en la región donde se encuentra la Presa.

### 5.2.2. Análisis dinámico. Excitación sísmica

Después de realizar los diversos análisis con distintas intensidades para las dos señales sísmicas generadas, se han podido encontrar los valores máximos de intensidad que pueden soportar cada una de las presas sin producir colapso dinámico (intensidad  $\alpha$ ). Dichos valores se encuentran reflejados en la tabla 7.5.2.2.1.

En las figuras 7.5.2.2.1 y 7.5.2.2.2 se presentan las historias del DHC obtenidas en los diferentes análisis realizados tanto para la presa de Koyna como para la presa de Mequinenza con las dos señales generadas. En cada caso se presentan cuatro análisis, uno con material lineal correspondiente a

Señal	Koyna	Mequinenza
0.4[s]	0.198g	0.244g
0.2[s]	0.473g	0.504g

Tabla 7.5.2.2.1 Intensidades  $\alpha$  correspondientes a las señales 0.4[s] y 0.2[s] en ambas presas.

la intensidad  $\alpha$  y tres análisis con material no-lineal correspondientes a las intensidades  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , respectivamente. Intencionadamente se presentan dos análisis con intensidad  $\alpha$  tanto para material lineal como no-lineal como elemento de comparación que permita establecer la influencia de la no-linealidad en el sistema, cuya comparación se realiza en el siguiente apartado.

En los análisis en que no se ha producido el colapso dinámico (intensidad  $\alpha$  lineal y no-lineal) se pueden ver las tres fases del mismo. Primero una fase pseudo-estática en la que se aplica el peso propio y la presión hidrostática (produciendo en la presa de Koyna, por ejemplo, un DHC de 0.00878[m]), luego la segunda fase dinámica de aplicación de la señal sísmica que dura hasta los 12[s] y finalmente la tercera fase de incremento de la densidad relativa del agua hasta que –para el caso no-lineal– se produce el colapso.

Por su parte, en los análisis en que se produce el colapso dinámico es en los que más se observa el cambio del comportamiento estructural que sufre la estructura por la acción de la no-linealidad. Obsérvense por ejemplo los resultados obtenidos en la presa de Mequinenza para la señal 0.4[s]. En este caso, el periodo de vibración es similar en todos los análisis realizados aproximadamente hasta los 2.3[s] que es cuando los efectos no-lineales comienzan a manifestarse. A partir de ese instante, el comportamiento estructural del análisis correspondiente a la intensidad 0.250g es completamente diferente. Nótese la variación del periodo de vibración que sufre la estructura (estimado como diferencia entre tiempos de cresta a cresta de la onda), llegando incluso a triplicarse, a medida que la pérdida de rigidez por degradación aumenta. Sin embargo, antes de los 7[s] no se puede decir que la Presa está aún en colapso pues todavía es capaz de oscilar retornando, en contra de la presión hidrostática del agua, a la posición de reposo. Este proceso se repite hasta los 7.5[s] que es cuando se producen desplazamientos horizontales monótonamente crecientes, situación a la que denominamos colapso dinámico.

Para poder apreciar con mayor claridad el cambio del periodo de vibración de cada una de las estructuras, en las figuras 7.5.2.2.3 y 7.5.2.2.4 se presenta una ampliación de las historias de los DHC obtenidas en los diferentes análisis en correspondencia con las figuras 7.5.2.2.1 y 7.5.2.2.2. Compárese los periodos correspondientes a los análisis realizados en la presa

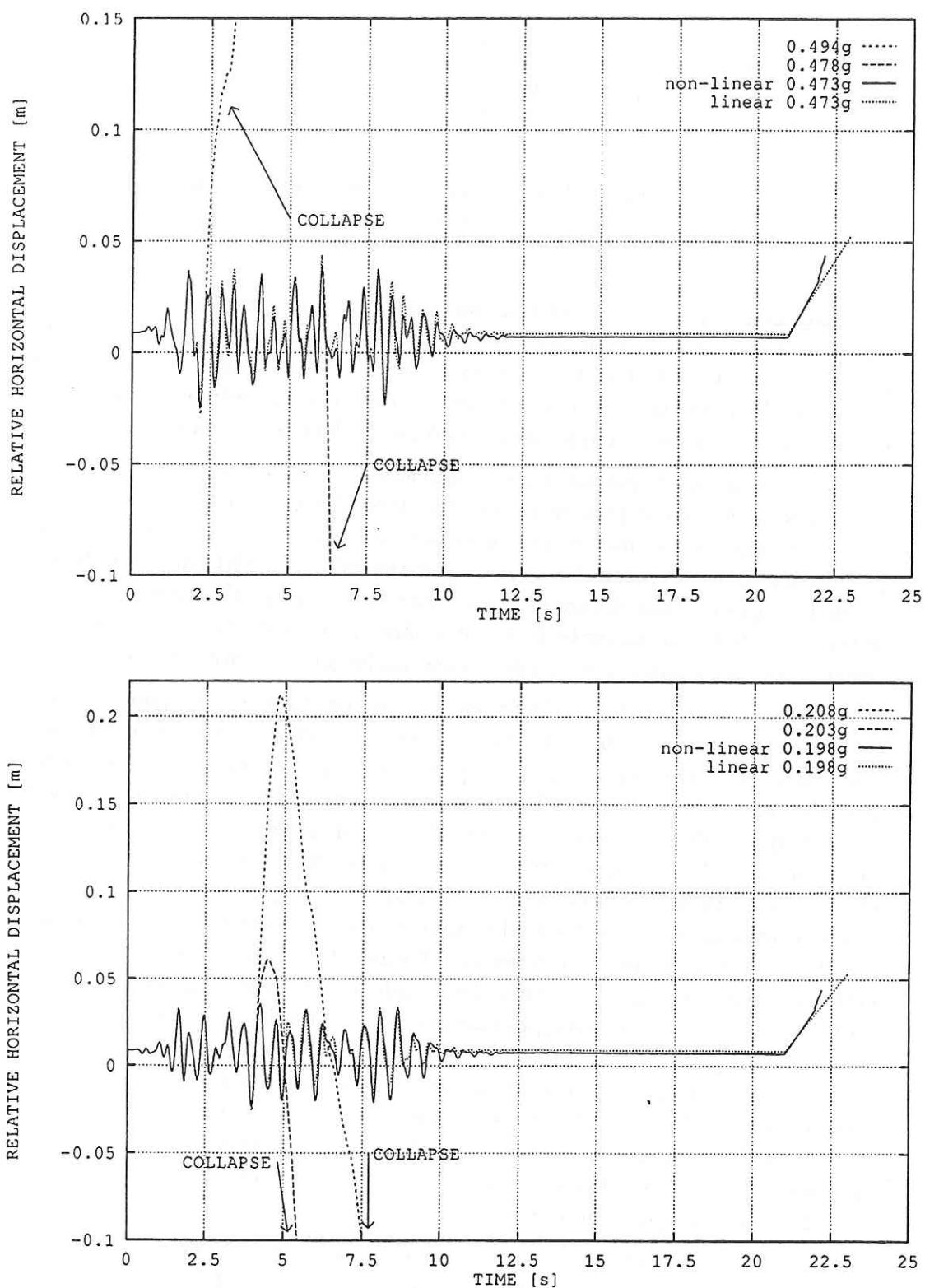


Figura 7.5.2.2.1 Presa de Koyna

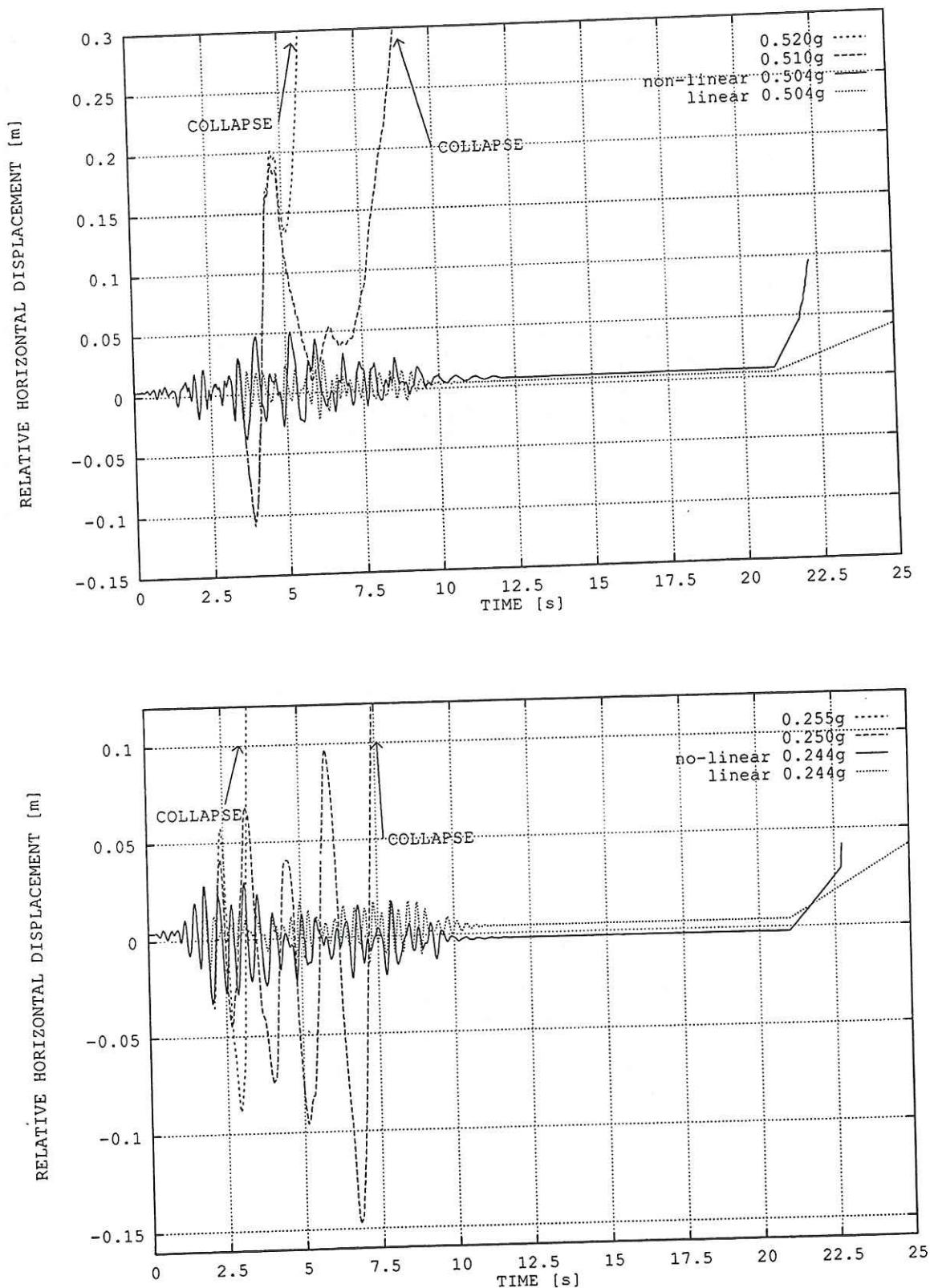


Figura 7.5.2.2.2 Presa de Mequinenza

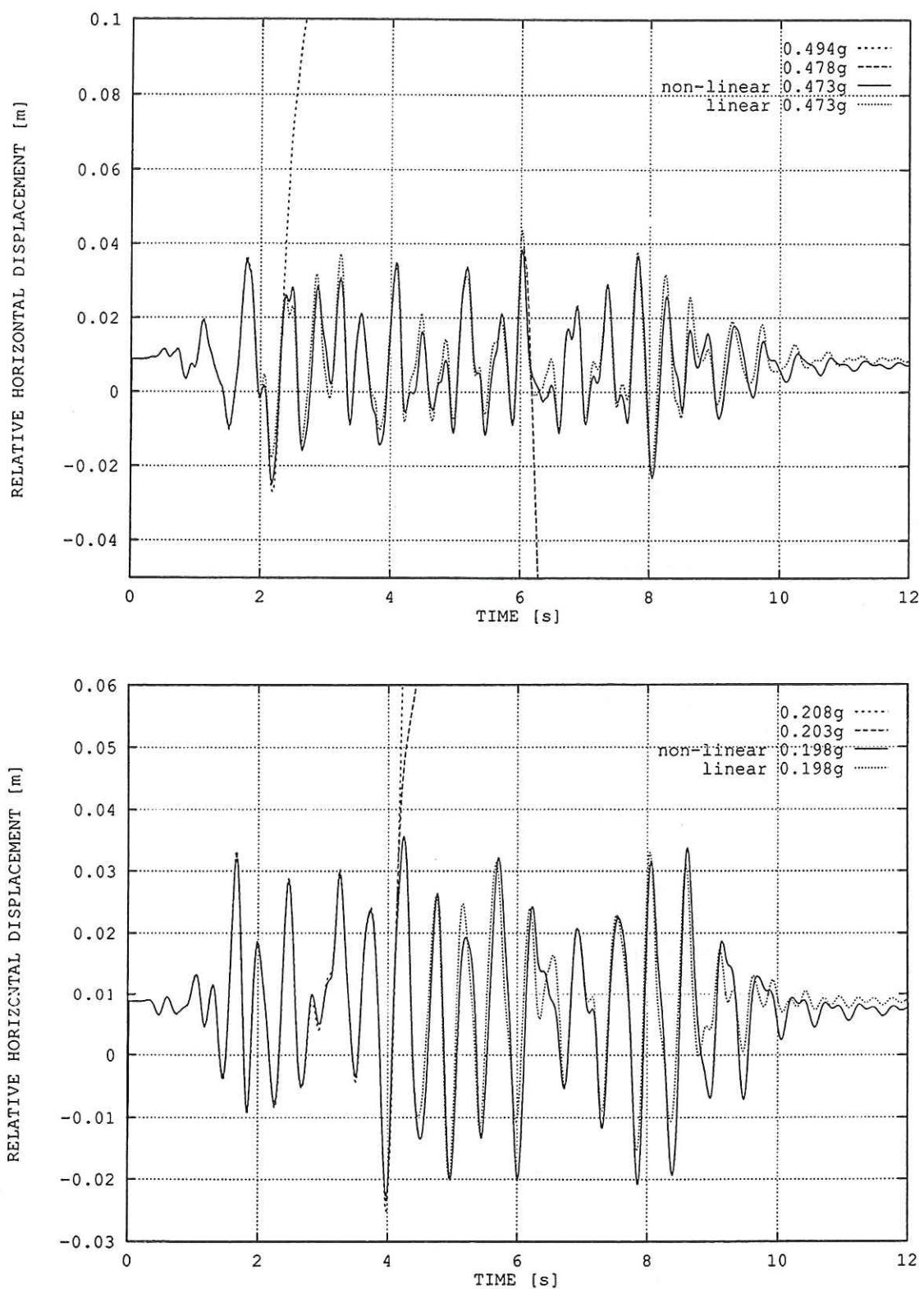


Figura 7.5.2.2.3 Presa de Koyna

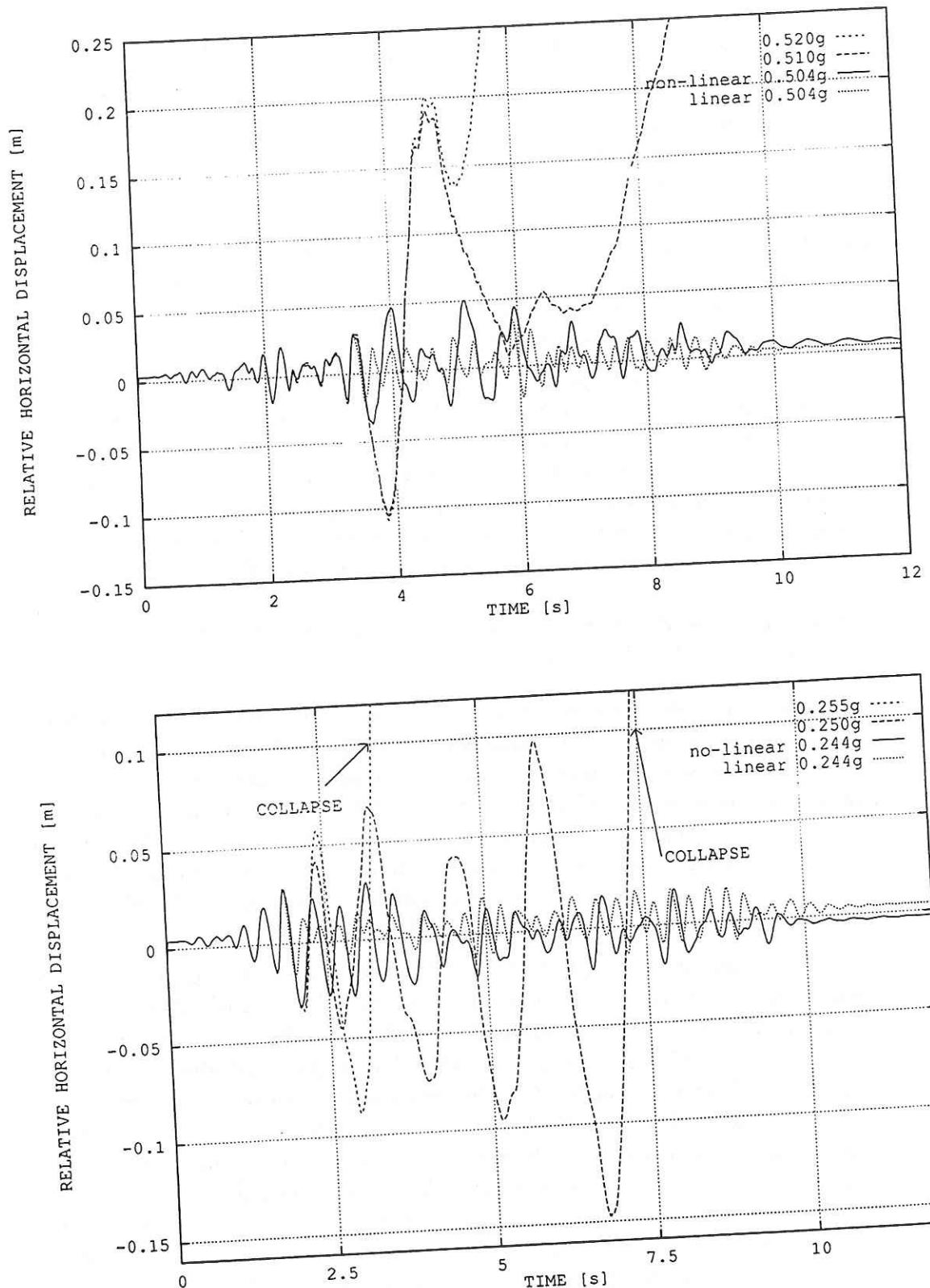


Figura 7.5.2.2.4 Presa de Mequinenza

de Mequinenza con intensidades de  $0.250g$  y  $0.244g$  entre los  $6[s]$  y los  $7[s]$ , donde se observa que el periodo de vibración efectivamente se ha triplicado.

El que el cambio registrado sea notablemente mayor para la presa de Mequinenza que para la presa de Koyna se corresponde, de alguna manera, con las observaciones hechas en el apartado 5.1.2 donde cualitativamente se podía esperar que dicho cambio se produzca en el modo principal de vibración para la presa de Mequinenza y en el segundo modo para la presa de Koyna. Si se observa con detalle la figura 7.5.2.2.3 correspondiente al caso de la presa de Koyna, se puede ver que efectivamente el cambio se produce no en el primer modo sino en el segundo.

Finalmente, en las figuras 7.5.2.2.5 y 7.5.2.2.6 se presenta el desplazamiento relativo vertical en coronación DVC de los análisis realizados en ambas presas en correspondencia con las figuras anteriores. Es notable observar que estos valores en general son muy pequeños (del orden de  $1[cm]$ ) a excepción de los análisis no-lineales en los que se produce el colapso dinámico expresado esta vez con la caída libre de la coronación de la presa. Es aquí donde el colapso es evidente y puede ser detectado sin duda alguna.

### *5.2.3. Influencia de la no-linealidad del material en el comportamiento estructural de la presa*

Para poder observar el efecto que tiene la no-linealidad (fisuración) del hormigón, se deben comparar los resultados obtenidos en un análisis que presente severos daños con otro que tenga exactamente las mismas condiciones pero con la única diferencia de utilizar una ecuación constitutiva lineal. Con el propósito de tener resultados con daño significativo, se han utilizado aquellos correspondientes a la intensidad  $\alpha$ . Consecuentemente se realizaron análisis para dicha intensidad tanto con material no-lineal (modelo de daño) como con material elástico lineal.

En las figuras 7.5.2.3.1 y 7.5.2.3.2 se comparan los desplazamientos horizontales relativos en coronación DHC para los análisis lineales y no-lineales de ambas presas y para las dos señales consideradas ( $0.4[s]$  y  $0.2[s]$ ). Se observa que todas las curvas coinciden hasta que se produce el inicio de la fisuración (daño). A partir de dicho instante los resultados empiezan a ser paulatinamente diferentes. En forma similar a lo presentado en el apartado anterior se encuentra que la diferencia del periodo de vibración está más marcada en el análisis correspondiente a la presa de Mequinenza cuando ésta es excitada por la señal  $0.2[s]$ . Este hecho se debe a que en el caso de la presa de Mequinenza excitada con la señal  $0.2[s]$  es cuando la frecuencia dominante de la señal está más próxima a la frecuencia principal de la presa, por lo que, se produce el máximo deterioro con la consiguiente modificación del principal modo de vibración. Consecuentemente éste es el caso en el que se observa la mayor diferencia entre un análisis lineal y uno no-lineal.

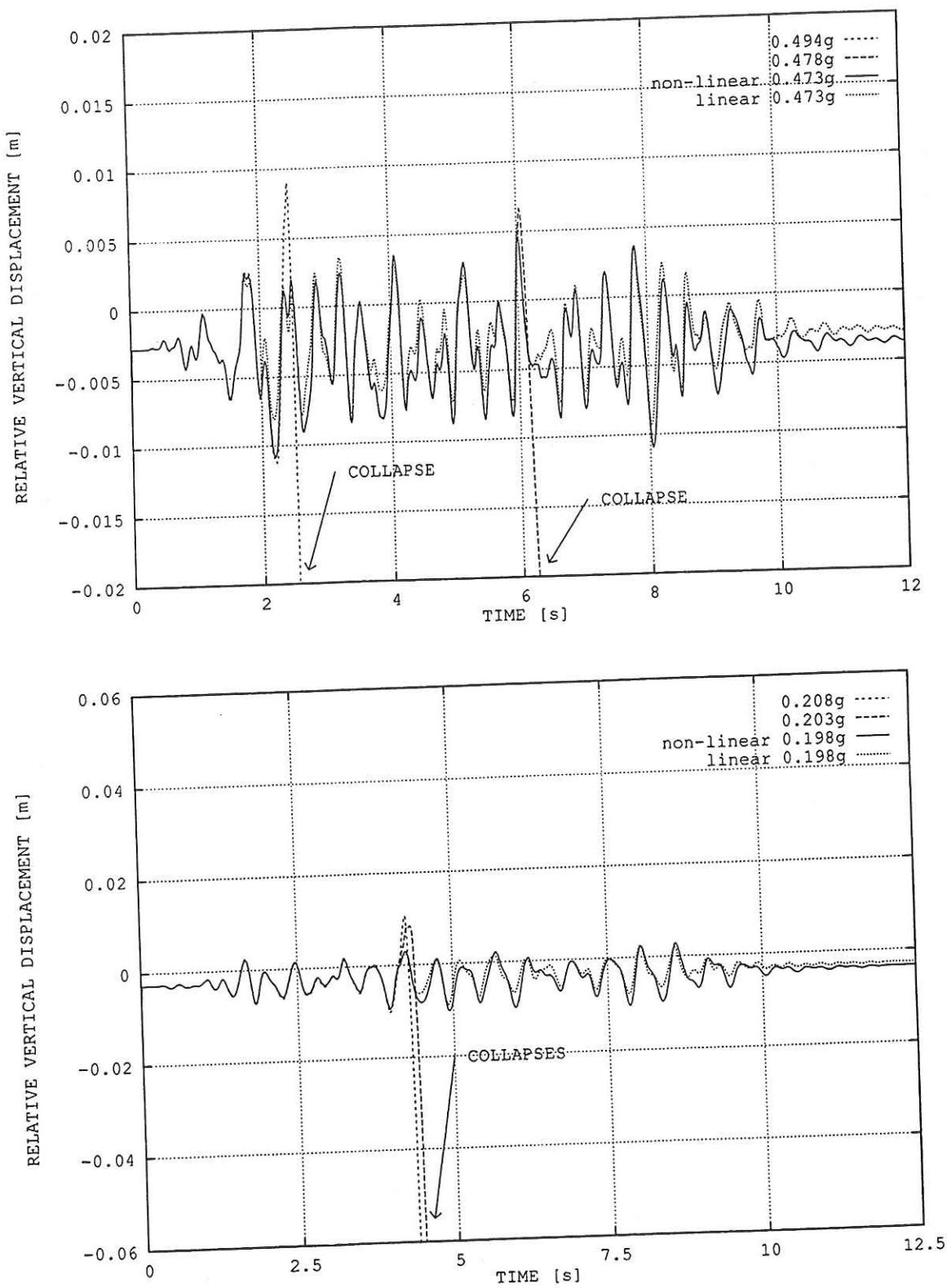


Figura 7.5.2.2.5 Presa de Koyna

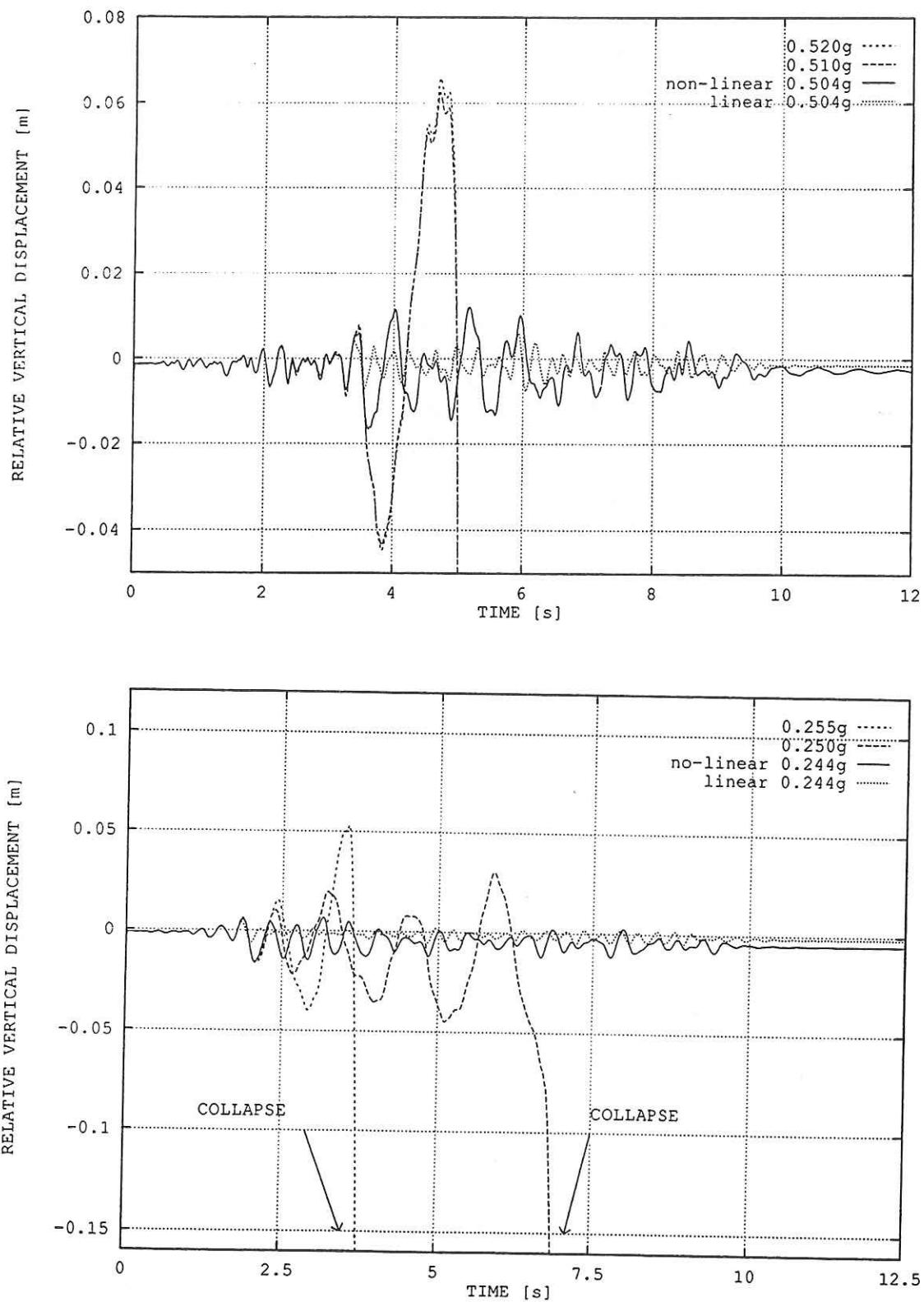


Figura 7.5.2.2.6 Presa de Mequinenza

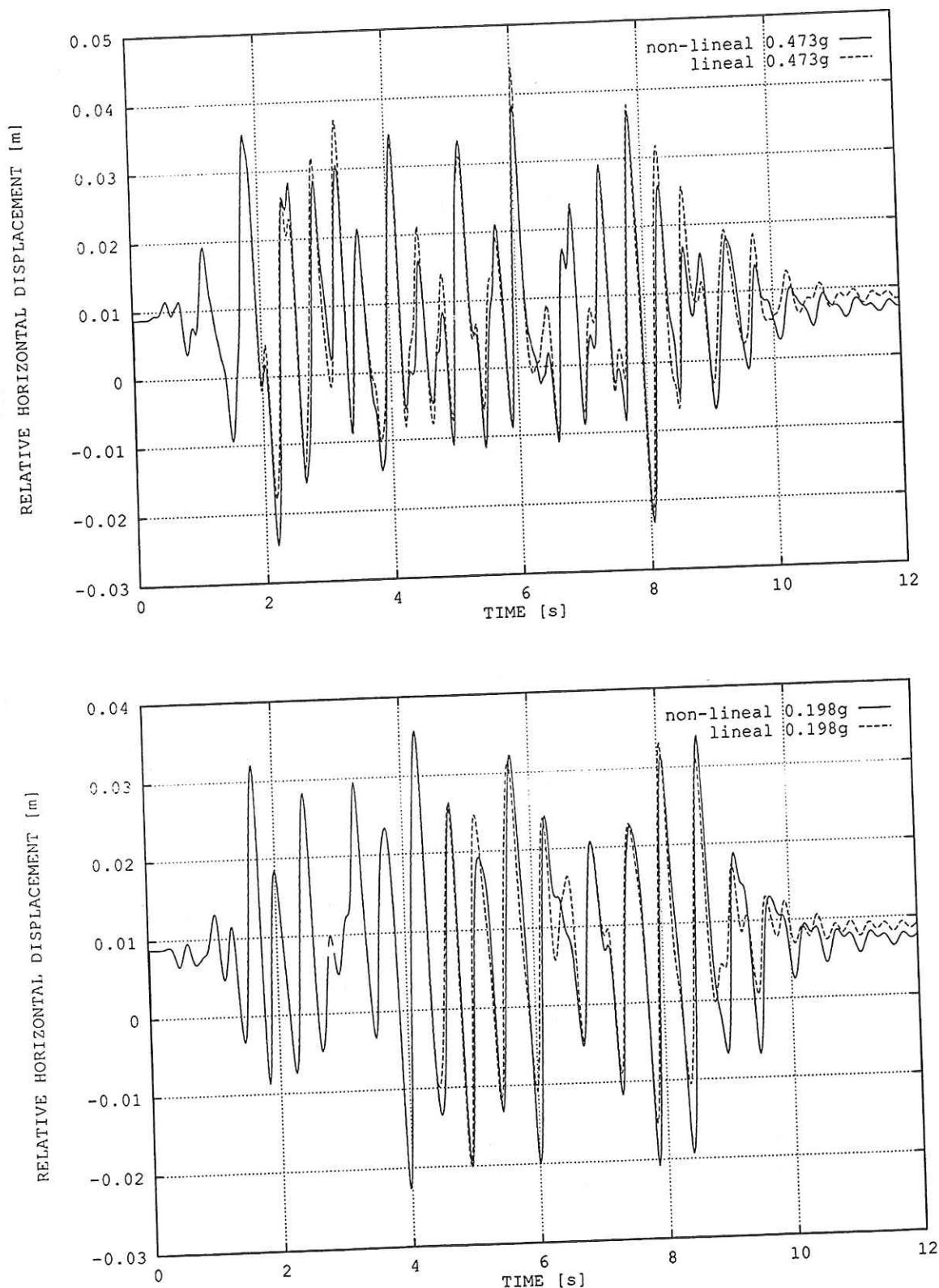


Figura 7.5.2.3.1 Presa de Koyna

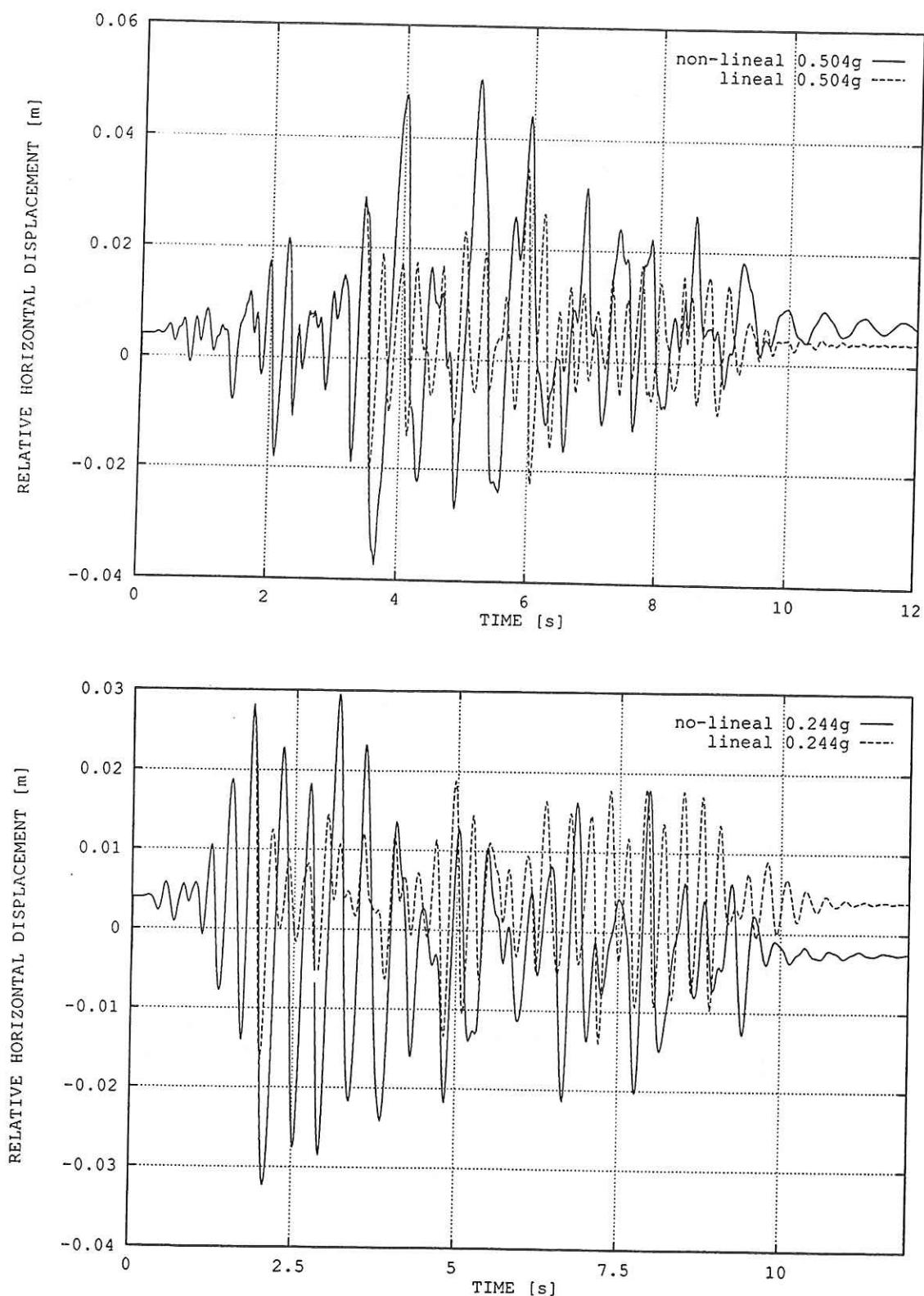


Figura 7.5.2.3.2 Presa de Mequinenza

Es importante indicar que la diferencia encontrada entre los análisis lineales y no-lineales parece ser determinante. Si bien las curvas son idénticas en un principio (antes de iniciarse la fisuración), en cuanto los efectos no-lineales comienzan a manifestarse el comportamiento estructural pronosticado por los análisis lineales es completamente diferente a aquél que es teóricamente más real dado por los análisis no-lineales. Esto muestra que el comportamiento estructural de una presa de gravedad puede verse seriamente afectado por la no-linealidad del material, dependiendo del nivel del daño que se alcance, de las frecuencias dominantes del sismo y de la presa y del modo en que se localice el daño en la estructura. Consecuentemente y para el peor caso (que es justamente el que deberemos tener en cuenta), no parece existir ninguna hipótesis simplificativa que permita hacer un análisis lineal como una aproximación a un análisis no-lineal acoplado.

## 6. CONSIDERACIONES FINALES

En este capítulo se ha utilizado la variable de deterioro  $D_2$  definida en el capítulo VI que mide el nivel de daño global que sufre una estructura por causa de las acciones externas. Los análisis aquí realizados permiten poner de manifiesto que el deterioro (y por tanto el riesgo de la estructura) no es proporcional a la intensidad de la excitación sísmica<sup>†</sup>. Este hecho plantea una serie de interrogantes respecto a la relación entre la probabilidad de colapso de una estructura y la intensidad de la excitación sísmica a la que es sometida (dada en base a una cierta probabilidad de ocurrencia y de un periodo de retorno). Así, terremotos con intensidades sísmicas menores, y por tanto con alta probabilidad de ocurrencia, pueden ser potencialmente más peligrosos para el conjunto estructural que un terremoto que tenga intensidad sísmica mayor, del que se espera que su periodo de retorno sea menor, dependiendo, claro esta, de la frecuencia dominante de la señal, de la frecuencia propia de la estructura en dicho instante (embalse lleno o vacío) y del modo en que se localice el daño sobre la estructura. Nuevamente, la razón para esto se encuentra en la dependencia de la respuesta no-lineal de una estructura con la "historia" en el tiempo de la excitación.

Otro punto importante mostrado es que deterioro no siempre significa inseguridad ya que es posible que una estructura, a medida que se va deteriorando, cambie significativamente sus características dinámicas mucho antes de colapsar. Este cambio puede afectar, por ejemplo, el modo y la frecuencia propia de oscilación de la presa, lo que a su vez puede ser beneficioso, en algunos casos, si así la frecuencia fundamental de la estructura

<sup>†</sup> En la referencia [Ga] se presentan ejemplos en los que incluso se llegan a obtener deterioros mayores con intensidades menores.

se aparta de la frecuencia dominante de la excitación. De esta forma, una estructura puede acomodarse, de alguna forma, al terremoto que la excita permitiéndole resistir mejor las acciones en el momento en que se produzcan las cotas máximas de la señal.

Para despejar todas estas dudas en un caso en particular es, por tanto, imprescindible hacer varios análisis para distintas señales, con diferentes intensidades y a diferentes alturas de llenado del embalse, para tener una visión completa del comportamiento estructural de la presa ante acciones sísmicas. Además, cada análisis debe hacerse utilizando las herramientas de cálculo precisas para obtener una respuesta fiable y segura.

## CAPÍTULO VIII

# APLICACIÓN AL ANÁLISIS DE SEGURIDAD EN PRESAS BÓVEDA

### 1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta el análisis tridimensional de una presa bóveda teniendo en cuenta los efectos de la no-linealidad del hormigón debida a la fisuración y considerando la interacción tanto con el fluido como con el terreno. Éste es un caso especial debido al alto coste computacional que involucra, ya que es imposible el evitar considerar una geometría tridimensional, por lo que se pone a prueba la eficiencia del modelo propuesto. A su vez, el cambio en la tipología estructural invalida, en principio, cualquier conclusión previa procedente de los análisis bidimensionales realizados en presas de gravedad.

Como ejemplo práctico, en el que se utilizan la gran mayoría de los modelos descritos en los capítulos previos, se ha elegido la geometría y propiedades de los materiales de la presa de Talvacchia situada en Italia. Esta presa constituye un buen ejemplo ya que ha sido utilizada como “benchmark” por diversos investigadores<sup>[ISM][CBBO]</sup>.

### 2. DATOS GEOMÉTRICOS

La presa de Talvacchia mide 72[m] de altura en la zona central, el ancho en coronación es de 4.6[m], el ancho en cimientos es de 15[m] y tiene una longitud de 220[m]. Su geometría es simétrica siendo generada por tres centros de rotación. Se ha discretizado la presa, el terreno y el fluido en dos dominios tridimensionales separados. En uno de ellos se han discretizado la Presa y el terreno conjuntamente mientras que en el otro se ha discretizado el fluido. En la figura 8.2.1 se presenta una perspectiva de ambas mallas conjuntas. La malla que representa a la Presa y al terreno tiene 3052 nudos con tres grados de libertad cada uno (dando un total de 9156 grados de libertad) y está formada por 2256 elementos finitos hexahédricos de ocho nodos repartidos en la siguiente forma: 2088 elementos forman el terreno y 168 elementos forman la Presa. A su vez, la malla utilizada para discretizar

el fluido del embalse está constituida por 980 nudos (de un grado de libertad) y un total de 760 elementos finitos hexahédricos de ocho nodos.

A continuación se da una descripción detallada de las propiedades de los materiales utilizados en la presa de Talvacchia, el terreno y el fluido, respectivamente:

- La presa de Talvacchia está constituida por un hormigón cuyo módulo de elasticidad vale  $E = 31.64[GPa]$ , módulo de Poisson  $\nu = 0.2$  y una densidad  $\rho = 2690[Kg/m^3]$ . Para el modelo de daño continuo, en los análisis con material no-lineal (ver referencia [Ga]), se ha utilizado una resistencia máxima a tracción  $f'_t$  de  $2.0[MPa]$ , una resistencia máxima a compresión  $f'_c$  de  $20.0[MPa]$  y una energía de fractura  $G_f$  de  $150.0[J/m^2]$ .
- El terreno está constituido por un material elástico lineal con módulo de elasticidad  $E = 18[GPa]$  y coeficiente de Poisson  $\nu = 0.2$ . La densidad se ha estimado en  $\rho = 1830[Kg/m^3]$ . Del terreno se han discretizado aproximadamente  $85[m]$  en todas direcciones: hacia aguas abajo, a izquierda, a derecha y en profundidad (debajo de la presa), a excepción de aguas arriba donde se han discretizado  $158[m]$ . En el contorno inferior se han colocado 264 elementos transparentes bidimensionales de cuatro nodos (ver Capítulo IV) y se han ligado los 217 y 169 nudos de los contornos laterales respectivamente, para simular la condición de repetitividad en toda dirección en el domino (ver Capítulo IV apartado 3.6).
- Para el agua se ha utilizado una densidad  $\rho$  de  $1019[Kg/m^3]$  y un módulo de deformación volumétrica  $K$  de  $2.11[GPa]$  dando una velocidad de transmisión del sonido en el medio  $c = \sqrt{K/\rho}$  de  $1439[m/s]$ . Del agua se ha discretizado una longitud de  $296[m]$  y en su extremo final se han colocado 36 elementos transparentes bidimensionales de cuatro nodos para simular un dominio semi-infinito. La condición de superficie libre se ha establecido imponiendo una presión nula constante en la superficie superior.

En la tabla 8.2.1.1 se listan los 25 auto-valores principales con sus correspondientes frecuencias y periodos para el sistema presa-terreno correspondiente a la presa de Talvacchia sin considerar la interacción con el fluido. Se ha considerado interesante, además, indicar los diez auto-valores principales y sus correspondientes frecuencias y periodos para el caso en que se considera el terreno infinitamente rígido. En la tabla 8.2.1.2 se listan dichos valores en los que se puede observar como primer periodo de la Presa misma corresponde al decimo-sexto periodo del sistema presa-terreno.

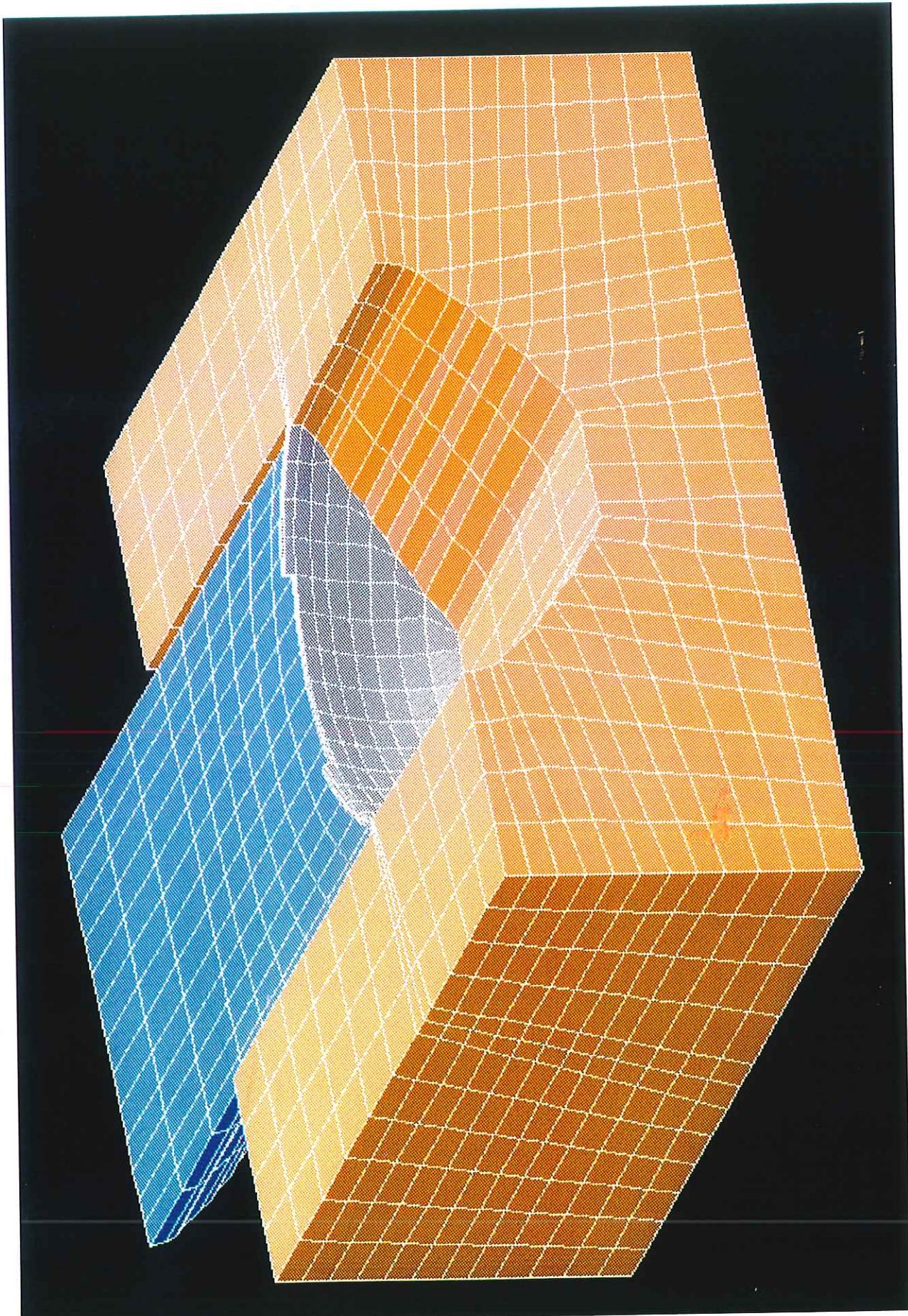


Figura 8.2.1 Discretización de presa de Talvacchia presa-terreno y fluido del embalse por separado.



#	Auto-valor	Frecuencia [rad/s]	Periodo [s]
1	218.1557	14.7701	0.4254
2	316.3334	17.7858	0.3533
3	476.9478	21.8391	0.2877
4	483.1810	21.9814	0.2858
5	568.2477	23.8379	0.2636
6	645.7099	25.4108	0.2473
7	761.1614	27.5892	0.2277
8	800.5640	28.2942	0.2221
9	884.1236	29.7342	0.2113
10	929.4549	30.4870	0.2061
11	931.0255	30.5127	0.2059
12	934.5271	30.5700	0.2055
13	981.9309	31.3358	0.2005
14	1000.7147	31.6341	0.1986
15	1043.3105	32.3003	0.1945
16	1214.0340	34.8430	0.1803
17	1284.2948	35.8371	0.1753
18	1463.8489	38.2603	0.1642
19	1510.0059	38.8588	0.1617
20	1512.1443	38.8863	0.1616
21	1530.5560	39.1223	0.1606
22	1629.3391	40.3651	0.1557
23	1651.7650	40.6419	0.1546
24	1711.4021	41.3691	0.1519
25	1914.9443	43.7601	0.1436

Tabla 8.2.1.1 Talvacchia: Principales valores propios del sistema presa-terreno.

### 3. EXCITACIÓN SÍSMICA Y DESCRIPCIÓN DEL ANÁLISIS TIPO

Como excitación sísmica se ha utilizado la señal 0.4[s] descrita en el apartado 3 del Capítulo 7. A su vez el análisis tipo corresponde al de tres fases descrito en el apartado 4 de dicho Capítulo. Sin embargo aquí se debe indicar que en la segunda fase del análisis, si bien la excitación sísmica también es una onda que avanza de abajo hacia arriba entrando por la base del modelo y estando constituida por un movimiento de corte horizontal, dicho movimiento es en la dirección del eje longitudinal del valle (aguas arriba — aguas abajo) exclusivamente.

#	Auto-valor	Frecuencia [rad/s]	Periodo [s]
1	1217.3466	34.8905	0.1801
2	1234.0850	35.1295	0.1789
3	2388.2257	48.8695	0.1286
4	4670.9402	68.3443	0.0919
5	5348.6150	73.1342	0.0859
6	8236.3085	90.7541	0.0692
7	8903.1157	94.3563	0.0666
8	12233.5091	110.6051	0.0568
9	13830.3322	117.6022	0.0534
10	15016.2593	122.5413	0.0513

Tabla 8.2.1.2 Talvacchia: Principales valores propios de la Presa con terreno infinitamente rígido.

## 4. RESULTADOS

Después de realizar diversos análisis para distintas intensidades con la sísmica señal  $0.4[s]$ , se encuentra que el valor correspondiente a la intensidad  $\alpha$  está entre  $0.312[g]$  y  $0.364[g]$ . Consecuentemente se ha decidido utilizar los valores dados en la tabla 8.4.1 como  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , respectivamente.

En la figura 8.4.1 se presenta el deterioro  $D_2$ , alcanzado al final del análisis sísmico, correspondiente a diversos análisis realizados para distintas intensidades de la señal  $0.4[s]$ , en la que se puede observar como la intensidad  $0.312[g]$  corresponde precisamente a la menor intensidad que produce colapso.

### 4.1. Resultados cualitativos

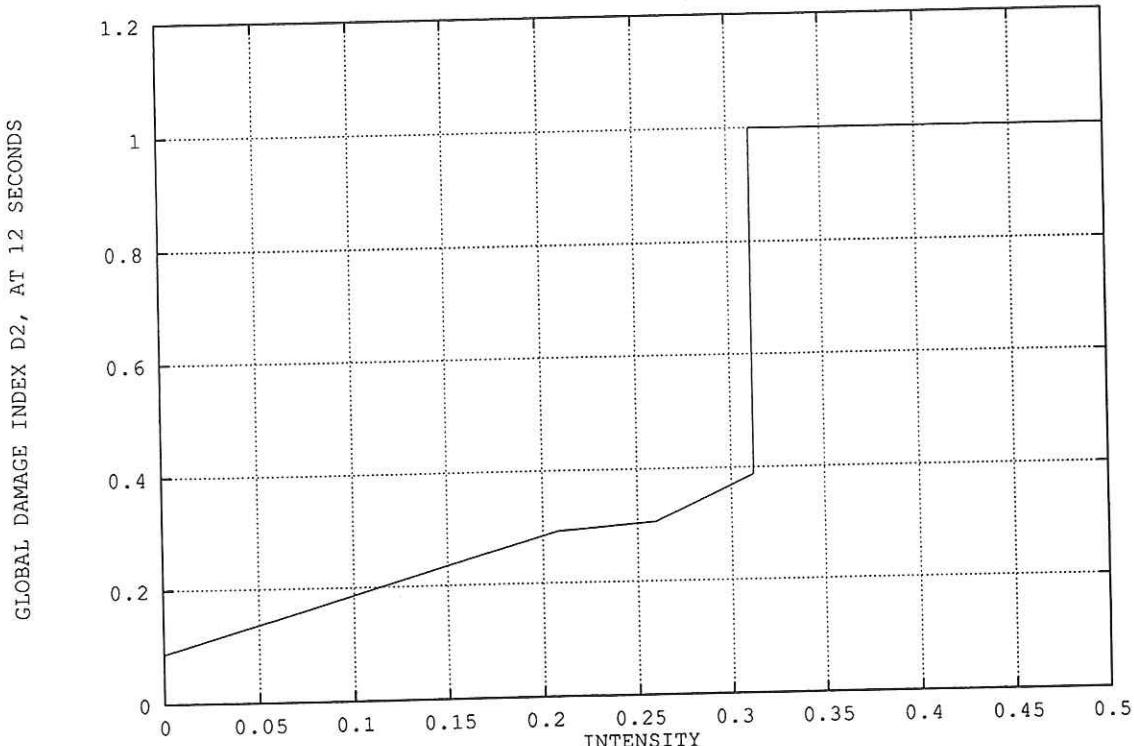
#### 4.1.1. Análisis cuasiestático RFD y dinámico a intensidad $\alpha$

En este apartado se presentan los resultados cualitativos obtenidos tanto para el análisis RFD, de incremento de la densidad relativa del fluido sin aplicación de ninguna señal sísmica, como para el del análisis dinámico a intensidad  $\alpha$ . Es interesante comparar ambos resultados ya que dichos análisis tienen un final similar con el colapso producido por el incremento de la densidad relativa del fluido. En las figuras 8.4.1.1.1 y 8.4.1.1.2 se presentan las isolíneas de daño y las deformadas ampliadas 200 veces de dos secciones (vertical en el eje de simetría y horizontal en coronación) para dichos análisis, respectivamente.

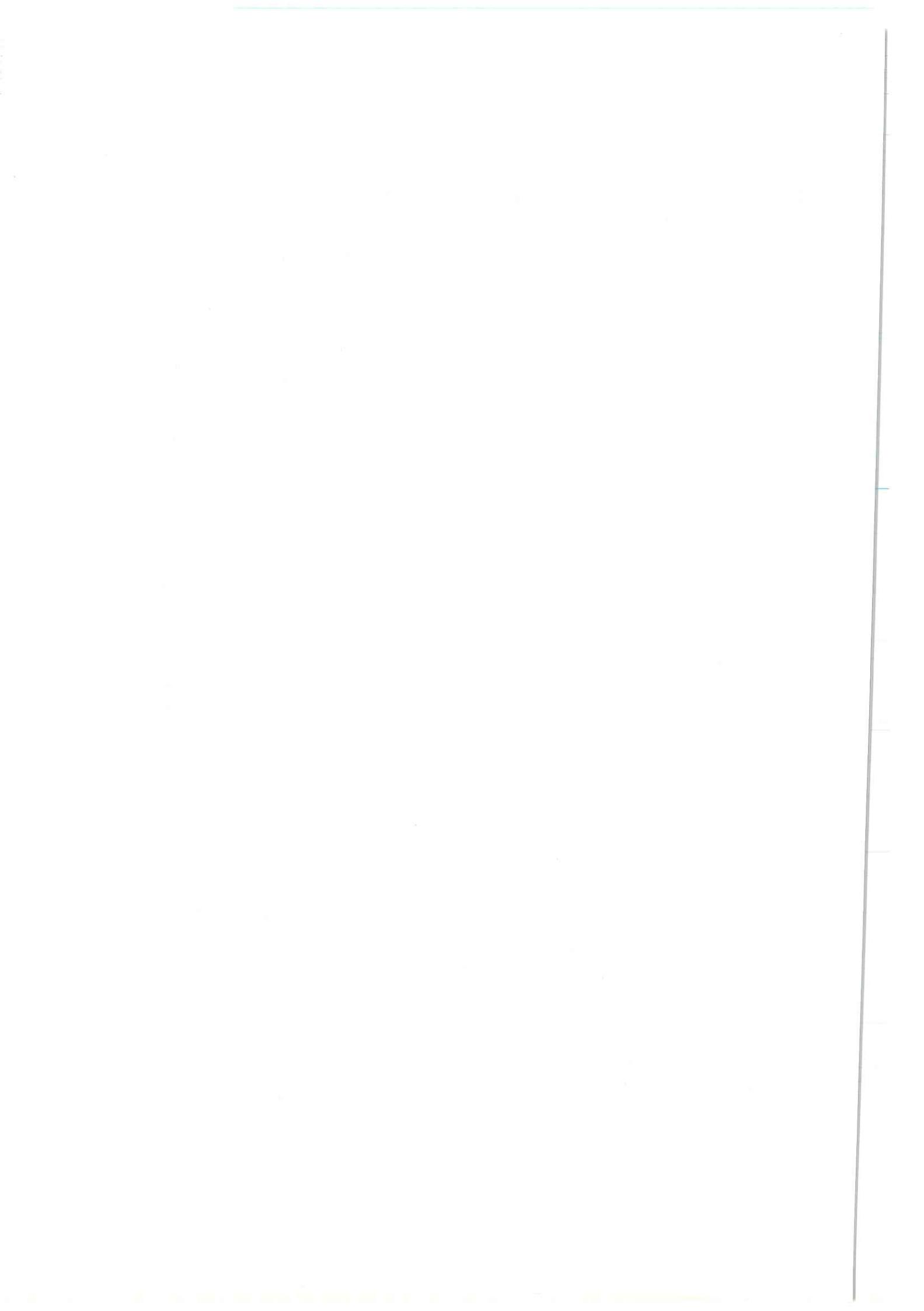
En dichas figuras, en los cortes por coronación se puede observar que, incluso en el momento del colapso por incremento de la presión hidrostática,

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
0.312[g]	0.364[g]	0.416[g]

Tabla 8.4.1 Intensidades correspondientes a la señal 0.4[s].

Figura 8.4.1 Deterioro  $D_2$  para distintas intensidades de la señal 0.4[s].

los nudos de los estribos se separan muy poco respecto a la posición inicial. Esto muestra que para un análisis de este tipo se pudo haber considerado una longitud mucho menor de terreno hacia los lados de la presa. Por su parte, el corte en la sección media permite ver que la cimentación deciente y rota una cantidad que justifica la necesidad de discretizar terreno por debajo de la presa. Evidentemente estas conclusiones son válidas sólo para el caso de un análisis estático, pues en el caso que nos ocupa –análisis sísmico–, y teniendo en cuenta la diferencia observada en las frecuencias principales de vibración (ver tablas 8.2.1.1 y 8.2.1.2) se puede concluir que sí es importante discretizar una extensión adecuada de terreno alrededor de la presa.



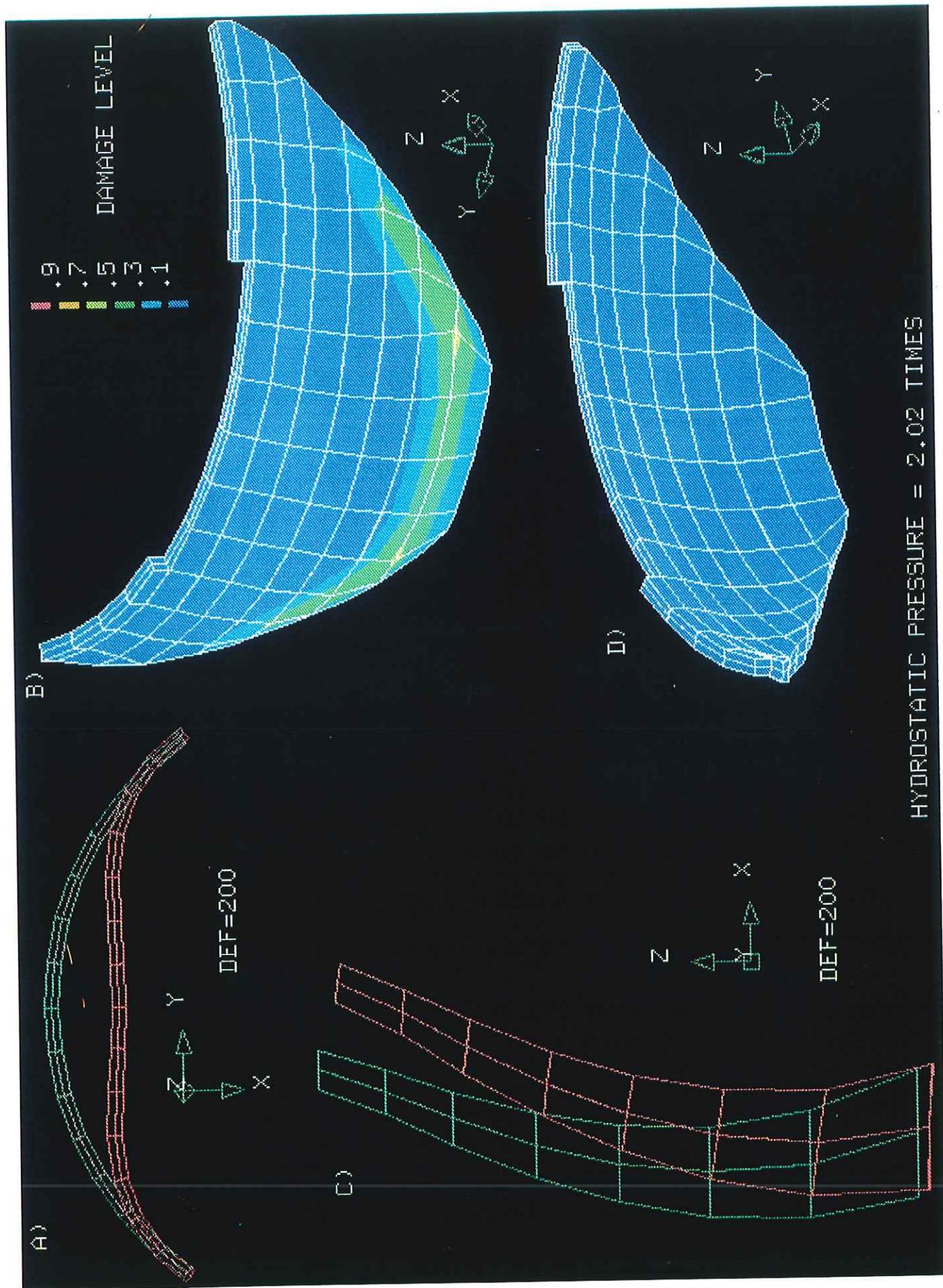
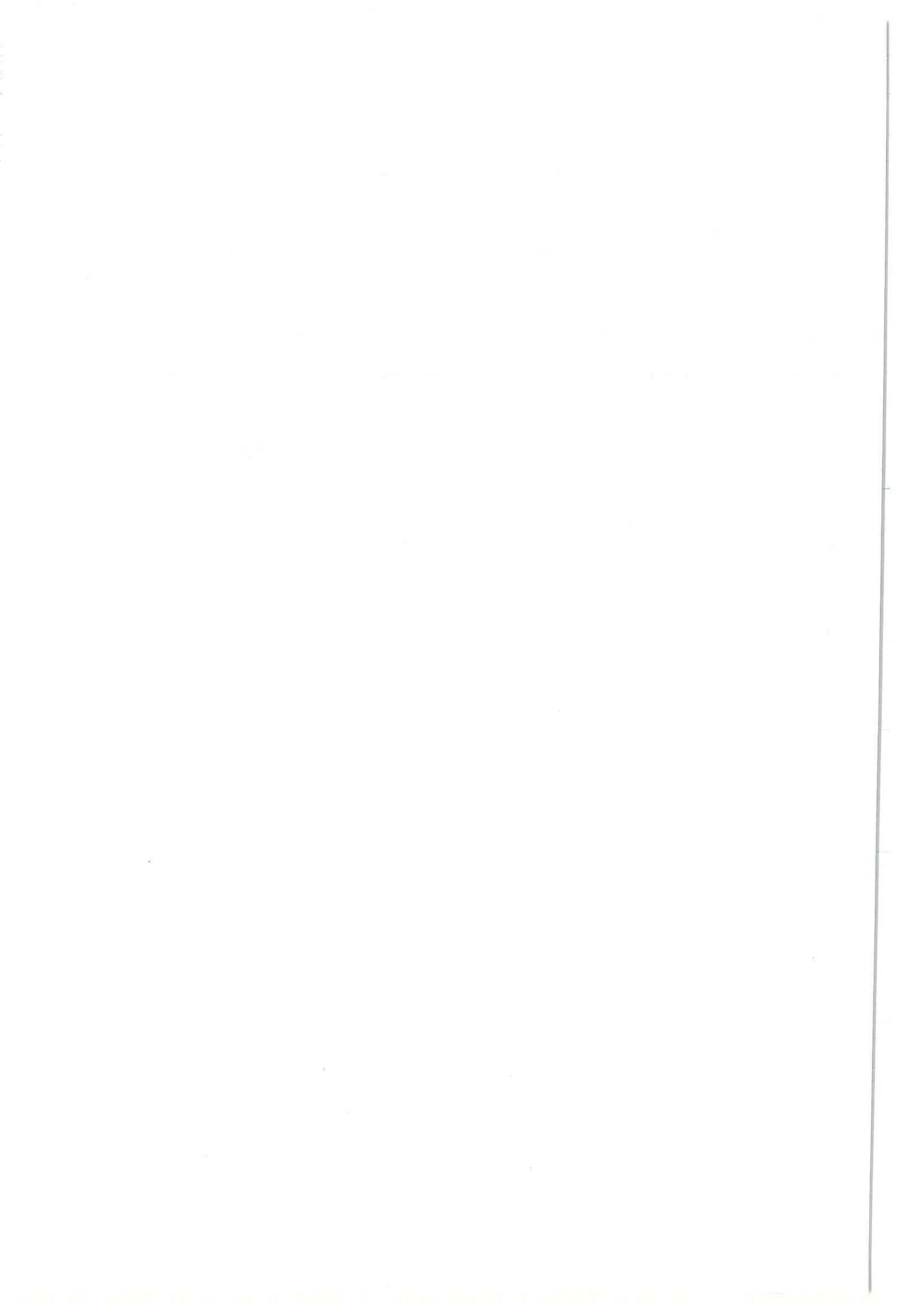


Figura 8.4.1.1.1 Presa de Talvacchia. Análisis RFD.



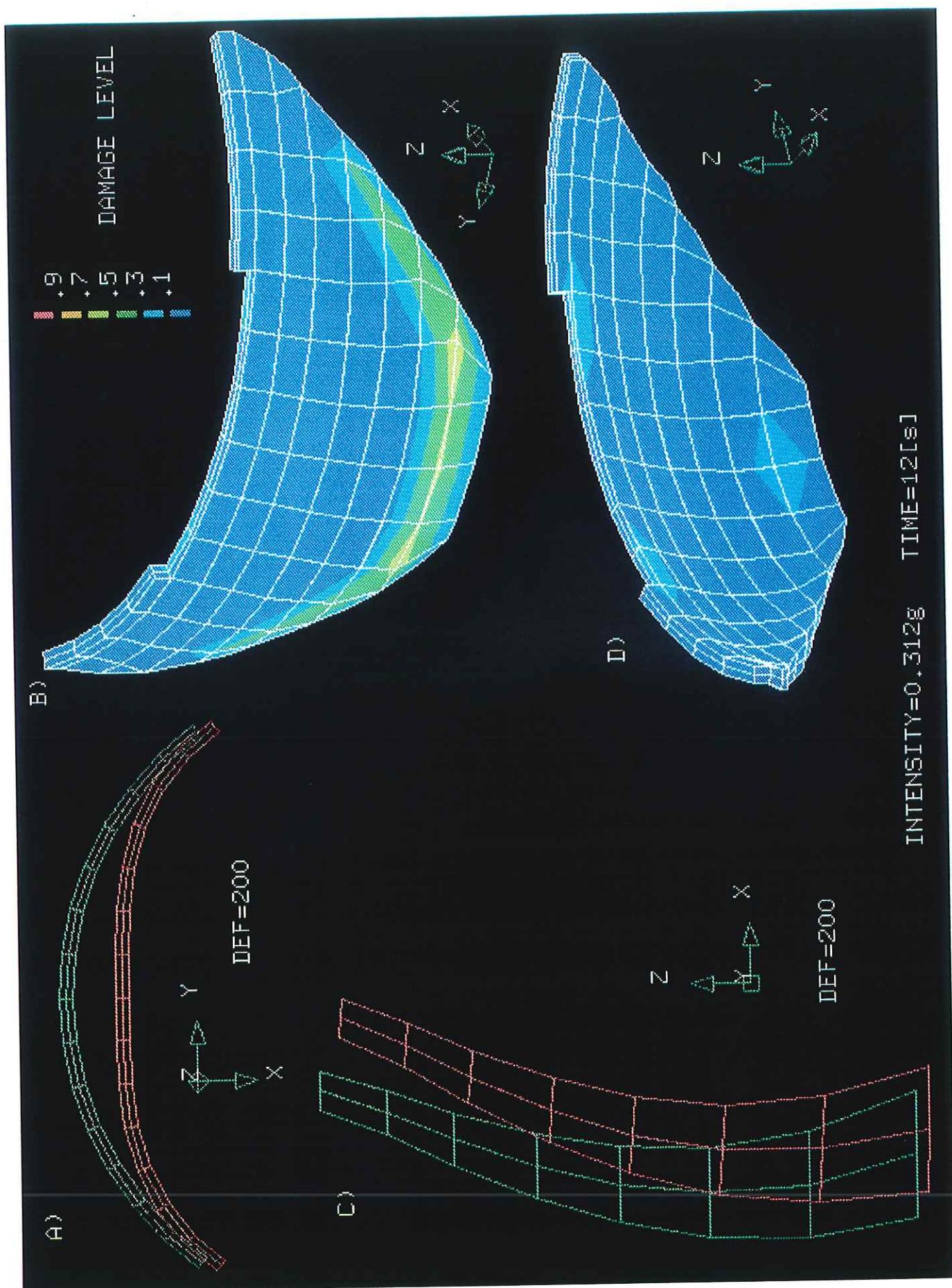
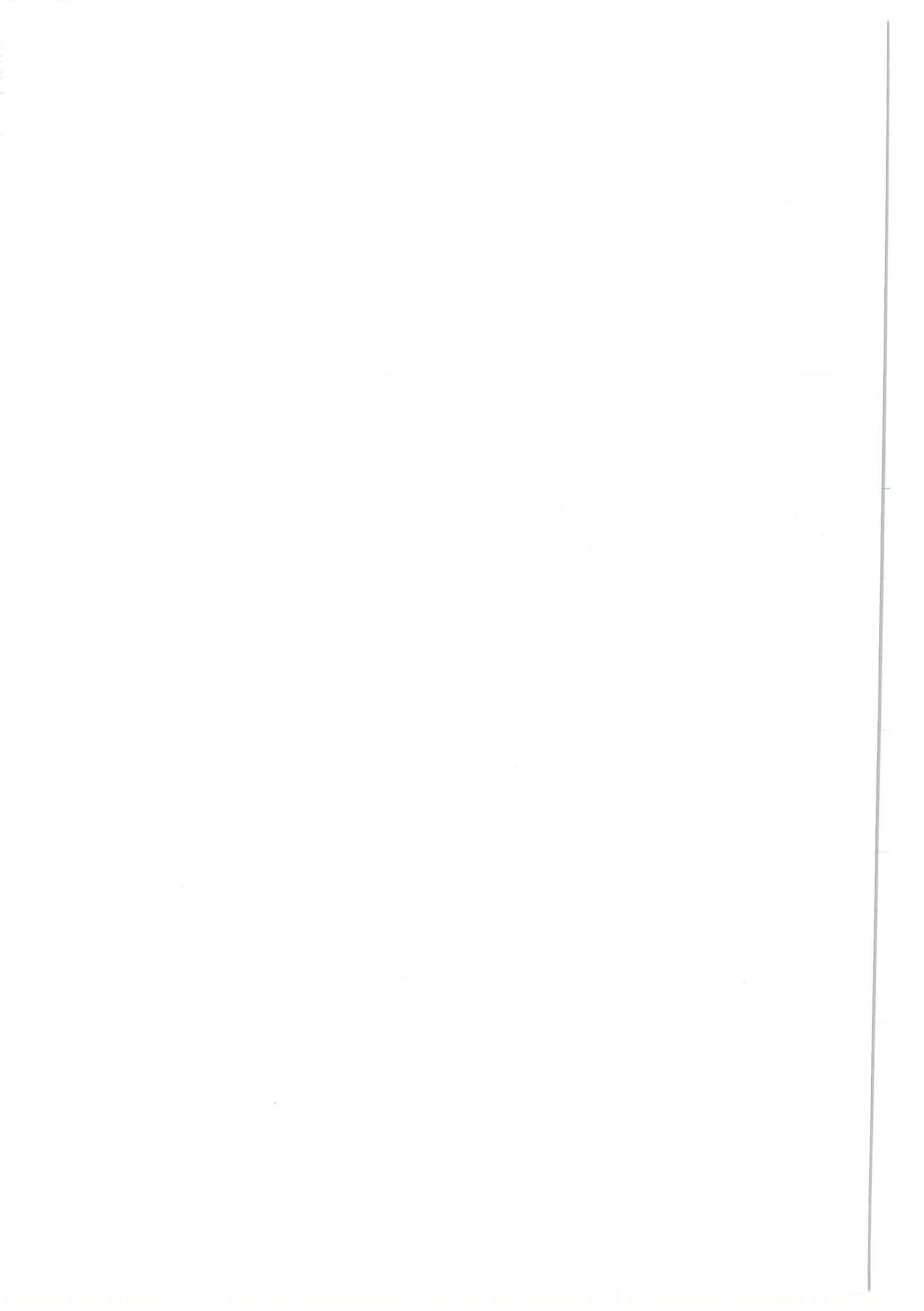


Figura 8.4.1.1.2 Presa de Talvacchia. Análisis dinámico a intensidad  $\alpha$ .



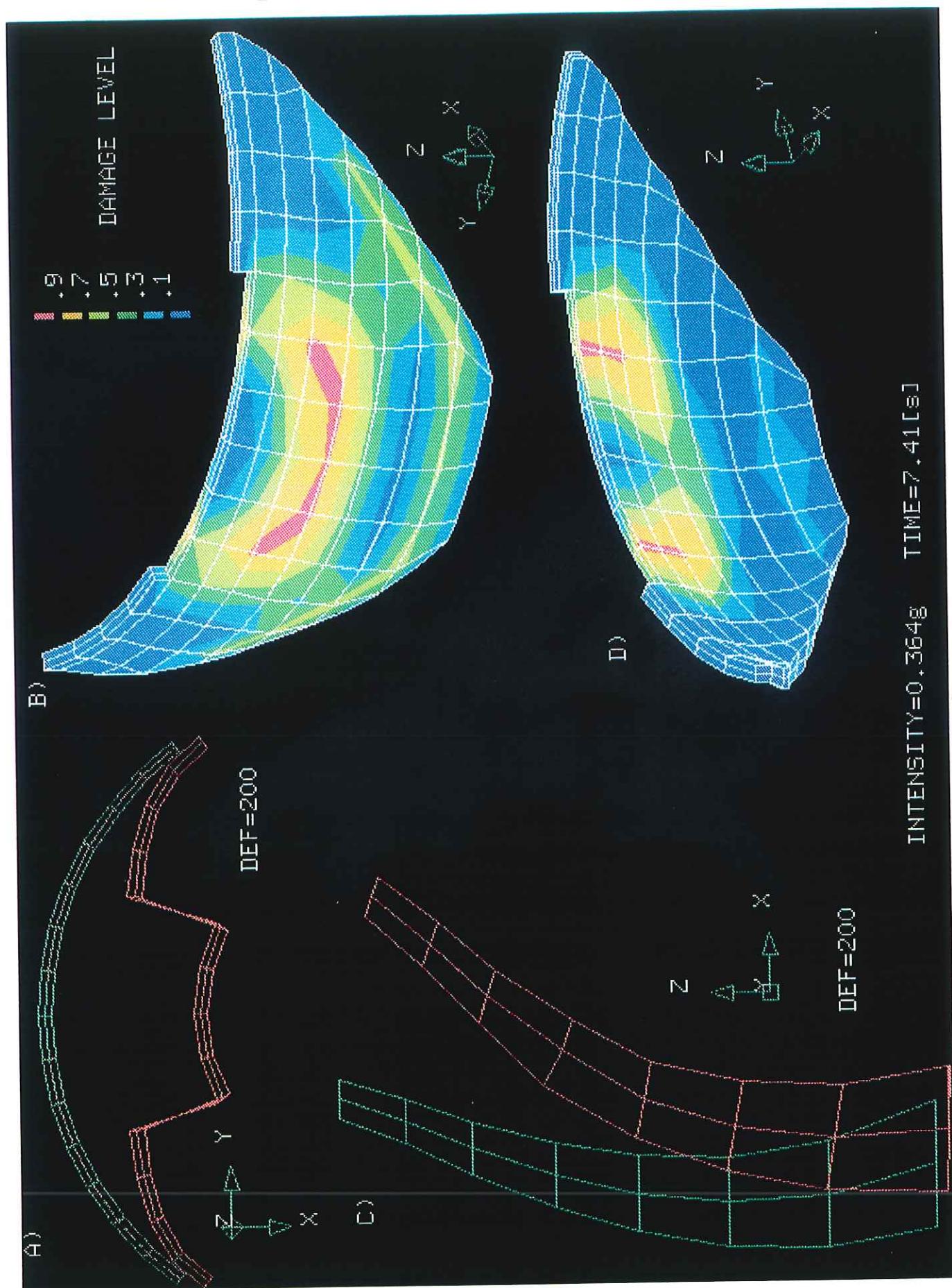


Figura 8.4.1.2.1 Presa de Talvacchia. Análisis dinámico a intensidad  $\beta$ .



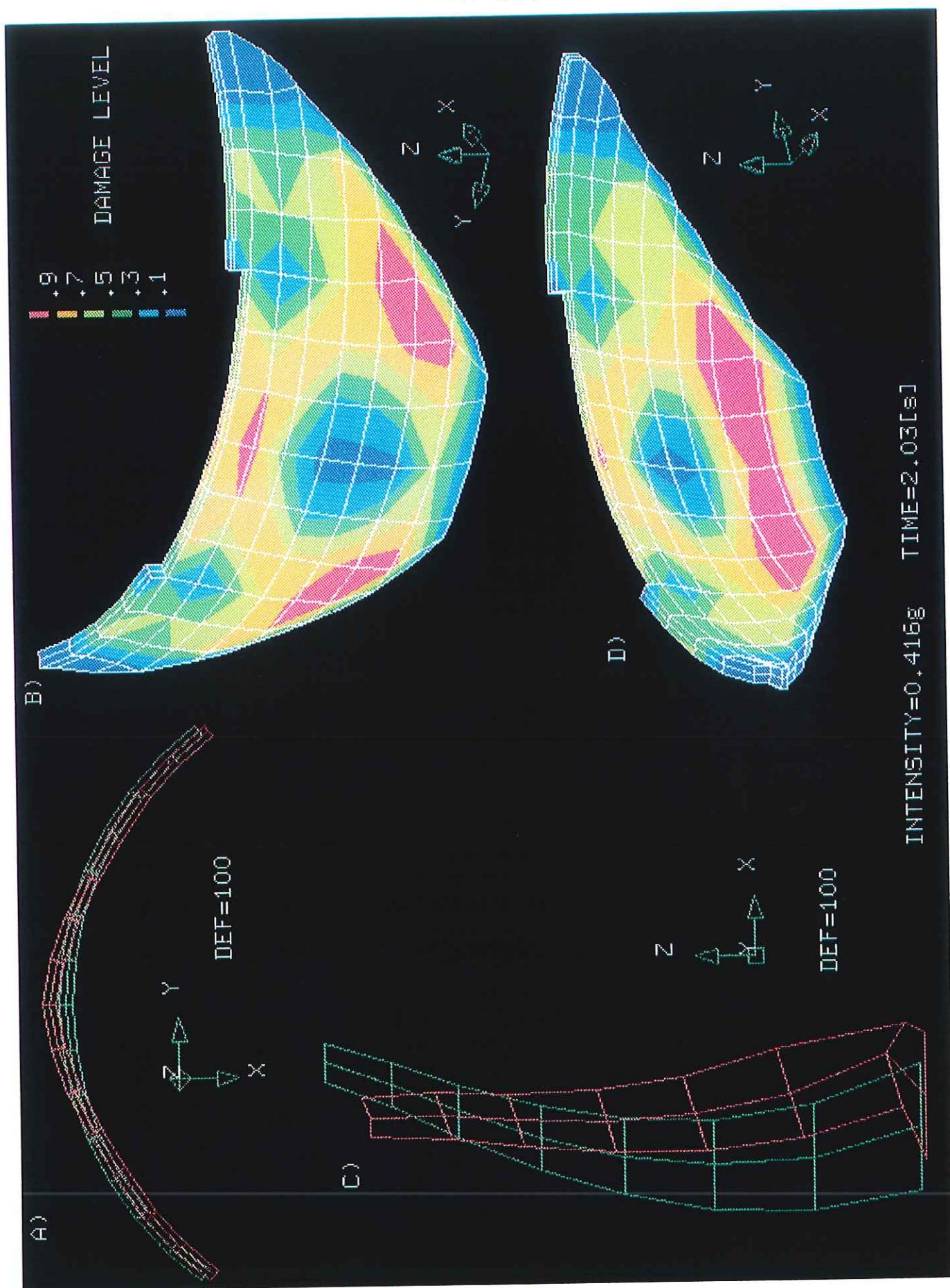


Figura 8.4.1.2.2 Presa de Talvacchia. Análisis dinámico a intensidad  $\gamma$ .



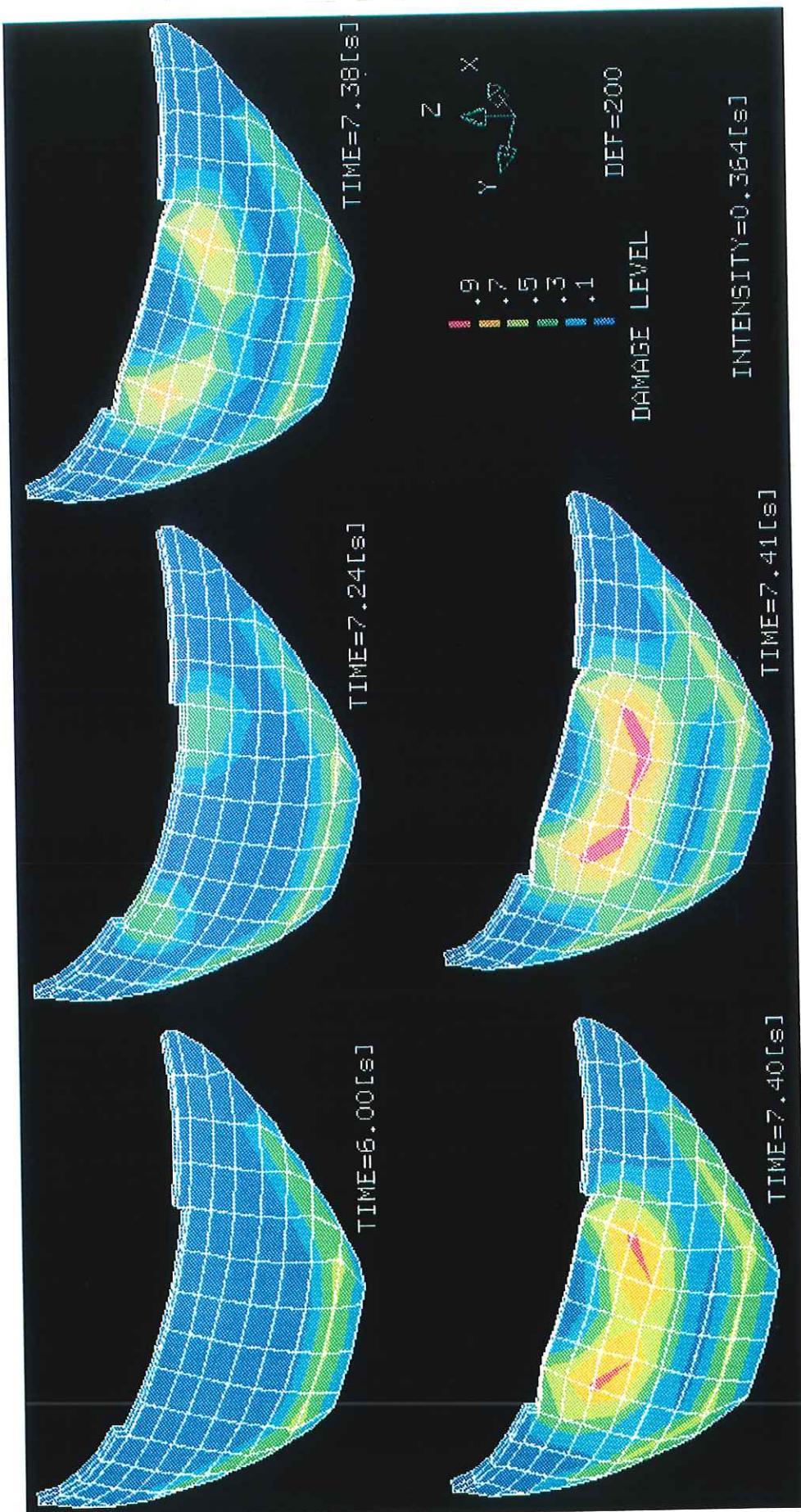
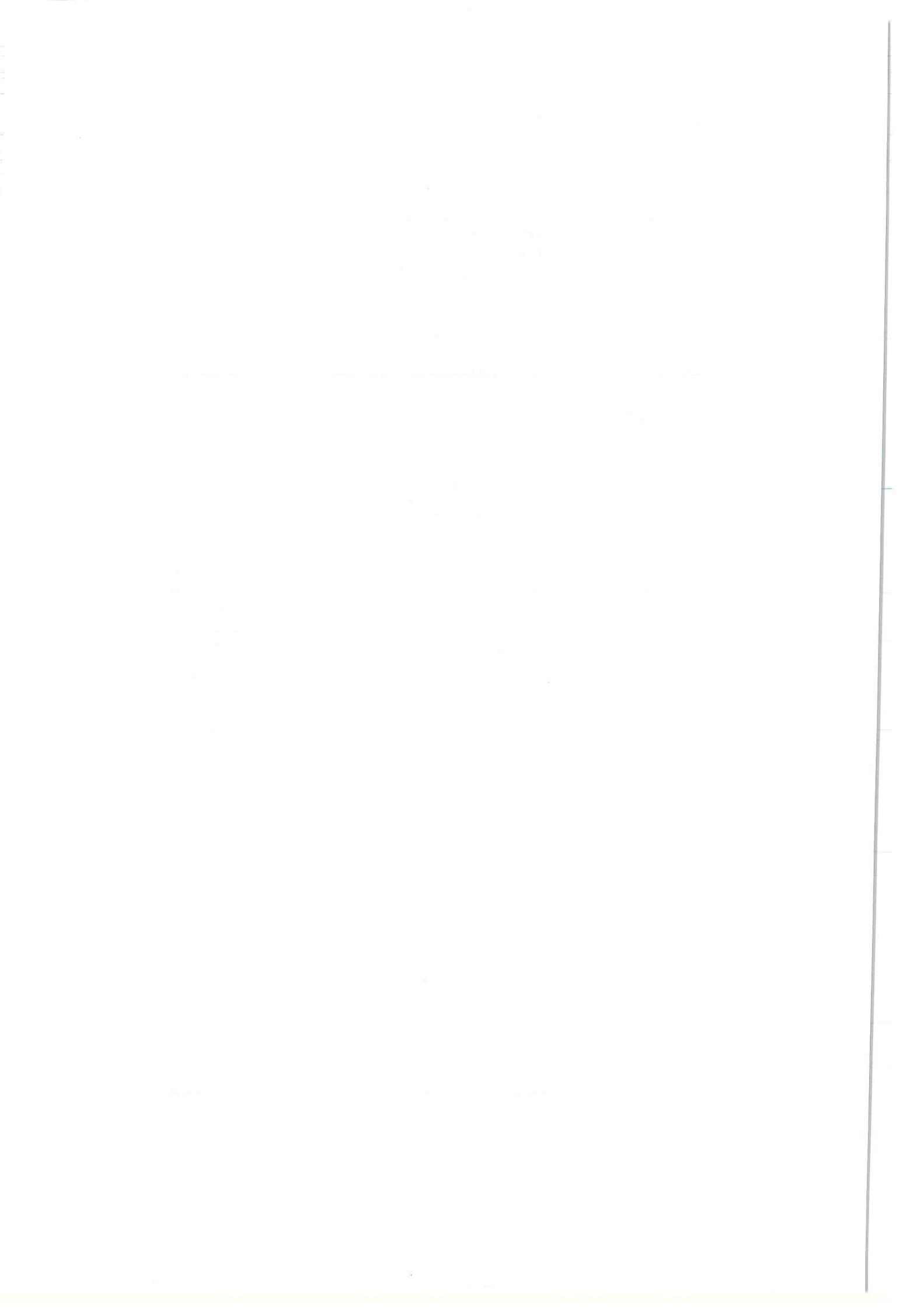


Figura 8.4.1.2.3 Presa de Talvacchia. Evolución del daño en el análisis a intensidad  $\beta$ .



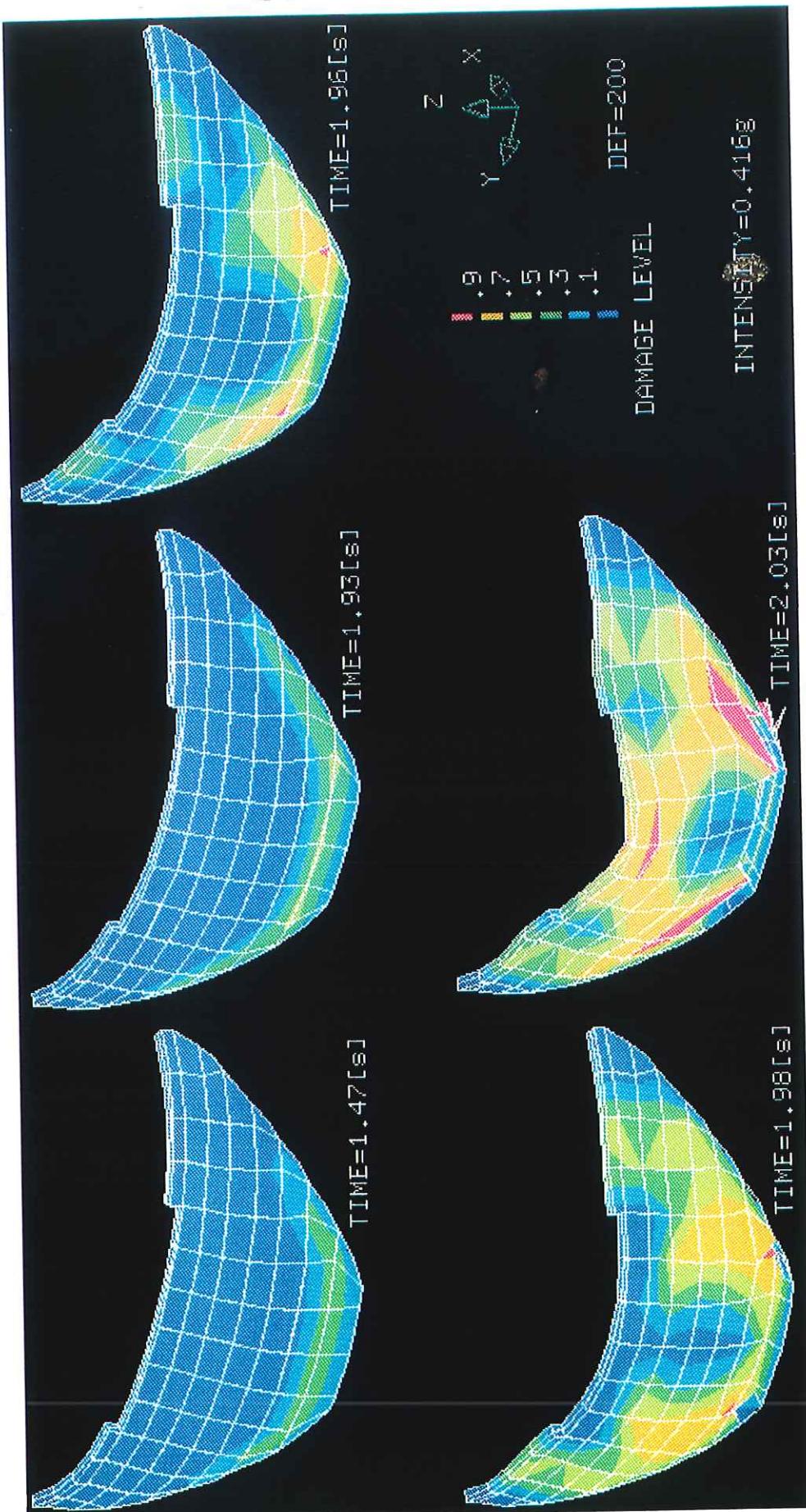
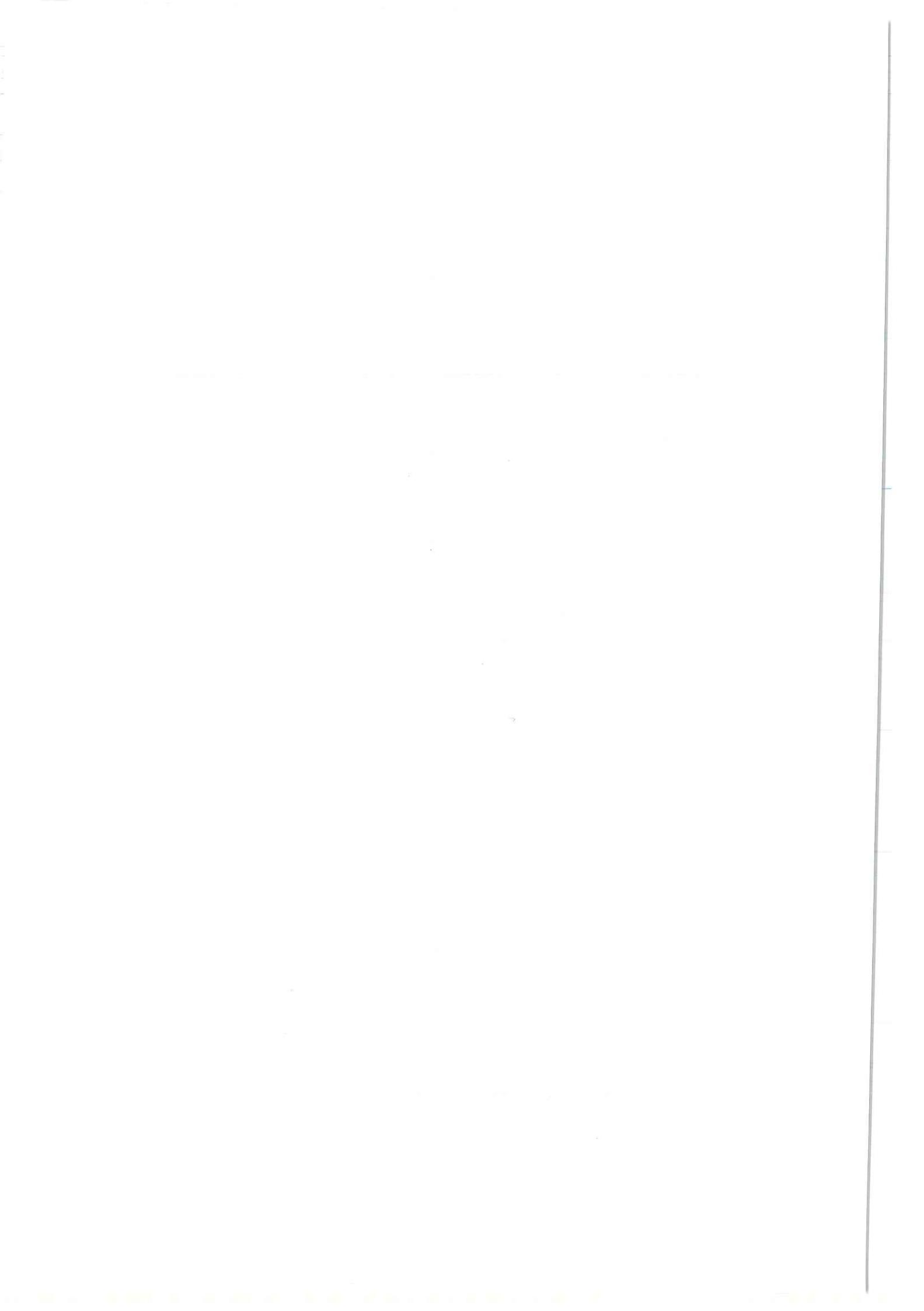


Figura 8.4.1.2.4 Presa de Talvacchia. Evolución del daño en el análisis a intensidad  $\gamma$ .



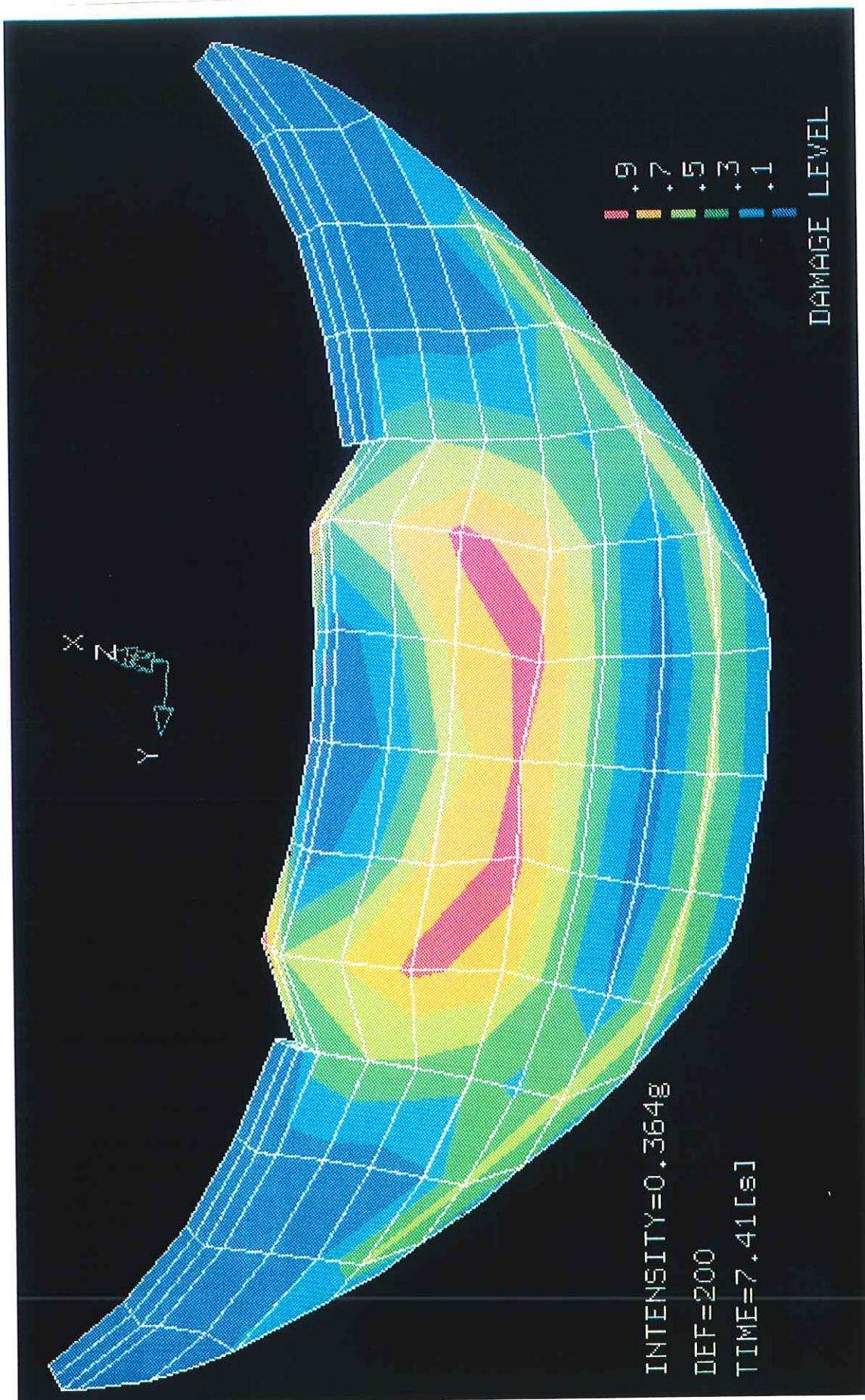
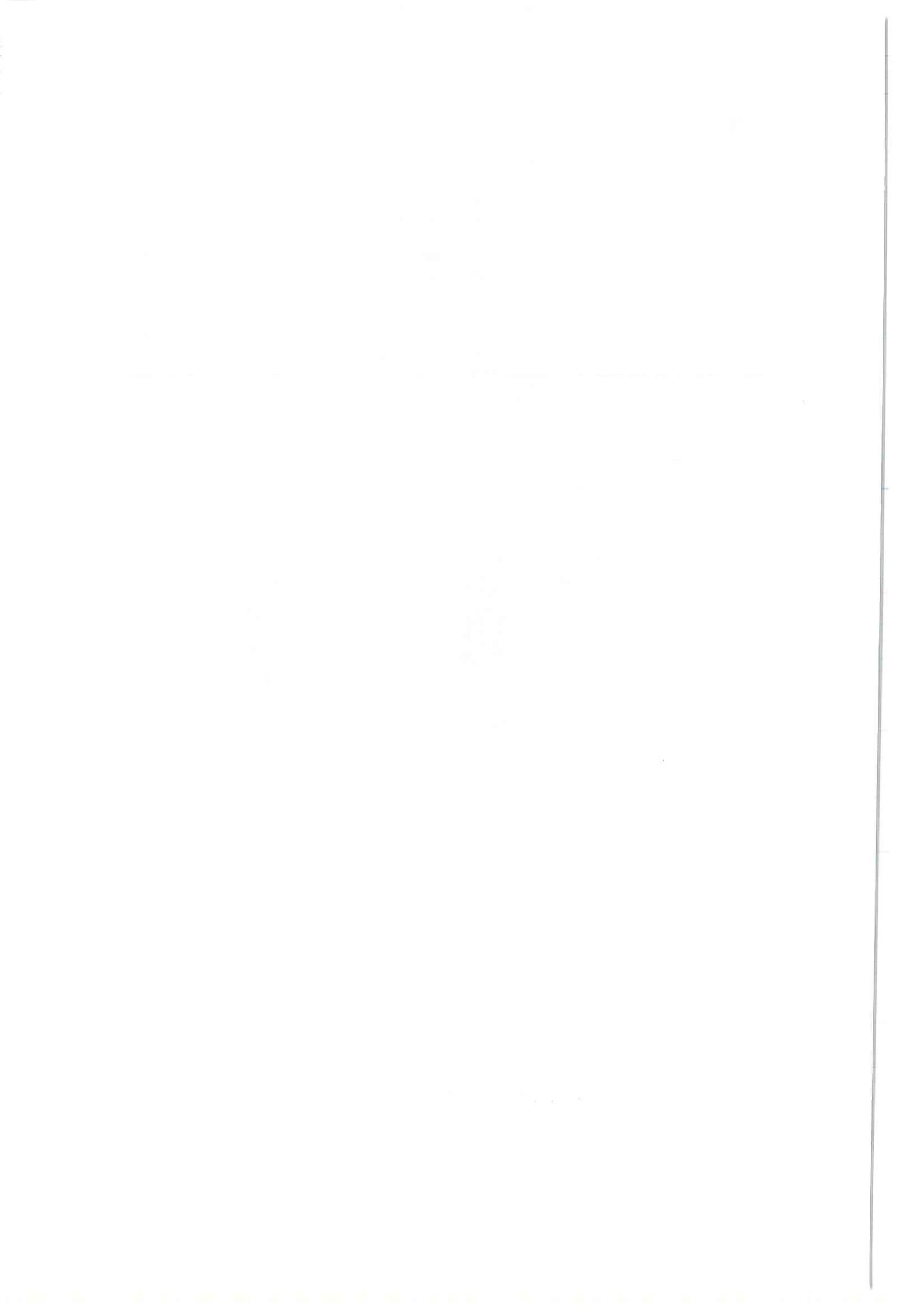


Figura 8.4.1.2.5 Presa de Talvacchia. Distribución del daño sobre la deformada al final del análisis a intensidad  $\beta$ .



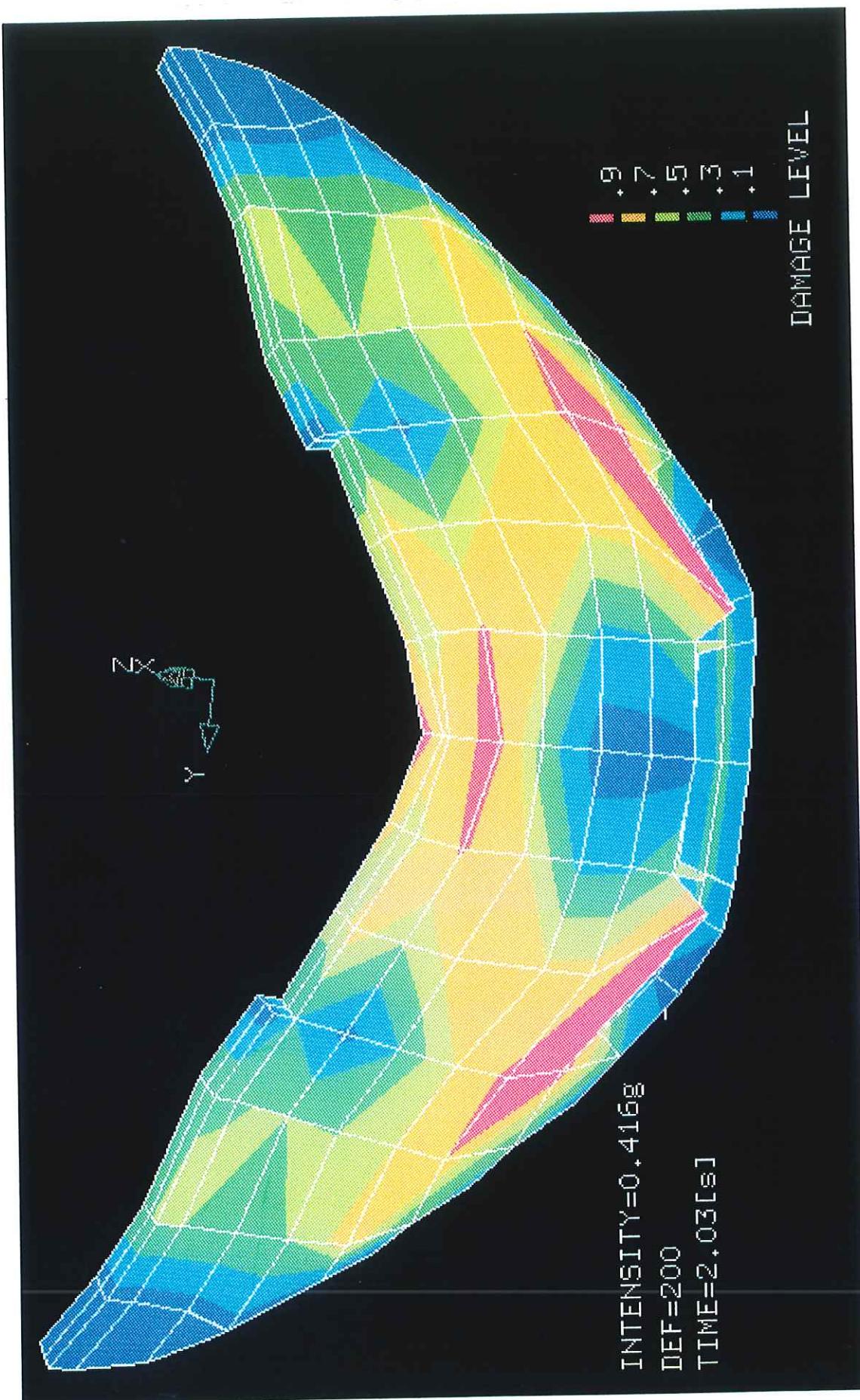


Figura 8.4.1.2.6 Presa de Talvacchia. Distribución del daño sobre la deformada al final del análisis a intensidad  $\gamma$ .



#### 4.2.1. Análisis cuasiestático RFD y dinámico a intensidad $\alpha$

En este apartado se presentan los resultados cualitativos obtenidos tanto para los análisis RFD, de incremento de la densidad relativa del fluido sin aplicación de ninguna señal sísmica, como para el análisis a intensidad  $\alpha$  en el que se aplica la máxima intensidad sísmica que no produce colapso dinámico y en el que, a posteriori, también se incrementa la densidad relativa del fluido.

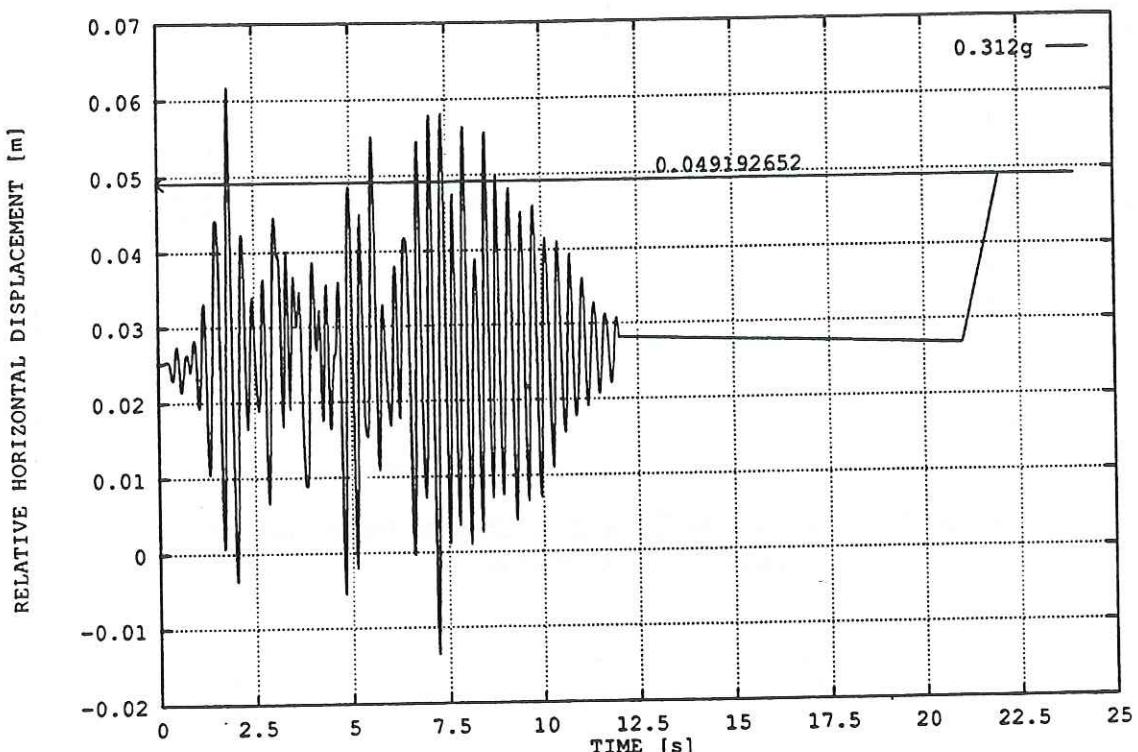


Figura 8.4.2.1.1 Presa de Talvacchia: DHC para el análisis a intensidad  $\alpha$ .

En la figura 8.4.2.1.1 se presenta la historia del desplazamiento horizontal en coronación relativo a la fundación DHC para el análisis correspondiente a la señal  $0.4[s]$  a intensidad  $\alpha$ . Es interesante notar que el desplazamiento máximo que se alcanza en el momento del colapso ( $\approx 0.0492[m]$ ) es inferior a los máximos desplazamientos alcanzados durante el análisis dinámico –sin que se hubiera producido colapso-. Esto parece indicar que el modo en el que el incremento de la densidad relativa del agua produce el colapso es distinto al modo en el que se alcanzan los máximos desplazamientos durante el análisis dinámico.

Para comparar los análisis RFD y dinámico a intensidad  $\alpha$ , en las figuras 8.4.2.1.2 y 8.4.2.1.3 se presentan las evoluciones del deterioro  $D_2$  y del

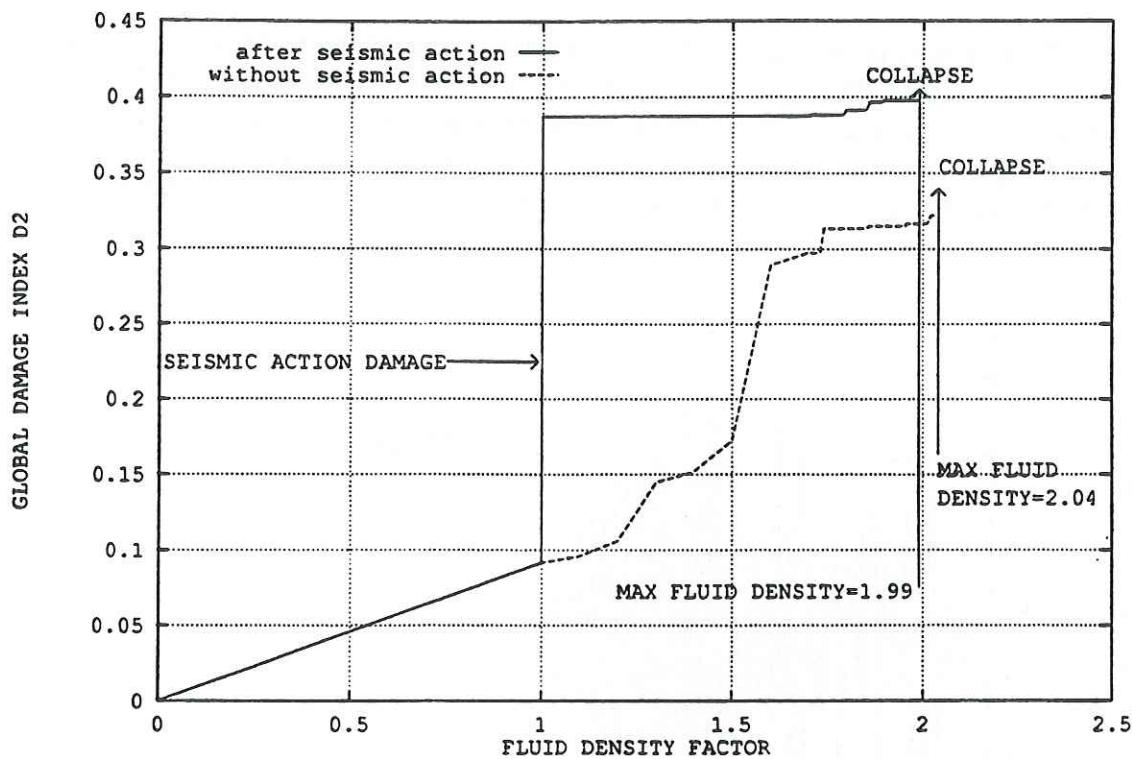


Figura 8.4.2.1.2 Presa de Talvacchia:  $D_2$  para los análisis RFD y dinámico a intensidad  $\alpha$ .

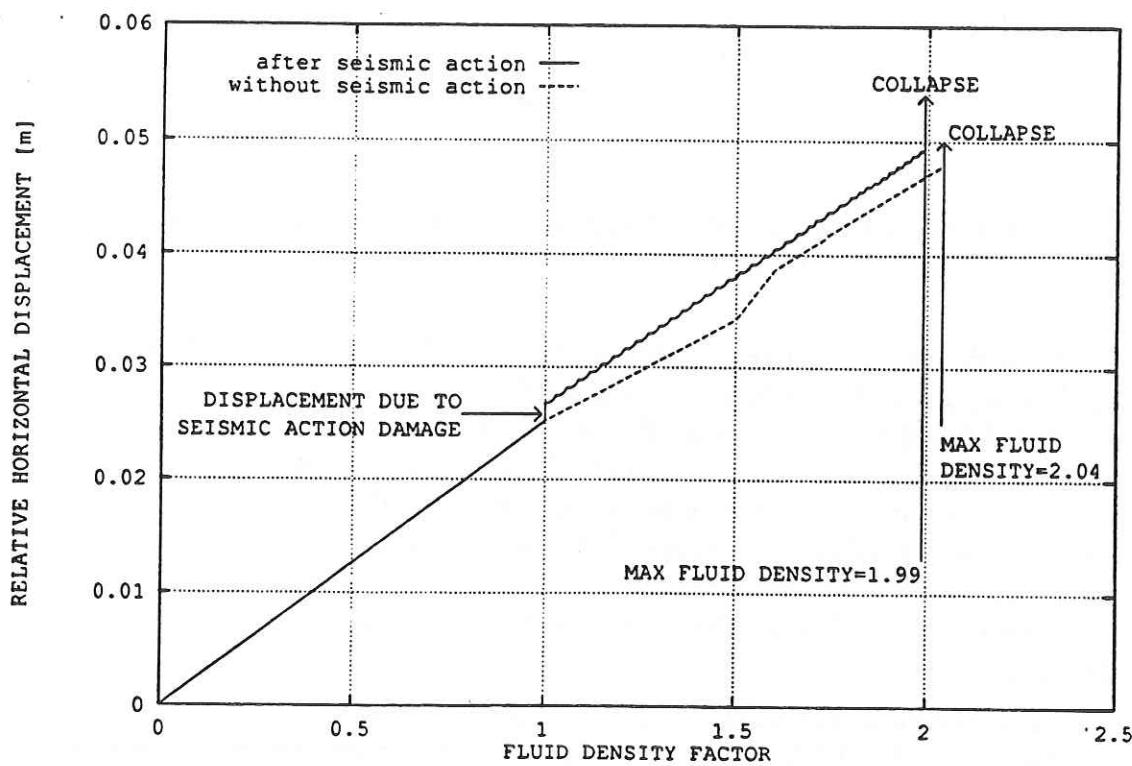


Figura 8.4.2.1.3 Presa de Talvacchia: DHC para los análisis RFD y dinámico a intensidad  $\alpha$ .

DHC para ambos análisis, respectivamente. Obsérvese en la figura 8.4.2.1.2 como la densidad relativa máxima que la presa puede soportar disminuye por efecto del terremoto. Es también notable el hecho de que el deterioro  $D_2$  que se alcanza después de la señal sísmica es notablemente superior a aquella correspondiente al colapso estático. Por su parte, en la figura 8.4.2.1.3 se observa claramente que el deterioro sufrido por la Presa durante la acción sísmica, a su término, produce un desplazamiento horizontal permanente en coronación. Nótese que al aumentar la presión hidrostática el desplazamiento horizontal en coronación sigue una historia paralela a aquella que corresponde al análisis RFD, manteniendo una diferencia igual al desplazamiento permanente debido al deterioro producido por la señal.

#### 4.2.2. Análisis dinámico. Excitación sísmica

En la figura 8.5.2.2.1 se presentan las historias DHC y DVC obtenidas en los diferentes análisis  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  realizados con la señal  $0.4[s]$ . En dichas figuras es interesante notar que los desplazamientos obtenidos para las intensidades mayores no son siempre los más grandes. Este hecho se puede observar tanto en el DHC como en el DVC alrededor de los 6 segundos. En ambas historias de desplazamientos se puede ver claramente el momento en que se produce el colapso dinámico. Véase que el DVC tiene valores notablemente pequeños hasta el momento que se produce el colapso dinámico.

Finalmente, en la figura 8.5.2.2.3 se presenta la evolución de la variable de deterioro  $D_2$  para dichos análisis. En el análisis a intensidad  $\alpha = 0.312[g]$  el deterioro  $D_2$  alcanza al final un valor próximo a 0.4; por su parte los análisis  $\beta$  y  $\gamma$  llegan a alcanzar, en el momento del colapso, un valor próximo a 0.6. Obsérvese que nunca se alcanzan valores de  $D_2 = 1$ , sino que, incluso en el colapso, estos son muy inferiores.

#### 4.2.3. Influencia de la no-linealidad del material en el comportamiento estructural de la presa

En este apartado se comparan los resultados obtenidos en diversos análisis considerando y sin considerar la fisuración del hormigón. De esta forma, se puede observar el efecto que tiene la no-linealidad en el comportamiento estructural de la Presa. Consecuentemente se realizaron análisis para diversas intensidades tanto con material no-lineal (modelo de daño) como con material elástico lineal.

En la figura 8.4.2.3.1 se comparan los desplazamientos horizontales relativos en coronación DHC para los análisis lineal y no-lineal correspondientes a la señal  $0.4[s]$  a intensidad  $\alpha$ . Se observa que las curvas coinciden hasta que se produce el inicio de la fisuración ( $t \simeq 1.5[s]$ ). A partir de dicho instante los resultados son cada vez más distintos. La observación detallada de la

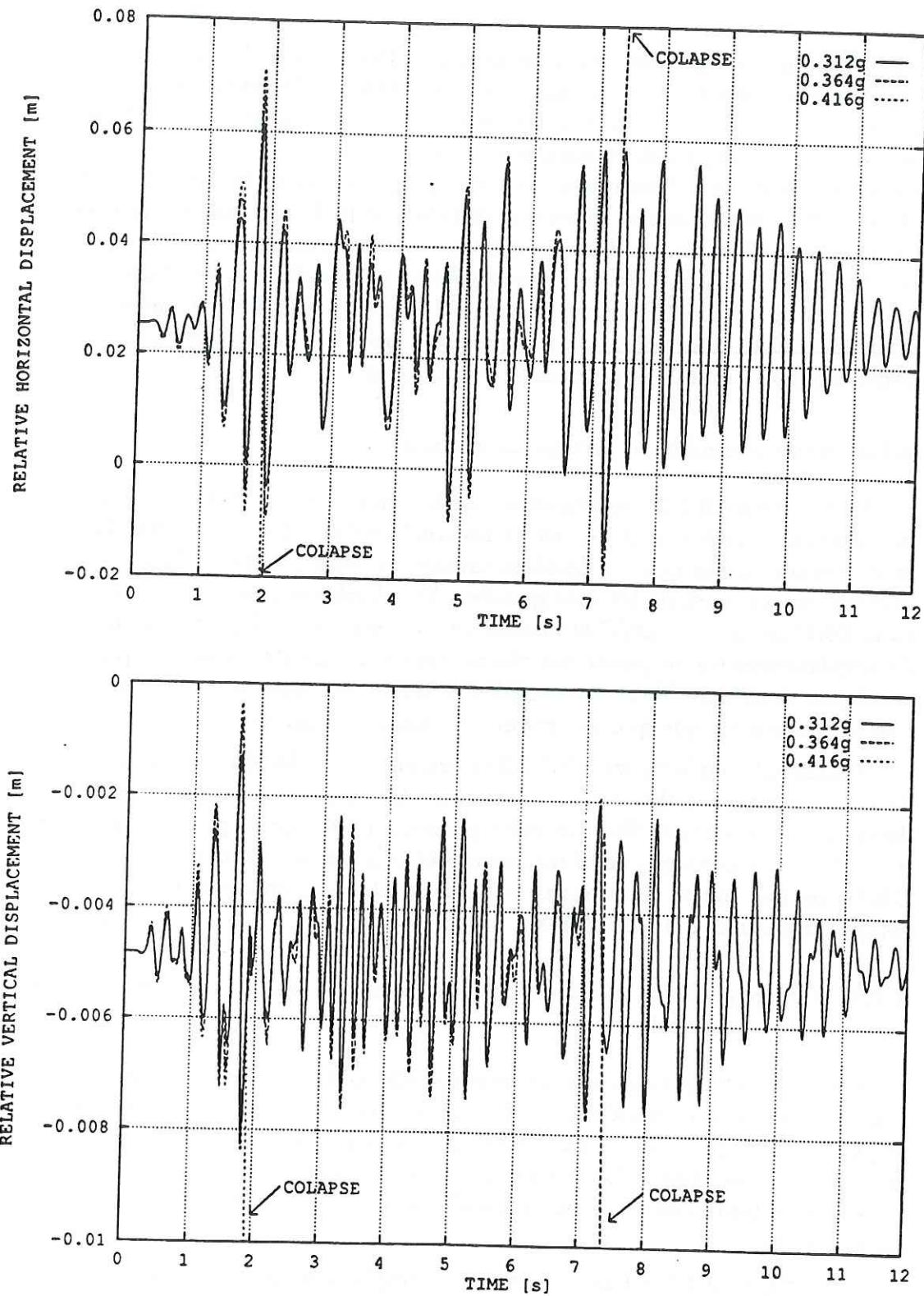


Figura 8.5.2.2.1 Presa de Talvacchia: Historias DHC y DVC correspondientes a los análisis  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ .

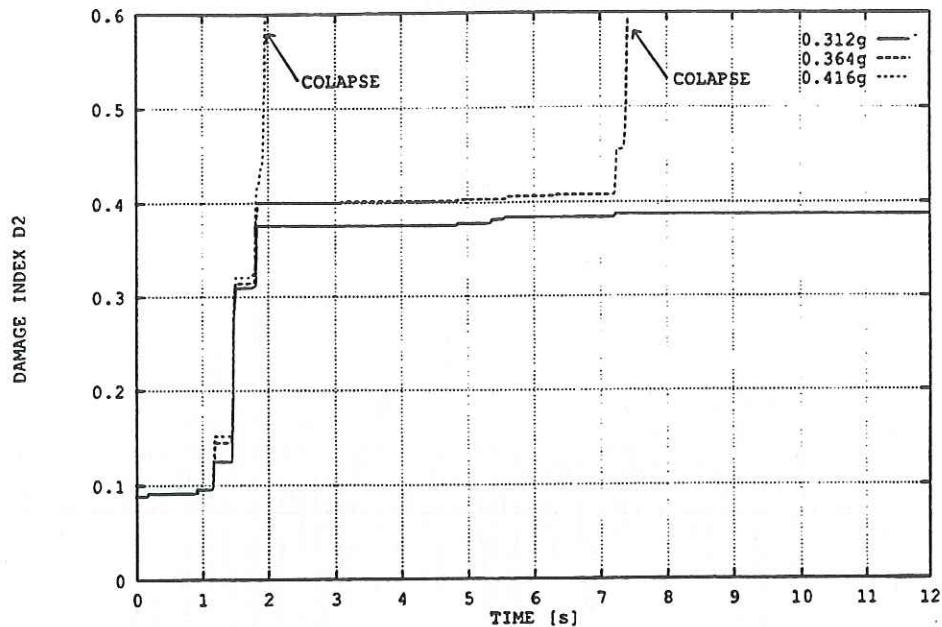


Figura 8.5.2.2.2 Presa de Talvacchia: Evolución de la variable de deterioro  $D_2$ .

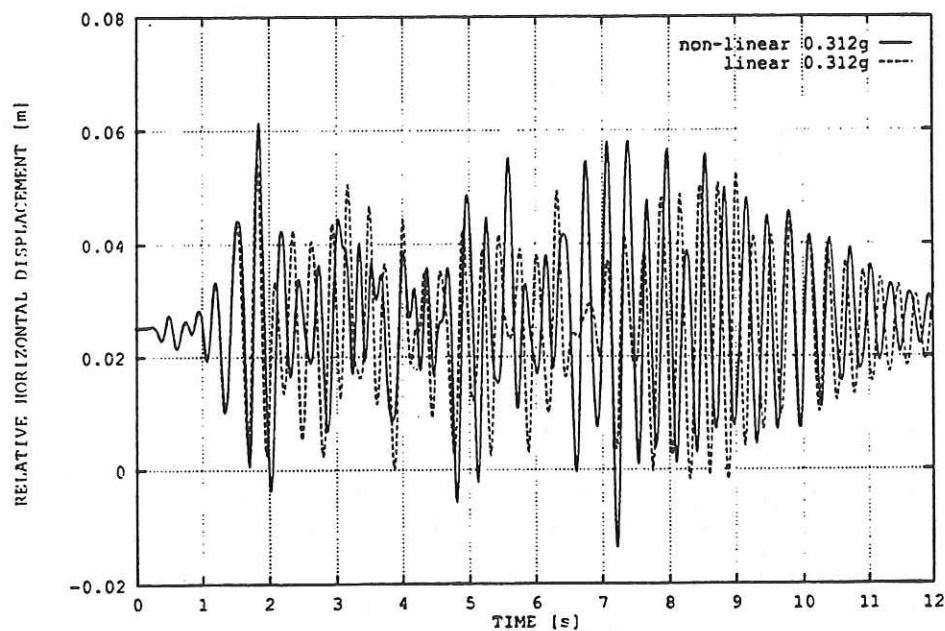


Figura 8.4.2.3.1 Presa de Talvacchia: DHC para los análisis lineal y no-lineal a intensidad  $\alpha$ .

figura permite concluir que la diferencia entre los resultados es determinante y manifiesta la imposibilidad de utilizar un modelo lineal para predecir el comportamiento de una presa en circunstancias próximas al colapso.

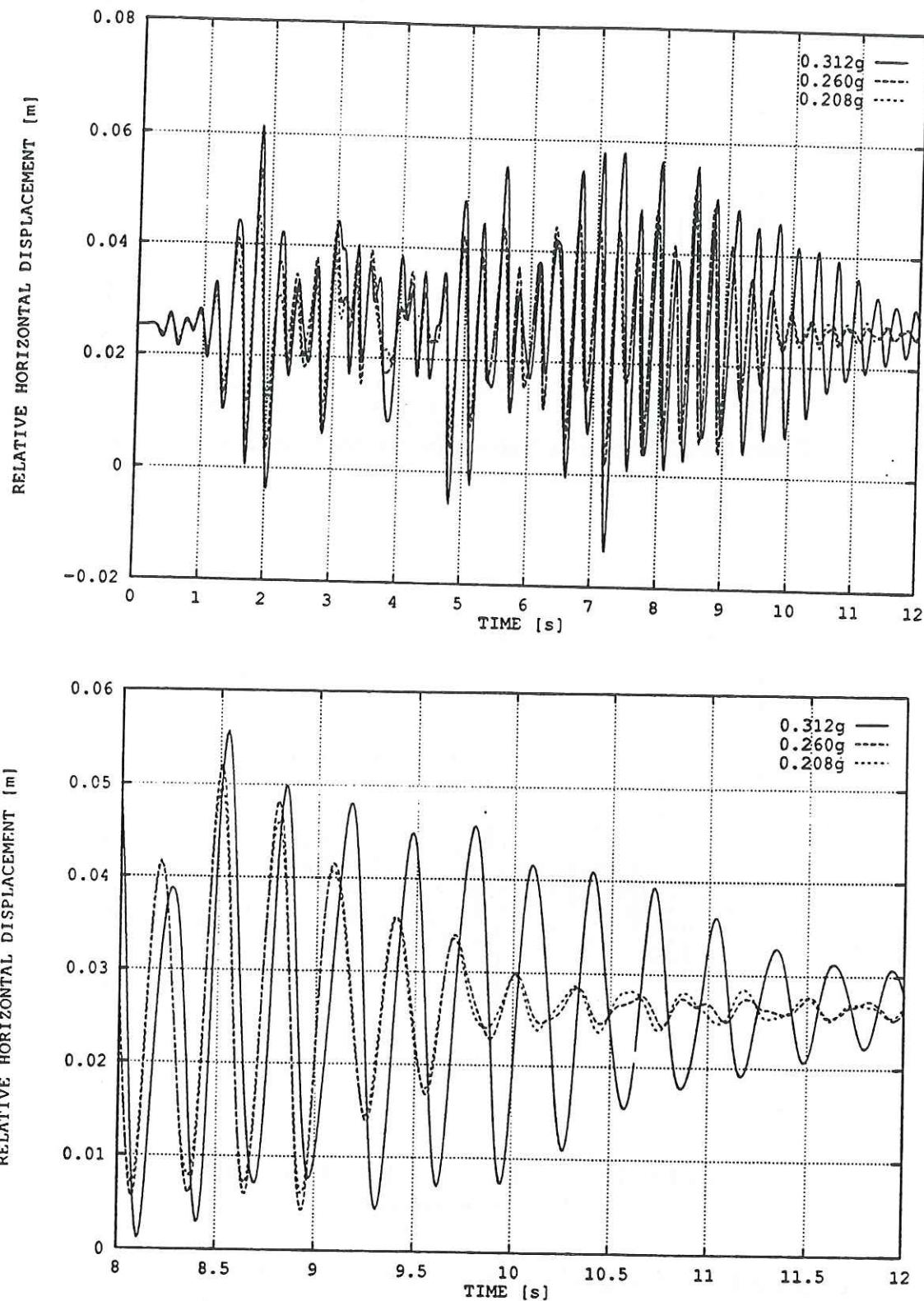


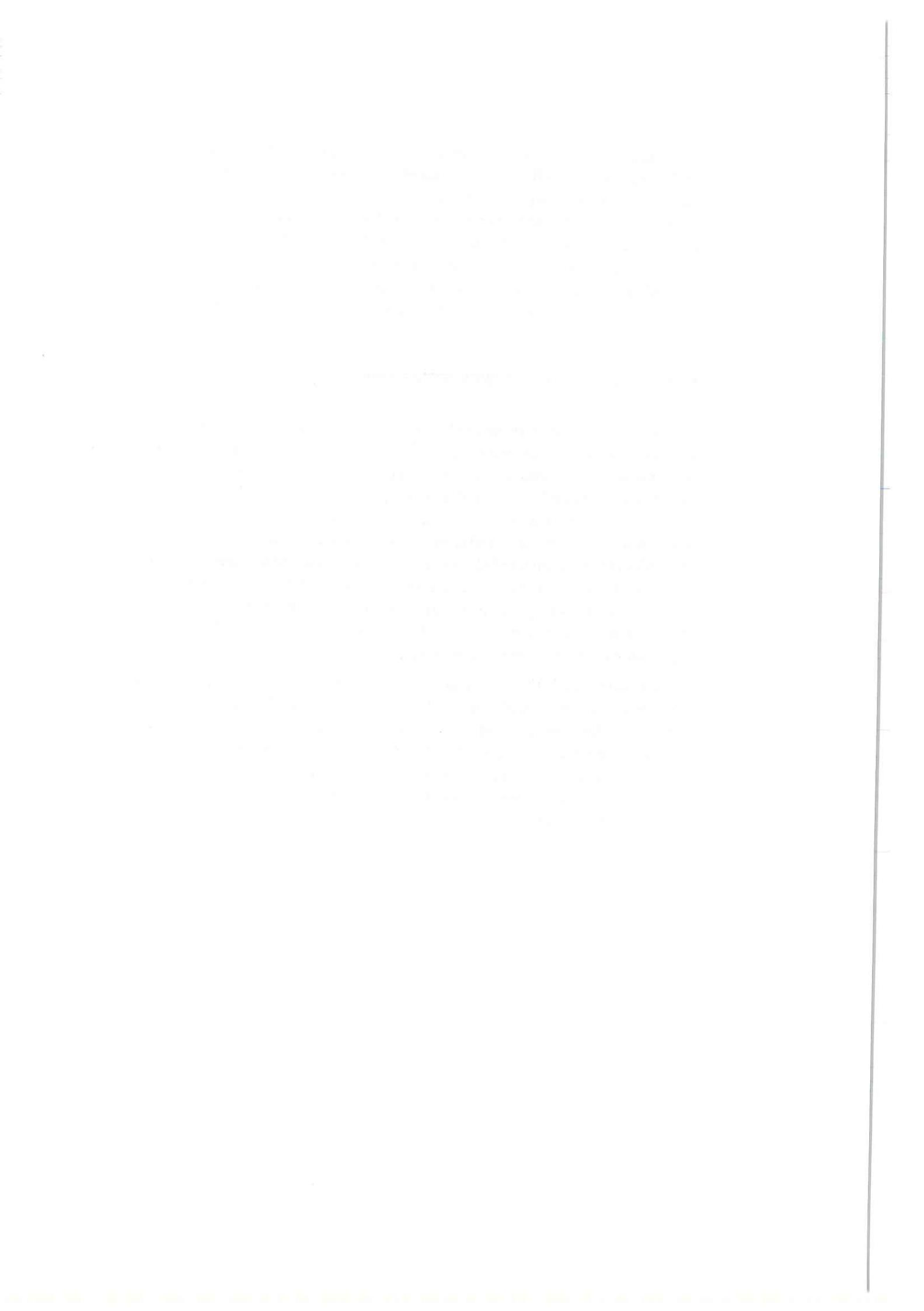
Figura 8.4.2.3.2 Presa de Talvacchia: DHC para los análisis lineal y no-lineal a intensidad  $\alpha$ .

Para enfatizar esta conclusión, en la figura 8.4.2.3.2 se presentan las historias de los DHC, y una ampliación de los mismos, de tres análisis (no-lineales) realizados con la señal  $0.4[s]$  a intensidades  $0.208[g]$ ,  $0.260[g]$  y  $0.312[g]$  que están equiespaciadas  $0.052[g]$ . Obsérvese que la variación en la respuesta no es proporcional al incremento de la intensidad (lo que ocurriría en un modelo lineal). Consecuentemente, no parece existir ninguna hipótesis simplificativa que permita utilizar un modelo lineal como una aproximación a un caso no-lineal, con el coste computacional que esto significa.

## 5. CONSIDERACIONES FINALES

La conclusión más importante de este capítulo es que en un problema no-lineal acoplado de interacción fluido-presa no son posibles hipótesis simplificativas que permitan disminuir el costo computacional asociado a considerar la no-linealidad del material y la interacción con el fluido. A diferencia con el análisis lineal, el modelo no-lineal muestra que no es suficiente hacer sólo un análisis con una señal artificial, puesto que la respuesta puede variar sensiblemente de una señal a otra, incluso si éstas son generadas con los mismos parámetros básicos (espectro de diseño, aceleración máxima, contenido de frecuencias, etc.). Esto se debe a que la respuesta no-lineal de una estructura no sólo depende del contenido de frecuencias de la excitación, sino también de su "historia" en el tiempo.

En este capítulo se ha puesto a prueba el modelo y la metodología propuesta en un problema tridimensional no-lineal con interacción fluido-estructura-terreno bajo excitación sísmica. A este respecto se debe indicar que se ha encontrado que el modelo en su conjunto es adecuado, tanto en la precisión de los resultados obtenidos como en el coste computacional asociado, con los ordenadores disponibles en la actualidad para el análisis de estructuras a gran escala.



## CAPÍTULO IX

### CONCLUSIÓN

#### 1. INTRODUCCIÓN

A lo largo del presente trabajo se ha puesto de manifiesto que para hacer viable un análisis de seguridad de una estructura es menester disponer de dos elementos básicos:

- 1) Un *modelo numérico* que permita hacer análisis estructurales fiables para las más diversas condiciones a las que se quiera solicitar la estructura, en tiempos razonables y con los medios técnicos de que se disponga. En el caso que nos ocupa -análisis de seguridad de presas de hormigón ante acciones sísmicas-, es preciso disponer de un modelo que tenga:
  - La posibilidad de representar adecuadamente la geometría de la presa, lo que en el caso de presas bóveda conduce a la necesidad de hacer análisis tridimensionales.
  - Una ecuación constitutiva para representar las características más significativas del hormigón tanto en régimen lineal como no-lineal al tener en cuenta la fisuración.
  - Capacidad de hacer análisis tanto en régimen quasi-estático como dinámico.
  - Un modelo que permita representar el terreno circundante, que actúa como cimentación de la presa y a la vez como transmisor de las ondas de tensión provenientes del sismo.
  - Un modelo para representar al fluido de embalse, que actúa como medio transmisor de ondas de compresión por lo que necesariamente deberá tener en cuenta la compresibilidad del agua.
  - Un tratamiento adecuado de los contornos (tanto del fluido como del terreno) en aquellos lugares en los que se deba interrumpir el modelo geométrico.
  - La posibilidad de resolver el problema acoplado sólido-fluido utilizando la estrategia de solución más adecuada en cada dominio.
  - Un modelo de generación de señales sísmicas artificiales que sean compatibles con las características significativas de los registros exis-

tentes de terremotos reales, pero que a la vez permita especificar las condiciones adversas que se estimen oportunas (frecuencia dominante, aceleración máxima, etc.).

- 2) Una *metodología de análisis* que permita utilizar dicho modelo numérico para extraer resultados concretos respecto al grado de seguridad de la estructura. La metodología debe especificar:

- La descripción de las fases en que consiste un análisis tipo, indicando claramente cuáles son las acciones y condiciones de contorno a aplicar en cada fase. Es necesario, asimismo, definir claramente cuáles son las condiciones de finalización de cada una de las fases de análisis, y la interpretación que puede hacerse de estas condiciones.
- La definición de un número pequeño de parámetros que permita cuantificar, para cada instante de tiempo, el nivel de deterioro en el que se encuentra la estructura con respecto a su condición inicial.
- Un criterio que permita definir el momento en que se puede considerar, a efectos prácticos, que la estructura está totalmente destruida —colapso—.

Consecuentemente, y como conclusión de la investigación realizada, este capítulo se ha dividido en dos partes: Una primera en la que se presentan algunas consideraciones respecto al modelo numérico desarrollado y, una segunda parte donde se exponen comentarios respecto a la metodología de análisis propuesta en referencia a los ejemplos presentados.

## 2. CONSIDERACIONES SOBRE EL MODELO NUMÉRICO

La idea subyacente en el desarrollo del modelo numérico de análisis presentado y su implementación en un programa de ordenador, ha sido la de disponer de una herramienta numérica que combine dos características en cierto modo contrapuestas: ser lo suficientemente completa y general como para poder reproducir complejos fenómenos no-lineales teniendo en cuenta la interacción con el fluido y el terreno ante acciones sísmicas y, por otra parte, permitir realizar análisis sobre estructuras reales, en dos y tres dimensiones, con tiempos de cálculo aceptables. La principal conclusión a este respecto es que se ha llegado a un correcto grado de equilibrio entre ambas características. La conjunción de todos los modelos anteriormente citados ha dado como resultado una herramienta de análisis que permite realizar cálculos realistas en tiempos que, si bien son notables incluso en ordenadores con grandes prestaciones, no son disuasorios.

El modelo utilizado ha mostrado ser muy robusto, teniendo en cuenta que se trata de análisis no-lineal dinámico con interacción fluido-estructura,

en el que además se representan contornos transparentes que obligan a que la estructura esté libre de toda coacción exterior durante el análisis. En los apartados que siguen se hacen algunas consideraciones sobre el funcionamiento numérico de los elementos del modelo que tienen especial relación con el coste computacional.

## 2.1. Sobre la formulación del fluido

Como ya se dijo en el Capítulo III, existen diversas formulaciones posibles para modelar el fluido entre las que destacan la formulación en desplazamientos y la formulación en presiones. Al plantearse el problema de interacción fluido-estructura, y dado el enorme parecido que tendría un programa formulado en desplazamientos para el fluido con un programa típico de análisis de sólidos, es inevitable la tentación de utilizar dicha formulación para modelar el fluido. Por otro lado, la formulación en presiones sólo tiene un grado de libertad por nodo, lo que representa una gran ventaja computacional. En este trabajo se escogió la formulación en presiones y se ha encontrado que el coste de implementarla ha sido muy pequeño comparado con el gran ahorro en tiempo de CPU que ésta conlleva. En el ejemplo de la presa bóveda presentado en el Capítulo VIII, los análisis con interacción realizados han tenido un coste computacional asociado al fluido del orden de un 12% del correspondiente al sólido.

## 2.2. Sobre la paralelización del modelo de interacción

El ejemplo de la presa bóveda del capítulo VIII ha sido analizado con la ayuda de un ordenador que dispone de ocho procesadores en paralelo<sup>†</sup>. De esta forma, debido a la solución iterativa por bloques utilizada en este ejemplo, se han podido ejecutar los procesos de ambos dominios (presa-terreno y fluido) en paralelo (ver Capítulo V), por lo que el coste adicional asociado al análisis del fluido ha sido despreciable. Así, en un análisis a embalse vacío (sin interacción) se obtiene un 100% de CPU en un procesador para el cálculo del conjunto presa-terreno, mientras que en los análisis a embalse lleno (con interacción) se ha obtenido un 99% de CPU en un procesador para el cálculo del dominio sólido y simultáneamente un 12% de CPU en otro procesador para el fluido. Estos valores muestran dos puntos importantes:

- 1) Cuando se usa la formulación en presiones, el costo computacional de analizar el dominio fluido es pequeño, comparado con el del sólido.
- 2) En un ordenador capaz de ejecutar tareas en paralelo, el algoritmo de solución por bloques hace que el coste computacional del análisis del

<sup>†</sup> Convex C3480 con 1[GBytes] de memoria RAM

fluido sea casi despreciable (en el ejemplo presentado, la interacción con el fluido —que realmente consumió un 12% de tiempo de un procesador— representó sólo un incremento de un 1% del tiempo real del análisis del sólido).

### 2.3. Sobre la modelización de las condiciones de contorno

Tradicionalmente, en el análisis sísmico se utilizan acelerogramas para imponer la excitación sísmica al modelo<sup>[CaB]</sup>. La idea general consiste en utilizar el Principio de d'Alembert e interpretar las fuerzas de inercia como fuerzas exteriores actuando sobre las partículas. Esto exige trabajar con aceleraciones, velocidades y desplazamientos relativos respecto a una base considerada inmóvil.

Por el contrario, en este trabajo se han empleado velocigramas para imponer la excitación sísmica al modelo. Como se explica en el Capítulo IV (apartado 3), la excitación sísmica se introduce al modelo especificando directamente la velocidad en el contorno. Esto presenta diversas ventajas: (a) Las ondas que "viajan" por el dominio salen de él sin reflejarse en el contorno; (b) Numéricamente presenta menos problemas utilizar funciones más suaves, como son los velocigramas respecto a los acelerogramas; y (c) En el análisis se obtienen directamente las aceleraciones totales en lugar de las aceleraciones relativas. Esto último es una ventaja para el modelo de interacción, ya que en el contorno del fluido se requieren las aceleraciones totales y no las relativas, que, en otro caso, tendrían que ser calculadas a partir de estas últimas.

Por otra parte, se ha podido observar que la condición de repetitividad (ver Capítulo IV) es un factor determinante para que las ondas viajen sin distorsión por el terreno. Por último se debe resaltar que los contornos de radiación han presentado un funcionamiento excelente, ya que las ondas espúreas provenientes de los contornos transparentes han sido insignificantes.

### 2.4. Sobre el rendimiento del método de iteración por bloques

A lo largo de la presente investigación se ha podido constatar que el número de iteraciones necesarias para satisfacer los criterios de convergencia establecidos depende fundamentalmente del grado de no-linealidad del modelo, siendo prácticamente independiente del grado de acoplamiento con el fluido. Así, en el ejemplo analizado en el capítulo VIII en la situación más solicitada: análisis tridimensional, material no-lineal a embalse lleno y con un factor de intensidad de la excitación sísmica de 0.312[g], se necesitó una media de 2.1 iteraciones por paso de tiempo en los 1200 pasos que componen el análisis, dando un total de 2520 resoluciones de la estructura (ver figura 9.2.4.1).

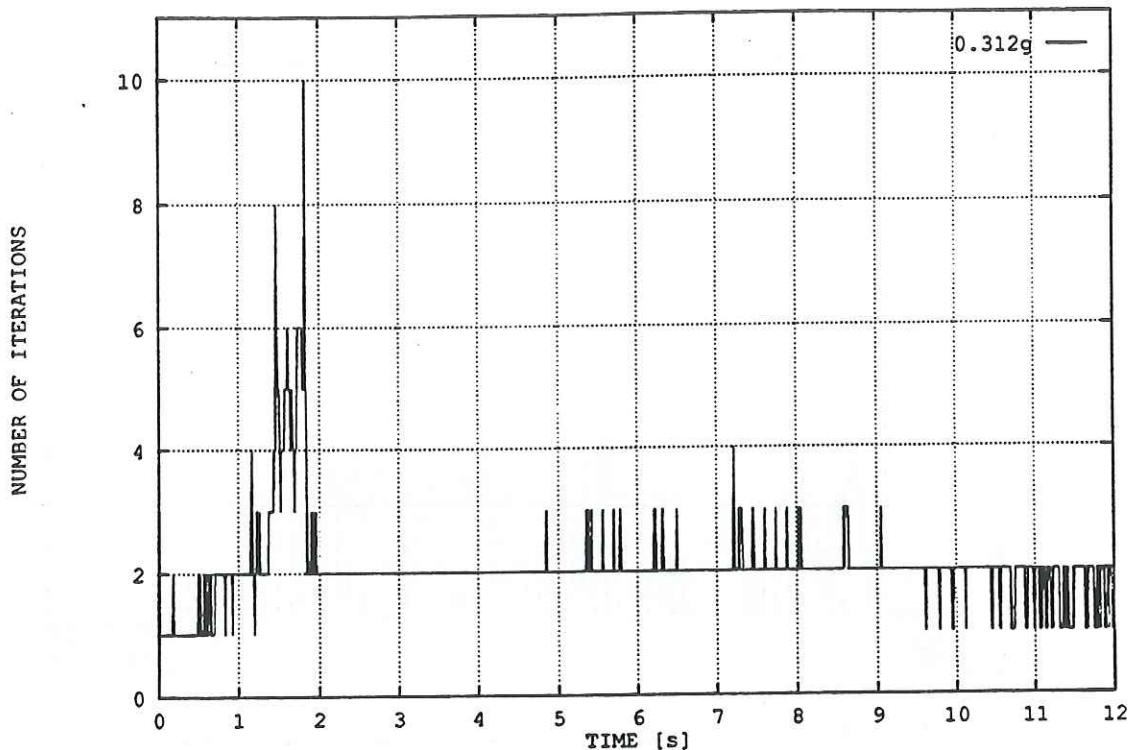


Figura 9.2.4.1 Historia más desfavorable del número de iteraciones/paso.

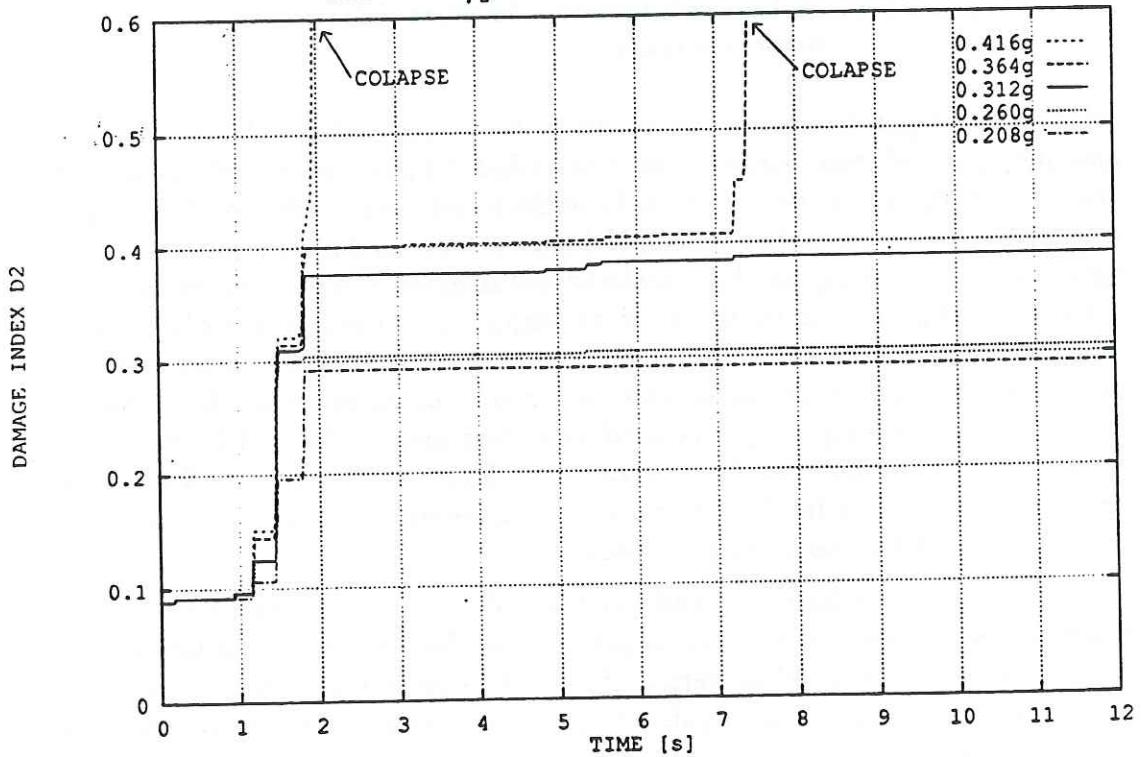


Figura 9.2.4.2 Deterioro  $D_2$  para diversos análisis tridimensionales

Respecto a la exigencia en el número de iteraciones, se debe hacer notar que la importancia que tiene el elegir adecuadamente la estrategia

NUMBER OF ITERATIONS

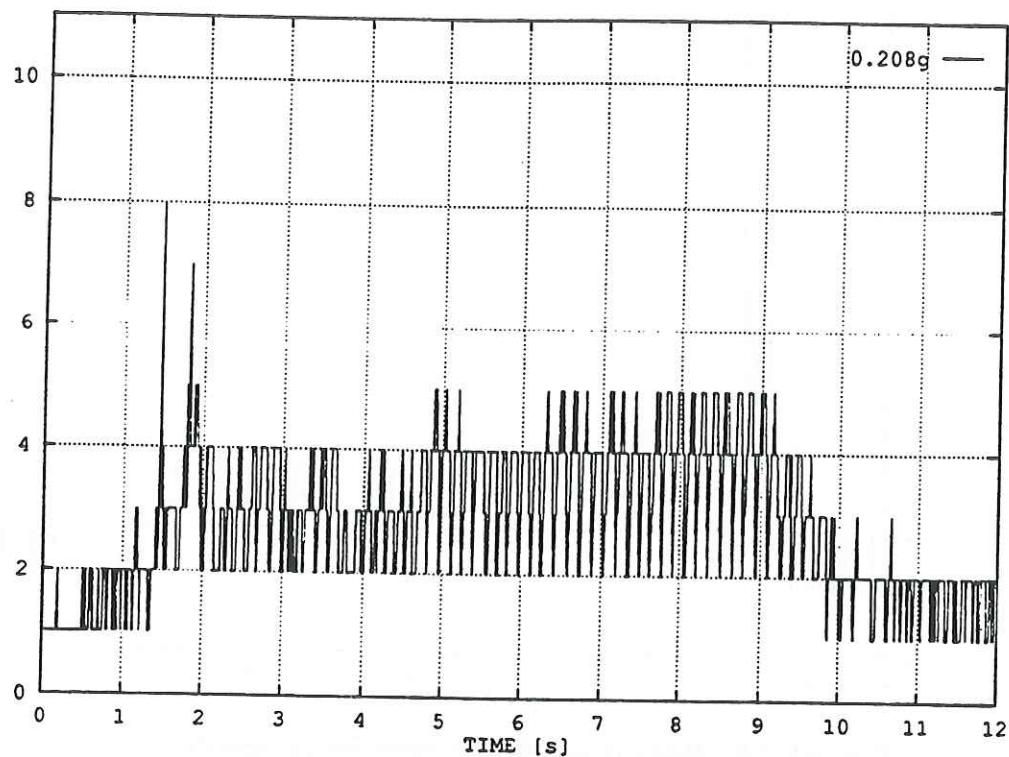


Figura 9.2.4.3 Historia más favorable del número de iteraciones/paso.

de solución dependiendo del grado de no-linealidad del problema. Así por ejemplo, para el caso anterior de intensidad  $0.312[g]$  se especificó que se ensamblara la matriz de rigidez a la decima iteración. Ello condujo a que se ensamblara dicha matriz a los  $1.9[s]$  (justo después del daño máximo –ver figura 9.2.4.2–) consiguiéndose acelerar notablemente la convergencia en el resto del análisis. Por su parte, si se emplea la misma estrategia para el análisis con intensidad  $0.208[g]$  se obtiene la historia de iteraciones dada en la figura 9.2.4.3. Nótese que en este caso nunca se ha ensamblado la matriz de rigidez lo que origina que la media de iteraciones suba a 3.2, dando un total de 3840 resoluciones de la estructura. Evidentemente, si se fija que la matriz se ensamble a las 8 iteraciones, se obtiene una historia con una media muy inferior (1.8 iteraciones por paso).

Sin embargo, se ha encontrado que la influencia de la interacción con el fluido en el número de iteraciones por paso es despreciable, comparada con la de la no-linealidad del material. Así, se han presentado casos en los que a embalse vacío incluso se requieren más iteraciones que los similares para embalse lleno.

Por todo ello se puede concluir que el algoritmo de solución por bloques propuesto<sup>[G]</sup> –que permite resolver cada dominio utilizando la estrategia de solución más adecuada– es idóneo, competitivo, robusto, general y unificador

en la solución de problemas prácticos acoplados fluido-presa con excitación sísmica en los que se tiene en cuenta la no-linealidad del material de la presa.

### 2.5 Sobre la determinación del input sísmico

El modelo de generación de señales artificiales presentado reúne una serie de características interesantes con vistas a su utilización en la simulación numérica de los movimientos sísmicos.

Una característica a destacar es la aleatoriedad, lo que permite generar diversas señales representativas de sismos verdaderos que tengan las mismas propiedades generales pero que sean distintas en el detalle. Además, las señales artificiales generadas están en correspondencia con un espectro de diseño dado, una aceleración máxima pico, un contenido de frecuencias y una duración previamente establecida. Esto permite incorporar los efectos que tienen la magnitud y la distancia focal probables, el tipo de terreno y grado de sismicidad del lugar, tipo de estructura y las características propias del modelo a analizar.

Se puede concluir que el procedimiento descrito para generar señales sísmicas artificiales es consistente con el estado actual del conocimiento, fácil en su implementación y de un costo computacional insignificante.

## 3. CONSIDERACIONES SOBRE LA METODOLOGÍA DE ANÁLISIS DE SEGURIDAD

### 3.1 Sobre el procedimiento de análisis

De acuerdo a lo descrito en el Capítulo VII, el procedimiento de análisis se ha establecido en tres fases diferenciadas:

- (1) Una primera fase, cuasi-estática, de aplicación de las cargas de peso propio y presión hidrostático, donde se coartan los desplazamientos de todos los nudos en la base del terreno y se aplican las fuerzas de peso propio y presión hidrostática, para posteriormente liberar los nudos coartados a la vez de aplicar las reacciones como fuerzas exteriores. De esta forma, se obtiene una estructura en equilibrio sin coacción exterior alguna que tiene una deformada inicial y un estado tensional correspondiente a la situación de reposo bajo peso propio y presión hidrostática.
- (2) Una segunda fase dinámica de aplicación de la excitación sísmica – generada previamente con unas características pre-establecidas– como una onda que avanza de abajo hacia arriba entrando por la base del modelo. Es importante resaltar que esta fase deberá tener la duración

suficiente como para permitir o que las ondas se disipen a través de los contornos de radiación, o que se produzca una condición tal que permita establecer claramente que se ha producido colapso estructural.

- (3) Una tercera fase en la que se incrementa quasi-estáticamente la densidad del fluido hasta que se produzca el colapso de la estructura. Para ello nuevamente se deben coartar los desplazamientos de todos los nudos en la base del terreno.

Es importante indicar que la metodología de análisis implica utilizar diversas señales artificiales y a distintas intensidades. Además, un análisis de interés es el que consiste en primero imponer el peso propio y la presión hidrostática -primera fase- e inmediatamente pasar a incrementar la densidad del fluido -tercera fase- hasta producir el colapso, sin aplicar ninguna señal artificial.

Nótese que, de acuerdo al procedimiento descrito, cualquier análisis siempre concluye al producirse un colapso y únicamente en alguna de las dos formas siguientes: 1) Es posible que se produzca el colapso de la estructura en la segunda fase correspondiente al análisis dinámico al aplicar la excitación sísmica, o bien 2) El colapso se produce en la tercera fase debido al incremento de la presión hidrostática.

Para facilitar la interpretación de los resultados obtenidos en relación a la señal sísmica utilizada, se han definido tres intensidades denominadas  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  como:

- $\alpha$  Es la intensidad máxima de una señal dada que se puede aplicar a una estructura sin que se produzca colapso dinámico.
- $\beta$  Es la intensidad mínima de una señal dada que, al aplicarse a una estructura, produce colapso dinámico.
- $\gamma$  Es una intensidad superior a la intensidad  $\beta$  y que además produce colapso dinámico en un instante de tiempo anterior al producido por dicha intensidad  $\beta$ .

El procedimiento de análisis así establecido involucra la necesidad de disponer de un modelo que pueda tener en cuenta el comportamiento no-lineal de la estructura para ser capaz de detectar el colapso. Por otra parte, y en favor de los modelos lineales que son y han sido ampliamente utilizados para el diseño de presas de hormigón, se puede indicar que éstos permiten predecir correctamente el estado tenso-deformacional de una estructura en condiciones normales de servicio. Efectivamente, y salvo en zonas muy localizadas, durante la vida útil de una presa el hormigón se encuentra en un estado tensional que podríamos denominar leve, por lo que un modelo lineal representa una herramienta valiosa para establecer el comportamiento estructural que tendrá dicha presa durante la mayor parte de

su vida útil. Consecuentemente, un modelo lineal permite realizar las tareas de predimensionamiento, verificación en condiciones de trabajo e incluso el diseño de los innumerables detalles constructivos que constituyen una presa.

Sin embargo, un factor determinante en el diseño de una estructura, y más aún si se trata de una gran estructura —como es una presa—, es el conocimiento del nivel de seguridad al que se encuentra durante las acciones extraordinarias a las que puede verse expuesta durante su vida útil. En un análisis lineal tradicional, ante la eventual aparición de cargas extraordinarias, y con el propósito de proteger a la estructura, lo que se hace es sobre-dimensionarla esperando que, cuando se produzcan dichas cargas, la estructura sea capaz de soportarlas adecuadamente. Dicho sobre-dimensionamiento se establece a través de la utilización de unos factores —un tanto arbitrarios— de mayoración de cargas y/o minoración de la resistencia de las propiedades de los materiales que permiten proceder luego con un diseño lineal convencional. Evidentemente, los coeficientes de mayoración de cargas y/o minoración de los materiales serán tanto mayores cuanto menor sea el conocimiento del comportamiento estructural en el corto periodo de tiempo en el que se tenga alguna carga extraordinaria (sismo, avalancha, etc.), redundando directamente en el incremento del coste de la estructura. Nótese, además, que la mayoración de las cargas convencionales (presión del agua, gravedad, etc.) y/o minoración de la resistencia de los materiales no resuelve el problema fundamental que es el del desconocimiento del comportamiento estructural durante la presencia de una carga extraordinaria, por lo que, de esta forma seguiremos desconociendo el verdadero nivel de seguridad de la estructura.

Consecuentemente, es indispensable analizar certeramente el comportamiento estructural de una presa bajo la acción de cargas lo suficientemente grandes como para producir el colapso. De esta forma podremos evaluar y conocer el verdadero nivel de seguridad de la estructura y, a la vez, mejorar su diseño para disminuir su coste o, al mismo coste, aumentar su seguridad. Ello nos conduce a plantear la necesidad de disponer de una herramienta capaz de predecir adecuadamente los niveles de carga y deterioro de la estructura justo antes del colapso, lo que hace necesario poder llevar el análisis hasta instantes de tiempo muy próximos al mismo. Indudablemente el colapso puede estar precedido de una gran fisuración y deterioro de la estructura que, ciertamente, modificará su comportamiento. De esta forma, se hace indispensable un modelo que pueda tener en cuenta el comportamiento no-lineal (alteración de la rigidez) de la estructura.

A este respecto, una conclusión del presente estudio es que, en un problema no-lineal acoplado de interacción fluido-presa, no son posibles hipótesis simplificativas que permitan utilizar un modelo lineal evitando el costo computacional asociado a la consideración de la no-linealidad

del material y la interacción con el fluido. Así, nos encontramos en la necesidad de incrementar el coste computacional para poder mejorar nuestro conocimiento del nivel de seguridad de una estructura. Todo ello lleva a concluir que, en un análisis de seguridad, es estrictamente necesario disponer de un modelo de análisis capaz de tener en cuenta los diversos factores de comportamiento no-lineal de la estructura. Más aún, ante excitaciones sísmicas se concluye que no es suficiente hacer un solo análisis con una señal artificial dada, sino que por el contrario, es imprescindible hacer varios análisis para distintas señales con diferentes intensidades.

### 3.2 Sobre la definición del deterioro

En este trabajo se ha hecho una introducción al concepto de seguridad asociado al deterioro de una estructura, ahondando en la relación intuitiva que existe entre "seguridad" versus "deterioro". Con este propósito se ha definido el grado de deterioro de una estructura como una medida de su nivel de "daño global" en cada instante de tiempo, como una cantidad escalar calculada a partir de los daños locales de cada punto de la estructura, proponiéndose dos alternativas posibles ( $D_1$  y  $D_2$ ) para su evaluación. La primera alternativa propuesta,  $D_1$ , expresa el daño medio sobre toda la estructura y constituye la forma más simple de expresar una medida del daño global alcanzado. Por su parte, la segunda alternativa,  $D_2$ , pondera los mayores valores de daño, por lo que tiene en cuenta, de alguna forma, el efecto que puede producir la localización. Si bien ambas alternativas se han formulado en función de la variable de daño, propia de la ecuación constitutiva propuesta en este trabajo, con relativa facilidad podrían ser generalizadas a otros modelos constitutivos ampliamente utilizados, tales como los de plasticidad o fractura. Las dos expresiones alternativas propuestas para calcular dicho deterioro son, de alguna forma, casos particulares de una expresión general que también se menciona. Inmediatamente surgen infinitas alternativas posibles. Aquí no se ha hecho un estudio especial dedicado a establecer las ventajas y desventajas de cada una de ellas ni se plantean restricciones adicionales a las expresadas en el Capítulo VI. La discusión sobre éstas u otras posibles expresiones alternativas se dejan abiertas como una línea futura de desarrollo.

### 3.3 Sobre la definición de colapso

La seguridad de una estructura es, de alguna forma, una medida de la "distancia" que separa el funcionamiento normal de la misma de las condiciones que producen el colapso. Por ello, la definición precisa de lo que constituye el colapso de una estructura es determinante para poder hacer análisis de seguridad de estructuras. En el Capítulo VI se definen dos tipos de colapso denominados "colapso estático" y "colapso dinámico", y además

se discuten los procedimientos numéricos utilizados para detectarlos. Por su parte, en el Capítulo VII se han distinguido tres situaciones diferentes de colapso denominadas como: antes, durante y después de una situación extraordinaria (terremoto).

En referencia a los análisis lineales tradicionales se puede indicar que en ellos normalmente se considera que la estructura ha colapsado cuando en algún punto se alcanza una tensión extraordinaria. Desde un punto de vista más general, esta condición se puede asociar a un concepto de colapso local que quizás es suficiente a la hora de diseñar una estructura. Sin embargo, un análisis de seguridad exige un conocimiento del estado tenso-deformacional de la estructura más allá del umbral de colapso local que, como se ha puesto de manifiesto, puede estar muy distante del colapso global de la estructura. Todo ello ha conducido a la necesidad de definir claramente lo que se entiende por colapso global de la estructura tal y como se ha hecho en este trabajo.

En resumen, este trabajo constituye una primera incursión en un ámbito, el análisis de seguridad de presas de hormigón ante acciones dinámicas que, por distintas circunstancias, ha sido escasamente abordado por la comunidad científica y técnica en la profundidad en que aquí se ha hecho (considerando la no-linealidad del material y el colapso global de la estructura). Tanto el modelo numérico como la metodología desarrollada constituyen un primer paso de una línea de investigación que, a buen seguro, conducirá en el futuro próximo a un mejor conocimiento del estado de seguridad de las presas de hormigón.



## REFERENCIAS

- [AA] Ayala G.A. and Aranda G.R., "Boundary Conditions in Soil Amplification Studies", *Proceedings of 6th World Conference on Earthquake Engineering*, Vol. 6, New Dehli, India, 1977.
- [Ab] Abdel Rahman H.H., "Computational Models for the Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Flexural Slab Systems", Ph.D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, C/Ph/66/82., 1982.
- [AC] ASCE Committee on Concrete and Masonry Structures, "State-of-the-art Report on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete", Task Committee on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures, ASCE Special Publication, 1982.
- [ACI1] A.C.I. Committee 209/II (chaired by Branson D.E.), "Prediction of Creep, Shrinkage and Temperature Effects in Concrete Structures", ACI-SP27, Designing for Effects of Creep, Shinkage and Temperature, Detroit, pp. 51-93, 1971.
- [ACI2] A.C.I. Committee 209/II (chaired by Carreire D.), Revised Edition of Ref. 3, 1978.
- [APSW] Argyris J.H., Pister K.S., Szimmat J. y Willam K.J., "Unified Concepts of Constitutive Modelling and Numerical Solution Methods for Concrete Creep Problems", *Comp. Meth. App. Mech. Engn.*, Vol. 10, pp. 199-246, 1977.
- [ArP] Arias A. y Petit-Laurent L., "Un Modelo Teórico para los Acelerogramas de Temblores Fuertes", Revista del I.D.I.E.M., Universidad de Chile, Chile, 4, N°1, pp. 29-60, Mayo, 1965.
- [ArS] Armero F. and Simó J.C., "A New Unconditionally Stable Fractional Step Method for Non-linear Coupled Thermo-Mechanical Problems", To be published in *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1993.
- [Ba] Bathe K.J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [BaH] Bathe K.J. and Hahn W.F., "On Transient Analysis of Fluid Structure Systems", *Comp. Struct.*, N°10, pp. 383-391, 1979.

- [BaK] Bazant Z. and Kim S., "Plastic Fracture Theory for Concrete", *Journal Engineering Mechanics Division*, Vol. 105, N°EM3, pp. 407–428, ASCE, 1979.
- [BaW] Bazant Z.P., y Wu S.T., "Rate-type Creep Law for Aging Concrete Based on Maxwell Chain", *RILEM Materials and Structures*, Vol. 7, pp. 45–60, 1974.
- [Be] Bendat J.S., "Principles and Applications of Random Noise Theory", John Wiley, N.Y., 1958.
- [Be1] Bettess P., "Infinite Elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, pp. 53–64, 1977.
- [Be2] Bettess P., "More on Infinite Elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, pp. 1613–1626, 1980.
- [BEC] Bettess P., Emson C. and Chian T.C., "A New Mapped Infinite Element for Exterior Wave Problems", *Numerical Methods in Coupled Systems*, Chapter 17, Ed. John Wiley & Sons Ltd., 1984.
- [BeH] Belytschko T. and Hughes T.J.R. (Eds.), "Computational Methods for Transient Analysis", North Holland, Amsterdam, 1983.
- [Bel] Belytschko T., "Fluid-Structure Interaction", *Computers and Structure*, N°12, pp. 459–470, 1980.
- [BeM] Beer G. and Meek J.L., "Infinite Domain Elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, pp. 43–52, 1981.
- [BeM1] Belytschko T. and Mullen R., "Mesh Partitions of Explicit-Implicit Time Integration", Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis, Ed. Bathe K.J., Oden J.T. and Wunderlich W., MIT Press, Cambridge, Mass., pp. 673–690, 1976.
- [BeM2] Belytschko T. and Mullen R., "Stability of Explicit-Implicit Mesh Partitions in Time Integration", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, pp. 1575–1586, 1978.
- [BFE] Belytschko T., Fish J. and Engelmann E., "A Finite Element with Embedded Localization Zones", *Computational Methods in Applied Mechanics for Engineering*, Vol. 70, pp. 59–89, 1988.
- [BGB] Bogdanoff J.L., Golberg J.E. y Bernard M.C., "Responce of a Simple Structure to a Random Earthquake-Type Disturbance", Bull Seismological Society of America, 51, N°2, pp. 293–310, April, 1961.

- [BH] BGerg G.V. and Housner G.W., "Integrated Velocity and Displacement of Strong Earthquake Ground Motion", Bull. Seismological Society of America, 51, N°2, pp. 175-189, April, 1961.
- [Bi] Bicanic N., "Nonlinear Finite Element Transient Response of Concrete Structures", Ph. D. Thesis, Wales, University College of Swansea, C/Ph/50/78, October, 1978.
- [BIM] Bicanic N. y Mang H., Eds., *Proceedings of 2<sup>nd</sup> International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Pineridge Press, Swansea, 1990.
- [Bla] Blas J.R. de, "Analysis of Anomalies in the Behaviour of an Arch Dam Under Concrete Expansion", International Commission on large dams, ICOLD, Symposium on Analytical Evaluation of Dam Related Safety Problems, Copenhagen, 1989.
- [Bo1] Borst R. de, "Computational Aspects of Smeared Crack Analysis", Computational Modelling of Reinforced concrete Structures, Ed. Hinton E. and Owen R., Pineridge Press, 1986.
- [Bo2] Borst R. de, "Smeared Cracking, Plasticity, Creep and Thermal Loading-a Unified Approach", *Computational Methods in Applied Mechanics for Engineering*, Vol. 69, pp. 89-110, 1987.
- [Bo3] Borst R. de, "Non linear Analysis of Frictional Materials", Ph. D. Thesis, Delft, The Netherlands, 1986.
- [BOG] Barbat A., Oruzco L. y Galindo M., "Definición Numérica de la Acción Sísmica", Monografía CIMNE aceptada para ser publicada, Barcelona, 1993.
- [BPP] Bazant Z.P., Pijaudier-Cabot G. and Prat P.C., "Distributed Damage and Application of Nonlocal and Microplane Concepts", Northwestern University, Evanston, Illinois 60201, 1988.
- [Br] Broyden C.G., "A New Double-Rank Minimization Algorithm", *Notices Numer. Math. Soc.*, Vol. 16, pp. 670, 1969.
- [Bu] Bugeda G., "Utilización de Técnicas de Estimación de Error y Generación Automática de Mallas en Procesos de Optimización Estructural", Tesis Doctoral, E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, Marzo, 1990.
- [BuS] Buyukozturk O. and Shareef S.S., "Constitutive Modelling of Concrete in Finite Element Analysis", *Computers and Structures*, Vol. 21, pp. 581-610, 1985.

- [BYM] Belytschko T., Yen H.J. and Mullen R., "Mixed Methods for Time Integration", *Computational Methods in Applied Mechanics for Engineering*, N°17/18, pp. 259-275, 1979.
- [BZ] Bettess P. and Zienkiewicz O.C., "Diffraction and Refraction of Surface Waves Using Finite and Infinite Elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, pp. 1271-1290, 1977.
- [CA] Carol I. y Alonso E., "A New Joint Element for The Analysis of Fractured Rock", *Int. Cong. Rock Mech.*, Melbourne, Australia, 1983.
- [Ca] Castellani A., "Boundary Conditions to Simulate and Infinite Space", *Meccanica*, AIMETA, Vol. 9-4, 1974.
- [CaB] Canet J.M. y Barbat A.H., "Estructuras Sometidas a Acciones Sísmicas. Cálculo por Ordenador.", Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, España, 1988.
- [CAN] Carol I., Alonso E. y Nuchart A., "Modelos Isoparamétricos de Juntas en Macizos Rocosos", *Proceedings I Simposio Nacional sobre Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería*, Barcelona, 1982.
- [CaS] Caughey T.K. and Stimpf H.J., "Transient Responce of a Dynamic System Under Random Excitation", *Journal of Applied Mechanics*, pp. 563-566, 1961.
- [CBBO] Canet M., Botello S., Buil J. y Oñate E., "La Presa Bóveda de Talvacchia. Análisis Estático y Dinámico", Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Monografía CIMNE N°6, Barcelona, España, 1991.
- [CBH] CBH-87, "Norma Boliviana del Hormigón Armado", Ministerio de Urbanismo y Vivienda, Neografis S.L. Madrid, 1988.
- [CD] CRACKING and DAMAGE, Strain Localization and Side Effect, *Proceedings of France-US Workshop*, Ed. Mazars J. and Bazant Z.P., Elsevier Applied Science, Cachan, France, September, 1989.
- [CDDR] Committee on Deterioration of Dams and Reservoirs, "Deterioration Cases Collected and their Preliminary Assessment", ICOLD, 1979.
- [Ce] Cervera M., "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Structures using Three Dimensional and Shell Finite Element Models", Ph. D. Thesis, C/Ph/93/86, University College of Swansea, 1986.
- [CEB1] CEB-FIP, "Internationals Recommendations for the Analysis and Constructions of Concrete Structures", 2nd Ed., Cement and Concrete Association, London, 1970.

- [CEB2] CEB-FIP, "Model Code for Concrete Structures, Comité Eurointernational du Béton-Fédération Internationale de la Précontrainte", C.E.B. Bull., N°124-125-F (Master Copy) and N°124-125-E (English translation), Paris, 1978.
- [CEB3] CEB Comité Euro-International du Béton, "CEB Design Manual on Structural Effects of Time-Dependent Behaviour of Concrete" (Editorial Team: Chiorino M.A., Napoli P., Mola F. and Koprna M.), Georgi Publishing Company, Switzerland, 1984.
- [CGO] Cervera M., Galindo M. and Oliver J., "Towards Seismic Safety Evaluation of Concrete Dams Including Dam-Soil-Fluid Interaction", to be presented at International Workshop on Dam Safety Evaluation, Sponsored by Dam Engineering, Grindelwald, Switzerland, 26-28 April, 1993.
- [Ch1] Chaboche J.L., "Une loi Différentielle D'endommagement de Fatigue Avec Cumulation Non Linéaire", *Rev. Fr. Mec.*, N°50-51, 1974.
- [Ch2] Chaboche J.L., "Continuum Damage Mechanics: Part I, General Concepts", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55 pp. 59-64, 1988.
- [Ch3] Chaboche J.L., "Continuum Damage Mechanics: Part II, Damage Growth, Crack Initiation, and Crack Growth", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, pp. 65-72, 1988.
- [Ch4] Chaboche J.L., "Continuous Damage Mechanics- A Tool to Describe Phenomena Before Crak Initiation", *Nucl. Engng. Des.*, 64, pp. 233-247, 1981.
- [Ch5] Chaboche J.L., "Le Concept de Contrainte Effective Appliquée et à la Viscoplasticité en Présence d'un Endommagement Anisotropie", *Mechanical Behaviour of Anisotropic Solids, Proceedings of EUROMECH Colloque 115*, Junio 1980, (Edited by Boehler J.P.), pp. 737-760, Martinus Nijhoff, Holanda, 1982.
- [Ch6] Chaboche J.L., "Description Thermodynamique et Phénoménologique de la Visco-Plasticité Cyclique avec Endommagement", Thèse O.N.E.R.A. et Université Paris 6, 1978.
- [Cha] Chan A.H.C., "A Unified Finite Element Solution to Static and Dynamic Problems of Geomechanics", Ph. D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1988.
- [CHH] Cervera M., Hinton E. and Hassan O., "Nonlinear analysis of Reinforced Concrete Plate and Shell Structures using 20-noded Isoparametric Brick Elements", *Computers and Structures*, Vol. 25, pp. 845-869, 1987.

- [ChS] Chen F. and Saleeb A.F., "Constitutive Equations for Engineering Materials", Wiley, New York, 1982.
- [ChT] Chen F. and Ting E., "Constitutive Models for Concrete Structures", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 106, N°EM1, pp. 1-18, ASCE, 1980.
- [CIN] Clough R.W. and Niwa A., "Shaking Table Research on Concrete Dam Model", EERC-80/05, University of California, Berkely, September, 1980.
- [ClP] Clough R.W. and Penzien J., "Dynamics of Structures", McGraw Hill, 1975.
- [CMC] Castellani A., Mitsopoulos E. and Chesi C., "An Earthquake Engineering Wave Propagation Model", Meccanica, AIMETA, Vol. 16-1, 1974.
- [Co] Cook R.D., "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", 2nd Edn., Wiley, Chichester, 1981.
- [Cod] Codina R., "A Finite Element Model For Incompressible Flow Problems", U.P.C., Doctoral Thesis, Barcelona, June, 1992.
- [COG1] Cervera M., Oliver J., y Galindo M., "Simulación Numérica de Patologías en Presas de Hormigón", Monografía CIMNE N°4, Barcelona, Junio, 1991.
- [COG2] Cervera M., Oliver J., and Galindo M., "Numerical Analysis of Dams with Extensive Cracking Resulting from Concrete Hydration: simulation of a real case", *Dam Engineering*, Vol. 3, Issue 1, 1992.
- [COOG] Cervera M., Oliver J., Oller S. and Galindo M., "Pathological Behaviour of Large Concrete Dams Analysed via Smeared Models", II Int. Conf. on Computer aided Analysis and Design of Concrete Structures, Zell Am See (Austria), 1990.
- [CoS1] Cordebois J.P. y Sidoroff F., "Endommagement Anisotropie en Élasticité et Plasticité", *J. Méc. Théor. App.*, N°Spécial, 1982.
- [CoS2] Cordebois J.P. y Sidoroff F., "Damage Induced Anisotropy", *Mechanical Behaviour of Anisotropic Solids, Proceedings of EUROMECH Colloque 115*, Junio 1979, (Edited by Boehler J.P.), pp. 761-771, Martinus Nijhoff, Holanda, 1982.
- [Cr] Creus G.J., "Viscoplasticity-Basic Theory and Applications to Concrete Structures", Springer Verlag, 1985.
- [Cr1] Crisfield M.A., "Accelerating and Damping the Modified Newton-Raphson Method", *Comp. Struct.*, Vol. 18, pp. 395-407, 1984.

- [Cr2] Crisfield M.A., "A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles 'Snap-through'", Symposium on Computational Mechanics in Non-linear Structures and Solid Mechanics, Washington, October, 1980.
- [Cr3] Crisfield M.A., "Incremental/Iterative Procedures for Nonlinear Structural Analysis", International Conference on Numerical Methods for Non-linear Problems, (C. Taylor et al., eds.), Pineridge Press, Swansea, 1980.
- [Cra1] Crandall S.H., editor, "Random Vibration", Technology Press, Cambridge, Mass., 1958.
- [Cra2] Crandall S.H., "First Crossing Probabilities of the Linear Oscillator", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 12, pp. 285-300, 1970.
- [CrM] Crandall S.H. and Mark W., "Random Vibration in Mechanical Systems", Academic Press, 1963.
- [CrW] Crisfield M.A. and Wills J., "Solution Strategies and Softening Materials", *Computational Methods in Applied Mechanics for Engineering*, Vol. 66, pp. 267-289, 1988.
- [CVC] Corotis R., Vanmarke E.H. and Cornell C.A., "First Passage of Non-stationary Random Processes", *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 98, N°EM2, pp. 401-414, 1972.
- [Cz] Czernin W., "La Química del Cemento", Ed. Palestra, 1963.
- [Dar] Davenport W.B. Jr. and Root W.L., "An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise", Mc Graw-Hill Book Co., N.Y., 1958.
- [DHOB] Damjanic F., Hinton F., Owen D.R.J., Bicanic N. and Simovic V., *Proceedings of the International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Pineridge Press, Swansea, 1984.
- [DoM] Dominguez J. and Maeso O., "Model for Seismic Analysis of Arch Dams Including Interaction Effects", *Proceedings of 10th World Conference on Earthquake Engineering*, Vol. 8, pp. 4601-4606, Madrid Spain, July, 1992.
- [Dr] Dragon A., "Plasticity and Ductile Fracture Damage: Study of Void Growth in Metals", *Engng. Fract. Mecha.*, Vol. 21(4), pp. 875-885, 1985.
- [DrC] Dragon A. and Chihab A., "On Finite Damage: Ductile Fracture-Damage Evolution", *Mech. Mater.*, Vol. 4, pp. 95-106, 1985.
- [Du] Dungar R., "Bounded Safety Evaluation and its Application for Seismic Loading of Arch Dams", *Dam Engineering*, Vol. II, Issue 2, 1991.

- [EFM] Engineering Fracture Mechanics, Vol. 35 N°1/2/3, 1990, Números especiales dedicados a International Conference on Fracture and Damage of Concrete and Rock, Viena, 1988.
- [EH] EH-88., "Instrucción para el Proyecto y la Ejecución de Obras de Hormigón en Masa o Armado", Ministerio de Obras Públicas, 1988.
- [Fa] Fanelli M., "The Safety Factor of Dams - An Abstract Concept or a Measurable Quantity?", Dam Engineering, Vol. II, Issue 2, 1991.
- [FaS] Fan B.H. and Sled J.J., "Seismic Evaluation of Gravity Dams - Practical Aspects", Proceedings of 10th World Conference on Earthquake Engineering, Vol. 8, pp. 4645-4650, Madrid Spain, July, 1992.
- [Fe] Fernandez Cánovas M., "Entumecimiento Higrométrico del Hormigón", Materiales de Construcción I.E.T.C.C., Nº177, Madrid, 1980.
- [FeC1] Fenbes G. and Chopra A.K., "Earthquake Analysis and Response of Concrete Gravity Dams", Report N°UCB/EERC-84/10, University of California, Berkeley, 1984.
- [FeC2] Fenbes G. and Chopra A.K., "Simplified Analysis for Earthquake Resistant Design of Concrete Gravity Dams", Report N°UCB/EERC-85/10, University of California, Berkeley, 1986.
- [FeG] Felippa C.A. and Geers T.L., "Partitioned Analysis for Coupled Mechanical Systems", Eng. Comput., Vol. 5, June, 1988.
- [FEK] Fujii T., Egawa K. and Katayama I., "Dynamic behavior of Nagawado Arch Dam in the Event of 1984 Naganoken Seibu Earthquake", Earthquake Spectra, Vol. 3, Nº2, 1987.
- [FeP] Felippa C.A. and Park K.C., "Staggered Transient Analysis Procedures for Coupled Mechanics Systems; Formulation", Computational Methods in Applied Mechanics for Engineering, 24, pp. 61-111, 1980.
- [FGB] Feltrin G., Galli M. and Bachmann H., "Influence of Cracking on the Earthquake Response of Concrete Gravity Dams with Reservoir", Proceedings of 10th World Conference on Earthquake Engineering, Vol. 8, pp. 4627-4632, Madrid Spain, July, 1992.
- [Fl] Fletcher R., "A New Approach to Variable Metric Algorithm", Computer Journal, Vol. 13, pp. 317-322, 1970.
- [Fr] Francois D., "Fracture and Damage Mechanics of Concrete", Applications of Fracture Mechanics to Cementitious Composites, NATO Advanced Research Workshop, Northwestern University (Edited by S.P. Shah), pp. 97-110, 4-7 Septiembre, 1984.

- [Ga] Galindo, M., "Una metodología para el análisis numérico del comportamiento resistente no lineal de presas de hormigón con cargas estáticas y dinámicas", Tesis Doctoral, E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, Febrero, 1993.
- [GaV] Gasparini D.A. and Vanmarke E.H., "Simulated Earthquake Motions Compatible with Prescribed Response Spectra", Publication N°R76-4, Order N°527, M.I.T. Department of Civil Engineering Research, Cambridge, Massachusetts, 1976.
- [GBS] Goldberg J.E., Bogdanoff J.L. y Sharpe D.R., "The Response of Simple Nonlinear Systems to a Random Disturbance of the Earthquake Type", Bull Seismological Society of America, 54, N°1, pp. 263—276, February, 1964.
- [GCO1] Galindo M., Cervera M. and Oliver J., "Efficient Solution Schemes for Fluid-Structure-Soil Interaction Problems", Proceedings of 10th World Conference on Earthquake Engineering, Vol. 8, pp. 4651—4656, Madrid Spain, July, 1992.
- [GCO2] Galindo M., Cervera M. and Oliver J., "Parallel Synchronized Communication", Proceedings of International Congress on Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences, Concepción Chile, September, 1992.
- [Go] Goldfarb D., "A Family of Variable-Metric Methods Derived by Variational Means", *Math. Comp.*, Vol. 24, pp. 23—26, 1970.
- [Gr] Gregory F., "Non-linear Dynamic Analysis of Fluid-Structure Systems", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 114, N°2, February, 1988.
- [GS] Goodman R.E. y St. John C., "Finite Element Analysis for Discontinuous Rocks", *Numerical Methods Geotec. Engng.*, McGraw Hill, New York, 1977.
- [GSK] Galindo M., Suarez B. y Kreiner R., "Análisis no-lineal de Elementos de Hormigón Pretensado Considerando la Fisuración y el Entumecimiento", Proceedings of International Congress on Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences, Concepción Chile, Septiembre, 1992.
- [Gu] Guerreiro M., "Consideraciones Prácticas Sobre el Frecuente Comportamiento Expansivo del Hormigón de Presas", *Revista de Obras Públicas*, 1985.
- [Ha] Hammitt F.G., "Cavitation and Multiphase Flow Phenomena", McGraw-Hill, 1980.

- [Ham] Hammond S.K., "On the Response of Single and Multi Degree of Freedom Systems to Nonstationary Random Excitations", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 7, pp. 393–416, 1968.
- [Han] Hansen W.C., "Studies Relating to the Mechanism by which the Alcaly-Aggregate Reaction Produces Expansion on Concrete", *Proceedings of ACI*, Vol. 40, USA, 1944.
- [Ho] Houser G.W., "Behaviour of Structures During Earthquakes", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 85, N°EM4, pp. 109–129, paper N°2220, October, 1959.
- [HoJ] Houser G.W. and Jennings P.C., "Generation of Artificial Earthquakes", ASCE, N°90EM1, pp. 113–150, 1964.
- [HOV] Hamdi M.A., Ousset Y. and Verchery G., "A Displacement Method for Analysis of Vibrations of Coupled Fluid-Structure Systems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 13(1), pp. 139–150, 1978.
- [HS] Hirsch M.W. and Smale S., "Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra", New York, Academic Press., cop., 1974.
- [Hu] Hult J., "Creep in continua and structures", *Topics in Applied Continuum Mechanics*, Springer, Vienna, 1974.
- [HuC] Humar J.L. and Chandrashaker R., "Treatment of Interaction Effects in the Seismic Response of Gravity Dams", *Proceedings of 10th World Conference on Earthquake Engineering*, Vol. 8, pp. 4657–4662, Madrid Spain, July, 1992.
- [Hue] Huerta A., "Una Formulación Arbitrariamente Lagrangiana-Euleriana para Grandes Desplazamientos del Contorno", Publicaciones de Investigación, CIMNE, Barcelona, Noviembre, 1988.
- [Hug] Hughes T.J.R., "The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis", Prentice-Hall International, Inc., New Jersey, 1978.
- [HuL1] Hughes T.J.R. and Liu W.K., "Implicit-Explicit Finite Elements in Transient Analysis: Stability Theory", *Journal of Applied Mechanics*, N°45, pp. 371-374, 1978.
- [HuL2] Hughes T.J.R. and Liu W.K., "Implicit-Explicit Finite Elements in Transient Analysis: Implementation and Numerical Examples", *Journal of Applied Mechanics*, N°45, pp. 375-378, 1980.

- [IB] IBERDUERO S.A., "Informe Final del Proyecto PIE: Evaluación del Estudio y Características de los Hormigones en Presas en Explotación", 1989.
- [IC] ICOLD, "Methods of determining effects of Shrinkage, Creep and Temperature on Concrete for large dams", Bulletin 26, 1976.
- [IsB] Issacson E. and Keller H.B., "Analysis of Numerical Method", Wiley, New York, 1966.
- [ISM] ISMES, "First Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams", Bergamo, Italy, May 28-29, 1991.
- [JaH] Janson J. and Hult J., "Fracture mechanics and damage mechanics: a combined approach", Journal Méc. Appl., Vol. 1(1), pp. 69-84, 1977.
- [JE] Johnson G.R. and Epstein H.I., "Short duration analytic earthquake", Journal A.S.C.E., Str. Div., Vol. 102, N°ST5, pp. 993-1000, May, 1976.
- [Jo] Jones A.V., "Coolant Cavitation in Dynamic Containment Loading", Nuclear Engineering and Design, N°55, pp. 197-206, 1979.
- [Ka1] Kachanov L.M., "Continuum Model of Medium with Cracks", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 106, N°EM5, pp. 1039-1051, 1980.
- [Ka2] Kachanov L.M., "Time of the rupture process under creep conditions", IVZ Akad Nauk, (S.S.R. Otd Tech. Nauk), N°8, pp. 26-31, 1958.
- [KaK] Kanai K., "An Empirical Formula for the Spectrum of Strong Earthquake Motions", Bull. Earthquake Research Institute, U. of Tokyo, Vol. 39, pp. 85-95, Tokyo, Japan, 1961.
- [Ke] Kennard E.H., "Cavitation in an elastic liquid", The Physical Review N°65, 5 and 6, pp. 172-181, 1943.
- [KHR] Kupfer H.B., Hilsdorf H. and Rush H., "Behaviour of concrete under biaxial stresses", Proceedings of ACI, Vol. 66, N°8, 1969.
- [Kr] Krajcinovic D., "Constitutive Equations for Damaging Material", ASME, Journal Appl. Mech., Vol. 50, pp. 355-360, 1983.
- [KrB] Kreuzer H. and Bury K., "Safety Assessment of Concrete Dams: Safety Factor versus Reliability Index", Dam Engineering, Vol. II, Issue 2, 1991.
- [KrF] Krajcinovic D. and Fonseka G.U., "The Continuous Damage Theory of Brittle Materials", Part I and II, ASME, Journal Appl. Mech., Vol. 48, pp. 809-824, 1981.

- [Ku] Kumar P., "Static Infinite Element Formulation", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 111, N°11, November, 1985.
- [KuG] Kupfer H.B. and Gerstle K.H., "Behaviour of Concrete under Biaxial Stress", *Journal Engineering Mechanics Division*, Vol. 99, pp. 852–866, ASCE, 1973.
- [LC1] Lemaitre J. and Chaboche J.L., "A Nonlinear Model of Creep-Fatigue Damage Cumulation and Interaction", *Proceedings IUTAM Symposium of Mechanics of Visco-elastic Media and Bodies*, Springer, Gothenburg, 1974.
- [LC2] Lemaitre J. and Chaboche J.L., "Aspects Phénoménologiques de la Rupture par Endommagement", *Journal Méc. Appl.*, Vol. 2(3), pp. 317–365, 1978.
- [Le1] Lemaitre J., "Evaluation of Dissipation and Damage in Metals" *Proceedings of I.C.M.*, Kyoto-Japan Vol. 1, 1971.
- [Le2] Lemaitre J., "A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture", *Journal Engng. Mater. Tech.*, Vol. 107, pp. 83–89, 1985.
- [Le3] Lemaitre J., "How to use Damage Mechanics, Nuclear Engineering and Design", N°80, pp. 233–245, Elsevier Science Publishers B. V., 1984.
- [Lea] Lea F.M., "The Chemistry of Cement and Concrete", Ed. Arnold Ltd., Londres, 1970.
- [LeD] Lemaitre J. y Dufailly J., "Modélisation et Identification D'endommagement Plastique des Métaux", 3ème Congrès Français de Mécanique, Grenoble, 1977.
- [Led] Ledesma A., "Identificación de Parámetros en Geotecnia. Aplicación a la Excavación de Túneles", Tesis Doctoral, U.P.C. ETSECCPB, Barcelona, Febrero, 1987.
- [LeH] Leckie F. and Hayhurst D., "Creep Rupture of Structures", *Proceedings of R. Soc.*, London, A240, 323, 1974.
- [LeP] Lemaitre J. and Plumtree A., "Application of Damage Concepts to Predict Creep-Fatigue Failures", *J. Engng. Mater. Tech. Trans.*, ASME, Vol. 101, pp. 284–292, 1979.
- [LH] Lynn P.P. and Hadid H.A., "Infinite Elements with  $1/r^n$  Type Decay", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, pp. 347–355, 1981.
- [Li] Lin Y.K., "Probabilistic Theory of Structural Dynamics", Mc Graw-Hill Book Co., 1967.

- [LK] Lysmer J. and Kuhlmeier R.L., "Finite Dynamic Model for Infinite Media", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 95, N°EM4, pp. 859-877, 1969.
- [LL] Landau L.D. y Lifshitz E.M., "Mecánica de Fluidos", Vol. 6 del *Curso de Física teórica*, Academia de Ciencias U.R.S.S., Versión española: Aguilar P.J., Editorial Reverté S.A., Barcelona, 1986.
- [Lo] Loland K.E., "Continuous Damage Model for Load-Response Estimation of Concrete", *Cem. Concr. Res.*, Vol. 10, pp. 395-402, 1980.
- [LoL] Lorrain M. and Loland K.E., "Damage Theory Applied to Concrete", *Fracture Mechanics of Concrete*, (Edited by F.H. Wittmann), pp. 341-369, Elsevier, Amsterdam, 1983.
- [Lom] Lomnitz C., "Global Tectonics and Earthquake Risk", Elsvier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1974.
- [LOOO] Lubliner J., Oliver J., Oller S. and Oñate E., "A Plastic-Damage Model for Concrete", *International Journal Solids Structures*, Vol. 25, pp. 299-326, 1989.
- [Lu1] Lubliner J., "On the Thermodynamic Foundations of Non-Linear Solid Mechanics", *International Journal Non-Linear Mechanics*, Vol. 7, pp. 237-254, 1972.
- [Lu2] Lubliner J., "Thermomechanics of Deformable Bodies", Edited by Department of Civil Engineering University of California, Berkeley, USA, 1985.
- [Ma] Marques J.J.M., "Finite and Infinite Elements in Static and Dynamic Analysis", Ph. D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, C/Ph/78/84, 1984.
- [MaL] Mazars J. and Lemaitre J., "Application of Continuous Damage Mechanics to Strain and Fracture Behaviour of Concrete", *Applications of Fracture Mechanics to Cementitious Composites*, NATO Advances Research Workshop, Northwestern University (Edited by S.P. Shab), pp. 375-388, 4-7 de Septiembre, 1984.
- [Mal] Malvern L.E., "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium", Prentice Hall, USA, 1969.
- [Mar] Marigo J.J., "Modeling of Brittle and Fatigue Damage for Elastic Material by Growth of Microvoids", *Engng Frac. Mech.*, Vol. 21(4), pp. 861-874, 1985.
- [Maz] Mazars J., "Mechanical Damage and Fracture of Concrete Structures", *Advances in Fracture Research (Fracture 81)*, Vol. 4, pp. 1499-1506, Pergamon Press, Oxford, 1982.

- [Meh] Mehta P.K., "History and Status of Performance Tests for Evaluation of Soundness of Cements", *Cement Standards-Evolution and Trends*, pp. 35–60, 1978.
- [Mo] Mosquera J.C., "Comportamiento Sísmico de Presas Bóveda. Influencia de Algunos Parámetros Geométricos", Tesis Doctoral, E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, Mayo, 1993.
- [Mu] Murakami S., "Effects of Cavity Distribution in Constitutive Equation of Creep and Creep Damage", EUROMECH, Colloque on Damage Mechanics, Cachan, Francia, 1981.
- [Ne] Newmark N.M., "A Method of Computation for Structural Dynamics", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, pp. 67–94, 1959.
- [NeH] Newmark N.M. and Hall W.J., "Earthquake Spectra and Design", *Monographs Series*, Earthquake Engineering Research Institute, California, USA, 1982.
- [NeR] Newmark N.M. y Rosenblueth E., "Fundamentos de Ingeniería Sísmica", Traducción de "Fundamentals of Earthquake Engineering" (Lepe L.J.), Editorial Diana, Mexico, Julio, 1976.
- [New] Newton R.E., "Finite Element Study of Shock Induced Cavitation", ASCE, Spring Convention, Portland Oregon, April, 1980.
- [NS] Norma Sismo-resistente P.D.S.-1, BOE, N°279/21.11.1974, 1974.
- [OCOL] Oliver J., Cervera M., Oller S. and Lubliner J., "Isotropic Damage Models and Smeared Crack Analysis of Concrete", II Int. Conf. on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Zell Am See (Austria), 1990.
- [OH] Owen D.R.J. and Hinton E., "Finite Elements in Plasticity", Pineridge Press, Swansea, U.K., 1980.
- [Oli] Oliver J., "A Consistent Characteristic Length for Smeared Cracking Models", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 218, pp. 461–474, 1989.
- [Oll] Oller S., "Un Modelo de Daño Continuo para Materiales Friccionales", Tesis Doctoral, E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, 1988.
- [OLN] Ortiz M., Leroy Y. and Needleman A., "A Finite Element Method For Localized Failure Analysis", *Computational Methods in Applied Mechanics for Engineering*, Vol. 61, pp. 189–214, 1987.

- [Oña] Oñate E., "Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. Análisis estático lineal", C.I.M.N.E., Barcelona, 1992.
- [OOO] Oliver J., Oller S. y Oñate E., "Modelos Elasto-Plásticos para la Simulación Numérica de Procesos de Fractura", V Encuentro del Grupo Español de Fractura, Barcelona, 1988.
- [Pa] Paul D.K., "Efficient Dynamic Solutions for Single and Coupled Multiple Field Problems", Ph. D. Thesis, Wales University, Swansea, C/Ph/64/82, January, 1982.
- [PaF1] Park K.C. and Felippa C.A., "Partitioned Transient Analysis Procedures for Coupled Field Problems: Accuracy Analysis", *Journal Appl. Mech.*, 47, pp. 919-26, 1980.
- [PaF2] Park K.C. and Felippa C.A., "Partitioned Analysis of Coupled Systems", *Computational Methods for Transient Analysis*, Vol. 1, Computational Methods in Mechanics, Chapter 3, (Eds. Achenbach J.D., Belytschko T. and Bathe K.J.), pp. 157-219, 1983.
- [Par] Park K.C., "Partitioned Transient Analysis Procedures for Coupled Field Problems: Stability Analysis", *Journal Appl. Mech.*, 47, pp. 370-386, 1980.
- [Pay] Payo G., "Introducción al Análisis de Sismogramas", Instituto Geográfico Nacional, Monografías N°3, Madrid, 1986.
- [Pi] Pike R.G., "Pressures Developed in Cement Pastes and Mortars by Alcaly-Aggregate Reaction", *High Research Board, Bull 171*, USA, 1958.
- [PIE] P.I.E. (Plan de Investigación Electrotécnica), "Análisis y Predicción, Mediante Modelos Numéricos, de Patologías en Presas Producidas por la Expansión del Hormigón", ENHER SA., (Oliver J., Cervera M., Galindo M. y Herrero E.), E.T.S.I.C.C.P.B., Barcelona, 1991.
- [PSE] PSEQGN, Ruiz P. and Penzien J., "Artificial Generation of Earthquake Accelerograms", Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, California, Report N°EERC 69-3, 1969.
- [Ra] Rabotnov J.N., "On the Equations of State for Creep", *Progress in Applied Mechanics-the Prager Anniversary Volume*, pp. 307-315, 1963.
- [Ras] Rascón O.A., "Modelo Estocástico para Simular Registros de Temblores en Terreno Duro", Tesis Doctoral, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, 1968.

- [Re] Resende L. and Martin J.B., "A Progressive Damage Continuum Model for Granular Materials", *Computational Methods in Applied Mechanics for Engineering*, Vol. 42, pp. 1-18, 1984.
- [Ri] Riks E., "An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems", *International Journal of Solids and Structures*, N°15, pp. 529-551, 1979.
- [RNKB] Rots J.G., Nauta P., Kusters G.M. and Blaauwendraad J., "Smeared Crack Approach and Fracture Localization in Concrete", *Heron*, Vol. 30, pp. 3-48, 1985.
- [Ro] Rots J.G., "Computational Modeling of Concrete Fracture", Ph. D. Thesis, Technische University Delft (Netherlands), 1988.
- [Rob] Robson J.D., "An Introduction to Random Vibration", Edinburgh University Press, England, 1963.
- [Sa] Salmonte A.J., "Elementos Fluidos en 2D y 3D para Análisis Dinámico con Interacción Fluido-Estructura", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 4, N°3, pp. 313-347, 1988.
- [SaV] Saetta A.V. and Vitaliani R.V., "Unconditionally Convergent Partitioned Solution Procedure for Dynamic Coupled Mechanical Systems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, pp. 1975-1996, 1992.
- [SBS] Spuy van der D., Barker B.M. and Spuy van der J., "Risk-Based Dam Safety Analysis", *Dam Engineering*, Vol. II, Issue 2, 1991.
- [SBZ] Saini S.S., Bettess P. and Zienkiewicz O.C., "Coupled Hydrodynamic Response Of Concrete Gravity Dams Using Finite and Infinite Elements", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 6, pp. 363-374, 1978.
- [SeG] Serafim J.L. y Guerreiro M., "Expansions Autogéne et Higramétrique du Béton en Grandes Masses", Colloque international sur le retrait des bétons hidrauliques, RILEM, Madrid, 1968.
- [Sh] Shanno D.F., "Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization", *Math. Comput.*, Vol. 24, pp. 647-659, 1970.
- [She] Shen F.Q., "Transmitting Boundary in Seismic Soil-Structure Interaction", Ph.D. Thesis, Swansea, 1987.

- [Si1] Simó J.C. and Ju J.W., "Strain and Stress Based Continuum Damage Models-I. Formulation", *International Journal Solids & Structures*, Vol. 23, pp. 821-840, 1987.
- [Si2] Simó J.C. and Ju J.W., "Strain and Stress Based Continuum Damage Models-II. Computational Aspects", *International Journal Solids & Structures*, Vol. 23, pp. 841-869, 1987.
- [SIM] SIMQKE, Gasparini D., "A Program for Artificial Motion Generation", User's manual and Documentation, Department of Civil Engineering, M.I.T., 1976.
- [SKK] Singh R.K., Kant T. and Kakodkar A., "Efficient Partitioning Schemes for Fluid-Structure Interaction Problems", *Eng. Comput.*, Vol. 7, June, 1990.
- [SS] Shinozuka M. and Sato Y., "Simulation of Nonstationary Random Process", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 93, N°EM1, pp. 11-40, paper N°5105, February, 1967.
- [St] Stanton T.E., "Expansion of Concrete Through Reaction Between Cement and Aggregate", *Proceedings of the A.C.E.*, Vol. 66, USA, 1940.
- [StB] Stoer J. and Bulirsch R., "Introduction to Numerical Analysis", translation of "Einführung in die Numerische Mathematik", Springer Verlag, USA, New York, 1980.
- [Ta1] Tajimi H., "Introduction to Structural Dynamics", Corona-Sha, Tokyo, Japan, 1964.
- [Ta2] Tajimi H., "A Statical Method of Determining the Maximum Response of a Building Structure During an Earthquake", *Proceedings of 2nd World Conference on Earthquake Engineering*, Vol. 2, pp. 781-797, Science Council of Japan, Japan, 1960.
- [TeP] Terzaghi K., Peck R.B., "Mecánica de Suelos en la Ingeniería Práctica", Traducción del inglés, 2da Ed. El Ateneo, Barcelona, 1958.
- [TrN] Truesdell C. and Noll W., "The Non-linear Field Theories of Mechanics", *Encyclopedia of Physics*, Ed. Flügge S., Vol. 3/3, Berlin, Springer Verlag, 1965.
- [UF] UNION FENOSA S.A., "Informe Final del Proyecto PIE sobre las Presas de Salas y Portodemouros", 1987.
- [Va] Vanmarke E.H., "Seismic Risk and Engineering Decisions", Chapter 8, Lomnitz C. and Rosenblueth E. (Editors), Elsevier Publishing Company, 1978.

- [Var] Varga R.S., "Matrix Iterative Analysis", Series in Automatic Computation, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1962.
- [VBF] Vanmarke E.H., Biggs J.M., Frank R., Gasparini D., Gazetas G., Arnold P. and Luyties W., "Comparison of Seismic Analysis Procedures for Elastic Multi-Degree Systems", M.I.T. Department of Civil Engineering Research, Report R76-5, Order N°528, January, 1976.
- [VD] Veronelli y Dante J.E., "Durabilidad de los Hormigones. Reacción Árido-Álcalis", Monografía del I.E.T.C.C., Madrid, 1978.
- [We] Westergaard H.M., "Water Pressure on Dams During Earthquakes", Transactions of the American Society of Civil Engineers, N°98, pp. 418-433, 1933.
- [WG] Wang W.Y.L. and Goel S.C., "Prediction of Maximum Structural Response by using Simplified Accelerograms", paper 6, Vol. 3, Preprints 6th WCEE, New Delhi, 1977.
- [Wi] Wiegel R.L., editor, "Earthquake Engineering", 1970.
- [WiK] Wilson E.L. and Khalvati M., "Finite Elements for the Dynamic Analysis of Fluid-Solid Systems", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 19, N°11, pp. 1657-1668, 1983.
- [Wil] Wilson E.L., "Finite Elements for Fundations, Joints and Fluids", Conference on Numerical Methods in Soil and Rock Mechanics, Karlsruhe University, 1975.
- [Wo1] Wolf J.P., "Dynamic Soil-Structure Interaction", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1985.
- [Wo2] Wolf J.P., "Soil-Structure Interaction Analysis in Time Domain", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.
- [WTSS] Wisniewski K., Turska E., Simoni L. and Schrefler B.A., "Error Analysis of Staggered Predictor-Corrector Scheme for Consolidation of Porous Media", Finite Elements in the 90's, Eds. Oñate E., Periaux J. and Samuelsson A., pp. 192-201, Springer Verlang/CIMNE, Barcelona, 1991.
- [Yo] Young D.M., "Iterative Solution of Large Linear Systems", Computer Science and Applied Mathematics, New York, Academic Press, 1971.
- [ZBBS] Zienkiewicz O.C., Bicanic N., Bettess P. and Shen F.Q., "Transmitting Boundary for Dynamic Computations-a Single or Multistep Implementation of the Generalized Smith Condition in the Finite Element

*Method Context*", Institute for Numerical Methods in Engineering, University College of Swansea, 1986.

- [ZBS1] Zienkiewicz O.C., Bicanic N. and Shen F.Q., "Generalized Smith Boundary-a Transmitting Boundary for Dynamic Computation", Institute for Numerical Methods in Engineering, University College of Swansea, 1985.
- [ZBS2] Zienkiewicz O.C., Bicanic N. and Shen F.Q., "Single Step Averaging Generalized Smith Transmitting Boundary in Computational Dynamics", Department of Civil Engineering, University College of Swansea, 1986.
- [ZBS3] Zienkiewicz O.C., Bicanic N. and Shen F.Q., "Earthquake Input Definitions and the Transmitting Boundary Conditions", Department of Civil Engineering, University College of Swansea, 1987.
- [ZEB] Zienkiewicz O.C., Emson C. and Bettess P., "A Novel Boundary Infinite Element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, pp. 393-404, 1983.
- [Zi] Ziegler H., "An Introduction to Thermomechanics", North-Holland Publishing Company, 1983.
- [ZiB] Zienkiewicz O.C. and Bettess P., "Fluid-Structure Dynamic Interaction and some 'Unified' Approximate Processes", *Proceedings of Fifth International Symposium on Unification of Finite Element, Finite Difference and Calculus of Variables*, University of Connecticut, May 2, 1980.
- [ZiC] Zienkiewicz O.C. and Chan A.H.C., "Coupled Problems and their Numerical Solution in Advances in Computational Non-Linear Mechanics", (ed. I.S. Dotsiris), Chapter 3, pp. 109-76, Springer Verlag, Berlin, 1988.
- [Zie1] Zienkiewicz O.C., "The Finite Element Method", Third edition, MacGraw-Hill, London, 1977.
- [Zie2] Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L., "The Finite Element Method", Fourth Edition, Vol. 1, McGraw-Hill, London, 1989.
- [Zie3] Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L., "The Finite Element Method", Fourth Edition, Vol. 2, McGraw-Hill, London, 1991.
- [ZKB] Zienkiewicz O.C., Kelly D.W. and Bettess P., "The Coupling of the Finite Element Method and Boundary Solution Procedures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, pp. 355-375, 1977.



CENTRO INTERNACIONAL DE METODOS NUMERICOS EN INGENIERIA  
Lista de monografías publicadas en la serie de Ingeniería Sísmica

Las monografías pueden adquirirse dirigiéndose al Departamento de Publicaciones del Centro Internacional de Métodos Numericos en Ingeniería, Edificio C1, Campus Norte UPC, c/ Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, teléfono: 93-401.60.37, Fax: 93-401-65-17.

- IS-1. *Qualitative Reasoning for Earthquake Resistant Buildings,*  
Luis M. Bozzo, 1993.  
IS-2. *Control predictivo en sistemas de protección sísmica de estructuras,*  
R. Andrade Cascante, J. Rodellar, F. López Almasa, 1993.

Los autores interesados en publicar monografías en esta serie deben contactar con el editor para concretar las normas de preparación del texto.

